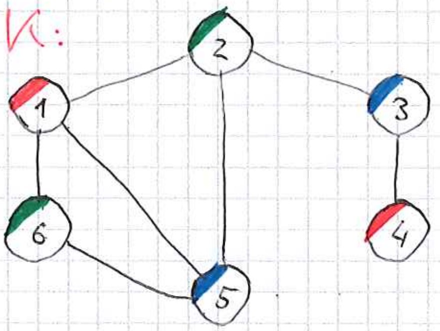
Aufgabe V:
In Nord-Amerika werden bestimmte Fernsehkanäle den Fernsehstationen so zugeteilt, daß niemals zwei Stationen, die weniger als 150 Meilen voneinander entfernt sind, denselben Kanal verwenden.
Wieviele verschiedene Kanäle werden dann für die sechs Stationen benötigt, deren Entfernungen voneinander in der folgenden Tabelle gegeben sind?

	1	2	3	4	5	6
1	-	85	175	200	50	100
2	85	-	125	175	100	160
3	175	125	-	100	200	250
4	200	175	100	-	210	220
5	50	100	200	210	-	100
6	100	160	250	220	100	-

K:



Die minimal notwendige Anzahl von Kanälen ist die minimale Färbung. ✓

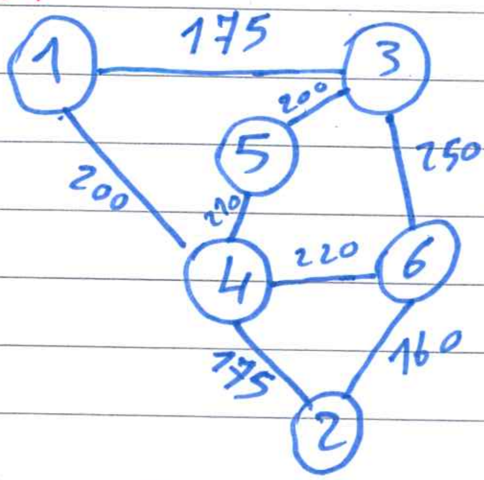
Jeder Knoten repräsentiert eine Station. ✓

Kanten existieren zwischen Stationen, die weniger als 150 Meilen voneinander entfernt sind.

Woher weiß man, dass die angegebene Färbung minimal ist?
Der Graph K enthält einen K_3 (Knoten 1, 5, 6) braucht also mindestens 3 Farben.
Also ist $\chi(K) = 3$.

Aufgabe V: man braucht mindestens 3 verschiedene Kanäle
z.B. Ein Kanal für 1,3
, einer für 5
und einer für 2,4,6

Konstruktion fehlt.



Wir suchen Teilgraphen, die vollständig sind, dann kriegt jeder vollständige einen Kanal und wenn ein Knoten schon in einem vollständigen Graph ist, darf dann dieser nicht in einem anderen Teilgraph genommen werden. Dabei sollen wir den größten vollständigen Graphen auswählen.

Name:
Ibrahem AlKurdi

Ist nicht die gewünschte Lösung aus der VL: die Konstruktion des "Freundschaftsgraphen", also Kante heißt, das 2 Station die gleiche Frequenz haben können also suchen wir eine Überdeckung mit vollständige Graphen. Bei großen Graphen wird das Ergebnis sehr, sehr schlecht.

Aufgabe VII:
Ein Graph mit $\chi(G) = k$ heißt kritisch k-chromatisch, wenn er sich durch Entfernen einer beliebigen Kante der chromatische Index von G $\chi(G) = k$ verringert, also wenn gilt:

$$\chi(G \setminus e) = k - 1$$

1. Geben Sie bitte für $k = 2, 3, \ldots$ eine Familie von kritisch k-chromatischen Graphen an.

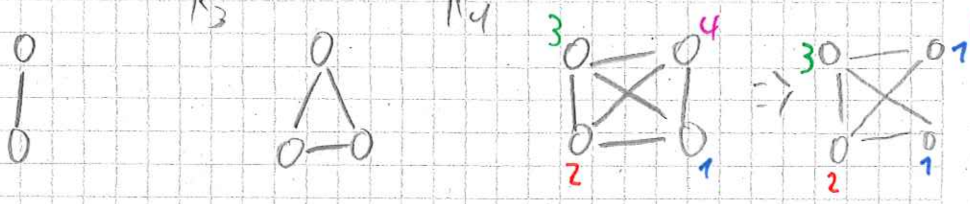
~~K=2 Kreise~~

sehr informell, besser K_n die vollständigen Graphen

K_N bis

Familie: vollständige Graphen.

