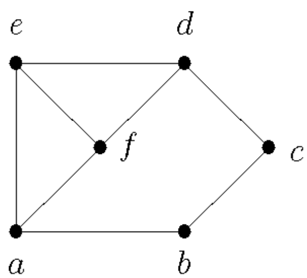
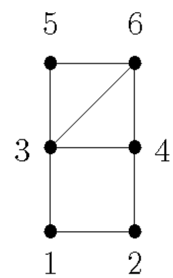
Hausaufgabe 1

WiSe 18/19

Aufgabe I:
Sind die beiden folgenden Graphen isomorph? Geben Sie entweder einen Isomorphismus an, oder begründen Sie, warum keiner existiert.

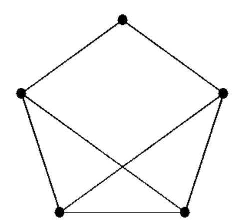




Die Graphen sind nicht isomorph. Eine Begründung ist zum Beispiel, dass im rechten Graphen der Knotengrad 4 vorkommt, der im linken Graphen nicht existiert.

Aufgabe II:
Existiert ein schlichter Graph mit fünf Knoten und den folgenden Knotengraden?
Wenn ja, wie groß ist die Anzahl der Kanten?
Falls möglich, zeichnen Sie einen Graphen mit den gegebenen Eigenschaften.

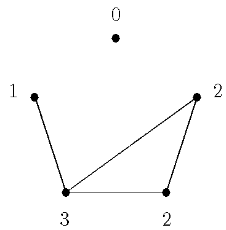
1. $3, 3, 3, 3, 2$:
   Begründung:

   Der folgende Graph ergibt sich eindeutig und die Anzahl der Kanten ist $|E| = 7$.

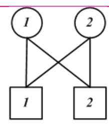
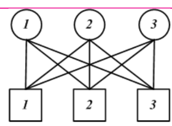
2. $1, 2, 3, 4, 4$:
   Begründung:
   Einen Graphen mit diesen Knotengraden gibt es nicht, denn der Knoten mit den Knotengrad 1 wird ausgezeichnet und die zugehörige Kante verbindet einen weiteren Knoten. Zwei der verbleibenden vier Knoten sollen den Knotengrad 4 haben, verbinde also drei Knoten, die bisher eine oder keine inzidente Kante haben. Dadurch wird der Knotengrad 1 verletzt.

3. $0, 1, 2, 2, 3$:
   Begründung:
   Der folgende Graph hat die geforderten Knotengrade. Die Anzahl der Kanten ist $|E| = 4$. Die Knotengrade sind an die Knoten geschrieben.



4. $1, 2, 3, 4, 5$:
   Begründung:
   Einen Graphen mit diesen Knotengraden gibt es nicht, da die Summe ungerade ist, was nicht möglich ist, denn die Summe der Knotengrade ist gerade:
   $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$.

Aufgabe III:
Bitte bestimmen Sie die Anzahl von Kanten in vollständigen, bipartiten Graphen $K_{n,n}$.
Geben Sie $K_{1,1}$, $K_{2,2}$ und $K_{3,3}$ an.
Beweisen Sie bitte diesen Zusammenhang.

n	$K_{n,n}$	$\|E_{n,n}\|$
1		1
2		4
3		9

Sei $K_{n,n} = (V_{n,n}, E_{n,n})$, dann ist $|E_{n,n}| = n^2$.
Induktion (was sonst) über $n \geq 1$:

IA $K_{1,1}$ hat eine Kante, also $|E_{1,1}| = 1 = 1^2$

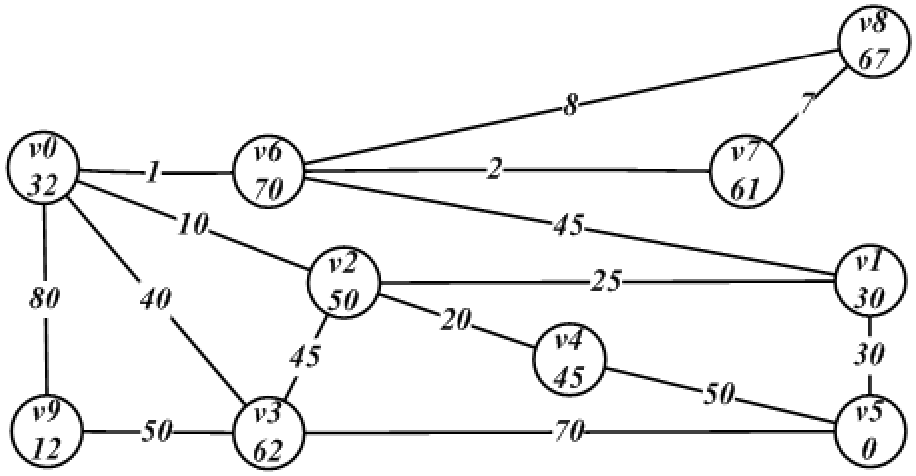
IB $K_{n,n}$ hat n^2 Kanten, wobei $V_{n,n} = X_n \uplus Y_n$.

IS **zz** $K_{n+1,n+1}$ hat $(n+1)^2$ Kanten.

$K_{n+1,n+1}$ hat zwei Knoten mehr als $K_{n,n}$, das seien x und y.

Dann gibt es neue Kanten von x zu allen Knoten in Y_n und von y zu allen in X_n und eine zwischen x und y.
Also gilt:
$|E_{n+1,n+1}| = |E_{n,n} \cup \{(x,v) \mid v \in Y_n\} \cup \{(v,y) \mid v \in X_n\} \cup \{(x,y)\}|$
$= |E_{n,n}| + |\{(x,v) \mid v \in Y_n\}| + |\{(v,y) \mid v \in X_n\}| + |\{(x,y)\}|$
$\underbrace{=}_{IB} n^2 + n + n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

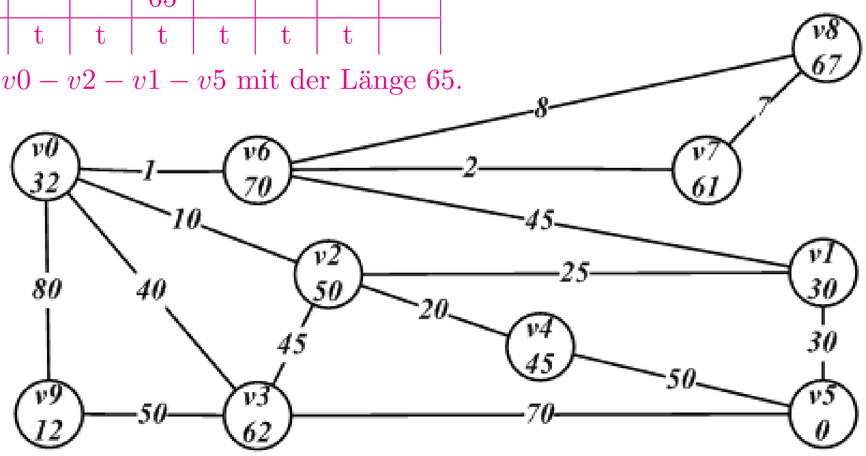
Aufgabe IV:
Gegeben sei



1. Berechnen Sie bitte mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus den kürzesten Weg von $v0$ nach $v5$. Die Heuristik ignorieren Sie bitte.

	v0	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
Vorg	v0	~~v6~~ v2	v0	v0	v2	~~v4~~ v1	v0	v6	v6	v0
Entf	0	~~46~~ 35	10	40	30	~~80~~ 65	1	3	9	80
Ok	t	t	t	t	t	t	t	t	t	

Der kürzeste Weg ist $v0 - v2 - v1 - v5$ mit der Länge 65.

2. 

Berechnen Sie bitte mit Hilfe des A*-Algorithmus den kürzesten Weg von $v0$ nach $v5$. Die Heuristik ist fest und im Knoten angegeben.

	v0	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
Vorg	v0	v2	v0	v0	v2	v1	v0			
h	32	30	50	62	45	0	70	61	67	12
g	0	35	10	40	30	65	1			
f	32	65	60	102	75	65	71			
CL	t	t	t			t				

Der kürzeste Weg ist $v0 - v2 - v1 - v5$ mit der Länge 65.

