Лекция 1.05
Кинематика твердого тела

2.8. ***Винтовое движение твердого тела. Дуальное исчисление.***

Следующим типом движения, которое имеет смысл рассмотреть отдельно, является винтовое движение. При винтовом движении тело поворачивается вокруг какой-либо фиксированной оси и смещается вдоль этой же оси.

В 1873 году У.Клиффорд (1845-1879) дал оригинальное описание движения твердого тела с помощью кватерниона, у которого компонентами являются величины $a+\varepsilon a^{o}$, где a, a^{o} - вещественные или комплексные числа и $\varepsilon^{2}=0$. Впоследствии эти величины Э.Штуди (1862-1930) назвал дуальными числами. А.Котельникову (1865-1944) в 1895 году удалось истолковать все формулы теории кватернионов, как «неразвернутые» формулы теории дуальных кватернионов, то есть установить полную аналогию тех и других формул. Применительно к кинематике эта аналогия устанавливает соотношение между сферическими движениями (движениями тела с одной неподвижной точкой) и движениями произвольного вида. Действия над дуальными числами ассоциативны по отношению к умножению и дистрибутивны по отношению к сложению. В дуальном числе

$$\mathscr{A}=a+\varepsilon\ a^{o}=a\left(1+\varepsilon\frac{a^{o}}{a}\right)=a\left[1+\varepsilon\, p\left(\mathscr{A}\right)\right] \tag{2.8.1}$$

a - главная часть, $a^{o}=mom\ \left(\mathscr{A}\right)$ - моментная часть, отношение $a^{o}/a=p\left(\mathscr{A}\right)$ - параметр числа $\mathscr{A}$. Если $a^{o}=0$, то $p\left(\mathscr{A}\right)=0$, и число $\mathscr{A}$ вещественно.

Равенство $\mathscr{A}=a+\varepsilon a^{o}=0$ означает, что одновременно $a=0,\quad a^{o}=0.$ Рассматривая каждое дуальное число формально как сумму, а множитель ε как число, обладающее формально свойством $\varepsilon^{2}=0$, имеем

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A}\pm\mathscr{B}=\left(a\pm b\right)+\varepsilon\left(a^{o}\pm b^{o}\right),\\
&\mathscr{A}\mathscr{B}=\left(a+\varepsilon b\right)\left(a^{o}+\varepsilon b^{o}\right)=ab+\varepsilon\left(a^{o}b+a\ \ b^{o}\right),\\
&\frac{\mathscr{A}}{\mathscr{B}}=\frac{a+\varepsilon a^{o}}{b+\varepsilon b^{o}}=\frac{\left(a+\varepsilon a^{o}\right)\left(b-\varepsilon b^{o}\right)}{\left(b+\varepsilon b^{o}\right)\left(b-\varepsilon b^{o}\right)}=\frac{ab}{b^{2}}+\varepsilon\frac{\left(a^{o}b-ab^{o}\right)}{b^{2}}.
\end{aligned} \tag{2.8.2}$$

Возведение в степень и извлечение корня производится по формулам, которые могут быть проверены с помощью бинома Ньютона (n-целое)

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A}^{n}=\left(a+\varepsilon a^{o}\right)^{n}=a^{n}+\varepsilon\, na^{o}a^{n-1},\\
&\sqrt[n]{\mathscr{A}}=\sqrt[n]{a+\varepsilon a^{o}}=\sqrt[n]{a}+a^{o}/n\sqrt[n]{a^{n-1}}.
\end{aligned} \tag{2.8.3}$$

Функции дуальной переменной представляют также в виде дуальной величины

$$\mathscr{F}\left(\mathscr{X}\right)=U\left(x,x^{o}\right)+\varepsilon V\left(x,x^{o}\right) \tag{2.8.4}$$

и считают дифференцируемыми. При этом по аналогии с функциями комплексной переменной требуют, чтобы предел отношения $\lim\limits_{\Delta\mathscr{X}\to 0}\dfrac{\Delta\mathscr{F}}{\Delta\mathscr{X}}$, вычисленный в некоторой точке $\mathscr{X}_{o}$, не зависел от способа стремления $\mathscr{X}$ к $\mathscr{X}_{o}$, а $\Delta\mathscr{X}$ к нулю. Для этого нужно исключить направления дифференцирования по $\varepsilon\Delta x^o$, так как деление на число с нулевой главной частью невозможно $\Delta x \neq 0$. Итак,

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\mathcal{X}} = \lim_{\Delta X\to 0}\frac{\Delta\mathcal{F}}{\Delta\mathcal{X}} = \lim_{\Delta x\to 0,\Delta x^o\to 0}\frac{\Delta U+\varepsilon\Delta V}{\Delta x+\varepsilon\Delta x^o} = \lim_{\Delta x\to 0,\,\Delta x^o\to 0}\frac{\left(\Delta U+\varepsilon\ \ \Delta V\right)\left(\Delta x-\varepsilon\ \ \Delta x^o\right)}{\left(\Delta x+\varepsilon\ \ \Delta x^o\right)\left(\Delta x-\varepsilon\ \ \Delta x^o\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0,\,\Delta x^o\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0,\,\Delta x^o\to 0}\varepsilon\left(\frac{\Delta V}{\Delta x} - \frac{\Delta U\,\Delta x^o}{\Delta x\,\Delta x}\right).$$

Поскольку $\Delta U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial U}{\partial x^o}\Delta x^o$, $\Delta V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial V}{\partial x^o}\Delta x^o$, получаем

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\mathcal{X}} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x^o}\lim_{\Delta x\to 0,\,\Delta x^o\to 0}\frac{\Delta x^o}{\Delta x} +$$

$$+\varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x^o}\lim_{\Delta x\to 0,\Delta x^o\to 0}\frac{\Delta x^o}{\Delta x} - \frac{\partial U}{\partial x}\lim_{\Delta x\to 0,\Delta x^o\to 0}\frac{\Delta x^o}{\Delta x} - \frac{\partial U}{\partial x^o}\lim_{\Delta x\to 0,\Delta x^o\to 0}\left(\frac{\Delta x^o}{\Delta x}\right)^2\right].$$

Чтобы исключить зависимость производной от изменения моментной части аргумента X, необходимо приравнять нулю коэффициенты при

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta x^o\to 0}\frac{\Delta x^o}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x\to 0,\Delta x^o\to 0}\left(\frac{\Delta x^o}{\Delta x}\right)^2,$$

то есть положить

$$\frac{\partial U}{\partial x^o} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x^o} = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{2.8.5}$$

Это означает, что функция U зависит только от x, то есть $U = f(x)$, а функция V имеет вид $V = x^o\dfrac{d\,f(x)}{dx} + f^o(x)$. Следовательно, общее выражение дифференцируемой функции дуальной переменной $\mathcal{X} = x+\varepsilon\,x^o$ будет

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}) = f(x) + \varepsilon\left[x^o\frac{df(x)}{dx} + f^o(x)\right]. \tag{2.8.6}$$

При вещественном $\mathcal{X}$, то есть при $x^o = 0$ функция имеет вид

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}) = f(x) + \varepsilon\,f^o(x), \tag{2.8.7}$$

а при $x^o \neq 0$ функция представляет собой первые два члена ряда Тейлора, в котором εx^o играет роль приращения.

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}) = \left[f(x)+\varepsilon f^o(x)\right] + \varepsilon x^o\left[\frac{df(x)}{dx} + \varepsilon\frac{df^o(x)}{dx}\right] = f(x) + \varepsilon\left[x^o\frac{df(x)}{dx} + f^o(x)\right].$$

Функция называется аналитической, если ее производная не зависит от направления изменения независимой переменной. Соотношения (2.8.5) являются необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции дуальной переменной. Как следствие, необходимым и достаточным признаком аналитичности является возможность представить функцию формулой (2.8.6). Например, для функции $e^{\mathcal{X}}$ имеем

$$e^{\mathcal{X}} = e^{x}e^{\varepsilon x^o} = e^{x} + \varepsilon x^o\left(de^{\mathcal{X}} / d\mathcal{X}\right) = e^{x}\left(1+\varepsilon x^o\right), \tag{2.8.8}$$

откуда следует, что
$$e^{\varepsilon x^o} = 1+\varepsilon x^o . \tag{2.8.9}$$

Тогда любое дуальное число можно представить в виде

$$\mathcal{A} = a + \varepsilon a^o = a\left(1+\varepsilon\frac{a^o}{a}\right) = a\left(1+\varepsilon p\right) = a\exp\left(\varepsilon \quad p\right). \tag{2.8.10}$$

Из этой формулы следует, что

$$p(\mathcal{A}\mathcal{B}) = p(\mathcal{A}) + p(\mathcal{B}), \quad p\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}\right) = P(\mathcal{A}) - P(\mathcal{B}) . \tag{2.8.11}$$

За модуль дуального числа $\mathcal{A}$ принимают модуль его главной части $|a|$. Для аналитических функций дуальных величин сохраняются все формулы и теоремы дифференциального и интегрального исчислений

$$\begin{gathered}
\frac{d\left(\mathcal{X}^n\right)}{d\mathcal{X}} = n\mathcal{X}^{n-1}, \quad \frac{de^{\mathcal{X}}}{d\mathcal{X}} = e^{\mathcal{X}}, \quad \frac{d\ln\mathcal{X}}{d\mathcal{X}} = \frac{1}{\mathcal{X}}, \\
\frac{d\sin\mathcal{X}}{d\mathcal{X}} = \cos\mathcal{X}, \quad \frac{d\cos\mathcal{X}}{dX} = -\sin\mathcal{X}, \\
\int\mathcal{X}^{\mathcal{A}}d\mathcal{X} = \frac{1}{\mathcal{A}+1}\mathcal{X}^{\mathcal{A}+1} + \mathcal{C}, \quad \int\cos\left(\mathcal{A}\mathcal{X}\right)d\mathcal{X} = \frac{1}{\mathcal{A}}\sin\left(\mathcal{A}\mathcal{X}\right) + \mathcal{C}.
\end{gathered} \tag{2.8.12}$$

