

## 基于水雷折纸拟合自由曲面的优化建模

张奥, 赵岩\*

(江苏大学计算机科学与通信工程学院 镇江 212013)

(yanzhao\_cs@ujs.edu.cn)

**摘要:** 水雷折纸单元的形状多样性和灵活性使其能够适应不同曲面, 实现复杂模型构建. 针对优化后水雷折纸的顶点容易偏离目标表面导致模型近似不够精确, 以及水雷折纸折痕图中水雷单元面积差异较大, 增加了折痕图不规则性的问题, 提出基于水雷折纸技术的自由曲面建模方法. 在满足可展和可平坦折叠约束的前提下, 采用基于多目标优化的数值逼近方法, 使得水雷网格更精确地贴合在目标表面; 利用等面积的水雷单元构建三维模型, 减少水雷单元面积差异, 获得更加规则的折痕图. 在不同曲面上的实验结果表明, 最大距离残差在添加距离约束后均显著下降, 最大面积残差均小于  $1E-12$ , 验证了所提方法的有效性和可行性, 为基于折纸拟合自由曲面建模的研究提供了新思路和方法.

**关键词:** 水雷折纸; 自由曲面建模; 多目标优化; 等面积优化

**中图分类号:** TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2024-00668

## Optimization Modeling for Fitting Freeform Surfaces Based on Waterbomb Origami

Zhang Ao and Zhao Yan\*

(School of Computer Science and Communication Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013)

**Abstract:** The shape diversity and flexibility of waterbomb origami units enable them to adapt to various surfaces and realize the construction of complex models. To address the issues of vertex deviation from the target surface after optimization, leading to insufficient model approximation accuracy and large area differences among waterbomb units in the crease pattern which increase its irregularity, this paper proposes a freeform surface modeling method based on waterbomb origami. Under the constraints of developability and flat-foldability, a numerical approximation method based on multi-objective optimization is employed to fit the waterbomb mesh on the target surface more precisely. Equal-area waterbomb units are used to construct 3D models, reducing area differences and producing more regular crease patterns. Experimental results on various surfaces show that the maximum distance residuals significantly decrease after introducing distance constraints, and the maximum area residuals are all less than  $1E-12$ . These results verify the effectiveness and feasibility of the proposed method, offering new insights and approaches for freeform surface modeling based on origami.

**Key words:** waterbomb origami; freeform surface modeling; multi-objective optimization; equal-area optimization

折纸, 作为一种古老的手工艺艺术为人熟知. 近代以来, 通过引入通用符号系统与数学理论, 使得

关于折纸的研究由原来的艺术性向着科学性与工程性方面转变,折纸工程学得到迅速发展。凭借独特的设计方法与灵活性,应用古老的折纸艺术解决各种实际问题日益受到研究人员的青睐。根据对刚性折纸及其运动学<sup>[1]</sup>的研究,人们设计出具备刚度、稳定性和可变形性的结构,这些结构广泛应用于航天器、太阳能面板<sup>[2]</sup>、折叠式建筑与医疗设备<sup>[3]</sup>等领域。工程折纸<sup>[4]</sup>研究促进创新设计与高效结构,实现轻量化、可折叠性和资源优化,推动多个领域技术的进步。

自由曲面的建模在计算机图形学、工程设计和虚拟现实等领域具有重要的应用价值。传统的曲面建模方法,如 NURBS 和 Bézier 曲面<sup>[5]</sup>,可以精确地表达复杂曲面。近年来,折纸技术作为一种古老而独特的造型手法,被越来越多地应用于曲面建模和几何设计中。水雷折纸是一种常见的折纸纹样,以其独特的折叠方式和曲面拟合能力受到广泛关注,通过将平面纸张折叠成复杂的几何形状,使得曲面能够被精确地表达和再现,这种方法不仅可以在纸上创造出复杂的几何形状,而且可以在数字环境中进行仿真和建模。然而,目前对于水雷折纸在自由曲面建模方面的研究还相对有限。

本文提出一种基于水雷折纸近似自由曲面的多目标优化建模方法。首先,引入距离约束,实现更精确的自由曲面水雷折纸建模;然后添加面积约束减少水雷单元面积差异,生成规则的水雷折纸图案。此外,开发了一个交互式建模框架,使用户通过动态地调整模型参数,生成适应不同目标曲面的水雷折纸模型。

## 1 相关工作

Wei 等<sup>[6]</sup>通过几何力学的方法研究周期褶皱折纸的力学性质和变形行为,并提出对折纸结构进行设计和控制的理论基础。周期性褶皱折纸的引入为计算折纸的发展开辟了新的道路。借助周期性褶皱折纸的几何重复性与良好的可折叠性,折纸艺术家们创造出复杂的折叠模式,诞生了三浦折纸和水雷折纸等纹案。在三浦折纸纹案研究中,Dudte 等<sup>[7]</sup>提出一种优化方法,用于构建以适应具有任意高斯曲率目标表面的广义三浦折纸结构,拓宽了折纸在形状可编程设计与曲面建模领域的应用边界;Wang 等<sup>[8]</sup>提出一种基于三浦折纸的参数化模型,通过调整折纸参数控制曲面形状,并优

化拟合误差,实现了精确曲面建模;Hu 等<sup>[9]</sup>提出了一种构建刚性折叠的广义三浦折纸网格的方法,以适应不同曲率的曲面;Dang 等<sup>[10]</sup>研究通过逆向设计可展开的折纸结构近似表示一般曲面的问题,并提出一种用于此目的的设计框架。

六折水雷单元也因其广泛的应用前景而受到研究人员的关注。Chen 等<sup>[11]</sup>研究对称水雷折纸结构的几何形态和折叠方式,为进一步探索自由曲面建模和折纸结构的关系奠定了基础;Zhao 等<sup>[12]</sup>提出一种基于广义水雷折纸的方法,通过调整节点的位置和连接关系,能够更准确地捕捉到曲面的特征和结构,并且对基础网格应用简单的数值优化算法,获得了可展开的水雷折纸,该方法具有较高的灵活性和适应性,在逼近复杂曲面时表现出良好的效果;Ma 等<sup>[13]</sup>研究管状水雷的折叠过程和机制,通过实验和数值模拟揭示了其几何形变、力学行为和稳定性;冯慧娟等<sup>[14]</sup>深入研究广义水雷折纸管的刚性折叠特性,分析其折叠机制和几何特征,并探讨了这种结构在工程应用中的潜力;Zhao 等<sup>[15]</sup>研究水雷折纸在近似广义圆柱和轴对称曲面中的应用,提出计算设计方法,通过建模水雷网格单个条带并进行复制构建曲面结构,引入优化过程实现平坦折叠性,并展示了带四边填充的水雷衍生拼接,扩展了设计变体,为折纸结构在工程设计中的应用奠定了基础。Imada 等<sup>[16]</sup>提出水雷管的运动学模型,并通过可视化水雷管的不同配置将解分为圆柱解、波状解和有限解 3 类,并证明了中性稳定圆柱解周围存在波状解;Zhao 等<sup>[17]</sup>利用水雷折纸单元构建可折叠圆柱面来近似曲面,提出一种优化水雷单元大小的方法,并分析了相邻单元的折叠机制,为逆折纸设计问题提供了新颖的解决方案;Zhang 等<sup>[18]</sup>提出一种基于多目标优化的方法,旨在构建广义圆柱和轴对称的三维水雷折纸结构,通过第 1 类优化提高对目标表面的逼近精度,再通过第 2 类优化统一水雷单元以生成可平坦折叠的结构,为可折叠设计在建筑和工程领域的应用提供了新思路。

Lee 等<sup>[19]</sup>提出了一种对初始球面连续细分的方法,并通过优化问题实现了等面积或等长度的球面五边形细分;Liu 等<sup>[20]</sup>使用聚类和优化方法减少自由曲面近似过程中不同面片的数量,通过对面片进行聚类分组并对其形状进行优化,简化逼近模型并提高计算效率;Marler 等<sup>[21]</sup>研究多目标优化中的加权和的方法,并提出改进的方法,通过数学

模型和算法的分析展示加权和方法的有效性和性能, 并探讨了权重因子选择、优化算法改进和收敛性等方面的问题.

## 2 基础模型建立

本文基于文献[12], 结合已有三浦折纸等纹案的建模方法, 通过将水雷单元平铺到曲率变化或恒定的目标表面, 生成初始三维网格模型. 图 1a 所示为一个由 4 条谷折(蓝色折边)与 2 条山折(红色折边)在中心点交会的水雷单元基底, 其中,  $P_c$  为一个水雷单元的中心顶点,  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_u$  和  $P_d$  水雷单元基底的边缘点. 将一个水雷单元基

底分为 G(绿色)、R(红色)和 B(蓝色)3 种类型的面, 它们的面积分别用  $S_G, S_R, S_B$  表示. 图 1b 所示为一个标准的水雷折纸网格, 包含  $N_r \times N_c$  个水雷单元, 其中,  $N_r = 3$  和  $N_c = 3$ , 分别表示行数和列数. 在网格中, 如果某条边仅出现在一个面中, 则它为边界边. 至少连接一条边界边的顶点为边界点, 否则为内部点. 而在水雷折纸网格中, 还有一个显著特征是若顶点  $P_i$  的相邻顶点为 6 个是内部点, 否则为边界点. 如图 1b 中, 虚线框中的点为水雷折纸内部点  $P_i$ , 其中,  $\alpha_{i,k} (k=1,2,\dots,6)$  表示第  $i$  个内部顶点的第  $k$  个角度; 黑色边界线上的点都为边界点.

