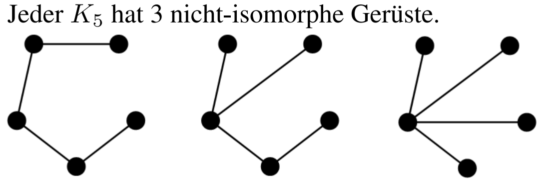
Aufgabe 1:
Bitte entscheiden Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist, jeweils
und begründen Sie Ihre Behauptung, jeweils

1. Jeder Graph ist planar, bipartit oder eulersch. [ ] wahr oder [X] falsch
   K_6 ist
   nicht planar, da er K_5 enthält,
   nicht bipartit, da jeder Knoten mit jedem verbunden ist, und
   nicht eulersch, da der Knotengrad für alle Knoten 5, und somit ungerade ist.

2. Jeder K_5 hat 3 nicht-isomorphe Gerüste. [X] wahr oder [ ] falsch
   

3. Die Addition zweier Adjazenzmatrizen derselben Dimension beschreibt die disjunkte Vereinigung der Kanten bei Graphen mit gleicher Knotenanzahl. [X] wahr oder [ ] falsch
   Der Eintrag a_{ij} einer Adjazenzmatrix A gibt die Anzahl der Kanten zwischen den Knoten v_i und v_j. Also führt die Addition zweier Adjazenzmatrizen A und B dazu, dass $(a+b)_{ij}$, dass die Anzahl der Kanten zwischen zwei Konten aufaddiert wird, also werden die Kanten disjunkt vereinigt.

Aufgabe 2: Sei G ein schlichter, zusammenhängender und ungerichteter Graph. Zeigen Sie bitte die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. G ist bipartit.
2. $\chi(G) \leq 2$.
3. G enthält keine Kreise ungerader Länge.

Ringschluss:

1. $\Longrightarrow$ 2. Direkter Beweis:
Sei $G = (V, E)$ bipartit, dann gibt es eine Partition der Knoten $X, Y \subset V$, so dass $X \cap Y = \emptyset$ und $V = X \cup Y$ und $E \subset \{\{x, y\} | x \in X; y \in Y\}$. Dann sei X nicht leer (für analog Y nicht leer). Dann gibt es eine Färbung $f : V \to \{1, 2\}$ mit $f(k) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } k \in X \\ 2 & \text{, falls } k \in Y \end{cases}$, denn zwischen den Knoten in X gibt es keine Kanten und zwischen denen in Y auch nicht. Dann ist $\chi(G) \leq 2$.

2. $\Longrightarrow$ 3. Indirekter Beweis:
Sei $v_0, v_1, ...v_{2n}$ ein Kreis mit ungerader Länge in G, dann gibt es keine Färbung $f : V \to \{1, 2\}$, denn beginnend mit v_0 werden die Knoten abwechselnd gefärbt, dann ist aber $f(v_0) = f(v_{2n})$, also muss $f(v_{2n}) = 3$ sein, also ist $\chi(G) \not\leq 2$.

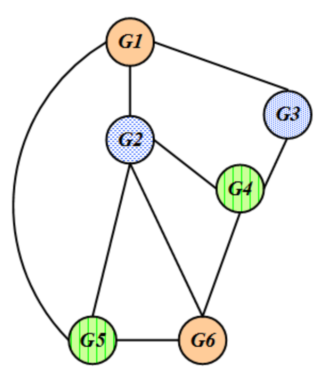
3. $\Longrightarrow$ **1.** Direkter Beweis:
Dann kann man für einen der Spannbäume eine Partition ist rekursiv angeben für $w \in G$ einem beliebigen Knoten in G:

- $w \in X$
- $v \in X$, dann sind seine Söhne $v_i \in Y$
- $v \in Y$, dann sind seine Söhne $v_i \in X$

wegen der rekursiven Definition gilt $X \cup Y = V X \cap Y = \emptyset$. Weil kein Sohn mehr als eine Vater haben kann, gibt es nur Kanten zwischen X und Y und es gilt $X \cap Y = \emptyset$.
Dann gibt es zwei Fälle:

1. Der Graph ist kreisfrei, es gibt keine weiteren Kanten: also ist G bipartit.
2. G hat nur gerade Kreise:
   Dann sind die restlichen Kanten sind dann nur zwischen Knoten aus X und Y, da es sonst ungerade Kreise gibt mit dem Weg $v_1, ..., v_n$ in dem Spannbaum, der also eine ungerade Anzahl von Knoten hat und der neue Kante $\{v_1, v_n\}$. Also ist G bipartit.

