ANALIZA II

Mariusz Kierski

25 kwietnia 2013

Spis treści

1 Całki Riemanna i Lebesgue'a

1.1 Tw. o wartości średniej

Jeżeli $b > a$, $f : [a; b] -> R$ - ciagła, to istn. $c \in (a; b)$ t. że:

$$\int_{[a;b]} f(x)dx = (b - a)f(c)$$

1.2 Całki niewłaściwe

Dla całki Riemanna $f : [a; b] -> R$
co gdy $f : [a; b) -> R$?
Dwa przypadki: $b \in R$ oraz $b = +\infty$. Założenia wstepne dot. całki niewłaściwej: (*) $\forall_{r \in [a;b)} f|_{[a;r]}$ - całkowalna w sensie Riemanna.
Definicja
(całka niewłaściwa "prawostronnie") - tj. "brakuje" końca przedziału. Jeżeli istnieje granica $lim_{r->b^-} \int_{[a;r]} f(x)dx = G$ to nazywamy ją całką niewłaściwą z f i oznaczamy symbolem $\int_a^b f(x)dx$
Całka niewłaściwa jest zbieżna, gdy powyższa granica G istnieje i jest liczbą.
$b = +\infty$: "całka niewłaściwa I rodzaju"
$b \in R$: "całka niewłaściwa II rodzaju"
Analogiczna definicja jest określona dla całki niewłaściwej lewostronnej. Do pewnego pojęcia można te pojęcia "mieszać", tj. rozważać sytuację, gdy funkcja jest określona na przedziale obustronnie domkniętym. [obrazek: 1] To jeszcze nie jest takie złe - bo funkcja może być określona na dziurawym przedziale. Wtedy trzeba "pomieszać" całki niewłaściwe; chodzi o to, że wprowadza się jakiś punkt pośredni i zastanawiamy się nad sumą c.nw. od c do

tego punktu, i z drugiej strony - od tego punktu do c. Można udowodnić (przy niewielkich założeniach), że suma tych dwóch całek nie zależy od wyboru punktu c. Czyli można rozważać skończoną liczbę takich punktów niewłaściwości, i to właśnie są mieszane całki niewłaściwe.

1.3 Teoria Lebesgue'a

Można udowodnić, że f. całkowalne w sensie Riemanna to takie funkcje ograniczone, które mają "nie za wiele" punktów nieciągłości - warunek konieczny i dostateczny na całkowalność w sensie Riemanna. Coś a'la nie musi być ciągła wszędzie, ale wszędzie bez ciągłości to lipa. Całka Lebesgue'a jest równa całki w sensie Riemanna dla funkcji całkowalnych w sensie Riemanna. Zachowuje ona [Lebesgue'a] także własności liniowe całek Riemannowych.
Można całkować względem różnych miar. Przykładowo: miara Lebesgue'a - suma długości wszystkich (odcinków? części wykresu?) całek niewłaściwych.

1.4 Zbieżność całek Lebesgue'a

Teoria całek Lebesgue'a jest podobna do teorii szeregów, dlatego też interesuje nas pojęcie zbieżności
Przykłady
1. "pozorna niewłaściwość" $f : [a; b) -> R$ ale można ją przedłużyć do
$f\ \ : [a; b] -> R$ tak, że $f\ \ \in R$
Fakt
Wówczas istnieje $\int_a^b f(x)dx$ i jest równa $\int [a, b] f\ \ (x)dx$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ istnieje $\forall \alpha > 0$ i jest zbieżna wtw. $\alpha > 1$. Wówczas

$$\int_1^{+\inf} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Przypomina to zbieżność szeregu Riemanna - podobny warunek zachodził. Jednak wartość sumy szeregu i takiej całki jest oczywiście inna. 3. $\int_{-\infty}^0 e^x = 1 = -\int_0^1 lnxdx$. Ta druga całka nie jest aż tak trywialna, ale Państwo sobie policzą w domu.

1.5 Kryteria zbieżnosci całek Lebesgue'a

Będą tylko dwa kryteria. Pierwsze jest uniwersalne, a drugie wyłącznie dla całek na przedziałach nieskończonych.

1.5.1 Kryterium porównawcze całek Lebesgue'a

Analogicznie dla kryterium porównawczego szeregów liczbowych; ale dodatkowe założenia.
Załóżmy, że $f_1, f_2 : [a;b) \to R$ - obie spełniają (*). Jeśli dla każdego $x \in [a,b)$

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x)$$

oraz $\int_a^b f_2(t)dt$ jest zbieżna, to $\int_a^b f_1(t)$ też jest zbieżna.
Dowód:
Dzięki założeniu istnieją obie całki niewłaściwe. Pewnie jest w skrypcie. No i tak jak w kryterium porównawczym. Można też sformułować podobne kryterium asymptotyczne - w jednym z zadań; więc raczej to nas nie obchodzi za bardzo.

1.5.2 Kryterium Dirichleta

W szeregach chcieliśmy zbieżność szeregów zadanych iloczynem. Teza brzmiała: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ - zbieżny, o ile $< a_n >$ monotoniczny i zbieżny do 0, oraz $\forall_n |\sum_{k=1}^{n} b_k| \leqslant M$, dla pewnego M. Natomiast w przypadku całek:

$$f; g : [a; +\inf) - > R$$

1. f jest malejąca
2. $\lim_{x->+\inf} f(x) = 0$
3. $\forall_{r \in [a;+\infty)} |\int_{[a;r]} g(x)dx| < M$

Wówczas $\int_n^{+\inf} f(x)g(x)dx$ jest zbieżna. Dowodu brak - ale dowód się wyprowadza z pomocą przekształcenia Abela (w tw. z szeregów). Zamiast tego stosuje się jakieś twierdzenie o wartości średniej, którego nie znamy.