

研究生教学用书
专业基础课系列

计算流体力学

李万平 编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学/李万平 编

武汉: 华中科技大学出版社, 2004 年 月

ISBN 7-5609-3265-7/TP303

. 计...

. 李...

.

.

计算流体力学

李万平 编

责任编辑: 万亚军

责任校对: 朱 霞

封面设计:

责任监印:

出版发行: 华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编: 430074 电话: (027) 87545012

录 排: 华大图文设计室

印 刷:

开本: \times 1/16

印张:

字数:

版次: 2004 年 月第 1 版

印次: 2004 年 月第 1 次印刷

印数: 1—5 000

ISBN 7-5609-3265-7/TP303

定价: 元

(本书若有印装质量问题, 请向出版社发行部调换)

“ 研究生教学用书 ”可供书目

书 名	作 者
机械工程测试·信息·信号分析(第二版)(教育部推荐教材,获国家级 优秀教材奖、获部委优秀教材奖、省科技进步奖)	卢文祥等
应用泛函简明教程(第三版)	李大华
时间序列分析与工程应用(上)(下)(获中国图书奖、国家图书奖)	杨叔子等
偏微分方程数值解法(第二版)	徐长发
数字语音处理(获部委优秀教材奖、省科技进步奖)	姚天任
辩证法史论稿	阳作华等
机械振动系统——分析、测试、建模与对策(上)(下)(第二版) (教育部推荐教材,获部委优秀教材奖)	师汉民等
薄膜生长理论(获部委优秀教材奖)	王敬义
高等弹性力学	钟伟芳等
硒的化学、生物化学及其在生命科学中的应用	徐辉碧等
水电系统最优控制	张勇传
高等工程数学(第三版)	于寅
并行分布式程序设计	刘键
损伤力学(获中国图书奖)	沈为
非线性分析——理论与方法	胡适耕
模糊专家系统	李凡
现代数字信号处理	姚天任等
动态传热学	郭方中
内燃机工作过程模拟	刘永长
半鞅序列理论及应用	胡必锦
化学计量学	陆晓华等
自然辩证法新编(第二版)	李思孟等
机电动力系统分析	辜承林
并行程序设计方法学	刘键
加工过程数控(第二版)(教育部推荐教材)	宾鸿赞
近代数学基础	于寅
气体电子学	丘军林
工程噪声控制学	黄其柏
最优化原理	胡适耕

书 名	作 者
随机过程(第二版)	刘次华
信息存储技术原理	张江陵
应用群论导引	张端明
高等教育管理学	姚启和
稳定性的理论方法和应用	廖晓昕
动力工程现代测试技术	黄素逸
行政学原理(第二版)(教育部推荐教材)	徐晓林
中国传统文化十二讲	王炯华
实用小波方法(第二版)	徐长发
建筑结构诊断鉴定与加固修复	李惠强
国际经济学	方齐云
遗传算法及其在电力系统中的应用	熊信银等
英语科技学术论文——撰写与投稿(第二版)	朱月珍
非线性固体计算力学	宋天霞
现代制造系统的监控与故障诊断	周祖德
制造系统性能分析建模——理论与方法	李培根
快速成形技术	王运赣
智能系统非经典数学方法	朱剑英
面向对象程序设计及其应用	刘正林
激光先进制造技术	郑启光
断裂力学及断裂物理	赵建生
水力发电过程控制	叶鲁卿
科学社会主义理论与实践	编写组
现代实用光学系统	陈海清
矩阵论	杨明 刘光忠
微观经济的数理分析	胡适耕
矩阵论学习辅导与典型题解析	林升旭
数值分析	李 红
钢筋混凝土非线性有限元及其优化设计	宋天霞等
快速模具制造及其应用	王运赣
高等流体力学	王献孚
工业激光技术	丘军林
计算流体力学	李万平
科技应用中的微分变分模型	徐长发
动力机械电子控制	张宗杰

内 容 简 介

本书主要介绍了工程流动计算最常用的有限差分法和有限体积法。内容包括有限差分法的概念和一般的有限差分格式,有限体积法的交错网格和压强速度耦合算法,离散格式的数学特性和物理特性等。书中还介绍了结构性和非结构性网格的基本生成方法,混合网格和自适应直角网格生成法的特点。最后一章以粘性流体绕圆柱的二维流动为例,具体说明了数值模拟流动现象的过程。

本书强调基础、突出应用,可作为工程类专业硕士研究生和高年级本科生计算流体力学课程的教材。本书用一定篇幅给出了与流体力学数值模拟有关的基本原理和主要的湍流模型,可供使用 CFD 商业软件的读者阅读参考。

ABSTRACT

This book covers basic fundamentals to the understanding and application of finite difference methods and finite volume methods, which are most extensively used in engineering flow computations. The text contains the concepts and schemes of the finite difference, the staggered grid and pressure-velocity coupling algorithm of the finite volume methods, and the mathematical and physical characteristics of discrete schemes. The text describes also the basic grid generation techniques of structured and unstructured meshes, and the features of adaptive Cartesian grid. The book illustrates the process of flow simulation in details at the last chapter by using two-dimensional viscous flow round a circle cylinder as a typical example.

This book emphasizes the basic concepts and applications in engineering. It can be served as a textbook of the computational fluid dynamics for advanced undergraduates and graduate students of various engineering specialties.

The book provides readers, who want to operate CFD commercial codes successfully, the fundamental material needed for a good simulation of fluid flows in three dimensions and turbulence by means of the finite difference methods or finite volume methods.

前 言

计算流体力学(Computational Fluid Dynamics, 简称CFD)不仅是现代流体力学与应用数学的重要基础,而且以其为学科基础的CFD技术具有强大的模拟能力。CFD作为计算流体力学工程应用的代名词,已经深深地渗透到现代科学的各个相关学科和工程应用之中。

全书共分7章。第1章介绍有限差分如何从纯粹的数学公式成为计算流体力学最重要的计算方法的过程,讨论流体力学数值模拟的局限性和发展前景。

第2章从推导直角坐标下控制流体运动的偏微分方程开始,得到了一般的输运方程和必要的辅助条件,这是发展随后的数值算法的基本公式。

第3章叙述湍流概念的发展,介绍湍流物理和一些简单湍流的特征,讨论用于工程CFD的主要湍流模型。这是很多工程应用中充分评估CFD功能所必需的。

第4章构筑了计算流体力学中最常用的有限差分法。

第5章致力于有限体积法的数值算法。有限体积法起源于特殊的有限差分格式,是当前CFD所采用的最完善且普遍有效的技术。

第6章提供了计算网格的基本生成方法,介绍了最常用的几种结构性网格生成法和非结构性网格生成法的工作原理,以及混合网格生成法和自适应直角网格生成法的新发展。

第7章详细说明计算不可压缩粘性流体绕流圆柱的流体力学的方法和生成染色线图的方法,帮助读者完成一次数值模拟的全过程。

本书强调基础,突出应用,力求反映最新的学科进展。读者通过本课程的学习可达到的目标是,对计算流体力学的原理和方法有较全面的了解,具备模拟流动问题的实际能力。鉴于以上考虑,本书采众家之长,内容参考了参考文献所列专著和文献。读者可以根据本书所提供的线索在互联网上和专门论著中找到计算流体力学的更多专题和相关应用实例。

诚请读者指出本书的不足与谬误,联系地址为武汉华中科技大学力学系。

编 者

2004年2月于喻园

目 录

主要符号表

第 1 章	绪论	(1)
1.1	计算流体力学的形成与早期发展	(1)
1.2	计算流体力学的新进展	(2)
1.3	数值模拟的过程	(3)
1.4	数值模拟的局限性和发展前景	(6)
第 2 章	流体流动的数学模型	(9)
2.1	流体流动和热传导的基本方程	(9)
2.2	状态方程	(16)
2.3	牛顿流体的 Navier-Stokes 方程	(17)
2.4	流体流动控制方程的守恒形式	(21)
2.5	一般输运方程的微分形式和积分形式	(21)
2.6	流体流动方程的分类	(23)
2.7	粘性流动方程的辅助条件	(30)
第 3 章	湍流与湍流模型	(34)
3.1	什么是湍流	(34)
3.2	层流向湍流转捩	(36)
3.3	湍流对时均 Navier-Stokes 方程的影响	(38)
3.4	简单湍流的特征	(43)
3.5	湍流模型	(49)
第 4 章	发展方程的有限差分法	(63)
4.1	有限差分法的概念和一般的有限差分格式	(63)
4.2	有限差分方程的相容性	(72)
4.3	有限差分法的隐式格式和迎风格式	(73)
4.4	有限差分方程的收敛性和稳定性	(77)
4.5	几种常用的差分格式及其稳定性条件	(88)
4.6	边界条件及其对稳定性的影响	(94)
4.7	修正方程及其应用	(96)
第 5 章	有限体积法	(101)
5.1	扩散问题的有限体积法	(101)
5.2	对流扩散问题的有限体积法	(107)
5.3	定常流动的压强速度耦合算法	(127)

5.4	非定常流动的有限体积法	(137)
5.5	确定边界条件	(149)
第6章	网格生成技术	(160)
6.1	贴体坐标变换	(161)
6.2	单域贴体结构性计算网格的生成	(165)
6.3	调整网格疏密	(169)
6.4	分区与并行计算的网格	(172)
6.5	非结构性计算网格的生成	(175)
6.6	结构/ 非结构混合网格	(181)
6.7	自适应直角网格	(182)
第7章	数值模拟二维不可压缩粘性流体绕圆柱的流动	(186)
7.1	钝物体绕流的流体动力特性	(186)
7.2	流函数-涡量法解圆柱绕流问题的差分格式	(189)
7.3	初始条件和边界条件	(194)
7.4	流体动力计算	(198)
7.5	动态流动显示的染色线生成法	(201)
参考文献		(206)

主要符号表

$x、y、z$	直角坐标分量		耗散函数、 的时均量
$\eta、\xi、\zeta$	曲线坐标分量	K	湍流时均动能
	流函数	k	湍流脉动动能、热传导率
	平面法向涡量分量		湍流动能耗散率、扰动量
t	时间	$q、q_x、q_y、q_z$	热通量矢量及分量
f	频率		湍流大涡速度尺度、辐角
U	x 时均速度、特征速度	l	湍流大涡长度尺度、混合长度
V	y 时均速度、体积	τ	湍流最小长度尺度
W	z 时均速度	v_t	湍流最小速度尺度
A	面积	u	摩擦速度
U	时均速度矢量	$V、V$	曲线坐标速度分量
$u、u、v、w$	瞬时速度矢量及分量	$u、u$	计算域速度分量
$u、u、v、w$	脉动速度矢量及分量	J	雅克比行列式
T_i	湍流强度	$h、h$	拉梅系数
T	温度		松弛系数
p	压强	i	比内能
P	时均压强	$h、h_0$	比焓、总比焓
p	脉动压强	E	比能
	密度	c_v	比定容热容
a	对流速度、圆半径	c_p	比定压热容
c	Courant 数、波速	μ	流体动力粘度
L	特征长度		流体运动粘度
F	对流通量		流体第二粘度, 特征值
D	扩散传导率、直径		粘性扩散系数
Re	雷诺数		扩散系数
Pe	佩克莱特数		边界层厚度, 横向尺度
St	斯特鲁哈数	τ_{ij}	粘性应力分量
M	马赫数	e_{ij}	变形率分量
	普朗特数	$\nabla \cdot ()$	散度算子
S	输运方程的源项	∇	梯度算子
	流体物体量、标量	∇^2	拉普拉斯算子

第 1 章 绪 论

自 1946 年第一台电子计算机问世,计算方法继实验方法与分析方法之后成为科学研究的第三种研究方法。计算流体力学亦逐渐发展成一门独立学科。短短几十年里,随着计算机技术和性能的提高,计算流体力学已迅速发展成为现代流体力学与应用数学的重要基础,深深渗透到现代科学的许多相关学科和工程应用之中。

本章介绍计算流体力学的形成、早期发展和新成果,以及有限差分如何从纯粹的数学公式成为计算流体力学最重要的计算方法的过程。计算流体力学在上个世纪后半叶迅速发展,主要体现在两个方面:一是计算有旋涡和分离的复杂流场;二是模拟转捩与湍流。计算流体力学以计算机模拟手段为基础,对涉及流体流动、传热及相关现象,如化学反应等的系统进行分析,在几何模型和网格生成、数值算法、湍流模型、流态显示等方面均取得重大进展。以计算流体力学为学科基础的 CFD 技术有强大的模拟能力,覆盖了工程的或非工程的广大领域。

本章还将介绍数值模拟的实现过程并讨论数值模拟的局限性和发展前景。

1.1 计算流体力学的形成与早期发展

17 世纪末叶到 19 世纪末叶,流体力学理论在实验的基础上得到了极大的丰富和发展,建立了流体运动所遵循的,普遍而精确的 Navier-Stokes 方程(简称 N-S 方程)。20 世纪初,人类进入航空时代,理论流体力学和实验流体力学都获得了极大的发展。但由于 N-S 方程是非线性方程,实际流动又非常复杂,仅有极少数的问题可以得到解析解或摄动解。实验流体力学在方法和技术迅速发展的同时,亦遇到实验研究费用高昂和场地、安全等要求的限制。在这种情况下,解决流动问题的实际需要促成了流体力学的第三支柱——计算流体力学的诞生和发展。

计算机问世前,偏微分方程数值分析研究的重点是椭圆型方程或所谓判定问题。1928 年, R. Courant, K. Friedrichs 和 H. Lewy 发表经典论文,证明了连续的椭圆型、抛物型和双曲线方程组的有限差分解的存在性和惟一性定理。他们本来的兴趣在于用有限差分公式作为纯粹的数学工具,这些工作后来成了计算流体力学实际应用有限差分法的指南。

计算流体力学方面的许多先驱工作是在 Los Alamos 的科学实验室中完成

的。在第二次世界大战中,正是在 Los Alamos, J. von Neumann 建立了抛物型有限差分方程的稳定性准则,并且提出了分析线性化方程的方法。直到1950年,方法的简要描述才在公开的文献中出现(J. G. Charney 等, 1950)。

1953年, E. C. Dufort 和 S. P. Frankel 对抛物型方程提出了“跳点”方法,像 ADI 方法一样,它也允许任意大的时间步长(在没有对流项的情况下),而且具有全显式的优点。F. H. Harlow 和 J. E. Fromm(1963)在他们著名的非定常涡街的数值解中,应用了这个方法。1965年,他们发表在杂志《Scientific American》上的文章特别激起了研究者对计算流体力学潜力的广泛兴趣。几乎同时, E. O. Macagno 写的一篇类似的文章登在法国杂志《La Houille Blanche》上。这两篇文章中,清楚地叙述了数值模拟或计算机试验的概念。由于这两篇文章的出现,计算流体力学作为一门独立学科出现的日子得以确定。

1.2 计算流体力学的新进展

从20世纪60年代后期以来的短短几十年里,随着计算机技术和性能的提高,计算流体力学已迅速发展。它能计算理论流体力学所不能求解的、复杂几何形状下的流动;它省钱省时,已代替了很大一部分风洞试验;采用计算手段已发现了一些理论上还解不出、实验上还测不到的流动中的新现象。

这个时期,计算流体力学的发展主要体现在两个方面:一是计算更加复杂的有旋涡流和分离流的流场;二是为理解物理机制而模拟转捩与湍流的流动现象。了解第二部分的内容需要参考专门著作的论述,这里只介绍与复杂流场计算有关的数值计算方法的发展:几何模型和网格生成、N-S 方程解的算法、湍流模型、数值流动显示和后处理技术。

计算流体力学以计算机模拟手段为基础,对涉及流体流动、传热及相关现象,如化学反应等的系统进行分析。以计算流体力学为学科基础的所谓 CFD 技术有强大的模拟能力,已覆盖了工程的或非工程的广大领域,如:

- 飞机或车辆空气动力学: 升力、阻力;
- 船舶流体动力学;
- 电厂: 内燃机和气轮机中的燃烧;
- 涡轮机械: 在旋转通道和扩散段等的内部流动;
- 电力和电子工程: 具有微电路的设备的冷却;
- 化学处理工程: 混合和分离, 聚合物熔融;
- 建筑物内、外环境: 风载与暖通;
- 海洋工程: 离岸结构的载荷;
- 水文学与海洋学: 河流、港湾、海洋中的流动;

- 环境工程: 污染物质、排放的气体与液体的流布;
- 气象学: 天气预报、海浪和风暴的预报;
- 生物医学工程: 动脉与静脉中的血流、生物芯片内的流动。

1960 年以来, CFD 技术大规模进入飞机和喷气发动机的研发、设计和制造, 可控核反应堆温度场分布以及航天飞机飞行和返回时复杂流场的预测等领域。随后, 这一技术又应用于内燃机、气轮机燃烧室和熔炉的设计。在汽车制造业, 用 CFD 预报阻力、分析车壳内部流动和车内环境等已成为常规。CFD 的应用日益成为工业生产中工艺设计的关键因素, 其发展的终极目的是提供与其他计算机辅助工具, 如应力分析软件相当的能力。CFD 长期落后于应力分析软件的主要原因是流动本身极其复杂, 而在许多情况下, 既要完全地描述流体流动状况, 又要承受高昂的计算费用。在 20 世纪 90 年代, 便宜的高性能计算机硬件和 CFD 软件对用户友好的界面导致 CFD 打开了进入广阔工业领域的大门。

随着计算技术的发展, 数值计算作为一种研究手段, 已越来越多地渗入到各种学科中去。反过来, 各种问题的需要, 又促进了计算方法的研究和发展。由于流体力学计算的需要, 有限差分法、有限元法、谱法等计算方法已在实际中得到应用。本书主要介绍流体力学计算方法中最成熟、最常用的有限差分法。

湍流数值模拟方法的研究对计算机的速度和内存提出了更高的要求, 单纯提高机器速度及内存已无法满足要求。波尔兹曼格子气是一种全新的概念和方法, 这种格子气在微观的层次上考虑物理机制, 将流体力学问题离散化, 使每一步的计算大大简化。随着计算机硬件技术的发展, 人们已提出大规模并行运算的设想, 并正在研究和设计快速有效的并行算法及与之配套的并行计算机。20 世纪 90 年代初, 人们发现量子计算机的计算速度有可能超过任何一种经典计算机。IBM Almaden Research Center (2001) 的分子试验将核磁共振量子计算提升到了一个新的水平, 这将有助于研制新一代的计算机。

1.3 数值模拟的过程

计算流体力学的任务是流体力学的数值模拟。数值模拟是“在计算机上实现的一个特定的计算, 通过数值计算和图像显示履行一个虚拟的物理实验——数值试验(P. J. Roache, 1983)”。数值模拟包括以下几个步骤。

首先, 要建立反映问题(工程问题、物理问题等)本质的数学模型。建立反映问题各量之间的微分方程及相应的定解条件, 这是数值模拟的出发点。牛顿型流体流动的数学模型就是著名的 N-S 方程及其相应的定解条件。

其次, 数学模型建立以后需要解决的问题是寻求高效率、高准确度的计算方法。计算方法不仅包括数学方程的离散化及求解方法, 还包括计算网格的建立、

边界条件的处理。

再次,在确定了计算方法和坐标系统后,编制程序和进行计算是整个工作的主体。当求解的问题比较复杂,如求解非线性的 N-S 方程,还需要通过实验加以验证。

最后,当计算工作完成后,流场的图像显示是不可缺少的部分。随着人们研究的流动问题日益深入和复杂,计算结果也更加纷繁浩瀚,难以把握。只有把数值计算的结果以各式各样的图像和曲线形式输出才能有效判断结果的正确性,进而得出结论和获取需要的数据。随着计算机图像显示系统和相应软件的发展,流场数值的图像显示在快速及时、三维扫描、形象逼真等方面发展迅速。通过利用录放设备存储、显示动态过程,数值模拟可以充分发挥数值实验的作用。

掌握数值模拟的原理和过程等背景材料后,能更好地理解 CFD 软件内部的运作和成功地实现计算任务。商业 CFD 软件通常应用计算流体力学比较成熟的数值方法,有比较典型的配置和操作过程。所有商业 CFD 软件都包括预处理、运算和后处理三个主要部分。

一、预处理

预处理就是通过操作界面将流动问题输入 CFD 程序,然后将输入数据转换为适合运算部分使用的合适格式。预处理阶段的用户行为是: 定义有关的几何区域,即计算域; 网格生成,即将计算域划分为较小的、不重叠的子域或单元(网格); 选择需要模拟的物理、化学现象的模型; 在与边界重叠或接触边界的单元定义适当的边界条件。

流动问题的解(速度、压力、温度等)定义在每一单元的节点上。CFD 的精度由网格单元的数目决定。解的精度、必需的计算机硬件和计算时间取决于网格的细密程度。最佳网格多是非均匀的: 点到点之间变化快的区间网格较细,变化相对较慢的区间网格较粗。发展 CFD 的目标之一是自适应网格生成能力。最终这样的程序将自动在迅速变化的区域细分网格。目前在高级软件中这一目标尚未实现,需要 CFD 用户有设计网格的技巧,以达到满足解题精度和降低成本的要求。

网格生成技术是计算流体力学发展的一个重要分支,是 CFD 作为工程应用的有效工具所面临的关键技术之一。成功生成复杂外形的网格依赖于专业队伍的协作和努力。经验表明,工程上,CFD 项目耗费的人工时间中超过 50% 用于定义计算域几何结构和网格生成。为了获得最大的 CFD 人工效率,主要的 CFD 软件都有它们自己的 CAD 形式的界面,或通过专门的表面建模器和网格生成器输入数据,如著名的 PATRAN 和 I-DEAS。时至今日,预处理能给用户提供一个流体的性能参数库和调用特别的物理、化学过程模型(如湍流模型、辐射热传导模

型、燃烧模型)。这些都是主要的流体流动方程要用到的。

二、运算

数值方法有三个不同的流派:有限差分法、有限元法和谱法。它们大致上都要进行三个步骤形成运算基础:利用简单函数形式近似表达未知的变量;将近似式代进流动控制方程并离散化,随后进行数学处理得到代数方程组;解代数方程组。三种不同流派的主要差别是流动变量的近似处理和离散处理的方式不同。

有限差分法用坐标线网格节点上的点样本描述未知的流动问题的变量。有限差分法多采用泰勒级数展开的截断式得到流动变量在一点导数的近似表达式,其中用到这一点和邻点的样本。在控制方程中用有限差代替这些导数后得到节点流动变量值的代数方程。G. D. Smith(1985)介绍了详细的有限差分方法。

有限元法在单元内用简单的片函数(如线性的或二次的)描述未知的流动变量的局部变化。精确解准确满足控制方程,但是分片近似函数代入方程后不能准确成立,于是通过定义残差来度量这一误差。随后用一组权函数与残差(或误差)项相乘并积分,为在加权积分的意义上消除残差而令此积分为零,结果给出一组近似的、系数未知的代数方程。有限元理论最初是为分析结构应力而发展起来的,标准的流体有限元法应用见 O. C. Zienkiewicz 和 R. L. Taylor(1991)的论著。

谱法用傅氏级数或切比雪夫多项式级数的截断式来近似表达未知量。谱法与有限差分法和有限元法不同,它不是局部的近似;近似式对整个计算域有效。将截断级数代入控制方程,方程的约束条件产生关于傅氏级数或切比雪夫级数的系数的代数方程。类似于有限元法,谱法用加权残差概念和节点上与准确解一致的近似函数提供约束条件。更多细节见 D. Gottlieb 和 S. A. Orszag(1977)的论著。大涡模拟法计算湍流时就要用到谱法的概念。

实际物理现象是复杂的和非线性的,因此要用迭代解法求解代数方程组。常用的解法有代数方程的 TDMA 逐行算子和能保证压力、速度正确联系的 SIMPLE 算法。商业软件也给用户提供了其他选择,如 STONE 算法和共轭梯度法等。

三、后处理

如同前处理一样,后处理领域已有大量开发工作。由于具有高超绘图能力的计算机日益增多,优秀的 CFD 软件包都装备有数据可视化工具。这包括:区域几何结构和网格显示,矢量图,等值线图或阴影图,二维、三维曲面图,粒子踪迹图(又称脉线图或染色线图),图像处理(移动、旋转、缩放等),彩色图像的存储、打印、输出。

近来,这些配置还包括结果动态显示的动画。除了图形,所有软件都有数据输出功能,用于软件外进一步处理数据。如同其他许多CAE(计算机辅助工程)分支一样,CFD的图形输出功能已经得到改进,能和非专业人员进行概念交流。

解流体流动问题时必须明白流动的物理现象是复杂的,用CFD软件产生的结果应该反映其中的物理(或化学)过程,而不因人而异。为此,软件用户必须有一些专门的技巧。如在设置和运行CFD模型之前,有一个步骤是根据问题中需要考虑的物理或化学现象来鉴别和形成流动问题的公式。需要做的典型决定有:是否需要把问题模型化为二维或三维,是否排除环境温度对空气流的密度的影响,是否选择湍流模型或忽略溶化在自来水中的小气泡等。

做出正确决定要求有良好的建模技巧。所有问题中除了最简单的那些,我们都需要做出假定以使复杂性减少至可以着手的程度,同时需要保持问题的特征。在这一步引入的简化是否合适,在一定程度上是由CFD产生的信息的质量所决定的,因此CFD用户必须一直明确无误地记住已经做过的所有假定。

1.4 数值模拟的局限性和发展前景

计算流体力学不只是探求流体力学微分方程初值问题和边值问题的各种数值解法,其实质是要在物理直观和力学实验的基础上建立各种流体运动的有限的数值模型。当问题本身遵循的规律比较清楚,所建立的数学模型比较准确,并为现实所证明能反映问题本质时,数值模拟具有较大的优越性。相对于流体实验方法而言,数值模拟有几个独特的优点:数值模拟大幅度减少完成新设计所需的时间和成本;能研究难以进行或不可能进行受控试验的系统,如星体内部温度推测;能超出通常的行为极限,研究危险条件下的系统,如模拟核反应堆失水事故;比实验研究更自由、更灵活,可以无限量地提供研究结果的细节,便于优化设计。数值模拟具有很好的重复性,条件容易控制,这对湍流的数值模拟尤为重要。通过数值模拟可能发现新现象,如两个孤立波相互作用的一些特性就是通过数值模拟首先发现的。

目前建立具有数值模拟能力的实验室的投资成本不低,但高质量的试验设备的开销更大。试验费用随租用设备、人工费、测点布置和待测试装置的数量成比例变化。对比之下,CFD的数值模拟能在几乎不增加费用的情况下得到更详细的结果。除了基本投资,一个部门需要专业人员运行CFD的数值模拟软件,因此,也许制约CFD在工程应用中继续发展的将会是缺少训练有素的人员,而不是有没有合适的硬件、软件及其价格。

另一方面,数值模拟也有一定的局限性,并面临不少问题。了解这些局限性既有助于适当地评估数值模拟的结果,又有助于我们在陷入困境时找到解决问

题的对策。

1. 数值模拟要有准确的数学模型

流动现象的机理尚未完全清楚之前,其数学模型很难准确化。流体力学曾极大地推动了偏微分方程理论、复变函数、向量和张量分析以及非线性方法的发展。但是,计算流体力学不是纯理论分析,非线性偏微分方程数值解的现有理论尚不充分,还没有严格的稳定性分析、误差估计或收敛性证明。尽管惟一性和存在性问题的研究已有一些进展,但还不足以对很多有实际意义的问题给出明确的回答。在计算流体力学中,必须依赖一些对简单化、线性化了的相关问题的严格数学分析,以及启发性的物理直观、推理、试验和边试边改的方法。

2. 数值试验不能代替物理试验或理论分析

完成一次特定的计算就像进行了一次物理实验。从这个意义上说,计算流体力学的数值模拟更接近实验流体力学。如D. R. Campbell 和T. J. Mueller(1968)首先在数值实验中发现了亚声速斜坡的分离现象,以后在风洞试验中得到了证实。在数值试验中可以完全控制试验参数。但是,数值试验与物理试验有相同的限制,它不能给出任何函数关系,因而不能代替哪怕最简单的理论。

计算流体力学中有限的数值模型只能在网格尺度为零的极限情况下才能精确地模拟连续介质,而这种极限是无法达到的。离散化的结果不仅在数量上可能影响计算的精度,而且在性质上还可能会改变流动的特征(产生伪物理效应,如数值粘性与色散;在非线性问题中的反常能谱转移效应等)。即使有了可靠的理论模型方程,数值模型的可靠性仍需得到实践的验证。

数值模型的有效性,要求与一个问题有关的边界条件的详尽信息。为此,必须在一定范围做出实验数据以提供边界条件。这可能涉及用热线仪或激光多普勒测速仪测量点流速。然而,若环境太恶劣或这些精密仪器根本不能用,也可用皮托-静压管排测量证实流场边界条件提法的有效性。有时进行实验工作的条件尚不具备,数值模拟必须依赖于以前的经验,与相似的简单流动的分析解比较,或者与文献报道的密切相关问题中的高质量实验数据比较。下列期刊有来自文献的最好信息:《Transactions of ASME》(其中的《Journal of Fluids Engineering》《Journal of Engineering for Gas Turbines and Power》《Journal of Heat Transfer》)《American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal》《Journal of Fluid Mechanics》《Proceedings of the Institute of Mechanical Engineering》等。

3. 计算方法的稳定性和收敛性问题

在数值模拟中,对数学方程进行离散化时需要对计算中所遇到的稳定性和收敛性等进行分析。这些分析方法大部分对线性方程是有效的,对非线性方程来说只有启发性,没有完整的理论。对于边界条件影响的分析,困难就更大些。所

以计算方法本身的正确与可靠也要通过实际计算加以确定。在计算过程中有时还需要一定的技巧。

4. 数值模拟受到计算机条件的限制

计算流体力学必须给出实现数值模拟的快速算法,但是计算机的运行速度和容量限制了模拟的实现,数值模拟还不能完全达到工程实用的要求。计算一般的湍流还不可能,目前只能就几个最简单的情形进行湍流的数值模拟。因为网格的最小尺度难以达到湍流的最小尺度,但是湍流的最小尺度却可能影响大范围的流动性质。计算流体力学早已具有分析一定飞行条件下整架飞机流场的技术能力,但由于高雷诺数粘性流在大攻角绕流时产生分离和涡旋,即使在巡航条件下忽略湍流,达到角部边界层和尾流的分辨率仍需要 5×10^6 到 10^7 个网格点,精度要求和成本太高约束了直接数值模拟湍流的雷诺平均 N-S 方程,使得这种分析目前还不能在工业环境中实现。

C. Hastings 1955 年写于前 IT 时代的话有先见之明:“计算的目的是了解而不是数字。”他强调需要注意的是信息。任何 CFD 实践的主要输出是改进对于一个系统特性的理解。但是,既然没有关于一次模拟的精确度的绝对保证,就需要经常地、严格地验证结果的有效性。反复验证有效性将如同最后的质量控制机制一样起到关键作用。然而,成功的 CFD 的主要因素是经验和对流体流动物理及数值算法基础的透彻理解。没有这些,就不能得到软件的最好结果。

计算流体力学在近期需要解决的问题将是寻求高效率、高准确度的计算方法和发展高容量高性能的计算机系统。计算流体力学的方法在各相关学科中将得到广泛应用并取得成果,反过来,应用成果也会促进计算流体力学自身的发展。

第2章 流体流动的数学模型

本章就最一般的目的为流体流动和热传导的模型建立数学基础。从质量、动量和能量守恒的基本原理出发导出流体流动的控制方程,并讨论必要的辅助条件:初始条件和边界条件。从流动控制方程导出的输运方程是推导随后的数值算法的基本形式。

2.1 流体流动和热传导的基本方程

流体流动的控制方程表达了物理守恒律的数学形式:

- (1) 流体质量守恒;
- (2) 流体粒子的动量变化率等于它受到的合外力(牛顿第二定律);
- (3) 流体粒子的能量变化率等于对粒子加热和做功的速率之和(热力学第一定律)。

流体被认为是连续介质。在宏观尺度上(比如 $1\ \mu\text{m}$) 分析流体流动可以忽略物质的分子结构和分子运动。从宏观上描述流体性质的物理量,如速度、压强、密度、温度及其空间和时间导数,可以认为是对足够多分子取的平均量。那么,一个流体粒子或流体中的点是指最小可能的流体单元,它的宏观性质不受单个分子的影响。

考虑边长为 δx 、 δy 和 δz 的一个小流体元(见图 2.1)。六个面记为 E、S、W、N、T、B, 分别表示东、南、西、北、上、下, 图中规定了坐标轴的正方向。流体元中心的坐标为 (x, y, z) 。注意, 流体元在空间是静止的。流体元的质量、动量和能量随着流体越过它边界的流动而变化, 适当的时候还有单元内源的作用, 完整地表达这些变化和作用即可导出流动方程。

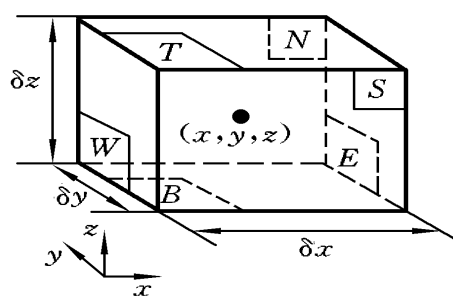


图 2.1 流体元示意图

所有的流体量都是时间和空间的函数, 严格地讲, 必须将密度、压强、温度和速度分别写为 $\rho(x, y, z, t)$ 、 $p(x, y, z, t)$ 、 $T(x, y, z, t)$ 和 $u(x, y, z, t)$ 。为避免过于烦琐, 以后不再这样写出对时间、空间的依赖性。例如, 流体元中心点的密度在时间 t 记为 ρ , 压强 p 在点 (x, y, z) 、时间 t 的 x -导数记为 p/x 。以下如无特别说明, 所有其他流体量都像这样表示。

这里考虑的流体元很小, 以至用泰勒级数展开式的头二项表示面上的流体

量已足够精确。因此, 作为例子, 离流体元中心都是 $x/2$ 的E 和W 面上的压强可以表示为 $p + \frac{\rho}{x} \frac{x}{2}$ 和 $p - \frac{\rho}{x} \frac{x}{2}$ 。

一、三维质量守恒

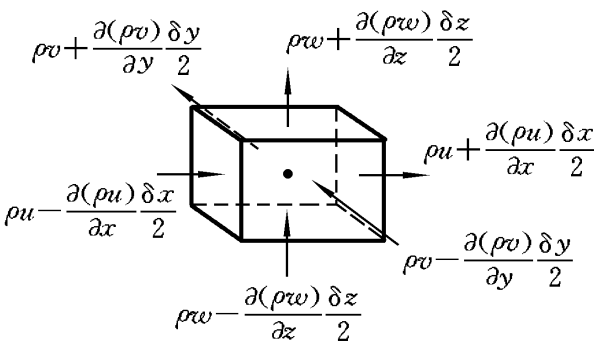
推导质量守恒方程的第一步是写出流体元的质量平衡: 流体元内质量的增加率等于净流入流体元内的质量流量。

流体元内质量的增加率是

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \, x \, y \, z) = \frac{\partial}{\partial t} \rho \, x \, y \, z$$

下面写出经过边界面净流入流体元内的质量流量, 由密度、面积和面上的法向速度分量的积给出。从图 2. 2 可以看到, 经过边界面净流入流体元内的质量流量是

$$\begin{aligned} & \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) y \, z - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) y \, z \\ & + \left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) x \, z - \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) x \, z \\ & + \left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) x \, y - \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) x \, y \end{aligned}$$



进入流体元的流动在流体元内增加质量取正号, 流出流体元的流动在流体元内减少质量取负号。流体元内质量的增加率等于经过边界面(见图 2. 2)净流入流体元内的质量流量, 质量平衡式的所有项放到等号左边, 用流体元的体积 $x \, y \, z$ 除表达式得到

图 2. 2 经过流体元的质量流

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{2. 1. 1}$$

或更紧凑的矢量形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{2. 1. 2}$$

式中, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ 是速度矢, $\nabla \cdot ()$ 表示对括号中的变量进行散度运算。方程 (2. 1. 2) 是可压缩流体中一点的非定常、三维质量守恒方程或连续性方程。左边第一项是密度(单位体积的质量)的时间变化率。第二项描述越过边界净流出流体元的质量流量, 称为对流项。

不可压缩流体(如一般条件下的液体)的密度是常数, 所以方程 (2. 1. 2) 成为

$$\rho u = 0 \quad \text{或} \quad \frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = 0 \quad (2.1.3)$$

二、跟随流体粒子的变化率和流体元的变化率

动量守恒和能量守恒是对于流体粒子物理量的变化叙述的。流体粒子的每一个物理量是粒子的位置 (x, y, z) 和时间 t 的函数。令每单位质量流体的这个物理量的值为 ϕ ，跟随流体粒子的时间全导数或物质导数可写为

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u}{x} \frac{d\phi}{dx} + \frac{v}{y} \frac{d\phi}{dy} + \frac{w}{z} \frac{d\phi}{dz} \quad (2.1.4)$$

流体粒子随流体运动, 因此 $dx/dt = u$, $dy/dt = v$, $dz/dt = w$ 。于是 ϕ 的物质导数为

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \rho \quad (2.1.5)$$

$d\phi/dt$ 定义为流体每单位质量 ϕ 的变化率。如同质量守恒方程的情形, 我们感兴趣的是建立每单位体积的变化率。流体粒子每单位体积 ϕ 的变化率由 $d\phi/dt$ 和密度 ρ 的积给出, 于是有

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \rho \quad (2.1.6)$$

对于流体流动计算最有用的守恒律形式涉及流体元流动量的变化率。下面推导跟随流体粒子 ϕ 的物质导数和流体元 ϕ 的变化率之间的关系。

质量守恒方程以单位体积的质量, 即密度 ρ 作为守恒量。质量守恒方程(2.1.2)中流体元的密度变化率和对流项之和是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$$

将这些项推广到关于任意守恒量 ϕ , 得

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) \quad (2.1.7)$$

式(2.1.7)表达的是单位体积的 ϕ 的变化率加上越过边界净流出流体元的 ϕ 的流量。重写上式表现它与 ϕ 的物质导数的关系

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \rho \nabla \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{d\phi}{dt} \rho \quad (2.1.8)$$

由质量守恒方程(2.1.2)可知两等号间的第二项等于零。用文字可表达为: 流体元内 ϕ 的增加率加上净流出流体元的 ϕ 流量等于流体粒子的 ϕ 的增加率。

为构造动量方程的三个分量式和能量方程, 在式(2.1.6)和式(2.1.8)中分别用 u 、 v 、 w 和 E 代替式中的 ϕ 就可得到单位体积 ϕ 的物质导数 $\frac{du}{dt}$ 、 $\frac{dv}{dt}$ 、 $\frac{dw}{dt}$

和 $\frac{dE}{dt}$ 的表达式:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{(\rho u)}{t} + \rho \nabla \cdot (u u)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{(\rho v)}{t} + \rho \nabla \cdot (v u)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{(\rho w)}{t} + \rho \nabla \cdot (w u)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{(\rho E)}{t} + \rho \nabla \cdot (E u)$$

变化率的守恒形式(散度形式)和非守恒形式可以相互替换表达物理量的守恒。为简化记号和强调守恒律是应用于流体粒子的根本表述, 本书将用非守恒形式推导流体运动的动量方程和能量方程, 然后在 2. 4 节给出守恒形式用于有限体积法的 CFD 计算。

三、三维动量方程

牛顿第二定律指出: 流体粒子的动量变化率等于作用于流体粒子的外力之和。流体粒子单位体积的 x-动量增加率、y-动量增加率和 z-动量增加率为

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} \text{ 和 } \frac{dw}{dt}$$

作用于流体粒子的力有两类: 一类是表面力, 如压力和粘性力; 另一类是体积力, 如重力、离心力、哥氏力和电磁力。通常的做法是将表面力作为动量方程的单独项以突出表面力的贡献, 体积力则归于源项。

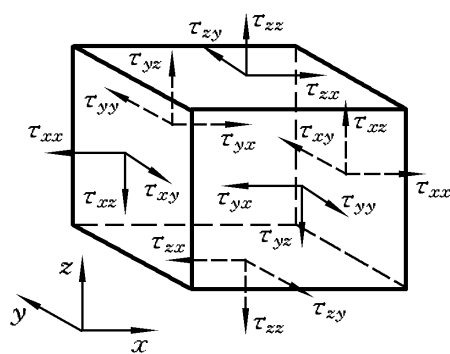


图 2. 3 流体元三个面上的应力分量

下面以压强项和九个粘性应力分量项定义流体元的应力状态(见图 2. 3)。压强是法向应力, 记为 p 。粘性应力记为 τ_{ij} 。通常的指标记法 τ_{ij} 指出应力的方向, τ_{ij} 的下标 i 和 j 表示在法向为 i 方向的表面上沿 j 方向作用的应力。

首先考虑沿 x 方向作用的力, 这些力来自压强 p 和应力分量 τ_{xx} 、 τ_{yx} 和 τ_{zx} 。来自表面应力的力的大小是应力和面积的乘积。沿着坐标轴的力取正号, 逆坐标轴的力取负号。作用于 x 方向的力是沿 x 方向作用于流体元的所有力分量之和。

在一对面 W、E 上有

$$F_x = -p \Delta V + \tau_{xx} \Delta y \Delta z + \tau_{yx} \Delta x \Delta z + \tau_{zx} \Delta x \Delta y$$

$$+ \quad - \quad p + \frac{-p}{x} \frac{x}{2} + \quad \tau_{xx} + \frac{-\tau_{xx}}{x} \frac{x}{2} \quad y \quad z$$

$$= \frac{-p}{x} + \frac{-\tau_{xx}}{x} \quad x \quad y \quad z$$

还有一对面 S、N 上沿 x 方向作用的净力是

$$- \quad \tau_{yx} - \frac{\tau_{yx}}{y} \frac{y}{2} \quad x \quad z + \quad \tau_{yx} + \frac{\tau_{yx}}{y} \frac{y}{2} \quad x \quad z = \frac{-\tau_{yx}}{y} \quad x \quad y \quad z$$

最后的一对面 B、T 上沿 x 方向作用的净力是

$$- \quad \tau_{zx} - \frac{\tau_{zx}}{z} \frac{z}{2} \quad x \quad y + \quad \tau_{zx} + \frac{\tau_{zx}}{z} \frac{z}{2} \quad x \quad y = \frac{-\tau_{zx}}{z} \quad x \quad y \quad z$$

表面应力作用在流体上单位体积的合力等于以上三对面上的净力之和除以体积 $x \quad y \quad z$, 即

$$\frac{(-p + \tau_{xx})}{x} + \frac{-\tau_{yx}}{y} + \frac{-\tau_{zx}}{z}$$

下面的推导不再考虑体积力, 可以用单位时间、单位体积 x 方向动量的源项 S_{Mx} 包括体积力在 x 方向的影响。

置流体粒子在 x 方向的动量变化率等于作用在流体元的 x 方向合力, 即表面应力加上源项在 x 方向的动量增加率, 得到动量方程的 x 分量式

$$\frac{du}{dt} = \frac{(-p + \tau_{xx})}{x} + \frac{-\tau_{yx}}{y} + \frac{-\tau_{zx}}{z} + S_{Mx} \quad (2.1.9a)$$

容易证明, 动量方程的 y 分量式为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-\tau_{xy}}{x} + \frac{(-p + \tau_{yy})}{y} + \frac{-\tau_{zy}}{z} + S_{My} \quad (2.1.9b)$$

动量方程的 z 分量式为

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-\tau_{xz}}{x} + \frac{-\tau_{yz}}{y} + \frac{(-p + \tau_{zz})}{z} + S_{Mz} \quad (2.1.9c)$$

压强的符号与法向粘性应力符号相反。因为通常的惯例是以拉应力为正法向应力, 所以定义为压缩法应力的压强有负号。

式(2.1.9a) ~ 式(2.1.9c)的源项 S_{Mx} 、 S_{My} 和 S_{Mz} 仅包括体积力, 如重力产生的体积力可模拟为 $S_{Mx} = 0$, $S_{My} = 0$, $S_{Mz} = -g$ 。

四、三维能量方程

能量方程是由热力学第一定律导出的: 流体粒子的能量增加率等于给流体粒子的加热率与对流体粒子的功率之和。单位体积能量增加率为

$$\frac{dE}{dt}$$

式中, E 为比能, 即单位质量流体的能量。如上可导出流体粒子单位体积能量增

加率的方程。

1. 表面力做的功

流体元表面力对流体粒子做的功率等于力和力方向的速度分量之积。例如作用在 x 方向的表面力在 x 方向的净功率是

$$\frac{[u(-p + \tau_{xx})]}{x} + \frac{(u_{yx})}{y} + \frac{(u_{zx})}{z} \quad x \ y \ z$$

作用在 y, z 方向的表面力也对流体粒子做功。给出另外的这些表面力对流体粒子的功率

$$\begin{aligned} & \frac{(v_{xy})}{x} + \frac{[v(-p + \tau_{yy})]}{y} + \frac{(v_{zy})}{z} \quad x \ y \ z \\ & \frac{(w_{xz})}{x} + \frac{(w_{yz})}{y} + \frac{[w(-p + \tau_{zz})]}{z} \quad x \ y \ z \end{aligned}$$

所有表面力对单位体积流体粒子的总功率由以上三项之和除以体积 $x \ y \ z$ 得到。含有压强的项可以放在一起, 写成更紧凑的矢量形式

$$- \frac{(up)}{x} - \frac{(vp)}{y} - \frac{(wp)}{z} = - \nabla_j \tau_j(pu)$$

于是得到表面应力对单位体积流体粒子的总功率

$$\begin{aligned} & [- \nabla_j \tau_j(pu)] + \frac{(u_{xx})}{x} + \frac{(u_{xy})}{y} + \frac{(u_{xz})}{z} + \frac{(v_{yx})}{x} \\ & + \frac{(v_{yy})}{y} + \frac{(v_{yz})}{z} + \frac{(w_{zx})}{x} + \frac{(w_{zy})}{y} + \frac{(w_{zz})}{z} \end{aligned}$$

2. 热传导引起的能量通量

热通量矢量有三个分量 q_x, q_y 和 q_z 。给流体粒子加热, 在 x 方向的净传热率为越过面 W 的热输入率和越过面 E 的热损失率之差:

$$q_x - \frac{q_x}{x} \frac{x}{2} = q_x + \frac{q_x}{x} \frac{x}{2} \quad y \ z = - \frac{q_x}{x} \quad x \ y \ z$$

类似地, 在 y 方向、 z 方向加热流动给流体粒子的净传热率为

$$\begin{aligned} & - \frac{q_y}{y} \quad x \ y \ z \\ & - \frac{q_z}{z} \quad x \ y \ z \end{aligned}$$

由以上三项之和除以体积 $x \ y \ z$ 得到单位体积流体粒子的总加热率

$$- \frac{q_x}{x} - \frac{q_y}{y} - \frac{q_z}{z} = - \nabla_j q_j$$

热传导的 Fourier 定律将热通量与当地温度梯度联系起来, 即

$$q_x = -k \frac{T}{x}, \quad q_y = -k \frac{T}{y}, \quad q_z = -k \frac{T}{z}$$

式中, T 为温度, k 为流体热传导率。写成如下矢量形式

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (2.1.10)$$

式中, ∇ 为梯度运算符号。下面得到最终由越过流体元边界的热传导给流体粒子的加热率

$$- \oint \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = - \oint (k \nabla T) \cdot \mathbf{n} \quad (2.1.11)$$

3. 能量方程

至此还未定义流体的比能 E 。流体的能量常定义为内能(热能) i 、动能 $\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ 和重力势能之和。这一定义认为流体元存储重力势能。也可以认为重力是体积力, 即重力在流体元经过重力场时对它做功。

这里把重力势能作为源项以考虑重力的作用。如前定义能量方程中的源项 S_E 为单位时间内提供给单位体积流体的能量源。流体粒子的能量守恒必须有: 流体粒子的能量变化率等于对流体粒子的净功率、对流体粒子的净加热率和源产生的能量增加率之和。能量方程是

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & - \oint (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}) + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}_x)}{x} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}_y)}{y} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}_z)}{z} \\ & + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}_x)}{x} + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}_y)}{y} + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}_z)}{z} + \frac{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}_x)}{x} \\ & + \frac{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}_y)}{y} + \frac{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}_z)}{z} + \nabla \cdot (k \nabla T) + S_E \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

式中, 流体的比能 E 定义为单位质量流体的内能和动能之和, $E = i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ 。

尽管式(2.1.12)是完全的能量方程, 通常做法是提走动能(机械能)得到内能 i 或温度 T 的方程。具体做法如下。

用 u 、 v 、 w 分别乘上 x 、 y 、 z 方向的动量方程(2.1.9)中三式后加在一起得到动能的守恒方程。可以证明, 动能的守恒方程是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \right) = & - u \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\tau_{xy}}{y} + \frac{\tau_{xz}}{z} \right) \\ & + v \left(\frac{\tau_{yx}}{x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\tau_{yz}}{z} \right) \\ & + w \left(\frac{\tau_{zx}}{x} + \frac{\tau_{zy}}{y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + u \cdot S_M \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

式中, S_M 是动量源矢量, 它的三个分量即 S_{M_x} 、 S_{M_y} 、 S_{M_z} 。将式(2.1.12)与式(2.1.13)相减, 并定义新的源项 $S_i = S_E - u \cdot S_M$, 得内能方程

$$\frac{di}{dt} = - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \tau_{xx} \frac{u}{x} + \tau_{xy} \frac{u}{y} + \tau_{xz} \frac{u}{z}$$

$$+ \quad yx \frac{v}{x} + \quad yy \frac{v}{y} + \quad yz \frac{v}{z} + \quad zx \frac{w}{x} + \quad zy \frac{w}{y} + \quad zz \frac{w}{z} + S_i \quad (2.1.14)$$

不可压缩流体的特别情形 $i = c_v T$, c_v 是比定容热容, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 。于是, 上式成为温度方程

$$c_v \frac{dT}{dt} = \quad \cdot (k T) + \quad xx \frac{u}{x} + \quad xy \frac{u}{y} + \quad xz \frac{u}{z} + \quad yx \frac{v}{x} + \quad yy \frac{v}{y} + \quad yz \frac{v}{z} + \quad zx \frac{w}{x} + \quad zy \frac{w}{y} + \quad zz \frac{w}{z} + S_i \quad (2.1.15)$$

对于可压缩流体, 往往将方程(2.1.12)写为焓方程。流体的比焓 h 和总比焓 h_0 定义为

$$h = i + \frac{p}{\rho}, \quad h_0 = h + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

比较这两个定义和比能 E 的定义, 得到

$$h_0 = i + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = E + \frac{p}{\rho} \quad (2.1.16)$$

将式(2.1.16)代入方程(2.1.12)整理后得到总焓方程

$$\begin{aligned} \frac{(\quad h_0)}{t} + \quad j \Re(\quad h_0 \mathbf{u}) = \quad j \Re(k T) + \frac{p}{t} + \frac{(\quad u_{xx})}{x} + \frac{(\quad u_{xy})}{y} \\ + \frac{(\quad u_{xz})}{z} + \frac{(\quad v_{yx})}{x} + \frac{(\quad v_{yy})}{y} + \frac{(\quad v_{yz})}{z} \\ + \frac{(\quad w_{zx})}{x} + \frac{(\quad w_{zy})}{y} + \frac{(\quad w_{zz})}{z} + S_E \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

必须强调, 方程式(2.1.14)、式(2.1.15)和式(2.1.17)不是新的、额外的守恒律, 只是能量方程(2.1.12)的替换形式。

2.2 状态方程

由五个偏微分方程组成的系统可以描述三维流体的运动: 质量守恒方程(2.1.2), x 、 y 、 z 方向的动量方程(2.1.9a) ~ (2.1.9c) 和能量方程(2.1.12)。未知变量中有四个热力学变量: i 、 p 、 ρ 和 T 。这里简要讨论并指出四个变量的关系。热力学变量间的关系来自热力学平衡态的假定。流体速度可能很大, 但一般都足够小。尽管流体粒子的物理量由一个地方到另一个地方时会迅速变化, 但流体热力学的自身调整如此之快, 变化只有瞬时影响。因此流体总是保持热力学平衡态。惟一例外的是有强激波的某些流动。但即使是这些流动, 其中的一些平衡态假定的近似程度仍很好。

描述物质的热力学平衡态只要两个状态变量。状态方程把其他变量都联系

到这两个状态变量上。如果用 ρ 和 T 作为状态变量, 压强 p 和比内能 i 的状态方程是

$$p = p(\rho, T), \quad i = i(\rho, T)$$

完全气体的状态方程

$$p = \rho RT, \quad i = c_v T$$

式中, R 是气体常数。热力学平衡态假定减去其他变量只保留两个状态变量。可压缩流体流动中状态方程提供了能量方程和质量守恒方程及动量方程之间的联系。有了这一联系, 流场压强和温度变化可能使密度发生变化。

低速流动的液体和气体作为不可压缩流体, 没有密度变化就没有能量方程和质量守恒方程及动量方程的联系, 往往只用质量守恒方程及动量方程求解流场。如果问题涉及传热, 只需要在其他变量之外解能量方程。

2.3 牛顿流体的 Navier-Stokes 方程

控制方程还含有未知的粘性应力分量 τ_{ij} 。引入适当的粘性应力 τ_{ij} 的模型后可得最有用的流体流动守恒方程形式。很多流动中, 粘性应力可以表示为局部变形率或应变率的函数。三维流动局部变形率由线变形率和体积变形率组成。

所有气体和大多数液体是各向同性的。含有大量聚合物分子的液体可以展现各向异性的粘性应力性质, 这是链状分子沿流动取向的结果。这样的流体超出本书讨论范围, 本书仍假定流体是各向同性的。三维流体元的线变形率有九个分量, 各向同性流体只有六个独立分量(H. Schlichting, 1979), 记为 e_{ij} 。指标系统与应力分量一致(2.1 节)。

三个线伸长变形率分量是

$$e_{xx} = \frac{u}{x}, \quad e_{yy} = \frac{v}{y}, \quad e_{zz} = \frac{w}{z}$$

六个线剪切变形率分量是

$$\begin{aligned} e_{xy} &= e_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{y} + \frac{v}{x} \right) \\ e_{xz} &= e_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{z} + \frac{w}{x} \right) \\ e_{yz} &= e_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{z} + \frac{w}{y} \right) \end{aligned}$$

体积变形率是

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = \nabla_j u_j$$

牛顿流体的本构方程(Constitution Equation)反映了粘性应力与变形率的

关系。由于应力张量的对称性, 九个粘性应力分量中只有六个独立分量:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}, & \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}, & \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

本构关系含有两个常数: 一个是动力粘度 μ 它将应力联系到线变形; 另一个是第二粘度 λ , 它将应力联系到体积变形。人们对第二粘度知之甚少, 因为实际应用中它的作用很小。对于气体, 一个有效的近似取值是 $\lambda = 2\mu/3$ (H. Schlichting, 1979)。液体不可压缩, 因此质量守恒, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, 粘性应力正好是局部线应变率乘动力粘度的两倍。

将上面的剪应力[式(2.3.1)]代入式(2.1.9a、b、c)得到以两位独立推导此方程的 19 世纪科学家命名的方程, 即著名的 Navier-Stokes 方程(N-S 方程):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nabla \cdot \tau \right) + \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + S_{Mx} \end{aligned} \quad (2.3.2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \left(2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nabla \cdot \tau \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + S_{My} \end{aligned} \quad (2.3.2b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left(2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \nabla \cdot \tau \right) + S_{Mz} \end{aligned} \quad (2.3.2c)$$

将式(2.3.2a)的粘性项重排如下:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho} \left(2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nabla \cdot \tau \right) + \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\nabla \cdot \tau \right) \\ &= \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) + S_{Mx} \end{aligned}$$

其意图是把两个对粘性应力贡献较小的项(即上式第一个等号右边方括弧内的项和最后一项, 合并记为 S_{Mx}) 隐进动量源, 以简化动量方程。定义新的源项

$$S_{Mx} = S_{Mx} + S_{Mx} \quad (2.3.3)$$

y 、 z 方向的粘性应力也可类似重排, 仍用 S_{Mx} 、 S_{My} 和 S_{Mz} 表示合并后的新的源项。

对建立有限体积法来说, N-S 方程最有用的形式是

$$\frac{du}{dt} = -\frac{p}{x} + \mu(\mu u) + S_{Mx} \quad (2.3.4a)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{p}{y} + \mu(\mu v) + S_{My} \quad (2.3.4b)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{p}{z} + \mu(\mu w) + S_{Mz} \quad (2.3.4c)$$

如果在内能方程(2.1.14)中的粘性应力用到牛顿模型, 整理后可以得到

$$\frac{di}{dt} = -p - \mu u + \mu(kT) + S_i \quad (2.3.5)$$

耗散函数 描述粘性应力在内能方程中的全部作用, 经过一些代数运算可证明 为

$$\begin{aligned} &= \mu \left[2 \left(\frac{u}{x} \right)^2 + \left(\frac{v}{y} \right)^2 + \left(\frac{w}{z} \right)^2 + \frac{u}{y} + \frac{v}{x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u}{z} + \frac{w}{x} \right]^2 + \left(\frac{v}{z} + \frac{w}{y} \right)^2 + (\mu u)^2 \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

耗散项由平方项组成, 因而非负, 表示一个对流体粒子做变形功的内能源。变形功来自引起机械运动的作用, 并转换为内能或热。

下面给出以后各章要用到的几个简化流动模型的方程。

1. 无质量力的二维不可压缩流体流动

在直角坐标系的 xOy 平面内建立方程组(动量方程和质量守恒的连续性方程)

$$\begin{aligned} \frac{u}{t} + u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y} &= -\frac{1}{x} \frac{p}{x} + \frac{^2u}{x^2} + \frac{^2u}{y^2} \\ \frac{v}{t} + u \frac{v}{x} + v \frac{v}{y} &= -\frac{1}{y} \frac{p}{y} + \frac{^2v}{x^2} + \frac{^2v}{y^2} \\ \frac{u}{x} + \frac{v}{y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

运动粘度 $= \mu/\rho$ 。无量纲的原始变量是 u, v, p , 而 x 和 y 作为常数。方程组是在欧拉坐标系中给出的。欧拉坐标系指固定的空间坐标系, 流体经过它流动。对方程组进行无量纲化处理, 记特征速度为 U , 特征长度为 L , 压强尺度为 U^2 , 时间尺度为 L/U 。仍用原变量名表示无量纲量, 则无量纲方程组为

$$\begin{aligned} \frac{u}{t} + u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y} &= -\frac{p}{x} + \frac{1}{Re} \frac{^2u}{x^2} + \frac{^2u}{y^2} \\ \frac{v}{t} + u \frac{v}{x} + v \frac{v}{y} &= -\frac{p}{y} + \frac{1}{Re} \frac{^2v}{x^2} + \frac{^2v}{y^2} \\ \frac{u}{x} + \frac{v}{y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

其中, 雷诺数 Re 定义为

$$Re = \frac{UL}{\mu} \tag{2.3.9}$$

如果从流体运动的控制方程中去掉粘性项(令 $\mu=0$), 就得到理想流体运动的控制方程(欧拉方程)。

2. 不可压缩流体二维流动的流函数方程和涡量方程

将不可压缩流体二维流动的流函数定义为

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.3.10}$$

由定义可知, 流函数已自动满足连续性方程。

将涡量定义为流体质点旋转角速度的两倍, 二维流动的涡量只有一个分量

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.3.11}$$

二维不可压缩流体流动的两个运动方程(2.3.8)分别对 y 和 x 求偏导后相减, 可消去压强, 得到涡量的对流扩散方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \tag{2.3.12}$$

式中, $\nu = 1/Re$ 为粘性扩散系数。将流函数表示的速度分量代入涡量表达式, 得到流函数的泊松方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - \frac{\omega}{\nu} \tag{2.3.13}$$

u, v 是 ψ 的函数, 因而涡量方程是典型的输运(对流)方程模型。涡量方程由非定常项、非线性的对流项和二阶扩散项组成, 是非定常、非线性的二阶偏微分方程。给定初始条件和边界条件后, 联立式(2.3.12)和式(2.3.13)按时间步长推进求解初值问题, 可以得到流场的流函数和涡量分布, 再由流函数按式(2.3.10)定义得到速度场。

以下各章建立计算格式时, 用到的简化模型方程还有一维对流扩散方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{2.3.14}$$

式中, 常数 a 为对流速度。式(2.3.14)中取 $a=0$ 得到一维扩散方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{2.3.15}$$

式(2.3.14)取 $\nu = 0$ 得到一维对流方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{2.3.16}$$

3. 不可压缩流体二维流动的压强泊松方程

不可压缩流体二维流动的两个运动方程(2.3.8)分别对 x 和 y 求偏导, 相加

后用到连续性条件可得压强泊松方程

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -2 \left(\frac{u}{y} \frac{v}{x} - \frac{u}{x} \frac{v}{y} \right) \tag{2.3.17}$$

2.4 流体流动控制方程的守恒形式

下面做一总结,在表 2.1 中列出控制非定常、三维流体流动和可压缩牛顿流体热传导方程组的守恒形式(或散度形式)。

表 2.1 可压缩牛顿流体运动的控制方程

项目	方 程	公式编号
质量	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$	(2.4.1)
x-动量	$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\mu \nabla u) + S_{Mx}$	(2.4.2a)
y-动量	$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla \cdot (\mu \nabla v) + S_{My}$	(2.4.2b)
z-动量	$\frac{\partial (\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \cdot (\mu \nabla w) + S_{Mz}$	(2.4.2c)
内能	$\frac{\partial (\rho i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho i \mathbf{u}) = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T) + S_i$	(2.4.3)
状态方程	$p = p(\rho, T), \quad i = i(\rho, T)$ (完全气体 $p = \rho R T, \quad i = c_v T$)	(2.4.4)

动量源 S_M 和耗散函数 Φ 分别由式(2.3.3)和式(2.3.6)定义。

值得注意的是,在 2.2 节热力学平衡假定中用了两个额外代数方程作为五个流动(偏微分)方程的补充。此外,引入的牛顿模型用速度梯度分量表示粘性应力,产生七个未知量的方程组。方程数目和未知函数的数目相等,在数学上这个系统是封闭的,即如果提供了适当的辅助条件(初始条件和边界条件),方程组是可解的。

2.5 一般输运方程的微分形式和积分形式

从上节可清楚看到各个守恒方程间的共同点。如果引入流体物理量的一般表达 ϕ , 包括标量如温度和污染物浓度等, 那么所有守恒形式的方程可写成如下有用的形式:

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{j} \nabla \phi) + S \tag{2.5.1}$$

用文字叙述为: 流体元的 $\frac{d}{dt}$ 的增加率加上 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$ 的净流出率等于 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{D} \nabla \phi)$ 的扩散增加率加上 S 的源增加率。

方程(2.5.1)就是流体元的标量 ϕ 的输运方程。它清楚地突显了各种输运过程: 方程左边是变化率项和对流项, 方程右边是扩散项(\mathbf{D} 是扩散系数)和源项。当然, 为了引出共同特性, 我们不得不将一些方程间不共有的项放入源项。注意方程(2.5.1)可以改为内能方程, 只要利用状态方程把 ϕ 换为 T 。

方程(2.5.1)在有限体积法中是计算方法的出发点。置 ϕ 为 $1, u, v, w, i$ (或 T, h_0), 适当的选择扩散系数 \mathbf{D} 和源项, 就分别得到了表 2.1 中质量、动量和能量守恒的五个偏微分方程中的每一个特殊形式。建立有限体积法的一个关键步骤是在三维控制体积(CV)上积分(见式(2.5.1)), 得到

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \phi dV + \int_{CV} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) dV = \int_{CV} \nabla \cdot (\rho \mathbf{D} \nabla \phi) dV + \int_{CV} S \phi dV \quad (2.5.2)$$

高斯散度定理指出, 任意矢量 \mathbf{a} 的散度在某体积上的积分等于 \mathbf{a} 在这个体积表面的法向分量在整个表面 A 的积分, 即

$$\int_{CV} \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dA \quad (2.5.3)$$

$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$ 的物理解释是矢量 \mathbf{a} 在面元 dA 法向矢量 \mathbf{n} 方向的分量。应用高斯散度定理, 方程(2.5.2)左边第二项对流项的积分和右边第一项扩散项的积分可重写为对整个边界面的积分, 即

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \phi dV + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{D} \nabla \phi) dA + \int_{CV} S \phi dV \quad (2.5.4)$$

为表达物理意义, 方程(2.5.4)左边第一项的积分、微分顺序已经调换。这一项是控制体内流体量 ϕ 的总变化率。标量积 $\mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{u} \phi)$ 表示由于流体沿着外法向矢量 \mathbf{n} 流动引起的 ϕ 的通量, 因而方程(2.5.4)左边第二项(对流项)表示由于对流所产生的流体元物理量 ϕ 的净减少率。

扩散通量沿着流体量 ϕ 的负梯度方向进行, 即沿着 $-\nabla \phi$ 取正值。例如热是沿着温度的负梯度方向传递的。因此, 标量积 $\mathbf{n} \cdot (-\rho \mathbf{D} \nabla \phi)$ 是沿着外法向矢量的扩散通量分量, 也就是流出流体元的通量。类似地, $\mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{D} \nabla \phi)$ 是沿着内法向矢量 $-\mathbf{n}$ 的扩散通量分量, 也就是流入流体元通量。于是方程(2.5.4)右边第一项, 即扩散项联系到进入流体元的通量, 代表了流体元的流体量 ϕ 由于扩散的净增加率。这个方程右边的最后一项给出由于源的存在流体量 ϕ 的增加率。方程(2.5.4)对于控制体内的流体可表达为: ϕ 的增加率加上经过边界对流 ϕ 的净减少率等于经过边界扩散 ϕ 的增加率加上 S 的净生成率。

上述讨论阐明, 偏微分方程对有限(宏观)控制体流体量的积分产生守恒的表述。定常问题中方程(2.5.4)的变化率项等于零。这导致定常输运方程的积分

形式

$$\int_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA + \int_{CV} S dV \quad (2.5.5)$$

非定常问题中, 方程(2.5.4)还必须在一个短时间间隔上对时间积分, 比如说从 t 到 $t + \Delta t$ 。这导致最一般的输运方程的积分形式

$$\int_{CV} \frac{dV}{dt} + \int_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA \Delta t = \int_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA \Delta t + \int_{CV} S dV \Delta t \quad (2.5.6)$$

2.6 流体流动方程的分类

一、流动问题物理特性的分类

前面已经导出流体流动的守恒方程。现在把注意力转到初始条件和边界条件问题上来, 用这些条件和方程一起构造流体流动的适定数学模型。首先在这一节区分两类主要的物理特性: 平衡问题和发展问题。同时, 引入三类方程的划分: 椭圆型、抛物型和双曲型方程。

1. 平衡问题

第一类问题是定常态的情形, 例如温度在固体材料杆内的定常态分布, 固体物在给定载荷下的均衡应力分布, 以及很多定常的流体流动。这和许多其他定常态问题一样, 都是由椭圆型方程控制的。椭圆型方程模型是 Laplace 方程, 描述不可压缩流体的无旋流动和定常态热传导。二维 Laplace 方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0 \quad (2.6.1)$$

最简单的平衡态例子是绝热金属棒的定常态热传导。方程(2.6.1)的 ϕ 换为 T , 棒的两端 ($x = 0$ 和 $x = L$) 有不同的温度 (T_0 和 T_L), 保持不变 (见图 2.4)。

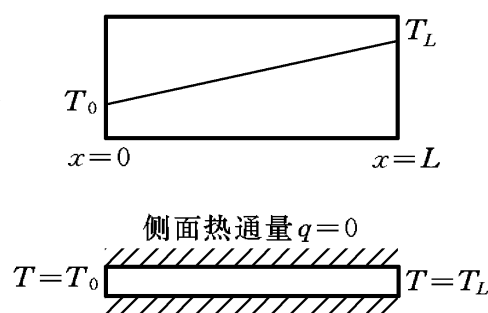


图2.4 绝热棒的定常温度分布

这个问题是一维的, 由方程 $k d^2 T / dx^2 = 0$ 控制。在给定边界条件下, 沿 x 方向的温度分布当然是直线。在解域的所有边界上规定因变量条件 (这里是温度或它的导数, 热通量), 则这个问题和所有的椭圆型问题一样, 可得到惟一解。在所有边界上规定数据的问题称为边值问题。

椭圆型问题的重要特性是: 内部解的扰动 (例如突然出现一个局部的小热源引起的温度的变化) 使得解处处发生变化, 扰动信号在内部向所有方向传播。所以即使边界上有间断, 椭圆型方程描述的物理问题的解总是光滑的。这对数值方

法的设计者是一个相当好的优点。为保证信息在所有方向传播,椭圆型问题的数值技术必须让一点的事件受到它所有邻点的影响。

2. 发展问题

瞬态热传导、所有非定常流动和波现象是发展或传播问题的例子。这些问题由抛物型方程或双曲型方程控制。然而,不是所有的发展问题都是非定常的。我们将看到某些确定的定常问题由抛物型方程或双曲型方程描述。这种情况下,某个流动方向像时间坐标,沿着这个方向发展是可能的。

抛物型方程描述与时间有关的问题,伴随显著耗散。例子有非定常粘性流和非定常热传导。抛物型方程模型是扩散方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.6.2)$$

绝热金属棒温度的瞬态分布(又是 $T = T_0$)。棒的两端($x = 0$ 和 $x = L$)有相等的温度 T_0 , 保持不变。这个问题受扩散过程控制。在时刻 $t = 0$ 去掉原有的均匀分布的源后,棒冷却下来时出现了这个问题。扩散方程(2.6.2)的温度分布解开始是抛物型,最大值在 $L/2$ 。开始的二次温度分布发生指数衰减,达到定常态后,在整根棒的温度均匀分布为 T_0 。规定初始条件,且在整个 $t > 0$ 的时间规定所有边界的边界条件,这种类型的问题称为初-边值问题。

在解域(即 $0 < x < L$ 和 $t > 0$)一点(x_1, t_1)的扰动只能影响 $t > t_1$ 以后的事件,除非我们允许时间旅行。解随时间变化且在空间扩散。耗散作用保证内部解在时间 $t > 0$ 总是光滑的,即使初始条件含有间断。定常态随着时间 t 而实现,在方程(2.6.2)中置 $\partial / \partial t = 0$, 很容易看到这是椭圆型问题。椭圆型方程成为控制棒的定常温度分布的方程。

双曲型方程在振动问题分析中很重要。一般出现在与时间有关、可忽略耗散的过程。双曲型方程模型是波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.6.3)$$

波动方程控制有张力小幅度振动弦的横向($y = y$)位移和声振荡。常数 c 是波速。用方程(2.6.3)计算长度为 L 的弦的基本振型的时间演化相对较容易。规定弦的位移 y 的两个初始条件和 $t > 0$ 时整个边界的一个边界条件,可以计算出波方程(2.6.3)或其他双曲型方程的解。因此,双曲型问题也称为初-边值问题。

如果初始幅度 a 给定,这个问题的解是

$$y(x, t) = a \cos(ct/L) \sin(x/L) \quad (2.6.4)$$

解的振动幅度保持常数,说明没有系统阻尼。无阻尼情形有一个重要特点。例如考虑一个初始解形状为三角形,其顶峰是曲率半径极小的一段圆。这种形状在顶点有尖锐间断,但是它能用 Fourier 级数表示为正弦波的组合。控制方程是

线性的, 因此每一单个Fourier 分量, 还有它们的和保持幅度不变。最后结果是由于没有能够去掉斜坡转折的耗散机制, 间断仍然不消失。

以接近或超过声速流动的可压缩流体出现激波, 在此速度下的无粘流控制方程变为双曲型的。激波间断更突出了这种流动的双曲型性质。解的内部必须容许间断存在的可能性, 这就限定了双曲型问题的计算算法。

下面将证明双曲型问题一点的扰动影响限于有限的空间, 双曲型问题中扰动传播的速度为有限声速 c 。相比之下, 椭圆型和抛物型模型假定了传播速度是无限的。

二、双曲型方程中特征线的作用

双曲型方程有一个特性, 即它与有限速度(波速)有关。在它的问题中, 信息以波速传播。这使双曲型方程有别于其他两个类型的方程。为建立双曲型问题中的特征线的概念, 再考虑由波方程(2.6.3)描述的简单的双曲型问题。用替换变量 $\xi = x - ct$ 和 $\eta = x + ct$ 可将波方程变换为下列标准形式的方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (2.6.5)$$

由方程(2.6.5)很容易解出:

$$\phi(\xi, \eta) = F_1(\xi) + F_2(\eta)$$

F_1, F_2 可以是任意形式的函数。回到原始变量, 方程(2.6.5)的一般解为

$$\phi(x, t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct) \quad (2.6.6)$$

如果 $x - ct$ 是常数, 则解函数的第一个分量 F_1 是常数, 即在 $x-t$ 平面沿斜率 $dx/dt = 1/c$ 的直线 F_1 是常数; 如果 $x + ct$ 是常数, 则解函数的第二个分量 F_2 是常数, 即在 $x-t$ 平面沿斜率 $dx/dt = -1/c$ 的直线 F_2 是常数。 $x - ct = \text{常数}$ 和 $x + ct = \text{常数}$ 的直线称为特征线。函数 F_1 和 F_2 代表速度为 $+c$ 和 $-c$ 、形状或幅度不变的行波的简单波函数。从问题的初始条件和边界条件可得到确定形式的函数 F_1 和 F_2 。

考虑很长的弦($-\infty < x < +\infty$), 且令下列初始条件成立

$$\phi(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (2.6.7)$$

结合(2.6.6)和(2.6.7), 可得到

$$F_1(x) + F_2(x) = f(x), \quad -cF_1(x) + F_2(x) = g(x) \quad (2.6.8)$$

可以证明, 初始条件(2.6.7)的波方程特解为

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (2.6.9)$$

仔细观察公式(2.6.9), 可发现解域一点 (x, t) 的 ϕ 只依赖于区间 $(x - ct, x + ct)$ 的初始条件。这就意味着 (x, t) 的解与区间 $(x - ct, x + ct)$ 以外的初始条件无关。

图2.5说明了这一点。通过点 (x, t) 的特征线($x - ct = \text{常数}$, $x + ct = \text{常数}$)