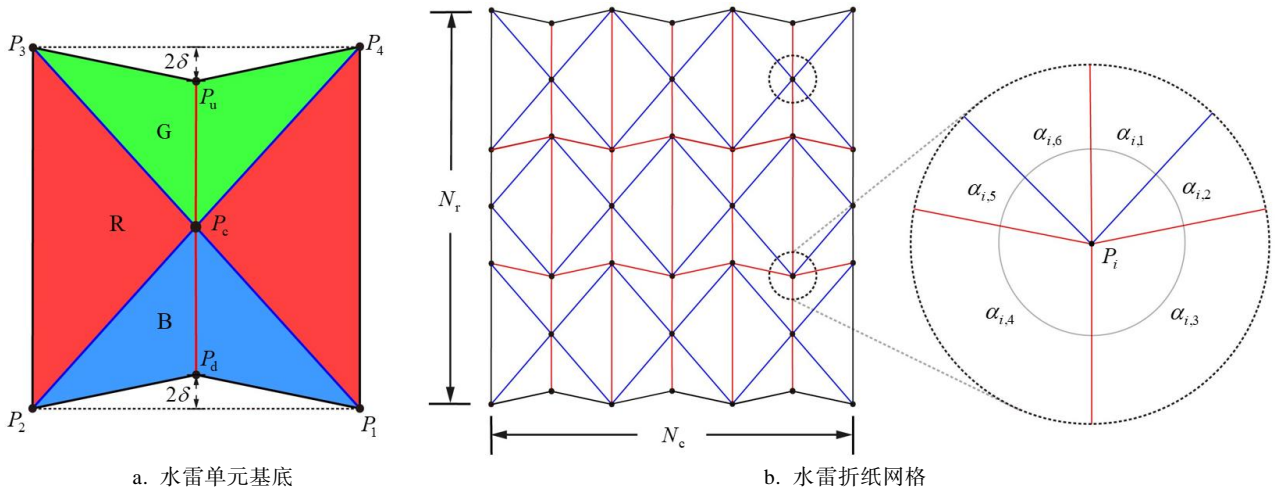


图 1 水雷折纸网格  $M$  及其单元示意图

目标模型分为 2 种情况:

(1) 如果目标模型有显式参数方程, 如图 2a 所示, 首先根据参数方程生成目标曲面, 以四分之一花瓶曲面为例, 其参数方程为

$$\begin{cases} x = (0.75 + 0.12 \sin \pi v) \cos u \\ y = (0.75 + 0.12 \sin \pi v) \sin u, u \in [0, 0.5\pi], v \in [0, 2.0]; \\ z = 0.7v \end{cases}$$

根据  $u, v$  参数方程计算单个水雷单元中每个顶点的坐标值; 然后沿  $u, v$  方向逐个平铺水雷单元, 直到覆盖整个目标表面, 如图 2b 所示. 为了生成部分折叠状态下的水雷基底网格, 需要对水雷单元进行调整, 其步骤如下: 将每个水雷单元中心点  $P_c$  沿其水雷单元基底的单位法向量方向平移  $\eta$  距离<sup>[22]</sup>, 而水雷单元基底的单位法向量方向采用文献[22]的计算公式; 对每个水雷单元的  $P_3, P_4$  和  $P_d$  沿其  $v$  方向坐标增加  $\delta$ , 对  $P_1, P_2$  和  $P_u$  沿其  $v$  方向坐标减去  $\delta$ , 最终生成四分之一花瓶曲面的

基础水雷三维模型, 如图 2c 所示. 其中,  $\eta$  与  $\delta$  由用户自行设定.

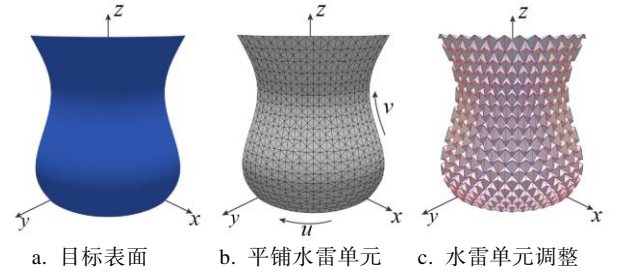
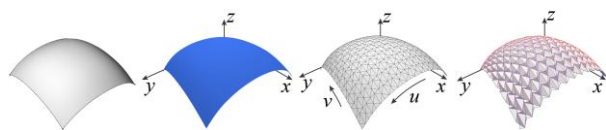


图 2 显式参数方程自由曲面建模过程

(2) 如果目标模型没有显式的参数方程, 如图 3 所示, 该模型是在 Rhinoceros 3D®建模软件(简称为 Rhino)<sup>[23]</sup>建立的自由曲面, 由于没有显式的解析方程, 因此无法直接计算出给定  $u, v$  处的控制点坐标值. 但是, Rhino 建立的曲面是 NURBS 曲面, 一种基于控制点、权重和基函数的组合来精确表示复杂形状的数学模型. 采用基于参数的曲面差值方法实现对复杂形状的精确表示与控制, 同

样也能计算给定  $u, v$  的控制点坐标值. 而水雷单元控制点的位置调整部分与第 1 种情况一样.



a. Rhino 模型 b. 目标曲面 c. 平铺水雷单元 d. 水雷单元调整

图 3 隐式参数方程自由曲面建模过程

生成基础网格模型之后, 对整个模型施加数值优化, 通过扰动顶点满足可展约束, 实现基于水雷折纸拟合自由曲面的逆向设计. 然而优化过程中, 由于没有限制顶点在目标曲面上移动, 在优化过程结束后水雷网格上的顶点会偏离目标曲面. 为此, 本文提出一种多目标优化建模方法, 旨在满足可展、可平坦折叠约束, 以及减少顶点与目标表面距离的约束, 这些约束共同构成优化 1 的主要内容. 优化后的水雷网格不仅可展和可平坦折叠, 而且更紧密地贴合目标表面.

尽管优化 1 在提升模型的贴合度方面取得了一定成效, 但在实际制作过程中仍暴露出一些新的问题, 尤其是水雷单元的面积差异问题; 并且, 由于水雷单元的自由度较高, 表现力强, 使得在构造自由曲面时可以获得丰富的水雷折纸结构. 通过观察水雷折纸展开图不难发现, 水雷单元的面积差异明显, 无疑增加了实际制作的难度与应用的门槛. 因此, 本文引入优化 2, 提出一种生成三维网格模型的多目标建模方法, 在满足可展和可平坦折叠约束前提下实现水雷单元面积均一化, 降低制作的复杂性.

### 3 本文方法

水雷折纸纹样凭借其高度自由的拓扑结构, 能够灵活适应复杂的自由曲面, 通过调整折叠角度, 有效逼近具有不同曲率特征的目标表面. 基于水雷折纸纹样特征提出拟合自由曲面的多目标优化建模方法, 在可展和可平坦折叠约束前提下, 获得更紧密贴合目标表面的水雷折纸模型; 还提出一种利用等面积的水雷单元构建三维折纸模型的优化建模方法.

#### 3.1 优化问题

本文的优化问题如下: 在满足可展和可平坦折叠约束前提下, 构造更精确拟合目标表面的水雷折纸结构; 利用等面积的水雷单元构建水雷折纸三维模型. 由于二者都是基于整个模型的全局优

化过程, 因此通过不固定边界顶点来释放解空间.

#### 3.2 目标函数

优化 1 是为生成的三维基础网格模型添加可展约束、可平坦折叠约束和距离约束. 利用每个内部顶点的角度关系定义可展开性和可平坦折叠性. 当图 1b 所示的水雷单元内部顶点  $P_i$  周围的角度和等于  $2\pi$  [24], 即  $\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} + \alpha_{i,3} + \alpha_{i,4} + \alpha_{i,5} + \alpha_{i,6} = 2\pi$  时, 满足可展约束. 根据川崎定理 [25], 对于一个能够完全平坦折叠的折纸模型, 沿着任何顶点周围的褶线, 从任意一个褶线开始, 按顺时针或逆时针顺序对山谷折痕和山脉折痕交替进行角度和计算, 当出现偶数个褶线时, 围绕内部顶点  $P_i$  的交替角度之和的差的绝对值等于 0, 即当  $\alpha_{i,1} - \alpha_{i,2} + \alpha_{i,3} - \alpha_{i,4} + \alpha_{i,5} - \alpha_{i,6} = 0$  时, 模型是可平坦折叠的.