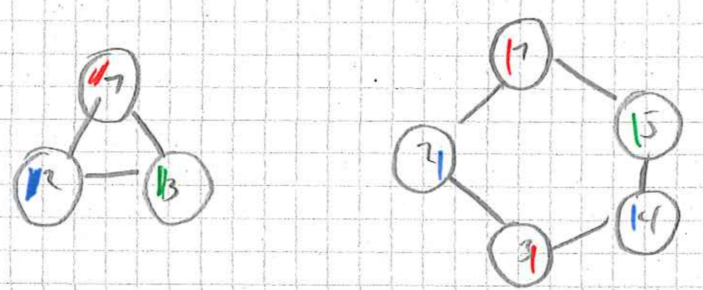
K_2 K_3 K_4



2. Geben Sie bitte für $n = 3, 5, \ldots$ eine Familie von kritisch 3-chromatischen Graphen mit n Knoten an.

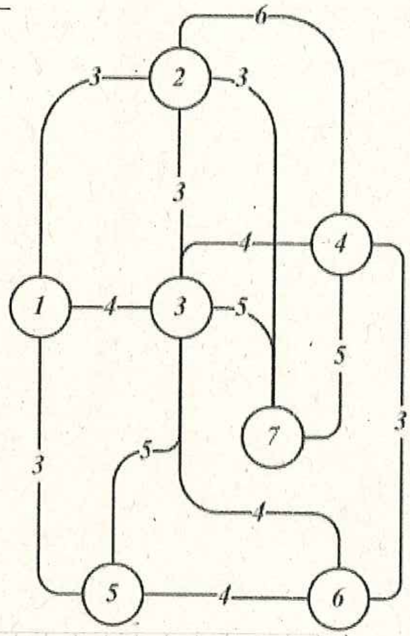
Kreise mit ungerader Anzahl von Knoten

C_n n ungerade



besser C_k mit $k = 2n+1$ ungerade

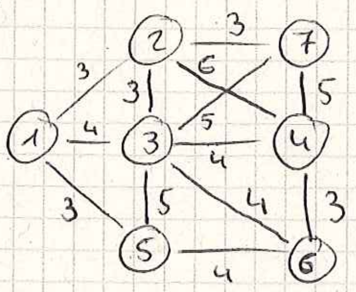
Aufgabe VIII:



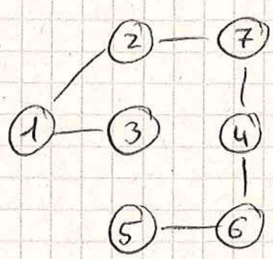
1. Geben Sie bitte 3 nicht-isomorphe Gerüste für den folgenden Graph an.
   Dabei ignorieren Sie jetzt erstmal die Kantenbewertung.

2. Bestimmen Sie bitte mittels des Algorithmus von Kruskal das Minimalgerüst.

1) Graph

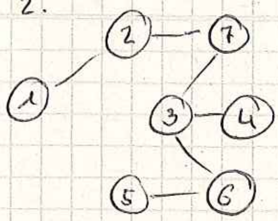


1.

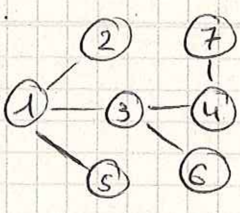


✓

2.



3.



2) Ordnung

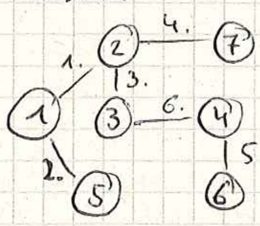
1 - 2
1 - 5
2 - 3
2 - 7
4 - 6
} g=3

1 - 3
3 - 4
3 - 6
5 - 6
} g=4

3 - 5
3 - 7
4 - 7
} g=5

2 - 4 g=6

Minimalgerüst Kruskal



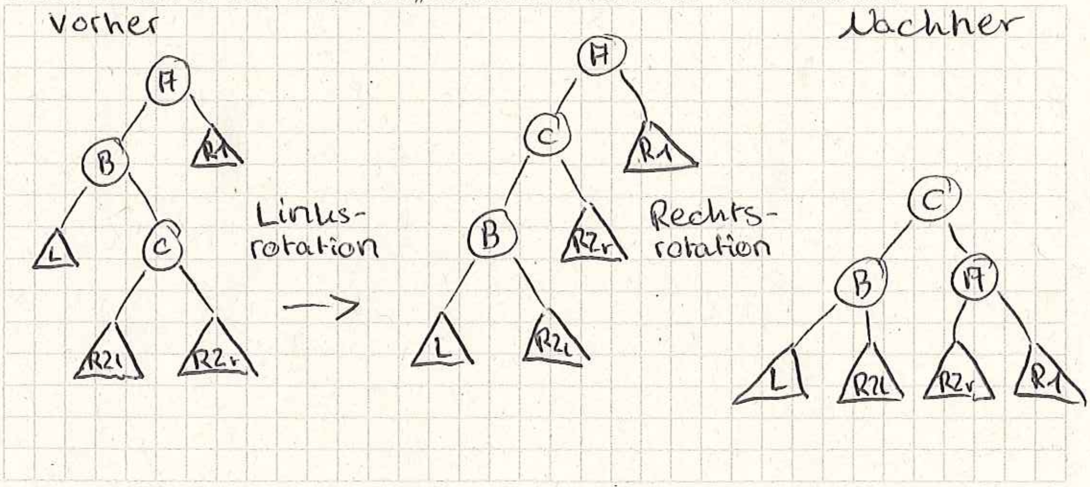
(✓)

hier ist die Ordnung nicht zu erkennen. Sie versuchen jede möglich dar zustellen. , besser

