

基于七折水雷及格型纹样的对称曲面逆向建模

沈志刚, 赵岩*

(江苏大学计算机科学与通信工程学院 镇江 212013)

(yanzhao_cs@ujs.edu.cn)

摘要: 纹样设计常用于三维折纸结构建模. 为了拓展纹样类型并提升折纸结构稳定性, 提出一种基于七折水雷及格型纹样的对称曲面逆向建模方法, 实现了三维模型与二维折痕图之间可逆展开. 首先将六折水雷纹样中心点拉伸为边形成七折水雷纹样; 然后基于七折水雷纹样拟合广义圆柱和轴对称曲面, 并对模型施加可展开、平面及边长优化; 接着将满足几何约束的七折水雷纹样模型中心边扩展为面, 生成格型纹样模型; 将构建的三维模型通过展开方式获得相应二维折痕图, 并对其刚性折叠运动进行了模拟和分析. 在建模与刚性折叠模拟上的实验结果表明, 与传统的六折水雷纹样相比, 七折水雷及格型纹样在保持其变形能力的同时降低了内部自相交风险; 所提方法为三维折纸模型的构建以及机械结构的探索提供了一种可行方案.

关键词: 计算折纸; 七折水雷纹样; 格型纹样; 刚性折叠; 对称曲面

中图分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2024-00669

Inverse Modeling of Symmetrical Surface based on the Seven-crease Waterbomb and Lattice Tessellations

Shen Zhigang and Zhao Yan*

(School of Computer Science and Communication Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013)

Abstract: Tessellation design is widely used in modeling 3D origami structures. To expand tessellation types and enhance stability, a symmetric modeling method based on the seven-crease waterbomb and lattice tessellations is proposed, enabling reversible unfolding between 3D models and 2D crease patterns. Firstly, the seven-crease waterbomb tessellation is formed by stretching the center points of the six-crease waterbomb tessellation into edges. Then, generalized cylindrical and axisymmetric surfaces are approximated by the seven-crease tessellation with constraints on foldability, planarity and section. The center edges of the optimized seven-crease tessellation are expanded into surfaces to generate the lattice tessellation. The model is unfolded to obtain the crease pattern, and its rigid folding motion is simulated and analyzed. Experimental results on modeling and rigid folding simulations show that, compared to the six-crease tessellation, the seven-crease and lattice tessellations reduce the risk of internal self-intersection while maintaining the deformability. This method provides a feasible solution for constructing 3D origami models and exploring mechanical structures.

Key words: computational origami; seven-crease waterbomb tessellation; lattice tessellation; rigid folding; symmetrical surface

折纸是一种广为人知的结构艺术形式,近年来,它启发了计算机图形学^[1]、工程学^[2]以及材料学^[3]等领域的大量新颖解决方案和应用。折纸纹样,如 Miura-ori 纹样^[4]、水雷纹样^[5]、Yoshimura 纹样^[6]和 Kresling 纹样^[7],皆由一组重复和周期性的可折叠单元组成,是构造三维可展开模型的常用折纸方案。

在美学或工程的丰富设计需求中,研究人员对传统的折纸方法已经提出了许多变体纹样。Gatas 等^[8]展示了具有弯曲折痕的 Miura-ori; Sareh 等^[9]提出 Miura-ori 的同构广义对称变体系列;Feng 等^[10]展示了可以实现全局兼容结构的螺旋 Miura-ori。现有的折纸纹样可以使用刚性可折叠的折纸小工具进行修改,以创建新的纹样^[11]。

水雷纹样是一组包含 6 个折痕的传统折纸单元图案。为了兼容地生成整个折痕纹样,奇数行和偶数行会偏移半个水雷单元的宽度。与仅有一个自由度且完全使用四边形的 Miura-ori 纹样不同,水雷纹样仅由三角形面组成,具有较高的自由度;得益于折痕纹样中三角形面片的布局,水雷纹样

已显示出近似具有混合高斯曲率的复杂目标表面的能力^[12-16]。虽然同样由三角形面片组成的 Yoshimura 纹样和 Kresling 纹样可以构造管状结构,但其结构只能表现一定程度的曲率,不适合构造复杂曲面。

现有六折水雷折纸纹样虽然在结构上具有较高自由度,但在拟合目标曲面时可能存在部分内部交叉点。为了拓展纹样类型,减少内部交叉并提升折纸纹样稳定性,本文提出七折水雷及格型纹样的对称曲面逆向建模方法。

1 相关工作

目标曲面建模可以通过网格结构近似。伯彭波等^[17]提出一种可展曲面的自动识别与重建方法;Zhang 等^[18]提出顶点分裂技术,其面向 Yoshimura 纹样的衍生设计,同样可以用于如图 1a 所示的水雷纹样,水雷单元的中心顶点可以垂直拉伸成一条边,如图 1b 所示,这样的单元被称为七折水雷单元,它仍然可以展开和平折。

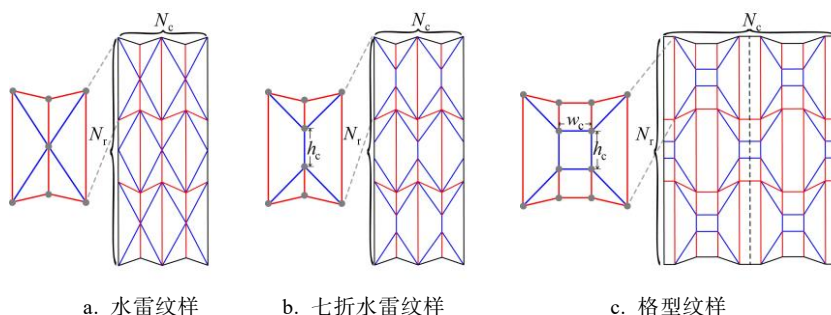


图 1 六折水雷和七折水雷及格型衍生纹样

Wickeler 等^[19]利用七折水雷单元作为平面夹层结构中的轻质芯;Deng 等^[20]提出基于七折水雷纹样的单曲率广义圆柱形超材料;Zhao 等^[21]利用 4 种均一化的水雷变体单元实现可折叠广义圆柱面,包括七折水雷单元。七折水雷单元不仅为拟合给定目标表面提供了一种新颖的方法,而且可以避免原始的六折水雷单元在折叠运动过程中,尤其是当单元形状相对平坦时可能出现的内部自交叉。本文利用七折水雷纹样近似广义圆柱和轴对称设计的三维目标模型表面。

剪纸艺术作为折纸的泛化,允许在制作过程中进行切割。孙晓鹏等^[22]基于网格分割和共形映射,实现封闭三维网格模型的可展结构设计;利用剪纸策略,Zhang 等^[23]提出盒型结构的轻量级超材料;Jiang 等^[24]展示了基于四边形的自由形式剪纸。

本文将七折水雷纹样用于近似广义圆柱和轴对称的给定目标表面,避免了六折纹样的可能存在的内部点交叉问题。通过在七折水雷纹样的条带中心填充四边形,进一步引入格型纹样,如图 1c 所示。与剪纸方法相比,使用格型衍生纹样获得的三维模型具备与棋盘盒型相似的结构,同时在刚性折叠运动过程中保持折纸结构的水密性。

2 本文方法

2.1 七折水雷及格型衍生纹样建模

七折水雷纹样和格型纹样基于水雷纹样的衍生设计。图 1a~图 1c 中,左侧为纹样单元,右侧为 3 行 2 列对应纹样的折痕图。模型的 1 列称作条带,其中, N_r 表示行数, N_c 表示列数,奇偶行偏移半

个条带的宽度. 将图 1a 所示的六折水雷纹样中心点拉伸为长度为 h_c 的边, 形成七折水雷纹样, 如图 1b 所示. 拉伸过程中, 单元之间仍兼容, 在减少内部点交叉的同时保持了可折叠性. 使用七折水雷纹样近似广义圆柱和轴对称模型曲面, 施加几何优化, 得到符合约束的模型及折痕图; 再将边扩展为宽度为 w_c 的四边形, 得到格型纹样及折痕图, 如图 1c 所示.