Aufgabe 3: Angenommen, das Department Informatik hat sechs Gremien, die in diesem Semester alle noch einmal tagen sollen.
Wie viele verschiedene Sitzungstermine sind notwendig, damit kein Gremienmitglied zur gleichen Zeit zwei Verpflichtungen hat?
Die Gremien sind:
G1 : Luck, Padberg, Buth, Meisel, Korf ;
G2 : Buth, Zukunft, Sarstedt, Neitzke;
G3 : Padberg, Luck, Klauck;
G4 : Zukunft, Klauck, Dai, Wendholt;
G5 : Neitzke, Sarstedt, Korf;
G6 : Sarstedt, Dai, Hübner;
Modellieren Sie die Problemstellung mit einem Graphen, und verwenden Sie die Knotenfärbung zur Lösung. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.
Zur Modellierung der Problemstellung wird ein Konfliktgraph G mit 6 Knoten verwendet, so dass jeder Knoten einem Gremium entspricht. Zwei Knoten werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die beiden entsprechenden Gremien mindestens ein gemeinsames Mitglied haben, das auf der Kante eingetragen wird. Gremien, die benachbarten Ecken entsprechen, dürfen also nicht zur gleichen Zeit tagen. Die verschiedenen Sitzungstermine werden durch unterschiedliche Farben dargestellt. Dann ist die chromatische Zahl des Graphen $\chi(G)$ gleich der kleinstmöglichen Anzahl an Terminen.



In diesem Fall ist $\chi(G) = 3$. Es werden also 3 Sitzungstermine notwendig.

Aufgabe 4: Beweisen Sie bitte folgende Behauptung:
$G = (V, E)$ ist vollständig gdw $\chi(G) = |V|$

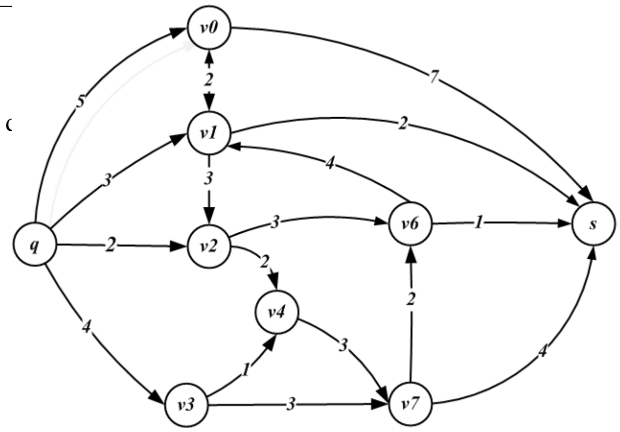
1. Wenn G vollständig, dann ist $\chi(G) = |V|$.
   Indirekter Beweis:
   Sei $\chi(G) < |V|$ mit einer kleinsten Färbung $f : V \to \{1, ..., \chi(G)\}$, dann gibt es mindestens zwei Knoten x und y mit mit $f(x) = f(y)$. Also gibt es keine Kante von x nach y, also ist G nicht vollständig.

2. $\chi(G) = |V|$, dann ist G vollständig.
   Indirekter Beweis:
   Sei G nicht vollständig, dann existieren mindestens zwei Knoten x und y, so dass keine Kante die Knoten verbindet, also können die zunächst gleich eingefärbt werden, dann werden alle anderen Knoten eingefärbt, also gibt es eine Färbung mit $f : V \to \{1, ..., |V| - 1\}$, also ist $\chi(G) \leq |V| - 1 < |V|$, also $\chi(G) \neq |V|$.

