Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen
Übungsaufgabe **2**

SoSe 19

Deckblatt

Besprechung am 26.6.2019

J. Padberg

HINWEISE zur Bearbeitung des Blattes:

- Bearbeiten Sie bitte das Blatt zu zweit.
- Geben Sie bitte Ihren Name und Ihr Team an:

Team	
Name	
Name	

- Bitte geben Sie Ihre Lösungen lesbar auf den ausgedruckten Hausaufgaben an.
- Heften Sie bitte die Blätter zusammen!!

Aufgabe I:
Gegeben sei das folgende Spielbrett, bestehend aus 12 Kästchen, die Zahlen enthalten. Ein Spielzug besteht darin, eine Spielfigur senkrecht oder waagerecht um ein Kästchen zu verschieben. Dabei fallen Kosten von $|x-y|$ an, wenn das Ausgangskästchen x und das Zielkästchen y enthält. Die Kosten mehrerer Spielzüge werden aufaddiert.

6	7	12	11
5	4	6	10
8	15	9	2

Ziel des Spieles ist mit möglich wenig Gesamtkosten von der linken, oberen Ecke in die rechte, untere Ecke des Spielfelds zu gelangen.

- Erläutern Sie bitte, wie Sie mit Hilfe der Graphentheorie dieses Problem lösen können:

- und berechnen Sie dann bitte die Lösung:

Aufgabe II:
Geben Sie bitte ein Graphgrammatik an, die Kreise erzeugt, die minimal gefärbt sind und erläutern Sie bitte Ihre Lösung.

Aufgabe III:
Das Komplement $\overline{G}$ eines Graphen $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$ ist gegeben durch $G = (V, (V \times V) \setminus E)$.
Es gilt:
Wenn G nicht zusammenhängend ist, dann ist $\overline{G}$ zusammenhängend.

1. Geben Sie bitte zwei Beispiele für diesen Zusammenhang.

2. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung nicht gilt.

Fortsetzung der Aufgabe III:

3. Begründen Sie bitte die Aussage:

4. Beweisen Sie bitte die Aussage:

Aufgabe IV:
Eine Pipeline schickt Öl von A nach B. Das Öl kann über eine nördliche Route und über eine südliche Route gehen. Jede Route hat eine Zwischenstation mit einer Pipeline von Süden nach Norden. Die erste Hälfte der nördlichen Route (bis zur Station) hat eine Kapazität von 400 Barrel pro Stunde, die zweite Hälfte 500 Barrell/Stunde. Für die südliche Route sind die Kapazitäten 500 und 200, und für die Pipeline von Süden nach Norden 300 Barrel.
Wieviele Barrel können maximal in der Stunde von A nach B transportiert werden? Geben Sie bitte den zugehörigen Graphen an und berechnen Sie den maximalen Durchfluss mit Hilfe einer der in der Vorlesung behandelten Algorithmen.

Aufgabe V:
Eine Kante e eines Graphen G heißt Brücke, wenn sich die Zahl der Zusammenhangskomponenten von G durch Entfernen von e um eins erhöht. Es gilt folgender Satz:
Eine Kante ist genau dann eine Brücke, wenn sie in keinem Kreis enthalten ist.

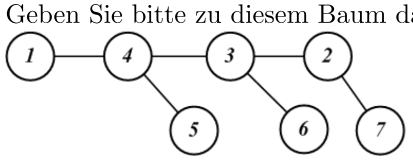
1. Geben Sie bitte ein Beispiel und begründen Sie daran den Satz.

2. Beweisen Sie bitte den Satz.

Aufgabe VI:

1. Geben Sie bitte zu diesem Prüfer-Tupel $(2, 3, 3, 6)$ den dazugehörigen Baum an.

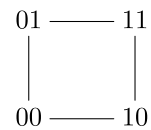
2. Geben Sie bitte zu diesem Baum das dazugehörige Prüfertupel an.



3. Erläutern Sie bitte die Bijektion zwischen Prüfertupeln und den entsprechenden Bäumen.

Aufgabe VII:
Der n-dimensionaler Hypercube $H(n) = (V, E)$ ist wie folgt definiert:

- V ist die Menge der Bitstrings der Länge n.
- Für zwei Bitstrings $p, q \in V$ gilt $\{p, q\} \in E$ genau dann, wenn p und q sich an genau einer Stelle unterscheiden



Die Zeichnung rechts zeigt den 2-dimensionalen Hypercube $H(2)$.

1. Zeichnen Sie den dreidimensionalen Hypercube $H(3)$ und geben Sie einen hamiltonschen Kreis für $H(3)$ an.

Fortsetzung der Aufgabe VII:

2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für $n \geq 2$ ist $H(n)$ hamiltonsch.