构建基础的水雷纹样模型时, 首先使用二维控制点在 $x-z$ 平面上绘制二维控制点形成 NURBS 曲线 Γ [14], 如图 2a 和图 3a 所示. 构建广义圆柱模型时, 将 Γ 沿 y 轴向左平移模型条带宽度的一半, 记为 w_h , 得到轮廓曲线 Γ_1 , 如图 2b 所示. 构建轴对称模型时, 将 Γ 绕 z 轴逆时针旋转 π/N_c 角度, 记为 Θ , 形成 Γ_1 , 如图 3b 所示.

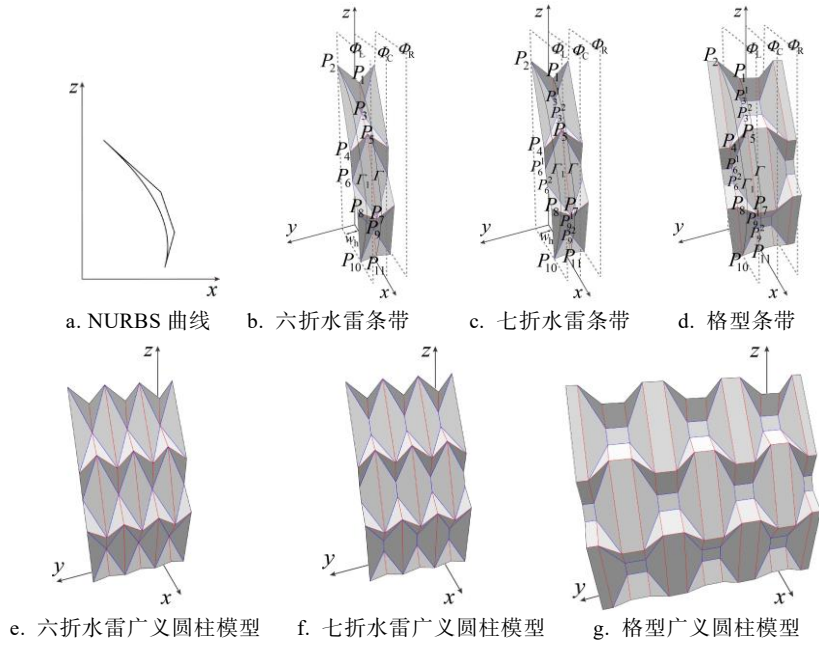


图 2 广义圆柱模型的建模过程

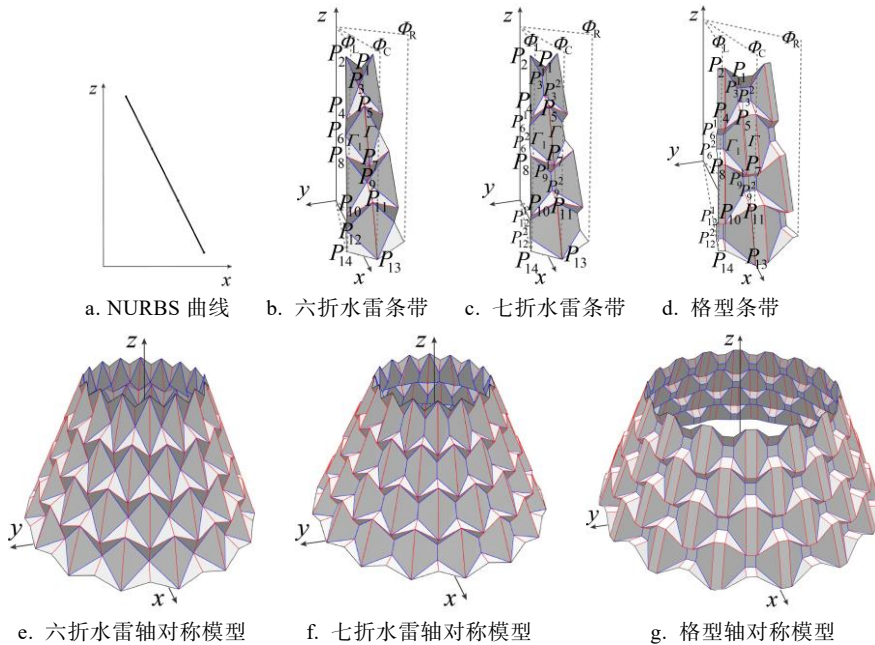


图 3 轴对称模型的建模过程

由 Γ 和 Γ_1 构成模型左半条带轮廓, 进而将它们水平分为 N_r 个单元, 在模型单元内添加水雷纹样信息, 得到基础的模型左半条带. 再沿 $x-z$ 平面

对称, 得到完整的水雷纹样条带 [12-13], 如图 2b 和图 3b 所示. 其中, Φ_L 表示模型左侧点所在平面, Φ_C 表示模型中心点所在平面, Φ_R 表示模型右侧

点所在平面.

记 N_i 为第 i 次复制条带, 将条带复制 $N_c - 1$ 份. i 的取值为 $1, \dots, N_c - 1$, 并依次沿 y 轴平移 $2w_h \times N_i$ 长度, 生成如图 2e 所示的水雷纹样广义圆柱模型; 将条带绕 z 轴以 $(2\pi/N_c) \times N_i$ 角度旋转, 生成如图 3e 所示的水雷纹样轴对称模型.

在水雷纹样条带的基础上, 将纹样单元中心点 P_i 在对应平面 ϕ_c 或 ϕ_l 内拉伸成边, 顶点为 P_i^1 和 P_i^2 , 如图 2c 和图 3c 所示, 并连接它们形成一条边, 得到七折水雷纹样左半条带, 沿 $x-z$ 平面对称得到七折水雷纹样条带. 复制条带 $N_c - 1$ 次, 沿 y 轴平移 $2w_h \times N_i$ 长度, 得到如图 2f 所示的七折广义圆柱模型; 绕 z 轴旋转 $(2\pi/N_c) \times N_i$ 角度, 得到如图 3f 所示的七折水雷轴对称模型.

基于符合约束的七折水雷条带扩展中心边为面, 形成格型纹样. 对于格型纹样广义圆柱曲面, 将如图 2c 所示的七折水雷左半条带沿 y 轴平移 $w_c/2$ 长度, 两侧填充四边形结构, 再沿 $x-z$ 平面对称得到如图 2d 所示的格型纹样条带. 将条带复制 $N_c - 1$ 次, 并依次沿 y 轴平移 $(2w_h + 2w_c) \times N_i$ 长度, 得到如图 2g 所示的格型纹样广义圆柱模型.

对于格型纹样轴对称曲面, 如图 3c 所示的左半条带的边缘平面 ϕ_c 与 ϕ_l 的夹角 θ 为 π/N_c . 将左半条带沿其两平面的平分线方向平移, 并以四边形结构填充平移后的条带与平面 ϕ_c 与 ϕ_l 的空隙, 再沿 $x-z$ 平面对称形成如图 3d 的格型轴对称模型条带, 复制条带并依次绕 z 轴旋转 $(2\pi/N_c) \times N_i$ 角度, 形成如图 3g 所示的格型纹样轴对称模型.

2.2 模型优化条件

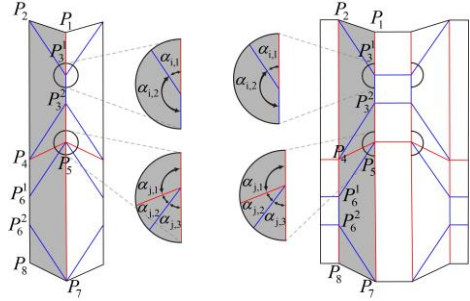
构建的模型需要满足一定的几何约束才能得到目标折痕图, 本文将约束施加在基础的左侧半条带上. 其中, 一般需要加入可展开约束, 使得如图 4a 所示的点周围角度之和为 2π , 曲面处处都有零高斯曲率. 可展性保证模型曲面可以展开成平面, 不会变形和撕裂.