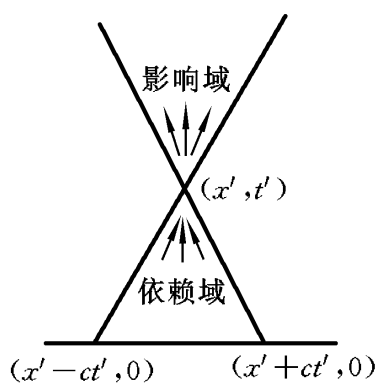


图 2.5 双曲型问题的依赖域和影响域

与 x 轴分别交于 $(x - ct, 0)$ 和 $(x + ct, 0)$ 。在 $x-t$ 平面 x 轴与特征线包围的区域称为依赖域。

按照公式(2. 6. 9), 点 (x, t) 的解只受依赖域内的事件影响, 与依赖域外的事件无关。物理上, 这是由于通过解域相互影响的传播速度有限。受点 (x, t) 变化影响的事件限于图 2. 5 中的影响域, 也是由特征线为界。

图 2. 6a 表明, 在 $x = 0$ 和 $x = L$ 固定的弦的振动情形。极靠近 x 轴的点的依赖域由两条起于 x 轴上的点的特征线为界。通过这些点, 譬如 P 点的特征线与边界相交。 P 点的依赖域由这两条特征线和直线 $t = 0, x = 0$ 和 $x = L$ 围住。

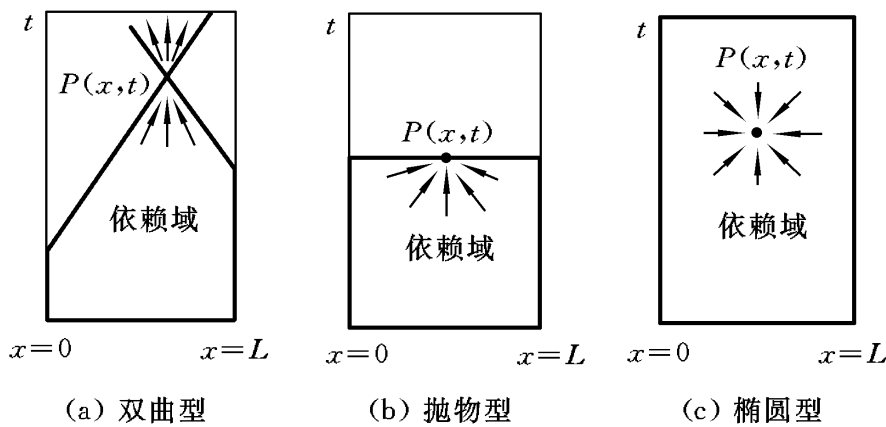


图 2. 6 依赖域

抛物型和椭圆型问题中依赖域的形状(见图 2. 6b 和 c)不同, 因为信息传播速度假定为无限。粗线划出各依赖域的边界, 指出了每一种情况下能在 $P(x, t)$ 产生解需要初始条件和边界条件的区域。一点的变化影响其他点的方式取决于物理问题是表达定常态还是表达非定常态, 扰动的传播速度是无限的还是有限的。这就导致物理特性的分类, 伴随的偏微分方程可分为椭圆型、抛物型和双曲型问题。考虑三个简单的模型方程说明了如何区分各不同类别的特点。随后, 在下一节讨论更复杂的偏微分方程的分类, 并简略叙述按求解流动问题分类建立的计算方法的限制。表 2. 2 列出目前已识别的主要特性。

表 2. 2 物理特性分类

问题类型	方程类型	模型方程	条件	解域	解的光滑性
平衡问题	椭圆型	$\nabla^2 \phi = 0$	边界条件	封闭域	总是光滑
有耗散发展问题	抛物型	$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla^2 \phi$	初值和边界条件	开域	总是光滑
无耗散发展问题	双曲型	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi$	初值和边界条件	开域	可以间断

三、简单偏微分方程中的分类法

模型方程要求的边界条件的个数与偏微分方程的类型有关。如椭圆型方程,只需要一个边界条件就可以确定整个流场的均衡态。抛物型方程和双曲型方程除了需要边界条件外还需要起始条件。根据偏微分方程的特征分析能够给出有关边界条件个数的信息,但往往是很困难的。下面介绍二阶拟线性偏微分方程的分类。

偏微分方程分类法是为一般的二阶偏微分方程在坐标(x、y)下建立的。考虑

$$a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f + g = 0 \tag{2.6.10}$$

首先假定方程是线性的, a、b、c、d、e、f 和 g 是常数。

偏微分方程的分类由它的最高阶导数的特点所支配, 所以只需要考虑二阶导数项。二阶偏微分方程的类别可以通过搜索可能的简单波解来识别, 如果有就是双曲型, 否则就是抛物型或椭圆型。

简单波解要求下面的特征方程有两个实根

$$a \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b \frac{dy}{dx} + c = 0 \tag{2.6.11}$$

特征方程的根存在与否取决于判别式(b²- 4ac)的值。表 2.3 列出了三种情况。

表 2.3 二阶线性偏微分方程分类

b ² - 4ac	方程类型	特征
> 0	双曲型	两个实特征
= 0	抛物型	一个实特征
< 0	椭圆型	无实特征

发展型拟线性偏微分方程与时间有关, 其最高阶导数项是线性项。二阶拟线性偏微分方程的分类可参照二阶线性偏微分方程的分类。如果a、b 和c 是x、y 的函数或方程是非线性的, 也可以应用寻找方程特征根的方法。在后一种情况, a、b 和 c 可以是依赖变量或它的一阶导数的函数, 在解域的各区间可能有不同的方程类型。作为例子, 考虑下列方程

$$y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0 \tag{2.6.12}$$

观察区间1< y< - 1 的特性, 有a= a(x, y)= y, b= 0, c= 1, 行列式(b²- 4ac) 的值等于- 4y。需要区分以下三种情况:

- (1) 如果 $y < 0, b^2 - 4ac > 0$, 双曲型方程;
- (2) 如果 $y = 0, b^2 - 4ac = 0$, 抛物型方程;
- (3) 如果 $y > 0, b^2 - 4ac < 0$, 椭圆型方程。

方程(2.6.12)成为混合型的方程。按照 y 值的不同, 方程分别是局部双曲型、抛物型或椭圆型的。非线性的情况同样根据局部 a 、 b 、 c 的值应用分类法。

N 个独立变量 (x_1, x_2, \dots, x_N) 的二阶偏微分方程的分类可以类似地写成下列形式:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N A_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + H = 0 \tag{2.6.13}$$

A_{jk} 为系数矩阵的元素, 其中 $A_{jk} = A_{kj}$ 。方程可以按矩阵特征值分类(C. A. J. Fletcher, 1991), 因此需要找到下列行列式的特征值

$$\det[A_{jk} - I] = 0 \tag{2.6.14}$$

这里 I 是单位矩阵。分类规则是:

- (1) 如有任一特征值 $= 0$, 为抛物型方程;
- (2) 如所有特征值 > 0 且同号, 为椭圆型方程;
- (3) 如所有特征值 < 0 且只有一个不同号, 为双曲型方程。

对于 Laplace 方程、扩散方程和波动方程的情形, 容易证明应用这个规则和解特征方程(2.6.14)的结果相同。

多于两个独立变量的一阶偏微分方程系统可类似写成矩阵形式, 它们的分类与矩阵特征值有关。二阶偏微分方程系统或一阶、二阶偏微分方程的混合系统也可引入辅助变量将二阶偏微分方程表示为一阶偏微分方程组再进行分类。必须仔细选择辅助变量使得矩阵无奇异性。如两个独立变量的一阶偏微分方程系统

$$\begin{aligned} a_1 \frac{u}{x} + b_1 \frac{u}{y} + c_1 \frac{v}{x} + d_1 \frac{v}{y} &= q_1 \\ a_2 \frac{u}{x} + b_2 \frac{u}{y} + c_2 \frac{v}{x} + d_2 \frac{v}{y} &= q_2 \end{aligned} \tag{2.6.15}$$

特征方程(2.6.11)的根存在与否取决于判别式 $(b^2 - 4ac)$ 的值。这里

$$a = a_1c_2 - a_2c_1, b = a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1, c = b_1d_2 - b_2d_1$$

一阶偏微分方程系统的分类可参照表 2.3 进行。

四、流体流动方程的分类

N -S 方程和它的简化形式可以用矩阵法分类。这里避开细节, 在表2.4 中列出主要结果。有兴趣的读者可参考 C. A. J. Fletcher(1991) 的详细讨论。

表2.4 的分类是流动方程的形式分类。实际上流体多以复杂的方式流动。定

常 N-S 方程和能量(或焓)方程形式上是椭圆型的;非定常方程形式上是抛物型的。

表 2.4 流体流动方程一般的分类

类型	定常流	非定常流
粘性流	椭圆型	抛物型
无粘流	M< 1, 椭圆型 M> 1, 双曲型	双曲型
薄剪切层	抛物型	抛物型

无粘流方程组的数学分类不同于 N-S 方程和能量方程,因为完全没有高阶(粘性)项。无粘流方程组的分类取决于压缩性所起的作用,因而取决于马赫数M的大小。无粘流在 M< 1 时的椭圆性质来自压强的作用。当 M< 1 时,压强能以大于流速的声速传播扰动;如果 M> 1,流速大于扰动传播的速度,压强不能影响上游方向的事件。影响域的限制是双曲型现象的关键特点,所以超声速无粘流是双曲型的。下面将看到证实这一特性的例子。

薄剪切层流各流动方向(x、z 方向)的速度导数比横向(y 方向)的速度导数小得多。边界层、射流、混合层和尾流,以及充分发展的管流属于这一类型。在这一条件下,控制方程只含有一个(二阶)扩散项,因此分类属于抛物型。

为说明无粘流可能出现的复杂性,分析马赫数为M 的自由流绕细长物体的定常、等熵、无粘、可压缩流的控制方程:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$$

(2.6.16)

在方程(2.6.13)中取 N = 2, H = 0, x₁ = x, x₂ = y, 矩阵元素为 A₁₁ = (1 - M²), A₁₂ = A₂₁ = 0, A₂₂ = 1。方程分类需要解特征方程

$$\det \begin{vmatrix} (1 - M^2) - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

特征值 的两个解是 λ₁ = 1 和 λ₂ = 1 - M²。如果自由流马赫数小于1(亚声速流),两个特征值都大于零,流动是椭圆型的;如果自由流马赫数大于1(超声速流),第二个特征值为负,流动是双曲型的。可以证明,求解特征方程(2.6.11)得到的分类结果和这里的结果是一致的。

人们感兴趣的是,当两个独立变量都是空间坐标时,定常流有呈现双曲型特性的时候。在双曲型无粘流动中,还有抛物型薄剪切层流动中空间方向以时间方式起作用。这些问题是发展型的,可以像时间一样在 x 方向向前推进计算流动。

上面的例子说明,可压缩流动分类依赖于参数M 。无粘可压缩流动的一般

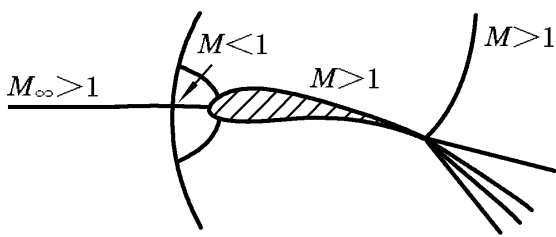


图 2.7 超声速自由流的绕翼型流动

方程(欧拉方程)展现了相似的性质,但分类参数是局部马赫数 M 。计算马赫数 M 大于1 或在1 附近的流动成为非常复杂的事情。这样的流动可以有激波间断和亚声速流(椭圆型)、超声速流(双曲型)区间,它们的精确位置事先并不知道。图2.7 给出了马赫数稍大于1 的绕翼型流动的示意图。

2.7 粘性流动方程的辅助条件

在数学方程确定以后,为确定解必须给出定解条件。对于非定常问题,定解条件包括起始条件和边界条件。起始条件就是在某一时刻给出速度、压力、密度、温度等的分布。若将定常过程作为非定常过程的渐近结果,则起始条件作为迭代的初值。在流体力学中由于问题的不同,边界条件的种类很多,而且边界上究竟有多少边界条件才合适尚无定论。具体问题需要具体分析。

在流动问题中,椭圆型、抛物型和双曲型特性的结合意味着边界条件的复杂性,特别是在流动被固体边界约束的地方。可惜没有关于边界条件容许范围的理论结果可用。CFD 的做法以物理概念和成功的实践为指导。下面列出可压缩粘性流的初始条件和边界条件(其中, n 和 t 分别指边界的外法向和切向, w 指壁面, τ 是给定的表面应力)。

非定常流的初始条件: 在时间 $t = 0$, 解域处处给定 ρ 、 u 和 T ;

非定常流和定常流的边界条件:

- (1) 在固体壁面, $u_t = 0$ (无滑移条件), $T = T_w$ (固定的温度) 或 $T/n = -q_w$ (固定的热通量);
- (2) 在流体边界, 入口, ρ 、 u 和 T 需给定为位置的函数; 出口, $-p + \mu u_n/n = p_\infty$ 和 $\mu u_t/n = \tau$ (应力连续)。

由于连续性方程的特点,需要规定出口或固体壁面的密度边界条件。连续性方程描述已知速度场流体粒子沿其轨迹经历的密度变化。图 2.8 说明典型的粘性内流和外流的边界条件应用。

入口要知道密度。凡是密度作为解的一部分的地方不需要规定密度。对于不可压缩粘性流,不需要密度条件,但用到上面所列的其他条件。

通常在出流边界,流动基本上是一个方向,且表面应力取已知值。远离固体的高雷诺数外部流动或充分发展管流出流,任一速度分量在越过边界的方向无变化,且有 $u_n = 0$ 和 $\tau = 0$ 。这就给出了出流边界的一般条件: 规定压强, $u_n/n = 0$ 和 $T/n = 0$ 。不可压缩流动用 $u_n/n = 0$ 的开边界条件是不严格的(P.M.

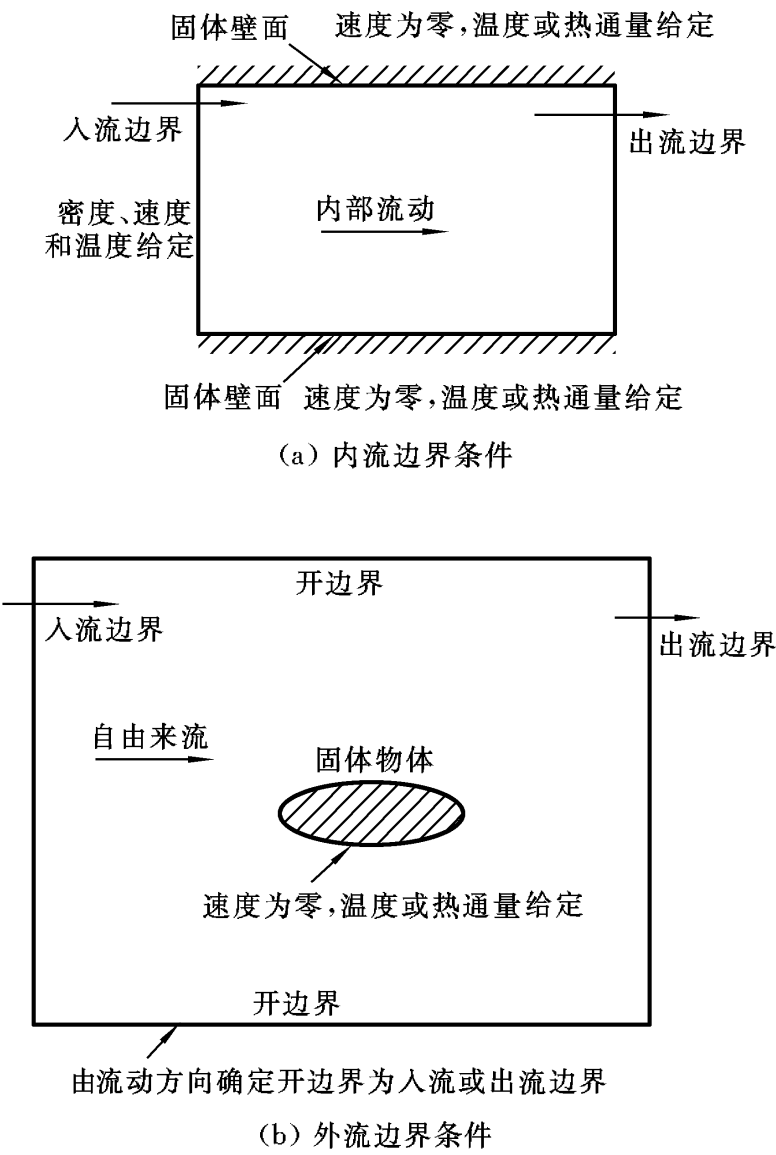


图 2.8 粘性流动的内流和外流边界条件

Gresho, 1991), 然而 CFD 的成功实践仍在鼓励人们选用这一最简单、代价最小的形式。

一般的 CFD 软件通常包括入流和出流压强边界条件: 压强置固定值, 并在边界上设置质量源, 以保证在常压强边界上的质量流量满足连续性条件。此外, 利用解域的几何特点可应用对称性边界条件 $\partial/\partial n = 0$ 和周期性边界条件 $u_1 = u_2$ 。图 2.9 所示为典型的可利用对称性和周期性边界条件的几何结构。

计算接近或超过声速的流动时会出现困难。在这种情况下, 通常是雷诺数极高、流动的粘性区极薄。流动在大部分解域实际表现为无粘性。这对于外流会出问题, 因为流动特性为无粘方式所应用的边界条件不同于整体分类所依据的(粘性)流动的条件。

例如有限体积法用的标准 SIMPLE 压强修正算法(见第 5 章)需要修改。需要通过瞬态算法来利用合适的双曲/抛物型程序特点。为解决解域出现内部激波或从域边界反射的问题, 需要引入人工粘性。此外, 需要保证充分模拟马赫数大

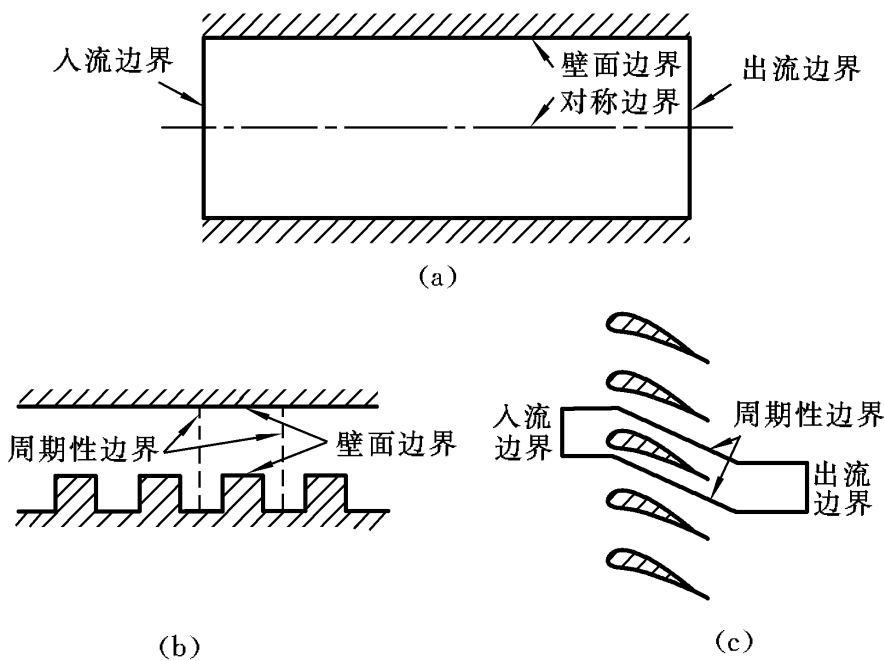


图 2.9 对称性和周期性边界条件的结构

于 1 的实际无粘流(双曲型)的有限依赖域。R. I. Issa 和 F. C. Lockwood(1977), J. J. McGuirk 和 G. J. Page(1990) 的文章透彻地给出了与有限体积法相关的主要论点。

开边界条件对通用CFD 软件设计者提出了最严重的问题。亚声速可压缩流方程需要较少的入口边界条件(典型的是规定压强)。超声速无粘可压缩流方程需要和粘性流一样多的入口边界条件,但由于流动是双曲型的,不接受任何出流边界条件。

在解一个问题之前,不充分了解流动就难以准确地规定所容许的流体与流体间的远场边界条件的性质和数目。Issa 和Lockwood(1977) 的工作是解激波/边界层相互作用问题,在粘性解之前进行无粘解,得到部分远场边界条件。一般的粘性出口条件 $(u_n)/n = 0$ 用于其他远场边界。

Fletcher(1991) 注意到边界条件规定不足通常会导致得不到惟一解。然而,规定过头会在应用边界条件的边界附近产生严重的非物理边界层。

如果出口或远场的位置选在远离所关心的解域的区域,有可能得到物理上有意义的解。大多数细心的求解都会测试内部解对出流和远场边界位置的敏感度。如果边界条件是无反射的,且内部解结果不变,那么这个结果可以接受。

复杂性使得通用CFD 软件处理亚声速、跨声速和/ 或超声速粘性流非常困难。尽管所有商业CFD 软件都声称可以在一切流动型区域计算,但由于上面概括的所有问题,最有效的计算在马赫数远低于 1 的情形。

我们已经由基本的守恒律导出了一套完整的流体流动控制方程。为使系统在数学上是封闭的,引入了热力学平衡态假定和粘性应力的牛顿定律。既然没有

对粘度做特别的假定,那么肯定包括依赖于当地条件的可变粘度。这方便了在方程的框架体系内处理粘度依赖于温度的流体和那些有非牛顿特性的流体。

我们已经认识了所有流动方程的普遍的微分形式,所谓的输运方程及其演变的积分形式是CFD的核心。定常态过程有输运方程(2.5.5),非定常过程也有输运方程(2.5.6)。

解流动问题需要辅助条件,即初始条件和边界条件。三种类型的流动有不同的物理特性:椭圆型、抛物型和双曲型。控制流体流动的方程也做了形式上的分类。形式分类的问题来自:

- (1) 高雷诺数边界层性质的流动;
- (2) 马赫数大于1或在1附近的压缩性影响。

要编制可以工作在任意雷诺数和马赫数的完全通用的CFD程序,还存在很大的困难。

从CFD的经验中产生的一套适用的辅助条件,能够在很多与工程有关的问题中给出物理上真实的流动解。对于一个完整的流动问题,需要规定的条件除了所有流动变量的初始值,还有下列边界条件:

- (1) 在有关的流动区域的各个入口完全规定所有的变量(除了压强);
- (2) 在流动域内一个位置规定压强;
- (3) 在适当的出口位置规定所有变量流动方向的梯度为零;
- (4) 在固壁规定所有的变量(除了压强和密度)或它们的法向梯度。

第 3 章 湍流与湍流模型

工程实际中遇到的一切流动,简单的如二维射流、尾流、管流和平板边界层,更复杂的如三维流动,在一定的雷诺数之上都会变得不稳定。雷诺数 $Re= UL/\nu$, U 、 L 、 ν 分别是时均流的特征速度、特征长度和运动粘度。

小雷诺数流动为层流。大雷诺数流动可观察到湍流的形成,建立起混沌的和随机的运动状态,在主要流动区域速度和压强随时间连续变化。

层流区域的流动用第 2 章建立的方程可以完全描述。简单层流情形的连续方程和 N-S 方程有解析解(Schlichting, 1979)。较复杂的流动可以用 CFD 技术数值处理,如有限体积法等,不需要附加近似条件。

大多数工程流动是湍流,因此湍流领域不只是引起理论上的兴趣,流体工程还要求通过有效的手段表达湍流的影响。本章简单介绍湍流物理和 CFD 的湍流建模。其中,3.1 节、3.2 节考察湍流性质和层流向湍流转捩的物理现象;3.3 节分析时均 N-S 方程中与湍流联系的脉动出现后的结果;3.4 节描述一些简单的二维湍流的特征;由于速度脉动产生流体的附加应力(雷诺应力),3.5 节讨论这些附加应力项建模的工程方法。

3.1 什么是湍流

先来考察湍流的主要特征。雷诺数给出了惯性力和粘性力的相对重要性的量度。在流体系统的实验中可以观察到,在所谓临界雷诺数(与对流有关) Re_{cr} 以下时,流动平滑且相邻的流体层以有序的形式相互滑过。如果施加的边界条件不随时间变化,流动是定常的。这种流态称为层流。

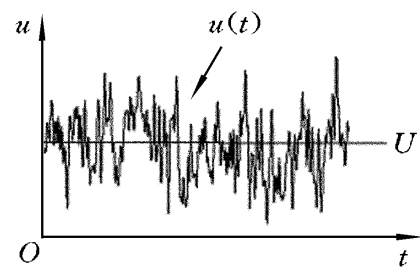


图 3.1 典型的湍流速度测量

在临界雷诺数之上,会发生一系列复杂的事件,并导致流动特点的急剧变化,最终流动形态是随机的和混沌的;即使施加定常的边界条件,流动本质上是非定常的,速度和其他流动量以随机的和混沌的方式变化,这种流态称为湍流。这时,点速度测量可能表现出随机脉动信号的典型特征(见图 3.1)。

湍流随机性排斥了计算所有流体粒子运动的完全描述。如图 3.1 所示,速度能分解为定常时均值 U 和叠加其上的脉动分量 $u(t)$,即 $u(t)= U + u(t)$ 。最普遍的做法是用时均值(U 、 V 、 W 、 P 等)和它们的

脉动(u 、 v 、 w 、 p 等)的统计量给湍流赋以特征。

即使湍流时均速度和压力仅以一个或两个空间维数变化,湍流脉动总是有三维空间变量的特点。另外,湍流的流动显示揭示了旋转流动的结构。所谓湍流涡旋(eddies)有大范围的长度尺度。图3.2 显示了槽道湍流有与槽道宽度可比的涡尺度,还有中间尺度和小尺度的涡。

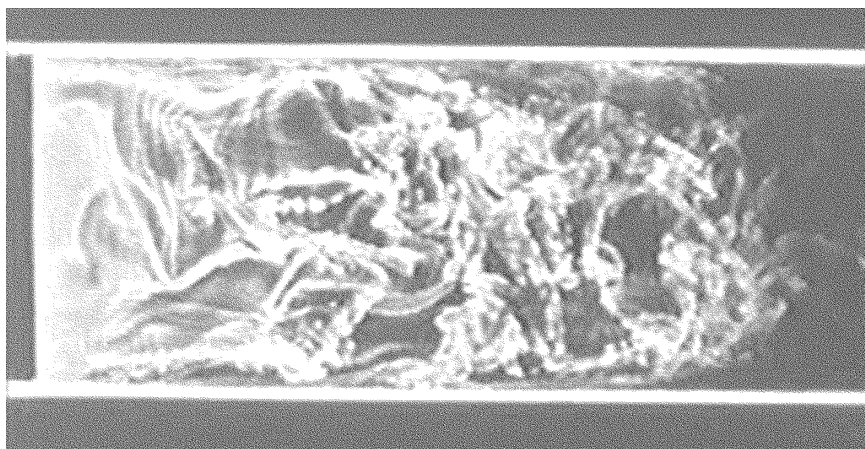


图 3.2 槽道湍流的流动显示

湍流中,相距很远的粒子可以被涡运动带到一起来,结果,热、质量、动量有效地交换。例如,在湍流中一点引入的染色条纹将迅速破裂,并在垂直于流动的方向散开。这种有效混合产生很大的质量、动量和热的扩散系数值。

最大的湍流涡与时均流相互作用,汲取时均流的能量。这一过程称为涡伸展。剪切流中,时均速度梯度的出现使旋转湍流涡畸变。适当排列的涡会伸长,因为其一端比另一端被迫运动得更快些。较大涡的特征速度 v_t 和特征长度 l , 与时均流的速度 U 和长度 L 同量级。因此“大涡”雷诺数 ($l v_t / \nu$) 将在任何湍流中都是大量(因为 UL/ν 是大量),它决定了这些大涡由惯性力支配,而粘性力可忽略。于是,在涡伸长期间,大涡是等效无粘的,且角动量守恒。这引起涡的横截面半径的减小,旋转速率的增加。所以这一过程产生较小的横向长度尺度和时间尺度的运动。时均流对大涡做的伸长功提供了维持湍流的能量。

较小的涡在较大的涡作用下自身强烈伸展,并由于时均流而削弱。动能由大涡逐级传到越来越小的涡的这一方式,称为能量级降。所有的涡流脉动量含有的能量跨越大范围频率和波数 ($2\pi f/U$, f 为频率)。

在湍流中,能发生的最小尺度的涡由粘性所规定。基于特征速度 v_t 和特征长度 l 的最小涡的雷诺数 ($l v_t / \nu$) 等于1。在这些尺度(典型工程流涡旋流 $l = 0.1 \sim 0.01$ mm, $f = 10$ kHz)中,粘性成为重要的参数。由于做功抵抗粘性应力作用,所以与涡运动联系的能量耗散转换成热内能。耗散导致与湍流有关的能量损失。

最大涡结构是高度各向异性的(有方向性),由于它们和时均流的强烈相互作用而依赖于时均流动。粘性扩散作用趋向于抹去小尺度的方向性。在高时均

流雷诺数流动中, 湍流的最小涡是各向同性的(无方向性)。

3.2 层流向湍流转捩

向湍流转捩的初始原因可以解释为层流对于小扰动的稳定性。大量理论工作致力于分析转捩的起因: 流体动力学稳定性。很多向湍流转捩的有关例子与剪切流有关。线性流动稳定性理论追求验证扰动放大的条件。工程上感兴趣的是预测扰动被放大的雷诺数值 $Re_{cr}(U_{X_{cr}}/)$ 和转捩为充分湍流的雷诺数值 $Re_{tr}(U_{X_{tr}}/)$, 其中 x 是离开平板前缘的距离。F. M. White(1991) 给出理论与实验综述。由于其理论相当复杂, 为证实理论产生了一系列实验。实验揭示了引起层流向湍流转捩的物理过程。大部分认识来自二维不可压缩湍流。这些流动对相对长波的二维扰动敏感, 波长约为横向尺度的几倍, 如平板边界层厚度的 6 倍。

一、层流的流体动力学稳定性

有两个不同的基本稳定性机制起作用, 它们与二维层流基本流的速度剖面的形状有关。如图 3. 3(a) 所示, 当雷诺数足够大, 有拐点速度分布的流动对无限小扰动总是不稳定的。这种不稳定首先是在描述扰动演化的方程中假定无粘的条件下发现的。随后又加上粘性的影响深化理论, 但改变甚少。因而这一理论称为无粘理论。图 3. 3(a) 所示的一类速度剖面见于射流、混合层、尾流和逆压梯度作用下的平板边界层($p/ x > 0$)。粘性的作用在这里是使脉动衰减和在小雷诺数使流动稳定。

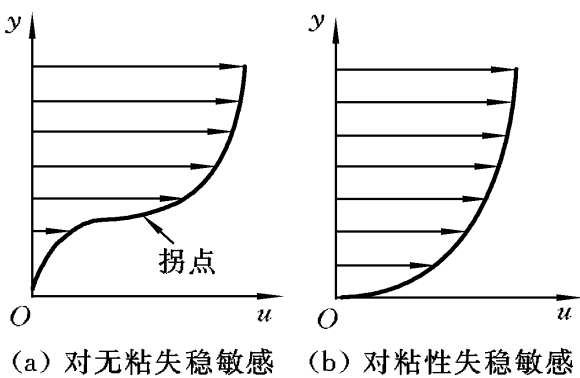


图 3. 3 速度剖面

图 3. 3(b) 所示无拐点速度分布的层流流动易受粘性不稳定性影响。近似的无粘理论预测这种速度剖面是无条件稳定的。这一类速度剖面必是近固壁流, 诸如无逆压梯度的管道、渠道和边界层流($p/ x = 0$)。这里粘性的作用更复杂, 在小雷诺数和大雷诺数情况下提供阻尼, 但是在中等雷诺数起使流动失稳的作用。

二、转捩到湍流

最初失稳点总是在转捩为充分湍流点的上游。雷诺数为 Re_{cr} 的点和雷诺数为 Re_{tr} 的点之间的距离取决于不稳定扰动放大的程度。最初失稳点和转捩过程起始点可由流体动力稳定性线性理论确定。但是, 还没有关于初始失稳导致完全湍流过程的完整理论。下面主要从实验观察描述三种简单湍流的特征: 射流、平

板边界层和管流。

1. 射流(有拐点流动的例子)

所有具有一个或多个拐点的流动中,长波扰动约在雷诺数为10以上放大。图3.4表现了射流转捩过程。

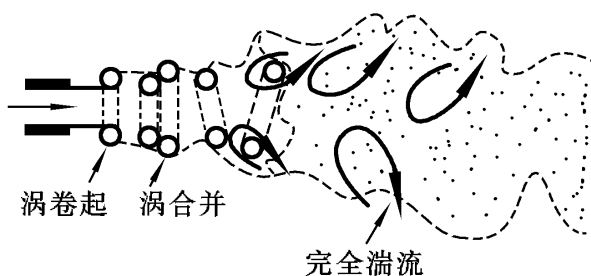


图 3.4 射流转捩

当流动离开喷口,层流出口流在喷口附近产生一对卷起的涡。随后的放大必通过涡的配对形成更强的单个涡。下游不远的三维

扰动使涡变得高度畸变且不能区分。流动破碎产生大量小尺度涡,迅速转捩为充分湍流状态。混合层和钝体后方的尾流展现相似的事件序列,导致转捩和湍流。

2. 平板边界层(没有拐点流动的例子)

速度分布没有拐点的流动中,粘性不稳定性理论预测在边界层厚度雷诺数 $Re = 1\,000$ 附近的有限雷诺数范围内(是边界层厚度),无限小扰动会放大。在平板上的发展中的流动就是这样的情况,其转捩过程已经有广泛深入的研究。

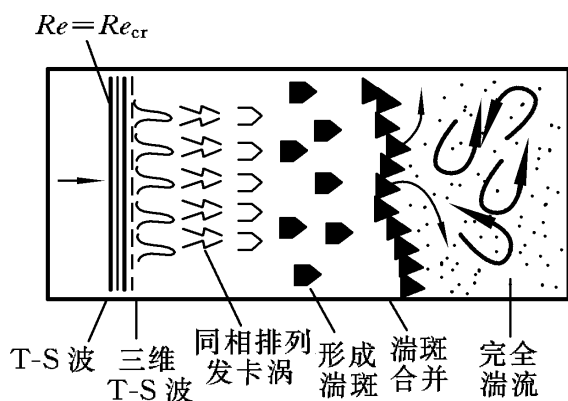


图 3.5 平板边界层流动转捩过程示意图

事件的准确顺序对来流的扰动水平敏感。然而,只要流动系统有足够光滑的条件,就能清楚地检测出边界层流对于波长较大的扰动的失稳。图3.5简要表现了导致转捩和完全湍流的过程。

如果来流是层流,大量实验证明了预测的初始失稳发生在临界雷诺数 $Re_{cr} = 91\,000$ 附近。不稳定的二维扰动波称为 Tollmien-Schlichting (T-S) 波。这些扰动在流动方向被放大。

随后的发展取决于有最大放大率(线性)的波的幅度。既然放大发生在有限的雷诺数范围内,那么有可能放大的波在下游衰减,流动保持为层流。如果幅度足够大,二次的、非线性的失稳机制使 T-S 波成为三维波,最终演变为 λ -型发卡涡。在最常见的转捩机制中,所谓 K-型转捩的发卡涡是对齐的。

在发卡涡上诱发的高度剪切区强化、伸展和卷起,导致随后的转捩过程必然出现高剪切层,并逐级破碎为更小的单元,可测流动参数的频谱成为随机的。固壁附近在随机的时间、地点发生强烈的、完全局部化的变化。三角形湍斑从这些位置猝发。这些湍斑随流动前进,扩展其边界而生长,这会带动更多的层流流体参加到湍流运动中来。

自然的平板边界层转捩必然包括活跃区湍斑的形成,湍斑被主流带向下游后合并。这发生在转捩雷诺数 $Re_{tr} \sim 10^6$ 处。

3. 管流转捩(管流转捩表现了一类特别的无拐点流动的例子)

流体动力学稳定性理论预测这类无拐点流动在所有雷诺数都是无条件稳定的。实际上, 转捩发生在 $Re=2\,000\sim 10^5$ ($Re=\frac{Vd}{\nu}$, V 是管截面平均速度, d 是管径)。各个细节还不清楚, 反映出当前稳定性理论的局限。稳定性分析明显失败的原因是入口速度剖面的畸变和入口造成的有限幅度扰动。

如同平板边界层一样, 管流试验表明, 湍斑出现在近壁区。这些湍斑生长、合并, 最后终于充满管截面, 形成湍流塞。在工业管道流动中, 湍流塞的间歇形成发生在 $Re=2\,000$ 处, 湍流和层流区沿管长交替出现。当 $Re>2\,300$ 时, 湍流塞连接起来, 整个管道充满湍流。

显然, 上面叙述的关于射流、尾流、管流和平板边界层的转捩过程有一些共同的特点: 初始小扰动的放大; 旋转结构区域的聚集、发展; 形成强烈的小尺度运动; 这些小尺度运动区域生长、合并为湍流。

转捩为湍流的过程受到压力梯度、扰动水平、壁面粗糙度和热传导等因素的强烈影响。上述讨论仅限于亚音速不可压缩流。马赫数为0.7 以上的流动中显著出现压缩性作用, 使稳定性理论变得复杂。

应该注意到, 尽管对简单流已有很多认识, 但没有统一的转捩的理论。当前超级计算机技术的发展使得模拟导致转捩的事件成为可能, 包括在中等雷诺数下一些极简单的几何形状用完全的、与时间有关的 N-S 方程解湍斑的形成。L. Kleiser 和 A. Zang (1991) 回顾了当时的状况, 特别指出了实验和(极昂贵的) 计算之间符合很好。

在工程上, 转捩过程在相当大范围影响流动的主要情况是中等雷诺数下的外壁面边界层流。这发生在某些涡轮机械、直升机桨叶和低速机翼中。T. Cebeci (1980) 提出了一个工程计算方法, 基于无粘远场和边界层, 结合线性稳定性分析确定临界的和转捩的雷诺数。他认为转捩发生在初始扰动(任意的) 放大因子为 e^9 ($\approx 8\,000$) 的地方。这个方法包含边界层的充分湍流部分的混合长度模型(见后面), 证明对机翼计算非常有效, 但是需要大量的经验输入, 因而缺少一般性。

商业上采用的通用 CFD 方法往往完全忽略转捩, 流动分类要么是层流, 要么就是充分湍流。转捩区往往只是流动区域一个很小的部分, 在这种情况下, 相当于假定结构细节造成的误差为小量。

3.3 湍流对时均 Navier-Stokes 方程的影响

层流与湍流流动显示的差别是湍流中有广泛长度尺度的涡运动出现。在典型的 $0.1\text{ m}\times 0.1\text{ m}$ 的流动域, 大雷诺数湍流可能含有 $10\sim 100\text{ }\mu\text{m}$ 的涡。一般需要的

$10^9 \sim 10^{12}$ 点的计算网格来描述所有长度尺度过程。事件发生的最大频率为 10 kHz, 时间步长要离散为 100 μ s。C. G. Speziale (1991) 称, 直接模拟 $Re = 50 \times 10^4$ 的湍流管流, 需要比当时的 CRAY 超级计算机的计算速度快 1 000 万倍的计算机。

按当前计算能力, 跟踪转捩雷诺数下非常简单流动的涡动力学开始成为可能。直接解大雷诺数下充分湍流的时间相关 N-S 方程, 要求的计算条件非同一般, 必须等待计算机硬件的重大发展。

此时, 工程师需要计算方法提供湍流过程的足够信息, 但回避预测流动中每一个涡的影响。幸运的是, 这一类 CFD 用户几乎总是可以由时均流动量得到满意的信息(例如时均速度、时均压力、时均应力等)。这一节考察出现湍流脉动对时均流动量的影响。

1. 雷诺方程

首先定义某流动量 的时均量 为

$$\bar{(\quad)} = \frac{1}{t} \int_0^t (\quad) dt \quad (3.3.1)$$

理论上, 应该取时间间隔 t 逼近无限大时的极限, 但实际上如果 t 超过流动量 最慢变化的时间尺度(由最大涡确定)就足够大了。这个流动量的时均定义对于时均定常流是足够的。时间相关流动中, 在时间 t , 流动量的时均取为大量重复、相同的试验得到的流动量的瞬时值的平均值, 即所谓“系综平均”。

流动量 与时间有关, 可以看成定常时均分量 与时均值为零的时间变化脉动量 的和, 因此, $(\quad) = \bar{(\quad)} + (\quad)'$ 。从现在开始, 我们不再显式写出 和 与时间有关, 而是写成 $\bar{(\quad)}$ 和 $(\quad)'$ 。脉动量 的时间平均是零, 即

$$\overline{(\quad)'} = \frac{1}{t} \int_0^t (\quad)' dt = 0 \quad (3.3.2)$$

关于流动脉动部分的信息, 可以从脉动的均方根(rms)得到

$$rms = \overline{(\quad')^2}^{1/2} = \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\quad')^2 dt \right)^{1/2} \quad (3.3.3)$$

速度分量的 rms 值特别重要, 因为用对湍流脉动敏感的探头容易测出来(如热线风速仪)。与湍流有关的动能 k (每单位质量)可定义为

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (3.3.4)$$

湍流强度 T_i 将动能和参考时均流速度 U_{ref} 联系起来, 有

$$T_i = \frac{\overline{2k/3}}{U_{ref}} \quad (3.3.5)$$

导出湍流时均流方程之前, 总结一下控制脉动量 $(\quad)' = \bar{(\quad)} + (\quad)'$ 和 $\bar{(\quad)} = \bar{(\quad)} + \overline{(\quad)'}$ 的时间平均的规则:

$$\overline{\frac{d}{dt}} = \frac{d}{dt} = 0, \quad \overline{\frac{d}{ds}} = \frac{d}{ds}, \quad \overline{\frac{1}{s}} = \frac{1}{\overline{s}} \tag{3.3.6}$$
$$\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}, \quad \overline{a-b} = \overline{a} - \overline{b}, \quad \overline{ca} = \overline{c} \overline{a}, \quad \overline{a^2} = \overline{a}^2 + \overline{a'^2}$$

应用式(3.3.1)和式(3.3.2)很容易证明这些关系式, 只要注意到时间平均算子本身是积分, 因而时间平均和进一步的积分或微分的次序可以调换。

既然散度(∇·)和梯度(∇)都是微分算子, 上述规则可以扩展到脉动矢量 $\mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{a}$ 及其与脉动标量 $\phi = \Phi + \phi$ 的结合

$$\overline{\phi \mathbf{a}} = \overline{\phi} \overline{\mathbf{A}} + \overline{\phi \mathbf{a}}, \quad \overline{\nabla(\phi \mathbf{a})} = \overline{\nabla(\phi \mathbf{a})} = \nabla(\overline{\phi} \overline{\mathbf{A}}) + \overline{\nabla(\phi \mathbf{a})} \tag{3.3.7}$$
$$\overline{\nabla \phi} = \nabla \overline{\phi}$$

为证实湍流脉动对时均流的影响, 考虑不可压缩、粘度为常数的流动的瞬时连续性方程和 N-S 方程。这样做可大大简化运算但不失主要信息。如常采用直角坐标, 速度矢量 \mathbf{u} 有 x 分量 u , y 分量 v 和 z 分量 w 。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{3.3.8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{u}) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{w} \mathbf{u}) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

流动变量为时均量和脉动量的和。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \\ u &= \overline{u} + u', \quad v = \overline{v} + v', \quad w = \overline{w} + w' \\ p &= \overline{p} + p' \end{aligned}$$

为考察脉动的影响, 将以上表达代入连续性方程(3.3.8), 应用规则式(3.3.7)取时间平均, 得到时均连续性方程

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{u}} = 0 \tag{3.3.10}$$

对 x 方向的动量方程进行类似处理。这些方程中的一些单项的时间平均可写成

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial u}{\partial t}} &= \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}, \quad \overline{\nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u})} = \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u} \mathbf{u}}) + \overline{\nabla \cdot (\mathbf{u}' \mathbf{u}')} \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x}, \quad \overline{\nu \nabla^2 u} = \nu \nabla^2 \overline{u} \end{aligned}$$

代入这些结果就得到 x 方向的时均动量方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u} \mathbf{u}}) + \overline{\nabla \cdot (\mathbf{u}' \mathbf{u}')} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \overline{u} \end{aligned} \tag{3.3.11a}$$

() () () () ()

重复这一过程, 得到 y 方向和 z 方向的时均动量方程

$$\frac{\overline{V}}{t} + \overline{\rho(VU)} + \overline{\rho(vu)} = - \frac{1}{\rho} \frac{\overline{P}}{y} + \overline{\rho V} \quad (3.3.11b)$$

$$\frac{\overline{W}}{t} + \overline{\rho(WU)} + \overline{\rho(wu)} = - \frac{1}{\rho} \frac{\overline{P}}{z} + \overline{\rho W} \quad (3.3.11c)$$

重要的是,注意到在时均方程中的()、()、()和()项也出现在瞬态动量方程中,但是时间平均过程在时均方程中产生了新的项()。这一项涉及脉动速度的乘积,正是速度脉动构成动量的对流输运,习惯上把这一项作为附加湍流应力放在方程的右边,反映它对时均速度分量 U 、 V 和 W 的作用。

$$\frac{\overline{U}}{t} + \nabla \cdot \overline{\rho(UU)} = - \frac{1}{\rho} \frac{\overline{P}}{x} + \nabla \cdot \overline{\rho \nabla U} + \overline{\rho \frac{u^2}{x}} - \overline{\rho \frac{uv}{y}} - \overline{\rho \frac{uw}{z}} \quad (3.3.12a)$$

$$\frac{\overline{V}}{t} + \nabla \cdot \overline{\rho(VU)} = - \frac{1}{\rho} \frac{\overline{P}}{y} + \nabla \cdot \overline{\rho \nabla V} + \overline{\rho \frac{uv}{x}} - \overline{\rho \frac{v^2}{y}} - \overline{\rho \frac{vw}{z}} \quad (3.3.12b)$$

$$\frac{\overline{W}}{t} + \nabla \cdot \overline{\rho(WU)} = - \frac{1}{\rho} \frac{\overline{P}}{z} + \nabla \cdot \overline{\rho \nabla W} + \overline{\rho \frac{uw}{x}} - \overline{\rho \frac{vw}{y}} - \overline{\rho \frac{w^2}{z}} \quad (3.3.12c)$$

把附加应力项展成几项的和,其结构可以看得更清楚。附加应力有六项,三个法向应力和三个剪应力:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= - \overline{\rho u^2}, \quad \tau_{yy} = - \overline{\rho v^2}, \quad \tau_{zz} = - \overline{\rho w^2} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = - \overline{\rho uv}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = - \overline{\rho uw}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = - \overline{\rho vw} \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

这些附加的湍流应力项称为雷诺应力。在湍流中,法向应力总是非零,因为它们含有速度脉动的平方;剪应力与不同速度分量的相关相联系。如果两个速度分量是与统计无关的脉动量,则它们的积的时间平均会等于零。然而,湍流剪应力也是非零的,在湍流中与粘性应力比起来通常是很大的量。方程(3.3.12)称为雷诺方程。

推导任意标量的输运方程时,出现相似的附加湍流输运项。标量 ϕ 的时均输运方程是

$$\frac{\overline{\phi}}{t} + \nabla \cdot \overline{\rho(\phi U)} = \nabla \cdot \overline{\rho \nabla \phi} + \overline{\rho \frac{u\phi}{x}} - \overline{\rho \frac{v\phi}{y}} - \overline{\rho \frac{w\phi}{z}} + S \quad (3.3.14)$$

至此仍假定流体密度是常数。但实际流体的密度可以变化,瞬时密度总是展现湍流脉动。P. Brashaw 等(1981)称小的密度脉动不会显著影响流动,如果均

方根速度脉动在时均速度 5% 的量级, 直到马赫数 $M = 3 \sim 5$, 密度脉动都是不重要的。在 3.4 节将看到, 自由湍流中, 速度脉动很容易达到时均速度的 20%。在这种环境中, 到马赫数 $M = 1$ 时, 密度脉动开始影响湍流性质。作为本节内容的总结, 不加证明地在这里引用密度加权平均的可压缩湍流的时均流方程。其中, 忽略密度脉动的影响, 但保留时均密度变化的影响。密度加权平均又称 Favre 平均(D. A. Anderson, 1984), 这一形式广泛用于商业 CFD 软件包。

可压缩流的湍流方程包括以下方程。

(1) 连续性方程。

$$\frac{\overline{\rho}}{t} + \overline{\rho(\mathbf{U})} = 0 \quad (3.3.15)$$

(2) 雷诺方程。

$$\begin{aligned} \frac{\overline{(\rho U)}}{t} + \overline{\rho(\mathbf{U}U)} = & - \frac{\overline{P}}{x} + \overline{\rho(\mu U)} + \overline{\rho \frac{u^2}{x}} - \overline{\frac{u v}{y}} \\ & - \overline{\frac{u w}{z}} + S_{Mx} \end{aligned} \quad (3.3.16a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{(\rho V)}}{t} + \overline{\rho(\mathbf{V}U)} = & - \frac{\overline{P}}{y} + \overline{\rho(\mu V)} + \overline{\rho \frac{u v}{x}} - \overline{\frac{v^2}{y}} \\ & - \overline{\frac{v w}{z}} + S_{My} \end{aligned} \quad (3.3.16b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{(\rho W)}}{t} + \overline{\rho(\mathbf{W}U)} = & - \frac{\overline{P}}{z} + \overline{\rho(\mu W)} + \overline{\rho \frac{u w}{x}} - \overline{\frac{v w}{y}} \\ & - \overline{\frac{w^2}{z}} + S_{Mz} \end{aligned} \quad (3.3.16c)$$

(3) 标量输运方程。

$$\frac{\overline{\rho \phi}}{t} + \overline{\rho(\mathbf{U} \phi)} = \overline{\rho(\nabla^2 \phi)} + \overline{\rho \frac{u \phi}{x}} - \overline{\rho \frac{v \phi}{y}} - \overline{\rho \frac{w \phi}{z}} + S \quad (3.3.17)$$

2. 封闭问题—湍流建模的必要性

瞬时连续性方程(3.3.8)和N-S 方程(3.3.9)构成了四个未知变量 u 、 v 、 w 和 p 的一组四个封闭的方程。在这一节开头的介绍中已说过, 在可见的将来还不能直接解这个方程组。工程师们期待着并将他们的注意力放在了某些时均量上。然而, 在进行动量方程的时均运算时, 抛去了包含在瞬时脉动中的有关流动状态的所有细节。结果在时均动量方程中多出了六个未知的雷诺应力。同样地, 在时均标量方程中多出了含有 $\overline{u \phi}$ 、 $\overline{v \phi}$ 和 $\overline{w \phi}$ 的项。一般地, 湍流的复杂性排除了附加应力和湍流标量输运项的简单公式。湍流建模的主要任务就是建立有足够精度, 工程上一般适用的预测雷诺应力和标量输运项的计算方法。

3.4 简单湍流的特征

大多数湍流理论及其建模首先都是从仔细考察薄剪切层的湍流结构开始的。这类流动中, 大的速度变化集中在很薄的区域内。较正式的表达是, 流动变量沿流动方向(x 方向)的变化率与沿流动横向(y 方向)的变化率相比可忽略。而且, 流动区域发生变化的横向宽度与流动方向的任何长度尺度 L 相比总是小量($\delta/L \ll 1$)。作为简单介绍, 本节归纳某些简单的恒压作用下的二维不可压缩流动的总特征。这里考虑的流动是自由湍流(混合层、射流和尾流)和近固壁边界层(平板边界层和管流)。

鉴于工程上感兴趣的是时均量, 采用时均速度分布 $U = U(y)$ 及附加雷诺应力 $-\overline{u^2}$ 、 $-\overline{v^2}$ 、 $-\overline{w^2}$ 和 $-\overline{uv}$ 。这些量的局部值可以用热线风速仪有效测出(G. Comte-Bellot, 1976)。激光多普勒测速技术也已广泛应用于时均速度和湍流的测量中(P. Buchhave 等, 1979)。

一、自由湍流

在自由湍流中, 有重要工程意义的、最简单的流动是混合层、射流和尾流。混合层在两个区域的交界面形成, 两个区域分别为运动较快的流体和运动较慢的流体; 射流的高速流动区域完全由周围的静止流体所包围; 尾流在流过的物体后方形形成, 这是被速度快的流体所包围的缓慢运动区。图 3.6 表示的是自由湍流时均速度分布的发展。

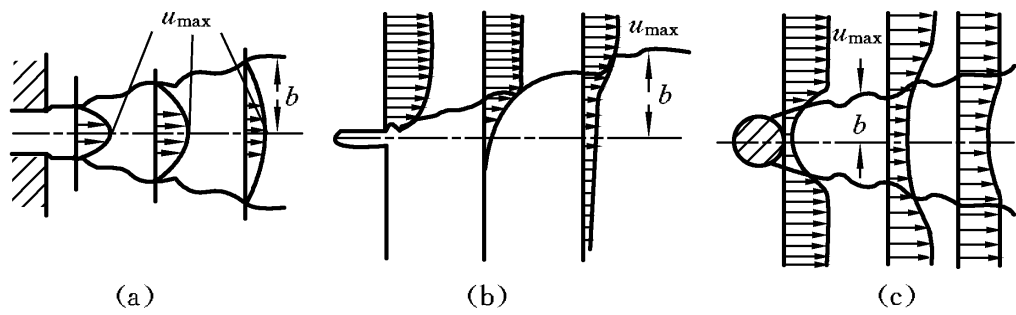


图 3.6 自由湍流

很清楚, 三种流动中, 速度的变化发生在薄层内, 在两股流体汇合处附近转捩为湍流。湍流引起邻近流体层的强烈混合, 同时, 速度发生横向变化的区域迅速拓宽。

图 3.7 显示了射流的图像。从中可以清楚地看到, 流动的湍流部分含有相差悬殊的长度尺度, 与流动的横向宽度可比的大涡发生时伴随着极小的涡。射流区内的流动是充分湍流, 但远离射流的外部区域流动光滑, 基本上不受湍流影响。

湍流区的边缘位置随时间变化, 由通过的大涡所决定。在紧靠边缘处, 大涡偶尔会穿透边界进入环绕的区间。由于外部区域湍流行为导致的间歇性猝发, 周围的流体会被拽入湍流区。这个过程就是卷吸, 是湍流(包括壁面边界层) 在流动方向扩宽的主要原因。

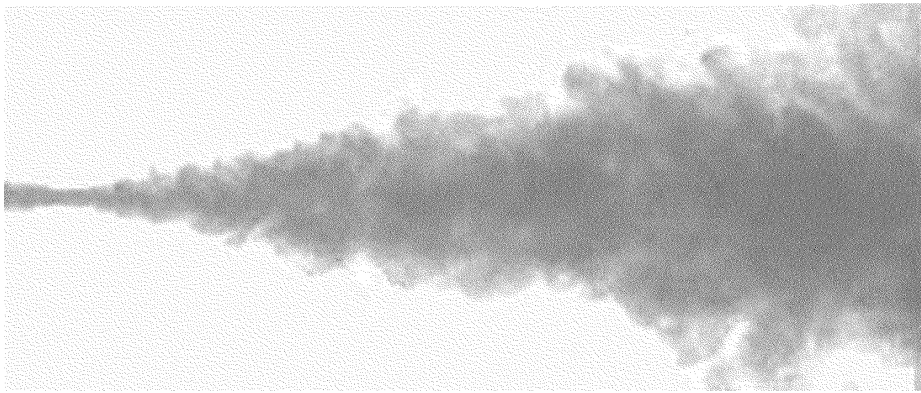


图 3. 7 射流

射流的初始快速运动流体给周围的静止流体加速后自身会失去动量。这会使射流中心线上的速度减小。相似地, 尾流流体速度和周围的快速流体速度之间的差别会在流动方向减小。混合层内速度的变化导致它的宽度连续增加, 但混合层两侧外部区之间总的速度差不变。

很多湍流实验表明, 在一定距离之后, 流动结构与流动源的准确性质无关。控制流动湍流结构的只是局部环境表现出的行为。合适的长度尺度是流动的横向宽度(或半宽度) b 。如果流动的横向距离是 y , 可以得到以下公式:

$$\frac{U - U_{min}}{U_{max} - U_{min}} = f \frac{y}{b}, \quad \frac{U}{U_{max}} = g \frac{y}{b}, \quad \frac{U_{max} - U}{U_{max} - U_{min}} = h \frac{y}{b}$$

(混合层) (射流) (尾流)

在这些公式中, U_{max} 、 U_{min} 表示在源下游一段距离 x 的最大、最小时均速度 (见图3. 6)。因此, 如果选择这些时均速度尺度且 x 足够大, 则 f 、 g 和 h 与流动方向的距离 x 无关。这样的流动称为自维持的。

虽然与时均速度相比, 湍流结构达到自维持要在源下游更远距离, 但是也有

$$\frac{\overline{u^2}}{U_{ref}^2} = f_1 \frac{y}{b}, \quad \frac{\overline{v^2}}{U_{ref}^2} = f_2 \frac{y}{b},$$
$$\frac{\overline{w^2}}{U_{ref}^2} = f_3 \frac{y}{b}, \quad \frac{\overline{uv}}{U_{ref}^2} = f_4 \frac{y}{b}$$

上面各式中的速度尺度 U_{ref} 是: 混合层和尾流为 $(U_{max} - U_{min})$, 射流为 U_{max} 。函数 f 、 g 和 h 的精确形式取决于具体流动。图 3. 8 给出了混合层(F. H. Champagne 等, 1976)、射流(E. Gutmark 和 I. Wignanski, 1976)和尾流(I. Wignanski 等, 1986)的时均量和湍流量分布。图中 x_0 是混合层起点的 x 坐标, $y_{1/2}$ 是速度为

$\frac{1}{2}u_{\max}$ 的点的 y 坐标。 $i=1, 2, 3$ 分别表示 x, y, z 方向的速度分量。上述研究人员发现 $\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}$ 和 $\overline{u'v'}$ 的最大值在时均速度梯度 U/y 最大的区域, 凸显了湍流生成和剪切时均流的内在联系。如上所示, 分量 u 的最大值给出了法向应力的最大值, 它的 rms(均方根) 最大值为局部最大时均流速度的 15% ~ 40%。脉动速度各分量不相等的事实意味着湍流结构各向异性。

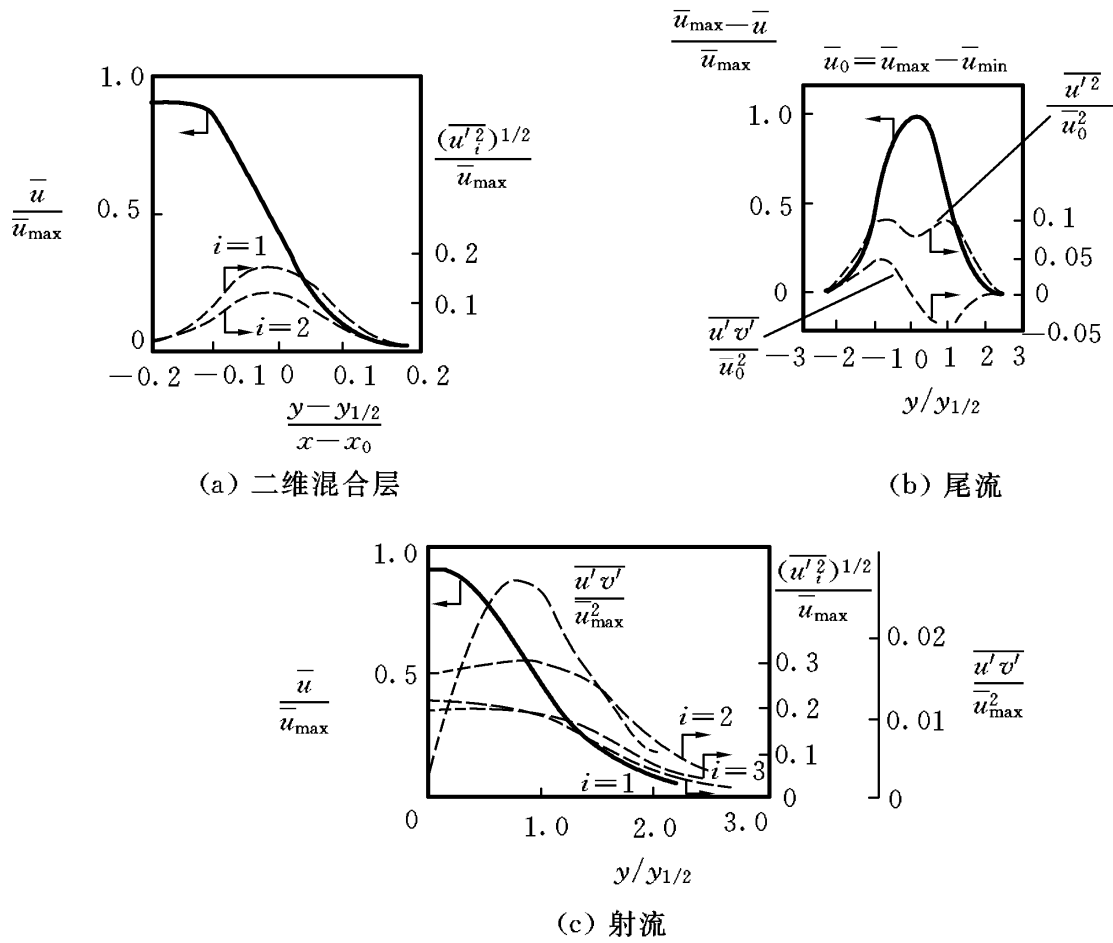


图3.8 时均速度分布和湍流量

随着 y/b 增加至大于 1, 时均流速速度梯度趋于零, 湍流量同样降到零。没有剪切意味着湍流不能在这个区域维持。射流、尾流的时均流速速度梯度在中心线上也是零, 因此没有湍流在这个区域生成。然而 $\overline{u'^2}, \overline{v'^2}$ 和 $\overline{w'^2}$ 减少不会太多, 因为强烈的涡混合将高湍流生成区的流体输运到中心线附近。对称性 $\overline{u'v'}$ 的值在射流、尾流的中心线上必为零, 因为剪切应力在这里必须反号。

二、平板边界层和管流

下面考察靠近固体壁面的两种湍流的特征。由于固体壁面的存在, 它们的流动特点和湍流结构与自由湍流有很大的不同。量纲分析在处理数据时有极大的帮助。在湍流薄剪切层流动中, 基于流动方向的长度尺度(或管径) L 的雷诺数 Re_L 总是很大的。例如, $U=1\text{ m/s}, L=0.1\text{ m}, \nu=10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$, 雷诺数 $Re_L=10^5$ 。这意味着在这些尺度下, 惯性力对于粘性力有压倒性的优势。

如果用基于离开壁面距离 y 的雷诺数($Re_y= Uy/ \mu$), y 是 L 的量级, 那么上述结论成立。惯性力确实在远离壁面的地方支配着流动。然而随着 y 减小到零, Re_y 也将减小到零。这之前必有 Re_y 等于1 的量级。在这个距离上或离壁面更近的地方, 粘性力将在量级上等于惯性力或更大。

总而言之, 沿固体边界的流动一般在远离壁面处有惯性力支配流动的基本区域, 在壁面附近有粘性发挥重要影响的近壁薄层区域。

靠近壁面的流动受粘性影响, 流动与自由流参数无关。时均流速只依赖于离开壁面的距离 y , 流体密度 ρ , 流体粘度 μ 和壁面剪应力 τ_w 。因此

$$U = f(y, \rho, \mu, \tau_w)$$

量纲分析表明

$$u^+ = \frac{U}{u_*} = f\left(\frac{y}{\delta^+}\right) = f(y^+) \tag{3.4.1}$$

式(3.4.1)称为壁面律, 式中含有两个重要的无量纲组合数 u^+ 和 y^+ 的定义。注意, 合适的速度尺度是 $u_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$, 即所谓摩擦速度。

在远离壁面处, 一点的速度受到壁面阻滞的影响, 这个影响是通过壁面剪应力的值, 而不是粘度本身传递的。这个区域合适的长度尺度是边界层厚度 δ 。在这个区域有

$$U = g(y, \rho, \mu, \tau_w)$$

量纲分析给出

$$u^+ = \frac{U}{u_*} = g\left(\frac{y}{\delta^+}\right)$$

如果把壁面剪应力看成速度亏损 $U_{max} - U$ 的原因, 速度亏损将随着靠近边界层的边缘或管道中心线而减少, 这就得到一个最有用的形式:

$$\frac{U_{max} - U}{u_*} = g\left(\frac{y}{\delta^+}\right) \tag{3.4.2}$$

上式称为速度亏损律。

1. 线性底层: 与光滑壁面接触的流体层

在固体表面流体是静止的。湍流涡运动也必须在极靠近壁面处停止。最靠近壁面的流体由粘性剪切控制, 没有湍流剪应力(雷诺应力)影响。这一层极薄, 可以假定在整个这一层中剪应力近似为常数, 等于壁面剪应力 τ_w 。因此

$$\tau(y) = \mu \frac{U}{y} = \tau_w$$

应用边界条件 $y=0, U=0$ 对 y 积分, 得到时均速度和离开壁面距离的线性关系

$$U = \frac{\tau_w y}{\mu}$$

利用 u^+ 和 y^+ 的定义, 经过简单运算又有

$$u^+ = y^+ \quad (3.4.3)$$

由于时均速度和离开壁面距离的线性关系,靠近壁面的流体层又称为线性底层。

2. 对数层:靠近光滑壁面的湍流区

在粘性底层之外($30 < y^+ < 500$),存在一个粘性和湍流的影响同样重要的区域,这里剪应力随着离开壁面的距离缓慢变化,在这个内部区域,假定剪应力是常数且等于壁面剪应力。进一步的长度尺度的假定(混合长度 $l_m = y$,见3.5节或Schlichting, 1979的文章)可以导出一个关于 u^+ 和 y^+ 之间的正确函数关系的式子

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (3.4.4)$$

式中, von Karman 常数 κ 和与壁面粗糙度有关的积分常数 B 由实验得到,不同的实验值略有分散。常用的是光滑壁 $\kappa = 0.4$, $B = 5.5$ 。粗糙度引起 B 减小。 κ 和 B 的值对于所有高雷诺数光滑壁是普遍成立的普适常数。由于 u^+ 和 y^+ 之间的对数关系,式3.4.4称为对数律, y^+ 取值在30到500之间的流层称对数律层。

3. 外层:远离壁面惯性为主的区域

实验表明,对数律在 $0.02 < \frac{y}{\delta} < 0.2$ 的区域有效。对于较大的 y 值,速度亏损律式(3.4.2)给出了正确的形式。在对数律和速度亏损律重叠的区域,两者必须相等。H. Tennekes 和 J. L. Lumley (1972) 证明,假定下列对数形式可得到相等的重叠区。

$$\frac{U_{\max} - U}{u} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\delta} + A \quad (3.4.5)$$

式中, A 是常数。此速度亏损律也称为尾流律。

图3.9取自Schlichting(1979)的实验结果,表明理论公式(3.4.3)和(3.4.4)在各自有效的区域与实验数据密切一致。图中用 E 表示积分常数。

邻近固体表面的湍流边界层由内区和外区组成。内区占壁面层的10% ~ 20%,剪应力几乎是常数,等于壁面剪应力 τ_w 。内区又可分为三层,随着离开壁面的距离增加分别为邻近表面、粘性应力为主的线性底层,粘性应力与湍流应力同量级的缓冲层,湍流雷诺应力为主的对数律层。外区(或尾流律层)为远离壁面的惯性力主导的核心流,无直接粘性影响。

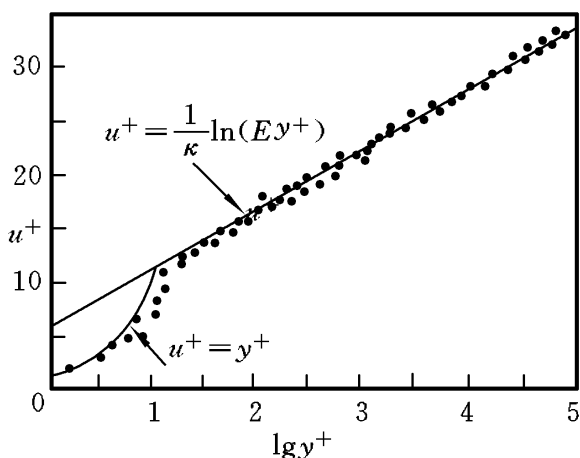


图3.9 近固壁速度分布

图3.10显示了恒压作用下平板边界层的时均速度和湍流量分布(P. S.