Фигуру, образованную двумя скрещивающимися осями $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ и отрезком прямой O_1O_2, пересекающей эти оси под прямым углом, называют дуальным углом. Направление прямой O_1O_2 задают также единичным вектором $\mathbf{E}$ и называют его осью дуального угла. Для приведения единичного вектора $\mathbf{E}_1$ к совпадению с единичным вектором $\mathbf{E}_2$ необходимо вектору $\mathbf{E}_1$ сообщить винтовое движение, состоящее из смещения на расстояние $\varphi^o = O_1O_2$ вдоль оси $\mathbf{E}$ и поворота на угол φ вокруг оси $\mathbf{E}$. Дуальное число $\mathcal{F} = \varphi + \varepsilon\varphi^o$ принимают за меру дуального угла между осями $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$. Числа φ, φ^o считаются положительными, если вращение происходит в положительную сторону, а смещение в положительном направлении $\mathbf{E}$. Можем написать

$$\begin{aligned}
\cos\mathcal{F} &= \cos\varphi - \varepsilon\varphi^o\sin\varphi, \\
\sin\mathcal{F} &= \sin\varphi + \varepsilon\varphi^o\cos\varphi, \\
tg\mathcal{F} &= tg\varphi + \varepsilon\varphi^o\left(1+tg^2\varphi\right) .
\end{aligned}$$

Дуальный кватернион поворота вводится равенством

$$\begin{gathered}
\mathcal{L} = L_0 + \overline{L} = L_0 + \tau_i L_i = \cos\frac{\mathcal{F}}{2} + \overline{E}\sin\frac{\mathcal{F}}{2} = \\
= \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{E}\sin\frac{\varphi}{2}\right) + \varepsilon\frac{\varphi^o}{2}\left(-\sin\frac{\varphi}{2} + \overline{E}\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{E}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\circ\left(1+\varepsilon \quad \overline{E}\frac{\varphi^o}{2}\right),
\end{gathered} \tag{2.8.13}$$

где $\bar{E}=\tau_i E_i$, $\bar{E}\circ\bar{E}=-1$, $\mathcal{F}=\varphi+\varepsilon\ \varphi^{\circ}$ - дуальный аргумент дуального кватерниона, и представляет собой произведение кватерниона поворота и соосного ему кватерниона сдвига. Кватернион сдвига $\mathcal{L}^o=1+\varepsilon\ \bar{E}\dfrac{\varphi^o}{2}$ получается из кватерниона поворота простой заменой угла φ на смещение $\varepsilon\varphi^o$. Вектор Родрига $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{E}tg\dfrac{\varphi}{2}$ при такой замене переходит в $\boldsymbol{\theta}^o=\mathbf{E}tg\varepsilon\dfrac{\varphi^o}{2}=\varepsilon\mathbf{E}\dfrac{\varphi^o}{2}$ и $1+(\theta^o)^2=1,\quad \boldsymbol{\theta}^o\times(\boldsymbol{\theta}^o\times\mathbf{R})=0$.

Рассмотрим преобразование $\mathcal{L}^o\circ\bar{f}\circ\tilde{\mathcal{L}}^o$, где $\bar{f}$ – произвольный вектор-кватернион $\left(1+\varepsilon\ \bar{E}\dfrac{\varphi^o}{2}\right)\circ\bar{f}\circ\left(1-\varepsilon\ \bar{E}\dfrac{\varphi^o}{2}\right)=\bar{f}+\varepsilon\ \varphi^o\bar{E}\times\bar{f}$.

Преобразование $\mathbf{f}+2\dfrac{\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{f}+\boldsymbol{\theta}\times(\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{f})}{1+\theta^2}$, эквивалентное $L\circ\bar{f}\circ\tilde{L}$, при замене вектора $\boldsymbol{\theta}$ на вектор $\boldsymbol{\theta}^o$ сразу дает $\mathbf{f}+\varepsilon\varphi^o\mathbf{E}\times\mathbf{f}$.

Итак, преобразуемый вектор заменяется совокупностью того же вектора и момента вектора относительно исходного полюса.

Тогда преобразование $L\circ(\bar{f}+\varepsilon\bar{r}\times\bar{f})\circ\tilde{L}$, где $L=\lambda_o+\bar{\lambda}$, есть поворот вектора $\mathbf{f}$, приложенного в точке $\mathbf{r}$. Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что

$$\Lambda(\mathcal{F})=\Lambda(\varphi)\circ\Lambda(\rho_{//})=\Lambda(\rho_{//})\circ\Lambda(\varphi),$$
$$\Lambda(\mathcal{F})\circ\bar{f}\circ\tilde{\Lambda}(\mathcal{F})=\Lambda(\varphi)\circ\left(\bar{f}+\varepsilon\ \ \bar{m}_c(\mathbf{f})\right)\circ\tilde{\Lambda}(\varphi),$$
$$\Lambda(\rho)\circ\Lambda(\varphi)=\Lambda(\rho_{\perp})\circ\Lambda(\rho_{//})\circ\Lambda(\varphi)=\Lambda(\rho_{\perp})\circ\Lambda(\mathcal{F}),$$
$$\Lambda(\mathcal{F})\circ(\bar{f}+\varepsilon\ \ \bar{m}_o(\mathbf{f}))\circ\tilde{\Lambda}(\mathcal{F})=\Lambda(\varphi)\circ\left(\bar{f}+\varepsilon\ \ \bar{m}_o(\mathbf{f})\right)\circ\tilde{\Lambda}(\varphi).$$

Можно ввести в рассмотрение дуальные векторы, то есть векторы, у которых компоненты есть дуальные числа, и соответственно «развернуть» все формулы векторного исчисления.

$$\mathcal{A}=\mathbf{e}_i\left(a^i+\varepsilon\, a^{oi}\right)=\mathbf{A}+\varepsilon\,\mathbf{A}^o\Rightarrow\left(\mathbf{A},\mathbf{A}^o\right). \qquad (2.8.14)$$

Аналогичным образом

$\mathbf{A}$ называется главной частью, вектором, а

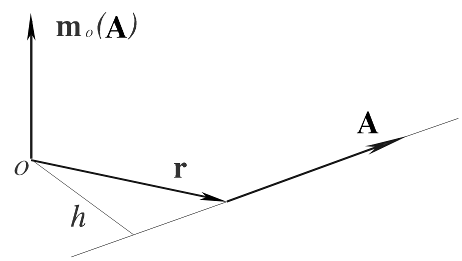
$\mathbf{A}^o$ -моментной частью, моментом дуального вектора.

Дуальный вектор, у которого момент пропорционален вектору $\mathbf{A}^o=p\mathbf{A}$, называется винтом, p - параметр винта. Дуальные векторы типа $\mathcal{A}=\varepsilon\,\mathbf{A}^o\Rightarrow\left(0,\mathbf{A}^o\right)$ также считаются винтами; параметр такого винта не определен, а сам винт называют особенным.

Винт с параметром, равным нулю, у которого модуль главной части равен единице, называется единичным винтом

$$\mathcal{E} = \mathbf{e} + \varepsilon 0 \Rightarrow (\mathbf{e}, 0). \qquad (2.8.15)$$

Если моментная часть винта не равна нулю, то винт определяют, как произведение единичного винта и дуального числа, называемого дуальным модулем винта.



$$\mathcal{A} = \mathcal{E}\,\mathcal{A} = (\mathbf{e} + \varepsilon 0)(a + \varepsilon a^o) = $$
$$= \mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{A}^o = \mathbf{e}\, a\, e^{\varepsilon p(\mathcal{A})} \Rightarrow (\mathbf{A}, p\mathbf{A}) \qquad (2.8.16)$$

$\left|\mathcal{A}\right| = \mathcal{A} = a + \varepsilon a^o = a\, e^{\varepsilon p(\mathcal{A})}$ - обозначение дуального модуля винта.

Момент единичного вектора относительно точки O обозначают символом

$$\mathbf{e}^o = \mathbf{m}^o(\mathbf{e}) = \mathbf{r} \times \mathbf{e}. \qquad (2.817)$$

Мотором единичного винта относительно точки O называют дуальный вектор

$$\mathcal{E} = \mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{e}^o \Rightarrow (\mathbf{e}, \mathbf{e}^o). \qquad (2.8.18)$$

Для точек оси единичного винта $\mathbf{r} = r\mathbf{e}$ моментная часть его мотора равна нулю $\mathbf{e}^o = \mathbf{r} \times \mathbf{e} = 0$, и мотор совпадает с самим винтом $\mathcal{E} = \mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{e}^o \Rightarrow (\mathbf{e}, 0)$. Для любой точки пространства имеет место равенство $\mathcal{E}^2 = \mathbf{e}^2 + 2\varepsilon\ \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^\circ = 1,$ так как $\mathbf{e}$ - единичный вектор и $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^o = 0.$

Вектор
$$\mathbf{m}^o(\mathbf{A}) = p\mathbf{A} + \mathbf{r} \times \mathbf{A} = \mathbf{A}^o \qquad (2.8.19)$$
называется моментом винта $(\mathbf{A}, p\mathbf{A})$ относительно точки O.