对于图 4a 所示的七折水雷纹样模型, 考虑对称性, 将优化施加在左半条带的上、下两侧, 即图 4 中 P_1 , P_2 , P_7 和 P_8 为边界点, 其余为内部点. 则可展残差 d_i 为该点周围角度之和减去 π , 公式为

$$d_i = \sum_{k=1}^{n_i/2} \alpha_{i,k} - \pi, \quad i = 1, 2, \dots, N_v.$$

其中, N_v 表示左半条带的内部顶点个数, n_i 表示第 i 个内部顶点的相邻角度个数, $\alpha_{i,k}$ 表示第 i 个内部顶点与相邻的第 k 个夹角的弧度. 可展约束的残差公式为

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_v} d_i^2.$$



a. 七折水雷条带内部顶点 b. 格型条带内部顶点

图 4 相邻顶点的顺序

基础左半条带经过上述可展开约束后, 左右两侧展开角度为 π , 沿 $x-z$ 平面对称再与相邻条带合并即为 2π , 则满足展开平面中顶点周围角度约束. 为了达到可平折目标, 允许将模型三角形结构进行压缩, 参考平折约束设计对应结构. 此条件局部表示为: 对于第 i 个内部顶点, 满足川崎定理^[25], 公式为

$$f_i = \sum_{k=1}^{n_i} \sigma_{i,k} \alpha_{i,k}.$$

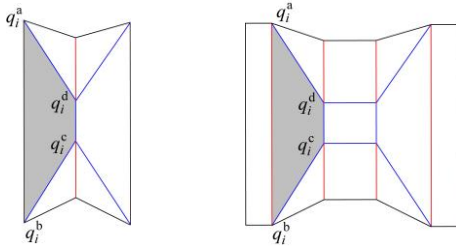
其中, $\sigma_{i,k} = \pm 1$, 选取第 1 个角度符号为正, 修改后续角度 $\alpha_{i,k}$ 的正负, 使得正负交替, 累加为 0. 局部条件对应点的序列如图 4 所示.

构建模型时, 基础左半条带的右边缘位于 $x-z$ 平面上, 且在半条带上内部顶点的角度之和为 π . 平面可折叠角度关系可基于川崎定理获得, 公式为

$$\sum_{k=1}^{K/2} \alpha_{i,2k-1} = \sum_{k=1}^{K/2} \alpha_{i,2k}.$$

其中, K 表示偶数. 由于模型条带生成方式的对称性, 两侧角度之和相等, 满足模型平折条件. 在图 4a 所示的七折纹样上添加角度信息, 将符合约束的七折水雷纹样的中心边扩展为四边形, 得到格型纹样如图 4b 所示.

七折水雷纹样构建的模型包含如图 5 所示的四边形结构, 需要对其施加平面约束.



a. 七折水雷单元四边形结构 b. 格型单元四边形结构

图5 七折及格型纹样中的四边形结构

格型纹样的中心四边形部分由对称的两边连接形成, 其纵向边缘原本是一个整体. 在构建过程中, 先移动广义圆柱模型和轴对称模型填充四边形间隙, 再沿 $x-z$ 平面对称得到格型纹样. 由于模型条带的对称性, 格型纹样中心的四边形部分在建模过程中为平面结构, 因此无需施加约束.

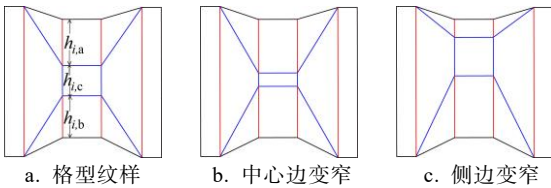
七折水雷单元内的四边形结构需要满足平面条件, 可参考 Zhao 等^[15]提出的平面约束条件, 第 i 个四边形结构的残差公式为

$$p_i = \angle \left[(q_i^b - q_i^a) \times (q_i^c - q_i^a), (q_i^d - q_i^a) \right] - \frac{\pi}{2}.$$

其中, 顶点相减表示向量, 向量 $(q_i^b - q_i^a)$ 与 $(q_i^c - q_i^a)$ 确定由顶点 q_i^a , q_i^b 和 q_i^c 组成的平面; 向量叉乘代表法向量方向; 符号 \angle 表示计算法向量与 $(q_i^d - q_i^a)$ 间的夹角; 基础左半条带的单元数量为 N_r , 第 i 个面的四边形顶点坐标分别表示为 q_i^a , q_i^b , q_i^c 和 q_i^d , 平面约束的残差公式为

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_r} p_i^2.$$

在几何优化过程中, 需要调整模型的形状以满足优化目标. 在某些情况下, 会出现如图 6 所示的情况, 如中心四边形向边的结构退化, 或导致部分平面结构的边缘过窄.



a. 格型纹样 b. 中心边变窄 c. 侧边变窄

图6 模型边的退化

图 6a 中, $h_{i,a}$, $h_{i,c}$ 和 $h_{i,b}$ 分别表示第 i 个单元中心的 3 段边, 为了实物制作方便, 目标模型应避免边长缩短过多造成的窄面. 图 6b 中, 中心四边形面的边变短, 对应平面向边的方向退化. 图 6c 中, 相邻三角形的边 $h_{i,a}$ 变短, 导致对应面变窄,

另一种情况将使底边 $h_{i,b}$ 变短. 为了解决这 3 个问题, 对基础左侧条带的第 i 个单元边长施加边长约束, 得到其残差公式为

$$l_{i,t} = \frac{h_{i,t}}{\sum_{j=1}^{N_r} h_{j,t} / N_r} - 1.$$

其中, $h_{i,t}$ 表示单元中 3 种不同的边, 对纹样单元施加边长约束, 得到边长残差公式为

$$E_l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_r} (l_{i,a}^2 + l_{i,b}^2 + l_{i,c}^2).$$

几何约束的迭代优化过程可以概括为通过梯度下降来最小化残差值, 并循环验证当前网格模型的几何误差是否满足给定的范围. 若不满足条件则继续迭代, 直至满足条件; 当满足条件或达到迭代次数上限时, 优化完成. 为此, 需要构造一个目标函数来表示其残差值, 定义为

$$E = \omega_d E_d + \omega_p E_p + \omega_l E_l.$$

其中, ω_d , ω_p 和 ω_l 分别表示可展优化、平面优化、边长优化的权重, E 表示迭代残差总计. 通过调整权重选择对应优化方式, 将这 3 个权重设置为 1 且使 ω_l 逐次减半来放松边长约束. 求解非可展模型时, 将 ω_d 设置为 0, 即不进行可展优化.

3 实验结果及分析

本文方法允许用户交互式地构建广义圆柱和轴对称模型, 分别用六折水雷、七折水雷和格型纹样填充的单元近似模型曲面, 生成折痕图进行实物制作并模拟刚性折叠过程.

模型优化时采用 Levenberg-Marquardt 算法^[26], 得益于模型对称性, 减少了优化参数, 时间效率较高, 可以稳定地应用于广义圆柱和轴对称模型, 获得优化数据以及符合约束的三维模型.

本文使用 Java 编写了一个交互式建模和模拟程序. 所有实验数据在 Intel(R) Core(TM) i7 12700 @2.1 GHz CPU 和 16 GB RAM 的环境下收集.

首先使用 NURBS 曲线构建模型左半条带, 沿 $x-z$ 平面对称获得完整条带; 在此基础上, 通过平移获得广义圆柱模型, 旋转获得轴对称模型. 七折水雷及格型纹样可以实现与六折水雷纹样相似的形变能力, 并将中心点扩展成边来避免内部自相

交, 然后用四边形填充得到格型结构.

使用对称方法得到的模型符合川崎定理^[25]平折约束, 可折叠成平面, 三角形结构可压缩; 且继续考虑了七折水雷纹样的可展开和平面约束, 并在满足几何约束的模型上填充四边形结构, 得到对应的模型. 以折纸形式实现类似剪纸的格型结构, 同时在部署状态到压缩状态的刚性折叠过程中保持水密性, 并在结构上提供了与盒型剪纸^[24]相似的载荷潜力.

3.1 广义圆柱曲面的近似

通过引入二维控制点, 可以得到目标曲面的

NURBS 曲线; 然后沿 y 轴平移, 使其位移模型条带宽度的一半; 再填充纹样构造半边模型条带; 在此基础上, 沿 $x-z$ 平面对称生成完整条带, 并进一步平移形成广义圆柱模型. 此外, 在近似目标曲面之后, 相应的模型不能直接展开. 为了保证折痕图的连续性和有效性, 本文通过施加可展开、平面和边长约束, 得到符合约束条件的模型和折痕图.