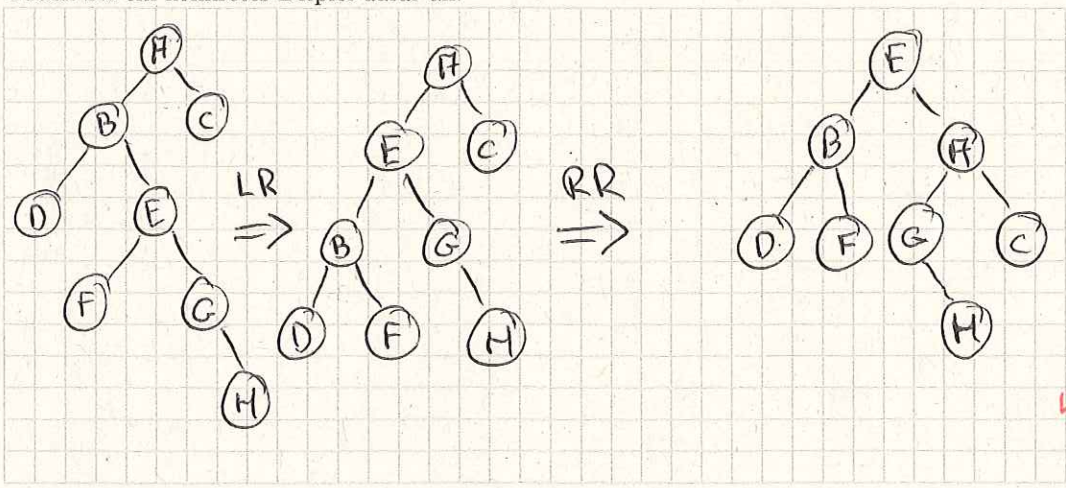
{1,2}, {1,5}, {2,3}, {2,7} {4,6} ...

Aufgabe IX:

1. Stellen Sie bitte für AVL-Bäume die „Problemsituation Rechts" schematisch dar.



2. Geben Sie ein konkretes Beipiel dafür an.

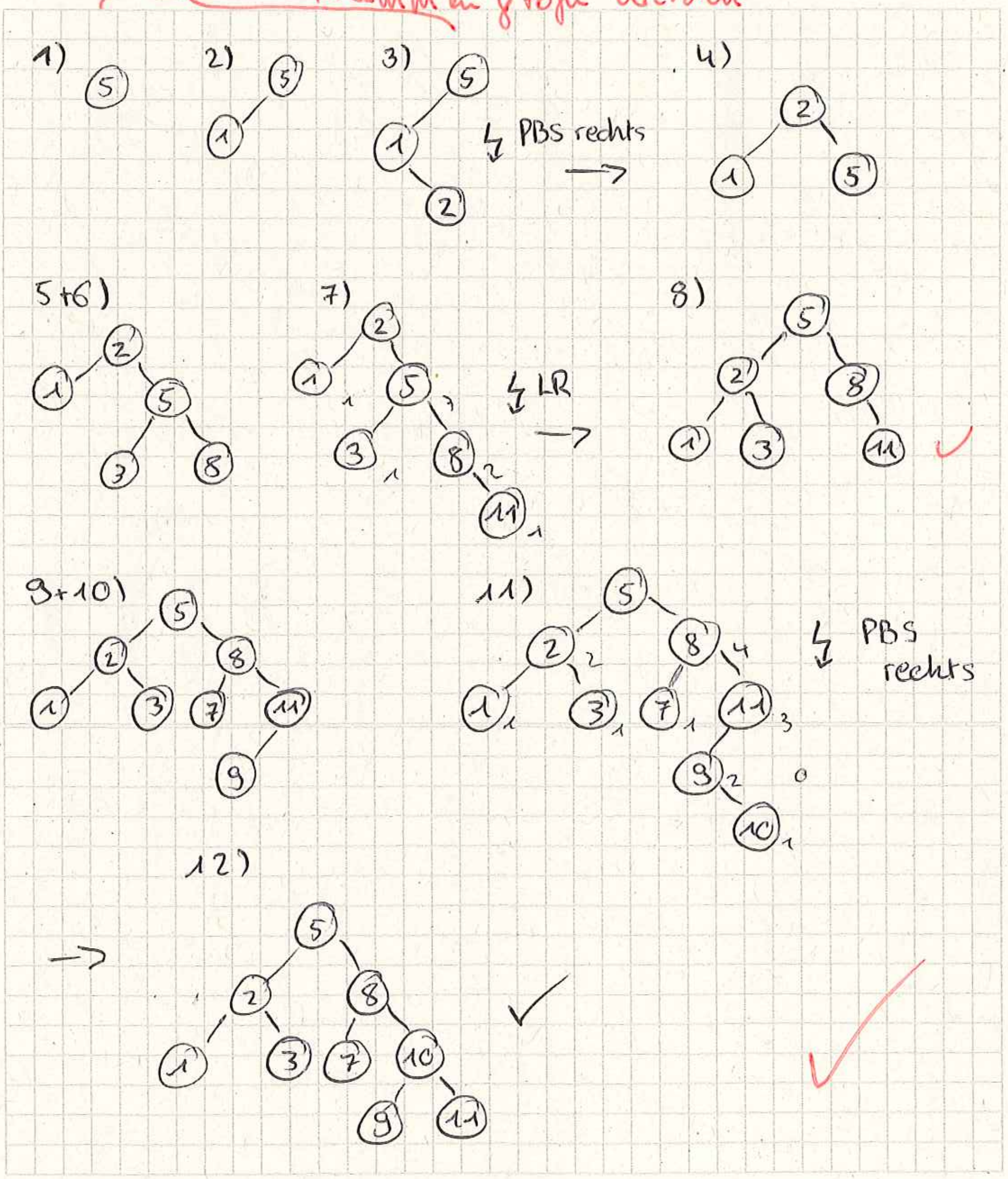


Fortsetzung der Aufgabe IX:

3. Konstruieren sie de AVL-Baum für die Ordnung $\leq$ auf Zahlen in dieser Reihenfolge:

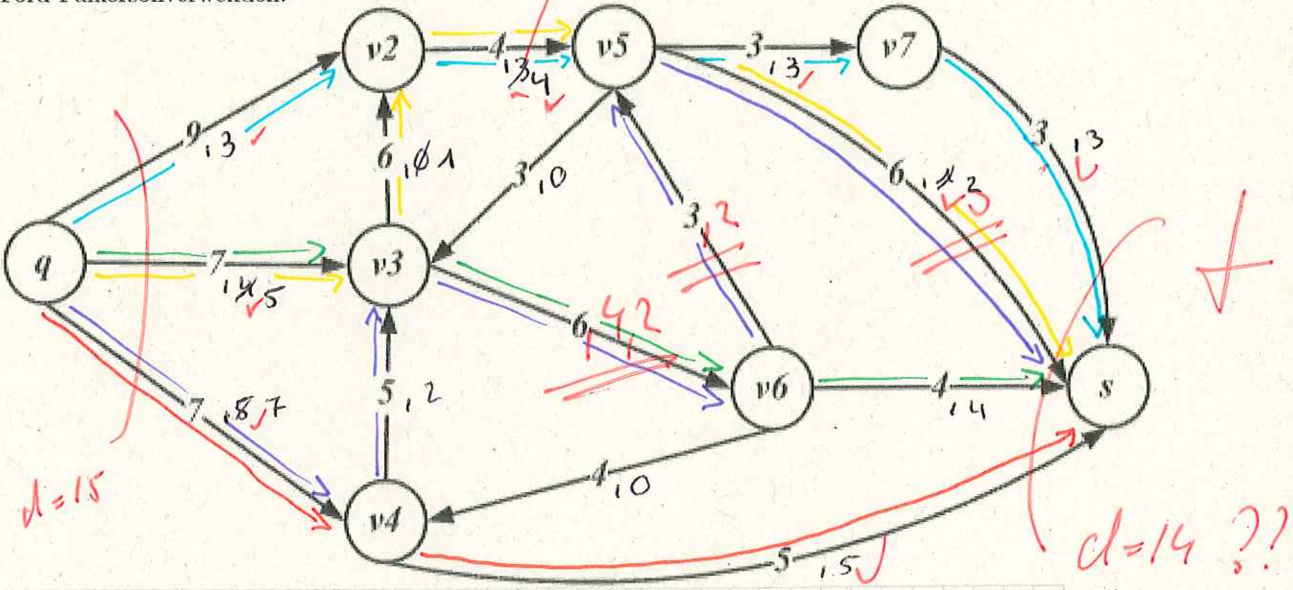
$$5, 1, 2, 3, 8, 11, 7, 9, 10$$

dürfen zusammen gezogen werden



bitte nicht unleserlich machen

Aufgabe X:
Finden Sie zu dem nachfolgenden Netzwerk N den maximalen Fluss f, indem Sie den Algorithmus von Ford-Fulkersonverwenden:



Knoten	q	v4	s
Kennung	(⊥, ∞)	(+q, 7)	(+v4, 5)

Knoten	q	v2	v5	v7	s
Kennung	(⊥, ∞)	(+q, 9)	(+v2, 4)	(+v5, 3)	(+v7, 3)

Knoten	q	v3	v6	s
Kennung	(⊥, ∞)	(+q, 7)	(+v3, 6)	(+v6, 4)

Knoten	q	v3	v2	v5	s
Kennung	(⊥, ∞)	(+q, 1)	(+v3, 1)	(+v2, 1)	(+v5, 1)

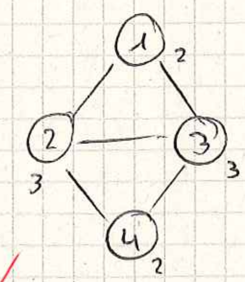
Knoten	q	v4	v3	v6	v5	s
Kennung	(⊥, ∞)	(+q, 2)	(+v4, 2)	(+v3, 2)	(+v6, 2)	(+v5, 2)

Terminierung fehlt und Ergebnis
und der letzte Weg ist falsch

Aufgabe XI:

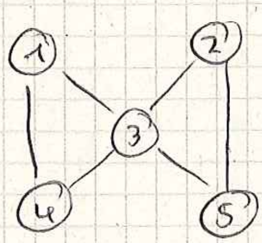
1. Geben Sie bitte mit Begründung einen zusammenhängenden Graphen an, der einen Hamiltonkreis, aber keinen Eulerkreis enthält.