Klebanoff, 1955)。时均速度在离壁面最远处最大(图中记为 \bar{u}), 由于无滑移条件在 $y/\delta = 0.2$ 的区域锐减。邻近壁面有高 $\overline{u'^2}$ 、 $\overline{v'^2}$ 、 $\overline{w'^2}$ 和 $-\overline{u'v'}$ 值, 大的时均速度梯度保证了高湍流生成。

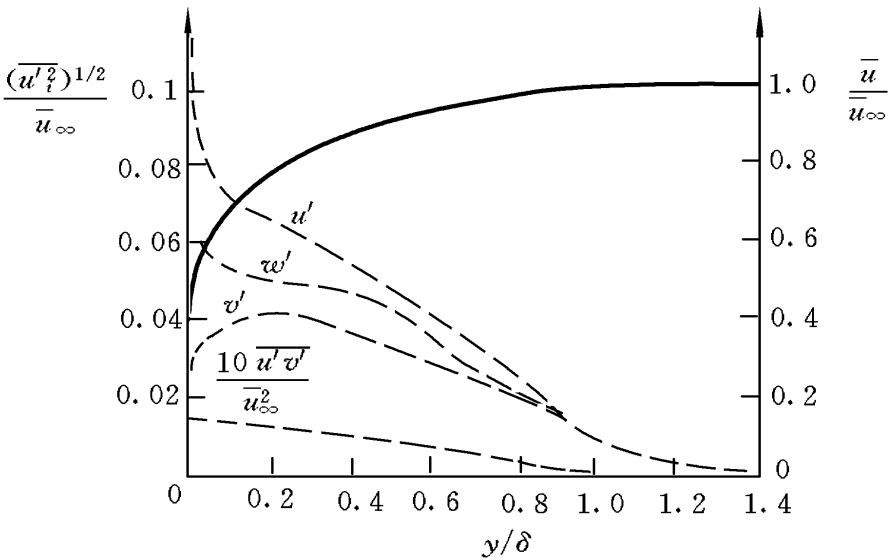


图 3.10 零压强梯度平板边界层的时均速度和湍流量分布

然而, 涡运动和相关的速度脉动也服从于壁面的无滑移条件。因此, 湍流应力在这个区域锐减到零。由于湍流生成过程主要是产生 $\overline{u'^2}$, 湍流在近壁区是各向异性的。图 3.10 中均方根速度的最大值说明了这一点。

平板边界层的湍流量随 y/δ 增加至超过 0.8, 渐近地趋于零。这时所有脉动速度均方根值几乎相等, 指明在远离壁面处湍流结构变得更为各向同性。

在管流情况下, 涡运动从高生成区越过中心线输运湍流。因此, 脉动速度均方根值在管中心保持较大。对称性 $-\overline{u'v'}$ 值在管中心必须趋于零并改变符号。

多层结构是近固体表面湍流边界层的普遍特点。A. S. Moin 和 A. M. Yaglom (1971) 根据 P. S. Klebanoff (1955) 和 J. Laufer (1952) 的近壁区数据画图, 发现只要用适当的速度尺度 u , 那么对于无量纲形式的数据, 不仅是普适时均速度, 而且是所有的平板和管流的雷诺应力数据都分别落在同一条曲线上。

这些各不相同的层间有中介区, 保证不同的速度分布律光滑连接。有兴趣的读者可从 Schlichting (1979) 和 White (1991) 找到覆盖整个内区、对数律层和尾流律层的公式的更多细节。

在这一节介绍了一些二维湍流的特征。已经清楚的是, 尽管这些二维湍流有很多共同特性, 但即使是这些相对简单的薄剪切层, 其湍流结构在很大程度上依赖于流动本身。特别重要的是产生和维持湍流的边界的形状。粘性剪切应力依赖于粘度, 但是湍流雷诺应力这一流体量还受到流动本身的影响。计算方法必须能应付这个复杂的情况。

3.5 湍流模型

湍流模型是使时均流方程组(3.3.15)、(3.3.16)和(3.3.17)得以封闭的计算方法。对于大多数工程问题,不需要分辨湍流脉动的细节,一般只要求湍流对时均流的影响。具体地,就是要有方程组(3.3.16)中的雷诺应力和(3.3.17)中的湍流标量输运项的表达式。一般用途的CFD软件中,有用的湍流模型必须有广泛的可应用性,精确、简单和经济性好。最常用的湍流模型分类如下。

1. 基于(时均)雷诺方程的经典模型

- (1) 零方程模型(混合长度模型);
- (2) 二方程模型(k-模型);
- (3) 雷诺应力方程模型;
- (4) 代数应力模型。

2. 基于空间滤波方程的大涡模拟湍流模型

经典模型由3.3节建立的雷诺方程形成,是当前可利用的CFD软件湍流计算的基础。大涡模拟湍流模型用时间相关流动方程解时均流和大涡,方程中用模型表达小涡的影响。人们早就认为大涡和时均流强烈地相互作用,大涡包含大部分能量,所以可得到反映湍流主要影响的优质模型。大涡模拟计算还在研究阶段,现在用于一般用途的计算代价太大。尽管预期计算机硬件改进会改变对未来的期望,但本节不会进一步讨论这一模型。有兴趣的读者可在M. B. Abbott 和 D. R. Basco(1989)的文章中找到这些模型和其他高级模型的简单介绍。

经典的混合长模型和k-模型至今广泛应用且有效,模型的基础是假定粘性应力和湍流应力对时均流的作用可比拟。两个应力都在动量方程的右边出现。粘性流体的牛顿定律指出,粘性应力和流体微团的变形率成正比。对于不可压缩流体,有

$$\tau_{ij} = \mu_{ij} = \mu \left(\frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \right) \quad (2.3.2)$$

为了简化记号,这里的指标记法约定为: i 或 j 等于 1 相应于 x 方向, i 或 j 等于 2 相应于 y 方向, i 或 j 等于 3 相应于 z 方向。例如

$$\tau_{12} = \tau_{xy} = \mu \left(\frac{u_1}{x_2} + \frac{u_2}{x_1} \right) = \mu \left(\frac{u}{x} + \frac{v}{y} \right)$$

从实验中可观察到,没有剪切的均热不可压缩流体的湍流将衰减,而且湍流应力随时均变形率增加而增加。1877年, J. V. Boussinesq 提出雷诺应力与时均变形率有关。按指标记法写出

$$\tau_{ij} = - \overline{u_i u_j} = \mu \left(\frac{U_i}{x_j} + \frac{U_j}{x_i} \right) \quad (3.5.1)$$

表达式右边模拟式(2.3.2),不同的是出现湍流粘度或涡粘度 μ (量纲 $\text{Pa} \cdot \text{s}$)。还有一个定义是湍流运动粘度或涡粘度 $\nu = \mu / \rho$ (量纲 m^2/s)。湍流热、质量

和其他标量同样地建模。假定湍流动量输运与时均速度梯度成正比(即单位质量流体的动量的梯度)。类似地,标量的湍流输运与输运量的时均值的梯度成正比。按指标记法,有

$$-\overline{u_i} = \epsilon \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} \tag{3.5.2}$$

式中, ϵ 是湍流扩散率。既然动量和热或质量的湍流输运是相同的涡混合机制,期望湍流扩散率 ϵ 与湍流粘度 μ 密切相关。引入如下定义的普朗特/施密特(Prandtl/Schmidt)数

$$\epsilon = \frac{\mu}{\epsilon} \tag{3.5.3}$$

很多流动实验的已有结论是,这个比值大多近似为常数。大多数CFD方法假定为这种情况,采用 ϵ 值约为1。

由3.4节简单湍流的讨论已经清楚,湍流应力在流动中从一点到另一点有变化。混合长度模型用简单的代数公式将 μ 表示为位置的函数。 k -模型较精巧、较普遍,也是代价较大的湍流描述,它允许时均流和扩散作用影响湍流量输运,允许湍流的产生和消灭。 k -模型有两个湍流输运方程(偏微分方程),一个解湍动能 k ,另一个解湍动能耗散率 ϵ 。

这两个模型都假定湍流粘度 μ 各向同性。换句话说就是,雷诺应力与时均变形率之比在所有方向相等。这一假定在许多类型的流动中导致不准确的流动预测而失效。

这样就必须推导并求解雷诺应力本身的输运方程。可能开始读者会奇怪,为什么雷诺应力要“输运”?然而必须记住,雷诺应力最初出现在动量方程左边,物理上是湍流速度脉动的结果,是由于动量的对流交换。流体动量,时均动量和脉动动量均可以由流体粒子输运,因此雷诺应力也能输运。

六个雷诺应力输运方程,均包括扩散项、压力-应变项和耗散项。这些项的个别影响未知,而且不能测量。在雷诺应力方程模型(二阶矩封闭模型)中,对这些未知项做出假定,从而得到一组偏微分方程,结合湍动能耗散率 ϵ 的输运方程一起求解。

设计雷诺应力方程模型是热门研究课题,但是,雷诺应力方程模型还没有像混合长度模型和 k -模型那样广泛适用。与 k -模型相比,解七个额外的方程增加CFD开销,因此雷诺应力方程模型的应用才刚刚开始。下面讨论混合长度模型和 k -模型的细节,雷诺应力方程模型的主要特性,以及可能改变未来工程湍流建模的当前研究成果。

一、混合长度模型

从量纲上看,湍流运动粘度 ϵ 的量纲是 m^2/s ,可表达为湍流速度尺度 (m/s) 和长度尺度 $l(m)$ 之积。若一个速度尺度和一个长度尺度足以描述湍流影

响, 量纲分析可以给出

$$\tau = C l \tag{3.5.4}$$

式中, C 是无量纲比例常数。动力学湍流粘度为

$$\mu = C l \tag{3.5.5}$$

湍流大部分动能包含于最大涡, 这些涡的特征尺度就是湍流长度尺度 l, 这些涡与时均流相互作用。若承认时均流与最大涡之间联系紧密, 就能尝试将涡的特征速度尺度与时均流动的物理量联系起来。这在简单二维湍流中是有效的做法, 二维湍流只有雷诺应力 $\tau_{xy} = \tau_{yx} = - \overline{u'v'}$, 惟一有意义的速度梯度是 U'/y 。这样的流动至少在量纲上正确的叙述是, 若涡长度尺度是 l, 则有

$$= cl \left| \frac{U'}{y} \right| \tag{3.5.6}$$

式中, c 是无量纲常数。速度尺度与速度梯度的符号无关, 为使速度尺度总是正量而在式中加上绝对值符号。两个常数 c 和 C 结合产生新的长度尺度 l_m , 从而得到

$$\tau = l_m^2 \left| \frac{U'}{y} \right| \tag{3.5.7}$$

这就是普朗特混合长度模型。对于式(3.5.1), 注意到只有一个有意义的时均速度梯度, 下式给出湍流雷诺应力

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = - \overline{u'v'} = l_m^2 \left| \frac{U'}{y} \right| \frac{U'}{y} \tag{3.5.8}$$

湍流是与流动有关的函数, 在混合长度模型中必须以改变 l_m 来解释湍流的不同。对于基本类型的简单湍流, 如 3.4 节讨论的自由湍流和壁面湍流, 可借助于简单的代数公式做到这一点。表 3.1 给出了一些例子(W. Rodi, 1980)。

表 3.1 二维湍流混合长度

流动类型	混合长度 l_m	特征长度 L
混合层	0.07L	层宽
射流	0.09L	射流半宽
尾流	0.16L	尾流半宽
轴对称射流	0.075L	射流半宽
边界层($y^+ \gg 0$)		
粘性底层和对数律层 ($y^+ < 0.22$)	$y^+ [1 - \exp(- y^+ / 26)]$	边界层厚度
外层($y^+ > 0.22$)	0.09L	
管道和渠道(充分发展流) [0.14- 0.08(1- y^+ / L) ² - 0.06(1- y^+ / L) ⁴] L		管半径或渠半宽

表中, y^+ 表示离开壁面的距离, $\kappa = 0.41$, 是 von Karman 常数。

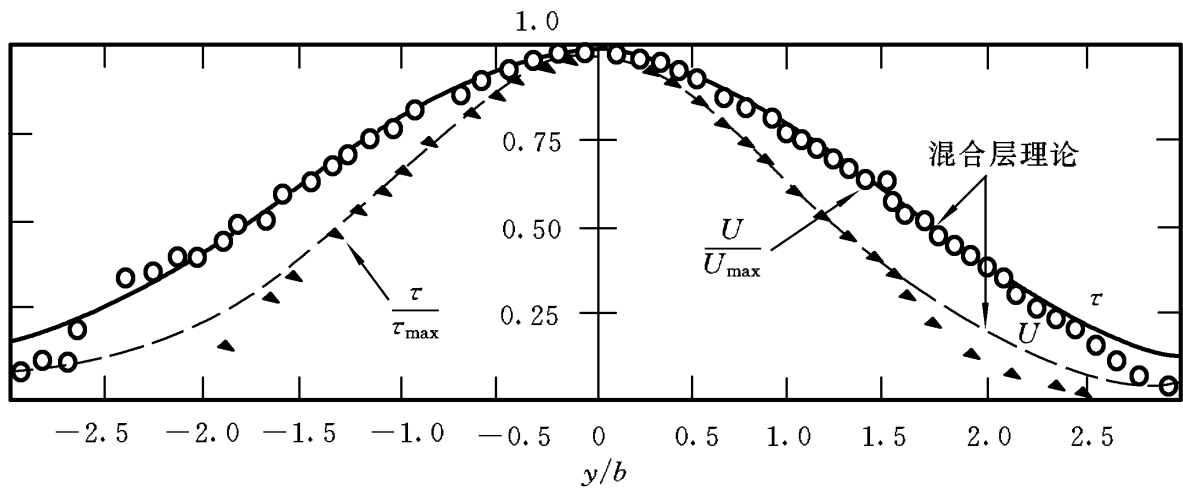
混合长度模型也能用于预测标量的湍流输运。混合长度模型适用于处理二

维湍流中惟一的湍流输运项

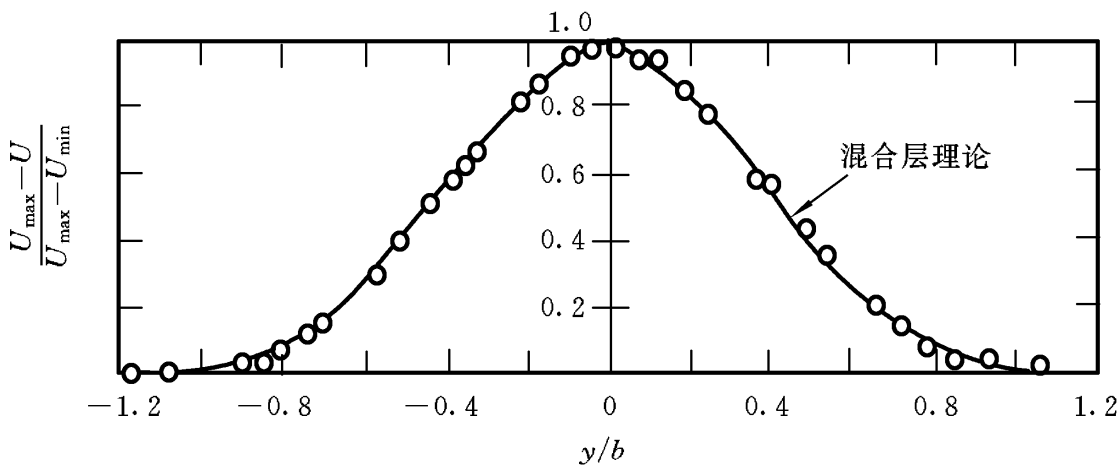
$$-\overline{v} = \epsilon \frac{\overline{u}}{y}$$

(3.5.9)

式(3.5.9)中, $\epsilon = \mu / \rho$ 是湍流扩散率。 $\mu = \rho \epsilon$, ϵ 从式(3.5.7)可以得到。Rodi (1980) 推荐近壁流 $\epsilon = 0.9$, 射流和混合层 $\epsilon = 0.5$, 轴对称射流 $\epsilon = 0.7$ 。用这些表达式给出的时均速度分布、壁面摩擦系数和其他一些流动量, 如热传导系数等的计算结果和实验符合得很好。图 3.11 给出了两个流动的结果(Schlichting, 1979)。



(a) 平面射流



(b) 细长圆柱尾流

图 3.11 混合长度模型计算结果和实验比较

当湍流量与时均流长度成比例发展时, 混合长度显然是很有用的。用简单代数式可将 l_m 描述为位置的函数。这是绕翼截面流动计算中广泛使用混合长度的原因。对 l_m 公式进行精细的修改后可以用于描述压力梯度, 小尺度分离和边界层吹吸作用。混合长度模型, 如B. S. Baldwin 等(1978)和Cebeci 等(1974) 建立的模型, 是在航天工业外形空气动力学的计算中最广泛应用的湍流模型。

混合长度模型的优点是: 计算资源廉价; 薄剪切层、射流、混合层、尾流和边

界层的预测都很好;易于建模。混合长度模型的缺点是:完全不能描述分离和回流流动;只能计算时均动量和湍流剪应力。

二、k- 模型

二维薄剪切层中,流动方向的变化一般比较慢,湍流能按局部条件作自身调整。若湍流量的对流和扩散可忽略,就可以用混合长度模型表达湍流对时均流的影响。如果湍流量的对流和扩散不可忽略,例如回流,就不能给混合长度模型找到一个精练的代数形式。混合长度模型没有这种广义性。解决的办法是考虑湍流动力学的表述。k- 模型着眼于影响湍动能的机理。

首先给出一些预备性的定义。湍流的瞬时动能 $k(t)$ 是时均动能 K 和湍动能 k 之和

$$k(t) = K + k$$

其中

$$K = \frac{1}{2}(U^2 + V^2 + W^2), \quad k = \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})$$

为了后面的推导,必须用到变形率和湍流应力。为方便下面的计算,一般将变形率分量 e_{ij} 和湍流应力分量 τ_{ij} 写为张量(矩阵)的形式:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}, \quad \tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

将湍流中的流体元的变形率 e_{ij} 分解为时均分量 E_{ij} 和脉动分量 e_{ij} , 并给出以下矩阵元素

$$\begin{aligned} e_{xx}(t) &= E_{xx} + e_{xx} = \frac{U}{x} + \frac{u}{x} \\ e_{yy}(t) &= E_{yy} + e_{yy} = \frac{V}{y} + \frac{v}{y} \\ e_{zz}(t) &= E_{zz} + e_{zz} = \frac{W}{z} + \frac{w}{z} \\ e_{xy}(t) &= E_{xy} + e_{xy} = e_{yx}(t) = E_{yx} + e_{yx} = \frac{1}{2} \frac{U}{y} + \frac{V}{x} + \frac{1}{2} \frac{u}{y} + \frac{v}{x} \\ e_{xz}(t) &= E_{xz} + e_{xz} = e_{zx}(t) = E_{zx} + e_{zx} = \frac{1}{2} \frac{W}{x} + \frac{U}{z} + \frac{1}{2} \frac{w}{x} + \frac{u}{z} \\ e_{yz}(t) &= E_{yz} + e_{yz} = e_{zy}(t) = E_{zy} + e_{zy} = \frac{1}{2} \frac{V}{z} + \frac{W}{y} + \frac{1}{2} \frac{v}{z} + \frac{w}{y} \end{aligned}$$

应用一般的张量代数的规则计算矢量 a 和张量 B 的积,得矢量 c :

$$aB = a_i b_{ij} = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & a_1 b_{11} + a_2 b_{21} + a_3 b_{31} \quad c_1 \\ = & a_1 b_{12} + a_2 b_{22} + a_3 b_{32} \quad c_2 \\ & a_1 b_{13} + a_2 b_{23} + a_3 b_{33} \quad c_3 \end{aligned}$$

张量 A 和 B 的标量积计算如下：

$$\begin{aligned} a_{ij} b_{ij} = & a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13} + a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{23} \\ & + a_{31} b_{31} + a_{32} b_{32} + a_{33} b_{33} \end{aligned}$$

上面已经用了指标记法约定。其中, x 方向记为 1, y 方向记为 2, z 方向记为 3。可以看到, 对每一个重复指标所有可能的值求和就得到了标量积。

1. 时均动能 K 的控制方程

用 U、V、W 分别乘 x、y、z 分量的雷诺方程(3.3.12)就能得到时均动能 K 的控制方程。把结果加在一起并做一些代数运算, 得到如下时均动能方程(Tennekes 和Lumley, 1972):

$$\begin{aligned} \frac{(\overline{K})}{t} + \overline{(\nabla \cdot (KU))} = & \overline{(-\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (pU) + 2\mu \nabla \cdot (E_{ij} - \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \delta_{ij}))} - 2\mu \overline{E_{ij} \cdot E_{ij}} + \overline{u_i u_j E_{ij}} \\ () & () \quad () \quad () \quad () \quad () \quad () \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

或者说, 对于时均动能 K 有: K 的变化率+ 对流输运的 K= 压力输运的 K+ 粘性应力输运的 K+ 雷诺应力输运的 K -K 的耗散率+ 湍流生成。

输运项()、()和()的共同特征是出现散度 $\nabla \cdot ()$, 通常做法是把它它们放进一个括号内。粘性应力对 K 的影响分成了两个部分:()项是由于粘性应力输运的 K,()项是耗散的时均动能 K。含有雷诺应力- $\overline{u v}$ 的两项反映湍流的影响:()项是由于雷诺应力输运的 K,()项是湍流生成, 或由于雷诺应力生成做的变形功。在高雷诺数流动中, 湍流项()和()总是比它们相应的粘性项()和()大得多。

2. 湍动能 k 的控制方程

用对应的瞬时速度分量分别乘瞬时 N-S 方程(3.3.9)的每一分量式(如 x 分量方程用 u 乘), 把结果加起来后作时间平均; 将得到的方程减去时均动能方程(3.5.10), 重新整理各项就得到湍动能 k 的控制方程(Tennekes 和 Lumley, 1972):

$$\begin{aligned} \frac{(\overline{k})}{t} + \overline{(\nabla \cdot (kU))} = & \overline{(-\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p u) + 2\mu \nabla \cdot (e_{ij} - \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \delta_{ij}))} - \frac{1}{2} \overline{u_i \cdot u_i u_j} \\ () & () \quad () \quad () \quad () \\ & - 2\mu \overline{e_{ij} \cdot e_{ij}} - \overline{u_i u_j E_{ij}} \\ & () \quad () \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

或者说, 对于湍动能 k 有: k 的变化率+ 对流输运的 k= 压力输运的 k+ 粘性

应力输运的 k^+ 雷诺应力输运的 k^- k 的耗散率+ 湍流生成。

湍动能 k 方程(3.5.11)和时均动能 K 方程(3.5.10)在很多方面非常相像。然而 k 方程右边出现带撇的项表明,湍动能的变化主要是由湍流相互作用控制。两个方程的()项大小相等,但是符号相反。我们在二维薄剪切层发现(见3.4节),如果在这样的流动中, E_{ij} 的主项时均速度梯度 U/y 是正的,通常只有惟一有意义的雷诺应力- $\overline{u'v'}$ 是正的。()项在 k 方程中给出一个正的贡献,表示一个生成项。然而,在 K 方程中,()项是负的,因而它在那里消耗流动的时均动能。这在数学上表示时均动能转换为湍动能。

由于粘性耗散项()- $2\mu e_{ij} \cdot e_{ij} = -2\mu(\overline{e_{11}^2} + \overline{e_{22}^2} + \overline{e_{33}^2} + 2\overline{e_{12}^2} + 2\overline{e_{23}^2} + 2\overline{e_{31}^2})$ 中出现脉动变形率 e_{ij} 的平方,它对方程(3.5.11)给出一个负的贡献。湍动能的耗散是由于最小涡抵抗粘性应力做功。单位质量耗散率的量纲是 m^2/s^3 ,在湍流动力学的研究中极重要,记为

$$\epsilon = 2 \overline{e_{ij} \cdot \mu e_{ij}} \quad (3.5.12)$$

在湍动能方程中,它总是主要的破坏项,大小与生成项的量级相同,绝不可忽略。对照之下,式(3.5.11)中的粘性输运项()在高雷诺数下与湍流输运项()相比总是很小。

3. k^- 模型方程

所有其他湍流量都可能建立相似的输运方程,包括粘性耗散率(见Brashaw等,1981)。由于准确方程包含太多未知项和不可测量项,需要做出一些假定处理这些项。标准 k^- 模型(B. E. Launder 和 D. B. Spalding, 1974)的基础是关于这些变量改变的相关过程的全部知识。它有两个模型方程:一个 k 方程,一个 ϵ 方程。可用 k 和 ϵ 定义如下表达的大尺度湍流速度尺度 U 和长度尺度 l :

$$U = k^{1/2}, \quad l = \frac{k^{3/2}}{\epsilon}$$

那么,用“小涡”变量 k 去定义“大涡”尺度 l 是否有效呢?之所以允许这样做,是因为在大雷诺数下,大涡从时均流吸取能量的速率与能量越过能谱传输到小的耗散涡的速率精确匹配。如果不是这样,湍流的某个尺度的能量会无限度的生长或消失。实际上,这不会发生,这证明了在 l 的定义中用 k 是可以的。

用与混合长度模型同样的方法定义如下的涡粘性

$$\mu = C_\mu \epsilon l = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.5.13)$$

式中, C_μ 是无量纲常数。标准模型应用下列 k 、 ϵ 的输运方程:

$$\frac{d(k)}{dt} + \nabla \cdot (kU) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu}{k} \nabla k \right) + 2\mu E_{ij} \nabla_i \nabla_j \epsilon - \epsilon \quad (3.5.14)$$

$$\frac{d(\epsilon)}{dt} + \nabla \cdot (\epsilon U) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu}{\epsilon} \nabla \epsilon \right) + C_1 \frac{1}{k} 2\mu E_{ij} \nabla_i \nabla_j \epsilon - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.5.15)$$

可以说 k 、 ϵ 的输运方程是: k (或 ϵ)的变化率加上对流输运的 k (或 ϵ)等于扩散输运的 k (或 ϵ)加上 k (或 ϵ)的生成率再加上 k (或 ϵ)的减少率。方程包含了五个可调常数: C_{μ} 、 C_k 、 C_1 和 C_2 。标准 k - ϵ 模型会应用下列来自综合数据和广泛的湍流的拟合常数:

$$C_{\mu} = 0.09, \quad C_k = 1.00, \quad C_1 = 1.30, \quad C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92 \quad (3.5.16)$$

模型 k - ϵ 方程中的生成项是由式(3.5.11)中精确的生成项代以式(3.5.1)导出的。方程中,主要输运过程的模拟项在方程的右边。由标量输运式(3.5.9)引入的梯度扩散概念来表达湍流输运项。普朗特数 Sc_t 和 Pr_t 将 k 、 ϵ 的扩散联系到涡粘性系数 μ 。精确 k 方程的压力项(ϵ)不能直接测量。它的作用在式(3.5.14)由梯度扩散项反映。

湍动能的产生和消失总是密切相关的。生成项 k 大的地方,耗散项 ϵ 也大。模型方程(3.5.15)假定其生成项和消失项与 k 模型方程(3.5.14)中的生成项和消失项成比例。采用这样的假定保证了一旦 k 快速增加, ϵ 也快速增加,如果 k 减少, ϵ 也减少得足够快,避免出现负的湍动能值。生成项和消失项中的 k/ϵ 因子使得方程中的这些项量纲正确。

为了用 k - ϵ 模型(3.5.13~3.5.15)计算雷诺应力,用到推广的Bussinesq关系:

$$\overline{u_i u_j} = \mu \left(\frac{\overline{U_i}}{x_j} + \frac{\overline{U_j}}{x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = 2 \mu E_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.5.17)$$

与方程(3.5.1)比较,发现这一形式的右边多出一项含Kronecker delta符号 δ_{ij} (若 $i=j$,则 $\delta_{ij}=1$;若 $i \neq j$,则 $\delta_{ij}=0$)。采用这一项,使得方程可用于法向雷诺应力,此时 $i=j$,有 $\overline{u_x u_x} = -\overline{u^2}$ 、 $\overline{u_y u_y} = -\overline{v^2}$ 和 $\overline{u_z u_z} = -\overline{w^2}$ 。对于不可压缩流动,考察式(3.5.17)右边第一项的特性。用到连续性条件(3.3.10)后,对所有法向应力求和(即让 $i=1,2,3$,同时保持 $i=j$)等于零。因为

$$2 \mu E_{ii} = 2 \mu \left(\frac{\overline{U}}{x} + \frac{\overline{V}}{y} + \frac{\overline{W}}{z} \right) = 2 \mu \nabla \cdot \mathbf{U} = 0$$

显然在任何流动中,法向应力的和 $-(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})$ 等于单位体积湍动能的负两倍($-2k$)。分给法向应力每一项相等的一份,保证它们的和有物理上的正确值。应该注意到,这意味着假定法向应力各向同性。3.4节的数据表明,即使是简单的二维流动,这也是不准确的。

4. 边界条件

模型 k - ϵ 方程由于有梯度扩散项而成为椭圆型方程。其特性与其他椭圆型方程相同,需要下列边界条件。

- (1) 入口: 给定 k 、 ϵ 的分布。
- (2) 出口或对称轴: $k/\epsilon = 0$ 和 $\epsilon/n = 0$ 。

(3) 自由流: $k = 0, \epsilon = 0$ 。

(4) 固壁: 与雷诺数有关(见下面的讨论)。

探索性设计计算中, 如果没有建模所需要的详细的边界信息, CFD 工程用户就不会自己测量 k 和 ϵ 。可以利用文献资料(如 3.4 节引用的参考资料)中的 k 和 ϵ 值使工作能进行下去, 然后考察结果对入口分布的敏感度。如确无资料可用, 可从湍流强度 T_i 和设备特征长度 L (等效管道直径)得到内流入口 k 和 ϵ 分布的粗糙近似, 即利用以下简单的假设形式:

$$k = \frac{3}{2}(U_{ref} T_i)^2, \quad \epsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{2/3}}{l}, \quad l = 0.07L$$

此式与 3.5 节混合长度公式密切相关。下面给出近固壁的一般分布。

高雷诺数标准 k - 模型(Launder 和 Spalding, 1974)利用 3.4 节讨论的近壁流的一般特性, 回避直接对壁面模型方程积分。如 y 作为壁面法向坐标, 时均速度在一点 y_p ($30 < y_p^+ < 500$) 满足对数律(3.4.4), 总体湍动能的测量指出湍流产生率等于耗散率。用这些假定和涡粘性公式(3.5.13), 可建立下列壁函数

$$u^+ = \frac{U}{u} = \frac{1}{C_\mu} \ln(E y_p^+), \quad k = \frac{u^2}{C_\mu}, \quad \epsilon = \frac{u^3}{y} \quad (3.5.18)$$

式中, von Karman 常数 $C_\mu = 0.41$, 光滑壁的壁粗糙参数 $E = 9.8$ 。Schlichting (1979) 给出了粗糙壁有效的参数 E 值。

有热传导时, 一般用高雷诺数有效的近壁温度分布(Launder 和 Spalding, 1974)

$$T^+ - \frac{(T - T_w) c_p u}{q_w} = T_{t,t} u^+ + P \frac{T_{t,l}}{T_{t,t}} \quad (3.5.19)$$

式中, T^+ 为近壁点 y_p 的温度; T_w 为壁面温度; q_w 为壁面热通量; c_p 为比定压热容; $T_{t,t}$ 为湍流普朗特数; $T_{t,l} = \mu_{cp} / T$ 为层流普朗特数; T 为热传导系数; P 是“ P 函数”, 它取决于层流普朗特数与湍流普朗特数之比(Launder 和 Spalding, 1974)。

对数律在低雷诺数无效, 上述边界条件不能用。修改 k - 模型, 使它能应付低雷诺数流动的方法见 V. C. Patel 等(1985)。用到壁阻尼以保证粘性应力取代低雷诺数的湍流雷诺应力, 并在临近固壁的粘性底层占优。替代式(3.5.13) ~ 式(3.5.15)的低雷诺数 k - 方程为

$$\mu = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.5.20)$$

$$\frac{(\epsilon/k)}{t} + \frac{1}{2} \rho (kU) = \frac{1}{2} \rho \mu + \frac{\mu}{k} k + 2 \mu E_{ij} \frac{1}{2} \rho E_{ij} - \quad (3.5.21)$$

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial t} + \quad \frac{\partial}{\partial x}(\quad U) = \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu + \frac{\mu}{f_\mu} \right) + C_1 f_1 \frac{1}{k} \mu E_{ij} \frac{\partial}{\partial x} E_{ij} - C_2 f_2 \frac{1}{k} \quad \quad (3.5.22)$$

普遍采用的最明显的修改, 是在式(3.5.21)和式(3.5.22)的扩散项加入了粘性贡献。常数 C_μ 、 C_1 和 C_2 分别用阻尼函数 f_μ 、 f_1 和 f_2 相乘, 它们本身是雷诺数($1/f_\mu = k^2/(\quad)$)的函数或相似性参数。作为例子, 下面引用C. K. G. Lam 和K. A. Bremhorst(1981)特别成功的壁阻尼函数:

$$f_\mu = [1 - \exp(-0.0165 Re_y)]^2 \quad 1 + \frac{20.5}{Re_x},$$
$$f_1 = 1 + \frac{0.05}{f_\mu}^3, \quad f_2 = 1 - \exp(-Re_x^2) \quad (3.5.23)$$

在函数 f_μ 中, 参数 Re_x 和 Re_y 的定义为

$$Re_x = \frac{k^2}{\quad}, \quad Re_y = \frac{y k^2}{\quad}$$

Lam 和 Bremhorst(1981)用 $\quad / y = 0$ 作为边界条件。

5. 评价

k- 模型是使用最广泛、最有效的模型。它计算大量的各种薄剪切层和回流已取得引人注目的成功, 而且不需要就不同情况修正模型参数。限制流(有壁面约束)中, 雷诺剪应力最显著, 此模型对于限制流特别有效。k- 模型广受欢迎的原因是它包括了广泛的工程应用流动情况。

一些可以利用的, 各种版本的k- 模型包括有浮力影响(Rodi, 1980), 这些模型用于研究环境流, 如大气、湖泊污染扩散, 火灾模型等。

尽管标准k- 模型有大量成功的例子, 但对于无约束流只有中等程度的符合。在远尾流和混合层等弱剪切层, k- 模型表现不好。预测周围是静止流体的轴对称射流时, 扩张率严重超值。这些流动的大部分湍动能生成率大大小于耗散率, 只有针对性地调整模型常数才能克服这一困难。

关于在精确k 方程中以模型方程的梯度扩散形式计入压力输运项的做法, Brashaw 等(1981)认为, 其基础是压力有时小到测得的湍动能没有它也能整体平衡。然而他们注意到, 很多这样的测量有明显误差, 压力扩散作用未必可以忽略。

模型对回旋流动和大的快速附加应变(如高度曲线边界层和扩散段)也有问题, 因为它没有包含流线曲率对湍流的微妙影响。k- 模型也不能预测各向异性法向雷诺应力驱动的、长的非圆截面导管二次流, 因为模型中缺少法向应力处理。最后, 若参考坐标系旋转, k- 模型不能考虑体积力。

标准k- 模型的优点是: 只需要提供初始条件和边界条件的最简单的湍流模

型;对于很多工业流动效果极好;已经完善,是最为普遍有效的湍流模型。其缺点是:比起混合长度模型,实现其代价较大(多两个偏微分方程),在一些重要场合表现较差。如一些无约束流、大应变流(如曲边界层、回旋流)、旋转流和非圆截面管的充分发展流等。

三、雷诺应力方程模型

最复杂的经典湍流模型是雷诺应力方程模型(RSM),也称为二阶矩封闭模型。 k -模型预测复杂应变场或有显著体积力的流动有上述几个缺点。在这种条件下,即使湍动能有理由算得很准,用式(3.5.17)表达单个雷诺应力仍很差。精确的雷诺应力输运方程能计算出雷诺应力场的方向影响。

建模策略源自Lauder(1975)报告的工作。雷诺应力方程模型显然非常复杂,但被普遍认为是所有经典湍流模型中最具潜力、最有普遍性的。只要提供初始条件和(或)边界条件,它就能极精确地计算很多简单的和较复杂流动的时均动量和全部雷诺应力,包括壁射流、非对称渠道流和非圆截面管流,以及曲面流。雷诺应力方程模型的缺点是计算量太大(有7个附加偏微分方程);不如混合长度模型和 k -模型那样得到广泛验证;由于遇到方程建模的相同问题,在计算某些流动如轴对称射流,无约束回流等情况下与 k -模型的性能一样差。

推广和改进雷诺应力方程模型是非常活跃的研究领域。一旦模型的准确形式得到共识,在不久的将来,功能更强大的计算硬件得到普及,这种形式的湍流模型将会进入工程应用的每一个角落。

四、代数应力方程模型

代数应力方程模型(ASM)是计算各向异性雷诺应力的经济方法,不用去解全雷诺应力输运方程。造成解RSM的巨大计算费用的原因是雷诺应力梯度等出现在对流项和扩散输运项。Rodi提出一个概念,即如果将对流项和扩散输运项去掉或模型化,雷诺应力方程就简化为一组代数方程。最简单的方法是将对流项和扩散输运项一起略去。某些情况下看来足够精确(D. Naot 和 W. Rodi, 1982; A. O. Demuren 和 W. Rodi, 1984)。更一般的方法是,假定雷诺应力的对流项和扩散项之和与湍动能的对流项和扩散项之和成正比。

Demuren 和 Rodi(1984)报告了非圆截面导管二次流计算,用了这一模型的更精巧的版本,包括了压力-应变项修正和可调常数值修正,以更好地匹配近似均匀剪切流和渠道流的测量数据。他们得到矩形管和方管流的基本流畸变和二次流的真正预测。这些效果是法向雷诺应力各向异性引起的,因此不能用标准 k -模型同样的模拟来表达。

代数应力模型是将各向异性影响纳入雷诺应力计算的经济方法。这个模型

没有像 k - 模型那样得到验证,但可以用在 k - 模型表现很差的流动和所做输运假定对精度危害不太严重的地方。

代数应力模型的优点是:算出雷诺应力各向异性的经济方法;具有融合 RSM 的一般性和 k - 模型经济性的潜力(对于浮力和旋转影响可能是好的模型,可成功应用于等温浮力薄剪切层);若对流项与扩散项可略去,则 ASM 和 RSM 表现相同。

代数应力模型的缺点是:比 k - 模型开销稍大一些(两个偏微分方程和一个代数方程组);不如混合长度模型和 k - 模型得到广泛验证;与 RSM 应用有相同的缺点,在不能应用对流和扩散输运假定的流动中,模型受到严格限制。

五、最新进展

湍流建模领域为 CFD 和流体工程应用开辟了深入研究的广阔天地。前面介绍了一些建模策略的轮廓,这几个主要的经典模型已应用于商业通用软件或正在开发中。下面再介绍近来的一些新进展。

支撑着当前活跃的湍流模型研究的信念是,必有一些(有限的)湍流普遍特性与边界条件和几何形状无关;若正确地认识了这些特性,就形成了完整描述工程师们感兴趣的流动变量的基础。必须强调信念一词,因为这个领域的一些著名专家对时均方程的经典模型仍坚持自己的看法,如混合长度模型在外流空气动力学领域取得的成功鼓励他们坚持发展有限类流动的精密模型。这两种观点自然引出两条不同的研究工作路线: 为有限类别的流动发展和完善湍流模型;寻找广泛和完全通用的湍流模型。

工业上有许多迫切需要解决的流动问题,不能等待通用的湍流模型问世。幸好很多工程部门对某些类别的流动特别有兴趣。如管道输油部门的管道流动,电力工程的涡轮机旋转流动和燃烧器的化学反应混合流动等。大多数的湍流研究是个案考察,以及验证现有的湍流模型对这些特殊问题的有效性。

可供参考的文献太多,国际学术期刊中有应用导向信息的主要来源是一些著名的学术期刊,如《Transactions of the American and Society of Mechanical Engineers》,特别是其中的《Journal of Fluids Engineering》《Journal of Heat Transfer》《Journal of Engineering for Gas Turbines and Power》,还有《AIAA Journal》《The International Journal of Heat and Mass Transfer》《International Journal of Heat and Fluid Flow》等。在国内的学术期刊中,《力学学报》《空气动力学学报》《Journal of Hydrodynamics》提供了解决流动问题的、较好的资料来源。目前,湍流模型研究向更深入的新方向发展,很多文章发表在上述杂志上,特别是《AIAA Journal》。另外,《The Journal of Fluid Mechanics》和《Physics of Fluids》提供了更新的、涉及基础研究的文章。

书中收入的所有湍流模型都已得到初步的分析方法和半经验方法的认可。Launder 在发展实际上所有的通用型湍流模型中起到了关键作用,并做了关于 RSM 地位的极好综述(1989),认为它是最精密的模型。这个领域在继续发展,但即使是 RSM 模型也不是解决所有问题的通用工具。R. S. Amano 和 P. Goel (1987) 建议,完整的三阶矩封闭模型一项也不能少。不过,三阶矩封闭增加了求解的计算费用,另外,它使得用测量来支持这类输运方程中的扩散项、生成项和消失项的建模越来越难。

为此,NASA Langley 研究中心的一个小组在 C. G. Speziale 领导下近来发展了非线性 k - 模型的框架工作。此外,他们还导出 ASM(T. B. Gatski 和 C. G. Speziale, 1993),声称其计算更稳定。 k - 模型的主要缺点是涡粘性对所有的雷诺应力是一样的,而测量指出,即使简单湍流也不是这样的。在二维薄剪切层,矛盾往往不引人注意,因为仅有一个显著的雷诺应力。最初对 ASM 有兴趣是它能提供廉价方法计算出雷诺应力的各向异性。

早已有人认为 方程是标准版 k - 模型和 RSM 在大变形率流动中精度有限的主要原因。V. Yakhot(1992)等报告新的 k - 模型(RNG 模型)预测后向台阶流非常好。设计各向异性涡粘性 k - 模型的进展使得人们的注意力从受欢迎的 ASM 转到建立新的 k - 模型。

RNG 模型是 k - 模型的变种,计算费用只比标准版的计算稍微多一些。改进性能适应复杂湍流计算,具有很大吸引力,现在一些 CFD 商业软件增加了这个模型的 RNG 版本。然而用户应该注意,RNG 模型的所有承诺对于湍流还只是新鲜事物,还需要对它进行广泛的验证。

本章给出了湍流的初步印象,描述了湍流性质和湍流建模的方法。湍流是极复杂的现象,使理论家们困惑了一个多世纪。出现湍流时,流动剧烈变化,这可能是有益的(如有效混合),又可能是有害的(如高度能量损失)。湍流脉动在时均流上附加了雷诺应力。

湍流的数学处理之所以这么困难,是因为湍流运动包含大范围的长度和时间尺度,即使在边界条件极简单的流动中也是如此。令人惊奇的是,两个应用最广的模型,混合长度模型和 k - 模型仅用一个长度尺度和一个时间尺度定义流体量,成功地表达了湍流的许多重要特性。标准 k - 模型仍然被特别推荐用于一般的 CFD 计算。尽管很多专家认为,雷诺应力模型(RSM)是通往真正普适的经典湍流模型的惟一选择。最近,非线性 k - 模型的进展看来是在支持二方程模型的继续研究。

大涡模拟(LES)要求很大的计算资源,不是(或暂时还不是)通用的工具。不

过,简单流动的 LES 计算能够提供一些实验室无法测量的湍流物理量。因此, LES 将越来越多地通过比较性研究用于指导经典模型的发展。关于 LES 研究论文的数量正在迅速增长。

尽管湍流模型导出的数学表达式可能十分复杂,但不要忘了它们都含有可调常数,需要用实验数据的最佳拟合来确定这些常数,这就带进了实验的不确定性。每个工程师都知道,超过数据范围推出经验模型的危险性,如果滥用湍流模型也将有同样的风险。不经过高质量实验验证,就不能接受新型湍流的 CFD 计算。

第4章 发展方程的有限差分法

描述随时间变化的物理过程的偏微分方程称为发展方程。与时间无关的定常问题在物理上往往反映一个稳定过程的平衡态,它可以看成是一个非定常过程在无限长时间后的渐近状态。因此,发展方程的研究具有普遍意义。

在流体力学数值解法中,广泛应用的是有限差分法,即在离散的网格点上把各偏导数项化为差商来求数值解:选择合适的基本方程,确定相应的定解条件,然后将微分方程离散到差分网格上求解。

本章4.1节介绍了有限差分法的概念和一般的有限差分格式。差分方法的基本要求是差分方程能准确地代表微分方程。有限差分法的近似处理会引进误差,包括差分方程的截断误差、差分方程解的离散误差,以及计算过程中引入的舍入误差。这些误差对计算过程和计算结果的影响,反映在差分方程的数学特性上。与此相应的是差分方程的相容性、收敛性和稳定性。4.2节分析了差分方程趋近于微分方程的精确程度(相容性),4.4节讨论了差分方程解收敛于微分方程解的速度(收敛性)和差分方程解对于初始条件的稳定性。4.3节和4.5节介绍了求解流体流动问题的几种常用差分格式及其特性的分析方法。最后,4.6节和4.7节讨论了边界条件对差分格式稳定性的影响,以及修正方程在分析、改进差分格式中所起的作用。

4.1 有限差分法的概念和一般的有限差分格式

最早用来描述物体运动的方程就是有限差分方程。17世纪初,伽利略从著名的斜面实验中得到了自由落体定律。他按时间间隔 t 观测和记述了小铜球在光滑木板制的斜面槽的滚动。在相连的三个时刻 $(n-1)t$ 、 nt 、 $(n+1)t$ 记录的小球下落距离 x 分别是

$$x^{n-1} = k^2(n-1)^2 t^2, \quad x^n = k^2 n^2 t^2, \quad x^{n+1} = k^2(n+1)^2 t^2$$

其中, k 为常数。综合上列三式得小球运动规律为

$$x^{n+1} - 2x^n + x^{n-1} = 2k t^2$$

可以说这是最早用来描述自由落体运动的差分方程。以后,牛顿将物体运动第二定律以微分方程进行描述,那么上述自由落体运动可表示为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2k$$

式中, $2k$ 即重力加速度 g 。式中的二阶导数在差分方程中是以离散的实验数据表达的。

计算流体力学把描述流体运动的连续微分方程变成了有限离散的代数方程, 在计算机上求解。有限差分法是目前最常用的一种求解流体运动的数值方法。

在第 7 章将把涡量输运方程和流函数方程描述的不可压缩平面流动问题作为例子来说明有限差分法的应用。求解流体动力学问题的完整过程的一个例子如图 4. 1 所示。

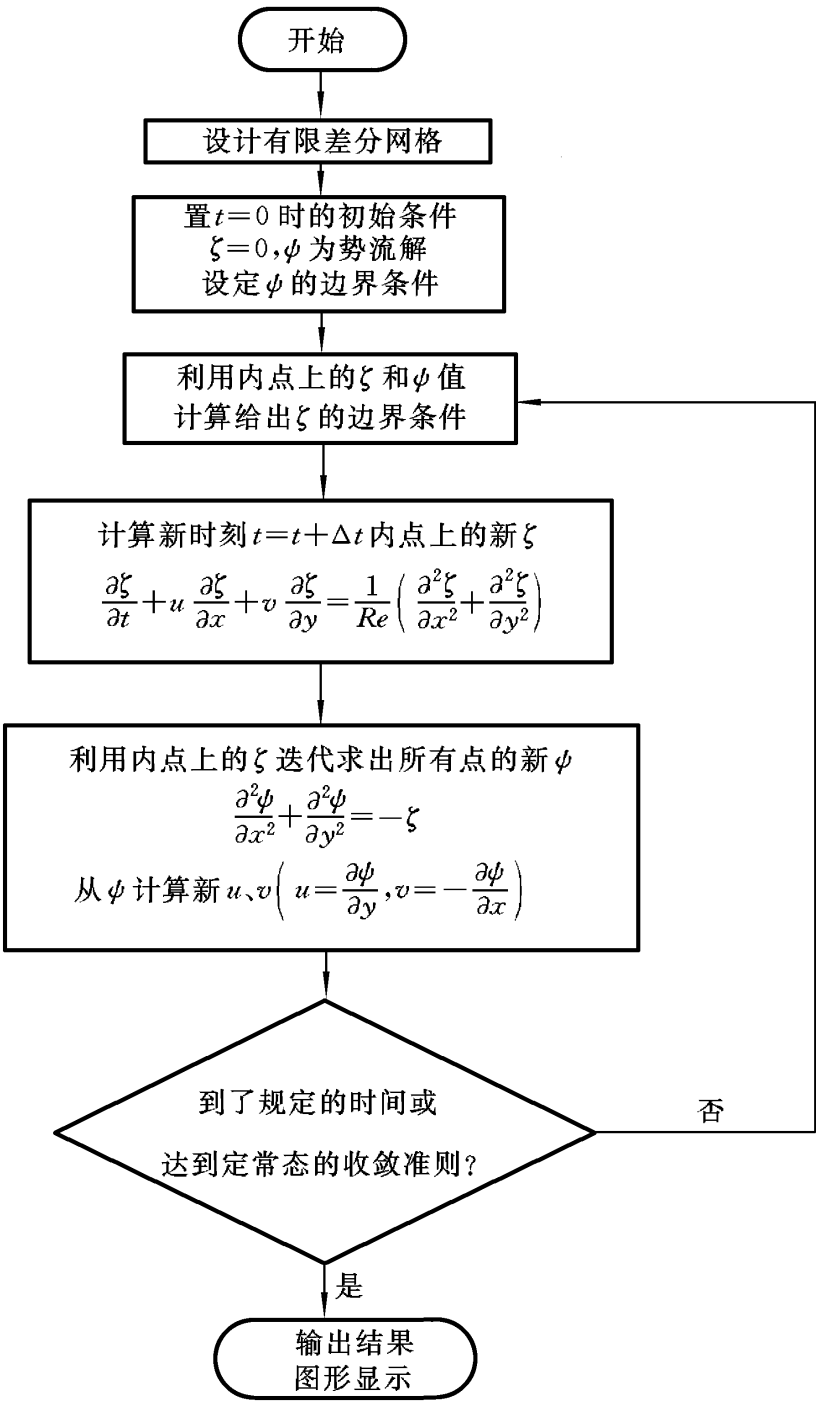


图 4. 1 求解流体动力学问题的过程示例

一、把连续空间转换为离散的空间网格

用有限差分法对基本方程组积分时,以差商代替微商,把微分方程组写成差分方程组。同时,有限差分的“网格”覆盖连续区域,在网格的交点,即“节点”或“网格点”上定义有限差分解。

写出差分方程组之前,首先把连续空间转换为离散的空间网格。如二维情形,考虑平面有界域 Ω , $x, y \in \Omega, t > 0$ 。若 Ω 是矩形域 $(0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y)$, 可用两组平行线将 Ω 划为 $I \times J$ 个矩形子域(网格)。网格线交点的坐标为

$$x = i \Delta x \quad (i = 0, 1, \dots, I), y = j \Delta y \quad (j = 0, 1, \dots, J)$$

x, y 方向的空间步长分别为 $\Delta x = X/I$ 和 $\Delta y = Y/J$ 。用 i, j 为网格编号后,如图 4.2 所示。

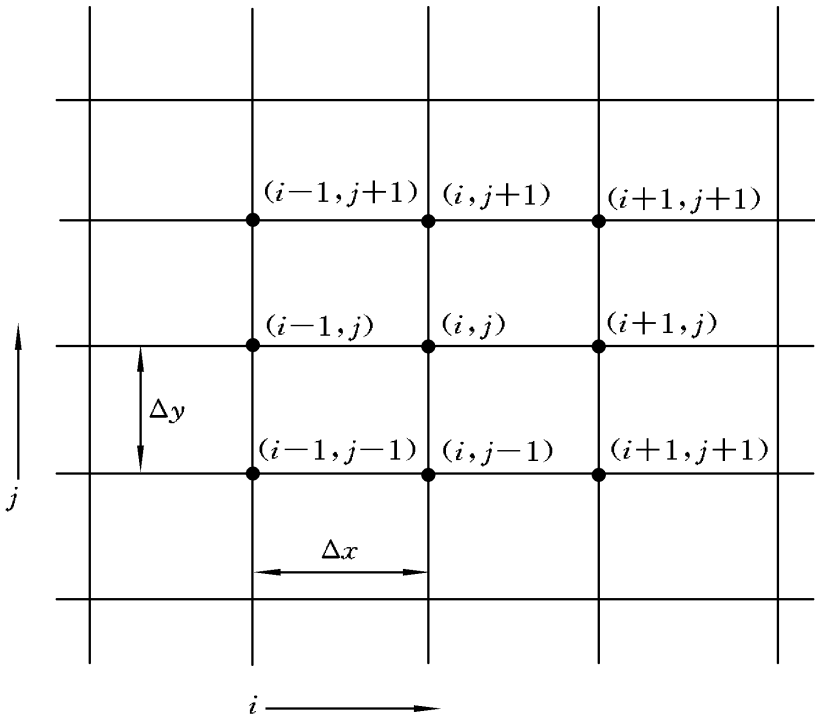


图 4.2 均匀矩形网格

取 t 方向的时间步长为 $\Delta t = T/N$, 对时间域 $0 \leq t \leq T$ 进行网格划分。在域内插入 $N-1$ 个节点, 则

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$$

简单情况下可将网格线等距离安排。如一维发展问题即取自变量 x 的改变量 Δx 为常数, t 的改变量 Δt 为另一常数; Δx 称为沿 x 方向的网格步长, Δt 称为沿 t 方向的网格步长。网格线的交点则称为网格的节点, 节点坐标可用其序号来表示。例如, 第 j 条等 x 线与第 n 条等 t 线的交点 (x_j, t_n) 可简写为 (j, n) 。相应地, 点 (x_{j+1}, t_n) 可简写为 $(j+1, n)$, 依此类推。为书写简洁, 序号 (j, n) 还可写成下标和上标的形式, 例如 $u(j, n)$ 可写成 u_j^n 。一般将空间坐标的序号写成下标, 上

标 n 代表第 n 个时间步或时间层。

偏微分方程记述了函数的各项偏导数之间的关系。偏微分方程离散为差分方程时, 各项偏导数离散为差商。差商的形式称为偏导数的差分格式。由各差商项组成的差分方程的形式, 称为偏微分方程的差分格式。

偏微分方程和偏导数的差分可以有不同格式, 但在同一方程中的各项或同一问题中的各方程是相关的。例如, 求解粘性不可压缩流体的平面流动问题, 抛物型的涡量输运方程和椭圆型的流函数方程的解法不同但相关, 加大涡量方程的步长会增加流函数方程的迭代次数, 边界条件处理亦互相影响。

二、基本的有限差分格式

有多种方法构造有限差分格式。这里介绍构造差分格式的泰勒级数展开法、多项式拟合法、积分法和控制体积法, 以及差分格式的守恒形式。首先给出的一维形式的差分格式。

1. 泰勒级数展开法

以均匀网格为例, x 方向的空间步长为常数 Δx , 用 f 表示任意函数, 则偏导数的有限差分(差商)可以从泰勒级数展开得到。

为了得到函数 f 对 x 的偏导数的差商, 在某一固定时刻 n , 在位置 $i+1$ 和 $i-1$, 把函数 f 作为 x 的函数, 在 x_i 的邻域展开成泰勒级数:

$$\begin{aligned} f_{i+1}^n &= f_i^n + \left. \frac{f}{x} \right|_i^n \Delta x + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^n \frac{\Delta x^2}{2!} + \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i^n \frac{\Delta x^3}{3!} + \left. \frac{1}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i^n \frac{\Delta x^4}{4!} + \text{HOT} \\ f_{i-1}^n &= f_i^n - \left. \frac{f}{x} \right|_i^n \Delta x + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^n \frac{\Delta x^2}{2!} - \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i^n \frac{\Delta x^3}{3!} + \left. \frac{1}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i^n \frac{\Delta x^4}{4!} + \text{HOT} \end{aligned}$$

HOT 表示高阶项。为书写方便, 暂时略去表示时间步长的上标 n 。用 x_i 和其前方点 x_{i+1} 的函数值给出函数 f 对 x 的一阶偏导数的差商(向前展开)。泰勒级数展开式给出

$$\left. \frac{f}{x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i \Delta x + \text{HOT}$$

或用 O 表示截断误差的阶次。截断误差中, Δx 的最低阶次为 1 时可写为

$$\left. \frac{f}{x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

于是有一级精度的向前差分格式, 可写为

$$\left. \frac{f}{x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \tag{4.1.1}$$

用 x_i 和其后方点 x_{i-1} 的函数值给出函数 f 对 x 的一阶偏导数的差商(向后展开), 有

$$\left. \frac{f}{x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2x} + O(x^2)$$

于是又有一级精度的向后差分格式, 可写为

$$\left. \frac{f}{x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{x} + O(x) \quad (4.1.2)$$

两个泰勒级数展开式相减得到二级精度的一阶中心差分格式

$$\begin{aligned} \left. \frac{f}{x} \right|_i &= \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2x} + O(x^2) \\ \left. \frac{f}{x} \right|_i &= \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2x} + O(x^2) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

用差分代替偏导数时必然产生误差, 误差精度是从泰勒级数分析得到的。一阶中心差分格式截断误差为

$$O(x^2) = - \left. \frac{f}{x^3} \right|_i \frac{x^2}{3!} + \left. \frac{f}{x^5} \right|_i \frac{x^3}{4!} + \text{HOT}$$

两个泰勒级数展开式相加得到二级精度的二阶中心差分格式

$$\begin{aligned} \left. \frac{f}{x^2} \right|_i &= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{x^2} + O(x^2) \\ \left. \frac{f}{x^2} \right|_i &= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{x^2} + O(x^2) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

截断误差为

$$O(x^2) = - \left. \frac{f}{x^4} \right|_i \frac{x^2}{4!} + \text{HOT}$$

上面略去了表示时间步长的上标 n 。对于时间, 可以类似导出差分格式。把函数 f^{n+1}_i 在 t_n 邻域展开成泰勒级数, 可得到一级精度的向前差分格式

$$\begin{aligned} \left. \frac{f}{x} \right|_i^n &= \frac{f^{n+1}_i - f^n_i}{t} + O(t) \\ \left. \frac{f}{x} \right|_i^n &= \frac{f^{n+1}_i - f^n_i}{t} + O(t) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

截断误差为

$$O(t) = \left. \frac{f}{t^2} \right|_i \frac{t}{2!} + \text{HOT}$$

偏导数的有限差分组合后构成了偏微分方程的有限差分格式。如一维对流扩散方程(2.3.15) 用函数 $f(x)$ 的形式可写为

$$-\frac{f}{t} + a \frac{f}{x} = -\frac{f}{x^2} \quad (4.1.6)$$

它的一个差分格式是

$$\frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{2\tau} = -\frac{af_{i+1}^n - af_{i-1}^n}{2x} + \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{x^2} \quad (4.1.7)$$

式中, 三项都是二级精度的中心差分格式。但这是不稳定的差分格式(见4.4节的讨论)。若时间差分是一级精度的向前差分, 空间差分为二级精度的中心差分, 那么在一定条件下得到稳定的差分格式(称为FTCS格式):

$$\frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^n}{\tau} = -\frac{af_{i+1}^n - af_{i-1}^n}{2x} + \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{x^2} \quad (4.1.8)$$

2. 多项式拟合法

多项式拟合法是一种用离散试验数据求导数的方法。设某函数 $f(x)$ 可表示为二次多项式

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

若原点在第 i 点处, 有

$$f_{i-1} = a - bx + cx^2, \quad f_i = a, \quad f_{i+1} = a + bx + cx^2$$

a 等于节点 i 处函数值, b 、 c 亦可用节点函数值给出:

$$b = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2x}, \quad c = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2x^2}$$

$f(x)$ 在第 i 点的微分

$$\left. \frac{f}{x} \right|_{x=0} = (b + 2cx)_{x=0} = b, \quad \left. \frac{f^2}{x^2} \right|_{x=0} = 2c$$

这就得到了类似用泰勒级数法得到的二级精度的中心差分式(4.1.3)和式(4.1.4)。如果函数 $f(x)$ 设为一阶多项式, 得到的是一级精度的向前差分和向后差分。

除计算边界附近的导数外, 一般不采用多项式拟合法。因为高阶拟合对噪声敏感。

3. 积分法

设有函数 的一维对流扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

这里对流速度 u 是 的函数或是常数。在 $(t, t + \tau)$ 和 $(x - \Delta x/2, x + \Delta x/2)$ 区域积分上述方程, 积分次序经调换得

$$\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \int_t^{t+\tau} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = - \int_t^{t+\tau} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial (u)}{\partial x} dx dt + \int_t^{t+\tau} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt$$

积出内层

$$\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} (u|_{t+\tau} - u|_t) dx = - \int_t^{t+\tau} [(u)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - (u)_{x-\frac{\Delta x}{2}}] dt$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - \left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x-\frac{\Delta x}{2}} dt$$

使用中值定理, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 和 $\Delta x \rightarrow 0$ 时收敛性得到保证。上式左边在中点取值, 右边在下限取值:

$$\left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^{t+\Delta t} - \left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^t = - \left[(u)_{x+\frac{\Delta x}{2}}^t - (u)_{x-\frac{\Delta x}{2}}^t \right] \Delta t + \left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x+\frac{\Delta x}{2}}^t - \left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x-\frac{\Delta x}{2}}^t \Delta x$$

其中, 右边的一阶导数求解过程如下。由

$$\left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^t = \left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^t + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^t \Delta x$$

使用中点法, 则

$$\left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^t = \left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^t \pm \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^t \Delta x \quad \text{或} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^t = \frac{\left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^t - \left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x \mp \frac{\Delta x}{2}}^t}{\Delta x}$$

右边的 $(u)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^t$ 在中点取值, 可用简单平均表示为

$$(u)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^t = \frac{1}{2} [(u)_x^t + (u)_{x \pm \Delta x}^t]$$

于是

$$\frac{\left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^{t+\Delta t} - \left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^t}{\Delta t} = - \frac{(u)_{x+\frac{\Delta x}{2}}^t - (u)_{x-\frac{\Delta x}{2}}^t}{2 \Delta x} + \frac{\left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x+\frac{\Delta x}{2}}^t - 2 \left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^t + \left(\frac{1}{\Delta x} \right)_{x-\frac{\Delta x}{2}}^t}{\Delta x^2} \quad (4.1.9)$$

若应用 i, n 下标, 且对流速度 u 为常数, 则得到与前相同的一维对流扩散方程差分格式, 这里函数和对流速度用了不同的符号。若从 $t - \Delta t$ 到 $t + \Delta t$ 积分, 则得到不稳定的格式。

4. 控制体积法

控制体积法强调物理现象的守恒性质, 推导一维对流扩散方程差分格式的过程与积分法相似: 以空间位置(节点) x 为几何中心划出一个边长为 Δx 、 Δy 、 Δz 的六面体控制体(CV), 将节点值 ϕ 看成是某流体量在整个控制体积的平均值, u 是对流速度。若不考虑源的作用, 守恒定律的一般叙述是: 某流体量在 CV 中的总增加量等于由对流流进 CV 的净通量加上由扩散流进 CV 的净通量。

Δt 时间内, CV 中此流体量 ϕ 的总增加量为

$$\left(\phi \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^{t+\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z - \left(\phi \right)_{x \pm \frac{\Delta x}{2}}^t \Delta x \Delta y \Delta z$$

Δt 时间内, 从垂直于 x 方向的 CV 两侧面沿 x 方向流入 CV 的 ϕ 的净对流通量是

$$(u)_{x-\frac{\Delta x}{2}} \phi_{x-\frac{\Delta x}{2}} \Delta y \Delta z \Delta t - (u)_{x+\frac{\Delta x}{2}} \phi_{x+\frac{\Delta x}{2}} \Delta y \Delta z \Delta t$$

由于 u 可能是时间变量, 在这两侧面的界面值必须用对 t 的某种平均来表示。

在 x 方向的扩散速率 q 正比于 ϕ 沿 x 方向的梯度

$$q = - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

向着负梯度方向扩散。 Δt 时间内由两侧面沿 x 方向扩散进入 CV 的净扩散通量是

$$y \Delta z \Delta t \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x+\Delta x/2} - y \Delta z \Delta t \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x-\Delta x/2}$$

守恒定律在这里为(两边同除 $y \Delta z \Delta t$)

$$\frac{1}{\Delta t} (\phi_{x+\Delta x/2}^{t+\Delta t} - \phi_{x+\Delta x/2}^t) \Delta x = - \frac{1}{\Delta x} [(\phi_x)_t]_{x+\Delta x/2} - (\phi_x)_t]_{x-\Delta x/2} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x+\Delta x/2} - \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x-\Delta x/2}$$

推导差分格式有选择的余地。如果设 ϕ_x 的界面值为 t 时刻相邻节点的平均值

$$(\phi_x)_{x \pm \Delta x/2} = \frac{1}{2} [(\phi)_{x \pm \Delta x/2}^t + (\phi)_{x \pm \Delta x/2}^t]$$

梯度项用 t 时刻的中心差分计算

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x \pm \Delta x/2} = \frac{\phi_{x \pm \Delta x}^t - \phi_x^t}{\pm \Delta x}$$

那么,这样组成的差分格式是

$$\frac{\phi_{x \pm \Delta x}^{t+\Delta t} - \phi_{x \pm \Delta x}^t}{\Delta t} = - \frac{(\phi_x)_{x+\Delta x/2}^t - (\phi_x)_{x-\Delta x/2}^t}{2 \Delta x} + \frac{\phi_{x+\Delta x}^t - 2 \phi_x^t + \phi_{x-\Delta x}^t}{\Delta x^2} \tag{4.1.10}$$

与用积分法导出的格式(4.1.9)相同。

用以上四种方法可推导出同一个差分格式,但是用任何一种方法都面临不同选择。实际上可得到多种形式的差分格式,其中微小的差别可能产生性质的改变。控制体积法以宏观物理定律为基础推导差分格式,因此当连续的微分方程不存在时,这种方法仍然可能成功。

5. 守恒形式的差分格式

控制体积法注重在宏观上真实满足物理定律,而不是当 Δt 、 Δx 趋于零时满足某种理论极限。这是守恒性质的基本概念。如果有限差分格式保持连续的微分方程的某种积分守恒关系,则称这格式具有守恒性质。

例如,考虑涡量方程的守恒形式。借助连续性方程将三维涡量方程写为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial (\omega u)}{\partial x} + \frac{\partial (\omega v)}{\partial y} + \frac{\partial (\omega w)}{\partial z} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \tag{4.1.11}$$

在控制体积分涡量方程,应用高斯散度定理后得到(矢量方程形式)

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \omega dV = - \int_A n_j (\omega u_j) dA + \int_A n_j \omega \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dA$$

式中, A 是控制体的边界曲面, n 是边界曲面的单位外法向矢量。

差分格式的守恒性质是指在有限差分格式中保持这个积分关系,即通量守恒。如果准确的参照控制体积分法去推导有限差分表达式,那么当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时可使非守恒方法中存在的守恒性误差消失,虽然计算中仍用了有限的 Δt 。

为明确起见,考察一维模型 $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial (u)}{\partial x}$ 的无粘情况

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial (u)}{\partial x} \quad (4.1.12)$$

方程的 FTCS 差分格式是

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{(u)_{i+1}^n - (u)_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (4.1.13)$$

在一维区域 AB 积分(参考图 4.3,图中仅示意画出五个控制体单元)。设控制体在垂直于 x 方向上的截面积相等,积分仅对 x 进行

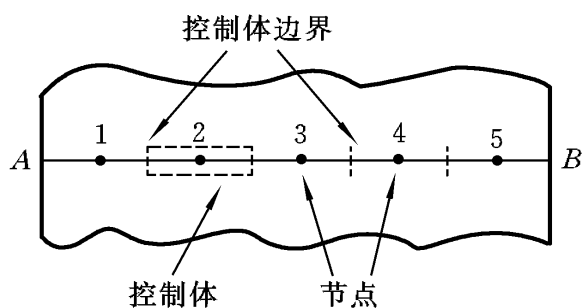


图 4.3 一维控制体积分示意

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A^B dx = - \int_A^B \frac{\partial (u)}{\partial x} dx$$

按差分格式将积分变为各个控制体积分之和。设控制体宽为 Δx , 控制体边界到节点距离为 $\Delta x/2$, 积分从 $i = I_A$ 到 $i = I_B$ (图 4.3 中 $I_A = 1, I_B = 5$), 则有

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=I_A}^{I_B} u_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_A}^{I_B} u_i^n \Delta x = - \sum_{i=I_A}^{I_B} \frac{(u)_{i+1}^n - (u)_{i-1}^n}{2\Delta x} \Delta x$$

或

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=I_A}^{I_B} u_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_A}^{I_B} u_i^n \Delta x = \frac{(u)_{I_A-1}^n + (u)_{I_A}^n}{2} \Delta x - \frac{(u)_{I_B}^n + (u)_{I_B+1}^n}{2} \Delta x$$

I_A-1 和 I_B+1 是一维区域外的两个虚拟节点。求和结果成对地消去了方程右边位于中间格子的通量项。上式右边两项分别是两端控制体的边界通量,由线性外推假定,可将上式写为

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=I_A}^{I_B} u_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_A}^{I_B} u_i^n \Delta x = (u)_A^n - (u)_B^n \quad (4.1.14)$$

此方程说明在 AB 中累积的速率恒等于通过界面 A 流入 AB 的通量减去通过界面 B 流出 AB 的通量。这个有限差分方程保持了微分方程的积分散度性质,因而具有守恒性质。

守恒性质取决于所用的微分方程的形式及有限差分格式。如一维非守恒模型

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.1.15)$$

方程的 FTCS 差分格式是

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} = -u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (4.1.16)$$

差分格式的积分变为各个控制体积分之和

$$\frac{1}{t} \sum_{i=I_A}^{I_B} u_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_A}^{I_B} u_i^n \Delta x = \frac{1}{2} \sum_{i=I_A}^{I_B} u_i^n (u_{i-1}^n - u_{i+1}^n) \quad (4.1.17)$$

上式右边的中间项不能消去,从而有限差分方程(4.1.16)不能保持微分方程的积分散度性质,因而不具有守恒性质。第一种方法具有守恒性质是因为准确地参照了控制体积方法去推导有限差分格式,从而保持了微分方程的积分散度性质。

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,为保证总通量守恒,惟一的方法是分别保持对流通量守恒和扩散通量守恒。对于多维情况,必须分别保持每一维通量守恒。

经验表明,守恒系统一般给出比较精确的结果,但是对于可压缩流动代价较高。所有的特征线法都是非守恒的,典型的边界层方程有限差分计算都不利用守恒形式。对于变系数扩散项,利用非守恒形式比利用守恒形式可以得到更精确的结果(Roache, 1976)。

4.2 有限差分方程的相容性

这里仍然用一维发展问题来说明有限差分方程的相容性(Consistency)。相容性反映差分方程趋近于微分方程的精确程度。

与微分方程 $Lu = 0$ 对应的差分方程记为 $L u_i^n = 0$, 其中, L 表示某种算子, u 为定义在求解域上的函数, u_i^n 是 u 在网格点 (i, n) 上的值。对于固定点 (x_i, t_n) , 引入记号 $(ET)_i^n = L u_i^n - (Lu)_i^n$, 表示差分方程的截断误差。

对于一足够光滑的函数 u , 当 $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时的截断误差对于每一点 (i, n) 都趋于零, 则称差分方程 $L u_i^n = 0$ 逼近微分方程 $Lu = 0$, 即差分方程与原微分方程相容。

可以证明, 随着网格间距减小到零, 相容的数值格式产生的代数方程组与原控制方程是等价的。下面是相容的差分方程的例子。一维对流扩散方程(a 为常数)为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.2.1)$$

它的差分方程

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} = -a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (4.2.2)$$

式中, 时间差分是一级精度的向前差分, 空间差分为二级精度的中心差分(FTCS 格式)。为方便分析, 差分方程又可写为

$$u_i^{n+1} = -\frac{s}{2} u_{i+1}^n + (1-2s) u_i^n + \frac{s}{2} u_{i-1}^n \quad (4.2.3)$$

式中

$$s = \frac{t}{x^2}, \quad s = \frac{a \cdot t}{x} \quad (4.2.4)$$

用差分格式代替偏导数时必然产生误差, 它的误差可从泰勒级数分析得到。

把 $u_{i\pm 1}^n$ 作为 x 的函数在 x_i 邻域展开成泰勒级数:

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \left. \frac{u}{x} \right|_i x + \left. \frac{u^2}{x^2} \right|_i \frac{x^2}{2!} + \left. \frac{u^3}{x^3} \right|_i \frac{x^3}{3!} + \left. \frac{u^4}{x^4} \right|_i \frac{x^4}{4!} + \text{HOT}$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \left. \frac{u}{x} \right|_i x + \left. \frac{u^2}{x^2} \right|_i \frac{x^2}{2!} - \left. \frac{u^3}{x^3} \right|_i \frac{x^3}{3!} + \left. \frac{u^4}{x^4} \right|_i \frac{x^4}{4!} + \text{HOT}$$

把 u_i^{n+1} 作为 t 的函数在 t_n 邻域展开成泰勒级数:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left. \frac{u}{t} \right|_i t + \left. \frac{u^2}{t^2} \right|_i \frac{t^2}{2!} + \text{HOT}$$

将以上展开的泰勒级数代入差分方程(4.2.3), 得到

$$\begin{aligned} -\left. \frac{u}{t} \right|_i + \left. \frac{u^2}{t^2} \right|_i \frac{t}{2!} + O(t^2) = -a \left. \frac{u}{x} \right|_i + \left. \frac{u^3}{x^3} \right|_i \frac{x^2}{6} + O(x^4) \\ + \left. \frac{u^2}{x^2} \right|_i + \left. \frac{u^4}{x^4} \right|_i \frac{x^2}{12} + O(x^4) \end{aligned}$$

当 t 、 x 同时趋于零时, 差分方程趋于原微分方程, 即差分方程与原微分方程相容。

显然, 差分方程必须满足相容性, 不满足相容性的差分方程不能采用。当定常问题被看成是一个非定常过程在无限长时间后的渐近状态时, 可以用不相容的差分方程。如果在渐近状态下那些不相容的部分自动趋于零, 则差分方程与微分方程达到相容。

4.3 有限差分法的隐式格式和迎风格式

一、隐式格式

对于同一个微分方程来说, 差分格式不是惟一的。例如一维扩散方程

$$\frac{u}{t} = \frac{u^2}{x^2} \quad (4.3.1)$$

取时间步长为 t , 空间步长为 x 。一维扩散方程的差分格式是

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{x^2} \quad (4.3.2)$$

差分格式又可写为

$$u_i^{n+1} = u_{i+1}^n + (1 - 2\tau)u_i^n + \tau u_{i-1}^n \tag{4.3.3}$$

如果要求一维扩散方程的差分格式在 $(i, n+1/2)$ 与微分方程相容, 即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^{n+\frac{1}{2}} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^{n+\frac{1}{2}}$$

可采用时间步长为 $\tau/2$, 空间步长为 Δx 的中心差分:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

式中, $u^{n+1/2}$ 为前后两时刻 u^{n+1} 和 u^n 的平均值。差分格式又可写为

$$u_{i+1}^{n+1} - 2(\tau + 1)u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} = -u_{i+1}^n + 2(\tau - 1)u_i^n - u_{i-1}^n \tag{4.3.4}$$

显然, 用第 n 层的已知数据计算第 $n+1$ 层的未知量时不能像式(4.3.3)那样用明显的代数式求出, 而要对 $n+1$ 层的未知量联立方程组求解。为了加以区别, 式(4.3.3)称为显式格式(explicit scheme), 式(4.3.4)称为隐式格式(implicit scheme)。两种格式都可以得到正确的近似解。隐式格式计算时间比较长, 精度比较高, 是一种常用的格式, 式(4.3.4)称为 Crank-Nicolson 格式。

二、迎风格式

迎风格式是适应流动输运性质的一种差分格式的形式。输运性质是指流体物理量在对流的方向上被输运。下面从纯对流方程解的特点出发说明构造迎风格式的方法。

1. 一维对流方程的迎风格式

设一维对流方程及其边界条件、初始条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, x \geq 0, a > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), x \geq 0 \\ u(0, t) &= g(t), t \geq 0, f(0) = g(0) \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

令 $\xi = x + at$, $\eta = x - at$, 代入方程得 $u/\eta = 0$, 方程解的形式是 $u = c(\eta)$ 。方程解只是 η 的函数。根据初始条件、边界条件可得

$$u(x, t) = \begin{cases} f(x - at), & x - at \geq 0, \\ g(t - x/a), & x - at < 0 \end{cases} \tag{4.3.6}$$

显然, 当 $x - at$ 等于常数时, u 等于常数。下面利用这一特点建立差分方程。

在 (x, t) 平面网格上设 A 点与节点 $(i, n+1)$ 在 $x - at$ 等于常数的直线上, 故

$$u_i^{n+1} = u_A$$

如图 4.4 所示。A 点的坐标为

$$x_A = x_i - a \tau$$

利用线性插值

$$u_A = u_i^{n+1} = u_{i-1}^n + \frac{x_A - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

将 $x = x_i - x_{i-1}$ 代入整理得差分格式为

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{x} = 0 \quad (4.3.7)$$

显然, 这里空间导数用的是向后差分格式。利用泰勒公式将式(4.3.7)在点 (i, n) 展开

$$-\frac{u}{t} \Big|_i^n + a \frac{u}{x} \Big|_i^n + O(\tau) + O(\Delta x) = 0$$

可知, 当时间步长和空间步长趋于零时, 差分格式趋于微分方程, 即差分格式与微分方程相容。这是 $a > 0$ 的情况。在 $a < 0$ 的情况下可类似导出差分格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{x} = 0 \quad (4.3.8)$$

由此可见, $a < 0$ 时空间导数应该用向前差分。把上述两个式子统一表达为

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} + \frac{a + |a|}{2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{x} + \frac{a - |a|}{2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{x} = 0 \quad (4.3.9)$$

若将方程与一维无粘可压缩流动欧拉方程比较, 则 a 相当于当地流速 u 。由于流动一般是上游对下游产生较大影响, 所以 $a > 0$ 时用向后差分, $a < 0$ 时用向前差分都能较好地反映这种情况。格式(4.3.9)叫迎风格式或上风格式(upwind scheme)。

2. 波动方程的迎风格式

设有波动方程及其初边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, t > 0 \quad (4.3.10)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(L, t) = \varphi_2(t)$$

为简便计, 一般设

$$p = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial x}$$

于是得一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial p}{\partial t} - a^2 \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad (4.3.11)$$

$$p(x, 0) = g(x), \quad p(0, t) = \varphi_1(t)$$

$$q(x, 0) = f'(x), \quad q(L, t) = \varphi_2(t)$$

将其改写为矩阵形式, 有

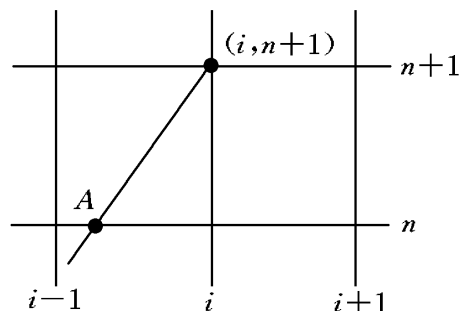


图 4.4 迎风格式示意图(一)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{t} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{x} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \quad (4.3.12)$$

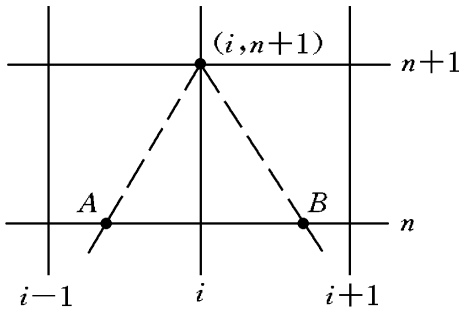


图4.5 迎风格式示意图(二)

设 $\xi = x - at$, $\eta = x + at$, 变量替换后的方程为

$$\frac{\partial (p + aq)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial (p - aq)}{\partial \eta} = 0$$

积分得

$$p + aq = f_1(\xi), \quad p - aq = f_2(\eta)$$

这表明, 沿 $x + at = \text{常数}$ 的曲线上 $p + aq = \text{常数}$;

沿 $x - at = \text{常数}$ 的曲线上 $p - aq = \text{常数}$ 。利用这种关系可以建立差分方程。如图4.5所示, 节点 $(i, n+1)$