采用六折水雷、七折水雷及格型衍生纹样近似广义圆柱目标曲面, 得到 3 种纹样的模型与折痕, 如图 7、图 8 所示. 开放和闭合广义圆柱模型结构均支持将所构建的模型展开成一个完整平面.

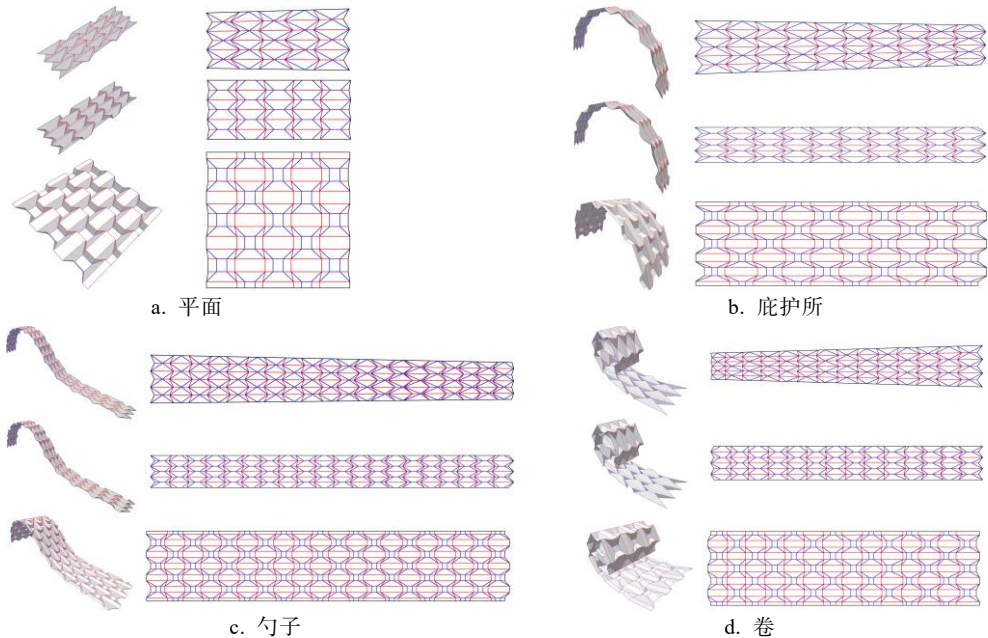


图 7 开放广义圆柱模型及其折痕图

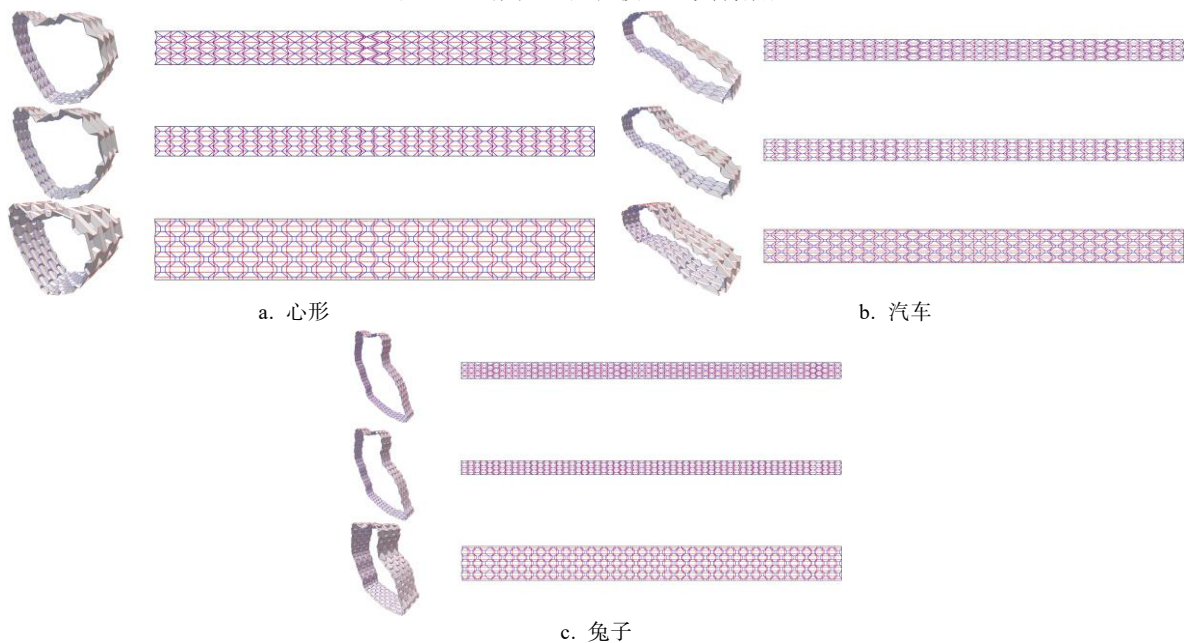


图 8 闭合广义圆柱模型及其折痕图

图 7a 中, $N_r = 5$, $N_c = 3$, 展示了基本模型形态; 图 7b 中, $N_r = 10$, $N_c = 3$; 图 7c 中, $N_r = 20$, $N_c = 3$; 图 7d 中, $N_r = 14$, $N_c = 3$. 图 8a 中, $N_r = 30$, $N_c = 3$; 图 8b 中, $N_r = 40$, $N_c = 3$; 图 8c 中, $N_r = 60$, $N_c = 3$. 构建如图 8c 所示的长尺寸模型时, 折叠过程可能存在弯曲角度过大, 导致折叠过程中的模型缠绕产生自相交的情况. 通常, 可以通过刚性折叠模拟在实物制作前进行测试, 并通过调整模型参数避免此问题.

基于拟合广义圆柱面的七折和格型衍生纹样折纸, 对图 7 和图 8 所示的折纸模型施加可展开和平面的几何约束, 得到的优化数据如表 1 所示. 其

中, $|r_{\max}^d|$, $|r_{\text{aver}}^d|$, $|r_{\max}^p|$, $|r_{\text{aver}}^p|$, $|r_{\max}^l|$ 和 $|r_{\text{aver}}^l|$ 分别表示优化后最大和平均的可展残差, 平面残差和边长残差; T 表示优化所需的时间; 迭代次数指优化过程完成的次数; ω_d 和 ω_p 分别表示优化过程中可展约束和平面约束的优化权重, 且这 2 个值都设置为 1; ω_l 表示边长约束的权重, 由于边长约束条件仅需模型没有明显形变, 故将其初始值设置为 1, 并使其在迭代过程中逐次减半. 采用 Levenberg-Marquardt 算法进行优化, 并将其终止阈值设置为 $\varepsilon = 1.0\text{E}-13$. 当优化残差 $|r_{\max}^d|$ 和 $|r_{\max}^p|$ 达到此数值或当迭代次数达到上限时, 结束迭代优化过程, 得到符合约束的模型及折痕图.

表 1 七折及格型纹样广义圆柱模型的可展和平面约束结果对比

模型	$N_r \times N_c$	$ r_{\max}^d / r_{\text{aver}}^d $	$ r_{\max}^p / r_{\text{aver}}^p $	$ r_{\max}^l / r_{\text{aver}}^l $	迭代次数	T/s
图 7a	5×3	2.664E-15/1.012E-15	2.220E-15/1.066E-15	0.080/0.046	3	0.007
图 7b	10×3	2.665E-15/9.232E-16	4.885E-15/1.266E-15	0.148/0.048	4	0.016
图 7c	20×3	6.217E-15/1.201E-15	1.266E-14/3.442E-15	0.221/0.047	4	0.033
图 7d	14×3	1.776E-15/4.605E-16	1.776E-15/4.758E-16	0.591/0.210	7	0.028
图 8a	30×3	9.326E-15/1.852E-15	5.063E-14/3.004E-14	0.221/0.051	35	0.502
图 8b	40×3	4.885E-15/9.889E-16	2.145E-13/1.874E-15	0.520/0.067	36	0.806
图 8c	60×3	1.510E-14/2.051E-15	1.066E-14/2.413E-15	0.512/0.067	64	4.022

从表 1 可以看出, 通过将可展开、平面和边长约束应用于广义圆柱模型, 随着模型条带单元数增加, 本文方法的迭代次数和时间有所增加, 在短时间内可展残差和平面残差均显著降低, 从而将误差降低到预期的允许范围内, 实现快速收敛, 得到了预期的实验结果, 证明了该方法的有效性. 以汽车模型为例, 本文方法可展残差和平面残差与迭代次数的关系如图 9 所示.