- Hamiltonhülle:
  1 - 2 - 4 - 3 - 1
- kein Eulerkreis, da Knoten 2 und 3 jeweils Grad 3 haben (ungerade)

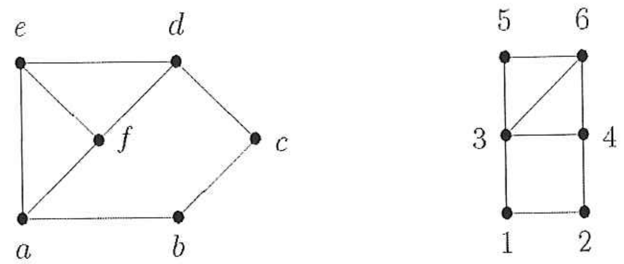


2. Geben Sie bitte mit Begründung einen zusammenhängenden Graphen an, der einen Eulerkreis, aber keinen Hamiltonkreis enthält.

- Eulerkreis, da Grad jedes Knoten gerade
- kein Hamiltonkreis, da in jedem Fall der Knoten 3 doppelt besucht wird.



Aufgabe I:
Sind die beiden folgenden Graphen isomorph? Geben Sie entweder einen Isomorphismus an, oder begründen Sie, warum keiner existiert.

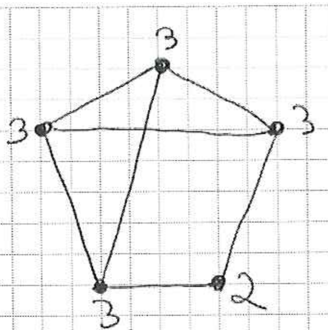


Nein.

Knoten 3 im 2. Graph hat den Knotengrad 4, der im 1. nicht vorkommt.

Aufgabe II:
Existiert ein schlichter Graph mit fünf Knoten und den folgenden Knotengraden?
Wenn ja, wie groß ist die Anzahl der Kanten?
Falls möglich, zeichnen Sie einen Graphen mit den gegebenen Eigenschaften.

1. 3, 3, 3, 3, 2:
Begründung:



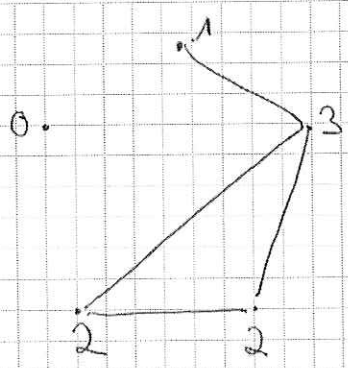
7 Kanten

2. 1, 2, 3, 4, 4:
Begründung:

Ein schlichter Graph hat keine Schlingen oder Mehrfachkanten. Um einen Knotengrad von 4 zu haben, müsste ein Knoten daher Kanten zu 4 anderen Knoten haben, was bei insgesamt 5 Knoten alle anderen sind. Bei 2 Knoten mit Knotengrad 4 kann es daher keinen Knoten mit Knotengrad 1 geben.

Fortsetzung der Aufgabe II:

3. $0, 1, 2, 2, 3$:
   Begründung:



4 Kanten

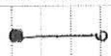
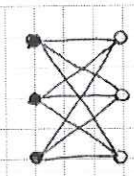
4. $1, 2, 3, 4, 5$:
   Begründung:

Ein schlichter Graph kann keinen Knoten mit einem Knotengrad haben, der größer als die Anzahl der Knoten − 1 ist, da ein Knoten maximal mit allen anderen eine Kante haben kann.
Der Knotengrad 5 ist daher hier nicht möglich.

Außerdem müsste die Summe der Knotengrade gerade sein.

(1) Behauptung bitte angeben

Aufgabe III:
Bitte bestimmen Sie die Anzahl von Kanten in vollständigen, bipartiten Graphen $K_{n,n}$.
Geben Sie $K_{1,1}$, $K_{2,2}$ und $K_{3,3}$ an.
Beweisen Sie bitte diesen Zusammenhang.

$K_{1,1}$  $K_{2,2}$  $K_{3,3}$ 

$|E_{1,1}| = 1$ $\quad |E_{2,2}| = 4$ $\quad |E_{3,3}| = 9$ ✓

(1) →

IA: Für $K_{1,1}$ ist $|E_{1,1}| = 1$.