与 A 点同在 $x - at = \text{常数}$ 的直线上, 与 B 点同在 $x + at = \text{常数}$ 的直线上。因此有

$$(p - aq)_{i+1}^{n+1} = (p - aq)_A, \quad (p + aq)_{i+1}^{n+1} = (p + aq)_B \quad (4.3.13)$$

且 $x_A = x_{i-1} - at$, $x_B = x_{i+1} + at$, 由线性插值

$$(p - aq)_A = (p - aq)_{i-1}^n + \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x} [(p - aq)_i^n - (p - aq)_{i-1}^n]$$

$$(p + aq)_B = (p + aq)_{i+1}^n + \frac{x - x_{i+1}}{\Delta x} [(p + aq)_i^n - (p + aq)_{i+1}^n]$$

将以上两式分别代入式(4.3.13), 相加减后得

$$\frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^n}{t} = -\frac{a}{2} \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{a}{2} \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta x} + \frac{a^2}{2} \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{a^2}{2} \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{\Delta x}$$

$$\frac{q_{i+1}^{n+1} - q_i^n}{t} = \frac{1}{2} \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{a}{2} \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{\Delta x} - \frac{a}{2} \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{\Delta x}$$

将差分格式再写为矩阵形式, 有

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{t} & p \\ & q \end{pmatrix}_{i+1}^{n+1} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_i^n + \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{a^2}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_i^n - \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{a^2}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_{i-1}^n = 0 \quad (4.3.14)$$

下面导出这个差分格式的较简洁形式, 其物理意义更清楚。将式(4.3.12)中关于 x 的偏导数的系数矩阵记为 A , 如下分解矩阵 A 为三个矩阵 T^{-1} 、 T 相乘的形式:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = T^{-1} T \quad (4.3.15)$$

式中, T 称为特征矩阵, a 和 $-a$ 是一对特征值。将特征矩阵分解为分别代表正、负特征值的两个矩阵(绝对值符号表示对矩阵每个元素取绝对值):

$$= \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{+|\mathcal{O}| |\mathcal{O}|}{2} + \frac{-|\mathcal{O}| |\mathcal{O}|}{2}$$

这样, 式(4.3.15)右边分解后也是两个矩阵的和。这两个矩阵从形式上分别写为

$$A_+ = T^{-1} \frac{+|\mathcal{O}| |\mathcal{O}|}{2} T = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{a^2}{2} \\ -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}, A_- = T^{-1} \frac{-|\mathcal{O}| |\mathcal{O}|}{2} T = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & -\frac{a^2}{2} \\ -\frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

再引入记号 $U = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, 式(4.3.14)可写为

$$\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^n}{t} = A_+ \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{x} + A_- \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{x} = 0 \quad (4.3.16)$$

式(4.3.16)与式(4.3.9)相比形式上一致, 是迎风格式在方程组中的推广, 其物理意义很明确。实际上, 这是特征关系式差分化后得到的。正特征反映了上游对下游的影响, 负特征反映了下游对上游的影响, 所以相应的导数用向后或向前的差分格式。

4.4 有限差分方程的收敛性和稳定性

判断一个数值算法能否成功, 用到三个数学概念: 相容性、收敛性和稳定性。我们已经知道, 不相容的数值格式是不能用的。收敛性则反映了一个数值方法产生的解随着网格间距减小到零而逼近微分方程解的速度。稳定性反映舍入误差对于解是衰减的还是增长的, 更一般的指数值计算过程中, 初始数据的任何分量放大的程度是否有界。若一个方法不稳定, 即使是初始数据的舍入误差也能引起剧烈振荡或发散。

一般很难从理论上建立收敛性。Lax 等价定理指出, 对线性方程组来说, 一个相容的有限差分格式, 稳定性是收敛性的必要和充分的条件。在流体力学数值计算中, 可以有限度地使用这一定理, 因为流动控制方程是非线性的。在这样的问題中, 相容性和稳定性对于收敛是必要的, 但不是充分的条件。

一、差分方程的收敛性

差分方程收敛性(Convergency)的定义: 在节点 (x_i, t_n) , 差分格式 $L u_i^n = 0$ 的解 u_i^n 对于微分方程 $Lu = 0$ 的解 $(u)_i^n$ 的误差记作 $e_i^n = u_i^n - (u)_i^n$; 如果对于相当广泛的一类定解函数的初值和边值问题都有

$$e_i^n = \frac{x_i - t}{\Delta x} = 0$$

则称该差分格式的解是收敛的, 否则是不收敛的。其中, " 表示对所有的 i 和 n 。

以一维扩散方程为例, 考察差分方程解的收敛性。记网格点上差分方程的解为 u_i^n , 同一点上微分方程的解为 $(u)_i^n$, 式(4.3.3)给出的差分格式为

$$u_i^{n+1} = u_{i+1}^n + (1 - 2\tau)u_i^n + \tau u_{i-1}^n$$

由泰勒级数展开分析知, 微分方程的解在相邻网格点上满足关系式

$$(u)_i^{n+1} = (u)_{i+1}^n + (1 - 2\tau)(u)_i^n + \tau(u)_{i-1}^n + O(\tau, x^2) \quad (4.4.1)$$

将以上两式相减, 得

$$e_i^{n+1} = e_{i+1}^n + (1 - 2\tau)e_i^n + \tau e_{i-1}^n + O(\tau, x^2) \quad (4.4.2)$$

对上式各项取绝对值后有以下关系:

$$|e_i^{n+1}| \leq |e_{i+1}^n| + (1 - 2\tau)|e_i^n| + \tau|e_{i-1}^n| + O(\tau, x^2)$$

令

$$E^{(n)} = \max_i |e_i^n| \quad (4.4.3)$$

若 $\tau \leq 1/2$, 则

$$\begin{aligned} |e_i^{n+1}| &\leq E^{(n)} + O(\tau, x^2) \\ E^{(n+1)} &\leq E^{(n)} + O(\tau, x^2) \end{aligned}$$

对各个时刻依次写出

$$\begin{aligned} E^{(n)} &\leq E^{(n-1)} + O(\tau, x^2) \cdot \tau \\ E^{(n-1)} &\leq E^{(n-2)} + O(\tau, x^2) \cdot \tau \\ E^{(n-2)} &\leq E^{(n-3)} + O(\tau, x^2) \cdot \tau \end{aligned}$$

$$E^{(1)} \leq E^{(0)} + O(\tau, x^2) \cdot \tau$$

将以上各式相加得

$$E^{(n)} \leq E^{(0)} + O(\tau, x^2) \cdot n\tau$$

假使起始时刻无误差或至少误差有界, 则有当 τ, x 趋于零时, 在给定时刻 $T = n\tau$, $E^{(n)}$ 趋于零或有界。可见当 $\tau \leq 1/2$ 时, 一维扩散方程的差分格式解收敛到微分方程解。

不收敛的差分格式是不能采用的。必须指出, 大部分的差分格式都是相容的, 但不总是收敛的。相容性只保证当 τ, x 趋于零时, 方程的截断误差趋于零, 而不保证运算时的舍入误差也趋于零。因此收敛性比相容性有更严格的要求。

选取不同 τ , 收敛与否和收敛速度都不相同。下面讨论这一点。如一维扩散方程的差分方程

$$\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^n}{t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{x^2} \quad (4.4.4)$$

把函数 u 在 x_i 和 t_n 邻域展开成泰勒级数:

$$u_{i\pm 1}^n = u_i^n \pm \left. \frac{u}{x} \right|_i^n x + \left. \frac{u^2}{x^2} \right|_i^n \frac{x^2}{2!} \pm \left. \frac{u^3}{x^3} \right|_i^n \frac{x^3}{3!} + \left. \frac{u^4}{x^4} \right|_i^n \frac{x^4}{4!} + \text{HOT}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left. \frac{u}{t} \right|_i^n t + \left. \frac{u^2}{t^2} \right|_i^n \frac{t^2}{2!} + \left. \frac{u^3}{t^3} \right|_i^n \frac{t^3}{3!} + \left. \frac{u^4}{t^4} \right|_i^n \frac{t^4}{4!} + \text{HOT}$$

将函数 u 的泰勒级数展开式代入差分方程(4.4.4), 并写为算子形式

$$L_x u = L_t u \quad (4.4.5)$$

由于 L_x, L_t 都是线性算子, 所以有

$$L_x^m u = L_t^m u, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4.6)$$

当 $m=1$ 时有式(4.4.5), 其两边算子分别对 x 和 t 进行如下运算:

$$\begin{aligned} & -\frac{t}{t} + \frac{t}{2} \frac{t^2}{t^2} + \frac{t^2}{6} \frac{t^3}{t^3} + \frac{t^3}{24} \frac{t^4}{t^4} + \frac{t^4}{5!} \frac{t^5}{t^5} + \dots u \\ & = -\frac{t^2}{x^2} + \frac{2}{4!} \frac{x^2}{x^4} + \frac{2}{6!} \frac{x^4}{x^6} + \frac{2}{8!} \frac{x^6}{x^8} + \dots u \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

下面设法利用多次算子运算, 将式(4.4.7)中关于 t 的偏导数项等价替换为关于 x 的偏导数项, 这样可以简化截断误差的表达形式, 使得关于收敛速度的讨论一目了然。这里介绍的方法称为自循环消去法。

当 $m=2$ 时, 将式(4.4.7)两边分别对 x 和 t 再进行一次算子运算:

$$\begin{aligned} & -\frac{t^2}{t^2} + \frac{t}{2} \frac{t^3}{t^3} + \frac{t^2}{6} \frac{t^4}{t^4} + \frac{t^3}{24} \frac{t^5}{t^5} + \dots + \frac{t}{2} \frac{t^3}{t^3} + \frac{t^2}{4} \frac{t^4}{t^4} \\ & + \frac{t^3}{12} \frac{t^5}{t^5} + \dots + \frac{t^2}{6} \frac{t^4}{t^4} + \frac{t^3}{12} \frac{t^5}{t^5} + \dots u \\ & = -\frac{t^4}{x^4} + \frac{x^2}{12} \frac{t^6}{x^6} + \frac{x^4}{360} \frac{t^8}{x^8} + \dots + \frac{x^2}{12} \frac{t^6}{x^6} + \frac{x^4}{144} \frac{t^8}{x^8} \\ & + \dots + \frac{x^4}{360} \frac{t^8}{x^8} + \dots u \end{aligned}$$

合并同类项后, 有

$$\begin{aligned} & -\frac{t^2}{t^2} + \frac{t}{t} \frac{t^3}{t^3} + \frac{7}{12} \frac{t^2}{t^4} + \frac{5}{24} \frac{t^3}{t^5} + \dots u \\ & = -\frac{t^4}{x^4} + \frac{x^2}{6} \frac{t^6}{x^6} + \frac{x^4}{80} \frac{t^8}{x^8} + \dots u \end{aligned}$$

当 $m=3$ 时, 上式两边分别对 x 和 t 再进行一次算子运算, 得

$$\begin{aligned} & -\frac{t^3}{t^3} + \frac{t}{t} \frac{t^4}{t^4} + \frac{7}{12} \frac{t^2}{t^5} + \dots + \frac{t}{2} \frac{t^4}{t^4} + \frac{t^2}{2} \frac{t^5}{t^5} + \dots + \frac{t^2}{6} \frac{t^5}{t^5} + \dots u \\ & = -\frac{t^6}{x^6} + \frac{x^2}{6} \frac{t^8}{x^8} + \dots + \frac{x^2}{12} \frac{t^8}{x^8} + \dots u \end{aligned}$$

合并同类项后, 有

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \frac{5}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^5}{\partial t^5} + \dots u = \frac{\partial^3}{\partial x^6} + \frac{X^2}{4} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + \dots u$$

当 $m=4$ 时, 上式两边分别对 x 和 t 再进行一次算子运算, 得

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^5}{\partial t^5} + \dots + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^5}{\partial t^5} + \dots u = \frac{\partial^4}{\partial x^8} + \dots u$$

合并同类项后, 有

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^5}{\partial t^5} + \dots u = \frac{\partial^4}{\partial x^8} + \dots u$$

由此得到偏导数 $\partial^2/\partial t^2$ 、 $\partial^3/\partial t^3$ 、 $\partial^4/\partial t^4$ 的算子表达式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^3}{\partial t^3} - \frac{7}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^4}{\partial t^4} - \frac{5}{24} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial^5}{\partial t^5} + \dots \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^6} \frac{X^2}{6} + \frac{\partial^2}{\partial x^8} \frac{X^4}{80} + \dots \\ \frac{\partial^3}{\partial t^3} &= - \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^4}{\partial t^4} - \frac{5}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^5}{\partial t^5} + \dots + \frac{\partial^3}{\partial x^6} + \frac{\partial^3}{\partial x^8} \frac{X^2}{4} + \dots \\ \frac{\partial^4}{\partial t^4} &= - 2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^5}{\partial t^5} + \dots + \frac{\partial^4}{\partial x^8} + \dots \end{aligned}$$

将这些关于 t 的偏导数算子逐次代入式(4.4.7)中, 得到

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^4}{5!} - \frac{5}{48} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \frac{5}{12} \frac{\partial^4}{\partial t^4} - \frac{\partial^4}{2} \frac{\partial^5}{\partial t^5} + \dots u \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{X^2}{12} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{X^4}{360} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{X^2}{12} + \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial^6}{\partial x^6} \\ &\quad + \frac{2}{8!} \frac{X^6}{\partial x^6} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{X^4}{160} + \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{X^2}{12} - \frac{\partial^4}{\partial t^4} \frac{X^8}{4} + \dots u \end{aligned}$$

将 $\partial/\partial x^2$ 代入整理得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \\ &= O(\partial^4/\partial t^4) \frac{\partial^5}{\partial t^5} + \frac{X^2}{12} - \frac{X^2}{2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{X^4}{360} - \frac{X^4}{12} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{X^4}{3} \frac{\partial^6}{\partial x^6} \\ &\quad + \frac{2}{8!} \frac{X^6}{\partial x^6} - \frac{X^6}{160} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{X^6}{12} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{X^6}{4} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + \dots u \end{aligned}$$

与一维扩散问题的微分方程相比, 差分方程截断误差的量级为

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = O(\partial^4/\partial t^4, \partial^2/\partial x^2)$$

若取合适的 Δx 、 Δt , 使 $\Delta t = 1/6$, 则截断误差的量级为

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = O(\Delta t \Delta x^2, \Delta t^2, \Delta x^4)$$

差分格式将有较高的收敛速度。

二、差分方程的稳定性

差分方程稳定性(Stability)的定义: 设 t_0 时刻差分方程在 i 点的真解为 $(u)_i^0$, 有误差解为 u_i^0 , 两者之差 $u_i^0 = \mathcal{Q}(u)_i^0 - u_i^0 \mathcal{Q}$ 在以后某时刻 $t_0 + n \cdot t$, 差分方程真解 $(u)_i^n$ 与近似解 u_i^n 的差是 $u_i^n = \mathcal{Q}(u)_i^n - u_i^n \mathcal{Q}$ 若存在与 n 无关的有限值 K , 使

$$\sup |u_i^n| \leq K \sup |u_i^0| \quad (4.4.8)$$

则称差分方程是稳定的, 否则称差分方程是不稳定的。 \sup 指对所有 i 存在的上确界。

下面用一个简单的例子看差分方程解不稳定的类型。例如, 守恒形式的一维对流扩散方程(a 为常数)

$$\frac{u}{t} = - \frac{(au)}{x} + \frac{u^2}{x^2} \quad (4.4.9)$$

它的FTCS 差分方程为

$$\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^n}{t} = - \frac{au_{i+1}^n - au_{i-1}^n}{2x} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{x^2} \quad (4.4.10)$$

假定在时刻 n 以后差分方程有定常解。把差分方程的解分为定常分量 u_i^n 与扰动分量 ϵ_i 之和, 设

$$u_i^n = u_i^n + \epsilon_i \quad (4.4.11)$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^n}{t} = & - \frac{au_{i+1}^n - au_{i-1}^n}{2x} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{x^2} \\ & - \frac{a\epsilon_{i+1} - a\epsilon_{i-1}}{2x} + \frac{\epsilon_{i+1} - 2\epsilon_i + \epsilon_{i-1}}{x^2} \end{aligned}$$

上式等号右边头两项是 $(u/t)_i^n$ 的有限差分格式, 由于假定时刻 n 存在定常差分解, 因此这两项的和等于零。于是有

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^n = - \frac{a\epsilon_{i+1} - a\epsilon_{i-1}}{2x} + \frac{\epsilon_{i+1} - 2\epsilon_i + \epsilon_{i-1}}{x^2} \quad (4.4.12)$$

式(4.4.12)右边第一项是对流项产生的误差, 第二项是扩散项产生的误差。

先考察只有扩散项的情况。图4.6(c)为 n 时刻的扰动分布图, 假设扰动随 i 振荡, 其振幅也随 i 增长。下面在第 i 点处计算扰动对差分解的影响。因 $\epsilon_{i+1} > 0$, $\epsilon_i < 0$, $\epsilon_{i-1} > 0$, 所以有

$$u_i = - \frac{\epsilon_{i+1} - 2\epsilon_i + \epsilon_{i-1}}{x^2} > 0$$

这就是说, 对任何 $t > 0$, 这个变化 $u_i > 0$, 这就有修正负扰动 ϵ_i 的趋势。

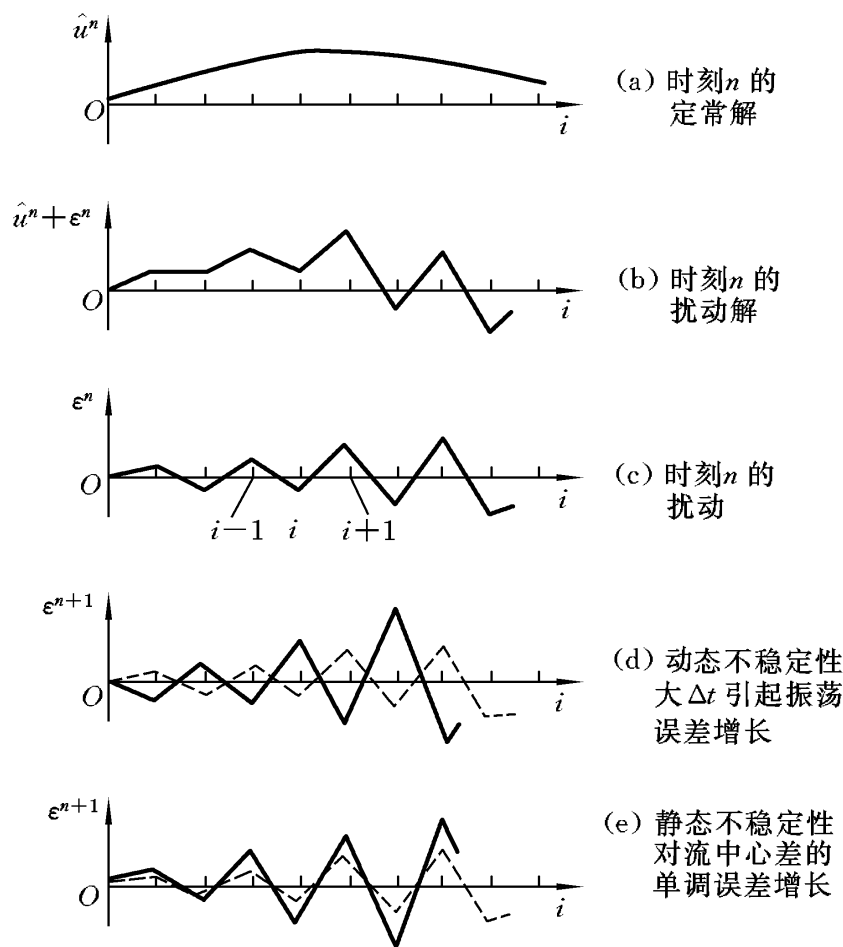


图 4.6 一维对流扩散方程FTCS 差分格式的误差增长

同样,当考察第 $i+1$ 点处的 u_{i+1} 时,因 $u_{i+1} > 0$, $u_i < 0$, $u_{i+2} < 0$, 所以有

$$u_{i+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{2} < 0$$

从而正扰动 u_{i+1} 就由负的 u_{i+1} 加以修正。

但是应注意,改变量 u_i 正比于 Δt ,如果 Δt 足够大,则修正将过冲。对太大的 Δt ,新的 u_{i+1}^{n+1} 值将大于原始扰动,如图 4. 6(d) 所示。

$$|u_{i+1}^{n+1}| > |u_i|, \quad |u_{i+1}^{n+1}| > |u_{i+1}|$$

这种增加振幅的振荡过冲是动态不稳定性。把时间步长降到某个临界时间步长以下可以消除这种不稳定性。

现在再考察只有对流项的情况。设 $a > 0$, 仍在图 4. 6(c) 的第 i 点处计算。因为扰动随 i 振荡, 且振幅随 i 增长, 因此有

$$a_{i+1} > 0, \quad a_{i-1} > 0, \quad a_{i+1} > a_{i-1},$$

$$u_i = -\frac{a}{2\Delta x} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2} < 0$$

或者说, 由于对流引起 $u_i < 0$, 这意味着误差 u_i 随时间单调增长, 如图 4. 6(e) 所示。这种误差增长是静态不稳定性, 不能通过减小时间步长来消除。但可以通过采用其他的有限差分格式来加以消除。

如果对于 u 的增长方向与图中不一样, 即 $u < 0$, 或 Δt 的包络随 i 减小, 则对流项变为静态稳定的, 但是时间步长太大仍然有动态不稳定性。实际中的误差或多或少是随机分布的, 故某时某刻误差分布会出现如图 4.6 所示的不利的情形。

当既有对流项又有扩散项时, 它们是互相影响的。下面将看到, 不仅扩散项对 Δt 有限制, 而且对 Δt 还有与雷诺数有关的另一限制, 与静态不稳定的对流项与静态稳定的扩散项之比有关。如果还要求完全不过冲(满足连续性方程的性质), 则又得到与雷诺数无关的另一限制。

三、稳定性分析

分析差分方程稳定性的方法有很多种, 大部分是应用于线性方程的。其中的矩阵分析法比较严格, 但矩阵的特征值计算一般是非常困难的。这里主要介绍常用的 von Neumann 的傅氏级数分析法和 Hirt 的启示性分析法。

1. von Neumann 稳定性分析法

最常用的稳定性分析方法是 von Neumann(1944)在 Los Alamos 提出的。这种方法首先对模型方程的解进行有限傅氏级数展开, 然后分别考察每个波分量的衰减或增长, 从而确定其稳定与否。

(1) 一维扩散方程的稳定性。

一维扩散方程的 FTCS 格式

$$\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (4.4.13)$$

或写成

$$u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \Delta t (\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}) \quad (4.4.14)$$

这里, $\Delta t = \Delta t / \Delta x^2$ 。将方程的解作周期延拓, 用傅氏级数表示出来

$$u_i^n = \sum_{k=-1}^{\infty} a^n e^{j k x} \quad (4.4.15)$$

式中, $j = \sqrt{-1}$, a^n 是波数为 k (波长 $= 2 / k$) 的特定分量在时间层 n 的振幅, 与 x 无关, 是时间和波数的函数。如果要做边界条件的影响分析, 则 k 是有限的。对于零边界条件, 级数表示的解就是扩散方程的解, 但不是对流扩散方程的解。对于对流扩散方程, 需要一定的近似, 以避开边界的影响。一般在无限域进行稳定性分析。

与式(4.4.15)同样的表达有

$$u_{i\pm 1}^{n+1} = \sum_{k=-1}^{\infty} a^{n+1} e^{j(i\pm 1)kx}$$

定义辐角 $\theta = kx$, 并代入差分方程, 对于每一个傅氏分量有

$$a^{n+1} e^{j\theta} = a^n e^{j\theta} + \Delta t (a^n e^{j(i+1)\theta} + a^n e^{j(i-1)\theta} - 2a^n e^{j\theta})$$

消去公因子后, 得

$$a^{n+1} = a^n [1 + (e^j + e^{-j} - 2)] \tag{4.4.16}$$

定义增长因子

$$G = \frac{a^{n+1}}{a^n} \tag{4.4.17}$$

利用 $e^j + e^{-j} = 2\cos$ 得

$$G = 1 - 2(1 - \cos) \tag{4.4.18}$$

注意, 增长因子是辐角 的函数, 它对各个傅氏分量而言是不同的。若解保持有界, 必须对所有 有

$$|G| \leq 1 \tag{4.4.19}$$

这就是扩散方程的稳定性准则, 即

$$-1 \leq 1 - 2(1 - \cos) \leq 1 \tag{4.4.20}$$

右边不等式对所有 成立, 左边不等式当 $1 - \cos = 2$ 时达到临界状态。这就是稳定性要求:

$$\frac{1}{2} \leq \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2} \tag{4.4.21}$$

(2) 一维对流扩散方程的稳定性。

将对流扩散方程的解作周期延拓后用傅氏级数表示出来。这里不讨论边界的影响, 在无限空间域进行对流扩散方程(a 为常数)的 FTCS 格式稳定性分析。将 4.2 节给出的差分格式(4.2.3)重写为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{s}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \tag{4.4.22}$$

这里 $s = \Delta t / \Delta x$ 。增长因子为

$$G = 1 - \frac{s}{2}(e^j - e^{-j}) + (e^j + e^{-j} - 2)$$

即
或

$$G = 1 - 2 + 2\cos - js\sin \tag{4.4.23}$$

这是中心在实轴($1 - 2$)处, 半轴为 s 和 2 的椭圆曲线方程(见图 4.7)。

对流扩散方程给出了复数的增长因子, 当 s 趋于零时, 得到简化的扩散方程的实增长因子。稳定性要求是 $|G| \leq 1$, 即椭圆全部落入单位圆内, 显然, 为了稳定, 必须使 $s \leq 1$ 和 $s \leq 1/2$ 。求出 G 的模

$$|G|^2 = GG^* = [1 - 2(\cos - 1)]^2 + s^2(1 - \cos^2)$$

写出关于 \cos 的二次三项式

$$|G|^2 = (4 - s^2)\cos^2 + 4(1 - 2)\cos + 1 + s^2 + 4 - 4$$

当 $4 - s^2 = 0$ 或 $s = 2$ 时, 二次三项式表示直线或开口向上的二次曲线, 在区域 $-1 \leq \cos \leq 1$ 内部不出现最大值, 最大值在 $\cos = 1$ 或 $\cos = -1$ 。

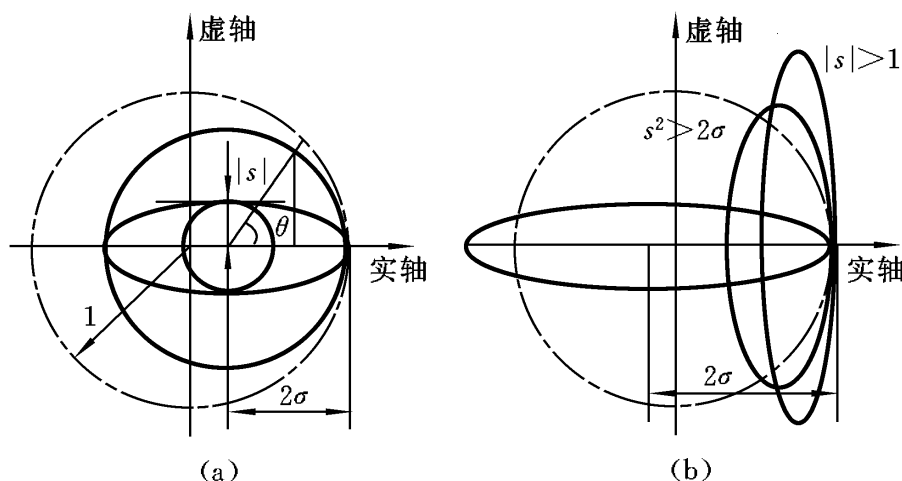


图 4.7 对流扩散方程稳定性条件分析

由 $\cos \theta = 1$, 有 $|\mathcal{G}| = 1$, 自然满足稳定性条件。由 $\cos \theta = -1$, 稳定性的要求是 $|\mathcal{G}| = (4 - 1) = 1$, 即 $1/2$ 。由 $s^2 > 2$ 发现对所谓格子雷诺数 R_c 的要求:

$$R_c = \frac{a \Delta x}{2\sigma} \quad (4.4.24)$$

当 $4 - s^2 < 0$ 或 $s > 2$ 时, 得到 $R_c > 2$ 。这时, 在 $-1 < \cos \theta < 1$ 上出现最大值, $|\mathcal{G}|_{\max}$ 总是大于 1。二次三项式表示开口向下的二次曲线, 稳定性要求是

$$|\mathcal{G}| = (1 + s^2 + 4 - 4) - \frac{(4)^2(1 - 2)^2}{4(4 - s^2)} = 1$$

$$\text{或} \quad s^2(4 - s^2 - 1) = 0$$

由 $s > 2$ 得 $(2 - 1)^2 = 0$, 这是不可能的。

一维对流扩散方程的稳定性条件可归纳为: $\frac{1}{2}, s \geq 2$ 或 $\frac{1}{2}, R_c \geq 2$ 。

对 $R_c \geq 2$ 和 $1/2$, 得 $s^2 \geq 2$ 或 $t \geq 2/a^2$, 可见, 无粘方程 ($\nu = 0$) 的 FTCS 格式对所有的 t 都不稳定。

以上是对解的有界条件进行分析。对于误差的有界条件进行分析得到同样的结果。如对于扩散方程, 在相邻两个时间层的差分方程为

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + (\nu_{i+1}^n - 2\nu_i^n + \nu_{i-1}^n) \\ u_i^{n+2} &= u_i^{n+1} + (\nu_{i+1}^{n+1} - 2\nu_i^{n+1} + \nu_{i-1}^{n+1}) \end{aligned}$$

相减即得误差方程

$$e_i^{n+1} = e_i^n + (\nu_{i+1}^n - 2\nu_i^n + \nu_{i-1}^n)$$

对于误差方程的稳定性分析同上。

由以上讨论可知, von Neumann 稳定性分析法是很方便的。其具体做法是: 首先把原差分格式中的变量项 u_i^n 换为误差项 e_i^n , 并略去非齐次项 (如果有的话) 得误差方程。然后将 e_i^n 的傅氏展开代入误差方程, 找出放大因子, 使其在任意波数下都满足模小于 1 的条件, 这个条件就是差分方程的稳定性条件。也可以直接

将 u_i^n 的傅氏展开代入差分方程, 并略去非齐次项, 同样找出放大因子, 得到差分方程的稳定性条件。

(3) 隐式格式的稳定性分析。

以一维扩散方程为例:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{是大于零的常数}) \tag{4.4.25}$$

如果在 $n = 1/2$ 时间层上建立差分格式, 时、空间均采用中心差分。

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^n}{\Delta t} = - \frac{1}{2} \frac{u_{i+1/2}^{n+1} - 2u_{i+1/2}^n + u_{i+1/2}^{n-1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1/2}^n - 2u_{i+1/2}^{n-1} + u_{i+1/2}^{n-2}}{\Delta x^2} \tag{4.4.26}$$

这是 Crank-Nicolson 隐式差分格式。差分格式又可写为

$$u_{i+1/2}^{n+1} - 2(\alpha + 1)u_{i+1/2}^n + u_{i+1/2}^{n-1} = -\alpha(u_{i+1/2}^n - 2u_{i+1/2}^{n-1} + u_{i+1/2}^{n-2})$$

列出其误差方程

$$e_{i+1/2}^{n+1} - 2(\alpha + 1)e_{i+1/2}^n + e_{i+1/2}^{n-1} = -\alpha(e_{i+1/2}^n - 2e_{i+1/2}^{n-1} + e_{i+1/2}^{n-2}) \tag{4.4.27}$$

将傅氏展开式代入

$$e^{n+1} [e^{-i\theta} - 2(\alpha + 1) + e^i] = -\alpha [e^n (-e^{-i\theta} + 2(-1) - e^i)]$$

对于展开式中每一个傅氏分量可列出

$$a^{n+1} = a^n \frac{1 - 2 \sin^2(\theta/2)}{1 + 2 \sin^2(\theta/2)} \tag{4.4.28}$$

由于

$$G = \left| \frac{a^{n+1}}{a^n} \right| = \left| \frac{1 - 2 \sin^2(\theta/2)}{1 + 2 \sin^2(\theta/2)} \right| < 1 \tag{4.4.29}$$

即增长因子的模小于 1。因此, Crank-Nicolson 隐式差分格式是无条件稳定的。

2. Hirt 稳定性分析法

Hirt 稳定性分析法是 C. W. Hirt(1968) 提出的一种启发性的方法, 没有得到严格的证明, 但有一定的物理依据, 因简便而得到广泛应用。它的做法是将差分方程中的每一项都展开成泰勒级数, 以得到一连续的偏微分方程。于是由熟悉的偏微分方程的稳定性性质得到差分方程的稳定性。Hirt 的分析方法包含两个步骤。

例如, 对于一维对流扩散方程, 首先将方程的差分格式展开为泰勒级数。第一步保留展开式的一阶项得到双曲型方程, 分析方程解的依赖域。判断其稳定性的 CFL(Courant-Friedrich-Lewy) 条件是: 有限差分解的依赖域至少应包含微分方程解的依赖域才是稳定的。第二步, 将差分格式的泰勒级数展开式加以变换, 由物理上扩散系数必须为正的要求得到稳定性的另外一个条件。具体说明如下。

由 4.2 节知, 一维对流扩散方程的差分格式为式(4.2.3), 它的泰勒级数展开式可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_i^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_i^n + O(\Delta t^2) = -\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^n + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^n + O(\Delta x^2)$$

当 x 、 t 趋于零时, 可知差分方程与原微分方程相容。考虑到差分方程的截断误差可能会改变原微分方程的稳定性, 因此保留截断误差中 t 的一次项, 考察增加这一项产生的影响。上式略去标号 i, n 和高阶小量后可重写为

$$\frac{t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.4.30)$$

若 t 大于零, 式(4.4.30)是一双曲型微分方程, 其特征线方程为 $x \pm t \sqrt{2/t} = \text{常数}$ 。在 (x, t) 平面解域的任一点, 微分方程解的依赖域为从一点发出的两条特征线之间的区域(参见2.6节图2.7)。对于数值计算的结果, 每一点上差分方程解的计算值的依赖域在 $x \pm t \sqrt{2/t} = \text{常数}$ 之间。按照稳定性的CFL条件, 有限差分解的依赖域应大于微分方程解的依赖域, 因此必须有

$$t \leq \frac{1}{2} \frac{x^2}{\Delta x^2} \quad \text{或} \quad \frac{1}{2} \quad (4.4.31)$$

这与 von Neumann 分析得到的对 t 的扩散限制(4.4.21)是一样的。

下面再利用泰勒级数展开和自循环消去法将微分方程(4.4.30)中对时间 t 的二阶导数变换为对坐标 x 的算子, 就如这一节开头讨论差分格式的收敛速度时所做的。按照 Hirt 的做法, 在变换的算子中略去高阶项, 仅保留 x 的二次导数项。变换的结果可写为与原偏微分方程一致的形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

但方程中的扩散系数已被修正为所谓的有效扩散系数:

$$e = -a^2 \frac{t}{2}$$

物理上, 扩散作用是使受到扰动的物理量 u 趋于均匀。负扩散系数会把均匀分布的小扰动集中起来, 从而形成单调的不稳定性。因此, 负的扩散系数在物理上是不可能的, 稳定性要求 $e \geq 0$, 即

$$t \leq \frac{2}{a^2} \quad \text{或} \quad s^2 \leq 2 \quad (4.4.32)$$

这与 von Neumann 分析得到的另一个条件相同。将这里得到的两个条件合在一起, 就是 Courant 数条件 $s \leq 1$ 。

高阶导数项一般较小, 然而略去高阶导数项意味着上面得到的稳定性条件仅适合低扩散(小粘性)流动。Hirt 分析不能得到对格子雷诺数的限制, 因而它对于一维对流扩散差分方程的稳定性只给出了必要条件而不是充分条件。

由上可见, Hirt 分析法的基本思想是: 只有当计算某一点的函数值时已经包含了物理上应有的各种影响, 那计算才能反映问题本身的特性。反之则不然。这一方法简单明了, 可以推广到非线性方程中去。但还不清楚在一些复杂问题中此方法是否有效。

四、线性差分格式的Lax 定理

Lax 的等价定理极为重要, 它指出, 对于线性微分方程(常微分方程或偏微分方程)组来说, 与它相容的差分格式的解收敛的充分必要条件是, 该差分格式是稳定的。

前面介绍的稳定性方法都是把解的有界性作为稳定性准则。对于任意个自变量和一个因变量的常系数方程的两层(时间)格式, von Neumann 条件是充分必要条件, 否则仅是必要条件(A. R. Mitchell, 1969)。即使对于线性系统, 稳定性也没有通用的定义。稳定性与因变量函数空间中所取的范数有关。

实际上, 稳定性分析的这些准则或方法并不实用。在实际的流体动力学问题中, 一般是局部地应用稳定性限制的。扫描全部网格点找出对稳定性限制最严格的时间步长值, 从而得到用于全部网格点的最大时间步长的最小值。但实际上利用分析方法给出的最大时间步长的某个分数, 通常取 0.8 或 0.9。在计算的早期阶段瞬态变化很强烈时, 可能需要使用更小的因子。重要的是, 区分所谓的真正的不稳定性和仅仅是很慢的收敛速度多半是不可能的。

这些方法中, von Neumann 方法是最容易、最直接、最可靠的分析方法, 它的一个重要特点是能直接从形式上推广到多维情况。这些方法都提供了有价值的信息。如果我们关心的是实际得到数值解, 而不仅是数值方法本身的分析, 那么就必须进行数值试验。

4.5 几种常用的差分格式及其稳定性条件

下面以一维对流扩散方程作为发展方程的模式加以讨论:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

其中, a 和 ν 是大于零的常数。 $a=0$ 时为抛物型扩散方程, $\nu=0$ 时为双曲型对流方程。实际上, 对于 $a<0$ 的讨论与对于 $a>0$ 的讨论一样进行。前面讨论过的几种差分格式也一并归纳如下。

一、抛物型扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

1. FTCS 差分格式

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \nu (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \tag{4.5.1}$$

由式(4.4.21)已知稳定性条件为 $\nu \leq \frac{1}{2}$, 这是时间向前空间中心差分的显式格

式。

2. BTCS 差分格式

$$u_{i+1}^{n+1} - (1 + 2)u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} = u_i^n \quad (4.5.2)$$

这是时间向后空间中心差分的隐式格式。列出其误差方程, 将傅氏展式代入, 整理得

$$a^n = a^{n+1}(-1 - 4 \sin^2)$$

增长因子为 $G(\theta) = -\frac{1}{1 + 4 \sin^2(\theta/2)}$, 其模小于1。BTCS 差分格式无条件稳定。

3. Crank-Nicolson 差分格式

如果在 $n = 1/2$ 时间层上建立差分格式, 时、空间均采用中心差分, 则可得 Crank-Nicolson 隐式差分格式:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} = \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{x^2} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{x^2} \quad (4.5.3)$$

差分格式又可写为

$$u_{i+1}^{n+1} - 2(\theta + 1)u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} = -u_{i+1}^n + 2(\theta - 1)u_i^n - u_{i-1}^n$$

由式(4.4.29)已知, Crank-Nicolson 隐式差分格式无条件稳定。

4. Mitchell-Fairweather 混合格式

一种更有用的格式为混合格式, 用两个时间层的差分格式加权平均可以得到 $(0 \leq \theta \leq 1)$:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} = \frac{\theta}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{x^2} + (1 - \theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{x^2} \quad (4.5.4)$$

增长因子为 $G = \left| \frac{1 - 4(1 - \theta) \sin^2(\theta/2)}{1 + 4 \sin^2(\theta/2)} \right|$, 稳定条件为

$\frac{1}{2}$ 时, 无条件稳定;

$\theta < \frac{1}{2}$ 时, $0 < \frac{1}{2 - 4\theta}$ 稳定。

利用泰勒公式得到

$$\begin{aligned} u_{i+1}^{n+1} - u_i^n &= \left[(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + (1 - \theta)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \right] \\ &= \frac{1}{2} t^2 \theta^2 (1 - 2\theta) - \frac{t x^2}{6} \frac{u^4}{x^4} + O(t^3, t^2 x^2) \end{aligned}$$

可见一般情况下, 这种格式具有 $t x^2$ 量级的截断误差。但若取

$$\theta = \frac{1}{2} \quad 1 - \frac{1}{6}$$

则具有较高阶的截断误差, 于是有新的差分格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{6} \right) \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{x^2}$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{\Delta x^2}$$

(4.5.5)

这是无条件稳定的差分格式,称为 Mitchell-Fairweather 差分格式。

二、双曲型对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

1. 迎风格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{a + \frac{1}{2}Ca}{2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{a - \frac{1}{2}Ca}{2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$$

(4.5.6)

增长因子为 $G = 1 - \frac{1}{2}(1 + s)e^{\pm j}$, 正负号分别对应于 $a < 0$ 和 $a > 0$ 的情况。这是中心在 $1 - s$, 半径为 s 的圆的曲线方程。由 $|G| \leq 1$ 得稳定条件为 $s \leq 1$ 。

2. Friedrich-Lax 迎风格式

建立迎风格式时, 在 $(i-1, n)$ 和 $(i+1, n)$ 两点间线性插值得到

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(1 + s)u_{i-1}^n + \frac{1}{2}(1 - s)u_{i+1}^n$$

(4.5.7)

误差增长因子为

$$G = \cos s - js \sin s$$

显然稳定条件也是 $s \leq 1$ 。

3. Euler 隐式格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2 \Delta x} = 0$$

(4.5.8)

误差增长因子为

$$G = \frac{1}{1 + s^2 \sin^2 s}$$

$$|G| \leq 1$$

这是无条件稳定的差分格式。

4. 蛙跳式(Leap-Frog)

具有三个时间层的差分格式。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2 \Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \Delta x} = 0$$

(4.5.9)

差分格式的特征方程为

$$G^2 + j2s \sin s G - 1 = 0$$

它的根即误差增长因子。特征根均小于1 的条件是 $s \leq 1$ 。

5. Lax-Wendroff 格式和MacCormack 格式

建立迎风格式时, 在 $(i-1, n)$ 、 (i, n) 和 $(i+1, n)$ 三点间二次插值, 得到较高精度的差分格式。

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{s}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{s^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (4.5.10)$$

具有截断误差 $O(\Delta t, \Delta x^2)$, 误差增长因子为

$$G = 1 - 2s^2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2} - j s \sin$$

增长因子小于 1 的条件是 $s \leq 1$ 。这就是 Lax-Wendroff 格式的稳定性条件。

将这一格式改写为

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & \frac{1}{2} u_i^n + [u_i^n - s(u_{i+1}^n - u_i^n)] \\ & - s[u_i^n - s(u_{i+1}^n - u_i^n) - (u_{i-1}^n - s(u_i^n - u_{i-1}^n))] \end{aligned}$$

或写成

$$\begin{aligned} \overline{u_i^{n+1}} = & u_i^n - s(u_{i+1}^n - u_i^n), \quad \overline{\overline{u_i^{n+1}}} = \overline{u_i^{n+1}} - s(\overline{u_i^{n+1}} - \overline{u_{i-1}^{n+1}}), \\ u_i^{n+1} = & \frac{1}{2}(u_i^n + \overline{\overline{u_i^{n+1}}}) \end{aligned}$$

这就将差分格式分为三步走: 第一步为向前差分, 第二步为向后差分, 第三步将所得值与原值平均。这种差分格式推广到非线性问题中, 就是著名的 MacCormack 格式。

三、一维对流扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a, \quad \text{是大于零的常数}$$

1. FTCS 格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

差分格式又可写为

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(2 - s)u_{i+1}^n + (1 - 2)s u_i^n + \frac{1}{2}(2 + s)u_{i-1}^n \quad (4.5.11)$$

稳定性条件是

$$\frac{1}{2}, \quad s \leq 2$$

或

$$\frac{1}{2}, \quad Rc \leq 2$$

式中, $Rc = \frac{a \Delta x}{\Delta x^2}$ (格子雷诺数)。显然 应满足 $\min \frac{1}{2}, \frac{2}{Rc^2}$

2. BTCS 格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -a \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2 \Delta x} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (4.5.12)$$

类似可得稳定性条件为

$$2 + 2\alpha^2 + 0.4\alpha^4 + \alpha^6 > 0$$

由于 $\alpha > 0$, 上述条件总是满足, 故为无条件稳定。

3. Crank -Nicolson 格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{x} + (1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{x^2} - \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{x^2} + (1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{x^2} = 0 \tag{4.5.13}$$

整理后得稳定性条件是

$$2(2 - \alpha) + 1 - \alpha^2 > 0, \quad (2 - \alpha)s^2 + 4 - \alpha^2 > 0$$

当 $\alpha < \frac{1}{2}$ 时, 无条件稳定; 当 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 时, 稳定条件为

$$\frac{1}{2(1 - \frac{\alpha}{2})^2} > s^2 > \frac{2}{(1 - \frac{\alpha}{2})^2}$$

4. 迎风格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{a + \frac{\alpha}{2}}{2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{x} + \frac{a - \frac{\alpha}{2}}{2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{x} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{x^2} \tag{4.5.14}$$

稳定性条件是

$$\frac{1}{2 + \frac{\alpha}{2}} > s > 1, \quad Rc = \frac{a \cdot x}{\nu}$$

此格式与原微分方程相容。但是由稳定性分析知, 在近似计算公式中, 扩散(粘性)系数由 ν 增加为 $\nu + \frac{\alpha}{2} x$ 。所增加的部分叫格式粘性系数。它的出现使计算精度下降, 但稳定性得到改善。

四、多维问题的几种常用格式

这里仅以二维扩散方程作为发展方程的模式加以讨论多维问题的几种常用格式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

空间、时间离散点的位置为

$$\begin{aligned} x_i &= i \cdot \Delta x, i = 0, 1, \dots, I, L_x = I \cdot \Delta x \\ y_j &= j \cdot \Delta y, j = 0, 1, \dots, J, L_y = J \cdot \Delta y \\ t_n &= n \cdot \Delta t, n = 0, 1, \dots, N, T = N \cdot \Delta t \end{aligned}$$

网格点标记为 (i, j, n) , 在点上的函数值记作 $u_{i,j}^n$ 。

1. 加权平均差分格式

一维混合格式推广如下:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{t} = \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{y^2} + (1-\alpha) \left[\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{y^2} \right] \quad (4.5.15)$$

式中, $0 \leq \alpha \leq 1$, 当 $\alpha = 0$ 时为显式格式, 当 $\alpha = 1$ 时为隐式格式。

分析隐式格式的稳定性。改写格式如下:

$$\begin{aligned} & (1 + 2\alpha x + 2\alpha y) u_{i,j}^{n+1} - \alpha x u_{i-1,j}^{n+1} - \alpha x u_{i+1,j}^{n+1} - \alpha y u_{i,j-1}^{n+1} - \alpha y u_{i,j+1}^{n+1} \\ & = [1 - 2(1-\alpha)x - 2(1-\alpha)y] u_{i,j}^{n+1} + (1-\alpha)x u_{i-1,j}^n \\ & \quad + (1-\alpha)x u_{i+1,j}^n + (1-\alpha)y u_{i,j-1}^n + (1-\alpha)y u_{i,j+1}^n \end{aligned}$$

其中, $\alpha_x = \alpha t / x^2$, $\alpha_y = \alpha t / y^2$ 。记 $\alpha_x = k_x x / 2$, $\alpha_y = k_y y / 2$, 用 von Neumann 稳定性分析方法得误差放大因子

$$G = \frac{a^{n+1}}{a^n} = \frac{1 - 4(\alpha_x + \alpha_y)(\alpha_x \sin^2 \frac{x}{2} + \alpha_y \sin^2 \frac{y}{2})}{1 + 4(\alpha_x + \alpha_y)(\alpha_x \sin^2 \frac{x}{2} + \alpha_y \sin^2 \frac{y}{2})}$$

记 $m = \alpha_x \sin^2 \frac{x}{2} + \alpha_y \sin^2 \frac{y}{2} > 0$, 则

$$G = \frac{a^{n+1}}{a^n} = \frac{1 - 4(\alpha_x + \alpha_y)m}{1 + 4(\alpha_x + \alpha_y)m} \quad \text{或} \quad |G| = \left| \frac{1 + 4(\alpha_x - 1/2)m - 2m}{1 + 4(\alpha_x - 1/2)m + 2m} \right| \quad (4.5.16)$$

当 $1 \leq \alpha_x \leq 1/2$ 时, 差分格式是无条件稳定的。当 $0 < \alpha_x < 1/2$ 时, 若 $1 + 4(\alpha_x - 1/2)m > 0$, 有 $|G| \leq 1$, 稳定条件为

$$m \leq \frac{1}{2(1 - 2\alpha_x)} \quad \text{或} \quad \alpha_x + \alpha_y \leq \frac{1}{t} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \frac{1}{2(1 - 2\alpha_x)}$$

关于相容性和截断误差的讨论可照前所述方法进行。

2. 交替方向隐式格式(ADI 格式)

由前已知, 当 $\alpha = 1$ 时, 加权平均的差分格式为隐式格式。求解隐式格式需要解大型稀疏线性代数方程组, 计算量很大, 然而显示格式的稳定性条件又太严格。

交替方向隐式格式则综合了两者的特点, 它的基本思想是将差分计算分两步走。第一步在一个方向(譬如说在 x 方向)是隐式的, 而在另一个方向(这时为 y 方向)是显式的; 第二步则交换一下, 在 y 方向是隐式的, 而在 x 方向是显式的。由于只在一个方向上为隐式, 求解时形成的方程组是三对角型的, 所以计算量大为减少。因为是在两个方向上不断交替进行的隐式格式, 所以叫交替方向隐式格式(ADI 格式)。其具体形式为

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{2n+1} - u_{i,j}^{2n}}{t} &= \frac{u_{i+1,j}^{2n+1} - 2u_{i,j}^{2n+1} + u_{i-1,j}^{2n+1}}{x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{2n} - 2u_{i,j}^{2n} + u_{i,j-1}^{2n}}{y^2} \\ \frac{u_{i,j}^{2n+2} - u_{i,j}^{2n+1}}{t} &= \frac{u_{i+1,j}^{2n+1} - 2u_{i,j}^{2n+1} + u_{i-1,j}^{2n+1}}{x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{2n+2} - 2u_{i,j}^{2n+2} + u_{i,j-1}^{2n+2}}{y^2} \end{aligned} \quad (4.5.17)$$

利用 von Neumann 方法, 可得放大因子

$$G_1 = \frac{a^{2n+1}}{a^{2n}} = \frac{1 - 4 \sin^2 \frac{\Delta y}{2}}{1 + 4 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}}, \quad G_2 = \frac{a^{2n+2}}{a^{2n+1}} = \frac{1 - 4 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{1 + 4 \sin^2 \frac{\Delta y}{2}}$$

显然有 $|G_1 G_2| \leq 1$, 所以 ADI 格式是无条件稳定的。必须指出, 三维情形 ADI 格式是有条件稳定的。交替方向格式可以有不同形式, 如 Douglas-Rachford 交替法等。

3. 时间分裂差分格式

将多维问题化为几个一维问题即可得到时间分裂差分格式。类似于 4.4 节的做法, 利用二维扩散方程的多次算子运算, 将 $u_{i,j}^{n+1}$ 的泰勒展开式中关于 t 的偏导数项等价替换为关于 x, y 的偏导数项:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{i,j} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \bigg|_{i,j} \Delta t^2 + \dots \\ &= u_{i,j}^n + \Delta t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{i,j} + \dots \\ &= \left(1 + \Delta t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(1 + \Delta t \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_{i,j}^n + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

式中, 两个二阶偏导数算子分别用 Δ_{xx}, Δ_{yy} 表示, 略去高阶小量后得到差分格式为

$$u_{i,j}^{n+1} = (1 + \Delta t \Delta_{xx})(1 + \Delta t \Delta_{yy}) u_{i,j}^n$$

实际上运算分两步进行:

$$u_{i,j}^* = (1 + \Delta t \Delta_{xx}) u_{i,j}^n, \quad u_{i,j}^{n+1} = (1 + \Delta t \Delta_{yy}) u_{i,j}^* \tag{4.5.18}$$

显然, 这相当于解两个一维扩散问题, 可自由选择算子 Δ_{xx}, Δ_{yy} 的差分格式。如果用 FTCS 格式, 稳定条件为 $\Delta x \leq 1/2, \Delta y \leq 1/2$, 或统一记做

$$\max \{ \Delta x, \Delta y \} \leq \frac{1}{2}$$

这与加权平均差分格式直接用二维显式格式时的稳定条件正好相差一半。

时间分裂差分格式由于简便而得到了广泛应用。

4.6 边界条件及其对稳定性的影响

以上仅考虑了求解域内点对稳定性的影响。边界条件对稳定性的影响也是关键的, 而且估计这一影响比较困难。边界条件处理不当会使整个计算不稳定。实际上构造差分格式包括内点和边界点的差分处理两部分内容。本节将以一维扩散方程边界条件的处理为例说明边界条件对计算稳定性可能产生的影响。

设一维扩散问题定义在边界 $x=0$ 和 $x=1$ 之间。扩散方程有三类边界条件。第一类边界条件给定边界值, 因此它不会对内点的计算产生稳定性影响。第二类

边界条件给出边界导数值。设在 $x = 0$ 的边界条件为

$$\frac{u(0, t)}{x} = b(t)$$

式中, $b(t)$ 是时间的函数。若用一阶差分格式 $u_i^{n+1} = u_0^{n+1} + x b^{n+1}$ ($i = 0$ 是边界点), 其误差方程为

$$\epsilon_0^{n+1} = \epsilon_1^{n+1}$$

可见边界点与内点的误差同步增长, 不会对稳定性产生新的影响。

若用二阶差分格式 $u_{i-1}^{n+1} = u_i^{n+1} - 2x b^{n+1}$, 同样又有

$$u_{i-1}^{n+1} = u_i^{n+1} - 2x b^{n+1}$$

这里 $i = -1$ 是在边界外虚设的点。设在某一时刻已由内点的值计算出它的值。以后虚设点与内点的误差同步增长, 也不会对稳定性产生新的影响。

下面讨论第三类边界条件, 设在 $x = 0$ 的边界条件为

$$\frac{u(0, t)}{x} = a(t)u(0, t) + b(t)$$

式中, $a(t)$ 、 $b(t)$ 均为时间的函数。若用一阶差分格式

$$\frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{x} = a^{n+1}u_0^{n+1} + b^{n+1} \quad \text{或} \quad u_0^{n+1} = \frac{u_1^{n+1} - x b^{n+1}}{1 + a^{n+1}x}$$

其误差方程为

$$\epsilon_0^{n+1} = \frac{\epsilon_1^{n+1}}{1 + a^{n+1}x}$$

可见, 当 $a > 0$ 时 $\epsilon_0 < \epsilon_1$, 边界点的误差增长小于内点的误差增长, 不会对稳定性产生新的影响。然而, 当 $a < 0$ 时, 用一阶差分格式的稳定性下降, 严重时可能失稳。

若在边界上用二阶差分格式

$$\frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2x} = a^n u_0^n + b^n \quad \text{或} \quad u_{-1}^n = u_1^n - 2a^n x u_0^n - b^n 2x$$

将上式代入 $i = 0$ 的 FTCS 内点公式(4.4.14)后, 有

$$u_0^{n+1} = [1 - 2(1 + a^n x)]u_0^n + 2u_1^n - 2x b^n \quad (4.6.1)$$

设 $x = 1$ 处为第一类边界条件 $u(1, t) = 0$, 边界方程与内点方程联立, 用矩阵形式表示为

$$\begin{array}{ccccccccccc} u_0^{n+1} & & & & & & & & & & u_0^n & - & 2x b^n \\ u_1 & & & & & & & & & & u_1 & & 0 \\ u_2 & & & & & & & & & & u_2 & & 0 \\ & = & & & & & & & & & & + & \\ & & & & & & & & & & & & \\ u_{N-2} & & & & & & & & & & u_{N-2} & & 0 \\ u_{N-1} & & & & & & & & & & u_{N-1} & & 0 \end{array}$$

上式简写为

$$U^{n+1} = A^n U^n + B^n$$

其中, A^n 是 n 时刻的系数矩阵, 又称误差增长因子矩阵。由 Branner 定理, 对于矩阵 $A = \{a_{ij}\}_{N \times N}$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, 所有的特征值都落入 $\bigcup_{i=1}^N \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq R_i(1 - |a_{ii}|)\}$ 圆的并集内, $R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}|$ 。也就是说, 特征值落入以 a_{ii} 为圆心, 以 R_i 为半径的圆所覆盖的区域内, 即

$$\begin{aligned} |z - a_{ii}| &\leq (1 - |a_{ii}|) \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}| \\ |z - a_{ii}| &\leq (1 - |a_{ii}|) R_i \\ |z - a_{ii}| &\leq [1 - |a_{ii}| (1 + \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}|)] \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}| \end{aligned}$$

这里直接引用稳定性矩阵分析法的结论: 稳定性的要求是差分方程组系数矩阵所有特征值的绝对值都小于 1。为使 $|z| < 1$, 应当要求 $a^n > 0$, 且

$$\min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2 + a^n x} \right\} \tag{4.6.2}$$

显见用二阶差分格式时, 由于 $a^n > 0$, 稳定性变差。

由上可以看到边界条件对稳定性的影响, 即使在一维情况下分析也是比较困难的。主要问题在于很难确定矩阵的特征值, 在多维问题时更加困难。有时为了方便, 对于边界点的差分格式也可以单独做稳定性分析, 所得结论对于整体稳定性有启发意义。如对于差分方程(4.6.1)有误差方程

$$u^{n+1}_0 = [1 - \frac{1}{2}(1 + a^n x)] u^n_0 + \frac{1}{2} u^n_1 \tag{4.6.3}$$

用 von Neumann 方法分析可得

$$G = \frac{u^{n+1}_0}{u^n_0} = 1 - \frac{1}{2}(1 + a^n x) + \frac{1}{2} \cos \theta + j \frac{1}{2} \sin \theta \tag{4.6.4}$$

不难看出, 当 $\frac{1}{2 + a^n x} (a^n > 0)$ 或 $1/2, a^n < 0$ 时, 增长因子 $|G| < 1$ 。这与前面的分析结果是一样的。

对于一般问题, 只能按这种方法做出估计, 再由数值计算验证。

4.7 修正方程及其应用

以上所讨论的各种差分方程都与原微分方程有一定的差别, 是对原微分方程的近似。有必要研究差分方程实际所满足的微分方程与原微分方程之间的差别。这种差分方程近似解所满足的微分方程称为修正方程(modified PDE)。

下面以双曲型对流方程为例考察差分近似产生的耗散和色散现象, 讨论如何利用修正方程分析耗散与色散的作用, 达到改良差分格式的目的。

一维双曲型对流方程

$$-\frac{u}{t} + a \frac{u}{x} = 0 \quad (4.7.1)$$

如果它的起始条件是

$$u(x, 0) = e^{jkx}$$

波数 $k > 0$ 为常数, 则方程的精确解为

$$u(x, t) = e^{jk(x - at)}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (4.7.2)$$

如采用迎风格式, 设 $a > 0$, 则有

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{x} = 0 \quad (4.7.3)$$

若选 $x = a t$, 则在特征线上 $u_i^{n+1} = u_{i-1}^n$, 这时所得的解和精确解是一样的。否则, 保留关于 t 的导数项, 则得

$$-\frac{u}{t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{x} = 0 \quad (4.7.4)$$

设它的解为

$$u(x, t) = e^{t + jkx} \quad (4.7.5)$$

为复数, 代入方程得

$$+ \frac{a}{x} - \frac{a}{x} e^{-jkx} = 0$$

或

$$= -\frac{a}{x} + \frac{a}{x} \cos(kx) - j \frac{a}{x} \sin(kx)$$

即

$$u(x, t) = e^{jk(x - at \frac{\sin(kx)}{kx}) - at \frac{1 - \cos(kx)}{x}} \quad (4.7.6)$$

这个解与精确解(4.7.2)相比, 幅度以因子 $e^{-at[1 - \cos(kx)]/x}$ 下降, 而波速下降为 $a \sin(kx)/(kx)$ 。只有当 x 、 t 趋于零时幅度才不下降, 波速才能等于 a 。因此, 离散化后产生了解的附加衰减和传播速度的变化, 这些变化和波数有关。这种波幅的衰减称为耗散, 波速的变化称为色散。这些变化显然是由于差分引起的。

下面来分析变化的原因。当 x 趋于零时,

$$\frac{\sin(kx)}{kx} = 1 - \frac{1}{6}(kx)^2 + \dots$$

$$\frac{1 - \cos(kx)}{kx} = \frac{1}{2}kx + \dots$$

将它们代入式(4.7.6)中, 略去高阶小量可得解的表达形式:

$$u(x, t) = \exp[jkx - a(1 - \frac{k^2 x^2}{6})t - \frac{1}{2}k^2 x j a t + \dots]$$

不难验证,它满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a}{2} x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{a}{6} x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (4.7.7)$$

这就是迎风格式中,将 u_{i-1}^n 在点 u_i^n 处作泰勒展开后略去高阶项得到的微分方程。由导出过程可见耗散与方程的二阶导数项有关,色散与方程的三阶导数项有关。

由以上分析可以看出,近似解与精确解之间存在差别是因为它们实际满足的微分方程与原微分方程有区别。这种近似解所满足的微分方程叫做修正方程。确定修正方程后可以进行差分格式的稳定性分析和精度分析,了解离散化产生的解的附加衰减和传播速度的变化,即解的耗散和色散的情况(R. F. Warming 和 B. J. Hyett, 1974)。

再以一维对流方程(4.7.1)为例看如何确定修正方程。将对流方程的差分格式(4.7.3)写为

$$u_{i+1}^{n+1} = (1 - s)u_i^n + su_{i-1}^n \quad (4.7.8)$$

将 u_{i-1}^n, u_i^{n+1} 分别在点 (i, n) 处作泰勒展开,代入式(4.7.8)后得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \dots u \\ &= -a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a}{2} x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{a}{6} x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{a}{24} x^3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots u \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

其中 $s = a \Delta t / \Delta x$, 上式各项都略去了标号 i 和 n 。式(4.7.9)可简写为算子形式

$$L_t u = L_x u$$

由于它们是线性算子,故有

$$L_t^m u = L_x^m u, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

类似于4.4节的讨论,利用泰勒级数展开和自循环消去法,通过多次算子运算,将关于 t 的偏导数项等价替换为关于 x 的偏导数项。简化截断误差的表达形式后更易于比较修正方程和原微分方程的区别。

当 $m = 2, 3, 4$ 时,对式(4.7.9)两边分别进行一次、两次、三次 L_t 和 L_x 的等价运算,得到偏导数 $\partial^2 / \partial t^2, \partial^3 / \partial t^3, \partial^4 / \partial t^4$ 的算子表达式后代回式(4.7.9),得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{a}{2} x (1 - s) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{a}{6} x^2 (1 - 3s + 2s^2) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ &+ \frac{a}{24} x^3 (1 - 7s + 12s^2 - 5s^3) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

这就是差分方程实际求解的微分方程,即修正方程。

不同的差分格式对应于不同的修正方程。一般来说,对流扩散方程的差分格式具有如下一般形式的修正方程:

$$\frac{u}{t} + a \frac{u}{x} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta x^2}{2} \right) \frac{u^2}{x^2} + \sum_{i=1}^{2i+1} \frac{2i+1}{x^{2i+1}} u^{2i+1} + \sum_{i=2}^{2i} \frac{2i}{x^{2i}} u^{2i} \quad (4.7.11)$$

如设

$$u(x, t) = e^{t} e^{jkx} \quad (4.7.12)$$

代入方程后得到

$$= -jka - k^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta x^2}{2} \right) + j \sum_{i=1}^{2i+1} (-1)^i \frac{2i+1}{x^{2i+1}} k^{2i+1} + \sum_{i=2}^{2i} (-1)^i \frac{2i}{x^{2i}} k^{2i} \quad (4.7.13)$$

这里 Δx 、 Δt 均设为实数。故有

$$a = \sum_{i=1}^{2i+1} (-1)^i \frac{2i+1}{x^{2i+1}} k^{2i+1}, \quad \frac{1}{2} + \frac{\Delta x^2}{2} = -k^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta x^2}{2} \right) + \sum_{i=2}^{2i} (-1)^i \frac{2i}{x^{2i}} k^{2i} \quad (4.7.14)$$

不难看出, $\frac{1}{2}$, $\frac{2i}{x^{2i}}$ 引起波的耗散, $\frac{2i+1}{x^{2i+1}}$ 引起波的色散。所以 $\frac{2i}{x^{2i}} u^{2i}$ 叫做耗散项, $\frac{2i+1}{x^{2i+1}} u^{2i+1}$ 叫做色散项, $\frac{1}{2} u^2$ 为原有的耗散项。为使格式稳定, 应当使耗散总是正的。如果

$$\frac{1}{2} + \frac{\Delta x^2}{2} > 0, \quad (-1)^i \frac{2i}{x^{2i}} > 0, \quad i = 2, 3, \dots \quad (4.7.15)$$

则耗散总是正的, 格式一定是稳定的。不过这个条件过于严格, 它是充分的而不是必要的条件。此外, 色散会引起解的畸变, 扰乱人们对波动问题的研究, 需要加以克服。

关于差分格式修正方程的讨论有重要意义。为减少解的数值耗散与数值色散, 需要对修正方程进行研究, 以确定如何修改差分格式, 建立更有效的差分格式。

下面讨论的例子说明构造 Lax-Wendroff 格式的思路, 以及根据不同情况利用修正方程的色散项和耗散项对差分格式进行改造的方法。

例如一维对流方程的 FTCS 格式:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{x} = 0 \quad (4.7.16)$$

容易证明, 这种格式是不稳定的。它对于原偏微分方程的修正方程是

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{x} = -s \frac{x}{2} \frac{u^2}{x^2} - \dots \quad (4.7.17)$$

不稳定的原因是式(4.7.17)的右端项产生负数值粘性系数。为此, 在差分格式(4.7.16)右端进行补偿, 将式(4.7.17)右边略去高阶项反号后加到式(4.7.16)的右端(注意乘上 Δt)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{x} = s \frac{x}{2} \frac{u^2}{x^2} \Delta t \quad (4.7.18)$$

如果用二阶差分代替二阶导数项, 就得到 Lax-Wendroff 差分格式

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{s}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{s^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (4.7.19)$$

格式中产生负数值粘性系数的不稳定因素已经消除,一般来说,所有不稳定的差分格式都可以引入一个二阶的“人工”数值粘性项加以改造。

在计算高频振荡问题时, Lax-Wendroff 格式的数值粘性效果显得太强。这时,可以考虑减轻数值耗散项的强度。为此导出 Lax-Wendroff 格式的修正方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = - (1-s^2) \frac{a}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - s(1-s^2) \frac{a}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \dots \quad (4.7.20)$$

式(4.7.20)右边第二项正是引起耗散的项,为减轻数值耗散,在差分格式(4.7.19)右边进行补偿,将式(4.7.20)右边第二项反号后乘上 Δt 加到式(4.7.19)的右端

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{s}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{s^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \frac{\Delta x^3}{8}s(1-s^2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Delta t \quad (4.7.21)$$

用差分代替四阶导数项,就得到 Ms-LW 格式

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{s}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{s^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \frac{s^2(1-s^2)}{8}(u_{i+2}^n - 4u_{i+1}^n + 6u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) \quad (4.7.22)$$

如果为了消除计算方波所产生的波头波尾的寄生振荡,反而需要考虑补偿式(4.7.20)右边第一项引起的色散效果,于是得到 Mp-LW 格式

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{s}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{s^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \frac{s(1-s^2)}{12}(u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n) \quad (4.7.23)$$

现在已经了解,构造一个好的差分格式的选择不是惟一的。尽管还没有统一的一般性的分析方法,但是一些特定的模型方程的差分格式的性质有代表性,这些详尽的分析能指导研究人员选择合适的差分格式,并了解它可能产生的误差。

在构造差分格式,判断格式的稳定性 and 精确度,调节格式的耗散性和色散性等方面,推导和分析修正方程的工作可以起到重要的作用。当然,优化差分格式还要求运用数值方法的充分经验,这些经验只能从数值实验中获得。

第 5 章 有限体积法

第 4 章给出了有限差分法的构造形式与数值特性。本章继续讨论在流动计算的商业软件中最常用、也是最成熟的一种方法,那就是以有限差分法为基础的有限体积法。从控制流体流动和热传导的输运方程出发,利用输运方程在控制体积分的守恒性质和有限差分法的离散技术构造有限体积法。

有限体积法采用单元的离散而不同于有限差分法,它具有有限元方法的网格剖分的灵活性,能逼近复杂的几何区域;它又不同于有限元法,避免了在单元上构造插值函数,具有有限差分法在格式构造上的多样性,可以利用几乎所有差分方法的技术和理论结果。

在 5.1 节和 5.2 节中介绍对流扩散问题的有限体积法时,将看到具有守恒性、有界性和输运性的离散格式给出物理上真实的解和稳定的迭代解。5.3 节介绍定常流动的压强速度耦合算法。有限体积法最常用的速度、压强算法都采用交错网格结构以求解离散动量方程。所有算法都要求低松弛以保证迭代过程的稳定性。5.4 节介绍非定常流动的有限体积法。最后,5.5 节讨论有限体积法是如何实现边界条件的。

5.1 扩散问题的有限体积法

考虑最简单的输运过程:定常态的纯扩散问题。从一般形式的输运方程(2.5.1)中消去瞬态项和对流项,得到流体量 ϕ 的定常扩散控制方程:

$$\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S = 0 \tag{5.1.1}$$

比较式(2.4.2)和式(2.4.3)可以看到,式(5.1.1)中的流体量 ϕ 可以是单位质量流体的内能($i = c_v T$),也可以是单位质量流体的动量分量 u 、 v 和 w 等;相应地,扩散系数 Γ 分别代表热扩散率 k 或动力粘度 μ 等。

控制体积分是形成有限体积法的关键步骤,这一点有别于所有其他的 CFD 算法。参考式(2.5.2)、式(2.5.4)的形式,定常态方程(5.1.1)在控制体(CV)积分得

$$\int_{CV} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV + \int_{CV} S dV = \oint_A \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dA + \int_{CV} S dV = 0 \tag{5.1.2}$$

一、一维定常扩散问题的有限体积法

考虑流体量 在图 5. 1 定义的一维域的定常扩散。式(5. 1. 1) 在一维问题的形式为

$$\frac{d}{dx} \quad \frac{d}{dx} + S = 0$$

(5. 1. 3)

这里， 是扩散系数, S 是源项， 的边值在A、B 给定。下面给出在一维杆热传导问题上应用有限体积法的三个步骤。

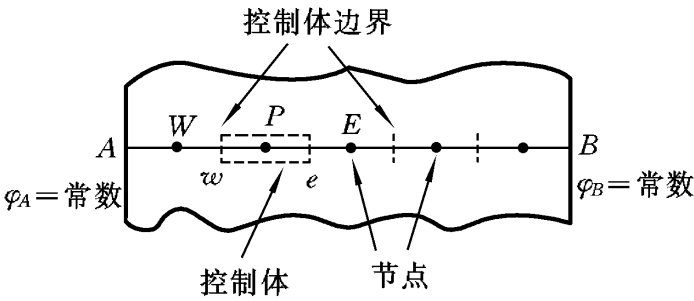


图 5. 1 一维定常扩散问题

(1) 生成网格。有限体积法的第一步是把区间划分为离散的控制体, 在A、B 之间放上一些节点。控制体的边界(面) 位于相邻两节点中间, 因此每一个节点被包围在一个控制体或一个单元内。在求解域的物理边界附近设置控制体时, 通常做法是令控制体的边界和物理边界一致。

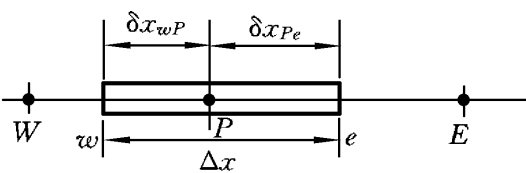


图 5. 2 记号系统

现在建立一套便于叙述的记号系统。图5. 2 表示一般 CFD 方法中的约定记法: 一维几何结构中的节点用 P 标记, 位于 P 点东侧和西侧的相邻节点分别用 E、W 标记; 控制体东、西有两个单元面, 分别用 e、w 标记; W、P 之间的距离和 P、E 之间的距离分别记为 x_{WP} 和 x_{PE} , w、P 之间的距离和 P、e 之间的距离分别记为 x_{wP} 和 x_{Pe} 。图 5. 2 中, 控制体的宽度是 $x = x_{we}$ 。

和 P、E 之间的距离分别记为 x_{WP} 和 x_{PE} , w、P 之间的距离和 P、e 之间的距离分别记为 x_{wP} 和 x_{Pe} 。图 5. 2 中, 控制体的宽度是 $x = x_{we}$ 。

(2) 离散方程。有限体积法的关键步骤是控制方程(或方程组) 在控制体积分后产生节点 P 的离散方程。一维问题中, 式(5. 1. 3) 的控制体积分给出

$$\frac{d}{dx} \quad \frac{d}{dx} dV + \int_v S dV = A \frac{d}{dx} \bigg|_e - A \frac{d}{dx} \bigg|_w + S V = 0$$

(5. 1. 4)

式中, A 和 $\int_v S dV$ 分别是控制体的横截面面积和体积, S 是源 S 在控制体内的平均值。有限体积法的魅力在于它的离散方程有清晰的物理解释。方程(5. 1. 4) 叙述的是: 离开控制体东面的 通量减去进入控制体西面的 通量等于控制体内 的源生成量, 即 通量平衡。

为了导出可用的离散方程形式, 在东面(e) 和西面(w) 要给出界面的扩散系

数和梯度 d/dx 。按成熟的做法, 流体量 ϕ 和扩散系数 D 的值定义在节点上。为了表达控制体界面上的梯度和通量, 要用到节点间的近似分布, 计算界面通量和梯度的最简单的方式是线性近似的中心差分法。 ϕ_e 和 ϕ_w 的均匀网格线性插值给出了界面的扩散系数:

$$\begin{aligned}\phi_w &= \frac{1}{2}(\phi_w + \phi_p) \\ \phi_e &= \frac{1}{2}(\phi_p + \phi_e)\end{aligned}\quad (5.1.5)$$

界面的扩散通量为

$$\begin{aligned}A \frac{d}{dx} \phi_e &= \phi_e A_e \frac{\phi_e - \phi_p}{X_{PE}} \\ A \frac{d}{dx} \phi_w &= \phi_w A_w \frac{\phi_p - \phi_w}{X_{WP}}\end{aligned}\quad (5.1.6)$$

实际上, 源项 S 可以是依赖节点值的函数。这就需要将源项线性近似表示为

$$S_V = S_u + S_p \phi_p \quad (5.1.7)$$

将式(5.1.5)、式(5.1.6)和式(5.1.7)代入方程(5.1.4)后, 得

$$\phi_e A_e \frac{\phi_e - \phi_p}{X_{PE}} - \phi_w A_w \frac{\phi_p - \phi_w}{X_{WP}} + (S_u + S_p \phi_p) = 0 \quad (5.1.8)$$

可重写为

$$\frac{\phi_e A_e}{X_{PE}} + \frac{\phi_w A_w}{X_{WP}} - S_p \phi_p = \frac{\phi_w A_w}{X_{WP}} \phi_w + \frac{\phi_e A_e}{X_{PE}} \phi_e + S_u \quad (5.1.9)$$

方程(5.1.9)中, ϕ_p 、 ϕ_w 和 ϕ_e 的系数分别记为 a_p 、 a_w 和 a_e , 于是有

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e + S_u \quad (5.1.10)$$

其中

$$a_w = \frac{\phi_w A_w}{X_{WP}}, \quad a_e = \frac{\phi_e A_e}{X_{PE}}, \quad a_p = a_w + a_e - S_p$$

式中, S_u 和 S_p 可从源模型(5.1.7)得到。式(5.1.7)和式(5.1.10)表达了方程(5.1.2)的离散形式。建立标准形式的离散方程是有限体积法所有发展的出发点。

(3) 解离散方程。必须在所有各个节点上建立形如式(5.1.10)的离散方程。对于邻接域边界的控制体, 还需修改所在节点的离散方程以适应边界条件。设在边界A已知有 $\phi = \phi_A$ (见图5.1), 如果用 ϕ_p 和 ϕ_A 表达式(5.1.6)中界面w上的导数, 式(5.1.8)中将不出现 ϕ_w , 即

$$\phi_e A_e \frac{\phi_e - \phi_p}{X_{PE}} - \phi_w A_w \frac{\phi_p - \phi_A}{X_{WP}} + (S_u + S_p \phi_p) = 0$$

为在边界节点也能建立标准形式的离散方程, 重写上式为

$$\frac{eA_e}{X_{PE}} - S_p - \frac{wA_w}{X_{WP}} \quad p = 0 \quad \rho_w + \frac{eA_e}{X_{PE}} \quad E + S_u + \frac{wA_w}{X_{WP}} \quad A$$

可以看到,在以A 为边界的控制体的离散方程中,只要令 $a_w=0$ 切断方程与边界A 之外的联系,再通过修正 S_p 和 S_u 把越过边界A 的通量作为已知量纳入源项,那么离散方程就可取标准形式。类似处理其他边界的离散方程,于是得到一组标准形式的线性代数方程,方程组的解给出流体量 在各节点的分布。任何合适的矩阵求解技术都可以用来完成这个任务。以后再讨论特别设计用于CFD 的矩阵解法和不同类型边界条件的处理。

二、二维定常扩散问题的有限体积法

考虑如下二维定常扩散方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S = 0 \tag{5.1.11}$$

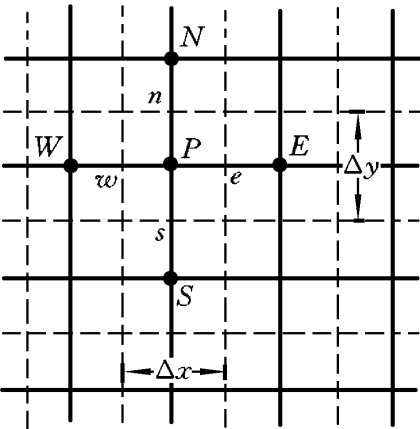


图 5.3 二维定常扩散问题

图5.3 为用于二维离散网格的一部分。节点P 的邻点除了E、W(东、西),还有N、S(北、南)。如同一维情形标记控制体的面和体积。参考式(5.1.2), 上述方程在控制体的积分为

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy + \int_V \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy + \int_V S dV = 0 \tag{5.1.12}$$

注意到二维情形的单元面的面积 $A_e = A_w = y, A_n = A_s = x$, 控制体的体积 $V = x y$, 得

$$\frac{eA_e}{X_e} \phi_e - \frac{wA_w}{X_w} \phi_w + \frac{nA_n}{y_n} \phi_n - \frac{sA_s}{y_s} \phi_s + S V = 0 \tag{5.1.13}$$

和前面一样,这个方程表达了 在控制体的源生成量和通过单元面的通量之间的平衡。用前面引入的近似表达,得通过控制体单元面的通量为

$$\begin{aligned} \text{越过东面的通量} &= eA_e \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e = eA_e \frac{(\phi_e - \phi_p)}{X_{PE}} \\ \text{越过西面的通量} &= wA_w \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = wA_w \frac{(\phi_p - \phi_w)}{X_{WP}} \\ \text{越过北面的通量} &= nA_n \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_n = nA_n \frac{(\phi_n - \phi_p)}{y_{PN}} \\ \text{越过南面的通量} &= sA_s \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_s = sA_s \frac{(\phi_p - \phi_s)}{y_{SP}} \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

将上面的表达式代入方程(5.1.13)后,得到

$$\begin{aligned} & eA_e \frac{(T_E - T_P)}{X_{PE}} - wA_w \frac{(T_P - T_W)}{X_{WP}} + nA_n \frac{(T_N - T_P)}{y_{PN}} \\ & - sA_s \frac{(T_P - T_S)}{y_{SP}} + S_P V = 0 \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

源项用线性式近似表达, 整理方程得到

$$\begin{aligned} & \frac{eA_e}{X_{PE}} + \frac{wA_w}{X_{WP}} + \frac{nA_n}{y_{PN}} + \frac{sA_s}{y_{SP}} - S_P = S_P \\ & = \frac{eA_e}{X_{PE}} T_E + \frac{wA_w}{X_{WP}} T_W + \frac{nA_n}{y_{PN}} T_N + \frac{sA_s}{y_{SP}} T_S + S_u \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

方程(5.1.16)可重写为内点的一般离散形式

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + S_u \quad (5.1.17)$$

其中

$$\begin{aligned} a_W &= \frac{wA_w}{X_{WP}}, \quad a_E = \frac{eA_e}{X_{PE}}, \quad a_S = \frac{sA_s}{y_{SP}}, \quad a_N = \frac{nA_n}{y_{PN}}, \\ a_P &= a_W + a_E + a_S + a_N - S_P \end{aligned}$$

域内每个网格点都有形如式(5.1.17)的离散方程。在边界上, 温度或通量已知, 据此修改离散方程以适应边界条件。施加边界条件的方法是将式(5.1.17)中越出边界的节点的系数置为零以切断与边界外的联系, 再将越过边界的通量作为附加项加到已有的源项上(修正 S_u 和 S_P)。随后解出所得的方程组, 得到在给定二维情形下的分布。

三、三维定常扩散问题的有限体积法

前面的方法可类似推广到三维定常扩散问题的有限体积法。控制方程是

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + S = 0 \quad (5.1.18)$$

现在, 用三维网格划分计算域, 含有节点P的单元有东、西、北、南、上、下(E、W、N、S、T、B)六个相邻节点, 分别用e、w、n、s、t、b标记控制体的东、西、北、南、上、下六个单元面。方程(5.1.18)在控制体形式积分得到

$$\begin{aligned} & eA_e \frac{(T_E - T_P)}{X_{PE}} - wA_w \frac{(T_P - T_W)}{X_{WP}} + nA_n \frac{(T_N - T_P)}{y_{PN}} - sA_s \frac{(T_P - T_S)}{y_{SP}} \\ & + tA_t \frac{(T_T - T_P)}{z_{PT}} - bA_b \frac{(T_P - T_B)}{z_{BP}} + (S_u + S_P) V = 0 \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

按照一维、二维情形讨论的方法将式(5.1.19)离散化:

$$\begin{aligned} & eA_e \frac{(T_E - T_P)}{X_{PE}} - wA_w \frac{(T_P - T_W)}{X_{WP}} + nA_n \frac{(T_N - T_P)}{y_{PN}} - sA_s \frac{(T_P - T_S)}{y_{SP}} \\ & + tA_t \frac{(T_T - T_P)}{z_{PT}} - bA_b \frac{(T_P - T_B)}{z_{BP}} + (S_u + S_P) V = 0 \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

整理上式,得到一般内点的离散方程

$$a_P P = a_W W + a_E E + a_S S + a_N N + a_B B + a_T T + S_u \tag{5.1.21}$$

这里

$$a_W = \frac{wA_w}{X_{WP}}, \quad a_E = \frac{eA_e}{X_{PE}}, \quad a_S = \frac{sA_s}{y_{SP}}, \quad a_N = \frac{nA_n}{y_{PN}},$$

$$a_B = \frac{bA_b}{Z_{BP}}, \quad a_T = \frac{tA_t}{Z_{PT}}, \quad a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T - S_p$$

边界条件的处理与一维、二维情形类似,即首先切断边界上控制体的离散方程与边界外的联系,再将越过边界的通量作为附加项加到离散方程的源项上(修正 S_u 和 S_p),随后解出所得的方程组,得到 在给定三维情形下的分布。

四、扩散问题离散方程总结

(1) 扩散问题的离散方程有以下的一般形式:

$$a_P P = \sum a_{nb} n_b + S_u \tag{5.1.22}$$

式中, \sum 指对节点 P 的控制体的所有邻点求和,用 n_b 表示邻点; n_b 是流体量在邻点的值; a_{nb} 是邻点的系数,一维有 $a_W、a_E$,二维有 $a_W、a_E、a_S、a_N$,三维有 $a_W、a_E、a_S、a_N、a_B、a_T$; $S_u + S_p$ 是线性源项。

(2) 所有情况下,围绕 P 点的系数满足以下关系:

$$a_P = \sum a_{nb} - S_p \tag{5.1.23}$$

(3) 一、二、三维扩散问题邻点系数表达式列于表 5.1。

表 5.1 邻点系数表达式

	a_W	a_E	a_S	a_N	a_B	a_T
一维	$\frac{wA_w}{X_{WP}}$	$\frac{eA_e}{X_{PE}}$	—	—	—	—
二维	$\frac{wA_w}{X_{WP}}$	$\frac{eA_e}{X_{PE}}$	$\frac{sA_s}{y_{SP}}$	$\frac{nA_n}{y_{PN}}$	—	—
三维	$\frac{wA_w}{X_{WP}}$	$\frac{eA_e}{X_{PE}}$	$\frac{sA_s}{y_{SP}}$	$\frac{nA_n}{y_{PN}}$	$\frac{bA_b}{Z_{BP}}$	$\frac{tA_t}{Z_{PT}}$

(4) 考虑源项的作用,以 $\bar{S} V = S_u + S_p$ 的形式规定 S_u 和 S_p 的值。

(5) 通过附加准确的或线性的源项来切断边界的侧面联系,并且以边界面通量的形式引入边界条件。例如: 设一维控制体边界为 B , 控制体宽度为 x 。加边界条件的方法是首先切断方程与边界外的联系,置 $a_B = 0$, 然后加入边界条件对源的贡献。若固定流体量 B , 按如下方法修改源项系数

$$S_u = S_u + \frac{2k_B A_B}{x} B, \quad S_p = S_p - \frac{2k_B A_B}{x}$$

若固定边界通量 q_B , 源项为

$$S_u + S_p \quad S_u + S_p + q_B$$

5.2 对流扩散问题的有限体积法

在流体流动的问题中, 必须考虑对流的影响。扩散总是随着对流自然发生, 所以这里考察联合对流扩散的预测方法。流体量 的定常对流-扩散控制方程可以从一般的输运方程(2.5.1)中消去瞬态项得到

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}(\rho D \frac{d\phi}{dx}) + S \quad (5.2.1)$$

控制体形式积分得到

$$\int_A \rho u \phi dA = \int_A \rho D \frac{d\phi}{dx} dA + \int_{CV} S dV = 0 \quad (5.2.2)$$

这个方程表示了控制体的通量平衡。左边给出净对流通量, 右边给出净扩散通量及流体量 在控制体的生成和消失。

离散对流项的主要问题是计算输运量 在控制体面上的值和越过这些界面的对流通量。本节首先讨论一维定常对流扩散的中心差分格式和差分格式的物理特性, 然后介绍实用的迎风差分格式、混合差分格式和二阶 QUICK 迎风格式。下节再考虑如何求解速度。现在假定对流速度已经由某种途径得到。

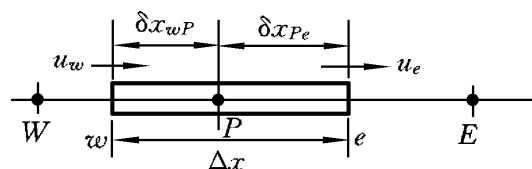
一、一维定常对流和扩散

在无源情况下, 流体量 在给定的一维流场 u 做定常对流扩散。控制方程为

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}(\rho D \frac{d\phi}{dx}) \quad (5.2.3)$$

流动必须满足连续性条件, 所以

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \quad (5.2.4)$$



考虑用图 5.4 所示的控制体和上一节引入的标记法。观察一般节点 P , 邻点用 E 、 W 标记, 控制体的面标以 e 、 w 。

图 5.4 围绕点 P 的控制体

在图 5.4 所示的控制体上积分控制方程(5.2.3)得到

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = A \frac{d}{dx}(\rho D \frac{d\phi}{dx})_e - A \frac{d}{dx}(\rho D \frac{d\phi}{dx})_w \quad (5.2.5)$$

连续方程(5.2.4)的积分给出

$$(\rho u)_e - (\rho u)_w = 0 \quad (5.2.6)$$

为了得到对流扩散问题的离散方程, 必须对方程(5.2.5)做近似处理。用两个变量 F 和 D 代表单元面上的对流质量通量和扩散传导率:

$$F = uA, \quad D = \frac{A}{x} \quad (5.2.7)$$

各单元面的变量 F 和 D 的值可写为

$$F_e = (uA)_e, \quad D_e = \frac{(A)_e}{x_{PE}}, \quad F_w = (uA)_w, \quad D_w = \frac{(A)_w}{x_{WP}} \quad (5.2.8)$$

这里假定 $A_e = A_w = A$, 因而 F 、 D 中的 A 可略去。利用中心差分法表达扩散项对方程右边的贡献。积分后的对流扩散方程(5.2.5)现在可写为

$$F_e - F_w = D_e(p_e - p) - D_w(p - p_w) \quad (5.2.9)$$

积分后的连续方程(5.2.6)可写为

$$F_e - F_w = 0 \quad (5.2.10)$$

同时, 假定 F_e 和 F_w 需要的速度场是已知的。下面讨论方程(5.2.9)中控制体 e 、 w 面上的流体量 ϕ 的表达形式。

二、中心差分法

中心差分法已用于表达方程(5.2.5)右边的扩散项, 问题是能否在单元面上用线性插值计算方程左边的对流项。对于均匀网格, 试将流体量 ϕ 在单元面的值写为

$$\phi_e = (\phi_P + \phi_E)/2, \quad \phi_w = (\phi_w + \phi_P)/2 \quad (5.2.11)$$

以上表达代入方程(5.2.9)的左边, 得

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2}(\phi_w + \phi_P) = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_w) \quad (5.2.12)$$

整理得到

$$D_w - \frac{F_w}{2} + D_e + \frac{F_e}{2} \phi_P = D_w + \frac{F_w}{2} \phi_w + D_e - \frac{F_e}{2} \phi_E$$

或写为

$$D_w + \frac{F_w}{2} + D_e - \frac{F_e}{2} + (F_e - F_w) \phi_P = D_w + \frac{F_w}{2} \phi_w + D_e - \frac{F_e}{2} \phi_E \quad (5.2.13)$$

将方程(5.2.13)中 ϕ_w 、 ϕ_E 和 ϕ_P 的系数分别记为 a_w 、 a_E 和 a_P , 用中心差分法将对流扩散方程离散后表达为

$$a_P \phi_P = a_w \phi_w + a_E \phi_E \quad (5.2.14)$$

式中

$$a_w = D_w + F_w/2, \quad a_E = D_e - F_e/2, \quad a_P = a_w + a_E + (F_e - F_w)$$

容易看出, 定常对流扩散问题的方程(5.2.14)与纯扩散问题的方程(5.1.10)有相同的形式。差别在于前者的系数中含有附加的对流项。为解一维

对流扩散问题,需写出所有网格节点形如(5.2.14)的离散方程。这样得到一组代数方程,可解得输运量 的分布。下面利用一个典型例子说明这个过程。

例5.1 图5.5表示的是流体量 通过一维域的对流扩散而输运。控制方程是式(5.2.3)。 是 x 的函数,边界条件为:在 $x=0$ 处, $\phi=1$;在 $x=L$ 处, $\phi=0$ 。已知数据有: $L=1.0\text{ m}$, $\rho=1.0\text{ kg/m}^3$, $\mu=0.1\text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ 。用五个等距节点控

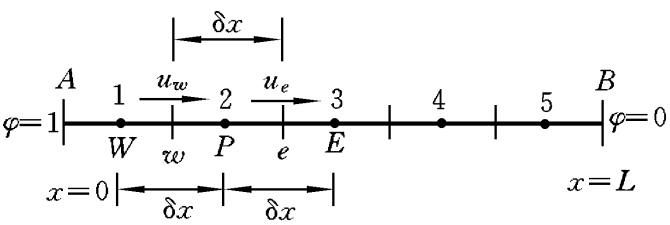


图 5.5 一维对流扩散问题的离散网格

制体单元和中心差方法计算下列情况下对流扩散的 分布:

- (1) $u=0.1\text{ m/s}$;
- (2) $u=2.5\text{ m/s}$ 。然后与下列分析解比较结果:

$$\frac{\phi_L - \phi_0}{L} = \frac{\exp(-uL/\alpha) - 1}{\exp(-uL/\alpha) - 1}$$

(5.2.15)

- (3) 用20个节点的网格再计算 $u=2.5\text{ m/s}$ 时的 分布,并与分析解比较结果。

解 用图5.5所示的简单网格检验算法。计算域分为五个控制体, $\Delta x=0.2\text{ m}$,边界在A、B。注意到处处有 $F_e = F_w = F = u$ 和 $D_e = D_w = D = \mu / \Delta x$ 。控制体截面积取为1。

内节点2、3和4有离散方程(5.2.4)及其系数,但是节点1和5需要特别处理,因为它们的控制体邻接边界。在节点1,方程(5.2.3)积分时,通过单元1东面的扩散项和对流通量都用中心差分。在这个单元的西面给定 值($\phi_w = \phi_A = 1$),所以不需要为对流通量项作任何近似。节点1产生下列方程:

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - F_A \phi_A = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_A(\phi_P - \phi_A)$$

(5.2.16)

控制体5东面的 值已知($\phi_e = \phi_B = 0$),在这个边界有下列方程:

$$F_B \phi_B - \frac{F_w}{2}(\phi_P + \phi_W) = D_B(\phi_B - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

(5.2.17)

注意到 $D_A = D_B = 2\mu / \Delta x = 2D$ 和 $F_A = F_B = F$,整理方程(5.2.16)和(5.2.17),给出以下形式的边界节点的离散方程:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u$$

(5.2.18)

其中,系数 $a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_p$,其他参数如表5.2所示。

表 5.2 节点系数

节点	a_w	a_E	S_p	S_u
1	0	$D - F/2$	$-(2D + F)$	$(2D + F)\phi_A$
2, 3, 4	$D + F/2$	$D - F/2$	0	0
5	$D + F/2$	0	$-(2D - F)$	$(2D - F)\phi_B$

为引入边界条件,已切断与边界侧的联系,并通过源项加入边界通量。

(1) $u=0.1\text{ m/s}$ 时, $F = u = 0.1$, $D = \Delta x = 0.1/0.2 = 0.5$ 。各节点系数列于表 5.3。

表 5.3 节点系数与源系数($u=0.1\text{ m/s}$)

节点	a_w	a_E	S_u	S_p	$a_P = a_w + a_E - S_p$
1	0	0.45	1.1_A	-1.1	1.55
2	0.55	0.45	0	0	1.0
3	0.55	0.45	0	0	1.0
4	0.55	0.45	0	0	1.0
5	0.55	0	0.9_B	-0.9	1.45

用到 $A = 1$ 和 $B = 0$, 方程组的矩阵形式为

1.55

-

0.45

0

0

0

1

1.1

-

0.55

1.0

-

0.45

0

0

2

0

0

-

0.55

1.0

-

0.45

0

3

=

0

0

0

-

0.55

1.0

-

0.45

4

0

0

0

0

-

0.55

1.45

5

0

以上方程组的解为

1

0.942 1

2

0.800 6

3

=

0.627 6

4

0.416 3

5

0.157 9

为比较,将已知数据代入式(5.2.15)

给出问题的分析解:

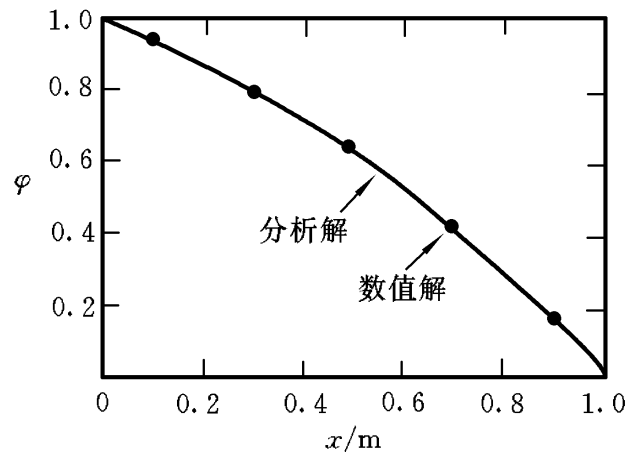


图 5.6 数值解与分析解比较(情形 1)

$$u(x) = \frac{2.7183 - \exp(x)}{1.7183}$$

通过表 5.4 和图 5.6 可比较分析解与数值解。在给定的网格粗糙度下与分析解相比,中心差分格式给出相当好的一致。

表 5.4 比较分析解与数值解($u=0.1\text{ m/s}$)

节点	距离	有限体积解	分析解	偏差	误差/(%)
1	0.1	0.942 1	0.938 7	0.003	0.36
2	0.3	0.800 6	0.796 3	0.004	0.53
3	0.5	0.627 6	0.622 4	0.005	0.83
4	0.7	0.416 3	0.410 0	0.006	1.53
5	0.9	0.157 9	0.150 5	0.007	4.91

(2) $u=2.5\text{ m/s}$ 时, $F=u=2.5$, $D=1/0.2=0.5$ 。各节点系数列于表 5.5。

表 5.5 节点系数与源系数($u=2.5\text{ m/s}$)

节点	a_w	a_E	S_u	S_p	$a_p=a_w+a_E-S_p$
1	0	-0.75	3.5 _A	-3.5	2.75
2	1.75	-0.75	0	0	1.0
3	1.75	-0.75	0	0	1.0
4	1.75	-0.75	0	0	1.0
5	1.75	0	-1.5 _B	1.5	0.25

这里分析解是

$$\varphi(x)=1+\frac{1-\exp(-25x)}{7.20\times 10^{10}}$$

通过表 5.6 和图 5.7 可比较分析解与数值解。中心差分格式产生的解围绕精确解振荡, 这种振荡在文献里称为摆动(wiggles), 显然没有很好地符合分析解。

表 5.6 比较分析解与数值解($u=2.5\text{ m/s}$)

节点	距离	有限体积解	分析解	偏差	误差/(%)
1	0.1	1.035 6	1.000 0	0.035	3.56
2	0.3	0.869 4	0.999 9	-0.131	-13.05
3	0.5	1.257 3	0.999 9	0.257	25.74
4	0.7	0.352 1	0.999 4	-0.647	-64.77
5	0.9	2.464 4	0.917 9	1.546	168.48

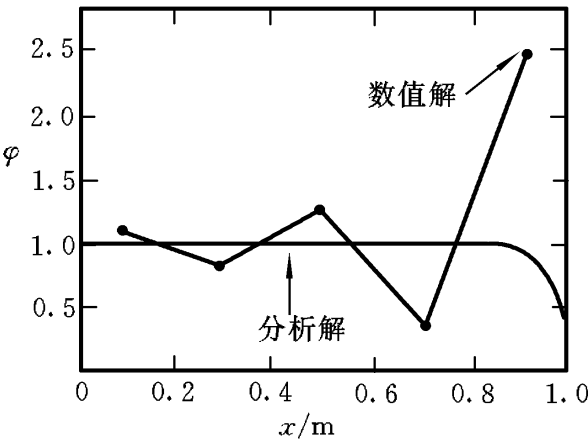


图 5.7 数值解与分析解比较(情形 2)

(3) $u=2.5\text{ m/s}$ 时, $F=u=2.5$, 20 个节点 $\Delta x=0.05$, $D=1/0.05=2.0$ 。各节点系数列于表 5.7。

表 5.7 节点系数与源系数($u= 2.5 \text{ m/s}$, 20 个节点)

节点	a_w	a_E	S_u	S_p	$a_p= a_w+ a_E- S_p$
1	0	0.75	6.5_A	- 6.5	7.25
2—19	3.25	0.75	0	0	4.00
20	3.25	0	1.5_B	- 1.5	4.75

图 5.8 比较了数值解和分析解, 两者吻合很好。与情形 2 五个节点的数据相比, 网格细分将 F/D 从 5 降到 1.25。看来中心差分格式在 F/D 的值较低时产生精度较好的解。下面将讨论 F/D 的影响和中心差分格式在高 F/D 产生摆动的原因。

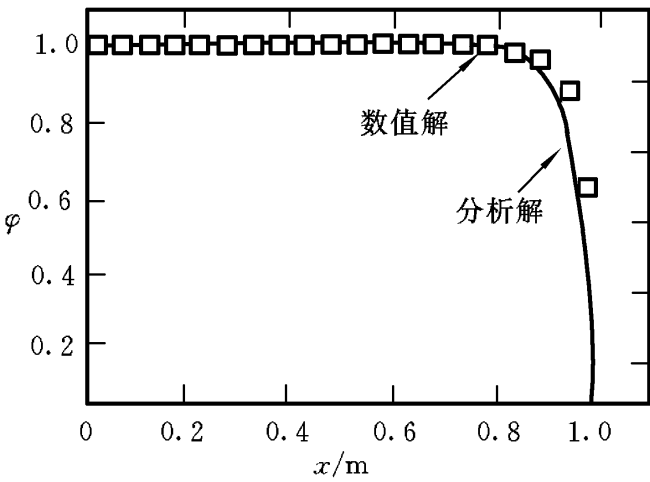


图 5.8 数值解与分析解比较(情形 3)

三、离散格式的物理特性

第 4 章讨论过差分格式的数学特性: 相容性、收敛性和稳定性。当数值格式很好地满足这些性质时, 理论上只要计算单元的数目足够大就可以从数值方法得到与输运方程精确解一致的解。

实际上, 只能用有限多的, 有时甚至是很少的单元数进行计算, 而且即使是精度很高的格式有时也不能得到正确解。工程上要求数值计算产生物理上真实的解, 而只有当离散格式具有某些基本性质时才能得到物理上真实的解。例如已经看到的, 中心差分格式在涉及对流、扩散的某些情况下不能用。这就迫使研究人员结合流动问题的物理特性深入考虑离散格式的性质。流体力学计算的数值格式应该满足的最重要的物理特性是: 守恒性、有界性和输运性。

1. 守恒性

4.1 节定义了守恒形式的差分格式。在有限体积法中, 为确保差分格式满足守恒性, 有两个要求: 在控制体上积分产生守恒型的控制方程; 在相邻的两个控制体中, 通过公共面的通量必须用相容的离散来表达。

从有限体积法的推导过程可知, 控制体积分式(5.2.2)的守恒性已得到满

足。差分方程含有输运量 通过控制体单元面的通量。为保证整个解域 的守恒，越过某个面离开控制体的 通量必须等于经过同一个面进入相邻控制体的 通量。也就是说，相邻的两个控制体在公共面必须用一个相同的通量表达式。下面举例说明。

在图 5. 9 所示的一维定常无源扩散问题中，越过域边界的通量记为 q_A 和 q_B 。下面考虑用四个控制体和中心差分格式计算单元面的扩散通量。例如，从西面进入单元 2 的通量表达式为 $w_2(\varphi_2 - \varphi_1)/\delta x$ ，从东面离开单元 2 的通量为 $e_2(\varphi_3 - \varphi_2)/\delta x$ 。

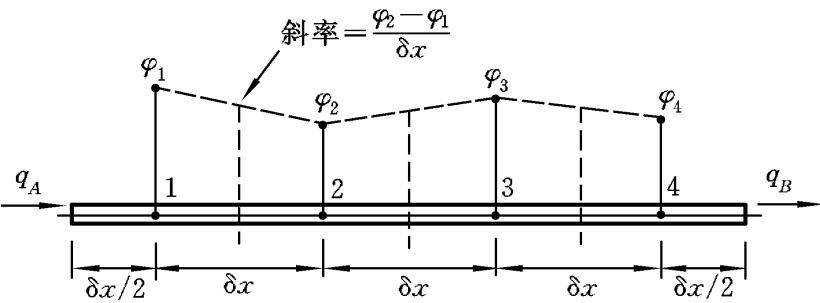


图 5. 9 扩散通量相容的例子

通过对各控制体的净通量求和，并计入控制体 1、4 的边界通量，得到总的通量平衡：

$$\begin{aligned} & e_1 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\delta x} - q_A + e_2 \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\delta x} - w_2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\delta x} \\ & + e_3 \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{\delta x} - w_3 \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\delta x} + q_B - w_4 \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{\delta x} = q_B - q_A \end{aligned} \tag{5.2.19}$$

既然 $e_1 = w_2, e_2 = w_3, e_3 = w_4$ ，那么，越过控制体单元面的通量表达式就是相容的。在整体平衡时，只有两个边界的通量 q_A 和 q_B 保留，其余的通量成对抵消，所以方程(5.2.19)表达了流体量 的守恒。对于扩散量的中心差公式通量相容保证了整个域的 守恒。

不相容的通量插值公式产生不满足整体守恒的不能用的格式。如图 5. 10 所示，考虑控制体 2 用基于节点 1、2 和 3 的二次插值公式，控制体 3 用基于节点 2、3 和 4 的二次插值公式，得到的两条二次曲线在单元面上不能吻合。结果，当两条曲线的变化率在单元面上不相等时，在控制体 2 东面计算出来的通量值与控制体 3 西面计算出来的通量值可能不等。如果这两个通量不能抵消，那就不能满足整体守恒。这个例子并不是说二次插值完全不能用，后面会介绍一个受欢迎的二次离散方法，即所谓 QUICK 格式，那是相容的格式。

2. 有界性

所有节点的方程离散后都会产生需要求解的代数方程组。通常用迭代法求

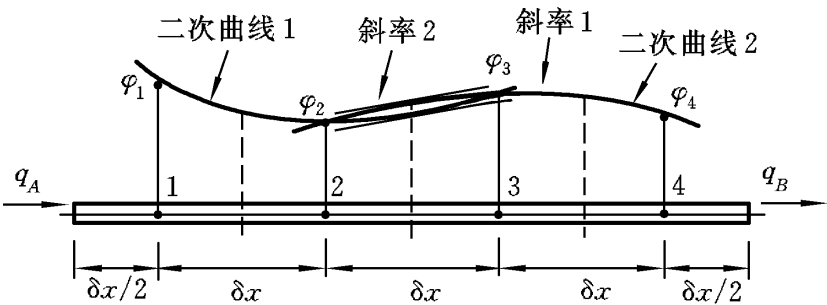


图 5.10 扩散通量不相容的例子

解大型方程组(在 7.2 节,有迭代法应用的例子)。这种方法开始假设变量 的分布,随后不断地更新 ,直到得出 的收敛解。J. B. Scarborough(1958)证明对于收敛的迭代解法,其充分条件可以用离散方程的系数值表达为

$$\begin{aligned} \frac{\sum a_{nb}}{a_p} &\leq 1, && \text{在所有节点,} \\ a_p &> \sum a_{nb}, && \text{至少在一个节点} \end{aligned}$$

(5.2.20)

这里 a_p 是中心节点 P 的系数,其中包含源项中的 $-S_p$ 。式(5.2.20)的求和符号表示对 P 的所有邻点 a_{nb} 求和。

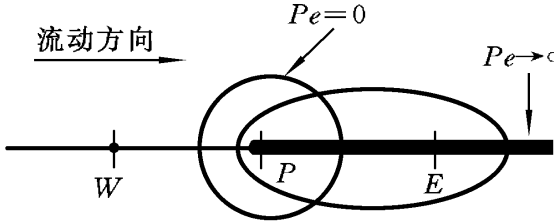
有界性准则(5.2.20)要求对角占优的性质。如果差分格式产生的系数满足上述准则,则系数矩阵对角占优。对角占优需要系数 a_p 是大值,所以源项线性化应保证 S_p 为负。如果是这样,那么 $-S_p$ 总是作为正值加到 a_p 上。

有界性准则(5.2.20)还要求离散方程所有的系数应该有相同的符号(一般都为正)。在物理上,这意味着一个节点 值的增加必然导致相邻节点 值的增加。如果离散格式不满足有界性要求,那么可能解根本不收敛或有摆动振荡。例 5.1 情形 2 的结果是一个证明。在其他情形中建立的离散方程系数 a_p 和 a_{nb} 都为正。例 5.1 情形 2 中大部分东面系数是负的,解大幅度摆动。

3. 输运性

中心差分格式用在扩散项是很好的,然而对流和扩散的机理不同。扩散过程在所有方向以其梯度影响流体量的输运,而对流只在流动方向扩展它的影响。这一关键的差别表现为对网格尺寸的严格限制。用中心差分进行稳定的对流扩散计算,必须限制网格的大小。这个限制取决于对流和扩散的相对强度。

定义无量纲佩克莱特(Peclet)数 Pe 作为对流和扩散相对强度的度量:



$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{u}{\alpha} \frac{x}{\Delta x}$$

(5.2.21)

这里,单元宽度 x 是特征长度。对于粘性流动, $\alpha = \nu$, Pe 数相当于 4.4 节的格子雷诺数 $Rc = u x / \nu$ 。图5.11 可以说明流体流动的输运性质(P. J. Roache, 1976),考虑点 P 的 的恒定源,图中曲线是不同 Pe 数下的 等值线,比

图 5.11 源附近的 分布

如说都是 $= 1$ 。用两个极端的情形来说明上游节点P 对下游节点E 影响的程度: 无对流的纯扩散($Pe = 0$)和无扩散的纯对流($Pe \rightarrow \infty$)。

在纯扩散的情形, 流体是静止的($Pe = 0$)。 的等值线是以P 为中心的同心圆, 因为 在所有方向同等地扩散, 节点E 的状态将受到上游点P 和下游点的状态影响。随着 Pe 数增加, 等值线由圆变为椭圆, 并向流动方向移动(如图 5.11 所示), 大 Pe 数的影响越来越偏向上游方向, 因此节点E 受到来自上游节点P 的状态的强烈影响, 而P 点的状态受到节点E 的影响很弱或根本没有受到它的影响。

在纯对流($Pe \rightarrow \infty$)的情形, 椭圆等值线向着流动方向充分伸展开。从源点P 发出的所有流体量 立即朝着下游节点E 输运, 因此E 点的 值只受上游状态的影响。既然没有扩散作用, 那么有 $\phi_E = \phi_P$ 。在离散实践中已经证实, Pe 数的大小和影响的方向性之间的关系, 即所谓输运性非常重要。

四、对流扩散问题中心差分格式的特性

1. 守恒性

中心差分格式用相容的表达式在控制体面上求对流扩散通量。此前的讨论已证实这种格式是守恒的。

2. 有界性

离散的标量输运方程(5.2.14)的内点系数中, $a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$ 。对于定常一维流场有连续性方程 $F_e - F_w = 0$, 于是 $a_P = a_W + a_E$ 。因此, 中心差分格式的系数满足 Scarborough 准则(5.2.20), 即满足有界性要求之一的对角占优。

因为 $a_E = D_e - F_e/2$, 对流给 a_E 的贡献带负号, 如果对流占优, a_E 可能为负。给定 $F_w > 0$ 和 $F_e > 0$ 时(即设流动是单向的), 若要 a_E 为正, D_e 和 F_e 需满足下列条件:

$$Pe_e = \frac{F_e}{D_e} < 2 \quad (5.2.22)$$

如果 $Pe_e > 2$, 则 a_E 为负。这就违背了有界性的第二个要求, 可能导致物理上不真实的解。5.2节例5.3情形2的 $Pe = 5$, 违背式(5.2.22), 结果导致大幅度摆动振荡。情形1和情形3的 Pe 数小于2, 有界解接近分析解。

3. 输运性

中心差分格式在节点P 计算对流和扩散通量时, 从各个方向引入了邻点的影响。这种格式不区分流动的方向和对流相对于扩散的强度, 因此中心差分格式在高 Pe 数不具有输运性。

4. 精度

中心差分格式的泰勒级数截断误差为二阶。式(5.2.22)给出了中心差分格式系数为正的条件。这意味着只要 $Pe = F/D < 2$, 格式就是稳定的、精确的。要注

意式(5.2.21)定义的单元 Pe 数是流体性质(ρ, μ)、流动性质(u)及计算网格的性质(Δx)的结合。对于给定的 ρ, μ ,只有速度小的、扩散占优的低雷诺数流动,或者网格间距足够小才可能满足条件(5.2.22)。如图5.11所示,随着 Pe 数增加,等值线由圆变为椭圆,并向流动方向移动。由于这个原因,中心差分格式的离散不适合一般的流动计算,这就产生了对新的离散格式的需求。下面讨论迎风格式、混合格式和 QUICK 格式的特性。

五、迎风差分格式

中心差分格式的主要缺点是不能鉴别流动方向,例如单元西面的 ϕ_w 值总是同时受到 ϕ_P 和 ϕ_E 的影响。这样处理不适合于有由西到东的强对流的流动,因为单元西面接受的影响中,来自节点 W 的影响应该比来自节点 P 的影响强。迎风差分格式在确定单元面的值时,考虑流动方向,单元面 e 的对流值取为与上游节点的值相等。作为例子,分别考虑有由西到东的正方向流动和有由东到西的负方向流动。

若流动沿着正方向, $u_w > 0, u_e > 0 (F_w > 0, F_e > 0)$, 迎风格式置 $\phi_w = \phi_w$ 和 $\phi_e = \phi_P$ 。于是,离散方程(5.2.9)成为

$$F_e \phi_P - F_w \phi_W = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

整理为
得

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)] \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_e \phi_E \quad (5.2.23)$$

当流动在负方向时, $u_w < 0, u_e < 0 (F_w < 0, F_e < 0)$, 迎风格式置 $\phi_w = \phi_P$ 和 $\phi_e = \phi_E$ 。这时离散方程为

$$F_e \phi_E - F_w \phi_P = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

或

$$[D_w + (D_e - F_e) + (F_e - F_w)] \phi_P = D_w \phi_W + (D_e - F_e) \phi_E \quad (5.2.24)$$

方程(5.2.23)和方程(5.2.24)写为一般形式

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E$$

中心系数是

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

邻点系数如下。

- (1) 当 $F_w > 0, F_e > 0$ 时, $a_W = D_w + F_w, a_E = D_e$;
- (2) 当 $F_w < 0, F_e < 0$ 时, $a_W = D_w, a_E = D_e - F_e$ 。

适合两个流动方向的迎风差分格式,其邻点系数的统一表达式为

$$a_W = D_w + \max(F_w, 0), \quad a_E = D_e + \max(0, -F_e)$$

例 5.2 考虑用迎风差分格式和五点粗网格解例 5.1 中的问题: (1) $u= 0.1$ m/s; (2) $u= 2.5$ m/s。

解 用图5.5 所示的网格离散。在内节点2、3 和4 应用一般形式的离散方程和有关的邻点系数表达式。注意,在这个例子处处有 $F = F_e = F_w = u, D = D_e = D_w = \mu / x$ 。

在边界节点 1, 对流项用迎风差分给出

$$F_e P - F_A A = D_e (E - P) - D_A (P - A) \tag{5.2.25}$$

在边界节点 5

$$F_B P - F_w W = D_B (B - P) - D_w (P - W) \tag{5.2.26}$$

在边界点有 $D_A = D_B = 2 \mu / x = 2D$ 和 $F_A = F_B = F$ 。如一般做法, 边界条件放进离散方程作为源项:

$$a_P P = a_W W + a_E E + S_u \tag{5.2.27}$$

其中系数 $a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_p$, 其他系数列于表 5. 8:

表 5. 8 邻点系数和源系数

节点	a_W	a_E	S_p	S_u
1	0	D	$-(2D + F)$	$(2D + F) A$
2, 3, 4	$D + F$	D	0	0
5	$D + F$	0	$-2D$	$2D B$

为引入边界条件, 已切断方程与边界外的联系, 通过源项加入边界通量。计算系数和解矩阵方程的过程可以作为练习去做, 这里只讨论计算结果。

(1) 如图 5. 12(a) 所示, $u= 0.1$ m/s, $F = u = 0.1, D = \mu / x = 0.1 / 0.2 = 0.5$, 所以 $Pe = F / D = 0.2$ 。结果列于表 5. 9:

表 5. 9 比较分析解与数值解($u= 0.1$ m/s)

节点	距离	有限体积解	分析解	偏差	误差/(%)
1	0.1	0.933 7	0.938 7	- 0.005	- 0.53
2	0.3	0.787 9	0.796 3	- 0.008	- 1.05
3	0.5	0.613 0	0.622 4	- 0.009	- 1.51
4	0.7	0.403 1	0.410 0	- 0.007	- 1.68
5	0.9	0.151 2	0.150 5	0.001	0.47

计算结果表明迎风差分格式在此 Pe 数给出好结果。

(2) 如图 5. 12(b) 所示, $u= 2.5$ m/s, $F = u = 2.5, D = \mu / x = 0.1 / 0.2 =$

0.5, 所以 $Pe = 5$, 结果列于表 5. 10:

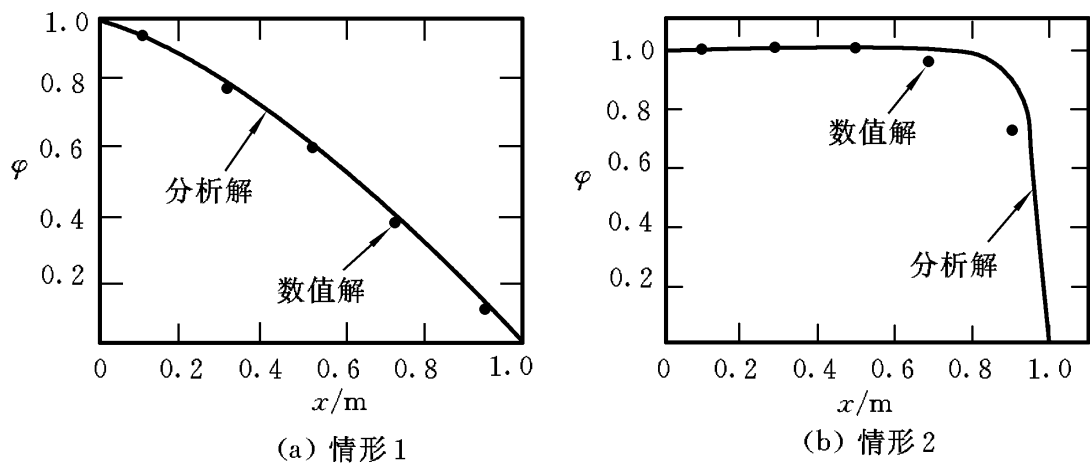


图 5. 12 比较迎风格式解与分析解

表 5. 10 比较数值解与分析解($u= 2.5\text{ m/s}$)

节点	距离	有限体积解	分析解	偏差	误差/(%)
1	0.1	0.999 8	1.000 0	- 0.000 1	0.00
2	0.3	0.998 7	0.999 9	- 0.001	- 0.01
3	0.5	0.992 1	0.999 9	- 0.008	- 0.78
4	0.7	0.952 4	0.999 4	- 0.047	- 4.70
5	0.9	0.714 3	0.917 9	- 0.204	- 22.18

和(1)相比较, 同样的网格中心差分格式不能得到合理结果, 但迎风差分格式给出较真实的结果, 虽然在边界附近不是很靠近精确解。

迎风差分格式的特点归纳如下。

1. 守恒性

迎风差分格式用相容的表达式计算单元面的通量, 因而易证其为守恒的格式。

2. 有界性

离散方程的系数总是正的, 满足有界性要求。流动满足连续性时, a_P 中的 $F_e - F_w = 0$, 于是 $a_P = a_w + a_E$, 这正是稳定迭代所要求的。所有的系数是正的, 系数矩阵对角占优, 解不产生摆动。

3. 输运性

迎风格式考虑了流动的方向, 满足了输运性要求。

4. 精度

迎风格式基于向后差分格式, 按照泰勒级数截断误差只是一阶精度。

因为迎风差分格式形式简单, 曾广泛应用于早期的CFD 计算。迎风格式易于推广到多维情形, 只要在差分格式的系数中对各个坐标方向重复应用迎风技术。

迎风格式的主要缺点是,当流动不是沿着网格线时结果有误差。在这种情况下,迎风格式使输运量的分布变得混淆。这样产生的误差有扩散特征,称为伪扩散(false diffusion)。

当域内流动方向与直角坐标网格线有一个角度时,用迎风差分格式计算标量输运量,所得结果可以说明误差的扩散特征。

在图 5.13 所示的域内,处处 $u= v= 2\text{ m/s}$, 所以流动是均匀的,流动方向与网格对角线(实线)平行。边界条件为:沿东面和南面边界标量 $\varphi=0$,沿西面和北面边界标量 $\varphi=100$,实对角线在第一点和最后一点与边界相交,这两点赋值 $\varphi=50$ 。

为识别伪扩散,考虑没有源项,没有物理扩散的纯对流,求定常解。由于流动平行于实对角线,所以正确解应该是:对角线以上的节点 φ 值等于 100,对角线以下的节点 φ 值等于 0。为反映伪扩散的程度,在图 5.14 中沿着虚对角线画出了的计算结果。

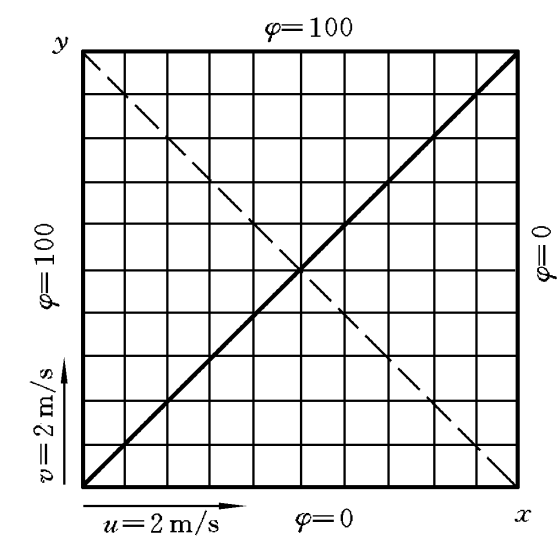


图 5.13 说明伪扩散的流动域

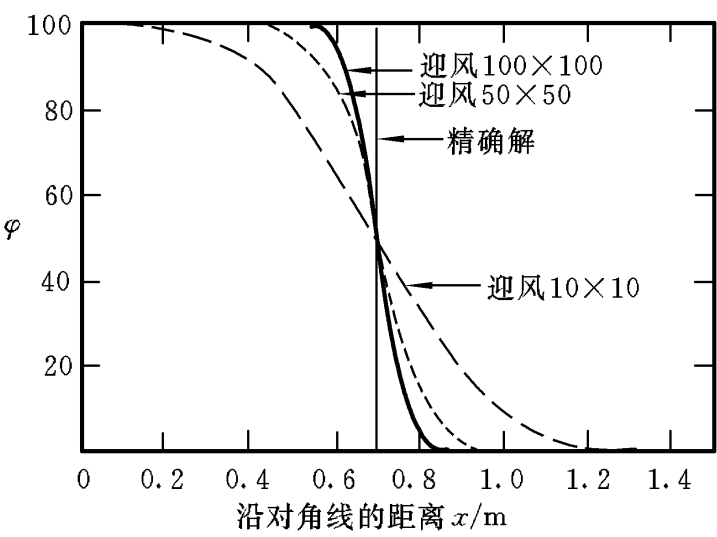


图 5.14 不同网格的计算结果

既然没有物理扩散,精确解展现阶跃性质,当虚对角线穿过实对角线时,从 100 跳到零。图 5.14 给出了不同网格的计算结果和精确解。数值结果显示偏差很大,其中粗网格误差最大。理论上网格加密可以解决伪扩散问题,图中 50x50 和 100x100 网格的计算结果更接近精确解。然而在实际做法中,消除伪扩散而加密网格的代价太大,往往不可能实现。试验表明,高雷诺数流动的伪扩散大得足以给出物理上不真实的结果(M. A. Leschziner, 1980; P. G. Huang 等, 1985)。因此,这样的迎风差分格式完全不适合精确的流动计算。相当多的研究致力寻找改进的离散格式。

六、混合差分格式

混合差分格式(D. B. Spalding, 1972)把中心差分和迎风差分结合在一起,二阶精度中心差分格式用于小 Pe 数($Pe < 2$),具有输运性的一阶精度迎风差分格

式用于大Pe数(Pe>2)。和前面一样,建立一维对流扩散的无源差分方程。这方程可解释为通量平衡方程。混合差分格式采用基于局部Pe数的分片公式,给出通过每个控制体面上的净通量。在控制体面上求出Pe数,例如,对于西面有

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w}{D_w / \Delta x_{WP}}$$

(5.2.28)

混合差分格式如下计算经过西面的单位面积净通量

$$q_w = F_w \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_w + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_P \right], \quad -2 < Pe_w < 2$$
$$q_w = F_w \phi_w, \quad Pe_w \geq 2$$
$$q_w = F_w \phi_P, \quad Pe_w \leq -2$$

(5.2.29)

容易看出,对于小Pe数,式(5.2.29)等价于对流扩散项用中心差分;但是当Pe<-2时,它等价于对流项用迎风差分并置扩散为零。离散方程一般形式的中心系数是

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

经整理,一维对流扩散的混合差分法邻点系数形式记为

$$a_W = \max[F_w, (D_w + F_w/2), 0], \quad a_E = \max[-F_e, (D_e - F_e/2), 0]$$

混合差分格式利用了中心差分格式和迎风差分格式的优点。当中心差分格式在高Pe数产生不精确的结果时,转换为迎风差分格式。这一格式是充分守恒的,由于系数总是正的,又是无条件有界的,故在高Pe数用迎风格式满足输运性。这一格式产生物理上真实的解,与高阶格式相比,它是高度稳定的(后面再讨论)。混合差分格式用在许多CFD程序中,已证明预测实际流动非常有用。它的缺点是只有泰勒级数截断误差的一级精度。

混合差分格式很容易推广到二维和三维问题,此时只需在各坐标方向重复应用以上推导即可。

三维问题的离散方程如下:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T$$

(5.2.30)

其中系数a_P=a_W+a_E+a_S+a_N+a_B+a_T+F,其他系数列于表5.11:

表 5.11 邻点系数和 F(对流扩散)

	一维	二维	三维
a _W	max[F _w , (D _w + F _w /2), 0]	max[F _w , (D _w + F _w /2), 0]	max[F _w , (D _w + F _w /2), 0]
a _E	max[- F _e , (D _e - F _e /2), 0]	max[- F _e , (D _e - F _e /2), 0]	max[- F _e , (D _e - F _e /2), 0]
a _S	—	max[F _s , (D _s + F _s /2), 0]	max[F _s , (D _s + F _s /2), 0]

续表

	一维	二维	三维
a_N	—	$\max[-F_n, (D_n - F_n/2), 0]$	$\max[-F_n, (D_n - F_n/2), 0]$
a_B	—	—	$\max[F_b, (D_b + F_b/2), 0]$
a_T	—	—	$\max[-F_t, (D_t - F_t/2), 0]$
F	$F_e - F_w$	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$

表 5. 11 中的F 和D 可用表 5. 12 中的表达式计算。

表 5. 12 F 和D 的表达式(对流扩散)

	w	e	s	n	b	t
F	$(u)_w A_w$	$(u)_e A_e$	$(v)_s A_s$	$(v)_n A_n$	$(w)_b A_b$	$(w)_t A_t$
D	$w A_w / \Delta x_{WP}$	$e A_e / \Delta x_{PE}$	$s A_s / \Delta y_{SP}$	$n A_n / \Delta y_{PN}$	$b A_b / \Delta z_{BP}$	$t A_t / \Delta z_{PT}$

在边界上, 需要修正这些系数以适应边界条件。

七、对流扩散问题的高阶差分格式

混合格式或迎风格式的泰勒级数截断误差只有一阶。虽然迎风格式非常稳定, 满足输运性要求, 但是一阶精度是产生数值扩散误差的原因。利用高阶格式可以消除这样的误差。高阶格式涉及更多的邻点, 因为带入更广泛的影响而减少离散误差。中心差分不具有输运性, 虽然有二阶精度, 却被证明是不稳定的。不考虑流动方向的格式是不稳定的, 所以更高精度的格式必须保留迎风特性和对方向的敏感性。

下面讨论的是使用较普遍的一种二阶格式。

1. 二阶迎风 QUICK 格式

B. P. Leonard (1979) 的 QUICK (The Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics) 格式用单元面两侧的两个节点和上游侧的再一个节点的二次插值表示这个单元面的值(见图 5. 15)。

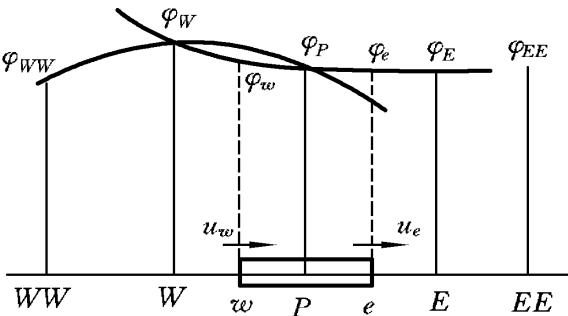


图 5. 15 QUICK 格式的二次插值

例如: 当 $u_w > 0$ 和 $u_e > 0$ 时, 用 WW, W 和 P 三个节点的二次拟合曲线求 ϕ_w , 再用经过 W, P 和 E 的二次拟合求 ϕ_e ; 当 $u_w < 0$ 和 $u_e < 0$ 时, 用 W, P 和 E 的值求 ϕ_w , 用 P, E 和 EE 的值求 ϕ_e 。可以证明, 对于均匀网格, 在单元面两侧的节点 i 和 i-1, 以及上游节点 i-2 之间插值, 以下公式给出了单元面上的值:

$$= \frac{6}{8} u_{i-1} + \frac{3}{8} u_i - \frac{1}{8} u_{i+2} \quad (5.2.31)$$

当 $u_w > 0$ 时, 西面 w 两侧的节点是 w 和 P , 上游节点是 WW , 且有

$$u_w = \frac{6}{8} u_w + \frac{3}{8} u_P - \frac{1}{8} u_{WW} \quad (5.2.32)$$

当 $u_e > 0$ 时, 东面 e 两侧的节点是 P 和 E , 上游节点是 W , 故有

$$u_e = \frac{6}{8} u_P + \frac{3}{8} u_E - \frac{1}{8} u_W \quad (5.2.33)$$

对于均匀网格, 扩散项可以用相应的二次曲线的梯度求出。值得注意的是, 这将给出中心差分表达式。如果 $F_w > 0$ 和 $F_e > 0$, 对流项用方程(5.2.31)和方程(5.2.33), 扩散项用中心差分, 一维对流扩散输运方程(5.2.9)的离散形式可写为

$$\begin{aligned} & F_e \left(\frac{6}{8} u_P + \frac{3}{8} u_E - \frac{1}{8} u_W \right) - F_w \left(\frac{6}{8} u_w + \frac{3}{8} u_P - \frac{1}{8} u_{WW} \right) \\ &= D_e (u_E - u_P) - D_w (u_P - u_w) \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

整理得 $D_w - \frac{3}{8} F_w + D_e + \frac{6}{8} F_e =$

$$= D_w + \frac{6}{8} F_w + \frac{1}{8} F_e = D_e - \frac{3}{8} F_e - \frac{1}{8} F_w \quad (5.2.35)$$

写为离散方程的标准形式:

$$a_P u_P = a_w u_w + a_E u_E + a_{WW} u_{WW} \quad (5.2.36)$$

其中系数表达如下:

$$a_w = D_w + 6F_w/8 + F_e/8, \quad a_E = D_e - 3F_e/8$$

$$a_{WW} = -F_w/8, \quad a_P = a_w + a_E + a_{WW} + (F_e - F_w)$$

如果 $F_w < 0$ 和 $F_e < 0$, 越过东面和西面边界的通量表达式为

$$u_w = \frac{6}{8} u_P + \frac{3}{8} u_W - \frac{1}{8} u_E \quad (5.2.37)$$

$$u_e = \frac{6}{8} u_E + \frac{3}{8} u_P - \frac{1}{8} u_{EE} \quad (5.2.38)$$

把式(5.2.37)和式(5.2.38)一起代入离散的对流扩散方程(5.2.9), 扩散项用中心差分, 同上整理得

$$a_w = D_w + 3F_w/8, \quad a_E = D_e - 6F_e/8 - F_w/8,$$

$$a_{EE} = F_e/8, \quad a_P = a_w + a_E + a_{EE} + (F_e - F_w)$$

结合上面两套系数, 得到对正、负流动方向都有效的一般表达式:

$$a_P u_P = a_w u_w + a_E u_E + a_{WW} u_{WW} + a_{EE} u_{EE} \quad (5.2.39)$$

式中, 系数

$$a_P = a_w + a_E + a_{EE} + a_{WW} + (F_e - F_w)$$

邻点系数

$$a_w = D_w + 3(1 - \alpha_w)F_w/8 + 6\alpha_w F_w/8 + \alpha_e F_e/8, \quad a_{ww} = -\alpha_w \frac{F_w}{8}$$

$$a_e = D_e - (1 - \alpha_w)F_w/8 - 3\alpha_e F_e/8 - 6(1 - \alpha_e)F_e/8, \quad a_{ee} = (1 - \alpha_e) \frac{F_e}{8}$$

这里

$$\alpha_w = 1, \quad F_w > 0; \quad \alpha_w = 0, \quad F_w < 0$$

$$\alpha_e = 1, \quad F_e > 0; \quad \alpha_e = 0, \quad F_e < 0$$

例 5.3 用 QUICK 格式解例 5.1 的问题, $u = 0.2 \text{ m/s}$ 。用 5 点网格, 比较 QUICK 格式解和分析解及中心差分解。

解 用 5 点网格做例 5.1 的问题。 $u = 0.2 \text{ m/s}$, 处处有 $F = F_e = F_w = u = 0.2$, $D = D_e = D_w = 1/\Delta x = 0.5$ 。单元的 $Pe_e = Pe_w = u \Delta x / \Delta x = 0.4$ 。

由 QUICK 格式离散方程, 在内节点 2、3 和 4 用式(5.2.39)及其系数定义, 在单元面由式(5.2.32)和式(5.2.33)计算, 用到三个节点的值。在靠近边界的节点 1、2 和 5 离散方程时, 因受到域边界的影响需要特别处理。在边界节点 1 有 $\alpha_w = \alpha_A$, 但是用式(5.2.33)求 α_e 时没有西节点 W 的 α 值可用。为解决这个问题, Leonard(1979)建议用线性插值在物理边界以西 $\Delta x/2$ 处创建一个镜像点 O。易得镜像点的线性插值为

$$\alpha_O = 2\alpha_A - \alpha_P \quad (5.2.40)$$

给出式(5.2.33)要求的 W 节点 α 值, 于是有

$$\alpha_e = \frac{7}{8}\alpha_P + \frac{3}{8}\alpha_E - \frac{2}{8}\alpha_A \quad (5.2.41)$$

在边界节点必须用和式(5.2.41)相容的表达式计算梯度, 易证, 边界 A 的扩散通量是

$$-\frac{F}{\Delta x} \bigg|_A = \frac{D_A}{3}(9\alpha_P - 8\alpha_A - \alpha_E) \quad (5.2.42)$$

节点 1 的离散方程是

$$F_e \left(\frac{7}{8}\alpha_P + \frac{3}{8}\alpha_E - \frac{2}{8}\alpha_A \right) - F_A \alpha_A = D_e(\alpha_E - \alpha_P) - \frac{D_A}{3}(9\alpha_P - 8\alpha_A - \alpha_E) \quad (5.2.43)$$

在边界节点 5 已知 $\alpha_e = \alpha_B$, 经过东边界的扩散通量是

$$F \frac{F}{\Delta x} \bigg|_B = \frac{D_B}{3}(8\alpha_B - 9\alpha_P + \alpha_W) \quad (5.2.44)$$

故节点 5 的离散方程是

$$F_B \alpha_B - F_w \left(\frac{6}{8}\alpha_W + \frac{3}{8}\alpha_P - \frac{1}{8}\alpha_{WW} \right) = \frac{D_B}{3}(8\alpha_B - 9\alpha_P + \alpha_W) - D_w(\alpha_P - \alpha_W) \quad (5.2.45)$$

既然用了专门的表达式计算控制体 1 东面的 ϕ_e 值, 那就必须用同样的 ϕ_e 表达式计算经过控制体 2 西面的对流, 以保证通量相容。所以在节点 2 有

$$\begin{aligned} F_e \frac{6}{8} \phi_P + \frac{3}{8} \phi_E - \frac{1}{8} \phi_W &= F_w \frac{7}{8} \phi_W + \frac{3}{8} \phi_P - \frac{2}{8} \phi_A \\ &= D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \end{aligned}$$

(5.2.46)

把节点 1、2 和 5 的离散方程写成标准形式:

$$a_P \phi_P = a_{WW} \phi_W + a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u$$

(5.2.47)

式中, 系数 $a_P = a_W + a_E + a_{WW} + (F_e - F_w) - S_p$, 邻点系数列于表 5. 13。

表 5. 13 邻点系数($u = 0.2 \text{ m/s}$)

节点	1	2	5
a_{WW}	0	0	$-F_w/8$
a_W	0	$D_w + 7F_w/8 + F_e/8$	$D_w + D_B/3 + 6F_w/8$
a_E	$D_e + D_A/3 - 3F_e/8$	$D_e - 3F_e/8$	0
S_p	$-(8D_A/3 + 2F_e/8 + F_A)$	$F_w/4$	$-(8D_B/3 - F_B)$
S_u	$(8D_A/3 + 2F_e/8 + F_A) \phi_A$	$-F_w \phi_A/4$	$(8D_B/3 - F_B) \phi_B$

代入数值后得到的系数列于表 5. 14。

表 5. 14 节点系数和源系数($u = 0.2 \text{ m/s}$)

节点	a_W	a_E	a_{WW}	S_u	S_p	a_P
1	0	0.592	0	$1.583 \phi_A$	-1.583	2.175
2	0.700	0.425	0	$-0.05 \phi_A$	0.05	1.075
3	0.675	0.425	-0.025	0	0	1.075
4	0.675	0.425	-0.025	0	0	1.075
5	0.817	0	-0.025	$1.133 \phi_B$	-1.133	1.925

方程组的矩阵形式为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2.175 & -0.592 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7 & 1.075 & -0.425 & 0 & 0 \\ 0.025 & -0.675 & 1.075 & -0.425 & 0 \\ 0 & 0.025 & -0.675 & 1.075 & -0.425 \\ 0 & 0 & 0.025 & -0.817 & 1.925 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.583 \\ -0.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以上方程系统的解为

1	0.964 8
2	0.870 7
3 =	0.730 9
4	0.522 6
5	0.212 3

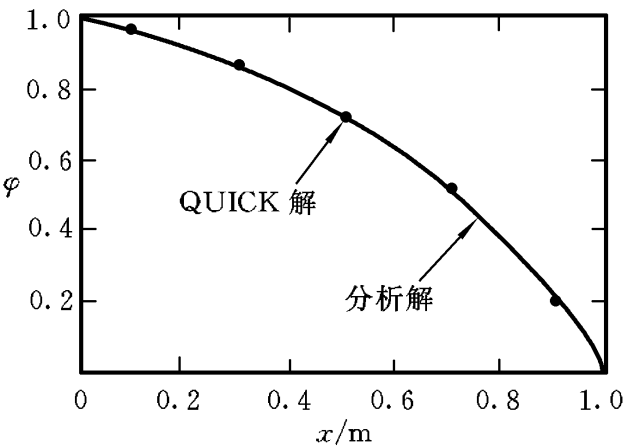


图 5.16 表明 QUICK 解与分析解几乎不可区分,即使用粗网格,误差也很小。通过表 5.15 比较绝对误差,表明 QUICK 格式可比中心差分格式给出更精确的解。

图 5.16 QUICK 解与精确解比较

表 5.15 比较分析解与数值解($u=0.2\text{ m/s}$)

节点	距离	分析解	QUICK 解	偏差	中心差分解	偏差
1	0.1	0.965 3	0.964 8	- 0.000 5	0.969 6	0.004 3
2	0.3	0.871 3	0.870 7	- 0.000 6	0.878 6	0.007 3
3	0.5	0.731 0	0.730 9	- 0.000 1	0.742 1	0.011 1
4	0.7	0.521 8	0.522 6	0.000 8	0.537 4	0.015 6
5	0.9	0.209 6	0.212 3	0.002 7	0.230 3	0.020 7

2. QUICK 格式评估

QUICK 格式利用相容的二次曲线计算单元面的通量值(总是用两侧两个节点和一个上游点的二次插值),因而是守恒的;对于均匀网格,QUICK 格式是二阶精度。基于两个上游节点和一个下游节点值计算二次插值函数,因而 QUICK 格式有输运性;如果流动是连续性的,则系数 a_P 等于它所有邻点的系数之和,满足了有界性。

QUICK 格式的不足之处是不能保证主系数(E 和 W)为正,而且系数 a_{WW} 、 a_{EE} 为负。例如当 $u_w > 0$ 和 $u_e > 0$,在中等 Pe 数($Pe = F_e / D_e > 8/3$)下的东系数为负。这就有稳定性问题,在某些流动条件下的解无界。同样,若流动沿负方向,西系数可能为负。所以,QUICK 格式是有条件稳定的。

另一个要注意的问题是,高阶格式的离散方程不仅涉及邻点,还涉及更远的节点,不能直接应用三对角矩阵解法解代数方程组。

3. QUICK 格式的稳定性问题和解决办法

由于上面的 QUICK 格式可能出现负主系数而不稳定,改进的格式把带来稳定性问题的系数放进源项,这样主系数就是正的。一些较好的做法见 T. Han 等人(1981)、A. Pollard 等人(1982)和 T. Hayase 等人(1992)的论文。后者推广了改进的 QUICK 格式,得到一个稳定的、收敛快的新格式。T. Hayase 等人的

QUICK 格式给出如下:

$$\begin{aligned}w_w &= w_w + \frac{1}{8}(3 p_w - 2 w_w - w_{ww}), F_w > 0 \\e_e &= p_e + \frac{1}{8}(3 e_e - 2 p_e - w_e), F_e > 0 \\w_w &= p_w + \frac{1}{8}(3 w_w - 2 p_w - e_e), F_w < 0 \\e_e &= e_e + \frac{1}{8}(3 p_e - 2 e_e - e_{ee}), F_e < 0\end{aligned}$$

(5.2.48)

离散方程形式:

$$a_P p_P = a_W w_W + a_E e_E + S$$

(5.2.49)

式中, 系数

$$\begin{aligned}a_P &= a_W + a_E + (F_e - F_w) \\a_W &= D_w + w_w F_w, \quad a_E = D_e - (1 - e_e) F_e \\S &= \frac{1}{8}[(3 p_w - 2 w_w - w_{ww}) w_w F_w + (3 w_w - 2 p_w - e_e)(1 - w_w) F_w \\&\quad + (w_w + 2 p_e - 3 e_e) e_e F_e + (2 e_e + e_{ee} - 3 p_e)(1 - e_e) F_e]\end{aligned}$$

(5.2.50)

这里

$$\begin{aligned}w_w &= 1, F_w > 0; \quad w_w = 0, F_w < 0 \\e_e &= 1, F_e > 0; \quad e_e = 0, F_e < 0\end{aligned}$$

这种格式的优点是系数总是正的, 满足守恒性、有界性和输运性。应该注意到, 所有不同的 QUICK 格式包括 Hayase 格式, 都在收敛的情况下给出相同的解。

总之, QUICK 格式有比中心差分格式和混合格式更高的精度, 保持了迎风加权的特性。总的伪扩散小, 用粗网格往往比迎风格式和混合格式的精度高得多。图 5.17 以 5.2 节二维情况为例对迎风格式和 QUICK 格式进行了比较。可以看到, 在 50×50 的网格上, 与分析解相比, QUICK 格式的精确度比迎风格式高得多。

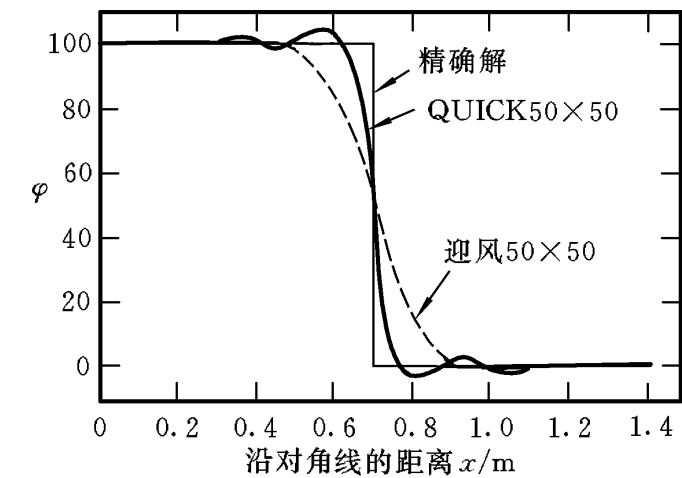


图 5.17 迎风格式和 QUICK 格式的比较

但是如图 5.17 所示, QUICK 格式有轻微的过低和过冲。在复杂的流动计算中, 用 QUICK 格式会由于这样不受控制的结果导致微妙的问题。例如, 在湍流 k- 模型计算中会造成负湍流动能。解释计算结果时, 应该考虑到过低和过冲的可能。

本节讨论的是,在流场已知的条件下,对流扩散方程的离散问题。其中,关键之处是在考虑方程中的对流项时,单元面的输运量 要有一个合适的表达式。

有限体积法用离散方程描述对流和扩散的联合作用,离散方程的系数是单位面积的对流质量通量 F 和扩散通量 D 的加权和。对流扩散问题的中心差分、迎风差分和混合差分的一般内点离散方程有相同的标准形式。在边界处的节点,边界条件经源项进入离散方程,每一种离散格式有特别的处理方式。

具有守恒性、有界性和输运性的离散格式可给出物理上真实的解和稳定的迭代解。中心差分法不适合一般的对流扩散问题,因为它不具有输运性,对于大 Pe 数给出物理上不真实的解;迎风格式和混合格式都具有守恒性、有界性和输运性,且高度稳定,但是在多维流动中,当速度方向不平行于某一坐标方向时会遇到伪扩散问题。

QUICK 法的离散方程与一般的内点标准形式不同,因为它涉及更多的节点。高阶格式,如QUICK 格式会减小伪扩散误差,但计算较不稳定。对于某些问题,如 的梯度较大时,QUICK 格式会表现出小的过低和过冲,极端情况下这会造成非物理行为,如出现负湍流量 k_t 。尽管如此,只要使用时小心判断,QUICK 格式能给出非常精确的对流扩散问题的解。

对流项的三阶以上的离散格式有不同程度的成功。这样的高阶格式在补充边界条件时会有问题,另外计算成本也是需要考虑的因素。QUICK 格式的过低和过冲促使人们发展避免这些问题的二阶格式。已证明在CFD 计算中,有效的TV D(Total Variation Diminishing)类型格式特别适合于实现无振荡解。有关讨论见C. Hirsch(1990), B. Van Leer(1973, 1974, 1979), J. B. Borris 和D. L. Brook (1973, 1976), S. Osher (1984), S. Osher 和 S. Chakravarthy (1984), J. Zhu (1991), J. Alvarez 等人(1993)的论著。

5.3 定常流动的压强速度耦合算法

标量 的对流依赖局部流动的强度和方向。前面几节为建立算法,假设速度场已知,一般情况下速度场是未知的,它作为整体求解过程的一部分和其他流动变量一起出现。本节讨论最常用的计算整体流场的策略。

动量方程即每个速度分量的输运方程,可以从一般的输运方程(2.5.1)中导出,只要分别用 u 、 v 和 w 替换变量 。当然,速度场必须满足连续性条件。考虑二维定常层流的控制方程。

(1) u -动量方程:

$$\overline{\frac{1}{x}(u^2)} + \overline{\frac{1}{y}(vu)} = \overline{\frac{1}{x}} \mu \frac{u}{x} + \overline{\frac{1}{y}} \mu \frac{u}{y} - \frac{p}{x} + S_u \quad (5.3.1)$$

(2) v-动量方程:

$$\overline{\frac{1}{x}(uv)} + \overline{\frac{1}{y}(v^2)} = \overline{\frac{1}{x}} \mu \frac{v}{x} + \overline{\frac{1}{y}} \mu \frac{v}{y} - \frac{p}{y} + S_v \quad (5.3.2)$$

(3) 连续性方程:

$$\overline{\frac{1}{x}(u)} + \overline{\frac{1}{y}(v)} = 0 \quad (5.3.3)$$

在大部分工程上有意义的流动中, 压强梯度项形成主要的动量源, 为使下面的讨论较清楚, 这里将压强梯度项和其他源项分开写。

解方程(5.3.1)、(5.3.2)和(5.3.3)提出了如下两个新问题。

对流项含有非线性量, 例如方程(5.3.1)的第一项是 u^2 的 x 导数。

所有三个方程本质上是耦合的, 因为每一个速度分量都出现在各自的动量方程和连续性方程中。最复杂的问题是压强所起的作用。它出现在两个动量方程中, 却没有自己的显式方程(输运方程或其他方程)。