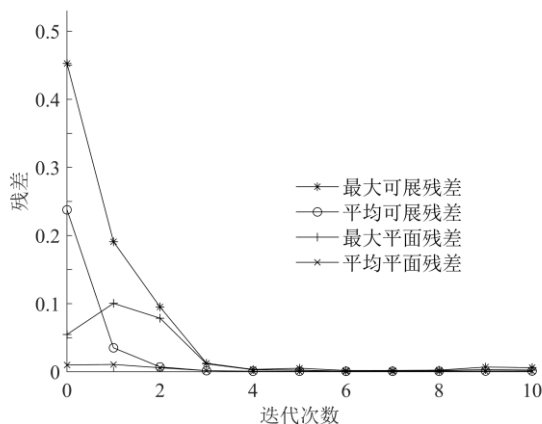


图 9 七折及格型纹样汽车模型优化迭代残差

可以看出, 通过施加对称性建模降低了优化参数规模, 能够在较少的迭代次数内得到效果, 显著地降低可展开约束和平面约束的残差值, 体现了良好的优化性能; 对于边长约束, 仅需控制在较小范围, 即可达到无明显短边退化的目标.

3.2 轴对称曲面的近似

首先通过二维控制点生成 NURBS 曲线, 构建模型的左半条带; 然后沿 $x-z$ 平面对称生成完整条带, 将其以 z 轴为中心进行旋转得到轴对称模型. 对于格型模型, 需先沿左半条带两侧平面的中心方向平移, 并将产生的空隙以四边形结构填充, 再沿 $x-z$ 平面对称完整条带; 复制条带并进行旋转得到格型纹样的轴对称模型; 最后实现轴对称目标曲面建模, 得到轴对称模型及折痕, 得到轴对称模型及折痕图, 如图 10 所示. 图 10a 中, $N_r = 6$, $N_c = 24$; 图 10b 中, $N_r = 6$, $N_c = 24$.

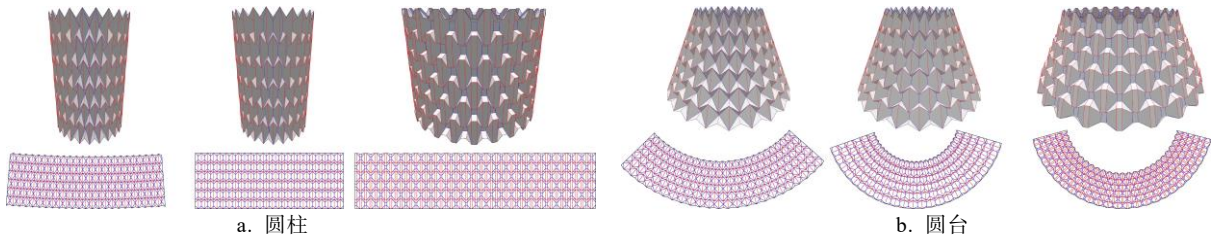


图10 轴对称模型及折痕图

对轴对称模型施加可展开约束和平面约束,得到符合约束的模型,以圆台模型为例,其前10次迭代残差变化如图11所示.七折水雷及格型纹样构建轴对称模型的优化数据如表2所示.

可以看出,优化操作在短时间内快速收敛,且误差降至目标范围内;迭代次数和时间随模型单元数增加有所增加,同时与模型的形态有关.优化迭代结果说明,折纸模型的形状和生成方法对约束优化存在影响,因此可通过用户交互程序调整相关参数进行交互式设计.

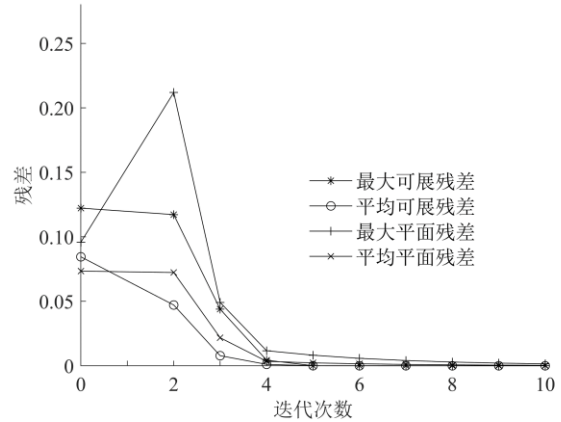


图11 七折及格型纹样圆台模型优化迭代残差

表2 七折及格型纹样轴对称模型的可展和平面约束结果对比

模型	$N_r \times N_c$	$ r_{\max}^d / r_{\text{aver}}^d $	$ r_{\max}^p / r_{\text{aver}}^p $	$ r_{\max}^l / r_{\text{aver}}^l $	迭代次数	T/s
图10a	6×24	2.487E-14/5.450E-15	9.650E-13/3.219E-13	0.002/0.001	56	0.072
图10b	6×24	7.105E-15/2.059E-15	8.207E-13/2.007E-13	0.460/0.274	77	0.057

为了避免面对复杂轴对称模型时存在局限性,即优化将无法收敛或与目标模型产生较大形变的问题,可以单独考虑平面约束来优化模型,将权重参数 ω_d 设置为0,仅考虑四边形结构的共面性,得到非可展模型目标残差函数,公式为

$$E = E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_i} p_i^2.$$

图12所示为4种模型的非可展和可折叠轴对称模型.图12a中, $N_r = 7$, $N_c = 29$;图12b中, $N_r = 8$, $N_c = 24$;图12c中, $N_r = 12$, $N_c = 24$;图12d中, $N_r = 7$, $N_c = 18$.

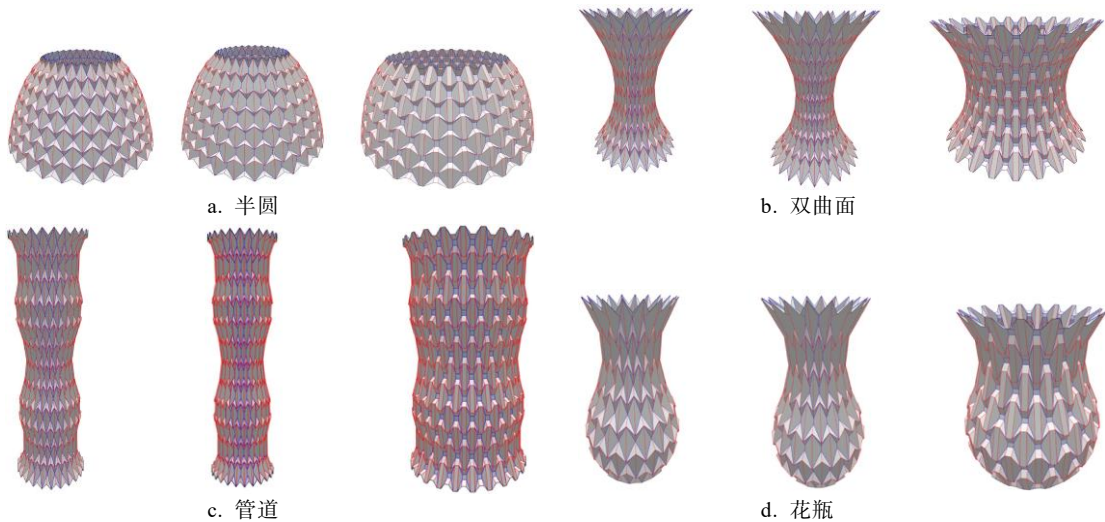


图12 非可展的可折叠轴对称模型

可以看出: (1) 对于非可展轴对称模型, 构建过程满足对称性和平面约束, 且在七折水雷纹样模型上填充四边形结构时后同样成立; 所设计的格型模型仍满足刚性折叠条件, 折叠方法同样适用, 可完成模型部署状态与压缩状态的刚性折叠变换. (2) 由于未施加可展开约束, 非可展的可折叠轴对称模型残差不满足展开条件, 最终得到的

模型会展开为多个部分, 可拼接成整体结构; 约束的放松增强了格型纹样的表现力, 使得格型衍生纹样能够创建更复杂且可刚性折叠的模型. 表 3 所示为七折及格型纹样轴对称模型的平面约束结果对比. 可以看出, 与表 2 相比, 表 3 的迭代次数明显减少, 表明可展优化求解难度较高, 需要的迭代和耗时更多, 此类优化能够加快模型求解.