本文中, 可展约束的残差量  $r_i^{\text{dev}}$  定义为

$$r_i^{\text{dev}} = \begin{cases} \sum_{k=1}^6 \alpha_{i,k} - 2\pi, & \text{if } N_i^b = 6 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\alpha_{i,k}$  ( $k=1,2,\dots,N_i^b$ ) 表示水雷网格的第  $i$  个顶点的第  $k$  个角度;  $N_i^b$  表示顶点  $P_i$  的邻接顶点数量. 可展约束的目标函数  $E_{\text{dev}}$  由式(1)表示为

$$E_{\text{dev}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_v} \left( r_i^{\text{dev}} \right)^2.$$

其中,  $N_v$  表示水雷折纸网格的顶点的数量. 可平坦折叠约束的残差量  $r_i^{\text{ff}}$  定义为

$$r_i^{\text{ff}} = \begin{cases} \sum_{k=1}^6 (-1)^{k-1} \alpha_{i,k}, & \text{if } N_i^b = 6 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

可平坦折叠约束的目标函数  $E_{\text{ff}}$  由式(2)表示为

$$E_{\text{ff}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_v} \left( r_i^{\text{ff}} \right)^2.$$

当  $N_i^b = 6$  时, 内部点  $P_i$  相邻顶点的数量是 6, 故  $r_i^{\text{dev}} = \alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} + \alpha_{i,3} + \alpha_{i,4} + \alpha_{i,5} + \alpha_{i,6} - 2\pi$ ,  $r_i^{\text{ff}} = \alpha_{i,1} - \alpha_{i,2} + \alpha_{i,3} - \alpha_{i,4} + \alpha_{i,5} - \alpha_{i,6}$ ; 当  $N_i^b \neq 6$ , 即顶点  $P_i$  是  $M$  上边界点时, 由于边界点的位置变化并不影响可展约束与可平坦折叠约束, 因此设置  $r_i^{\text{dev}} = 0$ ,  $r_i^{\text{ff}} = 0$ .

为了稳定地计算给定向量  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{w}$  之间的角度  $\alpha$ , 使用文献 [7] 提出的公式进行计算

$$\alpha = 2\arctan 2(\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|, \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}).$$

其中,  $\|\cdot\|$  表示欧几里得 2 范数,  $\arctan 2$  表示基于值域为  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  的反正切函数.

距离约束函数的定义. 首先计算顶点  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  与其在目标表面上的投影点  $P'_i(x'_i, y'_i, z'_i)$  之间的距离  $d_i$ , 公式为

$$d_i = \sqrt{(x_i - x'_i)^2 + (y_i - y'_i)^2 + (z_i - z'_i)^2} \quad (3)$$

距离约束的残差量由式(3)表示为

$$r_i^{\text{dist}} = \frac{d_i}{L} \quad (4)$$

距离约束的目标函数  $E_{\text{dist}}$  由式(4)定义为

$$E_{\text{dist}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_v} (r_i^{\text{dist}})^2.$$

其中,  $\bar{L}$  表示三维水雷折纸网格边长的平均值, 目的是实现水雷折纸距离残差量的无量纲化. 此外,  $\bar{L}$  是水雷折纸网格自身的属性, 会随着模型迭代更新而更新. 根据图 1a, 将水雷单元的顶点分成中心点和边缘点, 边缘点是拟合在目标表面上的点, 中心点并不在目标表面上, 距离约束仅考虑表面上的点. 因此, 当顶点  $P_i$  的类型是中心点时,  $r_i^{\text{dist}} = 0$ ; 而当顶点  $P_i$  的类型为边缘点时,  $d_i$  则为顶点  $P_i$  到目标表面上的投影点的距离, 在基础网格模型的状态下, 顶点  $P_i$  在目标表面上, 因此  $r_i^{\text{dist}}$  趋近于 0.

拟合自由曲面的水雷折纸中水雷单元面积不一, 导致不同面积的水雷单元需要采用不同的制造工艺, 增加了实际制作的生产成本. 因此在生成的三维基础网格模型上, 添加可展约束、可平坦折叠约束和面积约束, 使优化后获得的水雷折纸不仅可展和可平折, 而且三维网络的展开图相比优化前更加规则.

面积约束指通过统一水雷单元三角形面积, 限制水雷单元形状来构造三维模型. 由于水雷单元实际上是由三角形构成的, 一个水雷单元具有 6 个三角形面, 因此对这 6 个面进行分类, 按照图 1a, 将颜色分成 3 类三角形, 它们的面积分别用  $S_G, S_R, S_B$  表示; 然后计算水雷折纸中每类三角形的平均面积  $\bar{S}_G, \bar{S}_R, \bar{S}_B$ , 让每个面的面积收敛于它所对应类的平均面积, 以统一水雷单元面积达成

限制水雷单元形状的效果. 面积约束的残差量  $r_j^{\text{area}}$  定义为

$$r_j^{\text{area}} = \frac{S_j - \bar{S}}{\bar{S}} \quad (5)$$

其中,  $S_j$  表示水雷网格  $M$  上第  $j$  个面的面积. 面积约束的目标函数  $E_{\text{area}}$  由式(5)表示为

$$E_{\text{area}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_f} (r_j^{\text{area}})^2.$$

其中,  $N_f$  是水雷折纸网格  $M$  的面片数量. 当面为 G 类面时,  $\bar{S} = \bar{S}_G$ ; 当面为 R 类面时,  $\bar{S} = \bar{S}_R$ ; 当面为 B 类面时,  $\bar{S} = \bar{S}_B$ , 每次迭代更新  $\bar{S}_G, \bar{S}_R, \bar{S}_B$ . 此外, 每次迭代开始之前, 重新计算上一次优化迭代结果中每类三角形的平均面积, 目的是确保优化过程中能够动态地考虑当前几何形状的变化, 并且能够及时调整优化策略, 减少面积误差, 保证优化目标能够逐步地逼近预期结果. 随着优化过程的进行, 水雷网格的几何形状逐步改变, 影响各个三角形单元的边长、角度等几何特征, 导致它们的面积发生变化. 因此, 重新计算平均面积能够实时地反映这些几何变化, 并为下一次迭代的优化提供更新的参考值. 这一动态调整机制有助于提高优化过程的精度和收敛性, 确保优化结果更符合预期的几何要求.

本文将可展约束和可平坦折叠约束统称为几何约束  $E$ , 定义为

$$E = \omega_{\text{dev}} E_{\text{dev}} + \omega_{\text{ff}} E_{\text{ff}} \quad (6)$$

其中,  $\omega_{\text{dev}}$  和  $\omega_{\text{ff}}$  分别表示可展约束和可平坦折叠约束的权重,  $E_{\text{dev}}$  与  $E_{\text{ff}}$  表示施加在水雷网格顶点上的约束.

2 种优化问题的目标函数是在满足几何约束  $E$  的基础上, 进一步引入以下额外约束:

优化 1. 精确拟合目标表面的可展和可平坦折叠水雷折纸的目标函数, 由式(6)定义为

$$E_1 = E + \omega_{\text{dist}} E_{\text{dist}}.$$

其中,  $\omega_{\text{dist}}$  表示距离约束的权重,  $E_{\text{dist}}$  表示施加在水雷网格中拟合在目标表面上的顶点上的约束.

优化 2. 利用等面积水雷单元构建可展和可平坦折叠水雷折纸的目标函数, 由式(6)定义为

$$E_2 = E + \omega_{\text{area}} E_{\text{area}}.$$

其中,  $\omega_{\text{area}}$  表示面积约束权重,  $E_{\text{area}}$  表示针对水

雷折纸网格上的面添加的约束. 使用等面积的水雷单元构建自由曲面模型, 限制平面折痕图中不规则的水雷单元.

此外, 本文开发了一个交互式建模框架, 使用户能够动态调整模型参数, 生成适应不同目标曲面的水雷折纸模型. 用户可以通过该框架实时地修改水雷网格的分辨率及水雷单元的相关参数, 为优化过程提供更灵活、精确的初始解. 初始值的合理性对非线性优化问题至关重要, 它不仅影响优化的收敛速度, 还直接决定最终优化结果的质量. 借助这一框架, 用户可以根据目标曲面的几何特性和实际建模需求选择更加合适的初始值, 提升优化效率与稳定性.

在优化阶段, 本文采用 LM (Levenberg-Marquardt) 算法<sup>[26]</sup>, 其中, 阻尼参数为  $1\text{E}-6$ , 通过迭代地调整水雷单元顶点的位置重构水雷网格模型. LM 算法是一种结合梯度下降法与 Gauss-Newton 法的迭代优化算法, 通过最小化目标函数的残差实现收敛, 详细步骤见文献<sup>[26]</sup>.

### 3.3 优化误差

在优化 1 中, 当式(1)中  $|r_i^{\text{dev}}|$  的最大可展残差量, 式(2)中  $|r_i^{\text{ff}}|$  的最大可平坦折叠残差量和式(4)中的最大距离残差量  $|r_i^{\text{dist}}|$  均小于给定的阈值时, 该进程终止. 在优化 2 中, 当式(1)中  $|r_i^{\text{dev}}|$  的最大

可展残差量, 式(2)中  $|r_i^{\text{ff}}|$  的最大可平坦折叠残差量和式(5)中  $|r_j^{\text{area}}|$  的最大面积残差量均小于给定的阈值时, 该进程终止. 同时, 如果迭代次数达到指定的次数时, 优化进程也会终止.

## 4 实验及结果分析

本文方法用于构建可展和可平坦折叠的水雷模型, 并且更精确地拟合自由目标表面, 同时, 通过水雷单元面积均一化, 减少折痕展开图中水雷单元的差异. 对本文设计的交互式建模框架通过编程实现, 在 12th Gen Intel(R) Core(TM) i7-12700 CPU 2.10 GHz, 16 GB RAM 的台式机上实验, 并收集实验中的数据.