如果压强梯度已知, 从动量方程得到速度的离散方程与得到任何其他标量一样, 可以利用前一节讲过的格式。在一般的流动计算中, 由于压强梯度事先不知道, 希望作为解的一部分计算压强场。如果流动是可压缩的, 那么连续性方程可以作为密度的输运方程, 而且方程组可以增加能量方程作为温度的输运方程。于是, 压强可以用温度和密度从状态方程 $p = p(\rho, T)$ 得到。然而, 如果流动是不可压缩的, 那么密度是常数, 按定义压强与密度没有联系。在这种情况下, 压强和速度的耦合引入对流场解的约束条件: 如果在动量方程中应用正确的压强场, 那么, 求出的速度场将满足连续性。

与方程组的非线性和压强-速度关系相连的两个问题都可以采用迭代解方法加以解决, 如S. V. Patankar 和D. B. Spalding(1972)的SIMPLE 算法。这个算法在单元面的单位质量对流通量 F 中用所谓的估计速度分量, 并从连续性方程导出一个压强修正方程解压强修正场, 以更新速度场和压强场。本节讨论SIMPLE 算法的主要特点和最新发展。

一、交错网格

上一节建立的一般流体量的输运解法当然要用来解动量方程, 但不是直接可用的。这里的问题与动量方程的压强源项有关, 需要特别处理。

有限体积法总是从流动域和相关的输运方程(5.3.1、5.3.2、5.3.3)的离散开始的。首先需要确定速度放在什么地方。照理速度应该和标量变量(压强、温度等)定义在相同的地方。然而, 如果速度和压强都定义在普通的控制体的节点上, 一个高度不均匀的压强场在离散方程中可能会像均匀场那样起作用。这可以

由图 5.18 中简单的二维情形来证实,那是一个高度不规则的棋盘状压强场。

若在 e 和 w 用线性插值得到压强,在 u -动量方程中的压强梯度项 p/x 为

$$\frac{p}{x} = \frac{p_e - p_w}{x} = \frac{\frac{p_E + p_P}{2} - \frac{p_P + p_W}{2}}{x} = \frac{p_E - p_W}{2x} \quad (5.3.4)$$

同样,在 v -动量方程中的压强梯度项 p/y 为

$$\frac{p}{y} = \frac{p_N - p_S}{2y} \quad (5.3.5)$$

在式(5.3.4)和式(5.3.5)中,未出现中心节点 P 的压强。由图 5.18 中的棋盘状压强场取相应的值代入式(5.3.4)和式(5.3.5),可以发现,尽管压强场在两个方向展现振荡特性,但所有节点的两个方向的压强梯度都为零。结果这个压强场像均匀压强场一样在离散动量方程中给出同样的(零)动量源。这一特性当然不是真实的。

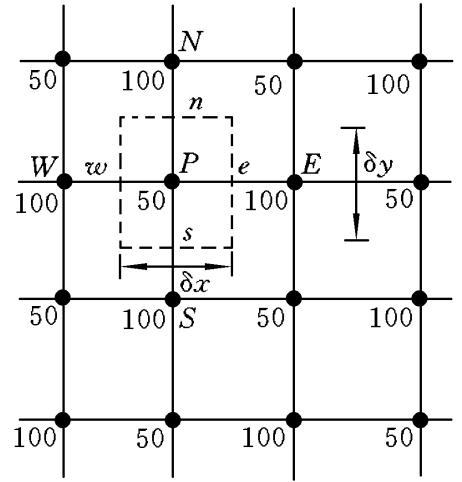


图 5.18 棋盘状压强场

显然,如果速度定义在标量网格上,就不能恰当地表达压强在离散动量方程中的影响。解决的办法是动量方程用交错网格(F. H Harlow 和 J. E. Welch, 1965)。这一概念是在通常的节点上计算压强、密度、温度等标量,但是计算速度分量是在以标量单元面为中心的交错网格上进行。二维流动计算的网格结构示于图 5.19。

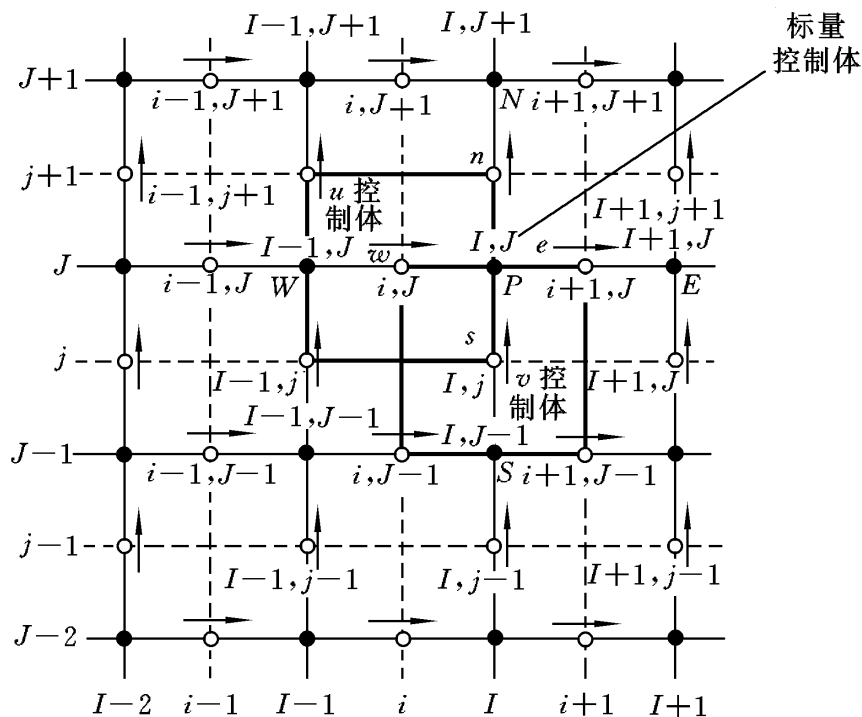


图 5.19 二维流动计算的网格结构

标量变量存在标有黑圆点的节点上。速度定义在节点之间的(标量)单元面

上,用箭头表示。水平箭头指 u -速度的位置,垂直箭头指 v -速度的位置。除了用 E 、 W 、 N 和 S 标记外,图 5.18 还引入了新的基于网格线和单元面编号的记号系统,后面再详细解释。

下面继续用原先的 E 、 W 、 N 和 S 记号; u 速度分量存放在标量单元面 e 和 w , v 速度分量存在标量单元面 n 和 s 。三维流动的 w 速度分量存放在标量单元面 t 和 b 。可以看到, u 和 v 的控制体各不相同,而且都不同于标量控制体。标量控制体有时也称为压强控制体,后面将看到,这是因为连续性方程在标量控制体上离散化为压强修正方程的原因。

交错网格布置的压强节点在速度分量 u 控制体的单元面上。压强梯度 p / x 为

$$\frac{p}{x} = \frac{p_P - p_W}{x_u} \quad (5.3.6)$$

这里 x_u 是 u 控制体的宽度;同样, v 控制体的压强梯度 p / y 为

$$\frac{p}{y} = \frac{p_P - p_S}{y_v} \quad (5.3.7)$$

这里 y_v 是 v 控制体的宽度。

如果再考虑棋盘状压强场,将相应的节点压强值代入式(5.3.6)和式(5.3.7),可以得到显著的非零压强梯度。对于空间振荡压强场,如棋盘状压强场,速度控制体交错排列避免了离散动量方程的不真实性。交错网格还有一个优点,即它在标量输运(对流扩散)计算要求的准确位置提供速度。因此,不需要在单元面插值计算速度。

二、动量方程

如前所述,如果压强已知,速度的离散方程及其解法即与标量方程的相同。因为速度网格与标量网格交错,因而要基于网格线和单元面重新编号。图 5.19 中,实网格线用大写字母编号。 x 方向的编号是 $\dots I-1, I, I+1 \dots$, y 方向的编号是 $\dots J-1, J, J+1 \dots$ 。构成标量控制面的虚线用小写字母编号, x 方向的编号是 $\dots i-1, i, i+1 \dots$, y 方向的编号是 $\dots j-1, j, j+1 \dots$ 。用这样编号的下标系统能精确定义网格节点和单元面的位置。

标量节点在两条实网格线的交叉点,用两个大写字母识别。例如,图 5.19 中的节点 P 记为 (I, J) ; u 速度分量存在标量控制体的 e 、 w 单元面上,在单元面虚线和实网格线的交叉点上,因而由一个小写字母和一个大写字母联合表示,将围绕点 P 的控制体的单元面 w 定义为 (i, J) 。由于同样的原因, v 速度分量的存放位置由一个大写字母和一个小写字母表示,如单元面 s 定义为 (I, j) 。

可以选用向前交错或向后交错的网格。图 5.19 中的均匀网格是向后交错网

格, 因为速度分量 u_v 的位置 (i, J) 距离标量节点 (I, J) 为 $-x_u/2$ 。同样, 速度分量 $v_{I,j}$ 的位置 (I, j) 离标量节点 (I, J) 距离为 $-y_v/2$ 。

在位置 (i, J) , 速度 u 的离散动量方程用新的坐标系统表示为

$$a_{i,J} u_{i,J} = a_{nb} u_{nb} - \frac{p_{I,J} - p_{I-1,J}}{X_u} V_u + S V_u$$

或

$$a_{i,J} u_{i,J} = a_{nb} u_{nb} + (p_{I-1,J} - p_{I,J}) A_{i,J} + b_{i,J} \quad (5.3.8)$$

这里, V_u 是 u 单元的体积, $b_{i,J} = S V_u$ 是动量源项, $A_{i,J}$ 是 u 控制体的单元面 (e 或 w) 的面积。式 (5.3.8) 利用位于 u 控制体边界上的节点压强离散表达 u 控制体的压强梯度。

应用新的编号系统, 式 (5.3.8) 中 $a_{nb} u_{nb}$ 涉及的邻点 W 、 E 、 S 和 N 分别是 $(i-1, J)$ 、 $(i+1, J)$ 、 $(i, J-1)$ 和 $(i, J+1)$, 其位置与速度方向示于图 5.20。可以用适合于对流扩散问题的任何差分方法求系数 $a_{i,J}$ 和 a_{nb} 的值。系数表达式将含有在 u 控制体单元面上的单位面积的对流质量通量 F 和扩散传

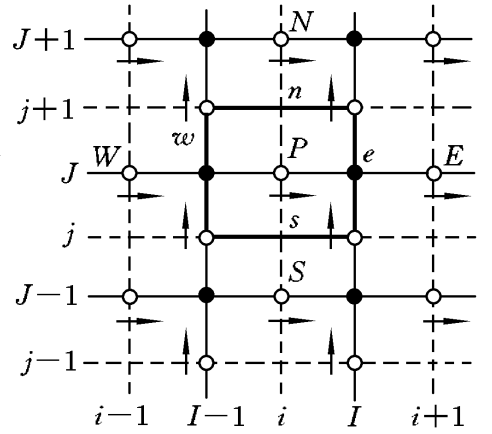


图 5.20 u -控制体及邻点速度分量

导率 D 。这里假设控制体在 x 、 y 方向的断面面积相等, F 、 D 均已用这个面积值除过。 u 控制体各个单元面 e 、 w 、 n 和 s 的 F 和 D 的值为

$$\begin{aligned} F_w = (u)_w &= \frac{F_{i,J} + F_{i-1,J}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{u_{i,J} + u_{i-1,J}}{2} u_{i,J} + \frac{1}{2} \frac{u_{i-1,J} + u_{i-2,J}}{2} u_{i-1,J} \end{aligned} \quad (5.3.9a)$$

$$\begin{aligned} F_e = (u)_e &= \frac{F_{i+1,J} + F_{i,J}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{u_{i+1,J} + u_{i,J}}{2} u_{i+1,J} + \frac{1}{2} \frac{u_{i,J} + u_{i-1,J}}{2} u_{i,J} \end{aligned} \quad (5.3.9b)$$

$$\begin{aligned} F_s = (v)_s &= \frac{F_{I,j} + F_{I-1,j}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{v_{I,j} + v_{I-1,j}}{2} v_{I,j} + \frac{1}{2} \frac{v_{I-1,j} + v_{I-2,j}}{2} v_{I-1,j} \end{aligned} \quad (5.3.9c)$$

$$\begin{aligned} F_n = (v)_n &= \frac{F_{I,j+1} + F_{I-1,j+1}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{v_{I,j+1} + v_{I,j}}{2} v_{I,j+1} + \frac{1}{2} \frac{v_{I-1,j+1} + v_{I-1,j}}{2} v_{I-1,j+1} \end{aligned} \quad (5.3.9d)$$

$$D_w = \frac{u_{i-1,J}}{X_{i-1}} \quad (5.3.9e)$$

$$D_e = \frac{I, J}{x_{i+1} - x_i} \quad (5.3.9f)$$

$$D_s = \frac{I-1, J + I, J + I-1, J-1 + I, J-1}{4(y_j - y_{j-1})} \quad (5.3.9g)$$

$$D_n = \frac{I-1, J+1 + I, J+1 + I-1, J + I, J}{4(y_{j+1} - y_j)} \quad (5.3.9h)$$

式(5.3.9)表明, 当 u 控制体单元面没有标量变量或速度分量可用时, 可以用最近两点或四点的平均值。在每一次迭代中, 用上一次迭代收敛值或第一次迭代初

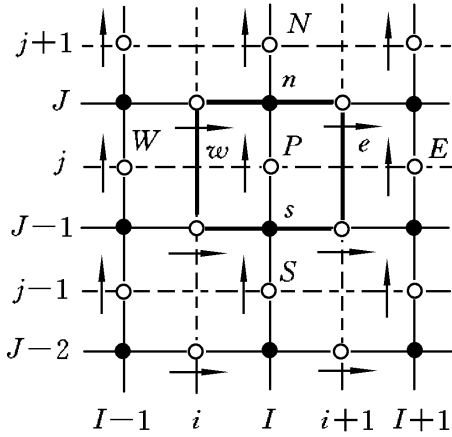


图 5.21 v -控制体及邻点速度分量

值求上述表达式的 u 、 v 速度分量。应该看到, 这些所谓已知的 u 、 v 值隐含在方程(5.3.8)的系数中, 这与方程中表示未知标量的 $u_{i,j}$ 或 u_{nb} 是有区别的。

类似地, v 动量方程为

$$a_{I,j} v_{I,j} = a_{nb} v_{nb} + (p_{I,j-1} - p_{I,j}) A_{I,j} + b_{I,j} \quad (5.3.10)$$

式中, $a_{nb} v_{nb}$ 涉及的邻点和速度方向示于图 5.21。系数 $a_{I,j}$ 和 a_{nb} 含有 v 控制体单元面上的流通量 F 和扩散传导率 D 。对 v 控制体, 采取同样的

的平均法得到 F 和 D :

$$\begin{aligned} F_w = (u)_w &= \frac{F_{i,j} + F_{i,j-1}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{I, J + I-1, J}{2} u_{i,j} + \frac{I-1, J-1 + I, J-1}{2} u_{i,j-1} \end{aligned} \quad (5.3.11a)$$

$$\begin{aligned} F_e = (u)_e &= \frac{F_{i+1,j} + F_{i+1,j-1}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{I+1, J + I, J}{2} u_{i+1,j} + \frac{I, J-1 + I+1, J-1}{2} u_{i+1,j-1} \end{aligned} \quad (5.3.11b)$$

$$\begin{aligned} F_s = (v)_s &= \frac{F_{I,j-1} + F_{I,j}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{I, J-1 + I, J-2}{2} v_{I,j-1} + \frac{I, J + I, J-1}{2} v_{I,j} \end{aligned} \quad (5.3.11c)$$

$$\begin{aligned} F_n = (v)_n &= \frac{F_{I,j} + F_{I,j+1}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{I, J + I, J-1}{2} v_{I,j} + \frac{I, J+1 + I, J}{2} v_{I,j+1} \end{aligned} \quad (5.3.11d)$$

$$D_w = \frac{I-1, J-1 + I, J-1 + I-1, J + I, J}{4(x_i - x_{I-1})} \quad (5.3.11e)$$

$$D_e = \frac{I, J-1 + I+1, J-1 + I, J + I+1, J}{4(x_{I+1} - x_I)} \quad (5.3.11f)$$

$$D_s = \frac{I_{I,J-1}}{y_j - y_{j-1}} \quad (5.3.11g)$$

$$D_n = \frac{I_{I,J}}{y_{j+1} - y_j} \quad (5.3.11h)$$

同样, 每一次迭代时, 用前一次迭代得到的 u 和 v 速度分量计算 F 值。

若给定压强场 p , 在每一个 u 、 v 控制体可以写出形如式(5.3.8)和式(5.3.10)的离散动量方程, 从而解出速度场。只要压强场是正确的, 那么得到的速度场一定满足连续性条件。现在, 由于压强场是未知的, 需要采用一个方法计算压强。

三、SIMPLE 算法

SIMPLE 算法 (Semi-Implicit-Method-for-Pressure-Linked-Equations) 最初由 Patankar 和 Spalding (1972) 推出, 本质上是在上述交错网格计算压强的估计-修正法。下面以直角坐标下的二维定常层流方程来说明这一方法。

首先, 估计一个压强场 p^* 以启动 SIMPLE 计算过程。按估计压强场 p^* 解离散动量方程(5.3.8)和方程(5.3.10)得到的速度分量是 u^* 和 v^* , 即有

$$a_{i,j} u_{i,j}^* = a_{nb} u_{nb}^* + (p_{I-1,j}^* - p_{I,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (5.3.12)$$

$$a_{I,j} v_{I,j}^* = a_{nb} v_{nb}^* + (p_{I,j-1}^* - p_{I,j}^*) A_{I,j} + b_{I,j} \quad (5.3.13)$$

定义修正压强 p 为正确压强场 p 和估计压强场 p^* 之差, 即

$$p = p^* + p \quad (5.3.14)$$

类似定义修正速度 u 、 v 为正确速度场 u 、 v 和估计速度场 u^* 、 v^* 之差, 即

$$u = u^* + u \quad (5.3.15)$$

$$v = v^* + v \quad (5.3.16)$$

按正确的压强场 p 可解得正确的速度场 u 、 v , 方程(5.3.8)和方程(5.3.10)是 u 、 v 和 p 的联系方程。现在从方程(5.3.8)和(5.3.10)中分别减去方程(5.3.12)和(5.3.13), 给出

$$\begin{aligned} a_{i,j} (u_{i,j} - u_{i,j}^*) &= a_{nb} (u_{nb} - u_{nb}^*) + [(p_{I-1,j} - p_{I-1,j}^*) \\ &\quad - (p_{I,j} - p_{I,j}^*)] A_{i,j} \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

$$\begin{aligned} a_{I,j} (v_{I,j} - v_{I,j}^*) &= a_{nb} (v_{nb} - v_{nb}^*) + [(p_{I,j-1} - p_{I,j-1}^*) \\ &\quad - (p_{I,j} - p_{I,j}^*)] A_{I,j} \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

应用式(5.3.14)、(5.3.15)、(5.3.16), 方程(5.3.17)和(5.3.18)可写成

$$a_{i,j} u_{i,j} = a_{nb} u_{nb} + (p_{I-1,j} - p_{I,j}) A_{i,j} \quad (5.3.19)$$

$$a_{I,j} v_{I,j} = a_{nb} v_{nb} + (p_{I,j-1} - p_{I,j}) A_{I,j} \quad (5.3.20)$$

在这里引入一近似: 抛去 $a_{nb}u_{nb}$ 和 $a_{nb}v_{nb}$ 以简化修正速度的方程 (5.3.19) 和 (5.3.20), 这是 SIMPLE 算法的主要特点。化简后, 有

$$u_{i,j} = d_{i,j}(p_{I-1,j} - p_{I,j}) \quad (5.3.21)$$

$$v_{I,j} = d_{I,j}(p_{I,j-1} - p_{I,j}) \quad (5.3.22)$$

这里

$$d_{i,j} = A_{i,j}/a_{i,j}, \quad d_{I,j} = A_{I,j}/a_{I,j} \quad (5.3.23)$$

将修正速度代入式 (5.3.15) 和式 (5.3.16), 给出结果为

$$u_{i,j} = u_{i,j}^* + d_{i,j}(p_{I-1,j} - p_{I,j}) \quad (5.3.24)$$

$$v_{I,j} = v_{I,j}^* + d_{I,j}(p_{I,j-1} - p_{I,j}) \quad (5.3.25)$$

对 $u_{i+1,j}$ 和 $v_{I,j+1}$ 有类似的表达:

$$u_{i+1,j} = u_{i+1,j}^* + d_{i+1,j}(p_{I,j} - p_{I+1,j}) \quad (5.3.26)$$

$$v_{I,j+1} = v_{I,j+1}^* + d_{I,j+1}(p_{I,j} - p_{I,j+1}) \quad (5.3.27)$$

式中

$$d_{i+1,j} = A_{i+1,j}/a_{i+1,j}, \quad d_{I,j+1} = A_{I,j+1}/a_{I,j+1} \quad (5.3.28)$$

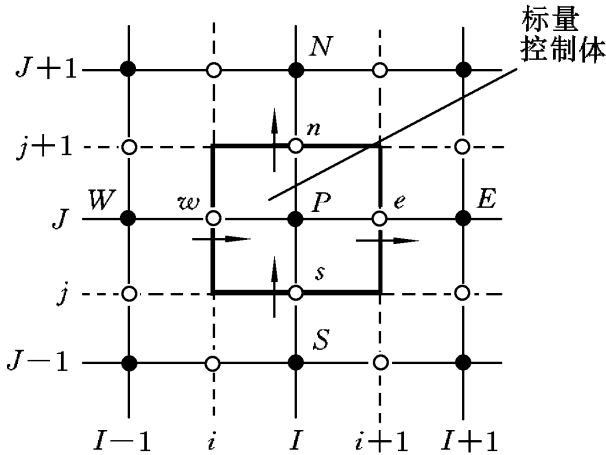


图 5.22 离散连续性方程用的
标量控制体

至此仅考虑了动量方程, 修正压强场 p 尚未求得。但是前面已指出, 速度场还有一个约束条件, 要满足连续性方程 (5.3.3)。如图 5.22 所示, 离散形式的连续性条件是

$$\begin{aligned} & [(\bar{u}A)_{i+1,j} - (\bar{u}A)_{i,j}] \\ & + [(\bar{v}A)_{I,j+1} - (\bar{v}A)_{I,j}] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

将修正过的速度 (式 (5.3.24) ~ 式 (5.3.27)) 代入连续性方程 (5.3.29), 给出

$$\begin{aligned} & [d_{i+1,j}A_{i+1,j}(u_{i+1,j}^* + d_{i+1,j}(p_{I,j} - p_{I+1,j})) \\ & - d_{i,j}A_{i,j}(u_{i,j}^* + d_{i,j}(p_{I-1,j} - p_{I,j}))] \\ & + [d_{I,j+1}A_{I,j+1}(v_{I,j+1}^* + d_{I,j+1}(p_{I,j} - p_{I,j+1})) \\ & - d_{I,j}A_{I,j}(v_{I,j}^* + d_{I,j}(p_{I,j-1} - p_{I,j}))] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

重写为

$$\begin{aligned} & [(dA)_{i+1,j} + (dA)_{i,j} + (dA)_{I,j+1} + (dA)_{I,j}]p_{I,j} \\ & = (dA)_{i+1,j}p_{I+1,j} + (dA)_{i,j}p_{I-1,j} + (dA)_{I,j+1}p_{I,j+1} + (dA)_{I,j}p_{I,j-1} \\ & + [(u^*A)_{i,j} - (u^*A)_{i+1,j} + (v^*A)_{I,j} - (v^*A)_{I,j+1}] \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

再简写为

$$a_{I,J} p_{I,J} = a_{I+1,J} p_{I+1,J} + a_{I-1,J} p_{I-1,J} + a_{I,J+1} p_{I,J+1} + a_{I,J-1} p_{I,J-1} + b_{I,J} \quad (5.3.32)$$

式中

$$\begin{aligned} a_{I,J} &= a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1}, \\ a_{I+1,J} &= (dA)_{I+1,J}, \quad a_{I-1,J} = (dA)_{I,J}, \\ a_{I,J+1} &= (dA)_{I,j+1}, \quad a_{I,J-1} = (dA)_{I,j}, \\ b_{I,J} &= (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{A})_{I,J} - (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{A})_{I+1,J} + (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{A})_{I,j} - (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{A})_{I,j+1} \end{aligned}$$

修正压强方程(5.3.32)表达了离散形式的连续性方程。不正确的速度场 \mathbf{u} 、 \mathbf{v} 使得连续性不能维持,方程中的源项 b 即代表了这一偏差。解方程(5.3.32)可以得到所有节点的修正压强 p 。一旦得到修正压强 p ,用式(5.3.14)可以得到正确的压强场,再用式(5.3.24)~式(5.3.27)就可以得到正确的速度场。在推导中略去 $a_{nb} \mathbf{u}_{nb}$ 和 $a_{nb} \mathbf{v}_{nb}$ 不影响最终结果(因为对于收敛的解,修正压强和修正速度等于零),这就可以给出 $p^* = p$, $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}$ 。

修正压强方程容易发散,除非在迭代过程中采用低松弛,也就是令新的修正过的压强

$$p^{new} = p^* + \rho_p p \quad (5.3.33)$$

式中, ρ_p 是压强的低松弛因子。如果选择 ρ_p 为1,那么是用 p 修正估计压强场 p^* 。然而对于稳定的计算,这一修正量往往太大,特别是在估计的压强远未达到最终结果时。选择 ρ_p 为0,则根本没有修正,这也是不可取的。修正量应该大到足以进行不断的修正,但又应足够小,以保证稳定的计算。所以低松弛因子 ρ_p 取在1和0之间。

速度也用低松弛。迭代过程中,新的速度分量 u^{new} 和 v^{new} 由下式得到:

$$u^{new} = \rho_u u + (1 - \rho_u) u^{n-1} \quad (5.3.34)$$

$$v^{new} = \rho_v v + (1 - \rho_v) v^{n-1} \quad (5.3.35)$$

式中, ρ_u 、 ρ_v 是 u 、 v 速度分量的低松弛因子,取值0到1。 u 、 v 是无松弛修正的速度分量, u^{n-1} 和 v^{n-1} 是上一次迭代得到的值。经过代数运算可得低松弛离散 u 动量方程:

$$\frac{a_{i,j}}{\rho_u} u_{i,j} = a_{nb} u_{nb} + (p_{I-1,J} - p_{I,J}) A_{i,j} + b_{i,j} + (1 - \rho_u) \frac{a_{i,j}}{\rho_u} u_{i,j}^{n-1} \quad (5.3.36)$$

离散 v -动量方程:

$$\frac{a_{I,j}}{\rho_v} v_{I,j} = a_{nb} v_{nb} + (p_{I,J-1} - p_{I,J}) A_{I,j} + b_{I,j} + (1 - \rho_v) \frac{a_{I,j}}{\rho_v} v_{I,j}^{n-1} \quad (5.3.37)$$

压强修正方程受速度低松弛影响, 压强修正方程的 d 项成为

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j} u}{a_{i,j}}, \quad d_{i+1,j} = \frac{A_{i+1,j} u}{a_{i+1,j}}, \quad d_{I,j} = \frac{A_{I,j} v}{a_{I,j}}, \quad d_{I,j+1} = \frac{A_{I,j+1} v}{a_{I,j+1}} \quad (5.3.38)$$

注意在这些公式中, $a_{i,j}$ 、 $a_{i+1,j}$ 、 $a_{I,j}$ 和 $a_{I,j+1}$ 是离散速度方程在围绕点 P 的标量单元中位于 (i, j) 、 $(i+1, j)$ 、 (I, j) 和 $(I, j+1)$ 等处的中心系数。

从根本上说, 正确选择低松弛因子 能有效降低成本。太大的 值导致振荡甚至迭代发散, 太小的 值引起收敛极慢。不过, 低松弛因子与流动有关, 必须根据具体情况确定。本书 5.4 节继续讨论低松弛应用。

四、SIMPLE 算法的改良型

有限体积法解速度压强计算问题的最常用算法具有以下共同特性:

- (1) 这些问题涉及非线性的动量方程, 与标量输运方程耦合, 采用迭代解方法计算压强场、速度场, 以及其他标量;
- (2) 在交错网格上定义速度, 避免压强的空间高频振荡带来的问题;
- (3) 采用交错网格排列时, 速度存放在以压强节点为中心的标量控制体的单元面上; 在错开的速度控制体上求解离散动量方程, 压强节点位于速度控制体的单元面上;
- (4) 所有算法要求低松弛迭代以保证迭代过程的稳定性。

SIMPLE 算法相对简单易用, 已经成功地用于许多 CFD 程序。SIMPLE 算法的其他改良型由于提高收敛性能而可节省计算量。在 SIMPLE 算法中, 用压强修正量 p 修正速度令人满意, 但修正压强不够好。

因此, 改良型之一的 SIMPLER (SIMPLE Revised) 算法 (Patankar, 1980) 只用 p 修正速度, 另解压强方程来得到压强场, 压强、速度分开算更加有效。既然在 SIMPLER 算法中推导离散压强方程不略去任何项, 那么, 算出的压强场与速度场便是一致的。SIMPLER 算法修正速度场产生正确的压强场, 这与 SIMPLE 算法不同。这种方法计算压强场非常有效, 解动量方程时, 这是重要的优点。

尽管 SIMPLER 算法的运算次数比 SIMPLE 算法的多 30%, 但有报告称, 由于收敛加快, 节省的计算时间达 30% ~ 50% (D. A. Anderson 等人, 1984)。因而, SIMPLER 算法在商业 CFD 软件中多作为默认算法。关于 SIMPLE 算法及其更多改良型的详细介绍见 Patankar (1980) 的论著。

已经证明, 在某些类型的流动中, SIMPLEC (SIMPLE Consistent) 算法 (J. P. Van Doormal 和 G. D. Raithby, 1984)、PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) 算法 (R. I. Issa, 1986) 和 SIMPLER 算法同样有效。但不能肯定说, 这两种方法比 SIMPLER 算法更好些。

经比较后表明,各种方法的特性都与流动条件有关,与动量方程和标量方程耦合的程度有关,例如,燃烧流的局部密度依赖于温度和浓度;各种方法的特性还与所用的低松弛量,甚至与解代数方程的数值技巧的细节有关。D. S. Jang 等人(1986)用一类定常流动问题全面比较了 SIMPLE、SIMPLER、SIMPLEC 和 PISO 算法,证明当动量方程和标量变量不耦合时, PISO 算法表现强收敛特性,比 SIMPLER、SIMPLEC 的计算量小;当标量变量与速度密切相关时, PISO 算法与其他算法相比,没有明显优点。

对于强耦合问题, SIMPLER 和 SIMPLEC 算法表现强收敛特性,但不能断言哪种方法更好。

5.4 非定常流动的有限体积法

一、非定常流动的标量输运方程

非定常流动标量输运方程的一般形式为

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S \quad (5.4.1)$$

其中,方程的第一项是变化率项,对定常流,这一项等于零。为预测瞬态问题,在离散过程中必须保留这一项。方程(5.4.1)在有限体积(CV)上的积分必须扩大到有限时间步(Δt)的积分。如前用面积分代替对流扩散项的体积分,交换变化率项的积分顺序,得到

$$\begin{aligned} & \int_{CV} \frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} dV + \int_t^{t+\Delta t} \int_A \rho \mathbf{u} \phi \cdot \mathbf{n} dA dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \int_A \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dA dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} S dV dt \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

至此尚未做任何近似,但为了继续进行积分,需要一些技巧。控制体积分本质上和定常流动是一样的,继续使用前面几节用过的保证对流、扩散和源项成功处理的措施。本节重点介绍时间项积分所需要的方法。下面用一维扩散(热传导)方程说明这一过程,然后再推广到多维非定常扩散和对流扩散问题。

二、一维非定常热传导

一维非定常热传导过程由下面的方程控制:

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S \quad (5.4.3)$$

这里除了通常的变量,增加了材料的比定容热容 c_v ($J/(kg \cdot K)$), 参见 5.1 节所用的控制体(见图 5.2)。方程(5.4.3)在控制体和时间间隔 Δt 上积分给出:

$$\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} c_v \frac{T}{t} dt dV = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \frac{k}{X} \frac{T}{X} dV dt + \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} S dV dt \quad (5.4.4)$$

一维空间积分可写为

$$\int_{w(t)}^{e(t+\Delta t)} c_v \frac{T}{t} dt dV = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} kA \frac{T}{X} \Big|_e - kA \frac{T}{X} \Big|_w dt + \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \bar{S} V dt \quad (5.4.5)$$

式中, A 是控制体断面的面积, V 是体积; 这里 $V = A X$, X 是控制体的长度。 \bar{S} 是控制体内源的平均强度。如果假定节点温度代表整个控制体的温度, 方程左边可写为

$$\int_{w(t)}^{e(t+\Delta t)} c_v \frac{T}{t} dt dV = c_v (T_P - T_P^0) V \quad (5.4.6)$$

式中, T^0 为时间 t 的温度, T 为时间 $t + \Delta t$ 的温度。直接用 $(T_P - T_P^0) / \Delta t$ 替代 $T / \Delta t$ 也可以得到同样的结果, 可以说 $T / \Delta t$ 已经用一阶后向差分格式离散。后面再讨论用高阶格式离散。如果再用中心差分离散式(5.4.5)右边的扩散项, 则有

$$c_v (T_P - T_P^0) V = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} k_e A \frac{T_E - T_P}{X_{PE}} - k_w A \frac{T_P - T_W}{X_{WP}} dt + \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \bar{S} V dt \quad (5.4.7)$$

为计算方程右边的积分, 需要关于 T_P 、 T_E 和 T_W 随时间变化的假定。可以只用 t 或 $t + \Delta t$ 的温度计算积分, 另外, 也可以结合 t 和 $t + \Delta t$ 的温度一起积分。应用推广加权参数法, 可将温度 T 对于时间的积分 I_T 写为

$$I_T = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} T dt = [\theta T + (1 - \theta) T^0] \Delta t \quad (5.4.8)$$

参数 θ 在 0 到 1 之间取不同值得到的积分如下。

- (1) $\theta = 0$ 时, $I_T = T^0 \Delta t$;
- (2) $\theta = \frac{1}{2}$ 时, $I_T = (T + T^0) \Delta t / 2$;
- (3) $\theta = 1$ 时, $I_T = T \Delta t$ 。

本节特别强调积分 I_T 的这几个值: $\theta = 0$ 时, 用旧时间层 t 的温度值; $\theta = 1$ 时, 用新时间层 $t + \Delta t$ 的温度值; $\theta = 1/2$ 时, 用 t 和 $t + \Delta t$ 的平均温度值。

方程(5.4.7)中的温度按式(5.4.8)积分, 并用 $A \Delta t$ 通除, 有

$$\begin{aligned} c_v \frac{T_P - T_P^0}{\Delta t} X = & \frac{k_e (T_E - T_P)}{X_{PE}} - \frac{k_w (T_P - T_W)}{X_{WP}} \\ & + (1 - \theta) \left[\frac{k_e (T_E^0 - T_P^0)}{X_{PE}} - \frac{k_w (T_P^0 - T_W^0)}{X_{WP}} \right] + \bar{S} X \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

整理得到

$$\begin{aligned} & c_v \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{k_e}{X_{PE}} + \frac{k_w}{X_{WP}} T_P \\ &= \frac{k_e}{X_{PE}} [T_E + (1 - \theta) T_E^0] + \frac{k_w}{X_{WP}} [T_W + (1 - \theta) T_W^0] \\ &+ c_v \frac{\Delta x}{\Delta t} - (1 - \theta) \frac{k_e}{X_{PE}} - (1 - \theta) \frac{k_w}{X_{WP}} T_P^0 + \bar{S} \Delta x \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

现在合并 T_P 、 T_E 和 T_W 的系数, 并把方程写成熟悉的标准形式:

$$\begin{aligned} a_P T_P &= a_W [T_W + (1 - \theta) T_W^0] + a_E [T_E + (1 - \theta) T_E^0] \\ &+ [a_P^0 - (1 - \theta) a_W - (1 - \theta) a_E] T_P^0 + b \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

式中, $a_P = (a_W + a_E) + a_P^0$, $a_P^0 = c_v \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 。

$$a_W = k_w / X_{WP}, \quad a_E = k_e / X_{PE}, \quad b = \bar{S} \Delta x$$

离散方程最后的准确形式取决于 θ 值。当 $\theta = 0$ 时, 方程(5.4.11) 只用旧时间层的温度 T_P^0 、 T_W^0 和 T_E^0 求新时间层的温度 T_P , 称为显式格式。当 $0 < \theta < 1$ 时, 方程两边都用到新时间层的温度, 称为隐式格式。极端的情形: $\theta = 1$ 时, 称为全隐式格式; $\theta = 1/2$ 时, 称为Crank-Nicolson 隐式格式。

1. 显式格式

显式格式的源项线性化为 $b = S_u + S_P T_P^0$ 。现在将 $\theta = 0$ 代入式(5.4.11), 给出非定常热传导输运方程的显式格式:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + [a_P^0 - (a_W + a_E - S_P)] T_P^0 + S_u \quad (5.4.12)$$

这里

$$a_P = a_P^0$$

方程(5.4.12)的右边只有旧时间步的值, 可以随时间向前推进求出方程的左边。这个格式基于对时间的后向差分, 它的泰勒级数截断误差是一阶精度。如前所述, 离散方程所有的系数都要求是正的。 T_P^0 的系数可以看成是把旧时间层的值联系到新时间层的相邻系数。这个系数为正要求, $a_P^0 - a_W - a_E > 0$ 。对常数 k 和均匀空间网格, $X_{PE} = X_{WP} = \Delta x$, 这个条件可以写做

$$c_v \frac{\Delta x}{\Delta t} > \frac{2k}{\Delta x}$$

$$\text{或} \quad \Delta t < c_v \frac{(\Delta x)^2}{2k} \quad (5.4.13)$$

这个不等式对时间步长最大值设置了严格限制。显式格式受到这样的限制, 所以提高空间精度的代价极高, 因为最大可能的时间步长必须随 Δx 的平方减小。一般不推荐将这种方法用于瞬态问题。精度更高的显式格式有 Richardson 和 Dufort-Frankel 方法, 这种方法用到两个以上时间层的温度, 比普通的显式格式受到的稳定性限制较少, 更多细节见 M. B. Abbot 和 B. R. Basco(1990), D. A.

Anderson 等人(1984)和 C. A. J. Fletcher(1991) 的论著。不过, 若时间步长已经确定, 上述显式格式对简单的传导问题很有效。

2. Crank-Nicolson 格式

方程(5.4.11)置 $\theta = 1/2$ 得到Crank-Nicolson 格式。现在离散的热传导方程是

$$a_P T_P = a_W \frac{T_W + T_W^0}{2} + a_E \frac{T_E + T_E^0}{2} + a_P^0 - \frac{a_W}{2} - \frac{a_E}{2} T_P^0 + b \tag{5.4.14}$$

这里 $b = S_u + \frac{1}{2} S_P T_P^0$ 。其中 $a_P = \frac{1}{2} (a_W + a_E) + a_P^0 - \frac{1}{2} S_P$ 。

因为方程(5.4.14)中T 的未知量不止一个, 所以这种方法为隐式的, 即在同一时间步同时求解所有节点的方程。 $\theta = 1/2$ 的格式, 包括Crank-Nicolson 格式对于任何时间步长都是无条件稳定的(Fletcher, 1991), 更重要的是, 保证系数为正以得到物理上真实有界的解。这就要求 T_P^0 的系数满足下列条件:

$$a_P^0 > \frac{a_E + a_W}{2} \quad \text{或} \quad t < c_v \frac{(\Delta x)^2}{k} \tag{5.4.15}$$

比起显式格式的苛刻限制式(5.4.13), 这个时间步只是稍微放宽一些。Crank-Nicolson 格式基于中心差分, 因此有时间二阶精度。时间步长足够小时, 比起显式格式, 其精度相当高。计算的整体精度还与空间差分有关, 所以Crank-Nicolson 格式一般与空间中心差分一起用。

3. 全隐式格式

当 $\theta = 1$ 时, 得到全隐式格式。离散方程是

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_P^0 T_P^0 + S_u \tag{5.4.16}$$

这里
$$a_P = a_W + a_E + a_P^0 - S_P \tag{5.4.17}$$

方程两边都有新时间步的温度, 每一时间层都要解一个代数方程组, 见例 5.4。时间推进程序从给定的初始温度场 T^0 开始, 选择时间步长 Δt 后解代数方程组(5.4.16), 然后将解得的 T 赋予 T^0 , 程序重复进行到下一个时间步。

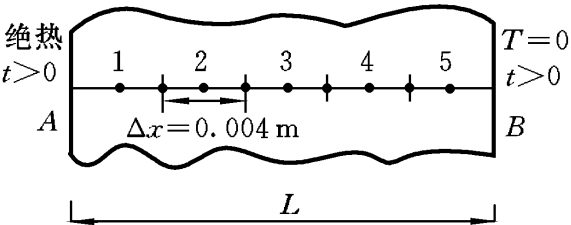
可以看到, 所有的系数都是正的, 这说明隐式格式对于任何大小的时间步长都是无条件稳定的。由于格式是一阶精度的, 时间步长必须足够小, 以保证结果的精度。这种隐式格式性能好、无条件稳定, 推荐用于一般的瞬态计算。

三、一维非定常热传导的数值解和分析解比较

现在举例比较一维非定常传导的数值结果和分析解, 说明显式格式和隐式格式的特性, 并估计方法的精度。

例 5.4 如图 5.23 所示, 一薄板的初始均匀温度为 200°C 。某一时刻 $t = 0$, 东边的温度突然减到 0°C , 另一表面绝热。用有限体积法和适当的时间步长计算板的瞬态温度分布, 并和分析解在时间 $t = 40\text{ s}$ 、 80 s 、 120 s 的结果比较, 再用式

(5.4.13) 给出的极限时间步长计算数值解，并和时间 $t=40\text{ s}$ 的分析解结果比较。已知数据：板厚度 $L=2\text{ cm}$ ，热导率 $k=10\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ 和 $c_v=10\times 10^6\text{ J/(m}^3\cdot\text{K)}$ 。



解 一维非定常热传导的方程：

$$c_v \frac{T}{t} = - \frac{k}{x} \frac{T}{x} \quad (5.4.18)$$

图 5.23 一维非定常热传导控制体

初始条件是 $t=0, T=200$ 。边界条件是 $t>0, x=0, -\frac{T}{t}=0$ 和 $t>0, x=L, T=0$ 。

M. N. Ozisik(1985) 给出的分析解是

$$\frac{T(x,t)}{200} = \frac{4}{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \exp(-\frac{2}{n}t) \cos(n x) \quad (5.4.19)$$

式中， $\frac{2}{n} = \frac{(2n-1)}{2L}$ ， $= k/(c_v)$ 。

按域宽 L 分为五个相等的控制体，用显式法求数值解。

用一维网格显式法求解，控制方程(5.4.18)在内部控制体的离散形式由式(5.4.12)给出。控制体 1、5 连着边界，需切断边界方向的联系，将边界通量加到源项。控制体 1 的西边界绝热，因此越过边界的通量是零。修改方程(5.4.9)，使它的物理意义更清楚。节点 1 的离散方程成为

$$c_v \frac{T_P - T_P^0}{t} x = \frac{k}{x} (T_E^0 - T_P^0) - 0 \quad (5.4.20)$$

当时间 $t>0$ ，控制体 5 的东边界温度是常数，记为 T_B 。节点 5 的离散方程成为

$$c_v \frac{T_P - T_P^0}{t} x = \frac{k}{x/2} (T_B - T_P^0) - \frac{k}{x} (T_P^0 - T_W^0) \quad (5.4.21)$$

所有离散方程写为标准形式

$$a_P T_P = a_W T_W^0 + a_E T_E^0 + [a_P^0 - (a_W + a_E)] T_P^0 + S_u \quad (5.4.22)$$

式中， $a_P = a_P^0 = c_v x/t$ ，其他的节点系数列于表 5.16。

表 5.16 节点系数和源系数(显式法)

节点	a_W	a_E	S_p	S_u
1	0	k/x	0	0
2, 3, 4	k/x	k/x	0	0
5	k/x	0	$-2k/x$	$2T_B k/x$

显式法的时间步长必须服从以下条件：

$$t < \frac{c_v(\frac{x}{2})^2}{2k} = \frac{10 \times 10^6 \times (0.004)^2}{2 \times 10} = 8 \text{ s}$$

这里选 $t = 2 \text{ s}$ 。代入数值得各节点的离散方程如下。

- (1) 节点 1: $200T_P = 25T_E^0 + 175T_P^0$
- (2) 节点 2, 3, 4: $200T_P = 25T_W^0 + 25T_E^0 + 150T_P^0$
- (3) 节点 5: $200T_P = 25T_W^0 + 125T_P^0$

开始所有节点的温度等于 200，每个时间步用方程(5.4.22)求解。尽管计算不复杂,但是计算量很大,需要计算机程序。图5.24 给出了 40 s、80 s、120 s 的数值解(符号)和分析解(线)结果,误差分析表明两者符合相当好。

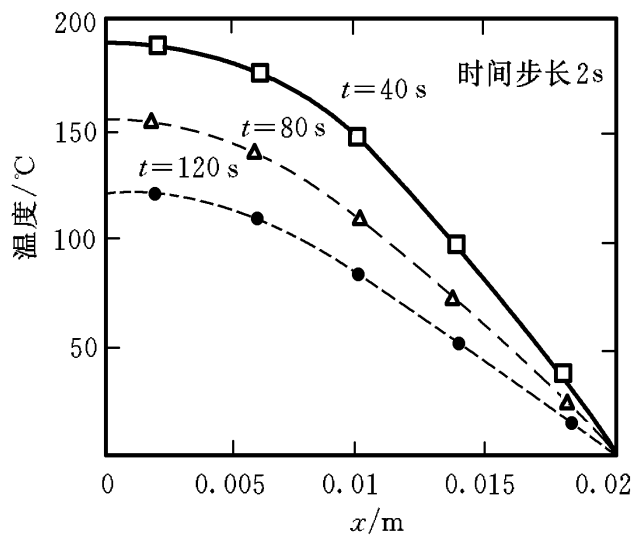


图 5.24 数值解和分析解比较之一

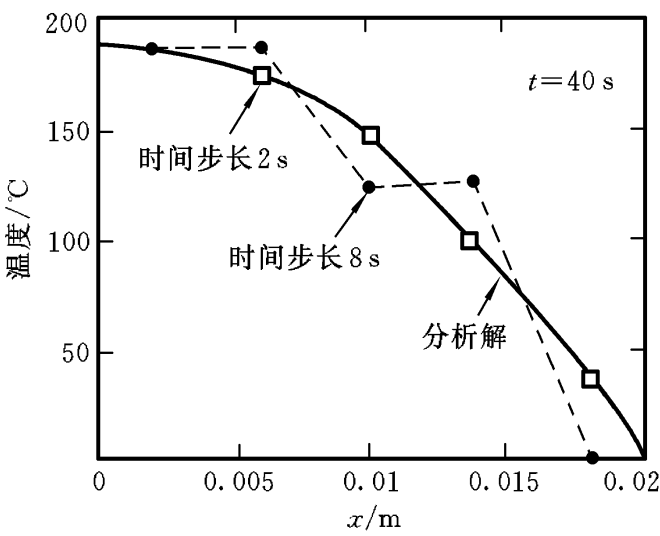


图 5.25 数值解和分析解比较之二

图 5.25 是时间步长 Δt 为 2 s 和 8 s,在时间 $t = 40 \text{ s}$ 的解。同时显示数值结果和分析解作比较。可以看到时间步长等于极限值 8 s 的数值解精度极差,发生了不真实的振荡。

例 5.5 用全隐式法解例 5.4 的问题以作比较。

解 仍用图5.23 的网格。全隐式法用离散方程(5.4.16)描述发生在内控制体 2、3 和 4 的事件。边界控制体 1、5 仍需要特别处理。引入边界点方程(5.4.9),在节点 1 为

$$c_v \frac{T_P - T_P^0}{t} X = \frac{k}{X} (T_E - T_P) - 0 \tag{5.4.23}$$

在节点 5, 离散方程为

$$c_v \frac{T_P - T_P^0}{t} X = \frac{k}{X/2} (T_B - T_P) - \frac{k}{X} (T_P - T_W) \tag{5.4.24}$$

标准形式的离散方程为

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_P^0 T_P^0 + S_u \tag{5.4.25}$$

式中, $a_P = a_W + a_E + a_P^0 - S_P, a_P^0 = c_v X / t$, 其他参数列于表 5.17。

表 5. 17 邻点系数和源系数(全隐式法)

节点	a_w	a_E	S_p	S_u
1	0	$k/\ x$	0	0
2, 3, 4	$k/\ x$	$k/\ x$	0	0
5	$k/\ x$	0	$- 2k/\ x$	$2T_Bk/\ x$

尽管隐式法的时间步长 Δt 不受约束, 还是用适当小的时间步长 Δt 以保证精度。网格大小和其他数据同前, 又得各节点的离散方程:

- (1) 对于节点 1, $225T_P = 25T_E + 200T_P^0$;
- (2) 对于节点 2, 3, 4, $250T_P = 25T_W + 25T_E + 200T_P^0$;
- (3) 对于节点 5, $275T_P = 25T_W + 200T_P^0 + 50T_B$ 。

需注意, $T_B = 0$ 。在每个时间步, 解方程组。

225

- 25

0

0

0

T_1

$200T_1^0$

- 25

250

- 25

0

0

T_2

$200T_2^0$

0

- 25

250

- 25

0

T_3

$200T_3^0$

0

0

- 25

250

- 25

T_4

$200T_4^0$

0

0

0

- 25

275

T_5

$200T_5^0$

$=$

$(5.4.26)$

由矩阵形式显见, 每个节点方程都含有未知的邻点温度。显式法用单个方程直接求每个节点新的温度, 但是全隐式法要求在每个时间层解方程组(5. 4. 26), 代价较大。用前一时间层的温度值计算方程右边的量。图 5. 26 表明数值解(符号)和分析解(线)符合得很好。

图 5. 26 数值解和分析解比较之三

图 5. 27 数值解和分析解比较之四

图 5. 27 给出了用显式法和隐式法在 $t= 40\text{ s}$, $t= 8\text{ s}$ 求的数值解及分析解。显式法用这个时间步长给出了不真实的振荡解, 比较隐式法给出的数值解和分

析解,二者有相当好的一致。这清楚地表明了隐式法的重要优点,即容许更大的时间步长。然而,只有小的时间步长才能得到高精度的解。

四、二维和三维问题的隐式法

全隐式法有超稳定性,被推荐用于一般的CFD计算。下面引入全隐式法在二维和三维计算中的推广。三维瞬时扩散的控制方程为

$$c_v \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial}{\partial z} + S \tag{5.4.27}$$

三维控制体的离散方程为

$$a_P P = a_W W + a_E E + a_S S + a_N N + a_B B + a_T T + a_P^0 P^0 + S_u \tag{5.4.28}$$

式中, $a_P^0 = c_v V / \Delta t$; 其中

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + a_P^0 - S_p \tag{5.4.29}$$

线性源是 $S = S_u + S_p P$ 。有关邻点系数列于表 5. 18。

表 5. 18 邻点系数

	a_W	a_E	a_S	a_N	a_B	a_T
一维	$wA_w / \Delta x_{WP}$	$eA_e / \Delta x_{PE}$	0	0	0	0
二维	$wA_w / \Delta x_{WP}$	$eA_e / \Delta x_{PE}$	$sA_s / \Delta y_{SP}$	$nA_n / \Delta y_{PN}$	0	0
三维	$wA_w / \Delta x_{WP}$	$eA_e / \Delta x_{PE}$	$sA_s / \Delta y_{SP}$	$nA_n / \Delta y_{PN}$	$bA_b / \Delta z_{BP}$	$tA_t / \Delta z_{PT}$

三种情况的控制体体积和单元面面积列于表 5. 19。

表 5. 19 控制体体积和单元面面积

体积和面积	一维	二维	三维
V	Δx	$\Delta x \Delta y$	$\Delta x \Delta y \Delta z$
$A_w = A_e$	1	Δy	$\Delta y \Delta z$
$A_n = A_s$	—	Δx	$\Delta x \Delta z$
$A_b = A_t$	—	—	$\Delta x \Delta y$

五、瞬态对流扩散方程的离散

上面介绍的多维扩散问题是以全隐式离散方法为基础。易于得到瞬态对流扩散方程的离散方程。由于时间离散而出现的项有： a_P^0 对中心系数 a_P 的贡献； $a_P^0 P^0$ 作为附加源项对方程右边的贡献。其他系数和定常态问题离散方程中的一样,没有改变。流体量 ρ 的非定常输运方程为

$$\begin{aligned} & \frac{(\quad)}{t} + \frac{(\quad u)}{x} + \frac{(\quad v)}{y} + \frac{(\quad w)}{z} \\ & = \frac{\quad}{x} \frac{\quad}{x} + \frac{\quad}{y} \frac{\quad}{y} + \frac{\quad}{z} \frac{\quad}{z} + S \end{aligned} \tag{5.4.30}$$

全隐式离散方程为

$$a_P P = a_W W + a_E E + a_S S + a_N N + a_B B + a_T T + a_P^0 P + S_u \tag{5.4.31}$$

式中

$$\begin{aligned} a_P &= a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + a_P^0 + F - S_p \\ a_P^0 &= c_v V / \Delta t, \quad \bar{S} V = S_u + S_{p-P} \end{aligned}$$

对于混合差分格式, 这个方程的邻点系数和 F 就是表 5.11 所列对流扩散问题的邻点系数和 F 。各表达式中的 F 与 D 的计算式见表 5.12。

三维情况中的体积和单元面的面积数据同上一节。对于其他格式, 例如迎风格式或 QUICK 格式, 可以用适当的系数表达式代入方程(5.4.31)中得到。

六、瞬态对流扩散的 QUICK 差分格式举例

例5.6 考虑图5.23 的一维域对流扩散。计算瞬态温度场, 初始温度处处为零, 边界条件是: $\theta = 0$, 在 $x = 0$; $\partial \theta / \partial x = 0$, 在 $x = L$ 。已知: $L = 1.5 \text{ m}$, $u = 2 \text{ m/s}$, $\rho = 0.03 \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ 和 $\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$ 。 $t > 0$ 时, 定义源分布如图 5.28 所示, $a = -7$, $b = 3.5$, $x_1 = 0.6 \text{ m}$, $x_2 = 0.2 \text{ m}$ 。编程计算瞬态温度分布直到逼近定常态。时间积分用隐式法, 对流扩散项用 QUICK 格式的 Hayase 改良型。与定常态分析解比较结果。设 $c_v = 1$, 且 ρ 、 S 已用 c_v 除过。

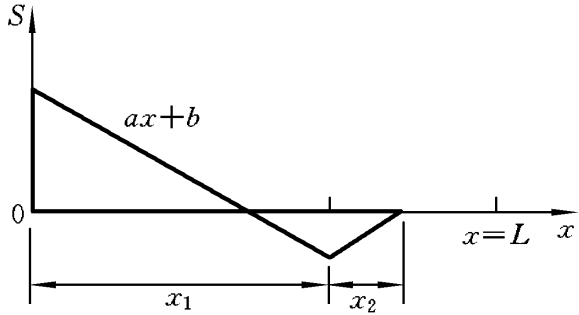


图 5.28 一维对流扩散的源分布

解 流体量 的有分布源瞬态对流扩散方程:

$$\frac{(\quad)}{t} + \frac{(\quad u)}{x} = \frac{\quad}{x} \frac{\quad}{x} + S \tag{5.4.32}$$

用 45 点网格划分计算域编程计算。时间积分用隐式法, 对流扩散项用 QUICK 格式的 Hayase 改良型较方便, 因为它给出三对角方程系统, 能用 TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) 迭代解。

已知 $u = 2 \text{ m/s}$, 单元宽 $\Delta x = 0.0333 \text{ m}$, 设 $A = 1$, 所以处处有 $F = u = 2.0$, $D = F / \Delta x = 0.9$ 。 Hayase 方法在单元面给出 的公式(见式(5.2.48)):

$$w = w + \frac{1}{8}(3 P - 2 W - w_w) \tag{5.4.33}$$

$$e = P + \frac{1}{8}(3 E - 2 P - w) \tag{5.4.34}$$

在一般节点的隐式离散方程:

$$\begin{aligned} &\frac{(P - P^0_P) X}{t} + F_e P + \frac{1}{8}(3 E - 2 P - W) \\ &- F_w W + \frac{1}{8}(3 P - 2 W - WW) \\ &= D_e(E - P) - D_w(P - W) + \bar{S} X \end{aligned} \tag{5.4.35}$$

按图 5. 28 给出的源分布计算 S 在各单元积分的贡献 \bar{S}_X , \bar{S} 是各单元上源分布的平均值。第一个和最后一个节点要特别处理。在控制体 1, 用镜像节点法在边界 $X = 0$ 以外产生西(W)节点。因为在这个边界 $A = 0$, 镜像节点的线性插值为

$$0 = - P \tag{5.4.36}$$

边界扩散通量为

$$-\left.\frac{\partial C}{\partial X}\right|_A = \frac{1}{3}D_A(9 P - 8 A - E) \tag{5.4.37}$$

节点 1 的离散方程可写为

$$\begin{aligned} &\frac{(P - P^0_P) X}{t} + F_e P + \frac{1}{8}(3 E - P) - F_A A \\ &= D_e(E - P) - \frac{1}{3}D_A(9 P - 8 A - E) + \bar{S} X \end{aligned} \tag{5.4.38}$$

最后一个控制体有零梯度边界条件, 所以经过边界B 的扩散通量等于零, 边界值等于上游值, 即 $B = P$ 。控制体 45 的离散方程成为

$$\begin{aligned} &\frac{(P - P^0_P) X}{t} + F_B P - F_w W + \frac{1}{8}(3 P - 2 W - WW) \\ &= 0 - D_w(P - W) + \bar{S} X \end{aligned} \tag{5.4.39}$$

现在将这些离散方程(5.4.35)、(5.4.38)和(5.4.39)写为标准形式:

$$a_P P = a_W W + a_E E + a_P^0 P + S_u \tag{5.4.40}$$

式中, 系数 $a_P = a_W + a_E + a_P^0 + (F_e - F_w) - S_p$, $a_P^0 = X/t$, 其他系数列于表 5. 20。

表 5. 20 邻点系数和源系数($u = 2 \text{ m/s}$)

节点	a_w	a_E	S_p	S_u
1	0	$D_e + D_A/3 - (8D_A/3 + F_A)$	$8(D_A/3 + F_A)$	$A + F_e(P - 3E)/8 + \bar{S} X$
2	$D_w + F_w$	D_e	0	$F_w(3P - W)/8 + F_e(W + 2P - 3E)/8 + \bar{S} X$
3, 4, ..., 44	$D_w + F_w$	D_e	0	$F_w(3P - 2W - WW)/8 + F_e(W + 2P - 3E)/8 + \bar{S} X$
45	$D_w + F_w$	0	0	$F_w(3P - 2W - WW)/8 + \bar{S} X$

控制体2 的离散方程有特别表达式, 因为经过控制体2 的 w 单元面的对流通量必须和经过控制体 1 的 e 单元面对流通量一致。

选时间步长 $t= 0.01\text{ s}$, 这个值位于显式格式的稳定性限制范围内, 因此可以期待隐式格式给出合理的精度和稳定的结果。在任意时间层代入以上数据, 得到的系数列于表 5. 21。

表 5. 21 节点系数和源系数($u= 2\text{ m/s}$)

节点	a_w	a_E	a_P^0	总源	S_p	a_P
1	0	1. 2	3. 33	$4. 44_A + 0. 25(P_- - 3 E) + 3. 33_P^0 + \bar{S}_X$	- 4. 4	8. 93
2	2. 9	0. 9	3. 33	$0. 025(3 P_- - 3 E) + 3. 33_P^0 + \bar{S}_X$	0	7. 13
3, 4, ..., 44	2. 9	0. 9	3. 33	$0. 25(3 P_- - w_- - ww - 3 E) + 3. 33_P^0 + \bar{S}_X$	0	7. 13
45	2. 9	0	3. 33	$0. 25(3 P_- - 2 w_- - ww) + 3. 33_P^0 + \bar{S}_X$	0	6. 23

所有节点由初值 $P^0 = 0$ 开始迭代求解, 直至得到收敛解 P , 然后将当时的 P 值赋予 P^0 进行下一步求解。检查新时间层的 P 和旧时间层的 P^0 的差以判断是否达到定常态。当差值低于某一预定的小量, 比如说 10^{-9} , 就认为解已达到定常态。

分析解是方程 (5. 4. 32) 的时间导数等于零时求出的定常态解。图 5. 29 比较分析解和数值定常态解, 可以看到, 用 QUICK 格式和细网格做空间离散, 两者几乎一致。

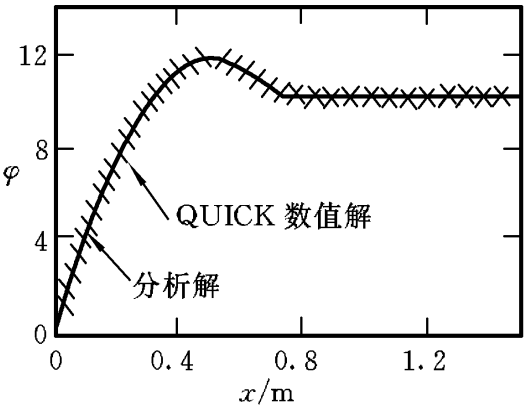


图 5. 29 数值解和分析解比较

七、非定常流动计算的 SIMPLE 解法

前一节描述的定常流动计算的格式, 如 SIMPLE, 可以扩展到瞬态计算。离散动量方程现在将包括瞬态项, 压强修正方程中也要有附加项。瞬态二维流的连续性方程为

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial (uA)}{\partial x} + \frac{\partial (vA)}{\partial y} = 0$$

(5. 4. 41)

二维标量控制体的积分形式为

$$\frac{\partial P}{\partial t} V + [(uA)_e - (uA)_w] + [(vA)_n - (vA)_s] = 0$$

(5. 4. 42)

压强修正方程从连续性方程导出,因而会包含表示它瞬态特性的项。例如,二维瞬态流与压强修正方程(5.3.32)等价的形式为

$$a_{i,j} p_{i,j} = a_{i+1,j} p_{i+1,j} + a_{i-1,j} p_{i-1,j} + a_{i,j+1} p_{i,j+1} + a_{i,j-1} p_{i,j-1} + b_{i,j} \quad (5.4.43)$$

其中

$$b_{i,j} = (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{A})_{i,j} - (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{A})_{i+1,j} + (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{A})_{i,j} - (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{A})_{i,j+1} + (\mathbf{p}^0 - p) \mathbf{V} / \Delta t$$

右边最后一项是额外的非定常源项。节点系数为

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1} \\ a_{i+1,j} &= (\mathbf{dA})_{i+1,j}, \quad a_{i-1,j} = (\mathbf{dA})_{i,j}, \\ a_{i,j+1} &= (\mathbf{dA})_{i,j+1}, \quad a_{i,j-1} = (\mathbf{dA})_{i,j} \end{aligned}$$

扩展到三维流同样会出现额外的源项。

在瞬态流中,利用 SIMPLE、SIMPLER 或 SIMPLEC 进行定常态计算的隐式公式,在每一时间步迭代直到收敛。瞬态流 PISO 算法是一种用到算子分裂技术的非迭代瞬态计算方法(Issa, 1986)。其他可用的瞬态流动计算方法还有 MAC(F. H. Harlow 和 J. E. Welch, 1965), SMAC(A. A. Amsden 和 F. H. Harlow, 1970), ICE (Harlow 和 Amsden, 1971) 和 ICED-ALE(Hirt 等, 1974)。这一类方法的核心是直接解压强泊松方程,整个计算过程根本不同于这里说明的方法,有兴趣的读者可参考其他著作。著名的发动机预测软件 KIVA- 中, ICED-ALE 法是其核心计算程序。已证实该方法能可靠地预测实际的内燃机流动,已广泛用于内燃机研究(见 Amsden 等人, 1989; M. Zellat 等人, 1990; C. A. Blunsdon 等人, 1993)。

八、定常态计算的拟瞬态法

在5.3节提到必须用低松弛法,使定常态问题求解的迭代过程稳定。二维离散 u 动量方程的低松弛形式:

$$\frac{a_{i,j}}{u} u_{i,j} = a_{nb} u_{nb} + (p_{i-1,j} - p_{i,j}) A_{i,j} + b_{i,j} + (1 - \alpha_u) \frac{a_{i,j}}{u} u_{i,j}^{n-1} \quad (5.4.44)$$

瞬态二维离散 u 动量方程

$$a_{i,j} + \frac{\mathbf{p}^0_{i,j} \mathbf{V}}{t} u_{i,j} = a_{nb} u_{nb} + (p_{i-1,j} - p_{i,j}) A_{i,j} + b_{i,j} + \frac{\mathbf{p}^0_{i,j} \mathbf{V}}{t} u_{i,j}^0 \quad (5.4.45)$$

方程(5.4.44)中的角标 $n-1$ 指前一次迭代,而方程(5.4.45)中的角标 0 代表前一时间步。比较解定常问题的低松弛计算的式(5.4.44)和瞬态计算的式(5.4.45),得到以下等式:

$$(1 - \alpha_u) \frac{a_{i,j}^0}{u} = \frac{a_{i,j}^0}{t} V \tag{5.4.46}$$

此式表明, 从给定的初始场出发达到定常解的低松弛计算的结果, 可以通过从同一个初始场出发利用拟瞬态计算来得到, 只要时间步长满足式(5. 4. 46)。反之, 定常解可以看成是在空间上变时间步长的拟瞬态法。

当控制方程出现稳定性问题时, 拟瞬态法就可发挥作用, 例如在浮力流, 强涡流和有激波的可压缩流的情形。

本节建立了非定常扩散和对流-扩散方程解瞬态流动问题的方法。对于计算新时间层的流体量 ρ , 不同的时间推进算法的区别如下。

- (1) 显式格式: 只用前一个时间层的 ρ 值, 一阶精度, 稳定性条件是 $\Delta t < (\Delta x)^2 / (2 \alpha_u)$;
- (2) Crank-Nicolson 格式: 联合使用前一个时间层的 ρ 值和新时间层的值, 二阶精度, 稳定性条件是 $\Delta t < (\Delta x)^2 / \alpha_u$;
- (3) 隐式格式: 主要用新时间层上邻近点的 ρ 值, 一阶精度, 无条件稳定。

推荐用功能较强的隐式格式, 实现一般的 CFD 计算。隐式格式和 Crank-Nicolson 的无条件稳定的代价是在每一个时间层都要解方程组, 二维和三维计算要有较多的迭代次数。

扩散和对流-扩散的全隐式瞬态离散方程与定常问题中心差分相比, a_P 和源项 b_P 实际上的差别只有

$$a_P^{(t)} = a_P^{(s)} + a_P^0, \quad b_P^{(t)} = b_P^{(s)} + a_P^0 \rho_P^0$$

式中, $a_P^0 = \rho_P^0 V / \Delta t$, 上角标 t 表示瞬态, 上角标 s 表示定常态。除了对动量方程的修正, 在 SIMPLE 中的压强修正方程也要在源项 b_P 上加上 $(\rho_P^0 - \rho_P) V / \Delta t$ 。SIMPLE 的时间推进方法产生主迭代循环外的额外循环。

必须重视低松弛迭代解和伪瞬态解之间的相似性, 伪瞬态方法普遍用于解决复杂流动中出现的稳定性问题。

5.5 确定边界条件

所有 CFD 问题都要确定初始条件和边界条件。对于 CFD 用户, 重要的是正确规定这些条件, 理解它们在数值算法中的作用。瞬态问题中, 需要规定所有流动变量在流动域内各个求解点上的初值。初始化是在 CFD 软件中定义适当的数据组, 并无特别措施, 因此不再深入讨论这个问题。这一节描述有限体积法离散方程中最一般的边界条件: 入口; 出口; 壁面; 规定压强; 对称性; 周期性(循环)。

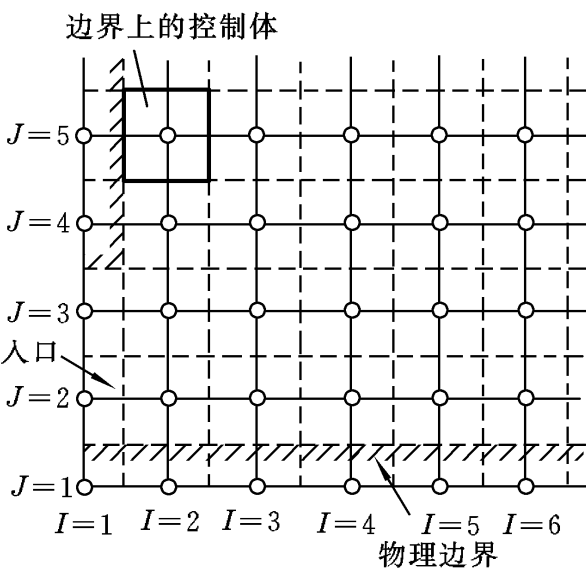


图 5.30 边界网格结构

在交错网格结构中, 围绕物理边界布置额外的节点, 如图 5.30 所示。计算只在内节点上进行(从 $I=2$ 和 $J=2$ 开始)。交错网格值得注意的两个特点是: 物理边界和标量控制体的边界重合; 正在区域入口外的节点(图 5.30 沿 $I=1$)可用于存放入口条件。这样, 近边界内点的离散方程只需稍做修正, 就可引入边界条件。

在 5.4 节、5.5 节已看到, 引入边界条件就是阻断边界侧的联系和修改源项。在离散方程中, 将相应的系数置为零, 通过源项 S_u 和 S_p 引入边界一侧通量的精确值或线性近似值。

下面将经常利用这一做法规定一个变量在单元面的通量。但是还需要设法处理在节点设定变量值的情况。在相应离散方程中引入特别的源项可以做到这一点。例如, 为了置变量在节点 P 的值为 fix 。如下修改离散方程的源项:

$$S_p = -10^{30}, \quad S_u = 10^{30} fix \tag{5.5.1}$$

这样的源项加到离散方程中, 有

$$(a_p + 10^{30}) p = a_{nb} n_b + 10^{30} fix \tag{5.5.2}$$

数字 10^{30} 的实际大小是任意的, 只要与原始离散方程中所有的系数相比都为极大数就行。其他项都可以忽略, 离散方程有效表达的是

$$p = fix \tag{5.5.3}$$

变量在节点 P 的值固定为 fix 。

除了设置内点变量值, 这个方法还用于处理域内固体障碍: 在固体区域内的节点取 $fix = 0$ (或任何其他指定值)。离散流动系统可以正常求解而不需要分开处理障碍区域。

下面说明设定一般的边界条件的详细做法。有以下假定: 流动是亚声速的 ($M < 1$); 用 k - 湍流模型; 用混合差分法离散; 应用 SIMPLE 算法求解。

一、入口边界条件

在入口边界要规定所有流体量的分布。这里讨论垂直于 x 方向的入口边界。图 5.31、5.32、5.33、5.34 显示了 u 动量、 v 动量、压强修正和标量的控制体单元在入口附近的网格。方框标出求解离散方程的第一个单元, 假定流动方向在图中是由左到右扩展的。

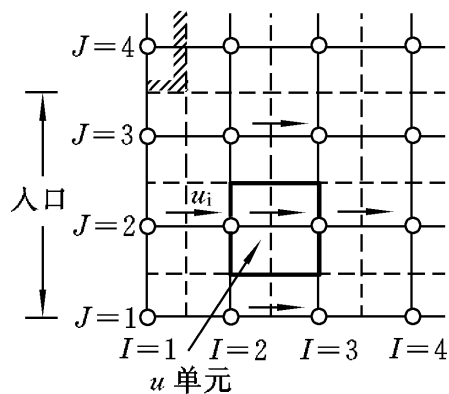


图 5.31 入口边界的 u-速度分量

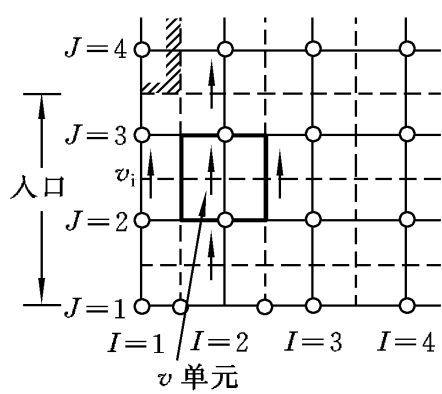


图 5.32 入口边界的 v-速度分量

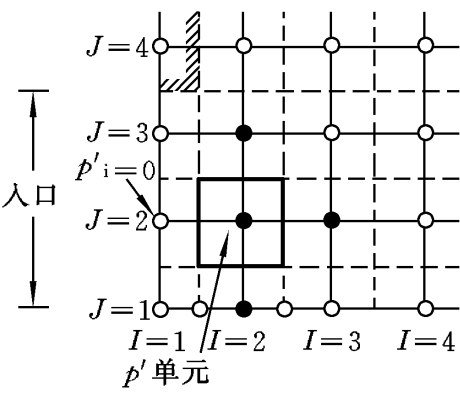


图 5.33 入口边界的压强修正单元

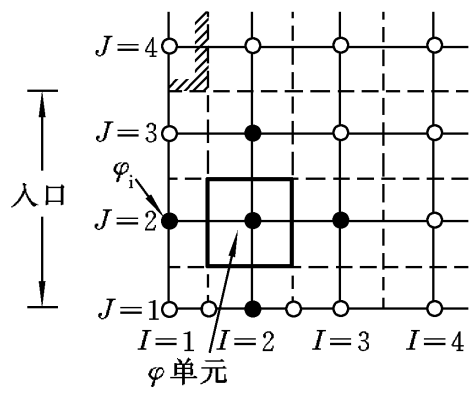


图 5.34 入口边界的 单元

前面说过, 网格要扩展到物理边界以外, 沿 $I = 1$ (对于 u 动量单元, 是 $i = 2$) 的节点用于存放流体量入口值 u_i 、 v_i 、 ρ_i 和 p_i 。在这个外节点的正下游, 开始解第一个内单元的离散方程。速度控制体用向后交错网格, 中心节点在虚线交叉处。 i 、 j 序号未在图 5.31 ~ 5.34 中标出。