Винт $(\mathbf{A}, p\mathbf{A})$ полностью определяет мотор $(\mathbf{A}, p\mathbf{A} + \mathbf{r} \times \mathbf{A})$ для любой точки пространства; этот мотор в свою очередь единственным образом определяет параметр винта, и следовательно, сам винт

$$p = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^o)/(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (p\mathbf{A} + \mathbf{r} \times \mathbf{A})/(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}). \qquad (2.8.20)$$

Моментная часть мотора винта имеет минимальное значение для точек оси винта $\min \mathbf{A}^o = p\mathbf{A}$ $(\mathbf{r} = \alpha\,\mathbf{A})$. При переходе к какой-либо другой точке пространства момент винта увеличивается, получая приращение, перпендикулярное вектору винта $\mathbf{A}^o{}_{\perp\mathbf{A}} = \mathbf{r} \times \mathbf{A}$. Компонента момента винта, параллельная вектору винта, остается неизменной $\mathbf{A}^o{}_{//\mathbf{A}} = p\mathbf{A}$ $\left(\mathbf{A}^o = \mathbf{A}^o{}_{//\mathbf{A}} + \mathbf{A}^o{}_{\perp\mathbf{A}}\right)$. Таким образом, любой дуальный вектор $(\mathbf{A}, \mathbf{A}^o)$, заданный в некоторой точке O, можно рассматривать как мотор винта $(\mathbf{A}, p\mathbf{A})$ для этой точки O. Выбором точки приведения на оси винта компонента $\mathbf{A}^o{}_{\perp\mathbf{A}}$ моментной части дуального вектора может быть обращена в нуль. Полагая $\mathbf{r} = -\dfrac{\mathbf{A} \times \mathbf{A}^o}{A^2}$, получаем $\mathbf{A}^C = \mathbf{A}^o + \mathbf{r} \times \mathbf{A} = \mathbf{A}^o - \dfrac{\mathbf{A} \times \mathbf{A}^o}{A^2} \times \mathbf{A} = \mathbf{A}\dfrac{\mathbf{A}^o \cdot \mathbf{A}}{A^2} = p\mathbf{A}$.

В винтовом анализе имеет место понятие относительного момента. Относительным моментом двух винтов называется сумма скалярных произведений вектора первого винта на момент второго винта относительно некоторой точки пространства и вектора второго винта на момент первого относительно той же точки

$$mom[(\mathbf{A}_1, p_1\mathbf{A}_1)(\mathbf{A}_2, p_2\mathbf{A}_2)] = \mathbf{A}_1 \cdot (p_2\mathbf{A}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{A}_2) + \mathbf{A}_2 \cdot (p_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{A}_1) =$$
$$= (p_1 + p_2)\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) = A_1 A_2 \left[(p_1 + p_2)\cos\alpha - \alpha^o \sin\alpha\right]$$

Здесь $p_{1,} p_2$ – параметры винтов, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ -радиусы - векторы каких-нибудь точек на осях винтов из общей точки приведения. Далее за эти точки на осях приняты точки пересечения осей с общим пересекающим их перпендикуляром: α^o – модуль перпендикуляра $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ из конца первого радиус-вектора O_1 в конец второго O_2, α – угол, возникающий между осями винтов, при смещении их до пересечения. Полученное выражение не зависит от точки, к которой приведены моторы винтов. Поэтому относительный момент двух винтов является инвариантом этих винтов.

Под скалярным произведением двух винтов понимают дуальное число, равное скалярному произведению их моторов, отнесенных к какой-либо точке приведения. Пусть заданы два винта $\mathcal{F}_1 = \mathbf{E}_1 f_1 \exp(\varepsilon p_1)$ $\mathcal{F}_2 = \mathbf{E}_2 f_2 \exp(\varepsilon p_2)$, оси которых образуют дуальный угол $\mathcal{A} = (a + \varepsilon a^o)$. Моторы винтов отнесем к некоторой точке O и представим их как дуальные векторы

$$\mathcal{F}_1 = \mathbf{F}_1 + \varepsilon \mathbf{F}_1^o = \mathbf{F}_1 + \varepsilon(p_1\mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1),$$
$$\mathcal{F}_2 = \mathbf{F}_2 + \varepsilon \mathbf{F}_2^o = \mathbf{F}_2 + \varepsilon(p_2\mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2),$$
$$\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 + \varepsilon\left(\mathbf{F}_1^o \cdot \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2^o\right) =$$
$$= \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2[1 + \varepsilon(p_1 + p_2)] - \varepsilon(r_2 - r_1).[\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2].$$

Поскольку $\quad \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 = f_1 f_2 \cos a, \quad \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathcal{E}_{12} a^o,$

$\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 = \mathcal{E}_{12} f_1 f_2 \sin a\,, \quad \mathcal{E}_{12}\mathcal{E}_{12} = 1$

получаем
$$\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 = f_1 f_2 \left[1 + \varepsilon(p_1 + p_2)\right]\left(\cos a - \varepsilon a^o \sin a\right) =$$
$$= f_1 \exp(\varepsilon p_1) f_2 \exp(\varepsilon \quad p_2) \cos\mathcal{A}, \qquad (2.8.23)$$

где $f_1 \exp(\varepsilon p_1), f_2 \exp(\varepsilon p_2)$ - дуальные модули винтов.

Скалярное произведение двух винтов равно произведению их дуальных модулей на косинус дуального угла между ними. Главная часть скалярного произведения двух винтов есть обычное скалярное произведение векторов этих винтов, а моментная часть – относительный момент винтов, общий инвариант двух винтов, не зависящий от точки приведения.

Если один из множителей - единичный винт, то

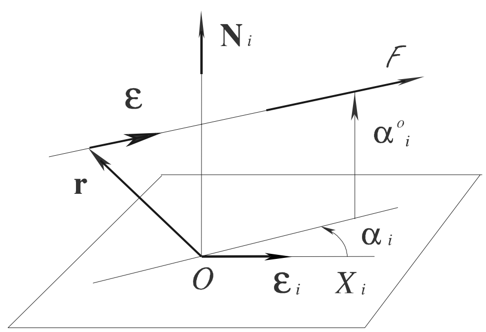
$$\mathcal{F} \cdot \mathcal{E} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e} + \varepsilon\left(\mathbf{F}^o \cdot \mathbf{e} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}^o\right) =$$
$$= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e} + \varepsilon\left(p\mathbf{F} - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)[\mathbf{F} \times \mathbf{e}]\right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e} + \varepsilon(p\mathbf{F} + \mathbf{r}_{21} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}.$$

Главная часть этого дуального числа есть проекция на ось $\mathbf{e}$ вектора винта, а моментная часть - проекция на ту же ось момента винта относительно точки, лежащей на оси.

Под векторным (винтовым) произведением двух винтов понимают винт, мотор которого для произвольной точки пространства равен векторному произведению моторов заданных винтов для этой же точки. В качестве точки приведения возьмем точку пересечения оси дуального угла $\mathbf{E}_{12}$ между винтами $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ и оси $\mathbf{E}_1$ первого из перемножаемых винтов. Вычислим произведение

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 &= \left[\mathbf{F}_1 + \varepsilon\, p_1 \mathbf{F}_1\right] \times \left[\mathbf{F}_2 + \varepsilon\left(p_2 \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{F}_2\right)\right] = \\
&= \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 + \varepsilon\left[\left(p_1 + p_2\right)\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_{12}\left(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2\right)\right] = \\
&= \mathbf{E}_{12} f_1 f_2 \left[1 + \varepsilon\left(p_1 + p_2\right)\right]\left(\sin a + \varepsilon\, a^o \cos a\right) = \\
&= \mathbf{E}_{12} f_1 \exp\left(\varepsilon\, p_1\right) f_2 \exp\left(\varepsilon \quad p_2\right) \sin \mathcal{A}.
\end{aligned} \qquad (2.8.24)$$

Векторное произведение двух винтов есть винт, осью которого является ось дуального угла перемножаемых винтов, вектор произведения равен векторному произведению векторов перемножаемых винтов, а дуальный модуль произведения равен произведению дуальных модулей этих винтов на синус дуального угла, образуемого их осями. Отметим равенство $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = -\mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_1$.



В основу всех действий над винтами положено действие над моторами, которые соответствуют этим винтам. При рассмотрении двух и более винтов выбирается в пространстве общая точка приведения, и к ней относятся моторы всех винтов. Любая алгебраическая операция над винтами (умножение на число, сложение и перемножение винтов) определяется как операция над моторами этих винтов, а так как каждый мотор формально выражается дуальным вектором, то алгебра винтов сводится к алгебре дуальных векторов.

Перенесение дуального формализма на трехмерное векторное пространство состоит в введении дуальных координат винта. Пусть будет задан винт $\mathcal{F} = \mathbf{E}\,\mathcal{F} = \mathbf{E}\, f \exp\left(\varepsilon\, p\right) = \mathbf{F} + \varepsilon\, p\, \mathbf{F}$ и пусть $\mathbf{r}$ радиус-вектор какой-либо точки на оси винта.

Тогда $\mathbf{N}_i = \boldsymbol{\mathcal{E}}_i \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}$. - вектор общего перпендикуляра между осью OX_i и осью винта. Кратчайшее расстояние между осью OX_i и осью винта равно абсолютной величине проекции вектора $\mathbf{r}$ на вектор $\mathbf{N}_i$

$$\alpha_i^o = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{N}_i}{\left|\mathbf{N}_i\right|} = \frac{\mathbf{r} \cdot \left(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}\right)}{\left|\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}\right|}, \quad \alpha_i = \arcsin\left|\mathbf{N}_i\right| = \arcsin\left|\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}\right|. \qquad (2.8.25)$$

Тогда дуальные углы, образуемые осью винта с осями прямоугольной системы координат $OX_1X_2X_3$, будут соответственно $\mathcal{A}_i = \alpha_i + \varepsilon\,\alpha_i^o$.

Для проекций винта на оси декартовой системы координат получаем выражения

$$\mathcal{F}_i = f_i + \varepsilon f_i^o = f\, exp(\varepsilon\, p)\cos\mathcal{A}_i = \\ = f\left[\cos\alpha_i + \varepsilon\left(p\cos\alpha_i - \alpha_i^o \sin\alpha_i\right)\right]. \qquad (2.8.26)$$

Главные части этих выражений суть прямоугольные координаты вектора $\mathbf{F}$, а моментные части - прямоугольные координаты момента $\mathbf{F}^o$ винта относительно начала координат или моменты винта относительно координатных осей. Формально приведение винта $\mathcal{F}$ к началу координат дает

$$\mathcal{F} = \mathbf{F} + \varepsilon\,\mathbf{F}^o = \mathbf{F} + \varepsilon\left(p\mathbf{F} + \mathbf{r}\times\mathbf{F}\right)$$

и далее

$$\mathcal{F}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_i = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_i + \varepsilon\left(p\mathbf{F} + \mathbf{r}\times\mathbf{F}\right)\mathbf{e}_i\,.$$

Дуальные координаты единичного винта равны дуальным направляющим косинусам $\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_i = \mathbf{e}\cdot\mathbf{e}_i + \varepsilon\left(\mathbf{r}\times\mathbf{e}\right)\cdot\mathbf{e}_i = \cos\mathcal{A}_i$ и равенство $\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}} = \cos\mathcal{A}_i\cdot\cos\mathcal{A}_i = 1$

распадается на два

$$\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\cdot\cos\alpha_2 + \cos\alpha_3\cdot\cos\alpha_3 = 1,$$

$$\alpha_1^o\cos\alpha_1\sin\alpha_1 + \alpha_2^o\cos\alpha_2\sin\alpha_2 + \alpha_3^o\cos\alpha_3\sin\alpha_3 = 0,$$

выражающих равенство единице квадрата длины вектора и равенство нулю скалярного произведения вектора на момент этого вектора относительно начала координат.