IB: Für $K_{n,n}$ ~~ist~~ sei $|E_{n,n}| = n^2$. für ein bel.! n

IS: z.z.: Für $K_{n+1,n+1}$ ist $|E_{n+1,n+1}| = (n+1)^2$.

thm1 Folie 40 ✓

bipartit: Knotenmenge V lässt sich derart in zwei disjunkte Teilmengen zerlegen ($V = X \cup Y$; $X \cap Y = \emptyset$), dass jede Kante genau einen Endknoten in X und einen in Y besitzt

n+1: ein Knoten mehr in X, einer in Y

vollständig: Kanten zu allen bisherigen K. in der jeweils anderen Kantenmenge (n viele)

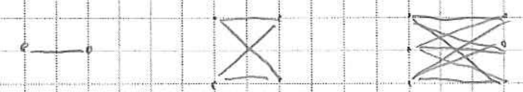
+ Kante zwischen neuen Knoten

$$\begin{aligned} |E_{n+1,n+1}| &= |E_{n,n}| + n + n + 1 \\ &\overset{IB}{=} n^2 + n + n + 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &\overset{bin. Formel}{=} (n+1)^2 \end{aligned}$$ ✓

Aufgabe III:
Bitte bestimmen Sie die Anzahl von Kanten in vollständigen, bipartiten Graphen $K_{n,n}$.
Geben Sie $K_{1,1}$, $K_{2,2}$ und $K_{3,3}$ an.
Beweisen Sie bitte diesen Zusammenhang.

Anzahl von Kanten von $K_{n,n}$ ist ~~2·n~~ n^2 ✓

$K_{1,1}$ $K_{2,2}$ $K_{3,3}$



✓

~~Vollständige Induktion~~

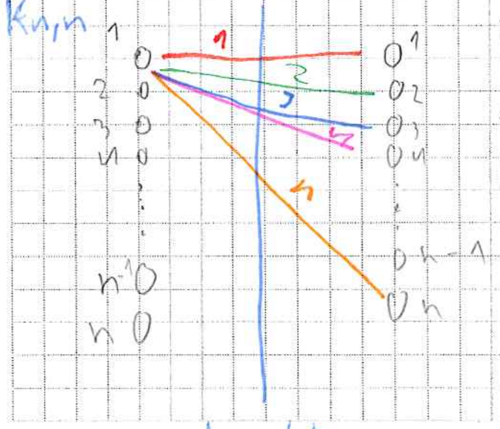
~~IA: Für $G=(V,E)$ mit $|V|=2n$~~

Direkter Beweis:

~~Jeder Graphen $G=(V,E)$ der vollständig und bipartit ist~~

~~hat eine ist die~~

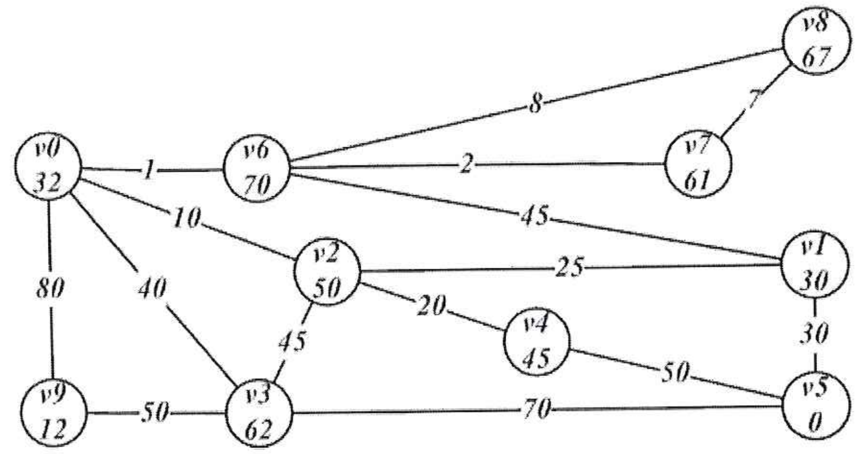
Der bipartite, vollständige Graph $K_{n,n}$ mit n ~~Kanten~~ Knoten hat n^2 Kanten, dies ergibt sich durch die Verbindung von ~~N~~ n Knoten der eine Seite der Teilung mit (✓) den n Knoten der anderen Seiten. disjunkt



Wie in der Zeichnung zu erkennen ist ~~ist bereits~~ ein Knoten mit n Knoten verbunden. Somit hat der Graph $K_{1,n}$ eine Anzahl von n Kanten. Dies führen wir für alle n Knoten durch, woraus man $n_1+n_2+n_3 ... +n_n$ Additionen hat. Wir addieren n-mal n wodurch sich $n \cdot n$ ergibt und n^2.

ok

Aufgabe IV:
Gegeben sei



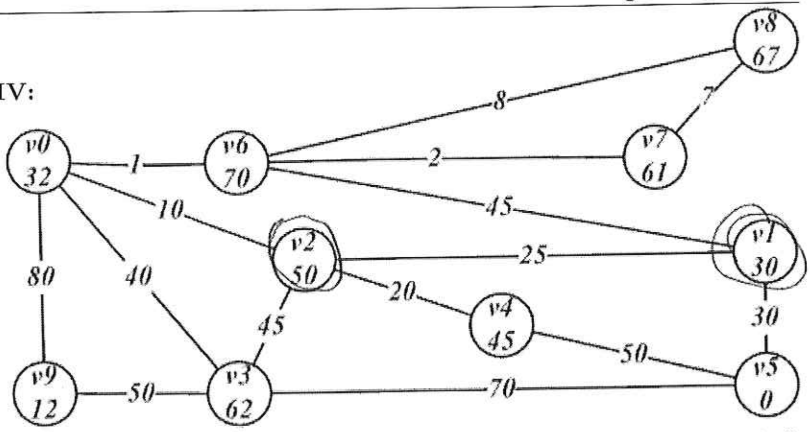
1. Berechnen Sie bitte mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus den kürzesten Weg von $v0$ nach $v5$. Die Heuristik ignorieren Sie bitte.

