

***Варіант 6***

**Система:** .

**Завдання №1:** Побудувати базис Гребнера для системи рівнянь. Використовувати алгоритм Бухбергера. Записати роботу алгоритму по кроках.

***Розв’язання***

Кожне рівняння системи можна представити у вигляді поліному від кількох змінних. Визначимо лексикографічний порядок для поліномів, що і відсортуємо кожен поліном лексикографічно, потім за найбільшим степенем:

Вважаємо початковим базисом Гребнера усі поточні поліноми у системі.

Визначимо поняття *зчеплення*: поліноми та мають зчеплення, якщо їх старші члени та діляться одночасно на деякий одночлен(моном) , відмінний від константи.

Тоді, будемо шукати всі зчеплення серед поліномів базису.

***Крок 1:***

Поліноми та мають зчеплення. Їх найбільший спільний дільник головних членів та рівний .

Визначимо , .

Знайдемо та :

Визначимо новий поліном (результат зводимо зберігаючи лексикографічний порядок):

Отримали поліном, який не можна більше редукувати, тому додаємо його до базису Гребнера.

***Крок 2:***

Поліноми та мають зчеплення. Їх найбільший спільний дільник головних членів та рівний .

Визначимо , .

Знайдемо та :

Визначимо новий поліном (результат зводимо зберігаючи лексикографічний порядок):

Використовуючи операцію редукції на отримуємо:

1. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де . Тобто маємо:
2. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де . Тобто маємо:
3. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де . Тобто маємо:

Отримали поліном:, який не можна більше редукувати, тому додаємо його до базису Гребнера.

***Крок 3:***

Поліноми та мають зчеплення. Їх найбільший спільний дільник головних членів та рівний.

Визначимо , .

Знайдемо та :

Визначимо новий поліном (результат зводимо зберігаючи лексикографічний порядок):

Використовуючи операцію редукції на отримуємо:

1. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де . Тобто маємо:
2. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де Тобто маємо:

1. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де Тобто маємо:

Отримали що поліном звівся до 0, тобто зчеплення не додало нового поліному в базис.

***Крок 4:***

Поліноми та мають зчеплення. Їх найбільший спільний дільник головних членів та рівний .

Визначимо , .

Знайдемо та :

Визначимо новий поліном (результат зводимо зберігаючи лексикографічний порядок):

Використовуючи операцію редукції на отримуємо:

1. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де . Тобто маємо:
2. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де . Тобто маємо:
3. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де Тобто маємо:

1. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де Тобто маємо:

1. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де Тобто маємо:
2. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де Тобто маємо:
3. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де Тобто маємо:
4. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де Тобто маємо:

Отримали поліном:, який не можна більше редукувати, тому додаємо його до базису Гребнера.

***Таким чином обраховуємо ще 15 кроків***

***Крок 20:***

Поліноми та мають зчеплення. Їх найбільший спільний дільник головних членів та рівний .

Визначимо , .

Знайдемо та :

Визначимо новий поліном (результат зводимо зберігаючи лексикографічний порядок):

Використовуючи операцію редукції на отримуємо:

1. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де . Тобто маємо:
2. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де . Тобто маємо:
3. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де . Тобто маємо:

Отримали що поліном звівся до 0, тобто зчеплення не додало нового поліному в базис.

***Крок 21:***

Поліноми та мають зчеплення. Їх найбільший спільний дільник головних членів та рівний .

Визначимо , .

Знайдемо та :

Визначимо новий поліном (результат зводимо зберігаючи лексикографічний порядок):

Використовуючи операцію редукції на отримуємо:

1. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де . Тобто маємо:
2. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де . Тобто маємо:
3. Старший член полінома ділиться на старший член полінома , тоді визначимо значення для як , де . Тобто маємо:

Отримали що поліном звівся до 0, тобто зчеплення не додало нового поліному в базис.

***Крок 22:***

Поліноми та мають зчеплення. Їх найбільший спільний дільник головних членів та рівний .

Визначимо , .

Знайдемо та :

Визначимо новий поліном (результат зводимо зберігаючи лексикографічний порядок):

Отримали що поліном звівся до 0, тобто зчеплення не додало нового поліному в базис.

Після перебору усіх зчеплень ми отримали таку систему поліномів:

***Це і є базисом Гребнера.***

**Завдання №2:** Побудувати редукований базис Гребнера для системи рівнянь.

***Розв’язання***

Будемо будувати редукований базис Гребнера використовуючи базис з минулого завдання, відкидаючи зайві поліноми. Відкидаємо ті, в яких старші члени поліноми діляться на будь-який інший старший член іншого полінома базису.

1. Беремо , його головний член ділиться на головний член . Відкидаємо з базису.
2. Беремо , його головний член ділиться на головний член . Відкидаємо з базису.
3. Беремо , його головний член ділиться на головний член . Відкидаємо з базису.
4. Беремо , його головний член ділиться на головний член . Відкидаємо з базису.
5. Беремо , його головний член ділиться на головний член . Відкидаємо з базису.
6. Беремо , його головний член ділиться на головний член . Відкидаємо з базису.
7. Беремо , його головний член ділиться на головний член . Відкидаємо з базису.

Отже ***редукований базис Гребнера*** став таким: