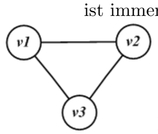
LÖSUNGSSKIZZE zur Probeklausur vom 2. Juli 2019

Aufgabe 1: ....**15 Punkte**
Wahr oder Falsch?? **Jeweils** ....**1 Punkt**
Bitte begründen Sie Ihre Aussage. **Jeweils** ....**2 Punkte**

1. Es gibt keinen nicht-planaren Graphen G mit $\chi(G) = 2$. .... ☐ wahr oder ☒ falsch
   Begründung:
   $K_{3,3}$ ist nicht planar und bipartit, also $\chi(K_{3,3}) = 2$

2. Ein Graph, dessen Gerüste alle isomorph sind,
   ist immer ein Baum. .... ☐ wahr oder ☒ falsch **Begründung:**

   ZB hat nur isomorphe Gerüste und ist kein Baum.

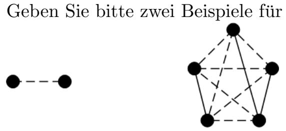
3. Für einen schlichten, ungerichteten Graphen G gilt:
   $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .... ☒ wahr oder ☐ falsch **Begründung:**
   $\Delta(G)$ ist der maximale Knotengrad, also die maximale Anzahl der Nachbarn eines Knoten: Wenn diese alle miteinander verbunden sind, dann benötigt jeder Nachbar eine Farbe (also $\Delta(G)$) und der Knoten selber auch noch eine.

4. Es gibt keinen Algorithmus,
   der die chromatische Zahl eines Graphen liefert. ☐ wahr oder ☒ falsch **Begründung:**
   Da das Färbeproblem endlich ist, kann jede Färbung untersucht werden und so die minimale Färbung gefunden werden. Es ist nur nicht effizient machbar

5. In jedem vollständigen Graphen gibt es
   mindestens einen Eulerkreis. .... ☐ wahr oder ☒ falsch **Begründung:**
   Für ein K_n mit geradem $n > 0$ ist für alle $v \in V$ der Knotengrad $d(v) = n - 1$, also ungerade, also gibt es keinen Eulerkreis.

Aufgabe 2: ....**15 Punkte**
Das Komplement $\overline{G}$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist gegeben durch $G = (V, (V \times V) \setminus E)$. Wenn G nicht zusammenhängend ist, dann ist $\overline{G}$ zusammenhängend.

1. Geben Sie bitte zwei Beispiele für diesen Zusammenhang: ....**3 Punkte**

   Dabei gehören die durchgezogenen Kanten zu G und die gestrichelten zu $\overline{G}$.

2. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung nicht gilt. ....**5 Punkte**
   G zusammenhängend $\not\Longrightarrow$ $\overline{G}$ nicht zusammenhängend.:

   Dabei gehören die durchgezogenen Kanten zu G und die gestrichelten zu $\overline{G}$, beides sind aber zusammenhängende Graphen. Also gilt **nicht**, dass
   G zusammenhängend $\Longrightarrow$ $\overline{G}$ nicht zusammenhängend.

3. Begründen Sie bitte die Aussage. ....**7 Punkte**
   Die Aussage ist äquivalent dazu, dass nicht G und $\overline{G}$ unzusammenhängend sein können. Seien K_1 und K_2 die zwei Komponenten von G, dann müssen aber in $\overline{G}$ alle Konten in K_1 mit allen Knoten in K_2 verbunden sein, dann gibt es aber von jedem Konten zu jedem Knoten in $\overline{G}$ eine Pfad. Dann ist aber $\overline{G}$ zusammenhängend.

Aufgabe 3: ....**15 Punkte**
Erläutern Sie bitte den A*-Algorithmus ....**10 Punkte**
und die Bedeutung der Heuristik für diesen Algorithmus. ....**5 Punkte**
A* nach der Initialisierung, wie folgt:

1. Knoten v_k mit niedrigsten f_k in OL suchen

2. Knoten v_k in die CL schieben.

3. adjazente Knoten v_j, die nicht in der CL sind, in die OL schreiben
   und prüfen, ob $g_j > g_k + l_{k,j}$. Falls

   JA, wird der aktuelle Knoten v_k Vorgängerknoten: $p_j := v_k$
   und neuer g- und der f-Wert: $g_j := g_k + l_{k,j}$ und $f_j := g_j + h_j$

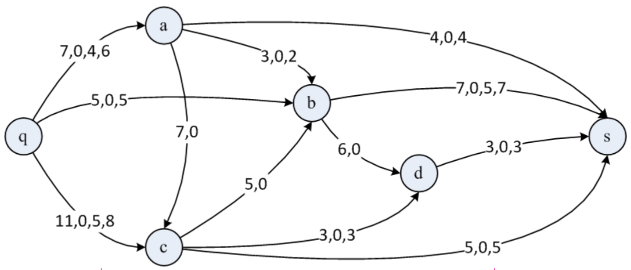
4. Falls der Zielknoten in der geschlossenen Liste; gehe zu 5.
   Falls kein Zielknoten gefunden und offene Liste leer; gehe zu 6.
   Sonst; gehe zu 1.

5. Der Pfad läßt sich vom Zielknoten aus mittels der Vorgänger bis zum Startknoten zurück verfolgen.

6. Es gibt keinen Pfad.

Der A*-Algorithmus erweitert den Dijkstra-Algorithmus um eine Heuristik. Er ist also ein heuristischer Suchalgorithmus, der trotzdem optimal arbeitet. Falls diese Heuristik monoton und nicht überschätzend ist, kann damit der kürzeste Pfad schneller gefunden werden. Er nutzt das Konzept von Dijkstra (exakte Kosten des Weges vom Startpunkt) mit dem heuristischen Konzept der Abschätzung (Bevorzugung der Knoten, die näher zum Ziel geschätzt werden) verbindet.
Damit der optimale Weg gefunden werden kann, muss die monoton sein und darf nicht überschätzend sein.

Aufgabe 4:............................ ....15 Punkte
Gegeben das folgende Netzwerk. Berechnen Sie bitte den maximalen Fluss mit dem Ford-Fulkerson-Algorithmus, wobei Sie dieses unbewertete Netzwerk benutzen sollen.



Knoten	q	a	s
Kennung	$(\perp,\infty)$	$(+q,7)$	$(+a,4)$

Es gibt noch vergrößernde Wege.

Knoten	q	b	s
Kennung	$(\perp,\infty)$	$(+q,5)$	$(+b,5)$

Es gibt noch vergrößernde Wege.

Knoten	q	c	s
Kennung	$(\perp,\infty)$	$(+q,11)$	$(+c,5)$

Es gibt noch vergrößernde Wege.

Knoten	q	a	b	s
Kennung	$(\perp,\infty)$	$(+q,3)$	$(+a,3)$	$(+b,2)$

Es gibt noch vergrößernde Wege.

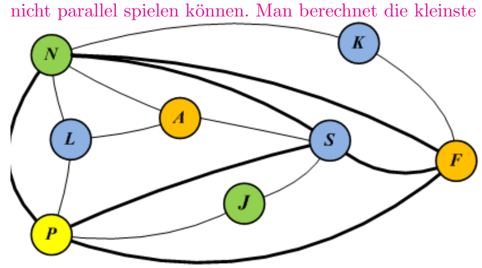
Knoten	q	c	d	s
Kennung	$(\perp,\infty)$	$(+q,6)$	$(+c,3)$	$(+d,3)$

Es gibt keinen vergrößernden Weg mehr: $d = 19$

Aufgabe 5:............................ ....15 Punkte
Sie übernehmen die Festivalplanung für das nächste HAW-Campusfestival. Es spielen 8 Bands, dabei sollen folgende Randbedingungen berücksichtigt werden:

1. Die Bands *Krach* und *Noise* haben den gleichen Gitarristen.
2. Die Bands *Pink Lips* und *Link Pips* nutzen zum Teil die gleiche Ausrüstung.
3. Die Leadsängerin der *Pink Lips* ist Bassistin bei dem Jazz-Trio *JamJazz*.
4. Keine der drei Punkbands *Pink Lips*, *Noise* und *Folle Vindel* sollen gleichzeitig spielen, um die Fans nicht zu überfordern.
5. Der Gitarrist von *Krach* möchte unbedingt die Band *Folle Vindel* erleben.
6. Die Schlagersängerin *Annabell* ist Tänzerin für's *Schlagerduo*.
7. Das *Schlagerduo* will nicht zeitgleich mit irgendeiner der drei Punkbands spielen.
8. Das Jazz-Trio *JamJazz* fürchtet die Konkurrenz des *Schlagerduo*s und will deswegen nicht gleichzeitig mit ihm spielen.
9. Der Hauptsponsor möchte auf jeden Fall *Noise*, *Link Pips* und *Annabell* sehen.