表 3 七折及格型纹样轴对称模型的平面约束结果对比

模型	$N_r \times N_c$	$ r_{\max}^d / r_{\text{aver}}^d $	$ r_{\max}^p / r_{\text{aver}}^p $	$ r_{\max}^l / r_{\text{aver}}^l $	迭代次数	T/s
图 12a	7×29	0.238/0.074	5.329E-14/2.094E-15	0.003/0.001	4	0.004
图 12b	8×24	0.192/0.126	2.220E-15/1.027E-15	0.002/0.001	4	0.007
图 12c	12×24	0.350/0.124	6.661E-16/3.331E-16	0.006/0.001	5	0.010
图 12d	7×18	0.382/0.135	1.488E-13/2.214E-14	0.003/0.001	4	0.005

以管道模型为例, 其平面残差随迭代次数的变化如图 13 所示. 可以看出, 随着迭代次数增加, 模型残差迅速减小, 得到满足平面约束的模型.

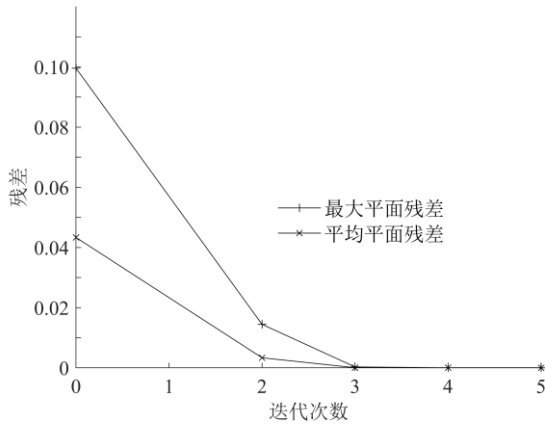


图 13 七折及格型纹样管道模型优化迭代残差

3.3 刚性折叠模拟

生成优化后模型的折痕图后, 可以利用折痕线和折叠角度等信息模拟模型折叠过程. 刚性折叠能够在保持折纸所有面刚性的同时运动, 且仅在折痕线上允许翻折. 分别对六折水雷、七折水雷和格型纹样的广义圆柱、轴对称模型应用刚性折叠运动模拟方法, 按折叠比例压缩模型.

折叠过程中, 不改变顶点及边长结构关系, 可保持折叠刚性. 对于广义圆柱模型, 折叠过程中保持垂直于 $x-z$ 平面. Zhao 等^[12]提出一种对称模型折叠方法, 将折叠率定义为 ψ_c , 公式为

$$\psi_c = \left(1 - \frac{D'}{D}\right) \times 100\% .$$

其中, D 表示广义圆柱模型左半条带宽度 w_h ; D'

表示压缩长度, 取值范围为 $0 \sim D$.

对于轴对称模型, 需在折叠过程中动态地计算的中心轴, 确保最终状态保持刚性并平行于 y 轴. 采用 Zhao 等^[12]的方法, 得到格型纹样折叠率 ψ_A , 公式为

$$\psi_A = \left(1 - \frac{\Theta'}{\Theta}\right) \times 100\% .$$

其中, Θ 表示左半条带角度 π/N_c ; Θ' 表示折叠时其边缘构成的扇形夹角, 取值范围为 $0 \sim \Theta$.

对广义圆柱和轴对称模型进行刚性折叠模拟, 在折叠率为 0%, 25%, 50%, 75% 和 100% 时分别进行渲染, 得到折叠序列图. 对水雷纹样构建的广义圆柱及轴对称模型进行刚性折叠模拟, 得到折叠渲染序列, 如图 14 所示. 对七折水雷纹样广义圆柱、轴对称和非可展模型进行刚性折叠模拟, 得到折叠渲染序列, 如图 15 所示. 对格型纹样广义圆柱、轴对称和非可展模型进行刚性折叠模拟, 得到折叠渲染序列, 如图 16 所示.

由于六折水雷和七折水雷纹样中没有中心面结构, 因此不考虑厚度时将被完全压缩成平面. 格型纹样压缩过程中获得的体积变化数据如图 17 所示. 在运动过程中, 体积比 (V/V_{\max}) 随折叠比例 $0 \sim 100\%$ 的变化而变化. 可以看出, 对于不同的模型, 折叠时体积变化规律不同, 但总体趋势是先增大后减小, 在完全折叠时达到最小值. 由于格型模型中存在不可压缩的中心面结构, 模型在完全折叠后仍然具有一定的体积; 在模拟折叠过程中, 保持折痕图中的边长和顶点信息以及相对位置关系不变, 在整个刚性折叠序列中没有交叉.