Введение дуальных прямоугольных координат винта позволяет формально проводить вычисления для более сложных произведений винтов: смешанного скалярно - векторного, двойного векторного, скалярного произведения двух векторных произведений, векторного произведения двух других векторных произведений и так далее. На этом пути можно получить серию утверждений обобщающих векторную алгебру.

Рассмотрим вопрос о представлении винта с помощью произвольного базиса из трех скрещивающихся винтов. Будем считать, что для тройки неособенных винтов $\boldsymbol{\mathcal{A}}_1, \boldsymbol{\mathcal{A}}_2, \boldsymbol{\mathcal{A}}_3$, образующих базис, главная часть произведения $\boldsymbol{\mathcal{A}}_1\cdot\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}_2\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_3\right)$ также не равна нулю. Тогда любой винт можно представить как линейную комбинацию

$$\mathcal{F} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_1 X^1 + \boldsymbol{\mathcal{A}}_2 X^2 + \boldsymbol{\mathcal{A}}_3 X^3. \qquad (2.8.27)$$

Дуальные числа X^1, X^2, X^3, являющиеся компонентами винта $\mathcal{F}$ по базису $\boldsymbol{\mathcal{A}}_1, \boldsymbol{\mathcal{A}}_2, \boldsymbol{\mathcal{A}}_3$, могут быть вычислены по формулам

$$X^i = \mathcal{F}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}^i, \quad i = 1,2,3, \qquad (2.8.28)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^1 = \frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}_2\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_3}{\boldsymbol{\mathcal{A}}_1\cdot\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}_2\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_3\right)},\ \boldsymbol{\mathcal{A}}^2 = \frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}_3\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_1}{\boldsymbol{\mathcal{A}}_2\cdot\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}_3\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_1\right)},\ \boldsymbol{\mathcal{A}}^3 = \frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}_1\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_2}{\boldsymbol{\mathcal{A}}_3\cdot\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}_1\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_2\right)}. \qquad (2.8.29)$$

При этом имеем

$$\left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_1\cdot\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}_2\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_3\right)\right]\cdot\left[\boldsymbol{\mathcal{A}}^1\cdot\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}^2\times\boldsymbol{\mathcal{A}}^3\right)\right] = 1,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_1 = \frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}^2\times\boldsymbol{\mathcal{A}}^3}{\boldsymbol{\mathcal{A}}^1\cdot\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}^2\times\boldsymbol{\mathcal{A}}^3\right)},\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_2 = \frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}^3\times\boldsymbol{\mathcal{A}}^1}{\boldsymbol{\mathcal{A}}^2\cdot\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}^3\times\boldsymbol{\mathcal{A}}^1\right)},\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_3 = \frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}^1\times\boldsymbol{\mathcal{A}}^2}{\boldsymbol{\mathcal{A}}^3\cdot\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}^1\times\boldsymbol{\mathcal{A}}^2\right)}. \qquad (2.8.30)$$

Рассматриваемый винт можно также представить как линейную комбинацию

$$\mathcal{F} = \boldsymbol{\mathcal{A}}^1 X_1 + \boldsymbol{\mathcal{A}}^2 X_2 + \boldsymbol{\mathcal{A}}^3 X_3\ , \qquad (2.8.31)$$

то есть разложить по взаимному базису $\boldsymbol{\mathcal{A}}^1, \boldsymbol{\mathcal{A}}^2, \boldsymbol{\mathcal{A}}^3$. Компоненты винта $\mathcal{F}$ по взаимному базису вычисляются по формулам

$$\mathcal{X}_i = \mathcal{F} \cdot \mathcal{A}_i, \quad i = 1,2,3. \qquad (2.8.32)$$

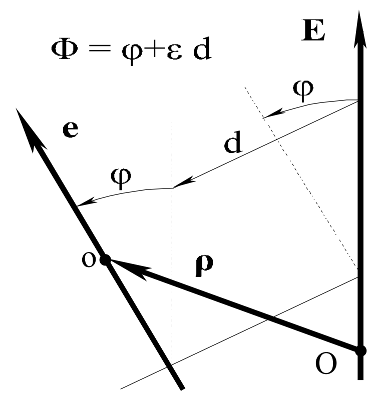
Вводят две взаимно обратные дуальные матрицы

$$\mathcal{G}_{ij} = \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j, \quad \mathcal{G}^{ij} = \mathcal{A}^i \mathcal{A}^j, \quad \mathcal{G}_{is}\mathcal{G}^{sj} = \delta_i^j$$

тогда между компонентами винта в исходном и взаимном базисах можно записать соотношения $\mathcal{X}_i = \mathcal{G}_{is}\mathcal{X}^s, \quad \mathcal{X}^j = \mathcal{G}^{js}\mathcal{X}_s$ (2.8.33)

кроме того, $\mathcal{A}_i = \mathcal{G}_{is}\mathcal{A}^s, \quad \mathcal{A}^j = \mathcal{G}^{js}\mathcal{A}_s.$ (2.8.34)

Так появляется дуальный тензорный анализ, введенный С.Кислициным.



Дуальный подход распространяется также на преобразование координатных систем. Пусть две прямоугольные системы координат, развернуты и смещены относительно друг друга. Построение дуальной матрицы поворота этого движения состоит в вычислении косинусов дуальных углов $\mathcal{F}_{ij} = \varphi_{ij} + \varepsilon\ d_{ij}$ между осями системы отсчета $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ и осями $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, связанными с телом

$$\cos\mathcal{F}_{ij} = \cos\left(\varphi_{ij} + \varepsilon d_{ij}\right) = \cos\varphi_{ij} - \varepsilon d_{ij}\sin\varphi_{ij} =$$
$$= \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{e}_i - \varepsilon(\mathbf{E}_j \times \mathbf{e}_i)\cdot\boldsymbol{\rho} = \left[\mathbf{e}_i + \varepsilon(\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{e}_i)\right]\cdot\mathbf{E}_j$$

В этом выражении φ_{ij} – угол между осями, возникающий при сдвиге какой-либо из осей до их пересечения, а $d_{ij} = (\mathbf{E}_j \times \mathbf{e}_i)\cdot\boldsymbol{\rho} = -(\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{E}_j$ - расстояние между скрещивающимися осями (проекция вектора $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_{Oo}$ на перпендикуляр к осям).

В винтовом исчислении каждый орт рассматривается, как единичный винт, и составляются матрицы скалярных произведений всех винтов-ортов.

Пусть $\left(\mathbf{E}_i, 0\right) \Rightarrow \mathcal{E}_i = \mathbf{E}_i + \varepsilon 0, \quad i = 1,2,3$ -орты-винты исходной системы отсчета $OX_1X_2X_3$ и $\left(\mathbf{e}_j, 0\right) \Rightarrow \mathcal{E}_j = \mathbf{e}_j + \varepsilon 0, \quad j = 1,2,3$ -орты-винты системы координат $ox_1x_2x_3$ смещенной и развернутой относительно системы отсчета $OX_1X_2X_3$, и $\mathbf{r}$ -вектор смещения, то есть вектор, проведенный из начала системы отсчета в начало смещенной системы координат. Вычисление скалярного произведения требует преобразования винтов к единой точке приведения, поэтому

$$s_{ij} = \mathcal{E}_i \cdot \mathcal{E}_j = \left(\mathbf{e}_i - \varepsilon\,\mathbf{r}\times\mathbf{e}_i\right)\cdot\mathcal{E}_j = \mathbf{e}_i\cdot\left(\mathbf{E}_j + \varepsilon\,\mathbf{r}\times\mathbf{E}_j\right) =$$
$$= \cos\alpha_{ij} - \varepsilon\,\alpha_{ij}^{\ o}\sin\alpha_{ij} = \cos\mathcal{A}_{ij}. \qquad (2.8.35)$$

В этом выражении α_{ij} - угол между направлениями ортов $\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_j$ и $\alpha_{ij}^{\ o}$ -проекция вектора смещения $\mathbf{r}$ на ось дуального угла.