图 5.31 ~ 5.34 标出了在该单元离散方程中出现的邻点和单元面。对于混合差分法, 图 5.31 和图 5.32 用箭头标出了有关速度的邻点, 图 5.33 用实心点标出了有关压强的单元面。由图可知, 第一个 u 、 v 和 ρ 单元的所有邻点在方程中保持联系, 直接用到这些邻点的入口边界条件, 因此离散方程不需做任何修改。图 5.33 表明压强修正方程需要截断与边界侧的联系, 置系数 a_w 为零。既然入口速度已知, 不需要做速度修正, 压强修正方程(5.3.32)的源项取

$$u_w^* = u_w \tag{5.5.4}$$

解压强修正方程不能得到绝对压强。一般做法是在一个入口节点上规定绝对压强, 并在这一点置压强修正量为零。规定了参考值后可以得到域内绝对压强场。

在入口边界还需要估计 k 和 ϵ 。只有提供湍流动能 k 和耗散率 ϵ 的测量值才能得到最准确的模拟。然而, 如果是进行外形设计, 往往不能得到这样的数据。这种情况下的做法是, 应用 3.5 节基于湍流强度的近似公式和长度尺度估计 k 和 ϵ , 湍流强度的典型值在 $(1 \sim 6)\%$ 之间。

上述方法不限于垂直于 x 方向的入口边界。当入口边界垂直于 y 方向时, 可以在 $j = 2$ 取 v_i 为速度分量 v 的入口值, 计算从 $j = 3$ 开始; 其余变量的入口值存在 $J = 1$, 计算从 $J = 2$ 开始。除此以外的处理同上。

二、出口边界条件

出口边界条件可以结合入口边界条件使用。当边界位置远离形状干扰, 流动一般达到充分发展状态, 在流动方向不再变化。可以在这样的区域设出口面, 并且让所有变量(除了压强)在流动方向的梯度都等于零。通常可以在远离障碍的地方相当准确地预测流动的方向, 这就可以使出口面垂直于流动方向, 并且取出口面法向的梯度等于零。图 5. 35、5. 36、5. 37、5. 38 显示了靠近这样一个出口边界的网格。图上方框标出了在出口上游的离散方程求解的最后一个单元, 并标出了方程涉及的邻点和单元面。

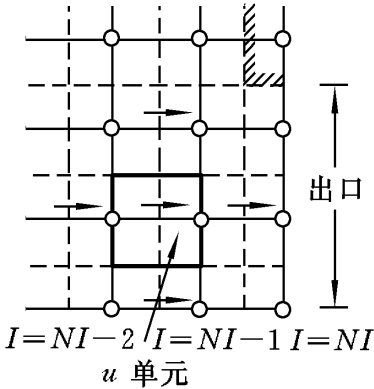


图 5. 35 出口边界 u 控制体

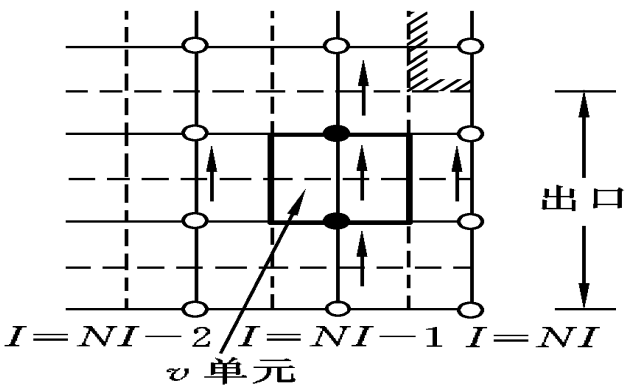


图 5. 36 出口边界 v 控制体

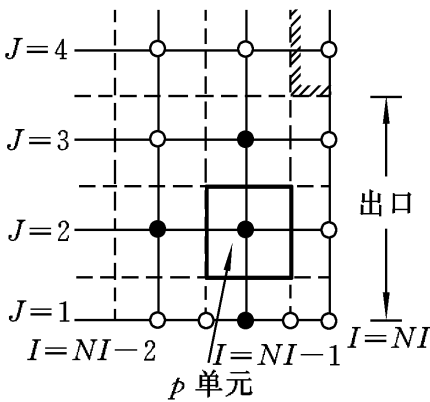


图 5. 37 出口边界 p 单元

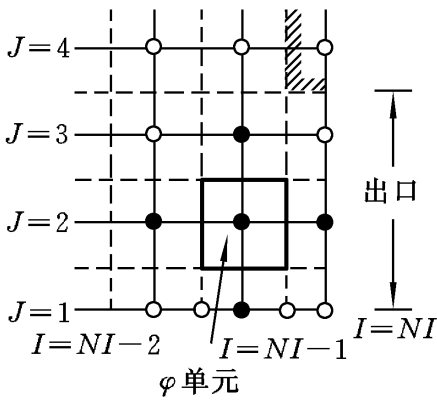


图 5. 38 出口边界 ϕ 单元

如果 NI 是 x 方向的节点总数目, 求解单元的方程直到 I (或 i) = $NI - 1$ 。在求解之前, 刚好在域外的下一个节点(NI)的流动变量的值由内点插值确定, 这要用到出口平面零梯度假定。对于 v 和 ϕ 方程, 这意味着置 $v_{NI,j} = v_{NI-1,j}$ 和 $\phi_{NI,j} = \phi_{NI-1,j}$ 。图 5. 36 和图 5. 38 表明这些变量出现在方程中, 可以按常规解离散方程。
 u 速度情形要特别小心。在出口平面, $i = NI$ 。假定零梯度给出

$$u_{NI,j} = u_{NI-1,j} \quad (5.5.5)$$

在SIMPLE 算法的迭代循环中,不能保证这些速度保持总体质量守恒。为保证满足整体连续性,首先对所有出口速度式(5.5.5)求和,计算流出域外的总质量通量 M_o 。为使 M_o 等于流入域内的总质量通量 M_i ,必须将所有出口速度分量都要乘上比值 M_i/M_o 。于是,出口平面的速度经过连续性修正后变为

$$u_{NI,j} = u_{NI-1,j} \times M_i/M_o \quad (5.5.6)$$

这些值随后在 $u_{NI-1,j}$ 的离散动量方程中用作东邻点速度。

出口边界的速度不需要用压强修正。因此,在 p 离散方程(5.3.32)中置 $a_E = 0$,截断出口边界侧的联系。同前增加对方程中源项的贡献。注意 $u_E^* = u_E$,不需要另外的修正。

三、壁面边界条件

壁面是受限流体流动问题中最常见的边界。本节考虑平行于 x 方向的固体壁面。图5.39~5.41 分别对 u -速度分量(平行于壁面)、 v -速度分量(垂直于壁面)和标量变量说明了近壁区的网格特征。

无滑移条件($u = v = 0$)是速度分量在固体壁面的合适条件。在边界($j = 2$),可以简单地将速度的法向分量置零;在流体内的下一个 v 单元($j = 3$),可以求解离散动量方程而无需修正。

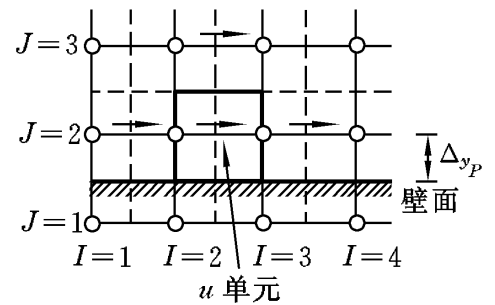
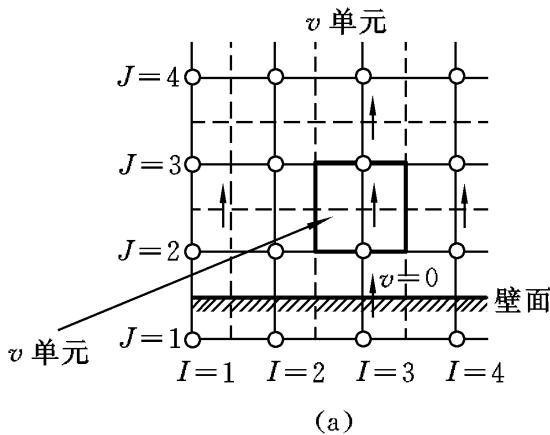
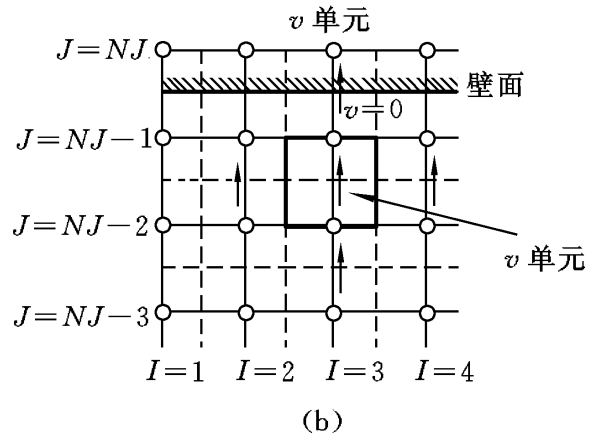


图 5.39 壁面边界的 u -速度分量



(a)



(b)

图 5.40 壁面边界 v 单元

既然壁面速度已知,这里就不需要进行压强修正。所有这些变量保持联系,可以按常规解离散方程。在所有最靠近壁面的单元的 p 离散方程(5.3.32)中置 $a_s = 0$,截断壁面侧(S)联系,且它的源项取 $v_s^* = v_s$ 。

所有其他变量则需要构造特别的源,源的准确形式取决于流动是层流还是湍流。第3 章讨论了近壁湍流边界层的多层结构。紧贴壁面是极薄的粘性底层,

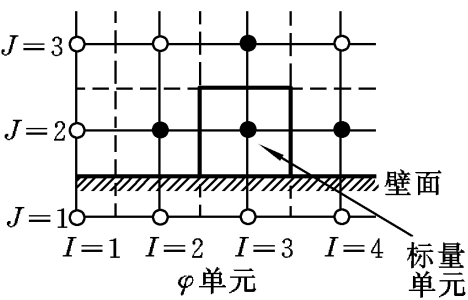


图 5.41 壁面边界的
标量单元

再是缓冲层和湍流核心。解出湍流边界层全部细节需要的网格点数目过大,为节省内存和计算时间,采用 $k-\epsilon$ 模型时用所谓壁函数法处理壁面附近的流动条件。壁函数法假设壁面粘性底层以外的速度分布服从对数律(见 3.4 节),将壁面附近的第一个内点布置到粘性底层以外的对数律区,再利用经验拟合公式给出壁面上的切应力和热流量。具体介绍如下。

为在湍流中实现壁面边界条件,首先求出 y^+ :

$$y^+ = \frac{y_p}{\nu} \quad (5.5.7)$$

这里 y_p 是近壁点到固体壁面的距离(见图 5.39)。如果 $y^+ < 11.63$ 近壁流设为层流型,壁面剪应力完全是粘性应力。如果 $y^+ > 11.63$,流动为湍流,应用壁函数法。

湍流边界层的线性区和对数律区之间是缓冲层,上述条件判断层流转换到湍流近壁流的缓冲层位置。 $y^+ = 11.63$ 这一准确值是速度分布的线性剖面和对数律的交点,即以下方程的解

$$y^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (5.5.8)$$

式中, κ 是 von Karman 常数(0.418 7), B 是依赖于壁面粗糙度的积分常数(见 3.4 节)。对于剪应力为常数的光滑壁, $B = 5.5$ 。

下面分层流/线性底层和湍流两种情况叙述。

1. 层流/线性底层

在这个标题下描述的壁条件应用于两种情形: 层流方程的解; 湍流方程 $y^+ > 11.63$ 的解。两种情形近壁流都取为层流。壁面力作为源进入离散 u -动量方程。

壁面剪应力值从下式得到

$$\tau_w = \mu \frac{u_p}{y_p} \quad (5.5.9)$$

式中, u_p 是网格节点的速度。图 5.42 表明层流的这个公式基于速度随着离开壁面的距离而线性变化。剪切力 F_s 由下式给出

$$F_s = - \tau_w A_c = - \mu \frac{u_p}{y_p} A_c \quad (5.5.10)$$

这里 A_c 是控制体的壁面面积。适合 u 动量方程的源项定义为

$$S_p = - \frac{\mu}{y_p} A_c \quad (5.5.11)$$

在层流流动中,从固定温度的壁面进入近壁单元的热传导计算式为

$$q_s = - \frac{\mu c_p (T_P - T_w)}{y_P} A_c \quad (5.5.12)$$

这里 c_p 是流体的比定压热容, T_P 是节点P 的温度, 是层流普朗特(Prandtl)数。

易见温度方程相应的源项为

$$S_p = - \frac{\mu c_p}{y_P} A_c, \quad S_u = \frac{\mu c_p T_w}{y_P} A_c \quad (5.5.13)$$

利用通常的源项线性化, 一个固定的热通量直接进入源项:

$$q_s = S_u + S_p T_P \quad (5.5.14)$$

对于绝热壁, 当然有 $S_u = S_p = 0$ 。

2. 湍流

当 $y^+ > 11.63$ 时, 认为节点P 在湍流边界层的对数律区。在这个区域内, 与对数律相关的壁函数公式(3.5.18)和(3.5.19)用于计算剪应力、热通量和其他变量。有很多方法应用这些公式, 下面列出的是经过大量计算测试的标准k-模型的最佳近壁面关系式。

(1) 壁面切向的动量方程。壁面剪应力

$$\tau_w = C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} u_P / u^+ \quad (5.5.15)$$

(2) 壁面法向的动量方程。法向速度 = 0。

(3) 湍流动能方程。

$$\text{单位体积净 } k \text{ 源} = (\tau_w u_P - C_\mu^{3/4} k_P^{3/2} u^+) V / y_P \quad (5.5.16)$$

(4) 耗散率方程。置节点值

$$\epsilon_P = C_\mu^{3/4} k_P^{3/2} / (y_P) \quad (5.5.17)$$

(5) 温度(能量)方程。壁面热通量

$$q_w = - c_p C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} (T_P - T_w) / T^+ \quad (5.5.18)$$

四、常压强边界条件

应用常压强边界条件的情形是, 不知道准确的流动分布的细节, 但是知道压强的边界值。应用这个边界条件的典型问题有绕物体外部流、自由表面流、浮力驱动流, 如自然通风和火灾流, 以及多出口的内部流。

应用固定压强边界时, 在边界节点置压强修正为零。靠近流动入口和出口的p 单元网格如图 5.43 和图 5.44 所示。

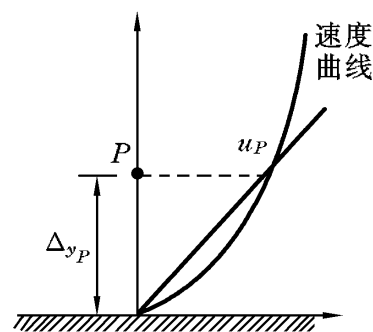


图 5.42 壁面速度分布

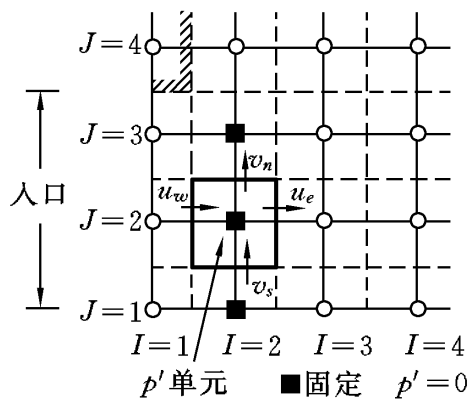


图 5.43 入口边界的 p 单元

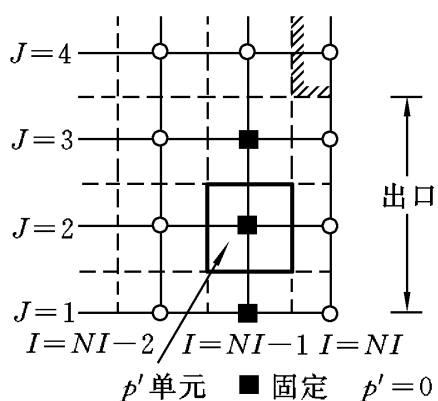


图 5.44 出口边界的 p 单元

处理常压强边界条件的简单方法是在紧靠物理边界内侧的节点上规定压强,如图5.43和5.44中黑方块所示。压强修正置零,取 $S_u = 0.0$, $S_p = -10^{30}$,节点压强置于要求的压强 p_{fix} 。

从 $i = 3$ 开始解 u -动量方程,从 $I = 2$ 开始解 v -动量方程和其他方程。一个突出的问题是不知道流动方向,这是由计算域内部条件决定的。越过域边界的 u -速度分量作为解过程的一部分产生,必须确保在每个单元满足连续性。例如,在图5.43中, u_e 、 v_s 和 v_n 的值在解域内离散 u -动量方程和 v -动量方程时出现。给出这些值并认为 p 单元质量守恒,就能计算 u_w 。由此得到

$$u_w = \frac{(\dot{v}A)_n - (\dot{v}A)_s + (\dot{u}A)_e}{(A)_w} \tag{5.5.19}$$

实现这个边界条件使得最靠近边界的单元特性像一个质量源或汇。对每一个压强边界单元重复这个过程。对其他变量,如 v 、 T 、 k 和 ϵ ,在流动方向是进入域内的地方必须赋予入流条件。从域内向外流出处,可以由插值得到域外点的值。

五、对称边界条件

对称边界条件是： 没有越过边界的流动； 没有越过边界的标量通量。实现边界条件,取对称边界的法向速度为零,所有其他流体量在解域外最近一个节点的值(如 I 或 $i = 1$)等于解域内最近一个节点的值(如 I 或 $i = 2$)：

$$1,J = 2,J \tag{5.5.20}$$

离散 p 方程中,置相应系数为零,截断与对称边界侧的联系,不需要更多的修正。

六、周期(循环)边界条件

周期或循环边界条件产生于不同类型问题中的对称性。例如,考虑图5.45圆柱形炉膛内的涡流。在燃烧器结构内通过六个对称排列的孔引入气体燃料。旋转空气进入燃烧器外环。

这个问题可以用极坐标 (z, r, θ) 求解。考虑图中所示一段60°环截面, k 表示

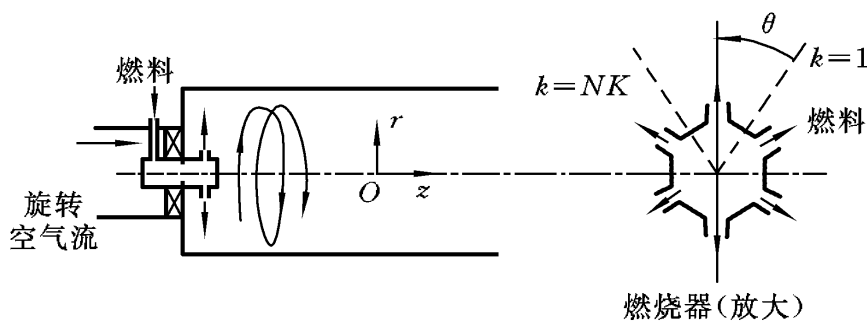


图 5.45 循环边界条件的例子

方向的 (z, r) 平面, 流动在这个方向旋转。流动进入截取段的第一个 k 平面的给定条件应该和离开最后一个 k 平面的条件完全相同。这是一个循环对称的例子。一对边界 $k=1$ 和 $k=NK$ 称为周期性的或循环边界。

为应用循环边界条件, 需要置离开出口循环边界的所有流体量通量等于进入入口循环边界的通量。为此, 令入口平面上、下游的第一个节点的各项变量值等于它在出口平面上、下游的第一个节点的值。除了越过入口和出口平面的速度分量 (w) 外, 对所有变量, 有

$$1, J = NK - 1, J, \quad NK, J = 2, J \tag{5.5.21}$$

对越过入口和出口平面的速度分量, 有

$$W_{1, J} = W_{NK - 1, J}, \quad W_{NK + 1, J} = W_{3, J} \tag{5.5.22}$$

七、注意事项

CFD 解域内的流动由边界条件所驱动。在某种意义上, 解场问题(即流体流动问题)只是将边界线或面上定义的数据向域内插值。因此, 最重要的是提供物理上真实的、提法上适当的边界条件, 否则求解会遇到严重的困难。CFD 解迅速发散的一个最常见的原因就是边界条件设置不当。

第 2 章为粘性流体流动总结了一套“最恰当的”边界条件, 包括入口、出口和壁面条件。本节讨论了这些边界条件在有限体积法中的应用, 以及另外三个条件(常压强、对称性和周期性)。这些条件是物理上真实存在的, 在实际计算中非常有用。然而, 绝不是只有这些边界条件。商业 CFD 软件包可能包括随时间运动的边界, 旋转和加速的边界, 以及跨声速和超声速流的特别条件。

现简单说明边界条件选择不当的例子。如给出一个只有入流但没有出流的有壁面边界条件求定常解。显然, 在定常状态下, 不能保持质量守恒, CFD 计算将很快崩溃。这个不起眼的例子也说明某些类型的边界条件必须伴随另外一些特定的边界条件。下面简单归纳亚声速流容许的边界条件的几种组合情况:

- (1) 仅有壁面;
- (2) 壁面和入口, 以及至少一个出口;

- (3) 壁面和入口, 以及至少一个常压强边界;
- (4) 壁面和常压强边界。

应用出口边界条件(指零压强梯度)要特别小心, 因为它只能用于只有单个出口的流动域的情形, 由入口边界条件给定所有进入计算域的流动(即在入口规定速度和标量)。物理上, 出口压强控制了多个出口的分流, 所以在出口规定压强而不是零压强梯度较好。不容许同时有一个或多个常压强边界的零压强梯度出口条件。因为零压强梯度的出口条件既没有规定流量, 也没有规定出口压强, 导致问题不确定。

本书只考虑亚声速流, 回避了一些极复杂的问题。处理跨声速和超声速流区域的流动问题时要特别仔细。

前面已经指出过单个边界条件的精度限制。这里简要介绍实际CFD 中需要避免的较不易察觉的失误, 以保证最佳模拟精度。

1. 出口边界的位置

如果出口边界太靠近固体障碍, 流动可能没有达到充分发展状态(流动方向的零梯度)。这可能导致很大的误差。图5.46 给出了障碍下游典型的速度剖面, 表明出口边界的位置不当可能引起的后果。

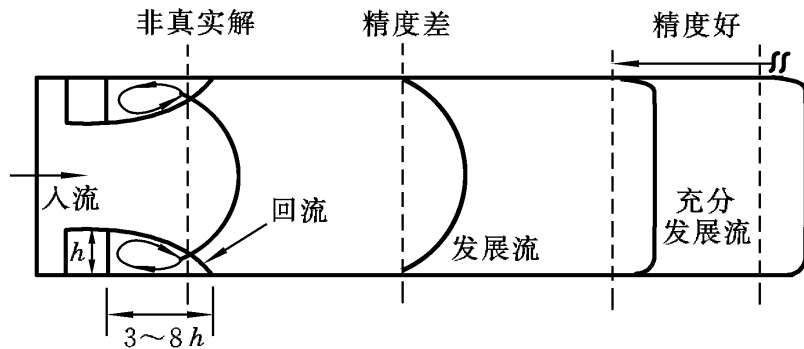


图5.46 障碍下游各位置的速度剖面

如果出口边界的位置靠近固体障碍, 可能处于有回流的尾流区。不仅是零梯度条件不成立, 有的地方流动会进入设为出口的区域。当然不能相信这样的条件下得到的解。靠下游一点可能没有回流, 但零梯度条件不成立, 因为速度剖面在流动方向仍在变化。出口边界必须放在最后一个障碍的下游、距离超过十倍高度的地方, 才能给出精确的结果。高精度解需要对下游距离变化的敏感性进行检验, 以证实选择出口位置没有影响。

2. 近壁网格

一般用途的CFD 软件解湍流的最精确方式是利用壁函数法提供的经验拟合。要求精度与包含线性底层(层流)节点的模拟精度相同, 那么网格间距会太密, 很不合算。 y^+ 必须大于11.63 的准则设置了离开壁面最近的节点到壁面的距离 y_p 的下限。可用来改进精度的主要机制是网格加密, 但是在湍流模拟中, 必

须保证加密网格的同时 y^+ 仍大于 11.63, 最好在 30 到 500 之间。

在一般流动中, 往往不能做到这一点。例如有回流的流动。按照准则, y^+ 必须大于 11.63, 但是靠近壁面平行于壁面的速度分量等于零, 模拟转换到层流情形。在这些区域, k -模型还带来严重的精度问题。总之, 很多实例说明, 保持 y^+ 高于下限是非常困难的。

3. 对称条件

流动域的几何对称性并不总是意味着流动具有同样的对称性, 认识到这一点是重要的。例如, 有侧射流的圆管流动, 尽管流动域是轴对称的, 但是横向射流使得流动不是轴对称的。如果用极坐标解题, 流动解会由于流动不交中心线而不准确。

本章主要讨论了如何实现最重要的边界条件, 还概括了边界条件的适当组合及其特殊方面。进行 CFD 计算之前深刻理解所有这些方面, 是用有限体积法精确模拟流动的极其重要的一步。

第 6 章 网格生成技术

网格生成是数值模拟的基础,高效率、高准确度的计算方法包括建立高质量的计算网格。网格生成技术的关键指标是对几何外形的适应性以及生成网格的时间、费用。目前的网格生成技术大体分为结构网格生成技术和非结构网格生成技术两大类。

图 6. 1 所示是几种典型二维网格的例子。

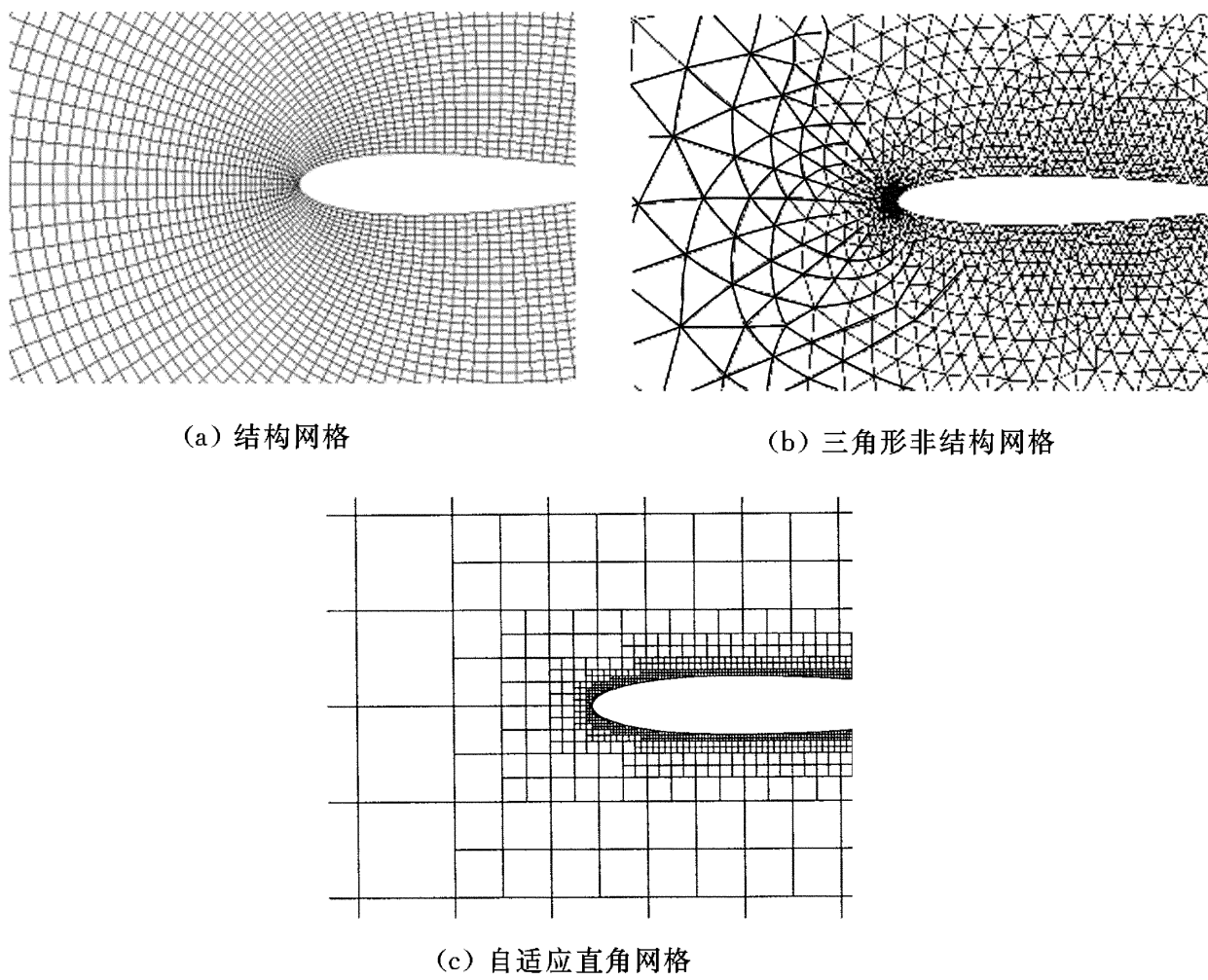


图 6. 1 典型的平面网格

结构网格的生成技术相对成熟,相应的计算技术也较成熟。根据网格线族的走向关系,人们将结构化网格归纳为多种基本的拓扑结构。二维网格有 C 型、O 型、H 型结构,这些基本结构在不同方向上的组合便形成了更复杂的二维、三维结构。针对不同的外形和流动特点合理选择拓扑结构对于精确模拟流动、减少网格单元数有着重要意义。对于较为复杂的外形,生成单块的结构化网格往往很困难。为此,人们发展了基于结构化网格的多块网格分区拼接和嵌套等技术,以解

决复杂外形的网格生成问题。

相比之下,非结构网格的网格尺度易于控制,对外形适应性强,便于进行自适应加密。常用的非结构网格的生成方法有 Delaunay 三角化法和阵面推进法。非结构网格的不足之处是需要较大的内存和计算量。结构网格中,成熟的流场计算方法尚不能简单地用于非结构网格,多重网格技术用于非结构网格亦有困难。

针对两种网格的特点,近十年来两种新型网格发展很快,一种是结构/非结构混合网格,它充分利用两种网格互补的优点,能有效地解决复杂流场的网格生成问题;另一种是自适应直角网格,它通过在原始的均匀直角网格基础上根据物形特点或流场特点在局部区域内不断进行网格细化而实现。

本章主要叙述结构和非结构两种网格的生成方法。这之前首先介绍有关结构网格生成方法的贴体坐标概念,最后简单介绍混合网格和自适应直角网格生成方法的特点。

6.1 贴体坐标变换

一、贴体坐标的概念

所谓贴体坐标,就是一种与物面形状相适应的曲线坐标。流体力学数值模拟中广泛应用的有限差分法,就是在离散网格点上将各偏导数项化为差商求数值解。一般情况下,有限差分法都在矩形域上进行,而实际流场大多数并不是理想的矩形域。如圆柱绕流就是一个典型的流体力学问题,其求解域不是矩形域。又如机翼绕流、热交换器内的管内流动、河道流动等,其求解域都不是矩形域。在应用中,矩形网格的局限性太大,有限差分法必须采用贴体坐标变换才能适应广泛的需要。

另一方面,流体力学数值模拟的壁面边界条件必须精确表达,因为紧靠壁面边界的区域一般地对确定解的特征起主要作用。如求解 N-S 方程,作用在固壁上的粘性力直接取决于壁面附近的速度梯度。这在大雷诺数时尤显突出。只要网格点不是准确地位于物体表面,就要插值给出壁面边界条件,并产生误差。流场内,各点的流体量的值依赖于边界值,故相应地都有了误差;当壁面附近流场变化剧烈时,插值误差会很大。

对于具有复杂形状的区域,可以采用适当的坐标变换,使所有边界都取为坐标线或坐标面,使物面与坐标系内某一坐标线(面)吻合。物理空间内呈复杂形状的求解域,在变换后的空间成为矩形域或矩形的组合(空间问题中为长方体或它们的组合)。于是,可以较准确地满足边界条件。

下面以平面问题为例,详细讨论贴体坐标变换的具体做法。

二、贴体坐标变换

如果流动区域不是矩形域时, 直接在物理平面上的直角坐标系 (x, y) 中求解, 那么求解域也不是矩形域。这时, 可以采用曲线坐标系, 使固体边界的表面与坐标系内一坐标线吻合, 数值计算转移到矩形计算域进行。

在平面问题中, 设变换后的贴体坐标是曲线坐标 (ξ, η) , 即坐标变换关系为

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta), & y &= y(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

物理平面内的网格由 $\xi = \text{常数}$ 和 $\eta = \text{常数}$ 的两族曲线构成。如果将控制微分方程转变为以 (ξ, η) 为自变量的坐标反变换方程, 改在 (ξ, η) 平面上求解, 则计算平面内的物体表面化为直线边界, 边界条件无需插值就可直接参加运算, 不再有插值误差。

下面根据反函数微分法和复合函数微分法求坐标变换关系和坐标变换后的微分方程。由 (x, y) 平面上的全微分有

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

将 $d\xi, d\eta$ 解出, 得

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{y \frac{\partial x}{\partial \eta} - x \frac{\partial y}{\partial \eta}}{x \frac{\partial x}{\partial \xi} - y \frac{\partial y}{\partial \xi}} = \frac{y}{J} d\eta - \frac{x}{J} d\xi \\ d\eta &= \frac{-y \frac{\partial x}{\partial \xi} + x \frac{\partial y}{\partial \xi}}{x \frac{\partial x}{\partial \xi} - y \frac{\partial y}{\partial \xi}} = -\frac{y}{J} d\eta + \frac{x}{J} d\xi \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

为简洁起见, 式(6.1.3)中用下标表示对相应坐标求偏导, 其中, J 为坐标变换的雅克比(Jacobian)行列式:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (6.1.4)$$

由 (ξ, η) 平面上的全微分又有

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy \\ d\eta &= \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

比较式(6.1.5)与式(6.1.3)的全微分, 得坐标变量间的微分关系

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{y}{J}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{x}{J}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{J}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{x}{J} \quad (6.1.6)$$

于是有一阶偏导数运算的变换(用到线性算子的表达形式):

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{y}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{y}{J} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{x}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{x}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (6.1.7)$$

下面导出拉普拉斯算子的变换式, 也就是将两个二阶偏导数的变换求和。二

阶偏导数运算的变换的线性算子表达式为

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial J} - \frac{y}{J} \frac{\partial}{\partial J} \\
 &= \frac{y}{J} \frac{\partial}{\partial J} - \frac{y}{J} \frac{\partial}{\partial J} - \frac{y}{J} \frac{\partial}{\partial J} - \frac{y}{J} \frac{\partial}{\partial J} + \frac{y}{J} \frac{\partial}{\partial J} - \frac{y}{J} \frac{\partial}{\partial J} \\
 &\quad - \frac{y}{J} \frac{\partial}{\partial J} - \frac{y}{J} \frac{\partial}{\partial J} \\
 \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{1}{y} - \frac{x}{J} \frac{\partial}{\partial J} + \frac{x}{J} \frac{\partial}{\partial J} \\
 &= -\frac{x}{J} \frac{\partial}{\partial J} - \frac{x}{J} \frac{\partial}{\partial J} + \frac{x}{J} \frac{\partial}{\partial J} - \frac{x}{J} \frac{\partial}{\partial J} \\
 &\quad - \frac{x}{J} \frac{\partial}{\partial J} - \frac{x}{J} \frac{\partial}{\partial J} + \frac{x}{J} \frac{\partial}{\partial J} - \frac{x}{J} \frac{\partial}{\partial J}
 \end{aligned}$$

展开各项,并用到雅克比的偏导数表达

$$\begin{aligned}
 J &= y x + x y - x y - y x \\
 J &= y x + x y - x y - y x
 \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

两个二阶算子相加得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{1}{J^2} (x^2 + y^2) \frac{\partial^2}{\partial J^2} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2}{\partial J^2} - 2(x x + y y) \frac{\partial^2}{\partial J^2} \\
 &\quad + (x x + y y - x x - y y) \frac{\partial^2}{\partial J^2} \\
 &\quad + (x x + y y - x x - y y) \frac{\partial^2}{\partial J^2} \\
 &\quad - (x^2 + y^2) \frac{J}{J} \frac{\partial}{\partial J} - (x^2 + y^2) \frac{J}{J} \frac{\partial}{\partial J} \\
 &\quad + (x x + y y) \frac{J}{J} \frac{\partial}{\partial J} + (x x + y y) \frac{J}{J} \frac{\partial}{\partial J}
 \end{aligned}$$

合并同阶导数项,有

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{1}{J^2} \frac{\partial^2}{\partial J^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial J^2} + \frac{\partial^2}{\partial J^2} \\
 &\quad + x x + y y - x x - y y - \frac{J}{J} + \frac{J}{J} \frac{\partial}{\partial J} \\
 &\quad + x x + y y - x x - y y - \frac{J}{J} + \frac{J}{J} \frac{\partial}{\partial J}
 \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

式中

$$= x^2 + y^2, \quad = x^2 + y^2, \quad = x x + y y \quad (6.1.10a)$$

再引入记号

$$= \frac{1}{J}(x D_y - y D_x), \quad = \frac{1}{J}(y D_x - x D_y) \quad (6.1.10b)$$

$$D_x = \frac{x}{J} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2xy}{J^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{J^2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_y = \frac{y}{J} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2xy}{J^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x^2}{J^2} \frac{\partial}{\partial y}$$

整理得到拉普拉斯算子在曲线坐标下的形式:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{J^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (6.1.11)$$

三、坐标反变换方程

在这一节, 将以平面流动问题中的涡量方程和流函数方程为例说明数值计算时所用的贴体坐标变换及反变换方程的处理方法。由式(2.3.10) ~ 式(2.3.13) 导出平面不可压缩粘性流动在直角坐标(x, y) 下的涡量动力学方程和流函数泊松方程:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

在坐标变换(x, y) → (ξ, η) 下, 用到偏导数变换的式(6.1.7)、式(6.1.11), 涡量动力学方程的反变换方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \\ & = \frac{1}{Re J^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

整理后得涡量方程的坐标反变换方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \frac{1}{J^2 Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{J} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{1}{J^2 Re} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \\ & = \frac{1}{J^2 Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right) \quad (6.1.12) \end{aligned}$$

流函数泊松方程的坐标反变换方程为

$$\frac{1}{J^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = \frac{2}{J^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \quad (6.1.13)$$

压强泊松方程的坐标反变换方程可类似得到。一旦物理域的曲线网格和计算域的矩形网格建立了节点一一对应的关系, 用数值方法就可以得到方程中的系数、和。

四、正交坐标变换下的反变换方程

曲线坐标(,)的正交条件为

$$\mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_y = 0 \quad \text{或} \quad x_x x_y + y_x y_y = 0$$

代入坐标变换的导数关系式(6.1.6), 得

$$x_x x_y + y_x y_y = 0$$

即正交条件为 $\mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_y = 0$ 。在数学分析教程中, 正交坐标变换的拉梅系数定义为

$$h_x = \sqrt{x_x^2 + y_x^2}, \quad h_y = \sqrt{x_y^2 + y_y^2} \quad (6.1.14)$$

式(6.1.10a)和式(6.1.14)给出了 \mathbf{r}_x 、 \mathbf{r}_y 和拉梅系数 h_x 、 h_y 的对应关系。

正交坐标变换下的拉普拉斯算子可写成

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_x h_y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h_x} \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

对式(6.1.11)应用正交条件即可导出上式。注意, 正交条件下, $J = h_x h_y$ 。

下面给出正交曲线坐标系下的涡量方程和流函数方程。正交曲线坐标系下, 无量纲的涡量方程为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_x h_y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h_x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \omega = \frac{1}{h_x h_y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h_x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \omega \\ & = \frac{1}{h_x h_y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h_x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \omega \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

正交曲线坐标系下的流函数方程为

$$\frac{1}{h_x h_y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h_x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi = -\omega \quad (6.1.16)$$

不难证明, 本节前面导出的坐标反变换方程(6.1.12)、(6.1.13)在正交条件下与这里给出的方程是一致的。

6.2 单域贴体结构性计算网格的生成

贴体坐标应尽可能地正交和避免出现奇点(如角点等), 在不可避免时需做特殊处理。复杂流动中的流场在不同区域变化的快慢大不相同, 网格分布应与流动问题本身相匹配, 也就是说疏密分布应与流体量分布的变化相适应。

结构网格的生成方法大致可分为代数法、保角变换法和求解偏微分方程法三类。每种方法各有其特点和适用范围。在处理复杂外形时, 单一方法往往难以胜任, 需要根据求解域的形状和流动特点, 合理地选出其中的一种或几种方法, 结合起来灵活应用。

一、代数生成法

代数生成法利用已知的边界值进行中间插值产生网格。这需要在变换之前构思出网格的形状,再引入插值公式,选择合适的数学方式表达新、旧坐标之间的换算关系。

物体形状千变万化,相应的网格变换代数公式也将是各式各样的。即使流体边界有同样的几何形状,网格形状的构思也可以不同。不同网格形状需采用不同的代数公式,因此,选择或设计代数法的插值公式比较费时。但是代数法生成网格快,易于实现,在网格生成方法中占有重要地位。

插值函数是代数方法的核心: 给出一个包含待定系数的特定曲线坐标函数 $r(\quad)$, 即插值函数, 再根据边界上或某些中间点上给定的坐标值(根据方法不同, 可能还有导数值) 来确定这些待定系数。插值函数确定后, 整个网格系统也就确定了。

常用的插值公式如下。

(1) 拉格朗日(Lagrange)插值公式。

$$f(x) = \sum_{n=1}^N L_n(x) f_n$$

其中

$$L_n(x) = \prod_{l=1, l \neq n}^N \frac{x - x_l}{x_n - x_l}$$

(2) 埃米特(Hermite)插值公式。

$$f(x) = \sum_{n=1}^N [f_n + (x - x_n) f'_n - 2(x - x_n) f'_n L_n(x) + \frac{1}{2} (x - x_n)^2 L_n(x)]$$

式中

$$L_n(x) = \prod_{j=0, j \neq n}^N \frac{x - x_j}{x_n - x_j}$$

其中, f_n 是函数 $f(x)$ 在点 x_n 的值, f'_n 则为函数 $f(x)$ 在点 x_n 的导数值, $L_n(x)$ 和 $L'_n(x)$ 是拉格朗日函数及其导数值。埃米特插值公式不仅在点 x_n 精确满足函数值, 而且精确满足函数的导数值。

采用不同形式的插值函数, 即可形成不同的代数方法。多维网格需要多方向的插值, 例如, 广义超限插值法(A. Rizzi, 1991) 在每一个方向单独采用多项式插值。这种方法考虑到只给两个边界面的函数较难控制所需要的网格分布, 且在壁面附近网格线的正交性对流场的计算结果有较大的影响, 因此它不仅给出壁面函数值, 还给出壁面外法线方向的导数值, 从而有效地控制壁面附近插值函数的特性。

二、保角变换生成法

保角变换的数学基础是复变函数中的解析变换,因此它得到的坐标是正交的。但保角变换的局限性较大,只能应用于二维问题。已知的典型变换不多,该方法比较适用于反问题,即在给定变换下讨论变换后的形状。而从已知域的形状来确定相应的变换是困难的,有时往往是不可能的。不过在处理复杂外形时,将保角变换法和其他方法结合起来,有时能收到很好的效果。

下面以绕圆柱流动的计算为例说明保角变换生成法。利用保角变换可将圆所在物理域转换为矩形网格的计算域。在直角坐标系下,物理平面点坐标为复变量 $z = z(x, y)$ 。物理平面内的网格由 $x = \text{常数}$ 和 $y = \text{常数}$ 的两族曲线构成。设坐标变换关系为

$$\zeta = \zeta(\xi, \eta), \quad z = z(x, y)$$

复变量 $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ 是变换空间的点坐标。复变函数中的解析变换

$$\zeta = \frac{1}{2} z + \frac{a^2}{z} \quad (6.2.1)$$

将变换平面 $\zeta(\xi, \eta)$ 上一段长为 $2a$ 的割线变为物理平面 $z(x, y)$ 上的一个圆, a 为圆半径。

变换满足柯西-黎曼条件:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (6.2.2)$$

因此坐标变换是正交的。

由式(6.2.1)有,变换平面 $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ 和物理平面 $z = z(x, y)$ 的关系式

$$z^2 - 2\zeta z + a^2 = 0 \quad \text{或} \quad z = \zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - a^2} \quad (6.2.3)$$

这里根式前取正号,负号对应变换到圆内区域。

利用复变量的矢径 r 和辐角 θ 表示法,设 $\zeta^2 - a^2 = re^{j\theta}$, $j = \sqrt{-1}$, 则有

$$\begin{aligned} \arctan \frac{2}{\zeta^2 - \eta^2 - a^2}, \quad \zeta^2 - \eta^2 - a^2 > 0, \\ \theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \zeta^2 - \eta^2 - a^2 = 0, \\ + \arctan \frac{2}{\zeta^2 - \eta^2 - a^2}, \quad \zeta^2 - \eta^2 - a^2 < 0 \\ r^2 = (\zeta^2 - \eta^2 - a^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2 \end{aligned}$$

反正切函数的值域取为 $(-\pi/2, \pi/2)$ 。物理平面网格点的坐标为

$$\begin{aligned} x &= \xi + \frac{1}{\zeta_0 \zeta_1} \sqrt{(\zeta^2 - \eta^2 - a^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2} |\xi| \cos(\theta/2) \\ y &= \eta + \frac{1}{\zeta_0 \zeta_1} \sqrt{(\zeta^2 - \eta^2 - a^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2} |\xi| \sin(\theta/2) \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

由于 $r = a$, $\theta = \pm \pi$ 是两个奇点, 在这两点不满足正交条件。

实际上, 为使物面附近的网格细密, 需要先对均匀矩形网格坐标 (ξ, η) 引入变换

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\cosh c_1} + \frac{1}{\sinh c_1} \operatorname{sh} \eta - c_1 \frac{1}{\cosh c_1} \\ \eta &= c_2 \frac{1}{\cosh c_1} (e^{c_1 \xi} - 1) \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

式中, c_1, c_2 是调节因子。调整均匀网格的疏密后, 再用式(6.2.4)进一步将非均匀网格坐标 (ξ, η) 变换到物理平面曲线坐标 (x, y) 。第7章图7.3显示了用保角变换生成法得到的圆表面附近的网格。

三、椭圆型微分方程生成法

由求解椭圆型微分方程生成网格的方法称为椭圆型微分方程生成法。这种方法的最早代表为著名的 TTM(J. F. Thompson, 1985) 方法。该方法取 (x, y) 平面上的一对 Laplace 方程的解作为贴体坐标系。该解应满足的边界条件为物面边界点和矩形计算域边界点的一一对应关系。此方法的优点是: 所得网格线是光滑的, 可以处理复杂的边界, 若在方程右端加上源项, 使之成为泊松方程, 即可控制网格线分布的疏密。

物理空间内的网格应由三族等值面的相交曲线构成。贴体坐标就是这样生成的一种曲线坐标, 一般表示为

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z)$$

为简明起见, 下面以圆柱绕流问题的网格生成为例讨论平面网格的生成。首先导出微分方程法的坐标变换方程。

采用曲线坐标系, 在物理平面内的网格由 $\xi = \text{常数}$ 和 $\eta = \text{常数}$ 的两族曲线构成。计算域的均匀矩形网格节点坐标 (ξ, η) 与物理平面的直角坐标 (x, y) 有对应关系

$$(x, y) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

希望变换前后的坐标都是正交的, 这就要求满足柯西-黎曼条件

$$x_\xi = y_\eta, \quad y_\xi = -x_\eta$$

由此得到 ξ 和 η 所应满足的微分方程, 即拉普拉斯方程

$$\xi_{\xi\xi} + \eta_{\eta\eta} = 0, \quad \xi_{\eta\eta} + \eta_{\xi\xi} = 0 \tag{6.2.6}$$

求解这两个方程就可以得到 (x, y) 和 (ξ, η) , 从而建立变换关系。由于数值解实际上不能准确满足柯西-黎曼条件, 所以坐标线不一定正交。如希望尽可能正交, 还需要采取进一步的措施修正网格。

贴体坐标网格的计算域与流体微分方程的计算域为同一个均匀网格。根据

反函数微分法和复合函数微分法,微分方程(6.2.6)在坐标变换后的形式为

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)x - 2(xy)x + (x^2 + y^2)x &= 0 \\ (x^2 + y^2)y - 2(xy)y + (x^2 + y^2)y &= 0\end{aligned}\quad (6.2.7)$$

此方程组为非线性方程组,可用迭代法求解:在 (x, y) 平面的边界上选定一组与 (ξ, η) 平面的矩形区域边界对应的点,给出在 (ξ, η) 平面上的计算域边界上的 (x, y) 值,这就是方程组求解的边界条件。

将坐标反变换方程写为

$$x - 2x + x = 0, \quad y - 2y + y = 0 \quad (6.2.8)$$

式中, $= x^2 + y^2$, $= x^2 + y^2$, $= xy$, 由于 < 0 , 故方程为椭圆型微分方程。

实际上,由于人们希望坐标是正交的,而正交时 $= 0$, 所以为了计算方便,也可以用 $= 0$ 将方程简化,即直接解

$$x + x = 0, \quad y + y = 0 \quad (6.2.9)$$

由于 > 0 , > 0 , 所以它是拉普拉斯型方程,它们的解只在边界上取极值。因此,只要边界上的点取单调值,即点的顺序是单调的,则解将是惟一的,而且不会出现坐标线的交错与分岔、坐标曲面的卷折等情况。网格疏密与边界点的设置有关。

微分方程法通用性好,可处理任意几何形状,且生成的网格光滑均匀。同一族网格线不会相交,还可调整网格疏密,故近年来获得了大量应用。但微分方程法靠调整边界条件较难控制内点的网格分布,用源项调整网格疏密也不易掌握。

四、双曲型微分方程生成法

J. L. Steger 和 D. S. Chaussee(1980)首先提出了用双曲型微分方程来生成二维网格的方法。随后, J. L. Steger 和 Y. M. Rizk(1985)将其推广为生成三维网格。双曲型方程生成法计算时间要比椭圆型方程生成法少 1~2 个量级,且易于控制物面附近网格的质量。然而,它是推进的方法,其外边界位置不能事先指定,且输入数据中的不连续性会传播至网格中,因此,只适用于外流或分区重叠网格技术中。后来, W. M. Chan 和 J. L. Steger(1991)进一步完善了此方法,对一些敏感的问题,如边界条件、网格单元体积的给定、控制网格质量的因素、物面不连续和角点的处理等都做了改进,提高了方法的适应能力。

6.3 调整网格疏密

对于离散网格,除要求尽量贴体外,还希望它疏密合理。例如,物面附近流体

量变化梯度大, 应该取较密网格以减少误差; 离物体很远处流体量变化小, 网格太密则会浪费计算时间。所以, 应根据需要合理安排网格疏密。为达到这一目的, 控制网格生成的微分方程中应有调整网格疏密的项。

设想如下问题: 机翼是一个冷源, 翼面温度为零度, 其四周温度由近而远地逐渐变热, 这是温度场的分布问题, 可以用拉普拉斯方程求解。解出的等温线(面)族将像网格曲线(面)那样一层层包围着机翼。温度分布是逐渐过渡的, 故等温线光滑均匀, 且不会相交。这些正是对网格设计的要求, 因此可将等温线设计为网格线。

再设想在机翼附近放置热源, 使热源与机翼之间的温度梯度加大, 则等温线会加密; 若远处的温度是常数, 则热源与远处之间的温度差降低, 等温线会变稀。这一特点可用来调整网格疏密。有热源的温度分布问题由泊松方程控制。用有限差分法解泊松方程可生成与边界条件相一致的、疏密得当的贴体坐标网格。

考虑椭圆型方程生成法, 方程(6.2.6)右方加上源项后成为泊松方程:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = P(x, y), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = Q(x, y) \quad (6.3.1)$$

式中, 源项P 和Q 是位置的函数。因为热量向着温度梯度的反方向传递, 所以P、Q 大于零时相当于冷源, P、Q 小于零时相当于热源。相应地, 坐标反变换方程(6.2.8)右方也将出现源项。

将前面给出的变换坐标下的拉普拉斯算子式(6.1.11)应用于坐标变量 ξ, η , 得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = \frac{1}{J^2} P, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \frac{1}{J^2} Q$$

用到式(6.1.10)、 ξ, η 的定义, 泊松方程(6.3.1)有如下形式

$$x \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \right) - y \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right) = J^3 P(x, y)$$

$$y \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right) - x \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \right) = J^3 Q(x, y)$$

经过简单的代数运算, 整理得

$$\begin{aligned} x \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \right) - y \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right) &= -J^2 (x P + y Q) \\ y \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right) - x \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \right) &= -J^2 (y P + x Q) \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

式中, J 为坐标变换的雅克比行列式, 根据不同情况下的要求, P、Q 可选取不同的表达式, 其中的参数取值需经试验确定。

偏微分方程组(6.3.2)离散后得到的非线性方程组可采用迭代法求解。解此泊松方程的困难在于如何根据控制点的分布给出P、Q 项。通常希望物面附近的网格线与物面正交, 并控制物面外第一条网格线与物面之间的距离。一般地, 源项控制的计算步骤是: 在边界处假定源项的初值, 或简单地令P = Q = 0; 改变边界处源项值, 使生成的网格尽量接近期望的网格; 将物面与外边界处的源项值内插至流场内部网格点处; 迭代求解该源项值时的泊松方程。

重复步骤 ~ 直到获得所期望的网格。步骤 用超松弛迭代,称内迭代,而步骤 ~ 的循环称外迭代。注意只在外迭代过程中改变源项值,而在内迭代时保持源项值不变。目前,常用的源项控制方法大致可以分成两类,一类根据正交性和网格间距的要求直接导出右端项P、Q的表达式;另一类在迭代过程中根据项源变化的情况,通过人工控制实现所期望的网格。Thompson (1985)、R. L. Sorenson(1980)以及J. F. Thomas 等人(1979)的方法属前一种,A. Hilgenstock的方法(1988)则属于后一种。下面导出右端项P、Q的表达式来实现所期望的网格。

网格密集于某几条坐标线和某几个点,相当于某几条坐标线和某几个点成为热源后在这里的等温线疏密发生变化。下面仍借用加热、变冷描述源的强度。例如,欲使 $x = x_k$ 的坐标线附近的等温线加密,不妨设想以 x_k 线作为等温线,在其附近加热,即令

$$Q = -c \exp(-d|x - x_k|)$$

这时 x_k 线上加热最多,远离 x_k 线处加热较少。如果 $x = x_k$ 的坐标线是壁面,且离开壁面是坐标增大的方向(相当于温度较高的方向),那么壁面附近等温线将加密。如果离开壁面的方向是坐标减小的方向,则热源使壁面附近等温线稀疏。

上式中,d是衰减因子,较小的d意味着加密的范围较宽,较大的d意味着加密的范围较窄;c是强度因子,较小的c密集程度低,较大的c密集程度高。为了使等 x_k 线两侧(增大和减小的方向)的等温线都加密,需要在 x_k 线一侧加热,另一侧降温,即令

$$Q = -\frac{c}{|x - x_k|} \exp(-d|x - x_k|)$$

上述表达使 x_k 线处温度梯度更大,等温线更密集。

一般情况下,欲使网格在一个方向密集于p条线和q个点,在这个方向的源项则应写成p+q项之和。一般地,P、Q写为

$$P(x, y) = -\sum_{m=1}^{p_1} a_m \frac{1}{|x - x_m|} \exp[-b_m|x - x_m|] - \sum_{n=1}^{q_1} c_n \frac{1}{|x - x_n|} \exp[-d_n((y - y_n)^2 + (z - z_n)^2)] \quad (6.3.3)$$

$$Q(x, y) = -\sum_{k=1}^{p_2} a_k \frac{1}{|y - y_k|} \exp[-b_k|y - y_k|] - \sum_{l=1}^{q_2} c_l \frac{1}{|y - y_l|} \exp[-d_l((x - x_l)^2 + (z - z_l)^2)] \quad (6.3.4)$$

不同点不同线上的系数a、b、c、d应各取不同值,如何取值需要较多的经验技巧。调整时应仔细选取,不然将达不到所要求的密集程度,而且可能导致迭代

过程的发散。

考虑正交变换($\alpha = 0$)。方程(6.3.2)第一式左边用中心差分形式离散后有

$$\begin{aligned} & \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2}^2 + \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2}^2 i \alpha^2 \frac{x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}}{2} \\ & + \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2}^2 + \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2}^2 i \alpha^2 \frac{x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}}{2} \end{aligned}$$

可简写为

$$Ax_{i+1,j} - 2Ax_{i,j} + Ax_{i-1,j} + Cx_{i,j+1} - 2Cx_{i,j} + Cx_{i,j-1}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2}^2 + \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2}^2 \frac{1}{2}, \\ C &= \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2}^2 + \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2}^2 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

方程(6.3.2)第二式左边同样离散。加入源项后离散得一非线性方程组,形式如下:

$$\begin{aligned} & Ax_{i+1,j} - 2(A + C)x_{i,j} + Ax_{i-1,j} \\ & = -C(x_{i,j+1} + x_{i,j-1}) + \frac{1}{2}AC [(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})P(i, j) \\ & \quad + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})Q(i, j)] \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

$$\begin{aligned} & Cy_{i,j+1} - 2(A + C)y_{i,j} + Cy_{i,j-1} \\ & = -A(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \frac{1}{2}AC [(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})P(i, j) \\ & \quad + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})Q(i, j)] \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

按源项公式(6.3.3)在各点计算式(6.3.5)、(6.3.6)中 $P(i, j)$ 和 $Q(i, j)$ 的值。用迭代法求解非线性方程组。

一种做法是在迭代过程中,令方程左边的系数和右边各项中的 x 、 y 取上次迭代的收敛值,迭代直至有稳定的输出。可以逐点或逐行计算;为避免误差在一个方向累积,还可以交替变换计算顺序进行迭代。

检查生成的网格是否合乎要求,否则做进一步的调整或技术处理。

6.4 分区与并行计算的网格

对于多部件的复杂流动的外形(如飞行器),生成单域贴体计算网格是困难的;即使勉强生成网格,质量也不能保证,从而影响流场数值求解的效果。为此,近十来年发展了不少新的分区结构网格和非结构网格方法。较成熟的分区结构网格方法有对接网格方法和重叠网格方法。分区网格生成方法与流场的分区(或

并行)计算方法密切相关,构成了这些算法的基础,是目前计算复杂外形绕流流场的主要方法。这一节只介绍有关概念,不做详细推导。

分区算法的基本思想是:首先将总体区域分成若干个子域,再对每个子域分别建立网格和对方程求解。各子域的解在内边界处通过耦合条件实现光滑连接。这种分区又称几何分区。除几何分区外,还有其他类型的分区,如偏微分方程的 Schwarz-Schur 区域分裂算法。不同区域采用不同离散格式,按并行机的处理器数目将计算域分块进行并行计算。

下面介绍几何分区结构网格的生成方法。

一、区域分解

无论是何种求解域,分区时要均匀将其分成若干个形状尽量规则的子域,以在每个子域中独立建立网格。若相邻两子域的分界线(也称内边界)是协调对接的,则此分区网格称为对接网格(patch grid)。若相邻两子域含有重叠部分,则此分区网格称为重叠网格(overlapping grid)。重叠分区又分部分重叠和完全重叠两种,后者又称分层(hierarchical)重叠。

区域分解可以用人工办法,但几何形状特别复杂时,人工分解很费时间。J. A. Shaw(1992)发展了自动分解法。美国 NASA Ames Research Center 设计的自动分解软件可以通过点击鼠标产生子域边界。自动分解生成的子域数目往往很大,而每个子域中的网格点数很小。为了减少子域数量,Rigby(1996)提出了一种最小递减区域合并法,以前面自动生成的子域集为基准,用最小递减法将可以合并的相邻两子域合并成一个,合并一对后继续寻找新的合并对象,直到不能再合并为止。

二、对接网格

对接网格有角点对接和中点对接两类。角点对接的相邻子域各有网格单元边界与对接线重合。对接的子域在对接线的另一侧还附加了虚网格单元(内边界单元),用以定义内边界耦合条件;中点对接的相邻子域有一条网格单元中点线与对接线重合。此时又可分成两种情况:耦合条件直接定义在与对接线重合的网格单元上,这时这些单元称内边界单元;其中一侧子域在对接线的另一侧附加虚网格单元(内边界单元),用以定义内边界耦合条件。

三、重叠网格

分区网格的另一种形式是分区重叠网格,又称嵌入式分区网格,即在分区网格中,相邻子域的网格具有公共的或重叠的区域。由于不要求各子域共享边界,大大减轻了各区自身网格生成的难度。使用插值方法提供内边界条件,可实现各

子域流场解的光滑连接。重叠区内交界面处各子域流场解互相耦合,从而取得全流场解。

著名的 Chimera 网格嵌入方法是分区重叠网格方法的典型代表,包含两部分内容: 将计算域分成多个互相有重叠部分的子域,选择和划分子域的原则是使每个子域更容易建立所要求的网格; 建立各子域间信息传递的机制。计算程序将分别产生分区网格的坐标和进行插值的数据结构两个输出文件。输出文件和各子域流场的计算程序结合计算整体流场。Chimera 是目前可以处理最高复杂程度外形的一种结构网格技术。

由于每个部件的网格都是独立生成的,在网格嵌套时需处理好子域网格重叠区的大小和位置。在重叠网格的重叠区两侧,网格任意交错。与对接网格不同,重叠网格在内边界处有两条独立的内边界线。两条内边界界定了重叠范围。在两条边界线上的网格单元都需要通过从另一侧网格插值来定义耦合条件。

若对所有的公共网格点都进行插值和更新,不仅计算量很大,且会降低计算的精度,为此,只对重叠区中的边界点进行插值和更新。这就需要将重叠区内非边界点的那部分网格点从中去掉,形成人工边界或在其中人为引入“洞”。仅仅对“洞”边界网格进行更新,既提高了整体精度,又减少了计算工作量。为了保证能较精确地通过插值得到网格边界上的流体量,需要在“洞”边界外提供足够大的覆盖区。

人为构造的内边界与周线之间的区域类似于部分重叠网格中的重叠区。实际计算中,在被挖掉的“洞”网格上可继续求解差分格式,这样便于保持结构网格的优点。被挖掉的网格上的数值解一般不具备物理意义。因为在洞的边界上重新定义了耦合条件,这些非物理解不会传播到洞外的区域。在网格中“挖洞”建立人工内边界,增加了计算复杂程度,但使各子域网格容易生成。

分区网格生成技术始于 20 世纪 80 年代中期,到 80 年代末已逐渐形成实用的软件,具有代表性的有 EAGLE 和 GRIDGEN。EAGLE 的优点是强调完备的技术,以椭圆型方程网格生成理论为基础,兼有超限插值等代数方法和表面网格生成技术,形成较强的技术处理功能;其缺点是采用批处理的输入方式,不便于用户在短期内熟悉、掌握和使用。GRIDGEN 的优点是以代数网格生成方法为基础,比较注重软件的图形用户界面(GUI),允许用户在屏幕上构造块结构,查错也快,具有交互式的特点;其缺点是其网格生成技术的功能不如 EAGLE 完善。20 世纪 90 年代以来,两者取长补短,都增加了 PATRAN 和 IGES 的界面,以增强与 CAD 连接的能力,因此两软件都已发展为功能很强的网格生成系统。

在此期间,各国航空研究机构或飞机公司都相继发展了各自的分区网格生成系统,如 NASA 在 Sorenson 方法基础上发展的 3D GRAPE 和改进的 GRAPEVINE,荷兰的国家宇航实验室和意大利的 Alenia/GAT 合作开发的

ISNAS, 比利时的 IGG, 德国的 INGRID, 英国的 SAUNA, 麦道飞机公司的 MACGS 等。

这些系统的共同特点是: 主要依靠超限插值方法生成表面和空间网格, 然后用椭圆型方程方法光滑化; 在代数方法中, 采用 Hermite 超限插值, 或在微分方程方法中逐次调整源项控制函数, 使网格线在交界处的斜率具有连续性, 以保证交界面两边网格线的正交性; 都具有 GUI 和部分连接 CAD 的功能。

经验表明, 网格分区前的几何处理对整个网格生成的速度和质量影响很大。复杂形状的几何处理与网格生成花费的时间, 约占整个 CFD 计算时间的 80%。由于 CAD 在工程上的广泛使用, 从 CAD 输出描述几何外形的数据转换成 CFD 计算所依据的几何外形数据成为解决 CFD 计算的瓶颈问题。新一代分区网格生成软件具有这种自动转换的功能, ICEM 的出现标志着它们的开始。

6.5 非结构性计算网格的生成

非结构网格(unstructured grids)的概念基于如下假设: 四面体是三维空间最简单的形状, 任何空间区域都可以被以四面体为单元的网格所填满。对于平面网格而言, 这是三角形单元。

非结构网格舍去了网格节点的结构限制, 网格中, 一个节点周围的节点数和单元数都不是固定的。非结构网格对复杂外形的适应能力非常强, 可以方便地做自适应计算, 合理分布网格的疏密, 提高计算精度, 因此比结构网格具有更大的灵活性。一旦在边界上指定网格的分布, 在各边界之间可以自动生成网格, 无需分块或人工干预, 有利于网格生成的自动化和通用化。此外, 结构网格在计算域内的网格线和面都应保持连续, 并正交于物体边界和相邻的网格线和面, 而非结构网格则无此限制。这就消除了网格生成中的一个主要障碍。正因为有这一系列优点, 非结构网格技术在 20 世纪 80 年代末到 90 年代初得到了迅速的发展。它在分辨激波、边界层、尾流时, 对速度梯度有自适应性, 显示了巨大的潜力。

常用的非结构网格的生成方法有 Delaunay 三角化法(triangulation method)和阵面推进法(advancing front method)。下面将以二维网格生成为例, 介绍 Delaunay 三角化法的基本要点。这一节最后还将简单介绍推进阵面法的特点。

一、节点生成方法

Delaunay 三角化法的出发点是选定的一组节点。在二维问题中, 可采用一种简单可行的节点生成方法。以机翼绕流计算网格为例, 在图 6.2 所示的平面上将控制体分成两部分, 其中, $A_n B_n C_n D_n - A_1 B_1 C_1 D_1$ 记为 Ω_2 , $A_1 B_1 C_1 D_1$ 以内的区

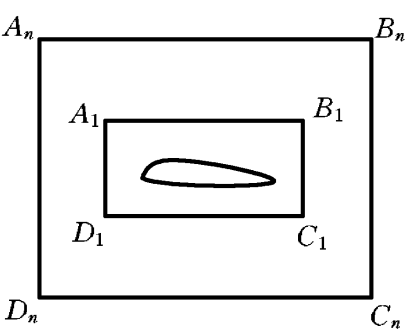


图 6.2 划分控制体

域记为 Ω_1 。绕流物体位于 Ω_1 内。

1. Ω_1 内节点的生成

首先在 $A_1B_1C_1D_1$ 内生成矩形网格。令 $a = |A_1B_1|, b = |B_1C_1|$ 。设 $A_1B_1C_1D_1$ 的坐标分别为 $(x_{A_1}, y_{A_1}), (x_{B_1}, y_{B_1}), (x_{C_1}, y_{C_1}), (x_{D_1}, y_{D_1})$ ，则矩形内网格节点的坐标如下：

$$x = x_{A_1} + a(i - 1)/(I - 1), \quad i = 1, \dots, I$$
$$y = y_{A_1} + b(j - 1)/(J - 1), \quad j = 1, \dots, J$$

其中, I, J 分别为 A_1B_1 和 B_1C_1 上的网格点数。这样就生成了覆盖整个区域的节点。落入物面边界以内的点是多余的, 应该去除。去除方法如下。

考虑物体边界为一个凸多边形的情况, 如图 6.3 所示。将物面离散, 离散点按顺时针排列。设物面上的离散点共有 m 个, 且表示为 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_m(x_m, y_m)$ 。则对于 $A_1B_1C_1D_1$ 内的任意一点 P , 定义三角形 P_iPP_{i+1} 的面积为 A

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_P & y_P \\ 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}$$

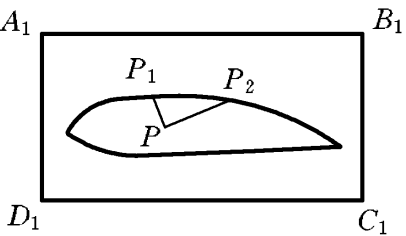


图 6.3 删除物体内点

若对 $i = 1, \dots, m$, 总有 A 大于零, 则 P 在物面边界里边应去除; 否则, P 在物面边界以外, 应当保留。

2. Ω_2 内节点的生成

以 $A_1B_1C_1D_1$ 为起点, 由内向外布置若干个矩形, 每一个矩形的边长按平方关系增大, 每一边上的点数按线性关系减小。每个矩形内, 网格节点的坐标同上划分。

二、三角化方法

1. 基本原理

平面上的节点给出后, 下一步就是将平面三角化。平面三角化的依据是 L. Dirichlet(1850) 提出的利用已知点集将平面划分成凸多边形的理论: 假设平面上给出一组点 $\{P_i\}$, 则 $\{P_i\}$ 中的每一个点(为不失一般性, 取其中的一点 P_s) 都有属于自己的一个区域 S_i , 使得区域 S_i 内的任意一点与 P_s 的距离都比与 $\{P_i\}$ 中其他点的距离近。

这种划分方法把平面划分成了一系列不重叠的凸多边形, 称为 Voronoi 区域, 覆盖整个控制体。在图 6.4 中, 九个点组成的点集 $\{P_i\}$ 按照 Dirichlet 理论将平面划分成了若干凸多边形(其中, 有的凸多边形的顶点在无穷远处)。

以点 5 为例, 点 5 所拥有的凸多边形 $V_2V_3V_4V_6V_8$ 中的每一点距离点 5 都比其余的八个点近。这样的凸多边形并不难确定, 将点 5 和点集 $\{P_i\}$ 中的其他八点连线, 做每一个线段的垂直平分线, 则这些垂直平分线就会自动构成一个凸多边形。

在图 6.4 中, 可以看到, 点 1, 6, 9 由于距离点 5 太远, 它们与点 5 连线的垂直平分线已经无法参与到属于点 5 的凸多边形中去(凸多边形内部的每一点与点 5 的距离显然比它们更近)。

凸多边形的每一条边都对应着点集 $\{P_i\}$ 中的两个点, 如凸多边形中的边 V_2V_3 对应点对 $(5, 2)$, 边 V_3V_4 对应点对 $(5, 4)$ 将所有的点对连线, 则整个平面就被三角化了。对给定的这九个点组成的点集 $\{P_i\}$ 来说, 这种三角化是惟一确定的, 而且生成的三角形的形状都比较接近正三角形。可以说, 这种划分对流场的离散和求解是很有利的。这是 Delaunay 方法的优点之一。

为明确概念, 定义三角形的顶点为“形成点”, 形成点包括下面将提到的“初始化点”和点集 $\{P_i\}$ 中的点; 又定义三角形的垂心(也就是凸多边形的顶点)为“顶点”, 顶点集记为 $\{V_i\}$ 。

表 6.1 给出了图 6.4 所对应的数据关系。每一个凸多边形的顶点周围都有三个点集 $\{P_i\}$ 中的点, 而每一个顶点周围又都有三个相邻的顶点。边界上的顶点所对应的相邻顶点在无穷远处, 在表中记为 - 1。这样的数据关系将在下面的三角化过程中起到重要的作用。

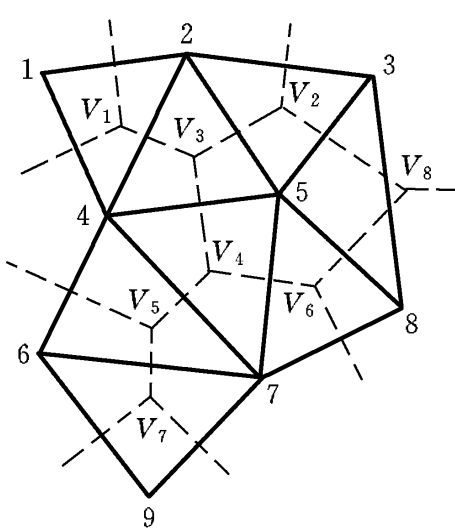


图 6.4 Voronoi 图形和三角化

表 6.1

顶点	形成点			相邻顶点
V_1	1	2	4	V_3 - 1 - 1
V_2	2	3	5	V_8 V_3 - 1
V_3	2	5	4	V_1 V_2 V_4
V_4	4	5	7	V_3 V_6 V_5
V_5	4	7	6	V_4 V_7 - 1
V_6	5	8	7	V_4 V_8 - 1
V_7	6	7	9	V_5 - 1 - 1
V_8	3	8	5	V_6 V_2 - 1

2. Delaunay 三角化进程

Delaunay 三角化是一个有序的过程,可由下述步骤来实现。

(1) 初始三角化。

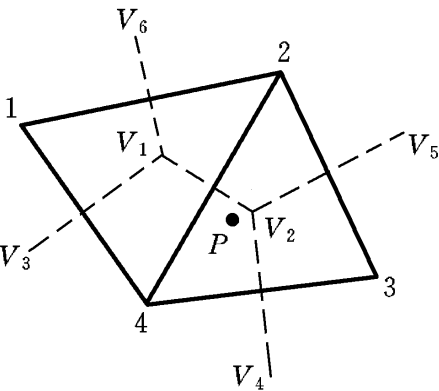


图 6.5 初始三角化

设给定的点集为 $\{P_i\}$ 。首先定义一个包含 $\{P_i\}$ 的凸多边形外壳,对外壳进行初始三角化,例如可以定义一个四边形,建立起由这四个点所组成的 Voronoi 图结构。图 6.5 给出了这一典型的初始图,表 6.2 则给出了相应的数据结构。顶点 1、2、3、4 并未给出严格的定义,因为它们位于凸壳的外边,因此不都拥有三个形成点和三个相邻的顶点。表 6.2 中给出了 - 1 表示缺少的形成点和顶点。要保证图结构包含所有给定的点。

表 6.2

顶点	形成点			相邻顶点		
V ₁	1	2	4	V ₃	V ₆	V ₂
V ₂	2	3	4	V ₁	V ₅	V ₄
V ₃	1	4	- 1	V ₁	- 1	- 1
V ₄	4	3	- 1	V ₂	- 1	- 1
V ₅	3	2	- 1	V ₂	- 1	- 1
V ₆	2	1	- 1	V ₁	- 1	- 1

(2) 引入新点。

在凸壳内引入一点 $P \in \{P_i\}$ 。新引入的这一点将破坏原来的三角化结构,将一些三角形删除,并在其周围建立新的三角化结构。

(3) 确定将要删除的顶点号。

前面提到过,每一个顶点都有三个形成点,该顶点又恰好是三个形成点所构成的三角形的外接圆圆心。如果新引入的一点 P (见图 6.5)恰好落入某个顶点所属的外接圆,则该顶点将被删除。在本例中,新点 P 落入了三角形 1-2-4(顶点 V_1)和 2-3-4(顶点 V_2)的外接圆,因而顶点 V_1 、 V_2 将被删除。