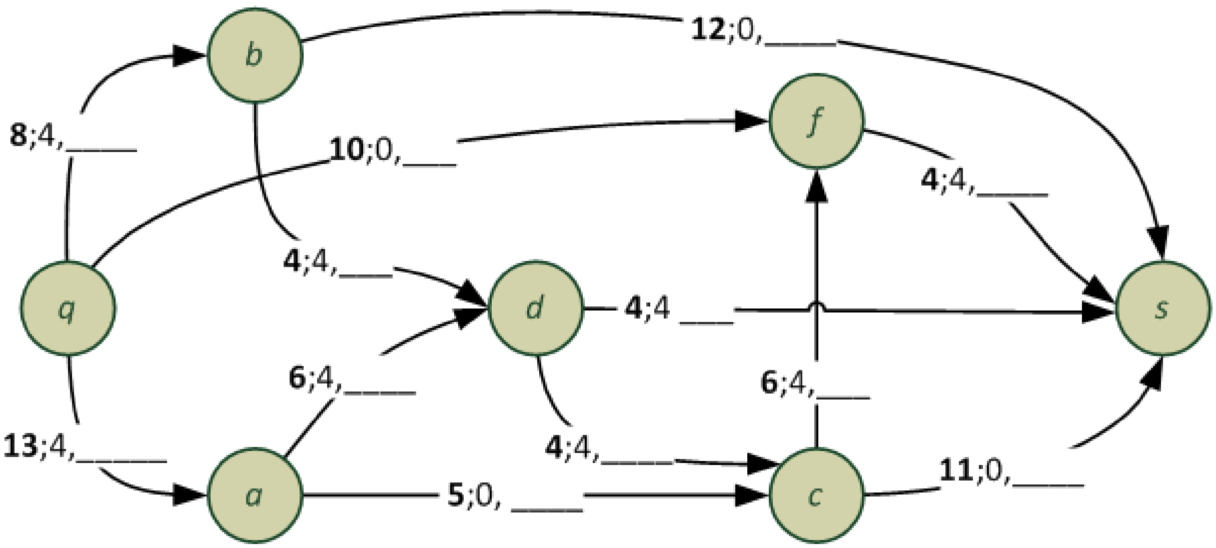
Aufgabe VIII:
Der Kantengraph $L(G) := (V', E')$ eines schlichten, ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist gegeben durch:

- $V' = E$, jede Kante von G ist ein Knoten in $L(G)$.
- $E' = \{\{e_1, e_2\} \,|\, s\_t(e_1) \cap s\_t(e_2) \neq \emptyset\}$, je zwei Knoten aus V' sind in $L(G)$ adjazent, wenn die zugehörigen Kanten aus E einen gemeinsamen inzidenten Knoten haben.

1. Bitte geben Sie $L(K_4)$ an.

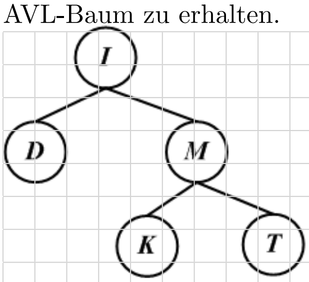
2. Zeigen Sie bitte, dass $L(G)$ eulersch ist, wenn G eulersch ist.

Aufgabe IX:
Gegeben dieses Netzwerk zusammen mit einem aktuellem Fluss, wobei die Kantenbeschriftung als ***Kapazität***;*aktueller Fluss* zu lesen ist. Bitte bestimmen Sie mit hilfe des Ford-Fulkerson den maximalen Fluss.



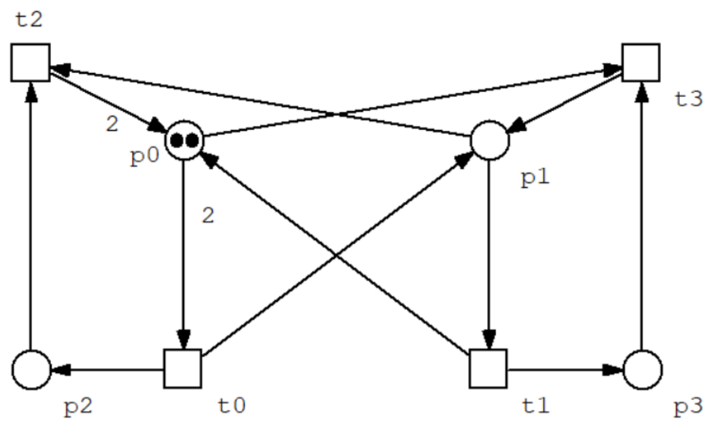
Aufgabe X:
Bitte beweisen Sie diesen Satz:
Ein vollständiger, bipartiter Graph K_{nm} mit $n, m > 1$ ist hamiltonsch, genau dann wenn $n = m$.

Aufgabe XI:
Gegeben dieser AVL-Baum geordnet durch Reihenfolge des Alphabets. Fügen Sie bitte diese Knoten in dieser Reihenfolge X, S, Z, N, V, P ein und geben Sie an, welche Operationen Sie benötigen um eine AVL-Baum zu erhalten.



Aufgabe XII:
Geben Sie bitte ein Graphgrammatik an, die Kreise erzeugt, die minimal gefärbt sind.

Aufgabe XIII:
Gegeben sei das Petrinetz N:



1. Welche Eigenschaften hat N?

2. Geben Sie bitte den Erreichbarkeitsgraphen an.