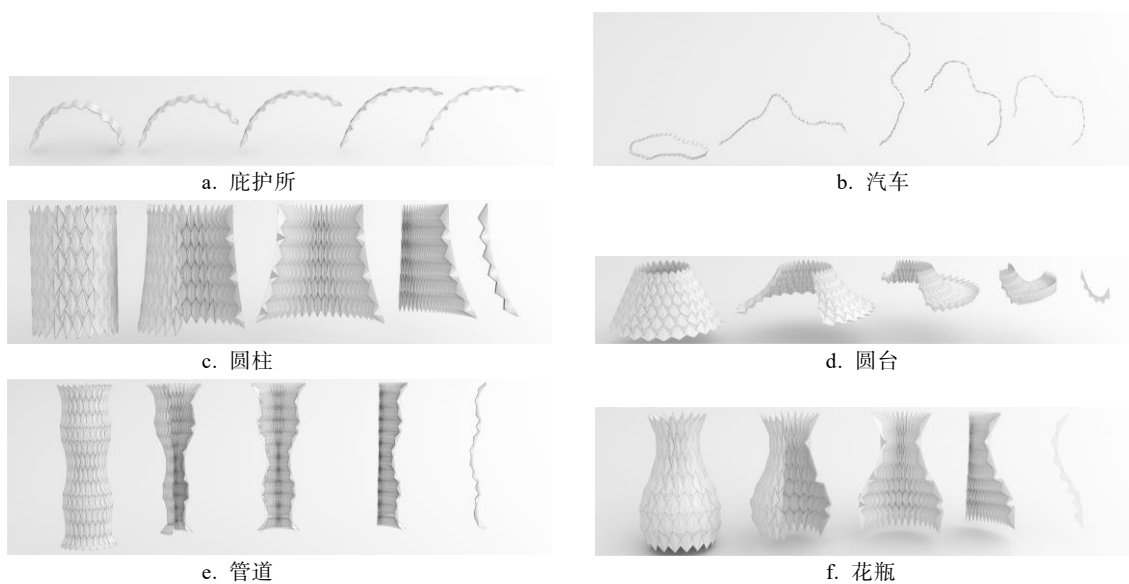


图 14 水雷纹样模型折叠渲染序列

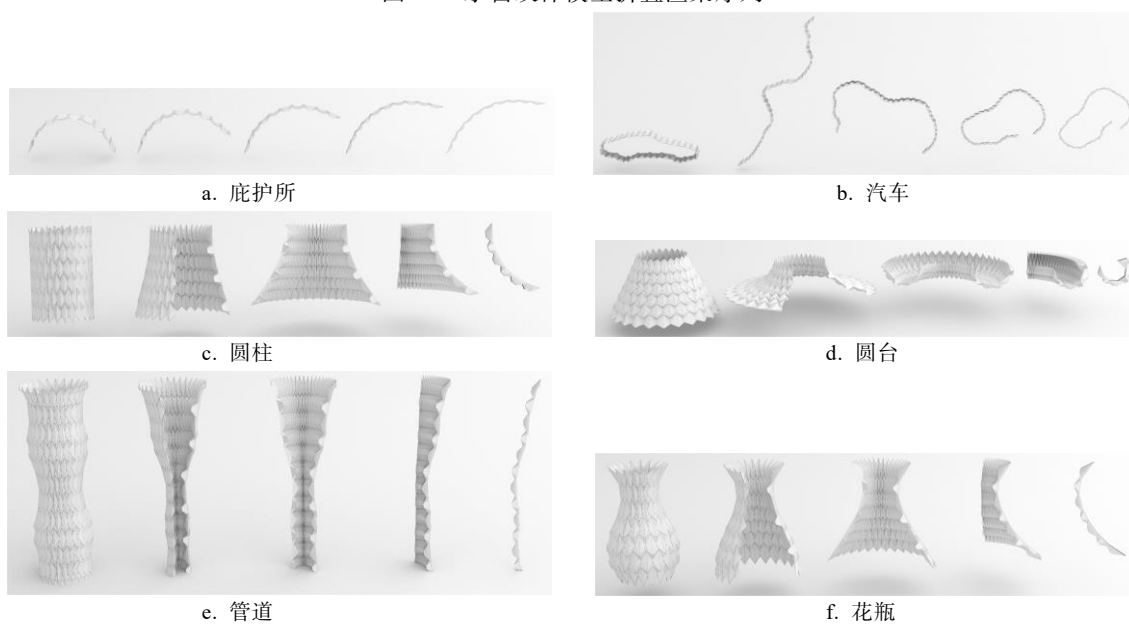


图 15 七折水雷模型折叠渲染序列

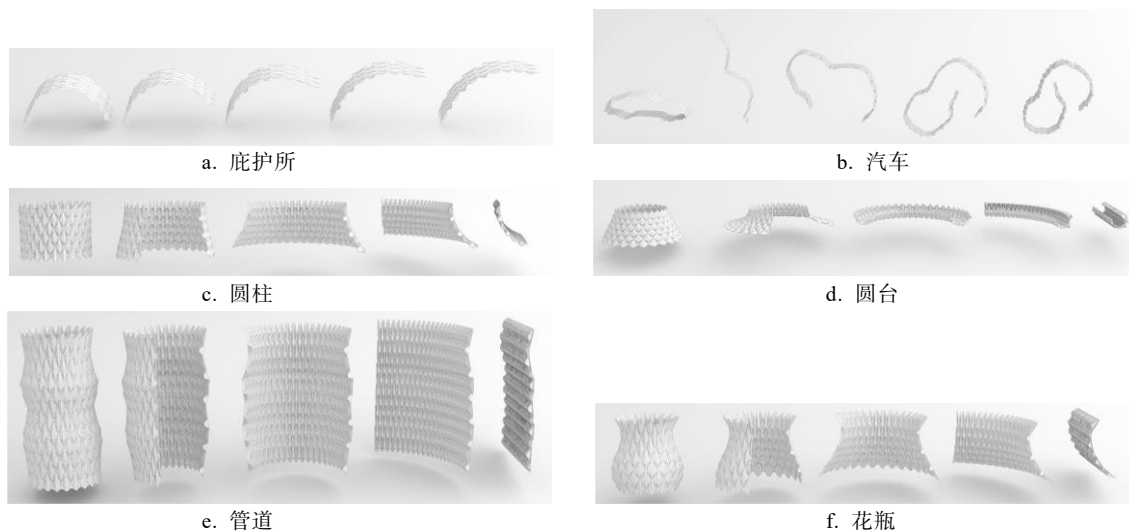


图 16 格型模型折叠渲染序列

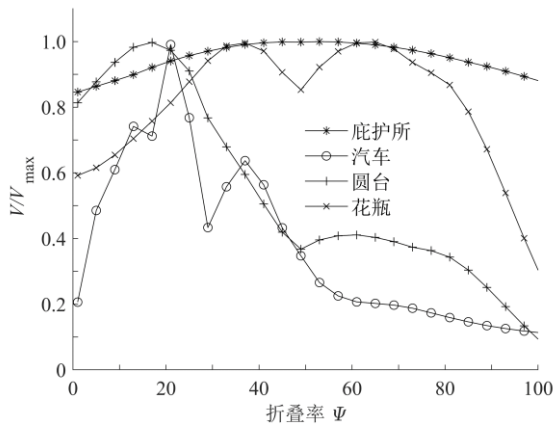


图 17 格型纹样模型迭代体积变化过程

对于模型拟合精度, 采用 MeshLab 导出模型顶点到目标曲面的平均 Hausdorff 距离与模型边界框对角线长度的比值^[27], 结果如表 4 所示. 可以看出, 与六折水雷和七折水雷纹样相比, Hausdorff 距离比值较小, 表明使用格型纹样构建的模型拟合精度较高, 可以较好地近似目标曲面.

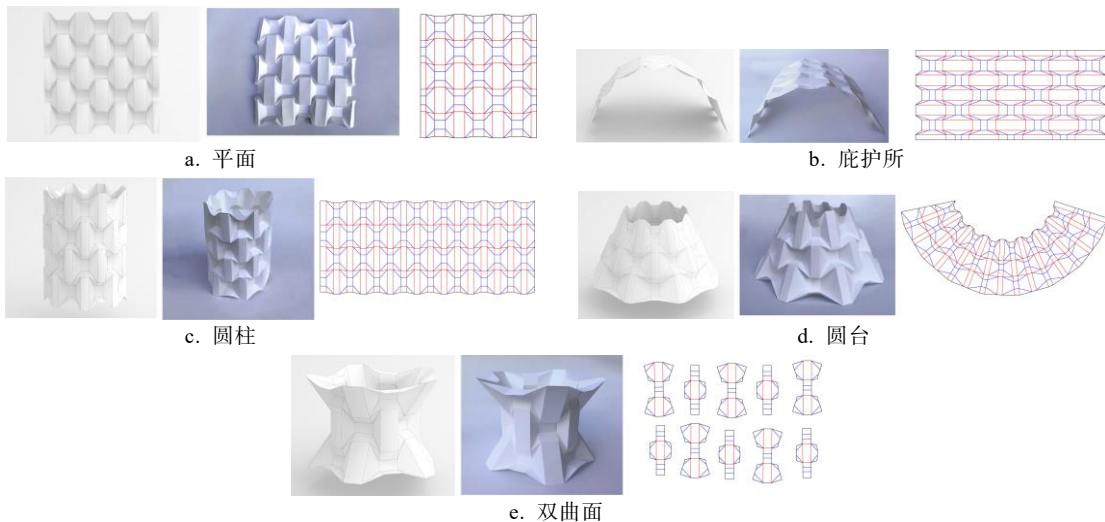


图 18 折纸模型的实物制作与折痕图

4 讨 论

纹样设计与曲面拟合被广泛应用于折纸结构三维建模, 是一种成熟、有效的解决方案. 纹样形态和建模方式能够显著地影响折纸的表现力和特性. Zhao 等^[15]提出六折水雷纹样的逆向建模方法. 六折水雷纹样完全由三角形结构组成, 其内部中心点结构可能存在交叉. 三角形结构为复杂模型提供了很大的设计自由度, 但其也引入了结构不稳定性^[28]. 七折水雷将点拉伸为边, 可有效地降低内部交叉概率. Deng 等^[20]基于运动学分析和有限元模拟, 验证了七折水雷纹样折叠可行性.

表 4 模型顶点到目标曲面的 Hausdorff 距离比值对比

模型	六折水雷	七折水雷	格型
图 7b	0.026 993	0.013 338	0.012 510
图 8b	0.006 384	0.009 870	0.009 793
图 10a	0.015 034	0.023 243	0.015 253
图 10b	0.009 285	0.015 686	0.010 719
图 12c	0.012 338	0.010 001	0.009 237
图 12d	0.009 449	0.013 616	0.010 303
平均	0.013 247	0.014 292	0.011 303

3.4 实物制作

完成模型的构建与约束施加后可以进行刚性折叠运动模拟, 同时得到模型的折痕图供实物制作. 格型纹样为七折纹样填充四边形, 其余部分相同, 对部分格型纹样模型实物制作如图 18 所示. 其中, 图 18a~图 18d 为满足可展开、平面和边长约束的广义圆柱和轴对称模型. 可以看出, 七折水雷纹样和格型纹样在可展约束下难以构建, 为了扩展轴对称模型的近似能力, 对图 18e 所示双曲面模型仅施加了平面约束; 所有模型均可刚性折叠.