Элементы дуальной матрицы поворота, построенной по формулам (2.8.35), обладают теми же свойствами, что и элементы обычной матрицы (2.2.1), например,

$$
\begin{aligned}
s_{22}s_{33}-s_{32}s_{23} &= (\mathbf{e}_2-\varepsilon\mathbf{r}\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{E}_2(\mathbf{e}_3-\varepsilon\mathbf{r}\times\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{E}_3-\\
&-(\mathbf{e}_3-\varepsilon\mathbf{r}\times\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{E}_2(\mathbf{e}_2-\varepsilon\mathbf{r}\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{E}_3=\\
&=(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{E}_2)(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{E}_3)-(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{E}_2)(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{E}_3)-\\
&-\varepsilon(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{E}_2(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{E}_3)-\varepsilon(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{E}_3(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{E}_2)+\\
&+\varepsilon(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{E}_2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{E}_3)+\varepsilon(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{E}_3(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{E}_2).
\end{aligned}
$$

Главная часть этого дуального числа равна $(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{E}_1)$, как для обычной матрицы поворота, а моментная - преобразуется к виду

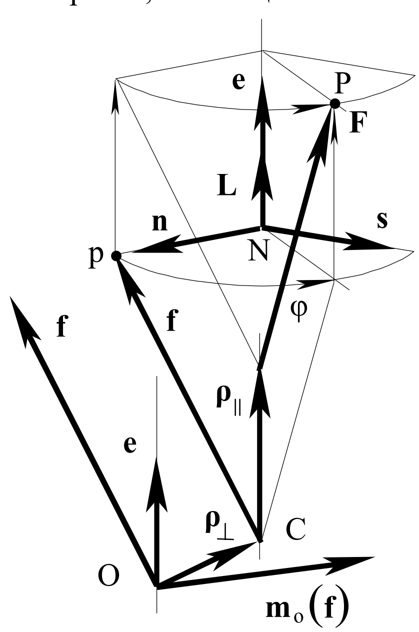
$$
\begin{aligned}
&\varepsilon(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_2)[\mathbf{e}_3\times(\mathbf{E}_3\times\mathbf{E}_2)]+\varepsilon(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_3)[\mathbf{e}_2\times(\mathbf{E}_2\times\mathbf{E}_3)]=\\
&=-\varepsilon(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_3\times\mathbf{E}_1)+\varepsilon(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_2\times\mathbf{E}_1)=\\
&=\varepsilon\mathbf{r}\cdot[\mathbf{e}_3\times(\mathbf{e}_2\times\mathbf{E}_1)-\mathbf{e}_2\times(\mathbf{e}_3\times\mathbf{E}_1)]=\\
&=\varepsilon\mathbf{r}[\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{E}_1)-\mathbf{E}_1(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3)-\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{E}_1)+\mathbf{E}_1(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3)]=\\
&=\varepsilon\mathbf{r}\cdot[\mathbf{E}_1\times(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)]=-\varepsilon(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{E}_1
\end{aligned}
$$

Итак, $s_{22}s_{33}-s_{32}s_{23}=s_{11}$, то есть каждый элемент матрицы (2.8.35) равен своему дополнению.

Так как $\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{E}_\alpha)=\mathbf{e}_j,\quad \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{E}_\alpha)=\mathbf{e}_i$ получаем

$$
\begin{aligned}
s_{i\alpha}s_{j\alpha}&=(\mathbf{e}_i-\varepsilon\,\mathbf{r}\times\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{e}_j-\varepsilon\,\mathbf{r}\times\mathbf{e}_j)\cdot\mathbf{E}_\alpha=\\
&=(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{E}_\alpha)(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{E}_\alpha)-\varepsilon(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{E}_\alpha)-\varepsilon(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_j)\cdot\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{E}_\alpha)=\\
&=\delta_{ij}-\varepsilon\,\mathbf{r}(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j)-\varepsilon\,\mathbf{r}(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_i)=\delta_{ij}
\end{aligned}
$$

и аналогично $s_{\alpha i}s_{\alpha j}=\delta_{ij}$. Из этих свойств следует, что $\det(s_{ij})=1$ и уравнение $\det(\mathcal{S}-\lambda\,\mathcal{E})=-\lambda^3+\lambda^2 Sp\mathcal{S}-\lambda Sp\mathcal{S}+1=0$ имеет корень $\lambda=1$, то есть существует вектор $\mathcal{U}$, остающийся неизменным при преобразовании $\mathcal{S}\mathcal{U}=\mathcal{U}$. Кроме того, из начального положения в конечное тело можно перевести одним винтовым перемещением. Дуальный кватернион этого винта - суперпозиция сдвига $\boldsymbol{\rho}_{//}=\mathbf{e}\rho_{//}$ в направлении оси винта и поворота вокруг оси $\mathbf{e}$, проходящей через точку C, радиус-вектор которой - $\boldsymbol{\rho}_\perp$, либо просто поворот вокруг оси $\mathbf{e}$, проходящей через точку O, мотора



$$\mathbf{f}+\varepsilon\,\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{f}=\mathbf{f}+\varepsilon\,(\boldsymbol{\rho}_\perp+\boldsymbol{\rho}_{//})\times\mathbf{f}=\mathbf{f}+\varepsilon\,\mathbf{m}_o(\mathbf{f}).$$

Девять дуальных косинусов матрицы поворота определяются восемнадцатью вещественными величинами. Шесть независимых соотношений между девятью косинусами эквивалентны двенадцати вещественным равенствам. Таким образом, независимых вещественных величин, определяющих дуальную матрицу поворота, шесть. Формулы преобразования винтов имеют вид $\mathcal{F}=\mathcal{S}^T f$, $f=\mathcal{S}\mathcal{F}$. Матрицы $\mathcal{S}^T$ и $\mathcal{S}$ с дуальными элементами осуществляют аффинное ортогональное преобразование, которое представляет собой винтовое перемещение, сохраняющее дуальные модули винтов, а также дуальные углы между осями двух любых винтов.

Рассмотрим преобразование $$\mathcal{F} = \mathcal{L} \circ f \circ \tilde{\mathcal{L}}, \qquad (2.8.36)$$
где $f = f_0 + \overline{f}$ -дуальный кватернион, соответствующий какому-либо винту. Согласно (2.3.5), имеем
$$\mathcal{F} = f_0\left(\mathrm{L}_0^2 + \mathrm{L}_1^2 + \mathrm{L}_2^2 + \mathrm{L}_3^2\right) + \overline{f}\left(\mathrm{L}_0^2 - \mathrm{L}_1^2 - \mathrm{L}_2^2 - \mathrm{L}_3^2\right) + 2\overline{\mathrm{L}}\left(\overline{\mathrm{L}} \cdot \overline{f}\right) + 2\mathrm{L}_0\left(\overline{\mathrm{L}} \times \overline{f}\right).$$
Скалярная часть дуального кватерниона f остается без изменения и ее можно считать равной нулю, то есть $f = \overline{f}$, $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$, и преобразование (2.8.36) может быть записано в матричной форме $\mathcal{F} = \mathcal{L} f$, где $\mathcal{L}$ -дуальная матрица со структурой (2.2.9). Пусть $\overline{f}$ -дуальный кватернион, соответствующий единичному вектору $\overline{f} = \overline{e} + \varepsilon 0 = \tau_i e_i + \varepsilon 0$,

тогда
$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}} &= \mathbf{e}\cos\mathcal{A} + \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}\right)\left(1-\cos\mathcal{A}\right) + \left(\mathbf{E}\times\mathbf{e}\right)\sin\mathcal{A} = \\ &= \left[\mathbf{e}\cos\alpha + \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}\right)\left(1-\cos\alpha\right) + \left(\mathbf{E}\times\mathbf{e}\right)\sin\alpha\right] + \\ &+ \varepsilon\alpha^o\left[-\mathbf{e}\sin\alpha + \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}\right)\sin\alpha + \left(\mathbf{E}\times\mathbf{e}\right)\cos\alpha\right]\ .\end{aligned}$$
Главная часть дуального вектора $\overline{\mathcal{F}}$ представляет собой, согласно (2.2.8), исходный вектор $f = \mathbf{e}$, повернутый вокруг оси $\mathbf{E}$ на угол α, а моментная часть - результат приведения этого повернутого вектора к началу координат
$$\begin{aligned}&\alpha^o\mathbf{E}\times\left[\mathbf{e}\cos\alpha + \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}\right)\left(1-\cos\alpha\right) + \left(\mathbf{E}\times\mathbf{e}\right)\sin\alpha\right] = \\ &= \alpha^o\left[\left(\mathbf{E}\times\mathbf{e}\right)\cos\alpha + \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}\right)\sin\alpha - \mathbf{e}\sin\alpha\right]\ .\end{aligned}$$
Таким образом, преобразование (2.8.36) состоит в повороте и смещении повернутого вектора. Смещение равно $\alpha^o\mathbf{E}$. Если ось винта $f = \mathbf{e}$ не проходит через начало координат, то его следует привести к началу, то есть представить в виде $f = \mathbf{e} + \varepsilon\mathbf{r}\times\mathbf{e}$, где $\mathbf{r}$ -радиус-вектор какой-либо точки на оси единичного винта. Тогда
$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \left[\mathbf{e}\cos\alpha + \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}\right)\left(1-\cos\alpha\right) + \left(\mathbf{E}\times\mathbf{e}\right)\sin\alpha\right] + \\ &+ \varepsilon\alpha^o\mathbf{E}\times\left[\mathbf{e}\cos\alpha + \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}\right)\left(1-\cos\alpha\right) + \left(\mathbf{E}\times\mathbf{e}\right)\sin\alpha\right] + \\ &+ \varepsilon\left[\left(\mathbf{r}\times\mathbf{e}\right)\cos\alpha + \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\left(\mathbf{r}\times\mathbf{e}\right)\right)\left(1-\cos\alpha\right) + \left(\mathbf{E}\times\left(\mathbf{r}\times\mathbf{e}\right)\right)\sin\alpha\right].\end{aligned}$$
Последнее слагаемое в этом выражении представляет собой повернутый вектор момента преобразуемого винта и в силу инвариантности векторных операций может быть представлено в виде
$$\begin{aligned}&\varepsilon\left[\mathbf{r}\cos\alpha + \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}\right)\left(1-\cos\alpha\right) + \left(\mathbf{E}\times\mathbf{r}\right)\sin\alpha\right]\times \\ &\times\left[\mathbf{e}\cos\alpha + \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}\right)\left(1-\cos\alpha\right) + \left(\mathbf{E}\times\mathbf{e}\right)\sin\alpha\right] = \\ &= \varepsilon\left[\left(\mathbf{r}\times\mathbf{e}\right)\cos\alpha + \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\left(\mathbf{r}\times\mathbf{e}\right)\right)\left(1-\cos\alpha\right) + \left(\mathbf{E}\times\left(\mathbf{r}\times\mathbf{e}\right)\right)\sin\alpha\right],\end{aligned}$$
то есть моментная часть выражения (2.8.36) и в этом случае - результат приведения к началу координат повернутого и смещенного вектора.