Aufgabe 5: Beweisen Sie bitte folgende Behauptung:
Sei $G = (V, E)$ ein Graph, in dem für jedes Paar Knoten $\{x, y \in V | x \neq y\}$ gilt, dass $\chi(G[V \setminus \{x, y\}) = \chi(G) - 2$, dann ist G ist vollständig.
Indirekter Beweis:
Sei G nicht vollständig, dann gibt es nicht inzidente Knoten x und y und eine kleinste Färbung $f : V \to \{1, ..., \chi(G)\}$

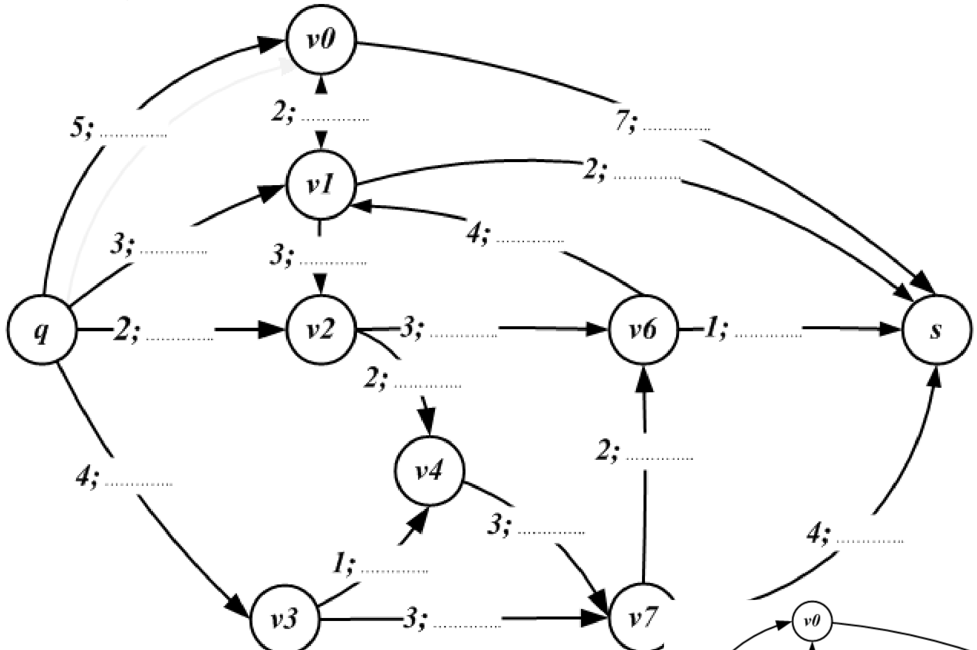
1. $f(x) = f(y)$, dann fällt höchstens eine Farbe für $G[V \setminus \{x, y\}]$ weg. Also benötigt $G[V \setminus \{x, y\}]$ mindestens $\chi(G) - 1$ Farben, also $\chi(G[V \setminus \{x, y\}]) \geq \chi(G) - 1 > \chi(G) - 2$.

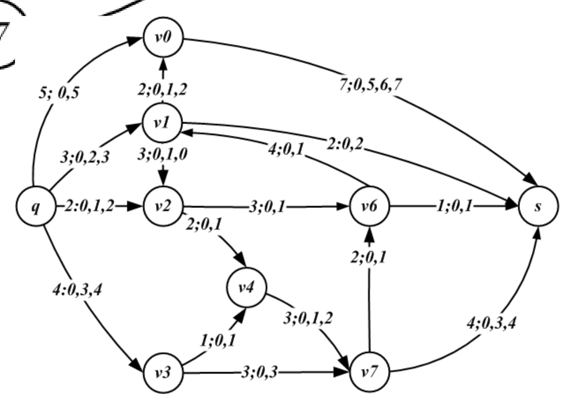
2. $f(x) \neq f(y)$, dann gibt es wenigstens einen anderen Knoten v mit $f(v) = f(x)$ (oder $f(v) = f(y)$), da G nicht vollständig ist. Also fällt auch höchstens eine Farbe für $G[V \setminus \{x, y\}]$ weg. Also benötigt $G[V \setminus \{x, y\}]$ mindestens $\chi(G) - 1$ Farben, also $\chi(G[V \setminus x, y) \geq \chi(G) - 1 > \chi(G) - 2$.