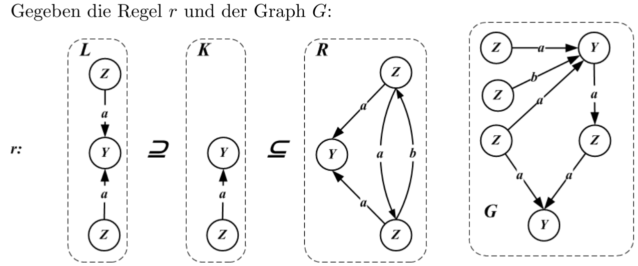
Damit nicht zuviele Lehrveranstaltungn ausfallen, so viele wie möglich parallele Auftritte stattfinden. Zeigen und erläutern Sie bitte, wie Sie mit Hilfe der Graphentheorie den Bands verschiedene Spielzeiten zuordnen.
Man konstruiert den Konfliktgraph K. Die Knoten stellen die Bands dar und die Randbedingungen, die Kanten, die Konflikte zischen den Bands beschreiben, die dazu führen, dass die Bands nicht parallel spielen können. Man berechnet die kleinste Färbung, in diesem Fall:



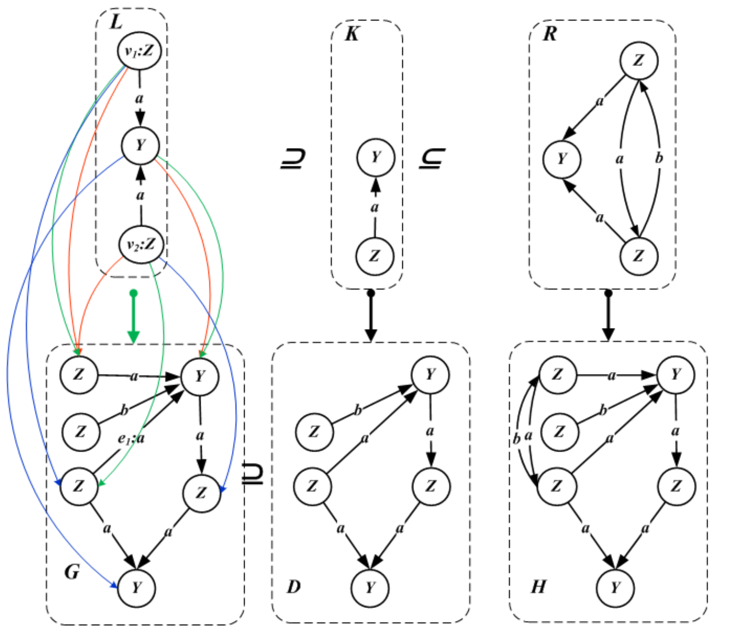
da eine Färbung und ein K_4 enthalten ist mit $\chi(K) = 4$ Farben, also werden 4 Spielzeiten benötigt. Es spielen parallel: die Gruppen, die gleich gefärbt sind:

- Krach, Schalgerduo und Link Pips
- Annabell, JamJazz und Folle Vindel
- Pink Lips
- Noise

Aufgabe 6:............................ ....15 Punkte
Gegeben die Regel r und der Graph G:



1. Wenden Sie Regel r bitte auf den Graphen G an, indem Sie die direkte Ableitung $G \overset{r}{\Longrightarrow} H$ zeichnen. .... **5 Punkte**



wobei das Vorkommen der grün eingetragene Morphismus ist.

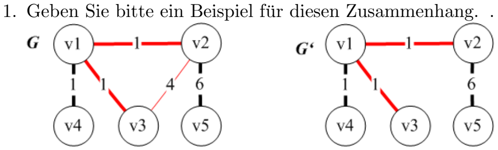
2. Erläutern Sie bitte die Klebebedingungen. .... **5 Punkte**
Die Klebebedingen bestehen aus Kontakt- und Identifikationsbedingung. Die erste dient dazu, dass der Graph D, der durch das Löschen von L in G entsteht, wohldefiniert ist. Die Anwendung der Regel wird dann verhindert, wenn das Ergebnis des Löschens, also D, eine hängende Kante, das ist eine Kante der Quelle oder Ziel fehlt, hätte. Die Identifikationsbedingung kann verletzt werden, wenn Kanten oder Knoten nicht injektiv von L nach G abgebildet werden. In diesem Fall verlangt die Identifikationsbedingung, dass dann die beiden Kanten oder Knoten auch schon in K sind. Das dient dazu, dass die Regel eindeutig ist.