### 4.1 优化 1 的实验

基于优化 1, 在具有不同高斯曲率的曲面上进行实验, 拟合自由曲面的水雷折纸结果如图 4 所示. 其中, 图 4a 和图 4b 是具有零高斯曲率的曲面, 图 4c 和图 4d 是具有正高斯曲率的曲面, 图 4e 和图 4f 是具有负高斯曲率的曲面, 图 4g 和图 4h 是具有混合零高斯曲率的曲面. 优化时, 设置  $|r^{\text{dev}}|$  的最大可展残差量和  $|r^{\text{ff}}|$  的最大可平坦折叠残差量都小于  $1\text{E}-5$ , 且  $|r^{\text{dist}}|$  的最大距离残差量小于  $1\text{E}-1$ .

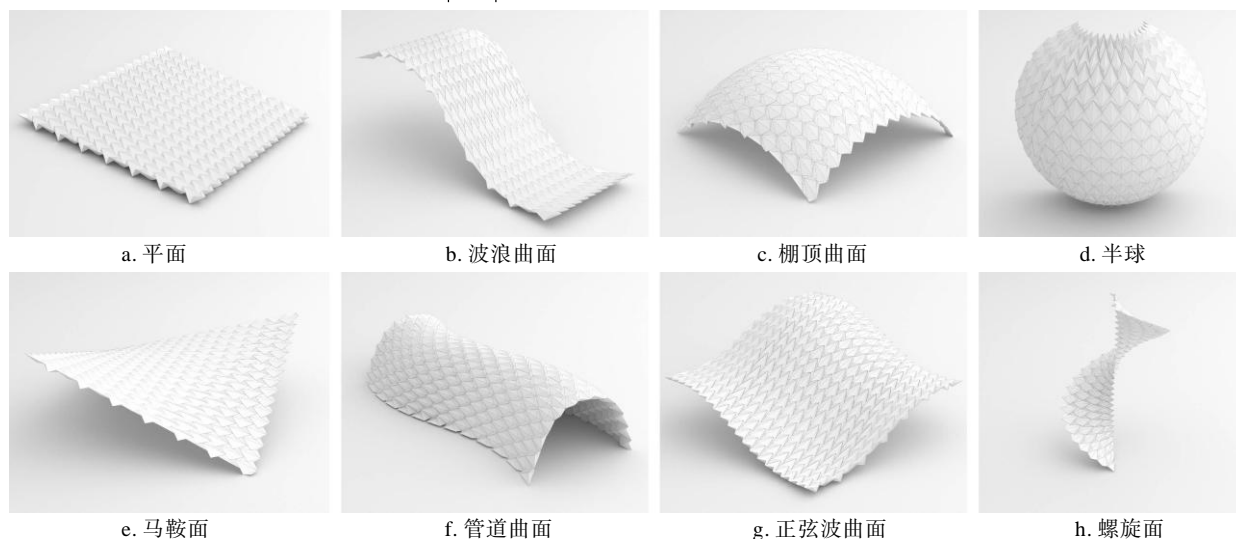


图 4 基于优化 1 拟合自由曲面的水雷折纸结构

图 4 中水雷折纸结构的数据统计如表 1 所示. 其中, 设置  $\omega_{\text{dev}} = 1.0$ ,  $\omega_{\text{ff}} = 1.0$  和  $\omega_{\text{dist}} = 0.001$ ;  $|r_{\text{max}}^{\text{dev}}|$  和  $|r_{\text{ave}}^{\text{dev}}|$  分别表示顶点可展的最大量和平均量的残差;  $|r_{\text{max}}^{\text{ff}}|$  和  $|r_{\text{ave}}^{\text{ff}}|$  分别表示顶点可平坦折叠的

最大量和平均量的残差;  $|r_{\text{max}}^{\text{dist}}|$  和  $|r_{\text{ave}}^{\text{dist}}|$  分别表示顶点到目标表面上投影点的距离的最大量和平均量的残差;  $I$  表示迭代次数;  $T$  表示优化所需要的时间.



表 1 基于优化 1 得到的图 4 水雷折纸结构的数据统计

模型	$N_r \times N_c$	$ r_{\max}^{\text{dev}} / r_{\text{ave}}^{\text{dev}} $	$ r_{\max}^{\text{ff}} / r_{\text{ave}}^{\text{ff}} $	$ r_{\max}^{\text{dist}} / r_{\text{ave}}^{\text{dist}} $	$I$	$T/\text{s}$
图 4a	16×14	1.59E-6/4.05E-7	3.22E-6/8.49E-7	1.15E-2/2.42E-3	35	100.256
图 4b	12×16	4.92E-7/1.08E-7	9.20E-7/1.78E-7	1.38E-2/3.36E-3	33	62.562
图 4c	14×14	1.79E-6/3.02E-7	2.37E-6/5.16E-7	2.99E-2/3.95E-3	24	46.758
图 4d	16×14	9.01E-7/1.62E-7	5.77E-7/1.25E-7	1.50E-2/1.91E-3	35	103.041
图 4e	16×14	5.20E-6/1.24E-7	8.48E-7/1.90E-7	2.59E-2/2.06E-3	30	86.147
图 4f	12×24	5.17E-7/1.06E-7	8.37E-7/1.66E-7	1.52E-2/1.82E-3	28	171.713
图 4g	20×14	1.85E-6/3.35E-7	2.93E-6/5.84E-7	1.29E-2/4.24E-3	33	307.816
图 4h	28×4	2.76E-7/7.48E-8	4.04E-7/1.02E-7	1.58E-2/5.36E-3	33	14.388

在图 4 中的 8 个模型上, 对 3 种方法的距离残差进行实验, 结果如图 5 所示, 包括初始最大距离残差表示由拟合自由曲面建模方法本身带来的残差(简称方法 1); 经过  $E$  优化后的最大距离残差(简称方法 2); 在  $E$  优化基础上添加距离约束后的最大距离残差(简称方法 3)。结果表明, 与方法 1 相比, 方法 2 的最大距离残差明显增大, 表明水雷网格顶点相对于目标曲面的偏离程度加大, 导致模型在拟合目标曲面上的精确度降低; 相比之下, 方法 3 的最大距离残差较未添加距离约束优化时

显著降低。然而, 由于优化函数均针对水雷网格顶点进行优化, 这些优化项之间存在相互约束, 因此即便引入了距离约束, 优化后的模型最大距离残差依然难以完全消除, 如半球模型, 尽管与初始误差相比优化后残差已经显著降低, 但仍然存在一定差距; 值得注意的是, 对于管道曲面和正弦波曲面, 方法 3 的最大距离误差较方法 1 有所降低, 原因是优化迭代过程中水雷网格的边长平均值增大, 从而使得  $|r_{\max}^{\text{dist}}|$  的值减小。