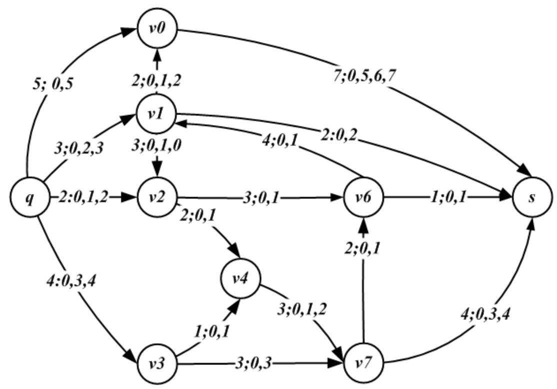
Aufgabe 6: Berechnen Sie bitte den optimalen Fluss in c
mit Hilfe des Algorithmus von Ford-Fulkerson:

Sie dürfen gerne dies Netzwerk dafür nutzen.





gekenn. Knoten	q	$v0$	s		
Kennzeichnung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 5)$	$(+v0, 5)$		
gekenn. Knoten	q	$v3$	$v7$	s	
Kennzeichnung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 4)$	$(+v3, 3)$	$(+v7, 3)$	
gekenn. Knoten	q	$v1$	s		
Kennzeichnung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 3)$	$(+v1, 2)$		
gekenn. Knoten	q	$v1$	$v2$	$v6$	s
Kennzeichnung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 1)$	$(+v1, 1)$	$(+v2, 1)$	$(+v6, 1)$
gekenn. Knoten	q	$v2$	$v4$	$v7$	s
Kennzeichnung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 1)$	$(+v2, 1)$	$(+v4, 1)$	$(+v7, 1)$



gekenn. Knoten	q	$v2$	$v1$	$v0$	s
Kennzeichnung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 1)$	$(-v2, 1)$	$(+v1, 1)$	$(+v0, 1)$

gekenn. Knoten	q	$v3$	$v4$	$v7$	$v6$	$v1$	$v0$	s
Kennzeichnung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 1)$	$(+v3, 1)$	$(+v4, 1)$	$(+v7, 1)$	$(+v6, 1)$	$(+v1, 1)$	$(+v0, 1)$

Dann gibt es keine vergrößernde Wege mehr, also ist der maximale Fluss $d = 14$.

Aufgabe 7: Beweisen Sie bitte, dass für einen ungerichteten, schlichten Graphen G mit Maximalgrad $\Delta(G)$ die chromatische Zahl $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ ist.
Tip: Induktion! Vollständige Induktion über die Knotenzahl n und für alle Graphen mit Maximalgrad $\Delta(G)$.

IA $n = 1$. Maximalgrad ist 0 und wir färben mit einer Farbe, also $\chi(G) = 1 = 0 + 1 = \Delta(G) + 1$

IB Für alle Graphen mit n Knoten gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

IS Sei G ein Graph mit $n + 1$ Knoten und Maximalgrad $\Delta(G)$.

> Wir entfernen aus G einen beliebigen Knoten v zusammen mit den höchstens $\Delta(G)$ inzidenten Kanten. Der Restgraph sei $G' = G \setminus v$:
>
> Der Maximalgrad von G' ist höchstens so groß wie der von G, also $\Delta(G') \leq \Delta(G)$, und kann nach Induktionsvoraussetzung mit $\Delta(G') + 1$ Farben gefärbt werden. Dabei benutzen die ursprünglichen Nachbarn von v höchstens $\Delta(G')$ Farben.
> Jetzt können wir v mit einer der verbliebenen Farben färben und zusammen mit den entfernten Kanten wieder in den Graphen G' einfügen.
> Das ist dann eine korrekte Färbung von G mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben, dann muss die kleinste Färbung auch kleiner sein, also $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Bemerkung zu Aufgabe 7: Ohne Induktion schwierig!! Gegeben sei ein ungerichteter, schlichten Graph G mit einem Knoten v mit Maximalgrad $d(v) = \Delta(G)$. Dann dann können die Nachbarn von v höchstens $\Delta(G)$ Farben benötigen, nämlich jeder eine. wenn zusätzlich alle Nachbarn miteinander verbunden sind, benötigt der Knoten v eine zusätzliche Farbe. Also gilt für $G[N_c(v)]$, den Untergraphen, der aus der Nachbarschaft von v besteht, dass $\chi(G[N_c(v)] \leq \Delta(G) + 1$.
Aber wie komme ich jetzt zu$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$???