3. Geben Sie ein je ein Vorkommen von L in G an, so dass die Kontakt- sowie die Identifikationsbedingung verletzt ist und erläutern Sie wie. .... **5 Punkte**

- Vorkommen, das Identifikationsbedingung verletzt: $m_1 : L \to G$ in rot
Beide Z-Knoten in L werden auf den gleichen Z-Knoten in G abgebildet, aber nur der eine der beiden ist in K; also $m_1(v_1) = m_1(v_2) \wedge v_2 \notin V_K$
- Vorkommen, das Kontaktbedingung verletzt: $m_2 : L \to G$ in blau
Der obere Z-knoten in L wird gelöscht, d.h. es gibt ihn nicht in K. aber er wird mit m_2 (blau) auf einen Knoten in G angebildet, and dem noch eine weitere Kante hängt; also Für $e_1 \in E_G - g_E(E_L) : s_G(e_1) \notin V_G - g_V(V_L - V_K)$.

Aufgabe 7:............................... ....15 Punkte
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, schlichter, zusammenhängender und gewichteter Graph, K ein Kreis in G und $e \in E$ eine Kante mit maximalem Gewicht in K. Dann ist $G' = (V, E \setminus \{e\})$ zusammenhängend und sein Minimalgerüst ist auch ein Minimalgerüst von G.

1. Geben Sie bitte ein Beispiel für diesen Zusammenhang. .... **3 Punkte**



$v2 - v3$ ist maximale Kante im roten Kreis und gehört zu keinem Minimalgerüst, deswegen ist Minimalgerüst von dem zusammenhängenden G' (fette Kanten) auch Minimalgerüst in G.

2. Begründen Sie bitte diesen Zusammenhang. .... **5 Punkte**
Da die Kante aus einem Kreis gelöscht wird, ist G' zusammenhängend.
Da e die maximale Kante eines Kreises ist, und nicht alle Kanten den Kreises im Gerüst sein können – denn dann wäre es kein Baum mehr– kann sie nicht zum Minimalgerüst gehören, denn sonst wäre der Gerüst nicht minimal, denn dann könnte e durch die niedriger gewichtete Kante, die zum Kreis, aber nicht zum Gerüst gehört, ersetzt werden.

3. Beweisen Sie bitte diesen Zusammenhang. .... **7 Punkte**
Sei e Kante in K und G' nicht zusammenhängend, dann gibt es keinen Weg zwischen $s(e)$ und $t(e)$, also kann e nicht auf einem Kreis liegen, Widerspruch zur Annahme. also ist G' zusammenhängend.

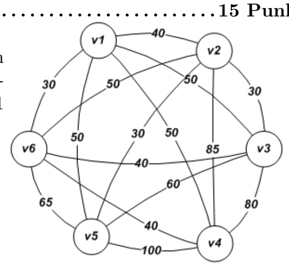
Sei B ein Gerüst für G, das ein kleineres Gewicht hat als das Minimalgerüst B' von G'.

B muss die Kante e enthalten, da sonst ein Gerüst für G' vorliegen wurde.

Es sei nun e' eine Kante aus K. Man ersetze in B die Kante e durch e'. Das resultierende Gerüst sei B''. B'' ist dann ein Gerüst für G und G'. Da das Gewicht von e' nach Voraussetzung nicht größer ist als das Gewicht von e, wurde das Gewicht nicht vergrößert. Damit hat B'' 00 ein Gewicht, das kleiner ist als das von B'. Widerspruch zu der Annahme, dass B' Minimalgerüst von G' ist.

Aufgabe 8:............................. ....15 Punkte

Gegeben dieser vollständige und gewichtete Graph K_6. Finden Sie mit dem „Nächstgelegener Knoten“-Algorithmus einen möglichst kurze Rundreise, die bei $v1$ beginnt.



Tour	Kosten	kürzeste Tour; nächster Knoten
$v1 - v1$	0	$v6$
$v1 - v6 - v1$	60	$v2$
$v1 - v2 - v6 - v1$	120	$v3$
$v1 - v3 - v2 - v6 - v1$	160	
$v1 - v2 - v3 - v6 - v1$	140	$v5$
$v1 - v2 - v6 - v3 - v1$	180	
$v1 - v5 - v2 - v3 - v6 - v1$	180	$v4$
$v1 - v2 - v5 - v3 - v6 - v1$	200	
$v1 - v2 - v3 - v5 - v6 - v1$	215	
$v1 - v2 - v3 - v6 - v5 - v1$	225	
$v1 - v4 - v5 - v2 - v3 - v6 - v1$	280	
$v1 - v5 - v4 - v2 - v3 - v6 - v1$	335	
$v1 - v5 - v2 - v4 - v3 - v6 - v1$	315	
$v1 - v5 - v2 - v3 - v4 - v6 - v1$	280	
$v1 - v5 - v2 - v3 - v6 - v4 - v1$	240	$gefundeneTour$