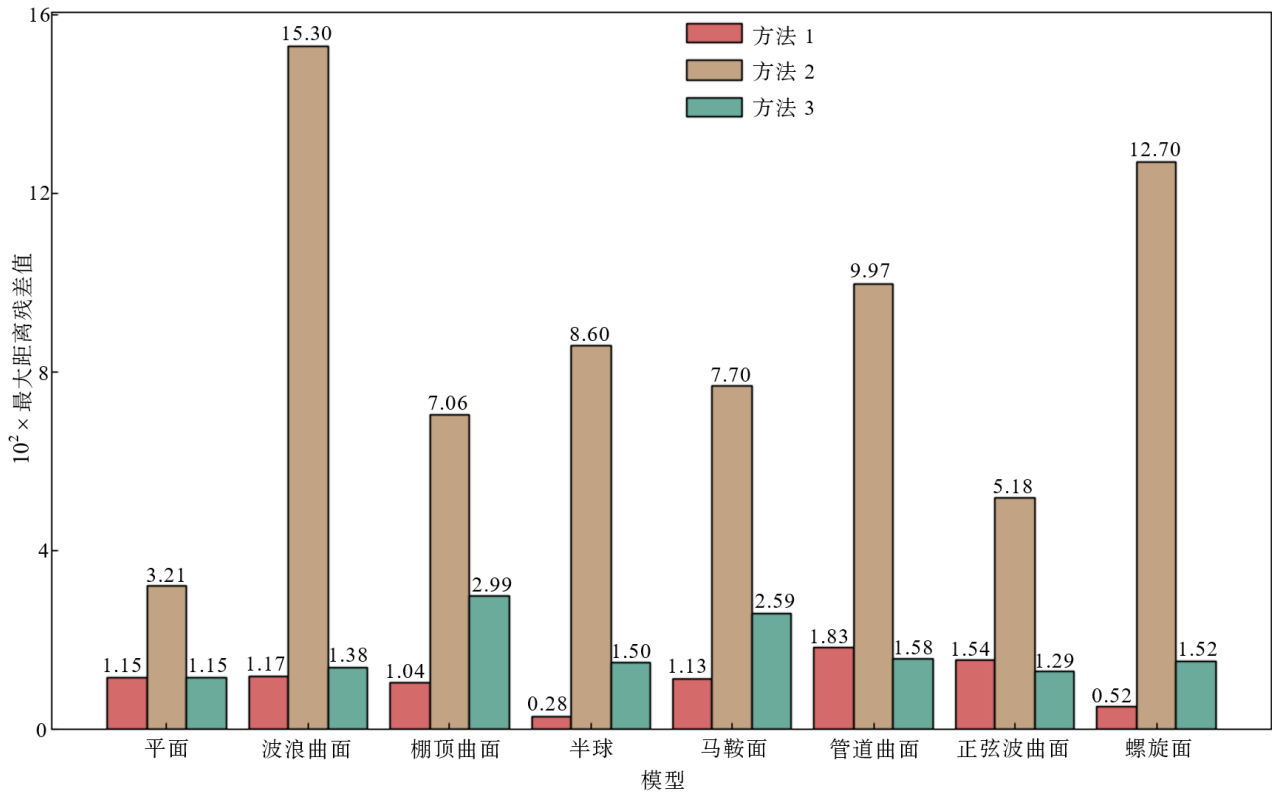


图 5 在 8 个模型上 3 种方法的最大距离残差对比

## 4.2 优化 2 的实验

优化 2 中, 通过添加面积约束, 限制水雷单元形状构建可展和可平坦折叠的三维水雷折纸模型. 基于优化 2, 对图 6a~图 6g 所示的参数曲面和图 6h 所示的 Rhino 模型导入的 NURBS 曲面进行实验, 拟合自由曲面的水雷折纸的结果如图 6 所示. 所得水雷折纸结构均由等面积的水雷单元构成, 并且满足可展性和可平坦折叠性. 优化时, 设置  $|r^{\text{dev}}|$

的最大可展残差量、 $|r^{\text{ff}}|$  最大可平坦折叠残差量和  $|r^{\text{area}}|$  最大面积均一化残差量均小于  $1\text{E}-12$ . 对于图 6 中的 8 个模型, 使用等面积水雷单元构建可展且可平坦折叠的折纸网格的数据统计如表 2 所示, 其中,  $\omega_{\text{dev}} = 1.0$ ,  $\omega_{\text{ff}} = 1.0$  和  $\omega_{\text{area}} = 1.0$ .  $|r_{\text{max}}^{\text{area}}|$  和  $|r_{\text{ave}}^{\text{area}}|$  分别是每类三角形面积残差的最大量和平均量.

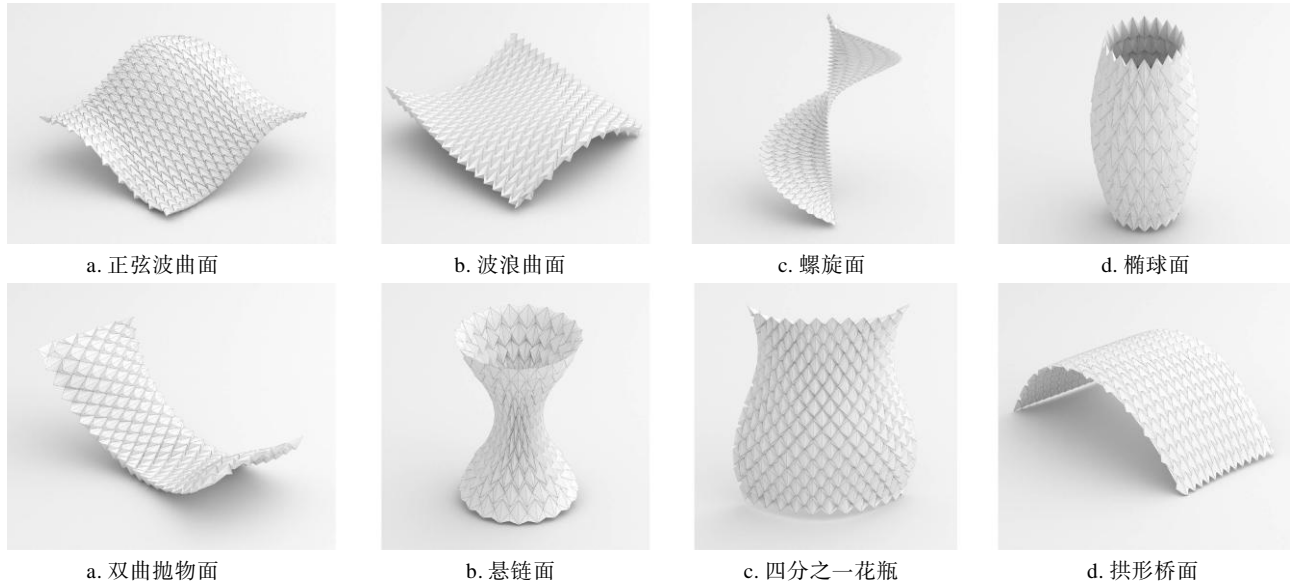


图 6 基于优化 2 拟合自由曲面的水雷折纸结构

表 2 基于优化 2 得到图 6 水雷折纸结构的数据统计

模型	$N_r \times N_c$	$ r_{\text{max}}^{\text{dev}} / r_{\text{ave}}^{\text{dev}} $	$ r_{\text{max}}^{\text{ff}} / r_{\text{ave}}^{\text{ff}} $	$ r_{\text{max}}^{\text{area}} / r_{\text{ave}}^{\text{area}} $	$I$	$T/\text{s}$
图 6a	$20 \times 16$	$5.68\text{E}-13/1.48\text{E}-13$	$3.69\text{E}-13/8.88\text{E}-14$	$3.07\text{E}-14/6.78\text{E}-15$	10	732.261
图 6b	$18 \times 16$	$7.39\text{E}-13/1.02\text{E}-13$	$5.40\text{E}-13/6.52\text{E}-14$	$3.31\text{E}-14/2.13\text{E}-15$	54	2784.800
图 6c	$50 \times 5$	$7.39\text{E}-13/1.22\text{E}-13$	$5.12\text{E}-13/8.91\text{E}-14$	$1.30\text{E}-14/2.43\text{E}-15$	8	310.998
图 6d	$20 \times 9$	$3.98\text{E}-13/8.522\text{E}-14$	$3.41\text{E}-13/7.29\text{E}-14$	$4.22\text{E}-13/6.24\text{E}-14$	6	74.786
图 6e	$20 \times 9$	$4.55\text{E}-13/8.98\text{E}-14$	$4.83\text{E}-13/6.36\text{E}-14$	$5.23\text{E}-13/1.47\text{E}-14$	10	130.617
图 6f	$20 \times 12$	$2.27\text{E}-13/6.76\text{E}-14$	$1.14\text{E}-13/3.29\text{E}-14$	$4.01\text{E}-14/7.12\text{E}-15$	8	234.170
图 6g	$12 \times 19$	$5.68\text{E}-13/1.31\text{E}-13$	$3.13\text{E}-13/6.93\text{E}-14$	$2.94\text{E}-14/5.61\text{E}-15$	12	313.245
图 6h	$13 \times 22$	$7.96\text{E}-13/1.36\text{E}-13$	$4.83\text{E}-13/7.73\text{E}-14$	$2.64\text{E}-14/5.48\text{E}-15$	15	775.227

图 7 所示为在正弦波基础网格模型上进行面积优化实验所获得的结果, 反映了优化前后三角形面积分布的变化趋势. 图 7a 展示了优化前正弦波曲面模型的面积热图. 图中蓝色区域表示 R 类三角形的面积, 红色区域对应 G 类和 B 类三角形的面积, 颜色的深浅反映了面积的相对大小. 上方的热图色带与图 7c 中面积分布直方图中的绿色柱

状区相对应. 图 7b 为经过面积优化后的正弦波曲面网格可视化效果图. 与图 7a 相比, 优化后网格中三角形面积分布更加均匀, 颜色差异显著减弱, 反映出面积优化的实际效果. 图 7c 从数值角度展示了正弦波网格中三角形面积的归一化分布. 优化前, 面积分布呈现两个群落: G 类和 B 类三角形集中在左群落, R 类三角形集中在右群落. 优化后,



面积分布集中度显著提高, 柱状图仅呈现两个峰值, 分别由红色和蓝色柱状图表示, 前者表示的 G 类、B 类三角形; 后者表示 R 类三角形的面积分布. 与图 7a 相比, 图 7b 中模型的 3 类三角形的颜色均匀, 各类三角形面积大小趋于一致; 图 7c 中, 优化

前面积分布较为分散, 存在较大的面积差异, 经过优化后面积分布集中在一个较小的范围内, 表明优化后成功地减少了面积不均匀性, 这种集中趋势是优化过程有效性的直接量化体现.