(4) 找出每一个被删除顶点的形成点。

这些形成点将和新引进的点成为相邻点,分别与新引进的点连线,构成新的三角形和新的顶点(每个三角形的外心)。在本例中,点 1、2、3、4 都是符合条件的形成点。

(5) 确定邻接顶点。

确定与被删除的顶点相邻而自身又未被删除的顶点。这些顶点在构造新的

顶点结构中将起重要作用。在本例中, V_3 、 V_4 、 V_5 、 V_6 符合上述条件。

(6) 确定新顶点的形成点。

确定新的 Voronoi 顶点的形成点(见图 6. 6)。新的顶点的形成点必然包含新引入的点和它的两个相邻点, 而且这两个点必须构成相邻三角形的一条边。在本例中, 新顶点 V_8 的三个形成点是新引入的点 P 和 P 的两个相邻点 3、4。其他顶点的形成点在表 6. 3 中给出(注意, 图 6. 6 中新顶点 V_9 、 V_{10} 在表 6. 3 中用 V_1 、 V_2 表示)。

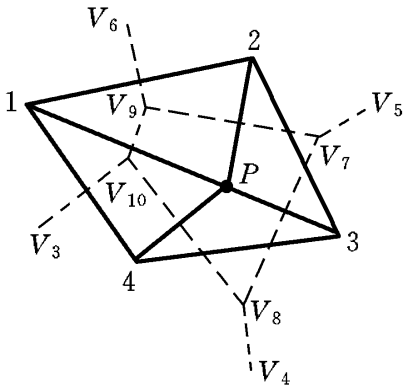


图 6. 6 新 Voronoi 图形

表 6. 3

顶点	形成点			相邻顶点		
V_1	1	2	P	V_2	V_6	V_7
V_2	1	P	4	V_1	V_8	V_3
V_3	1	4	- 1	V_2	- 1	- 1
V_4	4	3	- 1	V_8	- 1	- 1
V_5	3	2	- 1	V_7	- 1	- 1
V_6	2	1	- 1	V_1	- 1	- 1
V_7	3	P	2	V_8	V_1	V_5
V_8	4	P	3	V_2	V_7	V_4

(7) 确定新顶点的相邻顶点。

根据步骤(6), 所有新顶点的形成点都已被找到。对每一个新顶点, 搜索在步骤(5)中所确定的每个相邻顶点的三个形成点以及其他新顶点的三个形成点。如果其中的某一个顶点的三个形成点中有两个与该新顶点中的两个形成点相重合, 则这一个顶点是该新顶点的相邻顶点。在本例中, 新顶点 V_8 的三个相邻顶点是旧顶点 V_4 , 以及新顶点 V_{10} 、 V_7 。

(8) 重新整理 Voronoi 图的数据结构。

重新整理 Voronoi 图的数据结构, 改写被删除的顶点。在本例中, V_1 、 V_2 是被删除的顶点。为了有效利用空间, 将这些被删除的顶点改写成新顶点, 并给出相应的数据结构。在本例中, 分别用 V_1 、 V_2 改写成新顶点 V_9 、 V_{10} 的数据即完成了整理工作, 形成了新的三角化结构。整理后的数据结构由表 6. 3 给出。

(9) 引入新的点。

重复步骤(2)至步骤(9)的工作, 不断引入新的点, 直至其中的点全部参加到平面的划分中去, 也就完成了 Delaunay 三角化进程。

上面所描述的步骤显然过于烦琐,而且随着 $\{P_i\}$ 中点个数的增多,工作量将平方级增大。若采用一种树状搜索的方法,将有效地加速其进程。只要能给出生成足够数量节点的方法,并使生成过程系统化,则 Delaunay 三角化方法可具有相当的自动化程度。

三、蜕化的处理

通常情况下,任意一组点在平面上的 Delaunay 三角化是惟一的,但在某些情况下,三角化是不惟一的,这种情况被称做蜕化。这一点从 Voronoi 多边形的定义即可知道。在二维问题中,可能发生的蜕化有以下几种: 两个点重合; 应该构成三角形的三个顶点共线; 四个或四个以上的点共圆。对于这三种情况,在计算中稍加注意即可避免。

四、网格的优化

按以上方法所生成的三角形,其形状尽管相对于给定的节点是优化的,但它必然要受到节点位置的影响。如果适当调整网格点的位置,网格质量将进一步提高,这称为网格的光顺。常用的一种网格光顺方法称为 Laplacian 光顺方法。这种光顺技术是通过将节点向这个节点周围的三角形所构成的多边形的形心移动来实现的。如果 $P_i(x_i, y_i)$ 为一个内部节点, $N(P_i)$ 为与 P_i 相连的节点总数,则光顺迭代技术可表示为

$$x_i = \frac{\sum_{k=1}^{N(P_i)} x_k}{N(P_i)}, \quad y_i = \frac{\sum_{k=1}^{N(P_i)} y_k}{N(P_i)}$$

光顺方法可以使网格更均匀,三角形更接近于正三角形。均匀的网格对于保证计算的精度和收敛特性都有着极其重要的作用。

五、Delaunay 方法的发展

构造 Delaunay/ Voronoi 图形的方法有 Bowyer 算法和 Watson 算法等。在网格生成的应用中,较广泛的是采用 Bowyer 算法。Delaunay/ Voronoi 图形只解决了给定点集连接成一组三角形的问题,网格生成还需首先产生点集。早期应用 Delaunay 方法的工作是用结构网格产生点集,例如 A. Jameson, T. J. Baker 和 N. P. Weatherili 用保角变换方法对飞机各部件独立地生成结构网格,然后用 Delaunay 方法连接以形成整机外形的非结构网格。这一方法与分区网格生成的 Chimera 方法相似,差别之处是这里采用 Delaunay 方法连接各部件的网格点,取代了 Chimera 方法中复杂的“挖洞”、建立人工边界和不保证守恒性的线性插值等技术。

作为网格生成方法, Delaunay 方法后来发展的重点在于研究如何自动生成

任意外形的点集。一种常用的方法是将计算域分成一些较大的子域,再对各子域分别按修正的四叉树(Quadtree)、八叉树(Octree),或者按全叉树(Omnitree)分解技术剖分,直到最大单元的尺度与边界上离散的尺度相当为止。

近来的新发展是用推进阵面的方法产生点集,再用 Delaunay 方法连接,或用迭代点插入和局部重连等方法连接。重连是根据所要求的质量准则优化的反复连接过程,因而大大改进了所生成网格的质量。

推进阵面法是网格和节点同时生成的非结构网格生成方法(R. Lohner, 1988)。根据网格密度的需要,在平面上布置一些控制点,并给每一控制点定义一个尺度,连接这些控制点即可将平面划分成大块的三角形背景网格。每一三角形背景网格中,任一点的尺度都可以根据该三角形三个顶点的尺度插值得到,因此,相当于布置了一个遍及整个平面的网格尺度函数。推进阵面法生成非结构网格的质量对背景网格的依赖性很大,如何生成较好的背景网格对此法是否成功极为重要。

Delaunay 方法的优点是能得到尽可能等边的高质量三角形单元,比推进阵面法生成效率高;但由于节点的产生和连接是彼此独立的,在连点过程中就有可能破坏原有的边界,即不能保证边界的完整性,因此在连点过程中必须对边界实行保护,或在连点后对被破坏的边界予以修复。这是 Delaunay 方法的最大弱点。应用推进阵面法时节点的生成和三角形的形成是同步的,推进是由边界向区域内部进行,无边界破坏问题,因而边界附近的网格质量较高。但此法对背景网格的依赖性大,因此如何生成背景网格将是此法成败的关键。同时,每推进一步仅生成一个单元,因而效率较低。鉴于两种方法各有优缺点,一些研究尝试了结合两种方法来生成网格。这里不再详细叙述。

6.6 结构/非结构混合网格

在解决复杂外形的网格生成问题时,结构化网格采用多块网格分区拼接和嵌套等技术,但是分区网格拼接有时会产生扭曲、变形的网格;多块嵌套网格在重叠区内的信息传递异常复杂。而且,结构化网格的生成过程与特定的几何形状有关,一旦形状改变,整个网格生成过程都需要做出较大的改变。因此,结构化网格不适合复杂外形网格生成的通用化和自动化。

非结构网格虽然容易适应复杂外形,便于进行自适应加密,但相比结构网格也存在一些缺点,主要有: 非结构网格方法需要记忆单元节点之间的关联信息,因为数据结构的随机性增加了寻址时间; 非结构网格不具备方向性,必须计算并记忆各单元面沿坐标轴方向的梯度分量; 结构网格中,成熟的流场计算方法尚不能简单地用于非结构网格,应用多重网格技术遇到困难。针对两种网格的特

点发展起来的结构/非结构混合网格充分利用两种网格互补的优点,能有效解决复杂流场的网格生成问题。目前文献中可见的混合网格大致有以下两大类。

一、粘流计算的混合网格

M. J. Aftosmis 等人(1995)发现,在物面附近使用拉伸比大的三角形单元并不比四边形单元更精确,这是由于三角形单元的最大边造成的不良影响。他们建议在边界层区内清除不必要的对角边,形成四边形单元,从而构成一种混合网格。如二维计算时在边壁区生成贴体的结构网格,并使其连接外流场中的非结构网格(R. P. Koomullil, 1996);三维计算时在物面附近生成截面为三角形的三棱柱形半结构网格,再与外流场中的非结构网格构成混合网格(K. Nakahashi, 1993; V. Venkatakrishnan, 1996)。

采用三棱柱形半结构网格进行外部粘性绕流计算的效率高。对于同样的网格节点数,六面体单元数仅为四面体的 $1/5$,边棱数仅为其 $1/6$,因而计算量减少,而且三棱柱半结构网格的数据结构与二维三角形网格相似,比起四面体对内存的需求减少,查询时间也会减少;由于其离开物面方向的结构性和层次性,适合边界层中采用薄层假设的粘性项计算和使用简单的 Baldwin-Lomax 湍流模型;由于在物面上仍保持非结构网格的特点,因此适合复杂外形,可以方便地采用自适应技术构造网格。

二、多体复杂外形的混合网格

这实际上是对重叠结构网格技术的一种补充,即先对多体中的每一个单体或复杂外形中的每一个子域生成贴体结构网格,再在相邻两子域的重叠区中挖洞。洞体由非结构网格来填充,实现相邻两网格间的通量守恒。“拉链网格”(W. V. Chan, 1995)和龙形网格(K. H. Kao, 1995)皆属此类。

矩形网格是结构网格中最简单的一种,也是 CFD 中最早使用的计算网格。矩形网格中不必进行雅克比矩阵的计算,具有比贴体网格计算更简单、更快的优点,其困难在于不好处理边界。因而,最简单的一种混合网格由近物面的非结构网格和远离物面的矩形网格构成。

6.7 自适应直角网格

直角网格即矩形网格,是数值计算中最早使用,也是最易生成的一种网格,但直角网格往往不能较准确地满足边界条件。近年来,人们开始采用自适应直角网格(adaptive cartesian grids)来计算复杂几何形状的流场(J. E. Melton, 1995, W. Smith 等人, 1996)。自适应直角网格方法是在原始的均匀直角网格基础上,

根据物形特点或流场特点在局部区域内不断进行网格细化,实现精度符合要求、分布合理的一种非均匀的直角网格。自适应直角网格生成的特征是采用叉树结构形式管理数据、局部区域网格细化和物面单元的切割。

自适应直角网格不必先生成表面网格再生成空间网格,可以一次性生成计算所需的网格;相比贴体结构网格,它不需要从物理空间到计算空间的转换,因而流场计算中不再需要计算雅克比矩阵。相比于结构网格和非结构网格,自适应直角网格的数据结构和网格生成过程都相对简单,比较容易做自适应计算。

由于必须进行自适应的网格细化,因而要求网格计算方法经济有效。相对于贴体的结构网格和非结构网格,它在描述外形的精度上要低一些,不能做到完全贴体。为实现贴体,还必须对贴近物面的网格做特殊的处理。这一节简单介绍自适应直角网格方法的数据结构和物面单元的切割,具体应用这一方法进行数值模拟还需了解更多细节。

一、自适应直角网格方法的数据结构

自适应直角网格生成采用叉树数据结构记录网格的生成过程。基本数据结构是四叉树(二维)和八叉树(三维),即由一个父网格单元均匀地分出四个或八个子网格单元。图6.7(a)、(b)表示在叉树结构指导下,单个网格的细分过程。如二维情形(a),一个基本网格单元(称父网格)划分成四个下一级别的子网格,子网格可以继续划分成四个更下一级别的子网格;与划分过程同步,存储各个单元在树形结构中的级别和相邻网格单元的信息。利用这种树形结构,在流场计算时可以很快找到互为关联的必要信息。

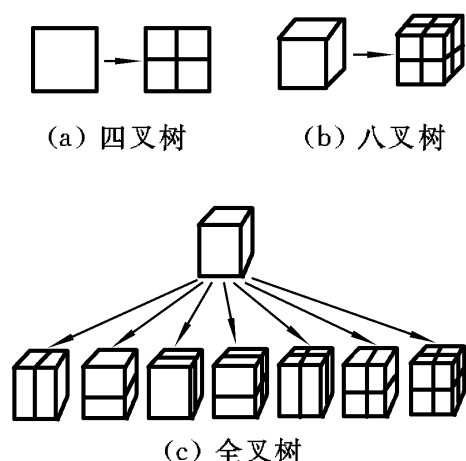


图 6.7 自适应直角网格的
细化过程

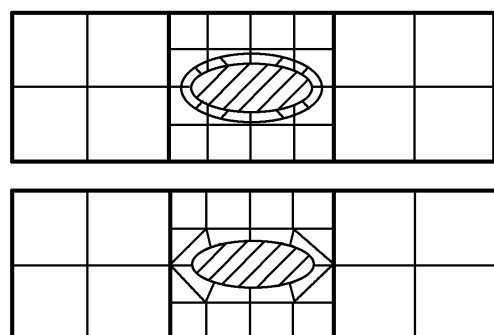


图 6.8 自适应直角网格的
物面切割

采用叉树数据结构生成网格的过程,就是从覆盖整个计算区域的一个或几个根网格单元出发,根据一定的条件和判断,由一个单元划分出若干子单元,通过不断循环产生符合要求的网格单元结构的过程。图6.8是物面嵌入直角网格

后,物面单元被切割情况的示意图。

二维四叉树或三维八叉树的网格划分是各向同性的,即在各坐标方向均匀细分一个单元。这会在壁面附近造成浪费,不必要地增大网格数目。各向同性的自适应直角网格适用于求解无粘欧拉方程,未考虑粘流流场中壁面边界层各向异性的特点。Wu(1996)提出了一种各向异性加密网格的方法,并结合有限差分方法求解了可压缩层流粘性流动的N-S方程。

目前在基本叉树数据结构的基础上,已发展并应用全叉树(2^n tree 或 Omnitree, Z. J. Wang, 1999)的概念,即在每一个单元都可以任意选择产生二个、四个和八个子单元。全叉树使得网格具有了各向异性的特征,充分利用了网格形状的变化,加快了网格生成速度,减少了所生成的网格数量。图6.7(c)显示在三维网格生成中,基于全叉树细分一个父网格单元的全部可能情况。

在叉树数据结构的基础上,针对数据的组织和管理,采用点、线、面和网格的四级单元数据管理模式。其中,点单元级别最低,由空间坐标定义;网格单元级别最高,是整个生成过程的目标。高级别数据由低级别数据组成,每个单元都具有各自的属性。例如,网格由许多面单元组成,同时网格具有中心点坐标、网格类型、相邻网格单元序号等属性;网格面具有方向属性,同时也依次地给出了网格面两边网格的序号。

四级数据模式简化了数据的组织和管理,而且为流场计算、自适应算法的顺利进行打下了良好的基础。

二、物面切割和网格生成

在形成围绕物体的叉树网格之后,物体的几何外形将从一部分网格中被切割出来,从而产生一个围绕着物体的不规则多面体的边界,使网格适应物体的外形。

1. 物面切割与调整

在任取外边界内的直角网格中嵌入物体,寻找物体与直角网格的交线(面)。在此过程中可形成三种网格单元:未被切割的物体外部网格单元(一般的直角网格),被物面切割的网格单元和物体内部的网格单元。对最后一种网格单元,不应做流场计算,应予删除。对于任意给定的物体外形,被切割的网格单元可能会有不同的形状和大小。如有时被切割的网格单元很小,导致计算格式的不稳定时,就必须将这种小网格并入周围的网格单元,或进行网格再构造。

判断空间网格单元是否与物面几何外形相交可有两种方法:一是对描述几何外形的每一个单元判断其是否与所指定的空间网格单元相交,但此法费时;另一种是J. Bonet 和 J. Peraire(1991)建议的方法,即对描述几何外形的几何单元建立二叉树结构,判断无子网格的几何单元是否与空间网格单元相交。

探测物体内部的网格单元,可将空间网格单元的角点做垂直投影,判断投影是否与几何单元相交。若每条投影线切割物体的次数是奇数,则此网格单元是物体内的单元。

2. 自适应网格细化

网格生成和流场计算时,必须进行自适应的网格细化和调整,包括被切割网格单元的细化、以曲率变化为基础的网格细化和流场解要求的网格细化等三种细化。

第一种细化是为了实现从流场外较粗网格到物面上精细网格的光滑过渡,以保证物面网格达到用户要求的精度。第二种细化是根据物面上两相邻网格单元的斜率变化,若超过规定的要求,则对这两个网格单元及其相邻的单元都要进行细化,以保证物面曲率半径大的地方网格细的要求。第三种细化是根据流场解的结果,例如相邻两网格单元的合速度差超过用户规定的限制(如5%),则需对这两个网格进行细化,以保证满足流场中梯度大处网格细的要求,当然这种细化应在解达到足够收敛程度时才进行。

3. 网格光顺处理

直角网格方法的特点之一是引入了被切割的网格单元,因此可能出现具有“不理想”特性的网格单元,它们会使数据复杂化或使解蜕化,必须通过光顺处理消除这种网格的“不理想”特性。如: 相邻两网格单元的级别差大于1; 垂直于物体切割方向的网格单元的级别差不为0; 通过外边界的网格单元级别差不为0; 三角形网格与其周围网格的级别差不为0; 网格中存在“空洞”; 一个网格单元中存在两个切割面; 在物体后缘,网格级别差不为0; 物体太薄,其上、下表面处在相邻的两个单元之内。

第 7 章 数值模拟二维不可压缩粘性 流体绕圆柱的流动

本章介绍钝物体绕流的流体动力特性和数值计算方法。以粘性流体绕圆柱的二维层流流动为例,具体说明数值模拟流动现象的过程,讨论了流函数-涡量法的高阶混合有限差分格式、初始条件和边界条件的处理方法、流体动力计算,以及动态流动显示的染色线生成方法。

7.1 钝物体绕流的流体动力特性

钝物体的尾迹流动伴随着复杂的分离和旋涡脱落现象。绕流作用在物体上的纵向和横向流体动力载荷会诱发弹性结构的振动响应。大量的工程结构都是钝物体,如高层建筑和大型桥梁。风载对于高数百米的大楼和几公里长的桥梁,是仅次于地震的主要载荷。此外,海岸工程结构、流体机械、核反应堆和工业热交换器中的管阵以及架空电缆、海底管线等经常遇到流体诱发振动的问题。航空航天飞行器、舰船和高速车辆等交通运输工具也有流动分离、旋涡诱导力等问题。

钝物体绕流和流致振动问题是流体力学的经典研究课题之一。V. Strouhal 在 1878 年就发现风吹过弦线时,弦发出的声调频率和风速成正比,和弦线直径成反比。H. Benard 在 1908 年观察并研究了圆柱尾流中的周期性旋涡脱落现象。在寻求深入了解尾流旋涡机制和控制绕流的方法中,各种先进的测量手段和实验方法发挥了重要作用。本节将介绍钝物体绕流的基本特征和典型圆柱绕流问题的实验研究成果。

一、钝物体绕流的基本特征

流体绕过钝物体时,物体表面边界层流动在逆压梯度下分离,或流动在角点处分离,形成向下游拖曳的剪切层。钝体两侧的剪切层相互作用,在一定的雷诺数范围产生规则的旋涡结构,诱发顺气流方向和垂直于气流方向的作用力。旋涡的形成和脱落呈现周期性,表征这一特性的相似准则数为斯特鲁哈(Strouhal) 数,它的定义是

$$St = \frac{f_s D}{U} \quad (7.1.1)$$

其中, f_s 是钝物体单侧旋涡脱落的频率, D 是钝体直径或迎风截面的特征尺度,

U 是未受干扰的自由来流速度。斯特鲁哈数随雷诺数变化, 对于不同形状的钝体, 其变化规律不同。

钝物体按其形状不同可分为两类, 一类表面呈光滑曲线, 如圆柱、椭圆柱、球等, 绕流边界层在物面的分离点不是固定的, 分离位置和绕流特性随雷诺数的变化有较明显的变化; 另一类表面有角点, 如矩形柱等, 角点成为固定的分离点, 并可能在物面再附和重新分离, 这一类物体的绕流特性在较大雷诺数范围内变化不明显。

钝体绕流阻力由压差阻力和摩擦阻力组成。压差阻力可由压强沿物面分布的积分求出。钝体较高的阻力系数主要来源于较低的钝体底部(背风面)压强。相对而言, 钝体摩擦阻力在总阻力中所占的比例较低。钝体绕流的分离剪切层对钝体底部流体有卷吸作用, 使底部产生低压; 剪切层外侧的压差迫使剪切层弯向尾流轴线, 部分流体返回钝体尾部分离区; 从时均流态看, 形成钝体后方的回流区。卷吸作用使底部压强分布相对均匀, 并近似等于分离点处边界层外的压强。底部压强系数可表示为

$$C_{p_b} = \frac{p_b - p}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (7.1.2)$$

式中, p 和 U 为来流的静压和速度, p_b 为底部压强。对于三维钝体绕流, 压差阻力仍然是总阻力的主要部分。若对物体形状进行流线型处理, 则压差阻力明显下降。

二、圆柱绕流

在小马赫数时, 光滑圆柱体的周期性尾流只是雷诺数的函数。按圆柱体直径计算的雷诺数很小时, 流体并不脱离圆柱表面。当雷诺数增大, 紧贴圆柱背面形成一对稳定的旋涡。当雷诺数继续增大时, 旋涡就拉长, 一直到旋涡之一脱离圆柱体。于是, 一个周期性的尾流和交错排列的涡街就形成了(见图7.1)。直到 $Re = 150$, 旋涡脱落形成层流涡街, 边界层分离点的辐角为 $\pm 80^\circ$; 当 $150 < Re < 300$ 时, 层流涡街转变为湍流涡街。雷诺数大于300以后, 先后经历亚临界区、临界区和超临界区。在临界区, 边界层分离, 转变为湍流分离($\pm 110^\circ$), 旋涡由规则脱落变为不规则, 流动呈现混沌状态, 圆柱阻力系数急剧下降。在超临界区, 湍流涡街重新建立。稳定的层流涡街和湍流涡街有经验公式:

$$\begin{aligned} St &= 0.212 \left(1 - \frac{21.2}{Re} \right), \quad 50 < Re < 150 \\ St &= 0.212 \left(1 - \frac{12.7}{Re} \right), \quad 300 < Re < 2000 \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

圆柱表面瞬时压强分布与旋涡脱落相联系。钝物体尾迹中, 交替变化的旋涡

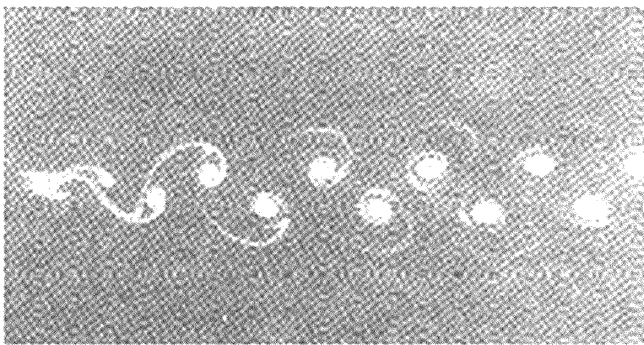


图 7.1 圆柱体旋涡脱落形成的涡街, $Re = 100$

将诱发对圆柱的周期性变化的力。圆柱表面压强分布依赖于雷诺数。因此, 其阻力特性也是随雷诺数而改变的。图 7.2 是圆柱体阻力系数随雷诺数变化的曲线。在雷诺数较小范围, 阻力系数随雷诺数增大而减小, 随后是阻力系数变化不大的区域。在临界状态, 阻力系数急剧下降, 反映物面边界层转换为湍流, 分离点后移, 减小了低压尾流区的宽度。

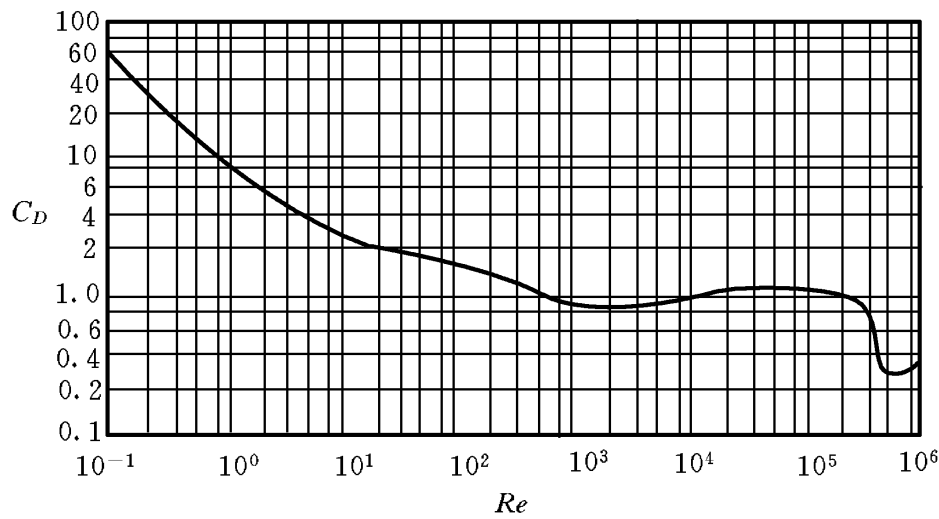


图 7.2 圆柱体阻力系数随雷诺数变化的曲线

以上仅介绍了二维圆柱特性。然而, 在大多实际情况下, 圆柱体有一个或两个自由端, 如烟囱、储油罐和雷达天线等。有限长圆柱的自由端发生三维绕流, 端部的旋涡流形成由端部向尾流的流动, 局部地将旋涡生成区推向下游, 在旋涡形成前拓宽分离剪切层, 引起脱落频率下降。同时, 进入尾流的流动增加了底部压强, 引起局部阻力下降, 因此, 使有限长柱体的阻力系数减小。

圆柱尾流的测量实验和稳定性理论分析证实, 当分离剪切层转变为湍流后, 产生三维的流向涡结构。即使没有端部影响, 用二维模型计算得到的升力和阻力, 明显大于三维模拟的结果。后者更符合实际情况 (C. H. Williamson, 1995; M. Breuer, 1998)。

一般地, 圆柱绕流的时均升力为零。由于旋涡规则脱落, 圆柱升力和阻力都呈现脉动变化。在对称分离的情况下, 阻力的脉动频率是升力的两倍。在临界区

存在不连续的跃变, 伴随阻力系数下降出现双稳态非对称流态, 升力与阻力有相同频率, 出现升力系数不为零的情况。双稳态, 即在同一雷诺数下有两个斯特鲁哈数随机地出现, 并都是稳定的。

7.2 流函数-涡量法解圆柱绕流问题的差分格式

一、不可压缩粘性流体平面流动的流函数方程和涡量方程

第 2 章已给出了不可压缩流体平面流动流函数和涡量的定义。第 6 章给出了正交曲线坐标(,)下的涡量动力学方程(6. 1. 15)和流函数方程(6. 1. 16)。在圆柱绕流问题中, 一般把圆柱半径作为特征长度。注意到雷诺数是以圆柱直径作为特征长度, 因此无量纲方程的雷诺数项要相应地乘上因子 2。这里的控制方程为

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) \tag{7.2.1}$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = - \tag{7.2.2}$$

方程(7.2.1)中, 雷诺数 $Re= UD/ \nu$ (D 是圆柱直径, ν 是运动粘度, U 是均匀来流速度), h_1, h_2 是正交曲线坐标下的拉梅系数。

在物理域内, 沿 $\xi = \text{常数}$ 和 $\eta = \text{常数}$ 的曲线的切向速度分量

$$V_\xi = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad V_\eta = - \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \tag{7.2.3}$$

涡量动力学方程可简写为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + V \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right) \tag{7.2.4}$$

式中, 一阶导数项的系数记为

$$U = \frac{V_\eta}{h_1} - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \\ U = \frac{V_\xi}{h_2} - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \tag{7.2.5}$$

流函数方程(7.2.2)展开后可写为

$$g_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + g_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + g_3 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + g_4 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = - \tag{7.2.6}$$

式中, 二阶和一阶导数项的系数为

$$g_1 = \frac{1}{h^2}, g_2 = \frac{1}{h^2}, g_3 = \frac{1}{h} - \frac{h}{h}, g_4 = \frac{1}{h} - \frac{h}{h} \quad (7.2.7)$$

二、涡量方程的混合差分格式

在这一章的计算中,采用6.2节的保角映射生成法生成贴体坐标网格。实际上,这样生成的网格坐标线也是不可压缩、无粘、均匀来流绕圆柱体无环量流动的流线和等势线。圆表面是 $\psi = 0$ 的流线。

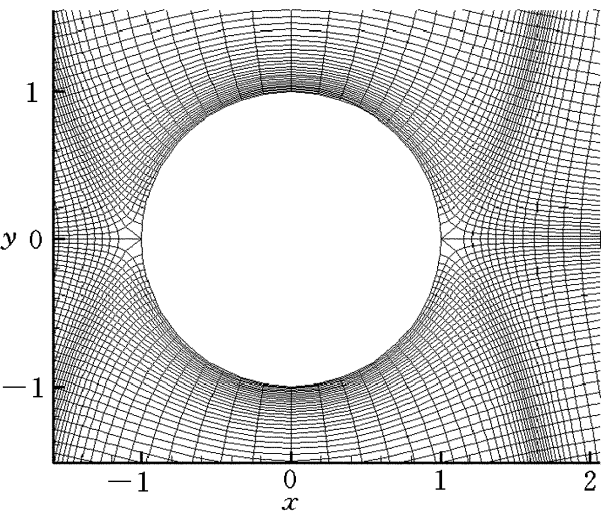


图7.3 圆柱绕流计算的网格(部分)

物理平面上,原点设在圆心的网格呈上、下对称和前、后对称的形式。但是,在上游方向只取10倍半径长度的网格,下游方向取到60倍半径长度的距离(见图7.3)。

在大雷诺数情况,涡量方程(7.2.4)左边的对流项不能用二阶差分格式。因为它的误差可能会大于粘性项本身。经验表明,采用三阶迎风格式和四阶中心差分格式的混合格式比较好。设 L_3 、 L_4 分别代表三阶格式和四阶格式的算子,则有混合格式

$$L = L_3 + (1 - \alpha)L_4 \quad (7.2.8)$$

式中,加权因子 α 定义为

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\exp(U^* \Delta x / \nu)} \quad (7.2.9)$$

式中, U^* 分别用 U 、 U 代入,相应的 Δx 为 Δx 和 Δy 。经验表明,当雷诺数超过1000时,中心差分格式引起的伪扩散效应使计算不易收敛,此时可简单令 $\alpha = 1$,即只用迎风格式计算对流项。式(7.2.4)左边对流项的三阶迎风格式为

$$U \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{U_{i,j} + \alpha U_{i,j} \Delta x}{2} \frac{\omega_{i+1,j} + 3\omega_{i,j} - 6\omega_{i-1,j} + \omega_{i-2,j}}{6} + \frac{U_{i,j} - \alpha U_{i,j} \Delta x}{2} \frac{\omega_{i+2,j} + 6\omega_{i+1,j} - 3\omega_{i,j} - 2\omega_{i-1,j}}{6} \quad (7.2.10)$$

$$U \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{U_{i,j} + \alpha U_{i,j} \Delta y}{2} \frac{\omega_{i,j+1} + 3\omega_{i,j} - 6\omega_{i,j-1} + \omega_{i,j-2}}{6} + \frac{U_{i,j} - \alpha U_{i,j} \Delta y}{2} \frac{\omega_{i,j+2} + 6\omega_{i,j+1} - 3\omega_{i,j} - 2\omega_{i,j-1}}{6} \quad (7.2.11)$$

式中, x 、 y 方向的标号分别为 i 、 j 。四阶中心差分格式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-\frac{1}{h^2} u_{i+2,j} + \frac{8}{12} \frac{1}{h^2} u_{i+1,j} - \frac{8}{12} \frac{1}{h^2} u_{i-1,j} + \frac{1}{12} \frac{1}{h^2} u_{i-2,j}}{12} \quad (7.2.12)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-\frac{1}{h^2} u_{i,j+2} + \frac{8}{12} \frac{1}{h^2} u_{i,j+1} - \frac{8}{12} \frac{1}{h^2} u_{i,j-1} + \frac{1}{12} \frac{1}{h^2} u_{i,j-2}}{12} \quad (7.2.13)$$

涡量方程(7.2.4)右边的二阶导数可用二阶中心差分格式

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\frac{1}{h^2} \omega_{i+1,j} - \frac{2}{h^2} \omega_{i,j} + \frac{1}{h^2} \omega_{i-1,j}}{2} \quad (7.2.14)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\frac{1}{h^2} \omega_{i,j+1} - \frac{2}{h^2} \omega_{i,j} + \frac{1}{h^2} \omega_{i,j-1}}{2} \quad (7.2.15)$$

涡量方程(7.2.2)左边的时间导数用如下形式的差分格式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\omega^{n+1/2} - \omega^n}{t}$$

当时间导数在 $n+1/2$ 时间层上取值, 时间步长为 $\Delta t/2$ 时, 上式相当于二阶精度的中心差分格式, 即

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \bigg|_{i,j}^{n+1/2} = \frac{\omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j}^n}{t} \quad (7.2.16)$$

相应地, 空间方向的差分也必须取在 $n+1/2$ 时间层上, 这里用 n 和 $n+1$ 两个时间层的空间差分格式的平均作为 $n+1/2$ 时间层上的差分格式, 即令

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \bigg|_{i,j}^{n+1/2} = \frac{\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \bigg|_{i,j}^{n+1} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \bigg|_{i,j}^n}{2} \quad (7.2.17)$$

式(7.2.3)、式(7.2.5)、式(7.2.7)中各偏导数均用二阶中心差分格式计算。

采用以上差分格式后, 涡量方程的差分方程形式表达如下:

$$\begin{aligned} & \frac{2(\omega^{n+1/2} - \omega^n)}{t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} \bigg|_3^n + U \frac{\partial \omega}{\partial x} \bigg|_3^{n+1} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} \bigg|_3^n \\ & + U \frac{\partial \omega}{\partial x} \bigg|_3^{n+1} + (1 - \frac{1}{3}) U \frac{\partial \omega}{\partial x} \bigg|_3^n + (1 - \frac{1}{3}) U \frac{\partial \omega}{\partial x} \bigg|_3^{n+1} \\ & + (1 - \frac{1}{3}) U \frac{\partial \omega}{\partial x} \bigg|_3^n + (1 - \frac{1}{3}) U \frac{\partial \omega}{\partial x} \bigg|_3^{n+1} \\ & = \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \bigg|_2^n + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \bigg|_2^{n+1} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \bigg|_2^n + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \bigg|_2^{n+1} \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

式中, 下标 2、3、4 表示括弧内的偏导数项分别用二、三、四阶差分格式离散, 上标表示取值的时间层位置。差分格式整理为下列简写形式

$$\begin{aligned} c_1 \omega_{i,j}^{n+1/2} = & c_2 \omega_{i,j}^n + c_3 (\omega_{i,j+2}^{n+1} + \omega_{i,j+2}^n) + c_4 (\omega_{i,j+1}^{n+1} + \omega_{i,j+1}^n) \\ & + c_5 (\omega_{i,j-1}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^n) + c_6 (\omega_{i,j-2}^{n+1} + \omega_{i,j-2}^n) + c_7 (\omega_{i+2,j}^{n+1} + \omega_{i+2,j}^n) \\ & + c_8 (\omega_{i+1,j}^{n+1} + \omega_{i+1,j}^n) + c_9 (\omega_{i-1,j}^{n+1} + \omega_{i-1,j}^n) + c_{10} (\omega_{i-2,j}^{n+1} + \omega_{i-2,j}^n) \end{aligned} \quad (7.2.19)$$

式中, 系数 $c_1 \sim c_{10}$ 分别为

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -\frac{2}{t} - \frac{\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}}{2} - \frac{\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y}}{2} - \frac{4}{h^2} \frac{1}{Re} - \frac{4}{h^2} \frac{1}{Re} \\
 c_2 &= -\frac{2}{t} + \frac{\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}}{2} + \frac{\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y}}{2} + \frac{4}{h^2} \frac{1}{Re} + \frac{4}{h^2} \frac{1}{Re} \\
 c_3 &= -\frac{U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}}{12} \\
 c_4 &= \frac{2U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}}{3} - \frac{2}{h^2} \frac{1}{Re} \\
 c_5 &= -\frac{2U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}}{3} - \frac{2}{h^2} \frac{1}{Re} \\
 c_6 &= \frac{U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}}{12} \\
 c_7 &= -\frac{U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}}{12} \\
 c_8 &= \frac{2U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}}{3} - \frac{2}{h^2} \frac{1}{Re} \\
 c_9 &= -\frac{2U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}}{3} - \frac{2}{h^2} \frac{1}{Re} \\
 c_{10} &= \frac{U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}}{12}
 \end{aligned} \tag{7.2.20}$$

从圆柱表面向外的第二层网格点不能用加权平均的三阶迎风格式和四阶中心差分格式, 因为缺少差分格式中的域外(进入圆柱内部)邻点。这时直接用差分格式(7.2.10)和式(7.2.11)中偏向流体侧的一个三阶格式, 相应修改式(7.2.20)中差分格式各系数。比较修改后的系数和式(7.2.20)中的系数可以发现, 这个变化相当于在系数 $c_1 \sim c_{10}$ 的表达式中, 对应上半圆用 $-U$ 代替 $\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}$ 对应下半圆用 U 代替 $\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}$ 对应左驻点用 U 代替 $\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}$ 对应右驻点用 $-U$ 代替 $\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}$

三、流函数方程的中心差分格式

流函数方程(7.2.6)中的一、二阶导数项都用二阶精度的中心差分格式离散, 即有

$$\begin{aligned}
 &g_1 \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{2} + g_2 \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{2} \\
 &+ g_3 \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2} + g_4 \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2} = -\psi_{i,j}
 \end{aligned}$$

上式整理为下列简写形式

$$\psi_{i,j} = (b_1 \psi_{i+1,j} + b_2 \psi_{i-1,j} + b_3 \psi_{i,j+1} + b_4 \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j}) / b_0 \tag{7.2.21}$$

式中

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{2g_1}{2} + \frac{2g_2}{2}, & b_1 &= \frac{g_1}{2} + \frac{g_3}{2} \\ b_2 &= \frac{g_1}{2} - \frac{g_3}{2}, & b_3 &= \frac{g_2}{2} + \frac{g_4}{2}, & b_4 &= \frac{g_2}{2} - \frac{g_4}{2} \end{aligned} \tag{7.2.22}$$

四、松弛迭代法

流动控制方程的离散产生一组线性代数方程, 代数方程组的复杂性和规模大小与网格点数目、离散方法及问题的维数有关。任何有效的方法都可以用来解代数方程组, 但受到计算机的能力限制。有两类解法, 即直接法和间接法(迭代法)。简单的问题用直接法, 求解N 个未知量的N 个代数方程, 其运算量是N³ 的量级, 需要在内存同时存储方程组的N² 个系数。

迭代法是一种从已知近似解计算新的近似解的规则。如式(7.2.21) 可写为

$$u_{i,j}^{(m+1)} = (b_1 u_{i+1,j}^{(m)} + b_2 u_{i-1,j}^{(m)} + b_3 u_{i,j+1}^{(m)} + b_4 u_{i,j-1}^{(m)} + u_{i,j}) / b_0 \tag{7.2.23}$$

式中, 上标m 表示迭代的次数。这就是一种简单迭代公式。此式表示了椭圆型问题中解的分布的均匀化倾向。迭代法逐步修正, 使近似解收敛到满足方程的极限解。

简单迭代法每次迭代需要保留旧值给邻点的迭代用。如果每次尽可能的用已经更新了的值, 就不必存储原有的旧值。由于提前使用更新值可使收敛速度成倍增加。

不同规则产生不同的迭代法, 以松弛法最为常用。松弛迭代法将上面的差分格式写成

$$u_{i,j}^{(m+1)} = \omega u_{i,j} + (1-\omega) u_{i,j}^{(m)} + (b_1 u_{i+1,j}^{(m)} + b_2 u_{i-1,j}^{(m)} + b_3 u_{i,j+1}^{(m)} + b_4 u_{i,j-1}^{(m)} + u_{i,j}) / b_0$$

方程右边用原有旧值或尽可能用更新值进行迭代。此式一般写成

$$u_{i,j}^{(m+1)} = (1 - \omega) u_{i,j} + \omega (b_1 u_{i+1,j}^{(m)} + b_2 u_{i-1,j}^{(m)} + b_3 u_{i,j+1}^{(m)} + b_4 u_{i,j-1}^{(m)} + u_{i,j}) / b_0 \tag{7.2.24}$$

上式表示, 每次迭代用一增量修正旧值。式中 ω 称为松弛因子, 用于控制修正的幅度。可以证明, $\omega < 2$ 的迭代都是收敛的。 $\omega < 1$ 称为低松弛, 为得到较快的收敛速度, 最优值 ω^* 在 $1 < \omega < 2$ 之间的超松弛范围。对于大雷诺数或计算压强的方程的数值计算, 较大的修正幅度导致解迅速发散, 这时需要用较小的超松弛因子或者用低松弛因子。

对于简单迭代法, 迭代中的扫描顺序与收敛无关。松弛法则不然。扫描顺序不同导致不同的迭代方案。对于不同的扫描顺序, 最优 ω 值及最终的收敛速度是相同的。但首先用 $\omega = 1$ 有利于抑制迭代误差, 以后再用最优值 ω^* 。

一般情况下, 关于函数u 的线性代数方程组可写为

$$\sum_j a_{ij} u_j = b_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \tag{7.2.25}$$

规定一种迭代次序后, 简单迭代为

$$u_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} u_j^{(m)} \right) \tag{7.2.26}$$

松弛法为

$$u_i^{(m+1)} = (1-\omega) u_i^{(m)} + \omega \left(\frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} a_{ij} u_j^{(m+1)} - \sum_{j > i} a_{ij} u_j^{(m)} \right) \right) \tag{7.2.27}$$

对于绕流圆柱体的计算, 涡量方程可用简单迭代法求解, 流函数方程则用松弛迭代法求解。

迭代法的基本思想是多次反复应用相对简单的算法直到解收敛。典型的一次迭代有 N 个运算, 但无法事先确定迭代次数。迭代次数有时非常大, 而且不能保证迭代一定收敛, 除非方程组满足一定的准则。迭代法的主要优点是只有非零系数需要内存。有限差分格式规律性强, 易编程。对于通常非常大的方程组, 往往首选迭代法。用迭代法, 存储、运算都比较节省。但对于某些问题, 迭代法可能发散或收敛速度慢, 这时仍需用直接法(冯康, 1978)。

7.3 初始条件和边界条件

一、初始条件

求解流函数方程和非定常的涡量动力学方程时, 将无粘、不可压缩流体平面流动的流函数和无旋条件作为初始条件。将定常来流绕圆柱体的稳态流动状态作为在初始条件下非定常发展过程的渐近结果, 初始条件是第一步迭代的初值。

沿 x 方向的均匀来流速度为 U , 圆半径为 a 。无量纲来流速度值与半径值均取为 1, 得到无粘、不可压缩流体绕圆柱无环量平面流动的流函数为

$$\psi(x, y) = y - \frac{1}{x^2 + y^2} \tag{7.3.1}$$

上式作为粘性流体绕流圆柱体计算的流函数初始条件, 涡量初始条件是 $\omega = 0$ 。

二、边界条件

以外边界为平行于坐标方向的矩形、内边界为圆的域为例, 说明流函数和涡量的边界条件的设定。假定边界离圆柱足够远(见图 7.4)。

1. 进口边界的流函数和涡量条件

求解域的进口(左边界)为沿 x 方向的均匀无旋来流条件, 在进口边界的速度 $u=1, v=0$ 。

于是, 设进口边界的涡量和流函数条件为

$$\omega = 0, \quad \psi = y \tag{7.3.2}$$

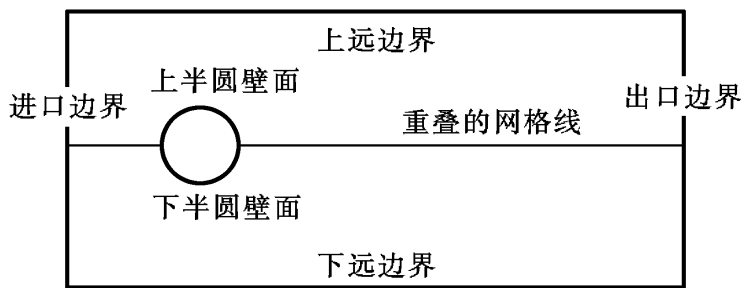


图 7.4 圆柱绕流计算网格的边界

2. 侧边界和出口的涡量条件

简单处理可以令远边界点的 $\omega = 0$, 即在边界点的差分格式中去掉涉及域外点的项。下面讨论比较准确的做法, 给出忽略粘性影响的侧面(上、下)边界和出口边界的涡量条件。在边界点利用无粘涡量方程来实现边界条件。无粘涡量方程为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{V}{h} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{V}{h} \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \tag{7.3.3}$$

在上、下边界, 离散涡量方程的 $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ 项用二阶精度迎风格式, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ 项则根据不同情况利用向后差分或向前差分。

(1) 在上远边界, $V < 0$ 时, $\omega^{n+1} = \omega^n$; $V > 0$ 时, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ 用二阶精度向后差分

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{3\omega_{i,j} - 4\omega_{i,j-1} + \omega_{i,j-2}}{2} \tag{7.3.4}$$

(2) 在下远边界, $V > 0$ 时, $\omega^{n+1} = \omega^n$; $V < 0$ 时, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ 用二阶精度向前差分

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{-3\omega_{i,j} + 4\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j+2}}{2} \tag{7.3.5}$$

(3) 在出口边界, $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ 用二阶精度迎风格式, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ 则根据情况利用向后差分。

$V < 0$ 时, $\omega^{n+1} = \omega^n$; $V > 0$ 时, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ 用二阶精度向后差分

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{3\omega_{i,j} - 4\omega_{i-1,j} + \omega_{i-2,j}}{2} \tag{7.3.6}$$

3. 壁面的流函数和涡量条件

流体力学在物理上给出的壁面条件一般是粘附条件, 对于固定物面即为法向速度和切向速度为零这两个条件。壁面法向速度为零等效于流线不可穿透条件, 即壁面曲线是一条流线(等流函数线)。流函数的参考值可以任意选取, 但这里要与式(7.3.7)规定的边界条件保持一致, 在圆表面令

$$\psi|_s = 0 \tag{7.3.7}$$

流函数方程有一个壁面条件就足够了, 壁面切向速度为零的条件将用于等价的壁面涡量条件。壁面涡量是很重要的物理量。内点的总涡量守恒, 然而在无滑移的壁面可以有涡量生成(正涡量或负涡量), 生成的涡量会在流体中扩散和随之对流。下面从壁面流函数方程导出壁面涡量与流函数的关系, 作为涡量的壁

面条件。在圆表面,流函数满足方程(7.2.6)

$$g_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + g_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + g_3 \frac{\partial \psi}{\partial x} + g_4 \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\Omega_w$$

因为壁面曲线是一条 $\psi = 0$ 的流线,这里再设其为沿 x 方向的坐标线,所以在壁面有

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \bigg|_w = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \bigg|_w = 0 \tag{7.3.8}$$

其次,壁面上速度为零的条件给出

$$u = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{x}{J} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{y}{J} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$
$$v = -\frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{y}{J} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{x}{J} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

由此可知,在壁面上

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \bigg|_w = 0 \tag{7.3.9}$$

将式(7.3.8)、式(7.3.9)代入壁面流函数方程(7.2.6),得到壁面涡量的表达式:

$$\Omega_w = -g_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \bigg|_w \tag{7.3.10}$$

在壁面附近一点,流函数的泰勒级数展开式为

$$\psi_{w+1} = \psi_w + \frac{\partial \psi}{\partial y} \bigg|_w \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \bigg|_w \frac{h^2}{4} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \bigg|_w \frac{h^3}{8} + \dots$$

式中,下标 w 表示壁面上的网格点,下标 $w+1$ 表示沿壁面外法向、最靠近壁面的网格点,这点到壁面间的距离为 h 。 ψ 的正负值分别对应上、下两个半圆。

将式(7.3.7)~式(7.3.10)代入泰勒级数展开式,并略去三阶以上的项,得到一阶近似的壁面涡量表达式为

$$\Omega_w = -\frac{1}{h^2} \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{2} \tag{7.3.11}$$

用迭代法解离散流函数方程(7.2.21),得到流函数分布后由式(7.3.11)求出壁面涡量,用此式作为离散涡量方程(7.2.19)的壁面边界条件。

壁面流函数 ψ_w 可以不等于零。如果壁面是沿 x 方向的坐标线,可类似导出相应的壁面涡量的计算公式。

4. 侧边界的流函数条件

充分远两侧面(上、下边界)的流函数取为无粘流流函数条件——式(7.3.1)。或按充分远近似,简单取为均匀流条件

$$\psi = y \tag{7.3.12}$$

5. 出口的流函数条件

对于有尾流存在的绕流问题,出口边界的流函数不能完全给定。数值试验表

明,不稳定因素会从流出边界向上游传播,造成迭代发散。在流出边界上,应尽量放宽约束,使流动能自由发展。例如,仅仅限制 y 方向速度为零,即 $v = 0$; 或进一步放宽为仅仅限制 y 方向速度沿流向的导数为零,即 $\partial v / \partial x = 0$ 。后一个约束条件用中心差分可写为

$$N_{,j} = 2 N_{-1,j} - N_{-2,j} \quad (7.3.13)$$

式中, N 表示出口边界的节点。 N_{-1} 、 N_{-2} 表示边界上游域内的两个邻点。

三、圆柱振荡尾流的启动

圆柱绕流出现振荡尾流与流动稳定性有关。但求解域的几何结构和边界条件是对称的,如果没有扰动引起流动失稳,收敛解也应该是对称的。实际流动自然会有天然的扰动源引起初始对称的流动失稳。精确的数值计算缺少这种天然的扰动源,然而经验表明,只要计算足够长的时间,它自身数值误差的积累足以诱发非对称的振荡流(Nair, 1996)。

为尽快达到稳定的振荡尾流状态,在对称边界条件下施加人为干扰仍是可取的。必须注意,一旦流场的对称性已被破坏,就要撤去人为干扰,在振荡尾流自动维持的稳定状态下才能输出有用的计算结果。

加扰动可有多种方式,例如让圆柱体先后按顺时针、反时针方向旋转,引起表面速度振荡。下面给出一个例子,是在进口边界的来流叠加小的横向扰动速度分量。

首先,按式(7.3.2)、式(7.3.12)和式(7.3.13)中的流函数边界条件进行计算,得到圆柱后方附着一对稳定的对称尾涡的结果。当无量纲时间 T 大于某个值,如 $T = T_0$ 时,开始施加人工扰动。

设小扰动幅度 ψ 是时间的函数,按来流速度 $U = 1$ 半径 $a = 1$, 给出 :

$$\psi(t) = 0.05 \tanh(0.1t) \sin(0.25 t) \quad (7.3.14)$$

$\psi(t)$ 的时间导数为扰动速度。扰动变化的周期取为接近尾流振荡周期的 $T = 8$ 。于是有

$$\psi'(t) = 0.0125 \tanh(0.1t) \cos(0.25 t) + \frac{0.005}{\cosh^2(0.1t)} \sin(0.25 t) \quad (7.3.15)$$

式中, $t = T - T_0$ 。将扰动流函数 $\psi' = \dot{\psi}$ 加到式(7.3.2)和式(7.3.12)中流函数边界条件的右边,这相当于在入口边界和上、下边界加上 y 方向的扰动速度 $\dot{\psi}$ 。扰动幅度将随时间推进从 0 增长到 0.05, 并发生振荡。

当计算结果显示流场已失去对称性即可去掉扰动速度,并恢复规定的边界条件。加扰动的时间约需几个尾流振荡周期。撤去扰动后继续计算,观察到圆柱尾流呈现规则的周期性,即认为计算达到稳态,可以输出数值计算的结果。

7.4 流体动力计算

将圆柱表面的压强和切应力在整个圆表面积分, 得到单位长度圆柱上的流体作用力。一般将这个力分解为沿流动方向的阻力和垂直于流动方向的升力。定义阻力系数 C_D 和升力系数 C_L 为

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} U^2 D}, \quad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} U^2 D} \tag{7.4.1}$$

式中, F_D 为作用于单位长度圆柱的阻力(沿来流速度方向为正), F_L 为作用于单位长度圆柱的升力(来流速度方向逆时针转 90 为升力的正方向), ρ 为流体密度, U 为圆柱上游的均匀来流速度, D 为圆柱直径。

计算流体作用力需要知道圆柱表面的压强分布和切应力分布。

一、计算压强分布

计算粘性流动压强分布的方法通常有以下三种。

1. 积分压强泊松方程

这种方法利用流函数求导给出的速度条件, 积分压强泊松方程(2.3.17), 得到全流场压强分布。这方法需要在迭代的每一时间步积分压强泊松方程, 运算量较大, 而且分析压强方程的壁面压强条件较麻烦。一般在远边界或出口、进口, 可应用已知压强条件。物体表面的压强条件是压强梯度表达式, 来自物体表面的动量方程。因为物体表面处处 $u = v = 0$, 且 $u/t = v/t = 0$, 在物体表面应用动量方程得到压强梯度需要满足的条件:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_w = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_w = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{7.4.2}$$

2. 沿物体表面积分涡量的法向导数

这种方法在已知速度场的分析解或半经验解时, 由于简单而有明显的优点(W. M. Collins 和 S. C. R. Dennis, 1973)。可是, 速度场的数值解不可避免有误差, 涡量场的空间导数运算将进一步放大这个误差。

3. 从物体表面到无穷远积分 N-S 方程

经验表明, 这种方法比第二种方法精确(C. C. Chang 和 R. L. Chern, 1991), 但是积分得到的力仍有相当的误差, 误差主要来自 N-S 方程时间导数项的差分运算, 它放大了数值求解速度场的误差。

这里采用较简单的第二种方法计算圆柱表面的压强分布。在壁面, 有量纲的 N-S 方程化为

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial p}{\partial \zeta} = - \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \quad (7.4.3)$$

在正交曲线坐标(,)下, 将上式无量纲化后向壁面流线()方向投影, 得

$$-\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial p}{\partial h} = \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial h}$$

式中, $\frac{\partial \omega}{\partial h}$ 沿壁面外法向。上式表明, 逆压梯度($\frac{\partial p}{\partial h} > 0$)下, 壁面吸收流体中的涡量(涡量梯度为负); 顺压梯度($\frac{\partial p}{\partial h} < 0$)下, 涡量从壁面向流体中扩散(涡量梯度为正)。在壁面沿流线积分上式, 得到正交曲线坐标(,)下的壁面压强 p_w 计算公式:

$$p_w = p(0) - \frac{1}{2} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial h} \int_0^d \eta d\eta \quad (7.4.4)$$

式中, p 是将压强用特征量 U^2 除过的无量纲压强系数, $p(0)$ 为积分起点的参考压强值, 可以取任意固定值。严格地说, 积分起点的压强应该从远上游积分 N-S 方程得到。但既然这个值不影响阻力与升力的计算, 可任取为零。如果要得到圆柱表面的压强分布曲线, 可以在积分后令圆柱表面的最大压强为 1, 将分布曲线标准化。

在式(7.4.4)中, 壁面涡量的偏导数用偏向流体一侧的差分公式计算

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right|_{i,j} &= \frac{-25 \omega_{i,j} + 48 \omega_{i,j+1} - 36 \omega_{i,j+2} + 16 \omega_{i,j+3} - 3 \omega_{i,j+4}}{12} \\ \left. \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right|_{i,j} &= \frac{25 \omega_{i,j} - 48 \omega_{i,j-1} + 36 \omega_{i,j-2} - 16 \omega_{i,j-3} + 3 \omega_{i,j-4}}{12} \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

两个式子分别对应上半圆和下半圆。在圆柱表面沿 η 数值积分(见式(7.4.4)), 得各点压强系数。

二、计算切应力分布

根据不可压缩粘性流体的切应力在正交曲线坐标(,)下的表达式, 并考虑到在壁面有式(7.3.7) ~ 式(7.3.9), 可得壁面切应力 τ_w 的计算公式:

$$\tau_w = \frac{2}{\text{Re} h} \frac{\partial V}{\partial \eta} \quad (7.4.6)$$

式中, V 是物理平面上的速度在 η 方向的投影分量。将 V 的定义(见式(7.2.3))代入式(7.4.6), 再引入壁面涡量表达式(7.3.10), 得

$$\tau_w = - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \quad (7.4.7)$$

注意, 式中 τ_w 是用特征量 U^2 除过的无量纲量。由式(7.4.7)可直接从涡量 ω 计算出圆表面各点的切应力值。

如果壁面是沿 η 方向的坐标线, 可类似导出相应的壁面压强和壁面切应力

的计算公式。

三、计算升力与阻力

圆柱表面的压强和切应力分别在来流方向及其垂直方向投影,并沿整个圆柱表面积分得到升力系数

$$C_L = \int_0^{2\pi} (-p_w \sin \theta - \tau_w \cos \theta) d\theta \tag{7.4.8}$$

阻力系数

$$C_D = \int_0^{2\pi} (-p_w \cos \theta + \tau_w \sin \theta) d\theta \tag{7.4.9}$$

式中, θ 为过圆柱表面一点的半径与来流方向之间的夹角。

圆柱尾流旋涡的形成和脱落呈现周期性,升力与阻力系数曲线亦呈现振荡形式。表征这一特性的相似准则数为 St 数,它的定义是式(7.1.1)。从升力曲线可以判断单侧旋涡脱落频率,再由式(7.1.1)计算 St 数。注意,阻力在一个振荡周期内变化两次,因此阻力曲线的振荡频率是升力曲线振荡频率的两倍。图7.5是用有限差分法计算得到的均匀定常流绕圆柱体流动的升力、阻力曲线。计算初期未加人为扰动,达到稳定振荡的时间较长。

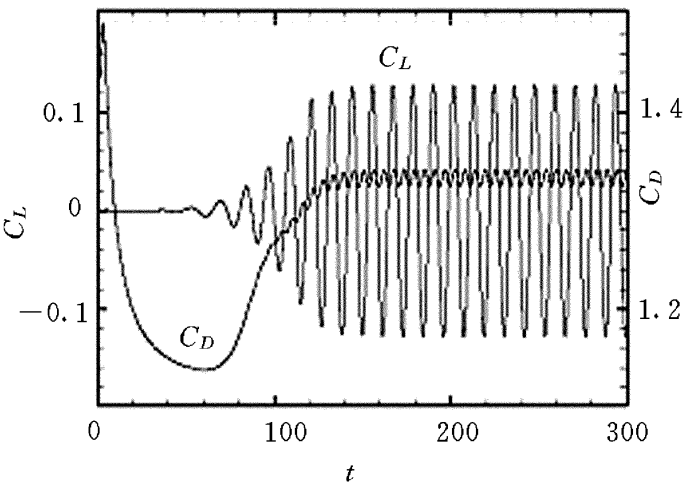


图 7.5 圆柱绕流的升力、阻力曲线, $Re=100$

表 7.1 列出了文献提供的均匀定常流绕圆柱体流动的计算与实验的部分数据作参考。可见,有限差分法计算结果和文献提供的计算与实验资料符合得相当好。

表 7.1 均匀定常流绕圆柱体流动, $Re=100$ (引自 C. Y. Zhou, 2000)

作 者	St	C_D	C_L 均方根值
Chaplin 等人实验(1992)	0.155 ~ 0.173	1.35 ~ 1.49	-
Baudan, Moin 高阶有限差分法	-	1.35	0.24

续表

作 者	St	C _D	C _L 均方根值
Younis, Chaplin 有限差分法	0.168/ 0.174	1.43/ 1.45	-
Chaplin 随机涡法	0.169	1.36	-
Karniadakis 谱法	-	1.42	0.26

7.5 动态流动显示的染色线生成法

本章建立的数值模拟结果给出了绕圆柱体流动的流函数和涡量分布,从流函数和涡量的等值线图可以形象地看到流动中尾流振荡的情况。但是,如果进一步与可视化实验中流场动态显示的图案对比,将发现流线和等涡量线不是可以直接观察到的流动显示图案。

在流场动态显示的实验方法中,经常用到氢泡实验。氢泡实验的原理是,在流水中设置极细的金属丝(一般用钨或铂等制成),在其上施加直流电压后不断形成跟随流体运动的微小氢气泡。在一段距离内,可以把氢泡运动看做其跟随的流体粒子的运动(假设略去浮力对氢泡的作用)。将金属丝表面部分绝缘,还可使其上某一点顺序发出的氢泡形成一条在水中延伸的氢泡丝。从某一固定点顺序发出的示踪粒子的全体,在以后某一时刻显示为一条曲线,这种曲线被称为脉线,亦称为染色线(Streak-line)。生成染色线的方法有很多,如从某一固定点流出的染色液细丝或烟丝在流体中形成这种染色线。通过观察染色线图可以看到流场中的涡结构、波现象和湍流相干结构等等。

数值模拟利用图像显示也可以达到氢泡实验的效果。当物理模型和数值方法能真实反映流体运动特征时,用数值模拟产生的脉线图能够极好地再现氢泡实验图案。而且这种显示不受实验条件的限制,可随人们的意愿提供足够详细的流动结构图案。下面以二维绕流问题为例,具体介绍染色线图的生成过程。

下面先介绍生成染色线图的几个步骤,然后给出计算粒子速度和位移的方法,并讨论有关的插值函数算法。

一、生成染色线图的步骤

1. 定义粒子数据

生成粒子的总数和发生粒子的位置可事先规定,例如规定在K个固定节点位置,每次发出K个粒子,染色线图记录的粒子总数限制为N×K个。这就需要二维数组记录粒子的物理域坐标(x,y)、计算域坐标(,)和粒子所在单元的记号(记号可设为单元左下角节点的序号)。数组元素有两个下标,第一个下标按

粒子出发的顺序排列,第二个下标按粒子出发的位置排列。

2. 发生粒子

数值计算得到稳定的收敛解后开始发生粒子,染色线的计算与流函数、涡量的迭代计算同步进行。每一时刻在出发位置有一组新粒子出发,同一位置发出的粒子有相同的第二个数组元素下标。粒子出发时的坐标即 K 个固定节点位置的坐标,这些粒子随时间推进移动到新的位置。

3. 计算粒子位移

在计算域计算粒子的速度和位移,根据位移量判断粒子到达的新单元位置及其左下角节点序号。由于计算误差,可能会有壁面附近的粒子越过壁面,这时令粒子停在壁面节点处,且速度为零。

4. 坐标插值

粒子移动到计算域的新单元后,用其计算域的新坐标建立插值函数。在物理域对应的单元内插值,得到粒子在物理域的新位置。粒子数据在数组内的位置向前移动一步。

5. 发生新粒子

重复 2、3、4 步的计算,新发生粒子的数据总是放在数组的最后位置上(第一个下标为 1)。粒子数将不断增加。当粒子数达到限制数 N 时,不再计算和记录较早发出的多余粒子的移动,这些粒子的数据自动退出数组。

6. 生成染色线图

当粒子数达到限制数 N 时,开始每隔一定时间输出一个染色线图数据文件。文件含有 N 个粒子的 x 、 y 坐标值和数组元素的第二个下标值,下标值 $1 \sim K$ 用做区分粒子所属的染色线(用做绘图的颜色参数)。输出文件直至达到预定的时间为止。

生成一系列按时间顺序的染色线数据文件后,用图形数据处理软件(如 TECPLOT)绘制各个时刻的粒子分布图。同一种颜色绘出那些从同一个位置发出的粒子,这些粒子就构成一条染色线。根据需要调整粒子的出发位置和粒子数量,就可形成流动分析所需要的染色线图。

二、计算粒子的速度和位移

在计算域求粒子速度、位移比较方便。具体做法是在计算域求出粒子的速度和位移后,再根据粒子到达单元的节点坐标构造插值函数,在物理域插值得到粒子的新坐标。

粒子在计算域(,)平面位移的微元矢量为

$$\begin{aligned} d &= xdx + ydy \\ d &= xdx + ydy \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

计算域内粒子的速度矢量记为 (u, v) 。用 dt 除式(7.5.1), 由粒子速度定义 $u= dx/dt, v= dy/dt, u = d x/dt, u = d y/dt$ 得

$$\begin{aligned} u &= x u + y v \\ u &= x u + y v \end{aligned}$$

(7.5.2)

考虑到流函数定义(2.3.10), 偏导数的坐标变换关系式(6.1.6)、(6.1.7), 且有式(6.1.4)定义的 $J= x y - x y$, 于是由式(7.5.2)得

$$u = \frac{1}{h h} \text{---}, \quad u = - \frac{1}{h h} \text{---}$$

(7.5.3)

这是计算域内速度矢沿坐标线的两个分量, 计算域的速度矢量不同于式(7.2.3)表达的物理域速度矢量。

用 t 乘式(7.5.3)的速度分量得到粒子在计算域 t 时间内移动的距离。由 n 时刻到 $n+ 1$ 时刻, 粒子在计算域内移动到新位置。其新坐标是

$$^{n+1} = ^n + u t, \quad ^{n+1} = ^n + u t$$

因为用到线性近似的假定, 要求粒子一次移动的距离不得超过 1~2 个网格单元大小, 否则, 减小计算中时间推进步长。根据粒子一次移动的距离, 可算出粒子到达的新单元各节点序号, 这里不再详细叙述。

三、插值函数

运动的粒子不一定正好位于节点上。如图 7.6 所示计算域 (ξ, η) 坐标系中, 粒子 P 位于 (i, j) 、 $(i+ 1, j)$ 、 $(i+ 1, j+ 1)$ 和 $(i, j+ 1)$ 四个节点构成的单元内。当计算域粒子到达的新位置已经算出来时, 必须通过粒子所在单元节点的坐标映射关系, 插值求出粒子在物理域的坐标。一般用所谓等参元插值函数进行插值。插值在图 7.6 所示直角坐标 $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ 下进行。

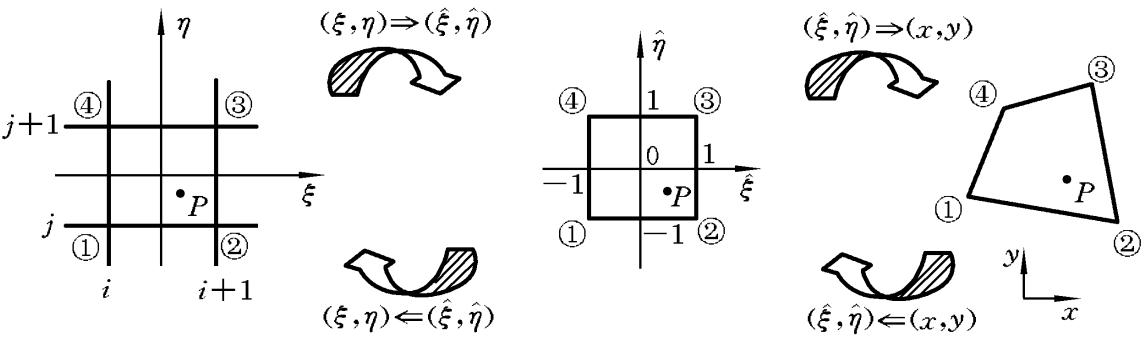


图 7.6 物理域 (x, y) , 计算域 (ξ, η) 和插值变换域 $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ 的映射

在平面问题中, 物理域 (x, y) 的一个网格单元映射为 $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ 坐标下的正四边形。角上四个节点的坐标列于表 7.2。

表7.2 中, $m= 1 \sim 4$, 代表节点序号。在第6 章讲到有限差分法网格的坐标变换时, 映射函数(变换公式)应用到整个计算域。这里, 以 $(\hat{\xi}_m, \hat{\eta}_m)$ 为节点的单元

表 7.2

节点 m	1	2	3	4
\hat{x}	- 1	1	1	- 1
\hat{y}	- 1	- 1	1	1

中一点 (\hat{x}, \hat{y}) 插值映射到以 (x_m, y_m) 为节点的单元中一点 (x, y) , 其插值公式只是一个单元的局部映射函数。二维插值公式为

$$x(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{m=1}^4 N_m(\hat{x}, \hat{y}) x_m \tag{7.5.4}$$

$$y(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{m=1}^4 N_m(\hat{x}, \hat{y}) y_m \tag{7.5.5}$$

式中, N_m 是一阶插值函数:

$$N_m(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4}(1 + \hat{x}_m \hat{x})(1 + \hat{y}_m \hat{y}) \tag{7.5.6}$$

在物理域, 不同单元有不同的节点坐标。节点 m 的坐标是 (x_m, y_m) , 但是在 (\hat{x}, \hat{y}) 插值变换域, 单元节点坐标不变, 如表 7.2 所列值。不过, 由于插值函数中的 \hat{x} 、 \hat{y} 是变化的, 各单元的插值函数不能通用。

通过类似于式(7.5.4)、(7.5.5)的插值公式, 可以求出单元内一点的速度分量(或其他流体量), 如用四个角点上的速度分量(或其他流体量)插值得到速度分量

$$u(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{m=1}^4 N_m(\hat{x}, \hat{y}) u_m \tag{7.5.7}$$

$$v(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{m=1}^4 N_m(\hat{x}, \hat{y}) v_m \tag{7.5.8}$$

以上各式在同一单元用相同的一组插值函数, 所以也称为等参元插值。高阶插值函数适用于较多节点的曲边多变形。因为等参元插值方式的适应性好, 在非结构网格的有限体积法、有限元法、边界元法等数值方法中经常用到等参元插值。

为建立物理域一点 (x, y) 与计算域对应一点 (\hat{x}, \hat{y}) 之间粒子速度、位移的换算, 还需要将计算域一点的坐标 (\hat{x}, \hat{y}) 与插值变换的坐标 (\hat{x}, \hat{y}) 联系起来:

$$\hat{x} = \frac{2(\hat{x} - \hat{x}_{i,j})}{\hat{x}_{i+1,j} - \hat{x}_{i,j}} - 1, \quad \hat{y} = \frac{2(\hat{y} - \hat{y}_{i,j})}{\hat{y}_{i,j+1} - \hat{y}_{i,j}} - 1$$

式中, $\hat{x}_{ij}, \hat{y}_{ij}$ 是图 7.6 中计算域节点 i, j 的坐标, $\hat{x}_{i+1,j} = \hat{x}_{i,j} + \Delta \hat{x}$, $\hat{y}_{i,j+1} = \hat{y}_{i,j} + \Delta \hat{y}$ 。

如果粒子初始位置是在一条给定的直线上, 一组粒子在以后不同时刻的位置就相当于在零时刻产生的一氢泡丝在以后时刻中的运动情况。如果每隔 Δt 时

间,直线上产生新的粒子,在以后时刻显示的图形如同氢泡运动的照片;把不同时刻的图形按一定次序播放就得到一个动态图像,可与氢泡实验的录像相比拟。这样,数值模拟在一定程度上替代了实验。它的优点是可重复、定量地分析流场。特别是湍流实验在相同的条件下也不可能得到重复的图案,故数值模拟对于分析湍流结构有独到的优点。

图 7.7 是按上述方法计算得到的圆柱体绕流的染色线图。



图 7.7 圆柱体绕流的染色线图, $Re = 100$

参 考 文 献

- 1 冯康著. 数值计算方法. 北京: 国防工业出版社, 1978
- 2 (美) 罗奇 P J 著. 计算流体动力学. 钟锡昌, 刘学宗译. 北京: 科学出版社, 1983
- 3 (美) 白莱文斯 R D 著. 流体诱发振动. 吴恕三, 王觉等译. 北京: 机械工业出版社, 1983
- 4 (日) 矢嶋信男, 野木达夫著. 发展方程数值分析. 王宝兴等译. 北京: 人民教育出版社, 1983
- 5 吴望一编. 流体力学. 北京: 北京大学出版社, 1983
- 6 陈景仁著. 流体力学及传热学. 北京: 国防工业出版社, 1984
- 7 Anderson D A, Tannehill J C and Pletcher R H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Hemisphere Publishing Corporation, 1984
- 8 马铁犹编著. 计算流体动力学. 北京: 北京航空学院出版社, 1986
- 9 (荷) 欣茨 J O 著. 湍流. 黄永念, 颜大椿译. 北京: 科学出版社, 1987
- 10 吴江航, 韩庆书著. 计算流体力学的理论、方法及应用. 北京: 科学出版社, 1988
- 11 刘导治著. 计算流体力学基础. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989
- 12 (美) 帕坦卡 S V 著. 传热与流体流动的数值计算. 张政译. 北京: 科学出版社, 1992
- 13 傅德薰著. 流体力学数值模拟. 北京: 国防工业出版社, 1993
- 14 童秉纲, 尹协远, 朱克勤编著. 涡运动理论. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1994
- 15 Versteeg H K, Malalasekera W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics, the Finite Volume Method. Longman Group Ltd. , 1995
- 16 (英) 巴切勒 G K. 流体动力学引论. 沈青, 贾复译. 北京: 科学出版社, 1997
- 17 苏铭德, 黄素逸著. 计算流体力学基础. 北京: 清华大学出版社, 1997
- 18 张兆顺, 崔桂香编著. 流体力学. 北京: 清华大学出版社, 1999
- 19 李炜编著. 粘性流体的混合有限解析法. 北京: 科学出版社, 2000
- 20 刘儒勋, 舒其望著. 计算流体力学的若干新方法. 北京: 科学出版社, 2003