Отметим, что основные формулы алгебры винтов, как отмечалось выше, инвариантны по отношению к выбору точки, к которой приведены заданные винты, то есть остаются неизменными при добавлении к каждому из дуальных векторов $\mathcal{r}_i = \mathbf{r}_i + \varepsilon \mathbf{r}_i^o$ слагаемого $\varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{r}_i$, где $\mathbf{r}$ - один и тот же вектор для всех $\mathcal{r}_i$. Такое преобразование равносильно параллельному переносу рассматриваемой совокупности винтов.

Рассмотренные операции над дуальными объектами показывают, что существует аналогия в выражениях этих операций с операциями в обычной векторной алгебре. Этот факт позволил А.П.Котельникову и Э.Штуди сформулировать "принцип перенесения": *все формулы векторной алгебры сохраняют силу при замене модулей векторов дуальными модулями винтов и углов между векторами - дуальными углами между осями винтов.* Принцип перенесения устанавливает соответствие типа гомоморфизма между векторным (точечным) пространством и пространством винтов. Для всякой задачи кинематики произвольно движущегося тела можно сформулировать соответствующую задачу движения с неподвижной точкой. Решение этой более простой задачи автоматически, с помощью принципа перенесения, приводит к решению исходной задачи.

Приложение 2. Изоморфизм кватернионов, векторов, матриц.
П.2.1. Некоторые понятия современной алгебры.

Группой называется множество G для любых элементов, которого определена бинарная ассоциативная операция $g_1 g_2 \in G$, $(g_1 g_2)g_3 = g_1(g_2 g_3) \in G$; существует единичный элемент $e \in G$ такой, что $eg = ge = g$ для любого $g \in G$; для каждого $g \in G$ существует один и только один обратный элемент $g^{-1} \in G$ такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$, $(g^{-1})^{-1} = g$.

Группа называется коммутативной (или абелевой), если $g_1 g_2 = g_2 g_1$ для всех $g_1, g_2 \in G$ и некоммутативной в противном случае. В случае коммутативной группы вместо $g_1 g_2 \in G$ пишут также $g_1 + g_2 \in G$ и тогда единичный элемент обозначают через 0 . При таком обозначении бинарной операции говорят, что группа задана в аддитивной записи.

Кольцом называется непустое множество K, для элементов которого определены две бинарные операции – сложение и умножение (обозначаемые соответственно $+$ и $*$) .

Сложение коммутативно, ассоциативно и обратимо: $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c \quad a,b,c \in K$, $\quad a + x = b \to x = b - a \in K$. Элементы кольца образуют абелеву группу относительно сложения; она называется аддитивной группой кольца. Нуль “0” этой группы относительно умножения является “поглощающим” элементом, то есть $a * 0 = 0 * a = 0$ для любого элемента $a \in K$ кольца.

Умножение дистрибутивно относительно сложения

$$a*(b + c) = a*b + a*c, \quad (b + c)*a = b*a + c*a .$$

Кольцо может содержать делители нуля, то есть такие ненулевые элементы $a, b \in K$, что $a*b = 0$. Единицей кольца называется такой элемент $e \in K$, что $a*e = e*a = a$ для всех $a \in K$. Кольцо не обязано обладать единицей, но если она есть, то только одна.

Тело - кольцо, в котором каждое из уравнений $a*x=b, \quad y*a=b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение. Коммутативное, ассоциативное тело называется *полем* .

Поле - особый подкласс колец, множество, содержащее не менее двух элементов, на котором заданы две бинарные алгебраические операции – сложение и умножение, обе ассоциативны и коммутативны, связаны между собой законом дистрибутивности, то есть для любых $a,b,c \in \Pi$

$$a+b=b+a, \qquad (a+b)+c=a+(b+c),$$

$$a*b=b*a, \qquad (a*b)*c=a*(b*c), \qquad (a+b)*c=a*c+b*c.$$

В поле требуется существование нулевого элемента $0 \in \Pi$, единичного элемента $e \in \Pi$, для каждого элемента $a \in \Pi$ существование противоположного элемента $-a \in \Pi$ и для каждого ненулевого элемента $a \in \Pi$ существование обратного элемента $a^{=1} \in \Pi$, то есть

$$0+a=a+0=0, \qquad a*e=e*a=a,$$

$$a+(-a)=0, \qquad a*a^{-1}=a^{-1}*a=e.$$

Отсюда следует, что в поле выполняется операция вычитания и операция деления на ненулевой элемент. Таким образом, все элементы поля образуют абелеву группу по сложению (аддитивная группа поля), а все ненулевые элементы – абелеву группу по умножению (мультипликативная группа поля)

Например, каждая из систем

комплексных чисел $\quad a+ib, \quad a,b \in R, \quad i^2=-1,$

двойных чисел $\quad a+ib, \quad a,b \in R, \quad i^2=1,$

дуальных чисел $\quad a+ib, \quad a,b \in R, \quad i^2=0$

с законом сложения $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

и соответственно законом умножения

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

$$(a+ib)(c+id)=(ac+bd)+i(ad+bc)$$

$$(a+ib)(c+id)= \quad ac \quad +i(ad+bc)$$

образует кольцо. Эти системы имеют $0+i0$ - нуль и $1+i0$ - единицу. Каждый элемент имеет противоположный. Любое комплексное число отличное от нуля имеет обратное. Двойное число имеет обратное, если $a^2-b^2 \neq 0$. Дуальное число с отличной от нуля первой компонентой $a \neq 0$ также имеет обратное. Итак, из рассмотренных систем только комплексные числа образуют поле.

Алгеброй A размерности n над полем Π называется множество выражений вида $\qquad a_1\mathbf{i}_1+a_2\mathbf{i}_2+\ldots+a_n\mathbf{i}_n,$

(где $a_1,a_2,\ldots,a_n \in \Pi$, а $\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_n$ - некоторые символы) , снабженное операцией умножения на элементы поля $k \in \Pi$, выполняемой по формуле

$$k(a_1\mathbf{i}_1+a_2\mathbf{i}_2+\ldots+a_n\mathbf{i}_n)=ka_1\mathbf{i}_1+ka_2\mathbf{i}_2+\ldots+ka_n\mathbf{i}_n;$$

операцией сложения: $\quad (a_1\mathbf{i}_1+a_2\mathbf{i}_2+\ldots+a_n\mathbf{i}_n)+(b_1\mathbf{i}_1+b_2\mathbf{i}_2+\ldots+b_n\mathbf{i}_n)=$

$$=(a_1+b_1)\mathbf{i}_1+(a_2+b_2)\mathbf{i}_2+\ldots+(a_n+b_n)\mathbf{i}_n;$$

и операцией умножения, задаваемой таблицей вида

$$\mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta = p_{\alpha\beta,1}\mathbf{i}_1 + p_{\alpha\beta,2}\mathbf{i}_2 + \ldots + p_{\alpha\beta,n}\mathbf{i}_n \,, \tag{*}$$

которая используется для нахождения произведений

$$(a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + \ldots + a_n\mathbf{i}_n)\cdot(b_1\mathbf{i}_1 + b_2\mathbf{i}_2 + \ldots + b_n\mathbf{i}_n)\,.$$

Алгебра полностью определяется своей «таблицей умножения» (*), то есть некоторым набором n^3 чисел $p_{\alpha\beta,\gamma}$. Эти числа не подчинены никаким условиям, любой набор их задает некоторую алгебру.

Если для любых двух элементов a,b алгебры A справедливо равенство $ab = ba$, то алгебра называется *коммутативной*; если для любых трех элементов a,b,c справедливо равенство $(ab)c = a(bc)$, то алгебра называется *ассоциативной*. Далее, если каждое из уравнений $ax = b, \quad ya = b \quad a,b \in A, \quad a \neq 0$ имеет единственное решение, то говорят, что A есть *алгебра с делением.* Элементы x, y, определяемые этими уравнениями, называются соответственно левым, правым частным от деления b на a. Если в алгебре A существует такой элемент e, что $ae = ea = a$ для любого $a \in A$, то этот элемент называется *единицей алгебры* A. В этом случае говорят, что A есть *алгебра с единицей* . Алгебра называется нормированной, если в ней можно так ввести скалярное произведение (a,b), что будет выполняться тождество $(ab,ab) = (a,a)(b,b)$.

Простейшим примером алгебры является одномерная алгебра с таблицей умножения $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1$. Закон умножения имеет вид $(a_1\mathbf{i}_1)(b_1\mathbf{i}_1) = a_1 b_1 \mathbf{i}_1$, то есть сводится к умножению действительных чисел. Такую алгебру называют алгеброй действительных чисел.

Частным случаем алгебры является система гиперкомплексных чисел $a_o\mathbf{i}_o + a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + \ldots + a_n\mathbf{i}_n$, где $\mathbf{i}_o \equiv 1$, $\mathbf{i}_o\mathbf{i}_\alpha = \mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_o = \mathbf{i}_\alpha$, $\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_\beta = p_{\alpha\beta,o} + p_{\alpha\beta,1}\mathbf{i}_1 + p_{\alpha\beta,2}\mathbf{i}_2 + \ldots + p_{\alpha\beta,n}\mathbf{i}_n$, $\alpha = \overline{1,n}$.

При $n = 1$ и таблице умножения

	1	i
1	1	i
i	i	$\mp 1,0$

имеем алгебру комплексных, двойных, дуальных чисел.

При $n = 3$ и таблице умножения

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

имеем алгебру кватернионов. В 1878 г. Фробениус (1849-1917) доказал, что единственное некоммутативное тело конечной размерности над R - тело кватернионов.

При $n = 7$ и таблице умножения

	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_6$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_7$	-1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_1$	-1	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	-1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	-1

имеем алгебру октав.
В отличии от комплексных чисел и кватернионов при умножении октав не выполняется ассоциативный закон. Например,

$$(\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_2) * \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_3 * \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_7, \qquad \mathbf{e}_1 * (\mathbf{e}_2 * \mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_6 = -\mathbf{e}_7.$$

Для октав справедливы формулы $(ab)b = a(bb)$, $a(ab) = (aa)b$ - ослабленный вариант ассоциативности. Алгебры с таким свойством называют *альтернативными*.