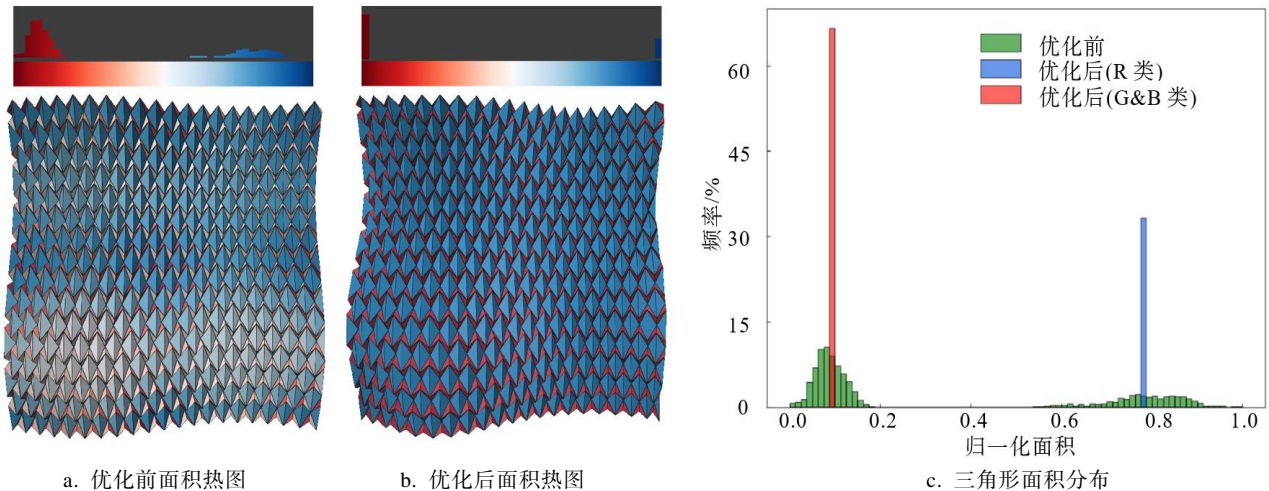


图 7 正弦波基础网格三角形面积的可视化

在图 7c 中可以观察到, 经过优化 2 后, 水雷单元的 G、B 类三角形面积趋于一致. 这引发了一个问题: 是否有必要在建模过程中将 G、B 类三角形划分为 2 类独立类别. 为进一步验证该划分策略的必要性, 提出了优化 2 Beta 版本, 将水雷单元的 G 类和 B 类三角形合并一类, 并与优化 2 方法的性能进行对比实验, 结果如表 3 所示. 可以看出: (1) 螺旋面、双曲抛物面和四分之一花瓶这 3 个模型采用 3 类三角形划分的优化 2 方法表现出更快的收敛速度和更少的迭代次数. 这表明在不同模型上 G 类与 B 类三角形并不总是保持面积一致. (2) 经过优化 2 Beta 后, 波浪状平面模型甚至不能收敛到指定阈值, 即  $1\text{E}-12$ ; 当然也存在个别模型, 如拱形桥面, 2 种优化方法在迭代次数和收敛速度的表现基本一致, 无明显差异. (3) 当模型密度提高时, 优化 2 的优势更加明显, 集中体现在优化效率上. 以四分之一花瓶模型为例, 在  $12\times 19$  密度下, 优化 2 Beta 的迭代次数为 13 次, 收敛时间为 340.475 s, 而优化 2 的迭代次数少一次, 且收敛时间为 313.245 s; 在  $14\times 22$  密度下, 优化 2 Beta 的迭代次数提升至 51 次, 消耗时间达到 2 872.6 s, 而优化 2 的迭代次数仅为 27 次, 花费时间 1 365.39 s. 综上所述, 将水雷单元分为 3 类三角形放松了约束条件

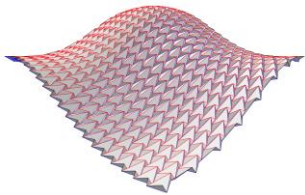
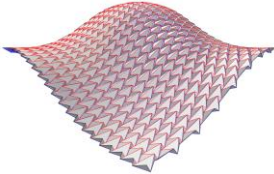
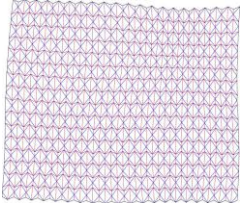
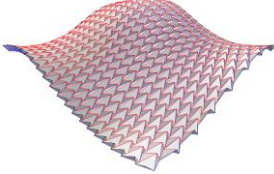

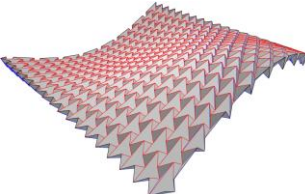
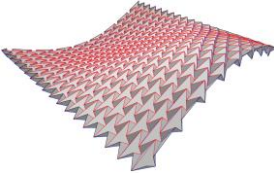
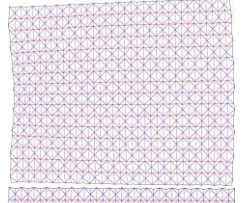
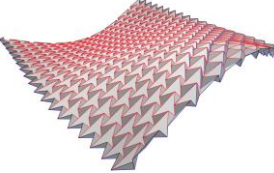
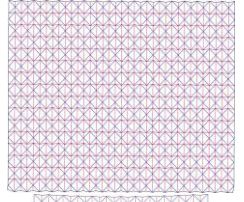




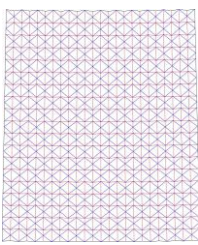


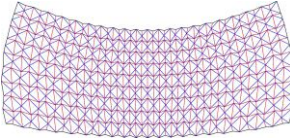
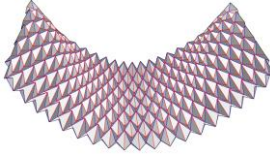
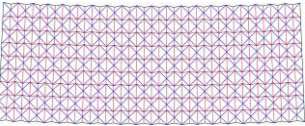
有利于提升优化效率, 减少迭代次数, 并且适用于更多更复杂的模型, 因此本文选择采用分成 3 类的优化 2 方法.

表 3 2 种优化的性能对比

模型	$N_t \times N_c$	优化 2 Beta		优化 2	
		I	T/s	I	T/s
螺旋面	50×5	11	406.797	8	310.998
拱形桥面	13×22	15	762.509	15	775.227
双曲抛物面	20×9	26	336.797	11	130.617
四分之一花瓶	12×19	13	340.475	12	313.245
四分之一花瓶 2	14×22	51	2 872.6	27	1 365.39
波浪状平面	18×16			54	2 784.8

在优化 2 下, 4 个模型的近似结果与折痕图对比如表 4 所示. 可以看出, 等面积约束使得不同形状的水雷单元具有相似的表面积, 减小了它们之间的尺寸差异; 在输出网格形变差距不大的情况下, 具有相等表面积的水雷单元更容易在布局 and 排列时达到一致性. 实验结果表明, 面积优化可以更好地堆叠和组合, 形成平整的表面, 即折痕展开图相对更加规则.

表 4 面积优化对折痕图的影响

模型	输入网格	目标函数	输出网格	折痕图
1		$E = \omega_{\text{dev}} E_{\text{dev}} + \omega_{\text{ff}} E_{\text{ff}}$		
		$E_2 = E + \omega_{\text{area}} E_{\text{area}}$		
2		$E = \omega_{\text{dev}} E_{\text{dev}} + \omega_{\text{ff}} E_{\text{ff}}$		
		$E_2 = E + \omega_{\text{area}} E_{\text{area}}$		
3		$E = \omega_{\text{dev}} E_{\text{dev}} + \omega_{\text{ff}} E_{\text{ff}}$		
		$E_2 = E + \omega_{\text{area}} E_{\text{area}}$		
4		$E = \omega_{\text{dev}} E_{\text{dev}} + \omega_{\text{ff}} E_{\text{ff}}$		
		$E_2 = E + \omega_{\text{area}} E_{\text{area}}$		

### 4.3 优化性能

通过 2 个例子, 对 2 种优化的迭代过程进行实验对比.

(1) 在优化 1 下, 对图 4f 所示的管道模型的各项指标残差量进行实验, 结果如表 5 所示. 该模型



由  $12 \times 24$  个水雷单元和 925 个顶点组成, 其中, 288 个顶点为中心点, 而中心点不在目标表面上, 因此只有模型上的 637 个顶点参与距离优化, 但所有顶点都参加可展和可平坦折叠优化. 由表可知, 第 2 次迭代时, 距离残差量达到峰值  $|r_{\max}^{\text{dist}}|$ , 从  $5.18\text{E}-3$  上升到  $0.12$ ; 第 14 次迭代时, 达到另一局部峰值  $5.37\text{E}-2$ ; 在 24 次迭代时,  $|r_{\max}^{\text{dist}}|$  降到最低值  $1.52\text{E}-2$ ; 第 28 次迭代时,  $|r_{\max}^{\text{dev}}|$  从  $40.65$  降低到  $5.17\text{E}-7$ ,  $|r_{\max}^{\text{ff}}|$  从  $22.06$  降低到  $8.37\text{E}-7$ .