将七折水雷纹样中心边扩展为面, 即可得到格型结构. Zhang 等^[23]提出一种结合铰链的剪纸结构, 利用四边形结构实现了较高的强度质量比和良好的负载能力; Jiang 等^[24]利用盒型剪纸方法保留四边形结构, 同时研究其形状近似能力. 受此启发, 本文设计了格型折纸纹样, 能够保持折纸模型刚性折叠过程中的水密性; 得益于对称结构建模, 有效地减少了优化参数, 可进行高效优化; 并对于七折水雷及格型纹样模型加入了边长约束, 避免结构退化.

Zhao 等^[12]分析了六折水雷轴对称模型刚性折叠运动过程. Chen 等^[5]研究了 2 种对称水雷折纸的

折叠方法. Fonseca 等^[29]基于对称水雷折纸, 通过等效机构法进行运动学分析, 建立对称性假设下的降阶模型, 利用杆铰链非线性有限元分析法进行力学分析. Tang 等^[30]使用逼近方案近似水雷纹样离散旋转曲面, 实现了部署状态到压缩状态的折叠. Wang 等^[31]使用编程剪纸排列以及三浦纹样结合的方法, 拟合具有旋转对称性的四边形高低交错结构曲面, 并分析了其折叠行为. 本文采用折纸方法完成七折水雷及其衍生格型纹样建模, 并能实现对称曲面的刚性折叠过程模拟.

5 结 语

本文通过分析六折水雷和七折水雷纹样及盒型剪纸结构, 提出格型纹样和对称曲面的逆向建模方法. 首先以二维控制点生成的 NURBS 曲线构造初始条带轮廓, 通过平移及旋转方式生成广义圆柱和轴对称模型; 然后将六折水雷中心点拉伸为边形成七折水雷纹样, 施加可展、平面和边长约束生成符合几何约束的七折水雷模型, 再将七折水雷模型中心边扩展为面生成格型纹样模型, 使用具备水密性的折纸方法引入盒型剪纸的格状结构; 最后求解折纸模型部署及压缩过程的三维空间结构, 成功地实现了优化后模型的刚性折叠模拟. 在轴对称模型中, 严格的几何约束限制了模型的求解空间, 为了增强其通用性, 在仅考虑平面约束条件下构建轴对称模型并给出了刚性折叠过程的模拟. 此外, 基于折痕图制作物理模型, 证明了几何约束和建模方法的有效性.

与对称结构相比, 本文方法在优化时内部顶点的自由度较高, 可增强纹样曲面拟合能力. 未来, 可将本文所提的格型纹样推广到自由曲面建模.

参考文献(References):

- [1] Tachi T. Origamizing polyhedral surfaces[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2010, 16(2): 298-311
- [2] Rus D, Tolley M T. Design, fabrication and control of origami robots[J]. Nature Reviews Materials, 2018, 3(6): 101-112
- [3] Wang Y H, Ye H T, He J, *et al.* Electrothermally controlled origami fabricated by 4D printing of continuous fiber-reinforced composites[J]. Nature Communications, 2024, 15(1): Article No.2322
- [4] Hu Y C, Zhou Y X, Liang H Y. Constructing rigid-foldable generalized Miura-Ori tessellations for curved surfaces[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2021, 13(1): Article No.011017
- [5] Chen Y, Feng H J, Ma J Y, *et al.* Symmetric waterbomb origami[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical Engineering Sciences, 2016, 472(2190): Article No.20150846
- [6] Cai J G, Deng X W, Xu Y X, *et al.* Motion analysis of a foldable barrel vault based on regular and irregular Yoshimura origami[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2016, 8(2): Article No.021017
- [7] Zhang Q, Cai J G, Li M, *et al.* Bistable behaviour of a deployable cylinder with Kresling pattern[C] //Proceedings of the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education. Oxford: Oxford University, 2018: 4-7
- [8] Gattas J M, You Z. Miura-base rigid origami: parametrizations of curved-crease geometries[J]. Journal of Mechanical Design, 2014, 136(12): Article No.121404
- [9] Sareh P, Guest S D. Design of isomorphic symmetric descendants of the Miura-ori[J]. Smart Materials and Structures, 2015, 24(8): Article No.085001
- [10] Feng F, Plucinsky P, James R D. Helical Miura origami[J]. Physical Review E, 2020, 101(3): Article No.033002
- [11] Evans T A, Lang R J, Magleby S P, *et al.* Rigidly foldable origami gadgets and tessellations[J]. Royal Society Open Science, 2015, 2(9): Article No.150067
- [12] Zhao Y, Kanamori Y, Mitani J. Design and motion analysis of axisymmetric 3D origami with generic six-crease bases[J]. Computer Aided Geometric Design, 2018, 59: 86-97
- [13] Zhao Y, Endo Y, Kanamori Y, *et al.* Approximating 3D surfaces using generalized waterbomb tessellations[J]. Journal of Computational Design and Engineering, 2018, 5(4): 442-448
- [14] Zhao Y, Li S L, Zhang M Y, *et al.* Computational design methods for cylindrical and axisymmetric waterbomb tessellations[J]. Computer Aided Geometric Design, 2021, 91: Article No.102037
- [15] Zhao Y, Wei Y L. Inverse design of three-dimensional surfaces via waterbomb tessellations[J]. Computer-Aided Design, 2023, 156: Article No.103461
- [16] Zhang M Y, Zhao Y. Modeling methods of cylindrical and axisymmetric waterbomb origami based on multi-objective optimization[J]. Multimedia Systems, 2024, 30(3): Article No.135
- [17] Bo Pengbo, Yuan Ye, Zhang Caiming. Automatic reconstruction of developable surfaces[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2016, 28(9): 1428-1435(in Chinese) (伯彭波, 袁野, 张彩明. 可展曲面的自动识别与重建[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2016, 28(9): 1428-1435)
- [18] Zhang X, Chen Y. Vertex-splitting on a diamond origami pattern[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2019, 11(3): Article No.031014
- [19] Wickeler A L, Naguib H E. Novel origami-inspired metamaterials: design, mechanical testing and finite element modelling[J]. Materials & Design, 2020, 186: Article No.108242
- [20] Deng X W, Zhao J Z, Cai J G, *et al.* Tunable origami metamaterial with arbitrary single-curvature configuration[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 171: Article No.104745
- [21] Zhao Y, Wei Y L, Jia Y Y, *et al.* Constructing foldable cylindrical surfaces via unfolded waterbomb origami units[J]. Journal of Computational Design and Engineering, 2022, 9(4): 1498-1510
- [22] Sun Xiaopeng, Li Feixuan. Developable structure design of 3D

- model using segmentation[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2023, 35(12): 1833-1841 (in Chinese)
(孙晓鹏, 栗菲旋. 基于分割的三维网格模型可展结构设计[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2023, 35(12): 1833-1841)
- [23] Zhang H Y, Paik J. Kirigami design and modeling for strong, lightweight metamaterials[J]. Advanced Functional Materials, 2022, 32(21): Article No.2107401
- [24] Jiang C G, Rist F, Pottmann H, *et al.* Freeform quad-based kirigami[J]. ACM Transactions on Graphics, 2020, 39(6): Article No.209
- [25] Demaine E, O'Rourke J. Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra[M]. Cambridge: Cambridge university press, 2007
- [26] Levenberg K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1944, 2(2): 164-168
- [27] GharehTappeh Z S, Peng Q J. Simplification and unfolding of 3D mesh models: review and evaluation of existing tools[J]. Procedia Cirp, 2021, 100: 121-126
- [28] Imada R, Tachi T. Geometry and kinematics of cylindrical waterbomb tessellation[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2022, 14(4): Article No.041009
- [29] Fonseca L M, Savi M A. On the symmetries of the origami waterbomb pattern: kinematics and mechanical investigations[J]. Meccanica, 2021, 56(10): 2575-2598
- [30] Tang J M, Tian M Q, Wang C J, *et al.* A novel scheme of folding discretized surfaces of revolution inspired by waterbomb origami[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 165: Article No.104431
- [31] Wang F, Guo X G, Xu J X, *et al.* Patterning curved three-dimensional structures with programmable kirigami designs[J]. Journal of Applied Mechanics, 2017, 84(6): Article No.061007