Таблица умножения $\mathbf{i}_{\alpha\lambda}\mathbf{i}_{\mu\beta} = \delta_{\lambda\mu}\mathbf{i}_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\lambda\mu}$ - символ Кроникера для элементов

$$\begin{aligned} a = {} & a_{11}\mathbf{i}_{11} + a_{12}\mathbf{i}_{12} + \ldots + a_{1n}\mathbf{i}_{1n} + \\ & + a_{21}\mathbf{i}_{21} + a_{22}\mathbf{i}_{22} + \ldots + a_{2n}\mathbf{i}_{2n} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}\mathbf{i}_{n1} + a_{n2}\mathbf{i}_{n2} + \ldots + a_{nn}\mathbf{i}_{nn} \end{aligned} \quad \text{или} \quad a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

определяет алгебру размерности n^2. Поскольку таблица умножения определяет также перемножение матриц, можно считать, что элементами алгебры являются квадратные матрицы порядка n. Итак, имеем ассоциативную алгебру квадратных матриц.

В определении алгебры наиболее сложным моментом является наличие операции умножения. Опуская закон умножения, получаем объекты, называемые $n-$***мерными векторами***, а соответствующая алгебра называется линейным, векторным пространством над полем Π. Линейное, векторное пространство - математическое понятие, обобщающее понятие совокупности всех (свободных) векторов обычного трехмерного пространства.

Линейным, векторным пространством над полем Π называется множество $\mathbf{x},\mathbf{y},... \in L$ элементов любой природы, называемых векторами, в котором определены операции сложения векторов и умножения векторов на элементы поля $\alpha, \beta,... \in \Pi$.

Сложение коммутативно и ассоциативно: $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$, $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$. Имеется нуль-вектор $\mathbf{0}$ $(\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x})$, и для любого вектора $\mathbf{x}$ существует противоположный ему вектор $\mathbf{y}$ $(\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0})$.

Умножение на элементы поля ассоциативно и дистрибутивно $\alpha(\beta\,\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$, $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\,\mathbf{x}+\beta\,\mathbf{x}$. Существует единица $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$. Умножение на векторы дистрибутивно $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\,\mathbf{x}+\alpha\,\mathbf{y}$.

Для линейного, векторного пространства имеет место понятие *базиса*, как конечного количества таких независимых векторов $\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,...,\mathbf{i}_n$, что любой вектор $\mathbf{x}\in L$ допускает единственное разложение $\mathbf{x}=\mathbf{i}_1x_1+\mathbf{i}_2x_2+...+\mathbf{i}_nx_n$. Элементы $x_1,x_2,...,x_n\in\Pi$ называют координатами вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,...,\mathbf{i}_n$. Говорят, что в $n-$мерном векторном пространстве, задано *скалярное произведение* $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, если каждым двум элементам базиса сопоставлен некоторый элемент $(\mathbf{i}_\alpha,\mathbf{i}_\beta)=g_{\alpha\beta}$ так, что $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{\alpha\,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta \in\Pi$ и $(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$ только при $\mathbf{x}=0$. Имеют место равенства $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})$, $\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\lambda\,\mathbf{x})\mathbf{y}=\mathbf{x}(\lambda\,\mathbf{y})$, $(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x},\mathbf{z})$.

Понятие линейного, векторного пространства позволяет рассматривать *Алгебру* как линейное, векторное пространство, в котором введена дополнительно операция умножения:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x}),\ \lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\lambda\,\mathbf{x})\mathbf{y}=\mathbf{x}(\lambda\,\mathbf{y}),\ (\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x},\mathbf{z}).$$

Произведение базисных элементов $\mathbf{i}_\alpha,\mathbf{i}_\beta$ единственным образом записывается в виде

$$\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_\beta = p_{\alpha\beta,1}\mathbf{i}_1 + p_{\alpha\beta,2}\mathbf{i}_2 + ... + p_{\alpha\beta,n}\mathbf{i}_n.$$

Поскольку любая алгебра размерности $n-$ это векторное пространство, то принято называть две алгебры одной и той же размерности *подобными* друг другу или ***изоморфными***, если в них можно выбрать базисы с одинаковыми таблицами умножения. Изоморфные множества в математическом отношении не считаются различными.

Выше отмечалось, что любая гиперкомплексная система может рассматриваться как алгебра, в которой первый из базисных элементов является единицей алгебры : $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_\alpha=\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_\alpha$ для всех α. Таким образом, любая алгебра с единицей изоморфна некоторой гиперкомплексной системе.

П2.2. Двумерное пространство

Например, комплексным числам $a_1 + ia_2 \Leftrightarrow \mathbf{i}_1 a_1 + \mathbf{i}_2 a_2,\quad i^2 = -1$, образующим двумерное вещественное линейное пространство, можно сопоставить двумерные векторы, а последним - 2×2 матрицы. Вид матриц следует из покомпонентной записи произведения

$$z = x\cdot y = y\cdot x \quad\Leftrightarrow\quad \begin{matrix} z_1 = x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ z_2 = x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{matrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$a + ib \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{i}_1 a + \mathbf{i}_2 b \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 1 \\ \mathbf{i}_1 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} i \\ \mathbf{i}_2 \end{cases} \qquad i^2 - 1$$

перемножаются как $1, i,$ или как векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$.

Алгебры этих множеств изоморфны.

Рассмотрим двойные числа $a_1 + i\,a_2 \Leftrightarrow \mathbf{i}_1 a_1 + \mathbf{i}_2 a_2,\quad i^2 = 1$

$$z = x\cdot y = y\cdot x \quad\Leftrightarrow\quad \begin{matrix} z_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ z_2 = x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{matrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$a + ib \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{i}_1 a + \mathbf{i}_2 b \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 1 \\ \mathbf{i}_1 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} i \\ \mathbf{i}_2 \end{cases} \qquad i^2 = 1$$

перемножаются как $1, i,$ или как векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$.

Алгебры этих множеств изоморфны.

Наконец, рассмотрим алгебру дуальных чисел $a_1 + i a_2 \Leftrightarrow \mathbf{i}_1 a_1 + \mathbf{i}_2 a_2, \quad i^2 = 0$

$$z = x \cdot y = y \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} z_1 = x_1 y_1 \\ z_2 = x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $a + ib \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{i}_1 a + \mathbf{i}_2 b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 \\ \mathbf{i}_1 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} i \\ \mathbf{i}_2 \end{cases} \qquad i^2 = 0$$

перемножаются как $1, i,$ или как векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$.
Алгебры этих множеств изоморфны.

Следует иметь в виду, что в комплексном пространстве базис может иметь также комплексную природу. Комплексное число $a = a_1 + i a_2$ может быть записано в виде

$$a = \frac{1}{2}(1-i)(a_1 - a_2) + \frac{1}{2}(1+i)(a_1 + a_2) =$$

$$= j^* \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}} + j \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}},$$

где $\quad j = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad j^* = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad j^2 = i, \quad j^{*2} = -i$

Сопоставляя комплексному числу вектор $\quad \mathbf{i}_1 a_1 + \mathbf{i}_2 a_2, \quad \mathbf{i}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{i}_2 = i\mathbf{e}_2,$

получаем $\quad \mathbf{e}_1 a_1 + i\mathbf{e}_2 a_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}} + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}},$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}_2 = i\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\ 2} = \boldsymbol{\varepsilon}_2^{\ 2} = 0.$

Векторы, принадлежащие изотропным прямым $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, имеют нулевую длину.

Элементам базиса можно сопоставить матрицы

$$\mathbf{e}_1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad i\mathbf{e}_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{e}_1 a_1 + i\mathbf{e}_2 a_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} a_1 + \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} a_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix} \frac{a_1 - a_2}{2} + \begin{vmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{vmatrix} \frac{a_1 + a_2}{2}$$

При рассмотрении трехмерного пространства может быть выбран базис, состоящий из изотропных векторов $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ и ортогонального к ним единичного вектора $\mathbf{i}_3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -i\boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\left(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\right)$– внешнее умножение,

$\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$, $\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 = 1$, $\left(\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \mathbf{e}_3 \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \vee \mathbf{e}_3\right)$– внутреннее умножение,

$$\mathbf{e}_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Матрицы $\pi_o = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\pi_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\pi_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}$, $\pi_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

называются матрицами Паули.

Для любых вещественных или комплексных величин a,b,c,d матрица 2×2 может быть выражена в виде линейной комбинации матриц Паули

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a+d)\pi_o + \frac{1}{2}(b+c)\pi_1 + \frac{1}{2}i(b-c)\pi_2 + \frac{1}{2}(a-d)\pi_3 =$$

$$= \frac{1}{2}(a+d)\pi_o + \frac{c}{\sqrt{2}}\varepsilon_1 + \frac{b}{\sqrt{2}}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(a-d)\pi_3$$

Это тождество связывает матрицы Паули с трехмерной геометрией равенством

$$\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} = x\pi_1 + y\pi_2 + z\pi_3 = \frac{x+iy}{\sqrt{2}}\varepsilon_1 + \frac{x-iy}{\sqrt{2}}\varepsilon_2 + z\pi_3$$

П2.3. Кватернионы.

В 1843 году У.Гамильтон ввел понятие кватернионов как обобщение комплексных чисел на четырехмерное пространство. Аппарат кватернионов представляет собой пример четырехмерной алгебры, в которой для операции умножения однозначно определена обратная операция – деление. Особенность кватернионов состоит в правиле их умножения.

$$Z = X \circ Y = x_o y_o - (\bar{x} \cdot \bar{y}) + x_o \bar{y} + y_o \bar{x} + (\bar{x} \times \bar{y}).$$

Отсюда видно, что перемножение кватернионов не коммутативно.