表 5 在优化 1 下管道模型的性能对比

$I$	$ r_{\max}^{\text{dev}} $	$ r_{\max}^{\text{ff}} $	$ r_{\max}^{\text{dist}} $
0	40.65	22.06	$5.18\text{E}-3$
2	0.20	0.20	0.12
6	0.11	0.07	$2.69\text{E}-2$
14	$8.93\text{E}-3$	$5.82\text{E}-3$	$5.37\text{E}-2$
24	$5.17\text{E}-4$	$2.53\text{E}-4$	$1.52\text{E}-2$
28	$5.18\text{E}-7$	$8.37\text{E}-7$	$1.52\text{E}-2$

(2) 在优化 2 下, 对图 6a 所示的正弦波曲面的水雷折纸模型各类指标残差量进行实验, 结果如表 6 所示. 该模型由  $20 \times 16$  个水雷单元组成, 共有 1 025 个顶点参与可展和可平坦折叠优化, 还有 1 920 个面, 每类中, 有 640 个面分别参与各类的面积均一化优化. 可以看出, 在  $731.261\text{ s}$  内,  $|r_{\max}^{\text{dev}}|$

从  $17.00$  降低到  $5.68\text{E}-13$ ,  $|r_{\max}^{\text{ff}}|$  从  $9.13$  降低到  $3.69\text{E}-13$ ,  $|r_{\max}^{\text{area}}|$  从  $0.11$  降低到  $3.07\text{E}-14$ .

表 6 在优化 2 下正弦波模型的性能对比

$I$	$ r_{\max}^{\text{dev}} $	$ r_{\max}^{\text{ff}} $	$ r_{\max}^{\text{area}} $
0	17.00	9.13	0.11
2	1.62	0.91	$5.47\text{E}-2$
4	$1.11\text{E}-3$	$1.21\text{E}-3$	$1.32\text{E}-5$
6	$1.32\text{E}-5$	$1.34\text{E}-5$	$2.50\text{E}-7$
8	$5.68\text{E}-10$	$9.46\text{E}-10$	$2.43\text{E}-10$
10	$5.68\text{E}-13$	$3.69\text{E}-13$	$3.07\text{E}-14$

4.4 手工制造与折叠模拟

采用 2 种优化制作水雷折纸, 4 种自由曲面水雷折纸的实物制作如表 7 所示. 可以看出, 所有模型均较好地还原了目标曲面的整体形态, 展现了优化建模方法在拟合自由曲面方面的有效性. 其中, 优化 1 获得模型在自由曲面拟合精度方面表现更为出色; 而优化 2 则增强水雷单元的构造规则性, 第 3 列第 5 列展示了规则的水雷单元折痕图.

在 2 种优化下, 对 4 个模型的折叠运动过程进行模拟, 折叠顺序如表 8 所示. 其中, 这些折叠序列由折纸模拟器<sup>[27]</sup>获得, 其数值积分方案=欧拉(一阶), 轴向刚度=20, 表面刚度=4.5, 折叠刚度=0.7, 面折痕刚度=0.7, 阻尼比=0.45. 通过后验检查, 保证无自穿透.

表 7 2 种优化制作的水雷折纸

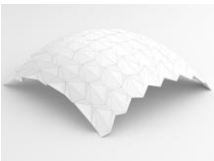
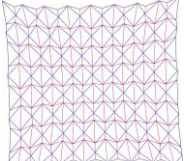



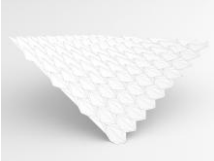
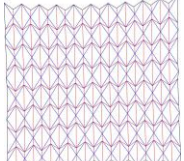



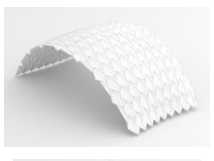
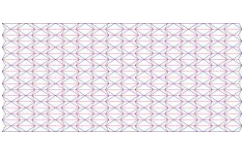
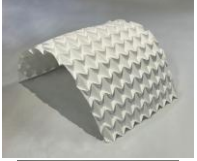



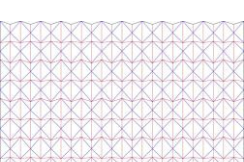



优化	生成的水雷折纸	折痕图案	部署状态	部分折叠状态	折纸的完全压缩状态
1					
					
2					
					

表 8 2 种优化下 4 个模型的折叠序列

优化	模型	从三维展开结构到平面的展开顺序(自左至右)					从平面到平折状态的折叠顺序(自右至左)					平面
1	平面											
	波浪曲面											
2	螺旋曲面											
	正弦波曲面											

4.5 用户调研

为了测试本文提出的交互式建模框架,邀请 2 名用户进行用户调研,用户建立的水雷网格与折痕图如表 9 所示. 其中,用户 1 是一位新手,用户 2 具备一定的建模经验. 首先用户自主选择目标表面,设计并建立基础水雷网格模型;然后选择 3 种优化策略优化模型;最后导出模型数据. 用户试用后,通过访谈获取他们对该建模框架的评价. 用户

1 建立圆环模型用时 6 min30 s;棚顶曲面用时 2 min06 s;螺旋曲面优化时出现交叉问题,重新设计耗时 14 min51 s. 用户 2 建立花瓶、管道曲面和悬链面分别用时 1 min46 s、2 min06 s 和 1 min07 s. 对于表 9 中的 6 个模型,用户 1 和用户 2 的模型优化结果如表 10 所示,其中, $\omega_{\text{dev}}=1.0$  和  $\omega_{\text{ff}}=1.0$ .

表 9 用户建立的水雷网格与折痕图

用户	模型	名称	水雷网格	折痕图
1	1	圆环		
	2	棚顶曲面		
	3	螺旋曲面		

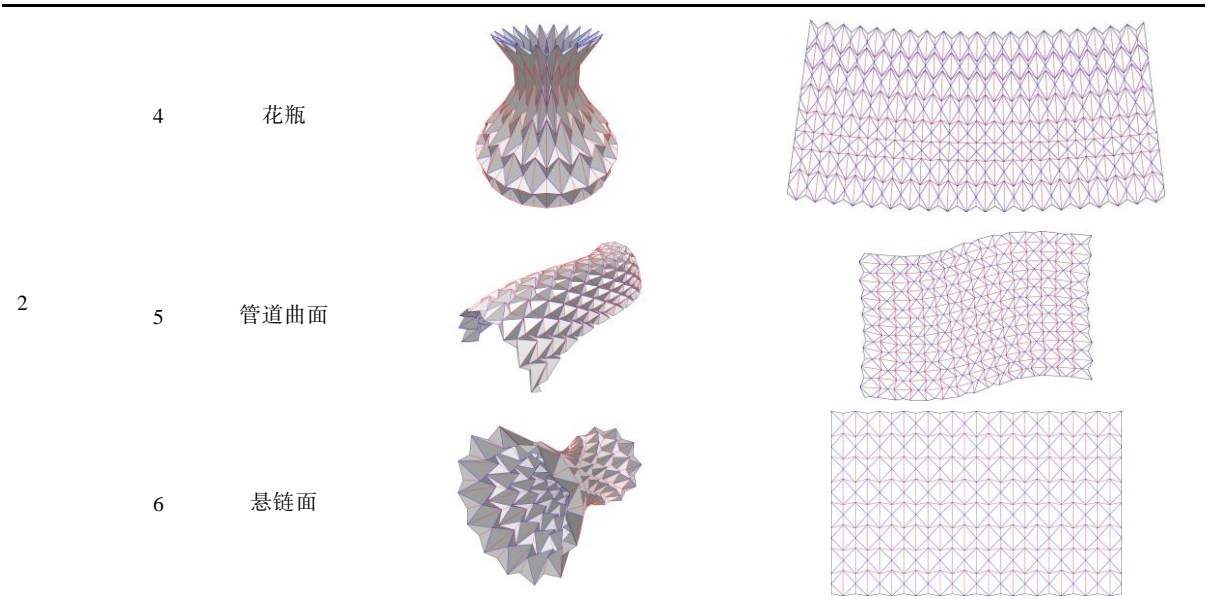


表 10 用户建立的水雷折纸结构结果的数据统计

模型	$N_r \times N_c$	$\omega_{\text{dist}}$	$\omega_{\text{area}}$	$ r_{\text{max}}^{\text{dev}} / r_{\text{ave}}^{\text{dev}} $	$ r_{\text{max}}^{\text{ff}} / r_{\text{ave}}^{\text{ff}} $	$ r_{\text{max}}^{\text{dist}} / r_{\text{ave}}^{\text{dist}} $	$ r_{\text{max}}^{\text{area}} / r_{\text{ave}}^{\text{area}} $	$T/\text{s}$
1	$40 \times 6$	0	0	$6.82\text{E}-13/2.56\text{E}-13$	$4.83\text{E}-13/1.83\text{E}-13$			15.583
2	$5 \times 10$	0.001	0	$3.58\text{E}-7/1.16\text{E}-7$	$2.88\text{E}-7/1.00\text{E}-7$	$7.20\text{E}-3/1.98\text{E}-3$		2.359
3	$30 \times 5$	0	1.0	$6.25\text{E}-13/9.89\text{E}-14$	$3.98\text{E}-13/6.94\text{E}-14$		$1.42\text{E}-14/2.89\text{E}-15$	168.848
4	$20 \times 8$	0	0	$2.27\text{E}-13/6.51\text{E}-14$	$2.27\text{E}-13/7.65\text{E}-14$			7.391
5	$8 \times 16$	0.001	0	$4.07\text{E}-7/7.48\text{E}-8$	$9.21\text{E}-7/1.17\text{E}-7$	$2.43\text{E}-2/2.06\text{E}-3$		26.740
6	$12 \times 8$	0	1.0	$1.71\text{E}-13/4.07\text{E}-14$	$1.14\text{E}-13/2.22\text{E}-14$		$5.41\text{E}-13/3.40\text{E}-13$	38.062

在访谈中, 用户 1 表示, 能够独立地建立水雷网格折纸模型让他感到很有趣, 并且整个试用过程比较简单, 但也指出, 该框架缺乏对新手友好的初始建议值, 使得他在建立模型时遇到了一些困难, 尤其在优化后, 模型内部可能会出现交叉的情况; 用户 2 认为交互式建模框架界面清晰, 提供了三维建模视图和操作面板, 整体使用体验流畅, 对建模框架的易用性给予了积极评价, 但同时建议, 若能提升优化效率, 将进一步提高交互式建模框架的实用性. 这些意见对于软件用户体验的进一步优化提供了参考.