	v0	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
Entf	0	~~46~~ 35	10	40	30	~~88~~ 65	1	3	9	80
Vorg	v0	~~v6~~ v2	v0	v0	v2	~~v4~~ v1	v0	v6	v6	v0
OK	t	t	t	t	t	t	t	t	t	

kürzester Weg: v0 – v2 – v1 – v5 (65)

Fortsetzung der Aufgabe IV:

2.



Berechnen Sie bitte mit Hilfe des A*-Algorithmus den kürzesten Weg von $v0$ nach $v5$. Die Heuristik ist fest und im Knoten angegeben.

	v0	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
Vorg	v0	v2	v0	v0	v2	v1	v0			v0
h	32	30	50	62	45	0	70			12
g	0	35	10	40	30	65	1			80
f	32	65	60	102	75	65	71			92
a	t	t	t			t				

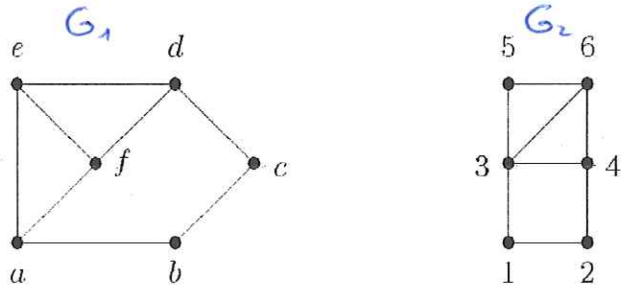
kürzester Weg: v0 – v2 – v1 – v5 (65)

3. Was stellen Sie im Vergleich fest?

Bei A* muss man weniger Wege verfolgen

Musterlösung

Aufgabe I:
Sind die beiden folgenden Graphen isomorph? Geben Sie entweder einen Isomorphismus an, oder begründen Sie, warum keiner existiert.



~~Anzahl Knoten~~	G_1	G_2
Anzahl Knoten	6	6
Anzahl Kanten zu Knoten	a = 3	1 = 2
	b = 2	2 = 2
	c = 2	3 = 4
	d = 3	4 = 3
	e = 3	5 = 2
	f = 3	6 = 3

(✓)

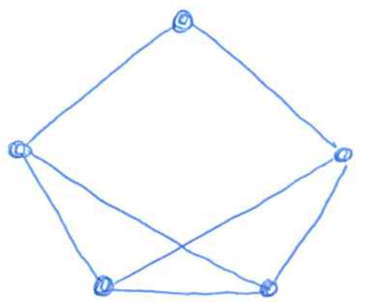
Die Graphen sind nicht isomorph, da nicht alle Knoten auf den jeweils anderen Graphen übertragen werden können.

Welches ist das Problem?

Musterlösung

Aufgabe II:
Existiert ein schlichter Graph mit fünf Knoten und den folgenden Knotengraden?
Wenn ja, wie groß ist die Anzahl der Kanten?
Falls möglich, zeichnen Sie einen Graphen mit den gegebenen Eigenschaften.

1. 3, 3, 3, 3, 2:
   Begründung:



$|E| = 7$

✓

2. 1, 2, 3, 4, 4:
   Begründung:

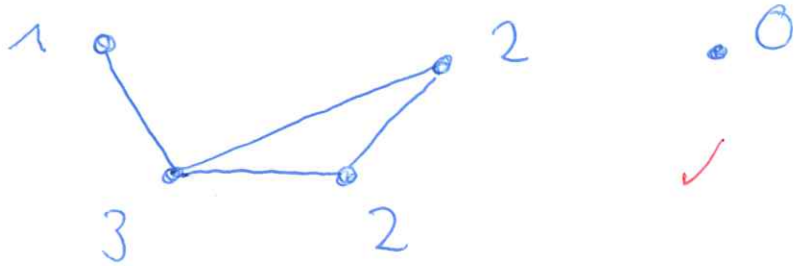
In diesem Fall kann kein Knoten mit Grad < 2 geben. Es existiere also 2 Knoten mit Knotengrad 4. Also sollte jeder Knoten mind. 2 Kanten haben die auf ihm treffen

✓

Musterlösung

Fortsetzung der Aufgabe II:

3. 0, 1, 2, 2, 3:
   Begründung:



4. 1, 2, 3, 4, 5:
   Begründung:

Nicht möglich.