Каждый кватернион определяет некоторое положительное число, равное норме кватерниона, единичный вектор $\bar{\tau} = \tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2 + \tau_3\alpha_3$, где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, $\bar{\tau}^2 = -1$ и угол φ. Соотношения между этими величинами выражается формулой $A = \|A\|^{1/2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \bar{\tau}\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \|A\|^{1/2}\exp\left(\bar{\tau}\frac{\varphi}{2}\right)$, что позволяет рассматривать функции комплексных переменных как неразвернутые функции кватернионов.

Кватернионам $Q = q_o + \tau_1 q_1 + \tau_2 q_2 + \tau_3 q_3$ можно сопоставить векторы $\mathbf{q} = \mathbf{i}_o q_o + \mathbf{i}_1 q_1 + \mathbf{i}_2 q_2 + \mathbf{i}_3 q_3$ как линейные комбинации базисных элементов $\mathbf{i}_o, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, а векторам - 4×4 матрицы. Из покомпонентной записи произведения кватернионов

$$Z = X \circ Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} z_o = x_o y_o - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \\ z_1 = x_1 y_o + x_o y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ z_2 = x_2 y_o + x_o y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ z_3 = x_3 y_o + x_o y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} z = Xy \\ z^T = x^T Y \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

имеем

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} z_o \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_o & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_o & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_o \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_o \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_o \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} y_o & y_1 & y_2 & y_3 \\ -y_1 & y_o & -y_3 & y_2 \\ -y_2 & y_3 & y_o & -y_1 \\ -y_3 & -y_2 & y_1 & y_o \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} z_o & -z_1 & -z_2 & -z_3 \\ z_1 & z_o & -z_3 & z_2 \\ z_2 & z_3 & z_o & -z_1 \\ z_3 & -z_2 & z_1 & z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_o & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_o & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_o & -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ y_1 & y_o & -y_3 & y_2 \\ y_2 & y_3 & y_o & -y_1 \\ y_3 & -y_2 & y_1 & y_o \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_o & z_1 & z_2 & z_3 \\ -z_1 & z_o & -z_3 & z_2 \\ -z_2 & z_3 & z_o & -z_1 \\ -z_3 & -z_2 & z_1 & z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_o & y_1 & y_2 & y_3 \\ -y_1 & y_o & -y_3 & y_2 \\ -y_2 & y_3 & y_o & -y_1 \\ -y_3 & -y_2 & y_1 & y_o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_o & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & x_o & -x_3 & x_2 \\ -x_2 & x_3 & x_o & -x_1 \\ -x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix} \end{cases}$$

Итак, кватерниону можно сопоставить матрицу

$$Q_L = \begin{pmatrix} q_o & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_o & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_o & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_o \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} q_o + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} q_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} q_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} q_3 \quad \text{либо}$$

$$Q_R = \begin{pmatrix} q_o & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_o & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_o & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_o \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} q_o + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} q_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} q_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} q_3 .$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \\ \mathbf{i}_o \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_1 \\ \mathbf{i}_1 \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_2 \\ \mathbf{i}_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_3 \\ \mathbf{i}_3 \end{cases}$$

либо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \\ \mathbf{i}_o \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_1 \\ \mathbf{i}_1 \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_2 \\ \mathbf{i}_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_3 \\ \mathbf{i}_3 \end{cases}$$

перемножаются как кватернионные единицы $1, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ или элементы базиса $\mathbf{i}_o, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$.

Отметим ряд свойств матриц Q: $q_{is}q_{sj} = q_{si}q_{sj} = \delta_{ij}\left(q_o^{\,2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2} + q_3^{\,2}\right)$; дополнение к элементу $q_{ij} = \pm q_k$ равно $\pm q_k\left(q_o^{\,2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2} + q_3^{\,2}\right)$; $\det Q = \left(q_o^{\,2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2} + q_3^{\,2}\right)^2$.

Итак, если $q_o^{\,2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2} + q_3^{\,2} = 1$, имеем дело с ортогональными матрицами поворота. Произведение этих коммутирующих матриц $S^T = Q_L Q_R = Q_R Q_L$ - также ортогональная матрица

$$S=\begin{pmatrix} \sum q_s^{\,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_o^{\,2}+q_1^{\,2}-q_2^{\,2}-q_3^{\,2} & 2(q_1q_2+q_oq_3) & 2(q_1q_3-q_oq_2) \\ 0 & 2(q_2q_1-q_oq_3) & q_o^{\,2}-q_1^{\,2}+q_2^{\,2}-q_3^{\,2} & 2(q_2q_3+q_oq_1) \\ 0 & 2(q_3q_1+q_oq_2) & 2(q_3q_2-q_oq_1) & q_o^{\,2}-q_1^{\,2}-q_2^{\,2}+q_3^{\,2} \end{pmatrix},$$

которая поворачивает векторную часть кватерниона, оставляя неизменной его скалярную часть.

Изоморфизм кватернионов и полученных матриц 4×4 означает, например, возможность описания ортогональных преобразований с помощью этих матриц. Векторам $\mathbf{R}=\mathbf{E}_i X_i$, $\mathbf{r}=\mathbf{e}_i x_i$ сопоставим матрицы

$$R_L=\begin{pmatrix} X_o & -X_1 & -X_2 & -X_3 \\ X_1 & X_o & -X_3 & X_2 \\ X_2 & X_3 & X_o & -X_1 \\ X_3 & -X_2 & X_1 & X_o \end{pmatrix},\quad r_L=\begin{pmatrix} x_o & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_o & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_o & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix}$$

и кватернионы $R=X_o+\tau_i X_i$, $r=x_o+\tau_i x_i$.

Соответственно матричное и кватернионное выражения $R_L=Q_L r_L\, Q_L^{\,T}$ $R=Q\circ r\circ\widetilde{Q}$ дают одинаковый результат $X=S^T x$.

Аналогичным образом, если векторам $\mathbf{R}=\mathbf{E}_i X_i$, $\mathbf{r}=\mathbf{e}_i x_i$ сопоставить кватернионы $R=X_o+\tau_i X_i$, $r=x_o+\tau_i x_i$ и матрицы

$$R_R=\begin{pmatrix} X_o & X_1 & X_2 & X_3 \\ -X_1 & X_o & -X_3 & X_2 \\ -X_2 & X_3 & X_o & -X_1 \\ -X_3 & -X_2 & X_1 & X_o \end{pmatrix},\quad r_R=\begin{pmatrix} x_o & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & x_o & -x_3 & x_2 \\ -x_2 & x_3 & x_o & -x_1 \\ -x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix},$$

то матричное $R_R=Q_R r_R\, Q_R^{\,T}$ и кватернионное $R=Q\circ r\circ\widetilde{Q}$ равенства определяют преобразование $X=S^T\, x$,

Кватернионам $L=\lambda_o+\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2+\tau_3\lambda_3$ или векторам $\mathbf{L}=\mathbf{i}_o\lambda_o+\mathbf{i}_1\lambda_1+\mathbf{i}_2\lambda_2+\mathbf{i}_3\lambda_3$ можно сопоставить унитарную матрицу 2×2 Кэли (1821-1895)-Клейна (1849-1925):

$$L=\begin{pmatrix} \lambda_o-i\lambda_3 & -\lambda_2-i\lambda_1 \\ \lambda_2-i\lambda_1 & \lambda_o+i\lambda_3 \end{pmatrix}=\sigma_o\lambda_o+\sigma_1\lambda_1+\sigma_2\lambda_2+\sigma_3\lambda_3,$$

где матрицы

$$\sigma_o=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

подчиняются правилам умножения кватернионных единиц $1, \tau_1, \tau_2, \tau_3$. Это позволяет интерпретировать величины $\lambda_o, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ как компоненты вектора в пространстве, “ортами” которого являются матрицы σ_s, $s = 0,1,2,3$.

Изоморфизм кватернионов и матриц Кэли - Клейна означает, например, возможность описания ортогональных преобразований с помощью матриц Кэли-Клейна. Векторам $\mathbf{R} = \mathbf{E}_i X_i$, $\mathbf{r} = \mathbf{e}_i x_i$ сопоставим матрицы

$$R = \begin{pmatrix} X_o - iX_3 & -X_2 - iX_1 \\ X_2 - iX_1 & X_o + iX_3 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} x_o - ix_3 & -x_2 - ix_1 \\ x_2 - ix_1 & x_o + ix_3 \end{pmatrix}$$

и проведем вычисления $R = L \circ r \circ \widetilde{L}$ $\quad (\widetilde{L} = L^{*T})$

$$X_o - iX_3 = x_o - i\left[x_1 2(\lambda_3\lambda_1 - \lambda_o\lambda_2) + x_2 2(\lambda_3\lambda_2 + \lambda_o\lambda_1) + x_3\left(\lambda_o^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right)\right],$$

$$X_2 - iX_1 = \left[x_1 2(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_o\lambda_3) + x_2\left(\lambda_o^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right) + x_3 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_o\lambda_1)\right] -$$
$$- i\left[x_1\left(\lambda_o^2 + \lambda_1^2 - \lambda_o^2 - \lambda_3^2\right) + x_2 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_o) + x_3 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_o\lambda_2)\right],$$
и

так, $\quad R = S^T r$

Среди бесконечного многообразия всех алгебр некоторые алгебры занимают исключительное положение. Это - алгебра C всех комплексных чисел и алгебра H кватернионов. По сравнению с другими алгебрами указанные две наиболее близки к своей первооснове – алгебре R всех действительных чисел.

Приведем без доказательства ряд теорем.

Теорема Фробениуса (1849-1917).

Любая ассоциативная алгебра с делением изоморфна одной из трех: алгебре действительных чисел, алгебре комплексных чисел или алгебре кватернионов.

Обобщенная теорема Фробениуса.

Любая альтернативная алгебра с делением изоморфна одной из четырех алгебр: действительных чисел, комплексных чисел кватернионов или октав.

Теорема Гурвица (1858-1919).

Любая нормированная алгебра с единицей изоморфна одной из четырех алгебр: действительных чисел, комплексных чисел кватернионов или октав.

Итак, нормированными ассоциативными алгебрами с делением и единицей являются алгебры действительных чисел, комплексных чисел и кватернионов.