5 讨 论

本文基于水雷折纸对自由曲面建模, 并探索新的约束在水雷折纸网格求解的可行性. 实验结果表明, 本文方法能够实现多种自由曲面的精确拟合, 满足可展性和可平折性等关键性能要求, 优化后的模型误差指标均显著降低. 此外, 通过实物

制作水雷折纸网格模型, 展示了该方法在实际设计中的应用潜力.

Dudte 等<sup>[7]</sup>对广义三浦折纸近似曲面引入可展和可平坦折叠约束以实现逆向折纸设计, 但在部分模型中, 通过放松约束实现优化目标; 与之相比, 本文基于广义水雷折纸近似自由曲面建模, 不仅实现了更为严格的可展和可平坦折叠约束, 而且通过引入新的优化约束提升了模型在实际应用中的几何精度, 手工制作结果表明了该方法在复杂曲面拟合和折纸设计的可行性, 折叠序列中展示了模型的可部署性.

Zhao 等<sup>[12,22]</sup>的方法与本文方法都通过使用水雷折纸创建复杂的三维结构. 与 Zhao 等<sup>[12,22]</sup>的方法相比, 本文拓展了水雷折纸建模自由曲面的范围, 能够处理由 Rhino 导入的自由曲面; 此外, 本文对水雷折纸建模的数值优化算法进行了更深入的探索, 引入更多约束, 通过距离约束提升模型优化后的拟合度, 通过面积约束调整水雷网格折痕图, 使之更加规则; 还展示了获得的水雷网格的模



拟折叠运动.

但是, 本文方法依然存在一定的局限性. 对于曲率剧烈变化或高度复杂的曲面, 算法的收敛性会受到影响; 基础网格初始参数对优化结果和收敛速度具有重要的影响; 目标函数的权重设置将影响优化结果, 不合理的权重可能导致某些目标无法有效优化, 影响整体的优化效果: 因此, 优化过程中需要在这些冲突目标之间做出权衡. 优化函数由多个能量项组成, 这些能量项相互关联, 并且可能存在一定的冲突, 导致某些约束未能收敛至阈值的情况.

## 6 结 语

本文研究基于水雷折纸拟合自由曲面的优化建模过程, 在此基础上, 采用多目标优化建模方法, 在满足可展和可平坦折叠约束的同时, 构建更精确的拟合目标表面的水雷折纸. 此外, 将水雷单元分成 3 类三角形, 并对此提出面积约束, 实现了使用面积均一化的水雷单元构建自由曲面水雷折纸. 通过对比实现面积约束的水雷折纸折痕图与只添加几何约束的折痕图, 可以发现添加面积约束的折痕图中水雷单元形状规则, 减少了实际拟合目标表面的水雷折纸中的不规则性. 本文提出的 2 种优化方法都是基于整个水雷网格的全局优化, 旨在提高水雷折纸的质量和性能, 通过全局优化, 可以考虑整体结构和相互作用, 得到更优的水雷折纸方案. 综上所述, 本文通过优化建模和多目标优化方法, 提高了水雷折纸拟合准确度, 减少了水雷单元表面积差异.

未来, 将进一步探索更多的约束条件和优化策略, 以更好地满足实际需求, 使之应用于不同生产场景. 随着拟合目标表面精度的提升, 水雷单元密度不断增大, 基于全局优化求解高密度模型面临显著的挑战, 因此今后考虑分治建模方法, 通过将高密度模型分解成各子模型并采用局部优化策略, 获得优化后的高密度模型.

## 参考文献(References):

- [1] Chen Yan, Gu Yuanqing. Review on origami kinematics[J]. *Advances in Mechanics*, 2023, 53(1): 154-197(in Chinese)  
(陈焱, 顾元庆. 折纸运动学综述[J]. *力学进展*, 2023, 53(1): 154-197)
- [2] Yogesh S, Yogalakshmi M, Abishek M, *et al.* Origami based folding techniques for solar panel applications[J]. *International Journal of Electrical Engineering and Technology*, 2021, 12(3): 158-164
- [3] Kim S H, Lee H R, Yu S J, *et al.* Hydrogel-laden paper scaffold system for origami-based tissue engineering[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2015, 112(50): 15426-15431
- [4] Meloni M, Cai J G, Zhang Q, *et al.* Engineering origami: a comprehensive review of recent applications, design methods, and tools[J]. *Advanced Science*, 2021, 8(13): Article No.2000636
- [5] Farin G. *Curves and surfaces for CAGD: a practical guide*[M]. 5th ed. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2001
- [6] Wei Z Y, Guo Z V, Dudte L, *et al.* Geometric mechanics of periodic pleated origami[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(21): Article No.215501
- [7] Dudte L H, Vouga E, Tachi T, *et al.* Programming curvature using origami tessellations[J]. *Nature Materials*, 2016, 15(5): 583-588
- [8] Wang Z T, Jia F L, Chen Z G, *et al.* Computational methods for curved surface modeling based on Miura-Ori[C] // *Proceedings of the 1st International Conference on Computational Design and Robotic Fabrication*. Heidelberg: Springer, 2020: 219-231
- [9] Hu Y C, Zhou Y X, Liang H Y. Constructing rigid-foldable generalized Miura-Ori tessellations for curved surfaces[J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2021, 13(1): Article No.011017
- [10] Dang X X, Feng F, Plucinsky P, *et al.* Inverse design of deployable origami structures that approximate a general surface[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2022, 234-235: Article No.111224
- [11] Chen Y, Feng J H J, Ma J Y, *et al.* Symmetric waterbomb origami[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2016, 472(2190): Article No.20150846
- [12] Zhao Y, Endo Y, Kanamori Y, *et al.* Approximating 3D surfaces using generalized waterbomb tessellations[J]. *Journal of Computational Design and Engineering*, 2018, 5(4): 442-448
- [13] Ma J Y, Feng H J, Chen Y, *et al.* Folding of tubular waterbomb[J]. *Research*, 2020, 2020: Article No.1735081
- [14] Feng Huijuan, Ma Jiayao, Chen Yan. Rigid folding of generalized waterbomb origami tubes[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(19): 143-159(in Chinese)  
(冯慧娟, 马家耀, 陈焱. 广义 Waterbomb 折纸管的刚性折叠运动特性[J]. *机械工程学报*, 2020, 56(19): 143-159)
- [15] Zhao Y, Li S L, Zhang M Y, *et al.* Computational design methods for cylindrical and axisymmetric waterbomb tessellations[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2021, 91: Article No.102037
- [16] Imada R, Tachi T. Geometry and kinematics of cylindrical waterbomb tessellation[J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2022, 14(4): Article No.041009
- [17] Zhao Y, Wei Y L, Jia Y Y, *et al.* Constructing foldable cylindrical surfaces via unfolded waterbomb origami units[J]. *Journal of Computational Design and Engineering*, 2022, 9(4): 1498-1510
- [18] Zhang M Y, Zhao Y. Modeling methods of cylindrical and axisymmetric waterbomb origami based on multi-objective optimization[J]. *Multimedia Systems*, 2024, 30(3): Article No.135
- [19] Lee T U, Liu Y P, Xie Y M. Dividing a sphere hierarchically into a large number of spherical pentagons using equal area or equal length optimization[J]. *Computer-Aided Design*, 2022, 148: Article No.103259
- [20] Liu Y P, Xie Y M, Lee T U, *et al.* Reducing the number of different faces in free-form surface approximations through clustering and optimization[J]. *Computer-Aided Design*, 2024, 166: Article No.103633
- [21] Marler R T, Arora J S. The weighted sum method for multi-objective optimization: new insights[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 41(6): 853-862
- [22] Zhao Y, Wei Y L. Inverse design of three-dimensional surfaces



- via waterbomb tessellations[J]. Computer-Aided Design, 2023, 156: Article No.103461
- [23] Kwame S, Dzegblor N K, Lodonu J C. The use of computer-based tutorial to augment teaching and learning of computer software application: A case study of Rhinoceros 3d software[J]. International Journal of Innovative Research & Development, 2015, 4(2): 209-216
- [24] Demaine E D, O'Rourke J. Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007
- [25] Hull T. On the mathematics of flat origamis[J]. Congressus numerantium, 1994, 100: 215-224
- [26] Madsen K, Nielsen H B, Tingleff O. Methods for non-linear least squares problems[M]. 2nd ed. Lyngby: Technical University of Denmark, 2004
- [27] Ghassaei A, Demaine E D, Gershenfeld N. Fast, interactive origami simulation using GPU computation[C] //Proceedings of the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education. Oxford: Tarquin Press, 2018: 1151-1166