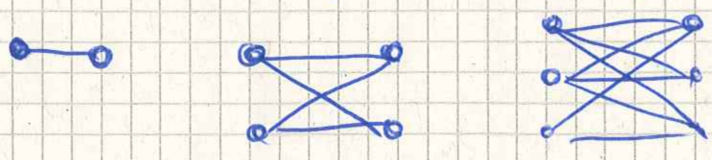
Summe der ~~Grade~~ Knotengrade ist ungerade.

$\sum d(v) = 2|E|$

Muster Lösung

Aufgabe III:
Bitte bestimmen Sie die Anzahl von Kanten in vollständigen, bipartiten Graphen $K_{n,n}$.
Geben Sie $K_{1,1}$, $K_{2,2}$ und $K_{3,3}$ an.
Beweisen Sie bitte diesen Zusammenhang.

$K_{1,1}$ $K_{2,2}$ $K_{3,3}$



1 4 9

Behauptung fehlt

IA $K_{n,n}$ mit $n=1$ hat n^2 Kanten $\Rightarrow$ true
$K_{1,1}$ hat 1^2 Kanten

IB $K_{n,n}$ ~~hat~~ habe n^2 Kanten für ein bel! $n \in \mathbb{N}$

IS $n \to n+1$: $K_{n+1,n+1}$ hat $(n+1)^2$ Kanten

$\Leftrightarrow$ hat $n^2 + 2n + 1$ Kanten

IB

$\Leftrightarrow$ $K_{n+1,n+1}$ hat $K_{n,n}$ + 2n+1 Kanten

qed.

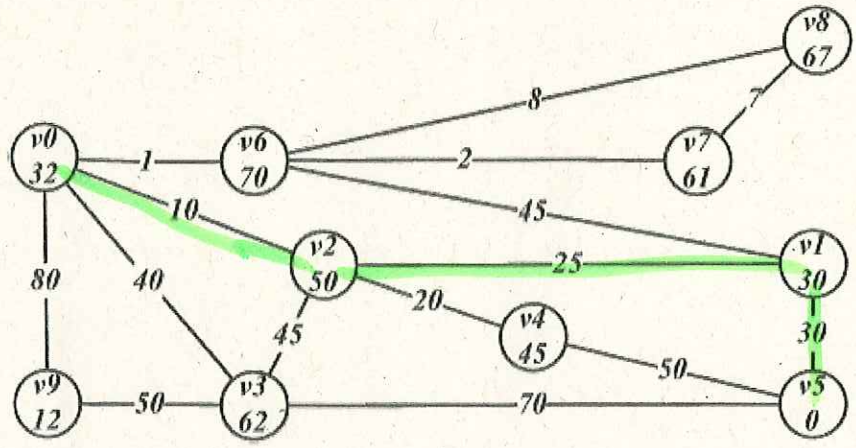
falsche Richtung

(✓)

wieso

Musterlösung

Aufgabe IV:
Gegeben sei



1. Berechnen Sie bitte mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus den kürzesten Weg von $v0$ nach $v5$. Die Heuristik ignorieren Sie bitte.

	v0	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
Entf.	0	~~46~~ 35	10	40	30	~~80~~ 65	1	3	9	80
Vorg.	v0	~~v6~~ v2	v0	v0	v2	~~v4~~ v1	v0	v6	v6	v0
OK	t	t	t	t	t	t	t	t	t	

65

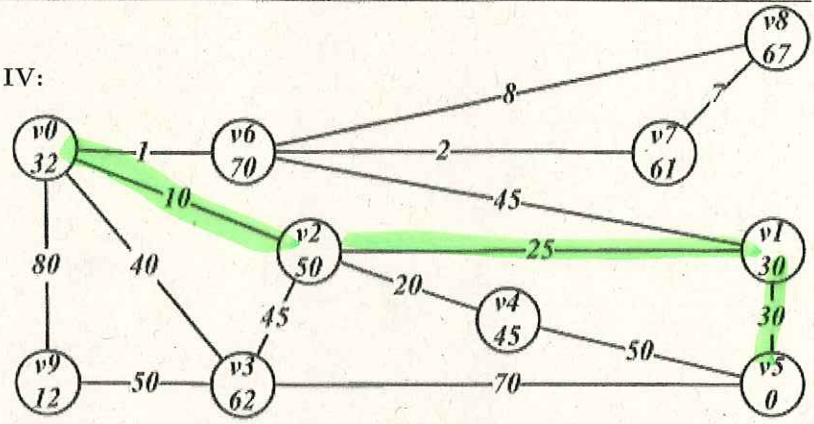
Kosten: 65

KW = V0 – V2 – V1 – V5

Musterlösung

Fortsetzung der Aufgabe IV:

2.



65

Berechnen Sie bitte mit Hilfe des A*-Algorithmus den kürzesten Weg von $v0$ nach $v5$. Die Heuristik ist fest und im Knoten angegeben.

	v0	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
Vorg	v0	v2	v0	v0	v2	v1	v0			
h	32	~~50~~ 30	80	62	45	0	70	61	67	12
g	0	35	10	40	30	65				
f	32	65	60	102	75	65	71			
CL	t	t	t			t				

Kosten: 65

Weg: V0 – V2 – V1 – V5

3. Was stellen Sie im Vergleich fest?

A* braucht weniger Durchläufe