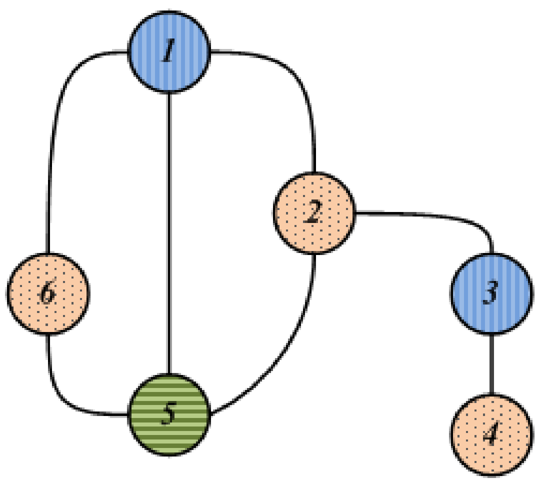
3. Was stellen Sie im Vergleich fest?

A^* braucht viel weniger Durchläufe, was man an den t in der jeweils letzten Zeile erkennt.

Aufgabe V:
In Nord-Amerika werden bestimmte Fernsehkanäle den Fernsehstationen so zugeteilt, daß niemals zwei Stationen, die weniger als 150 Meilen voneinander entfernt sind, denselben Kanal verwenden.
Wieviele verschiedene Kanäle werden dann für die sechs Stationen benötigt, deren Entfernungen voneinander in der folgenden Tabelle gegeben sind?

	1	2	3	4	5	6
1	-	85	175	200	50	100
2	85	-	125	175	100	160
3	175	125	-	100	200	250
4	200	175	100	-	210	220
5	50	100	200	210	-	100
6	100	160	250	220	100	-

Die Situation wird durch einem Konfliktgraphen K modelliert, wobei die Knoten den Fernsehstationen entsprechen. Die Kanten verbinden Knoten genau dann, wenn die betreffenden Fernsehstationen weniger als 150 Meilen voneinander entfernt sind, also auf unterschiedlichen Kanälen senden sollen.



Die chromatische Zahl $\chi(K) = 3$ liefert die Lösung. Also sind drei Kanäle ausreichend.

Aufgabe VI:
Bitte zeigen Sie, dass es für jeden Graphen eine Ordnung gibt, so dass der Greedy-Algorithmus optimal ist.
Sei $G = (V, E)$ beliebig mit $|V| = n$, dann gibt es eine Färbung $c : V \to \{1, ..., k\}$ mit $\chi(G) = k$. Sei $v_1 < v_2 < ... < v_n$ eine Ordnung mit $i < j \Longrightarrow c(v_i) \leq c(v_j)$. Dann liefert $<$ eine optimale Färbung.
Sei die bijektive Abbildung $gr : v \to \{1, ..., m\}$ das Ergebnis des Greedy-Algorithmus mit $gr(v_i) \stackrel{def}{=} min(\mathbb{N}^+ \setminus \{gr(v_j) \mid j < i \text{ und es gibt } e \in E \text{ mit } s_t(e) = \{v_i, v_j\}\})$. Dann gilt $gr(v) \leq c(v)$, also gilt $m = k$, also ist das Ergebnis optimal.

Widerspruchsbeweis von $gr(v) \leq c(v)$:
Sei v_i der erste Knoten mit $gr(v_i) > c(v_i)$, also für $j < i$ gelte $gr(v_j) \leq c(v_j)$. Dann gibt es wegen $gr(v_i) \stackrel{def}{=} min(\mathbb{N}^+ \setminus \{gr(v_j) \mid j < i \text{ und es gibt } e \in E \text{ mit } s_t(e) = \{v_i, v_j\}\})$ einen Nachbarknoten v_l mit $l < i$, so dass $c(v_i) = gr(v_l)$, da $gr(v_i) > c(v_i)$. Außerdem gilt $gr(v_l) \leq c(v_l)$, also $c(v_i) \leq c(v_l)$. Weil es $e \in E$ mit $s_t(e) = \{v_i, v_l\}$ gibt, ist $c(v_l) \neq c(v_i)$.
Also $l < i$ und $c(v_l) > c(v_i)$, Widerspruch gegen die Voraussetzung.

Aufgabe VII:
Ein Graph mit $\chi(G) = k$ heißt kritisch k-chromatisch, wenn er sich durch Entfernen einer beliebigen Kante der chromatische Index von G $\chi(G) = k$ verringert, also wenn gilt:

$$\chi(G \setminus e) = k - 1$$

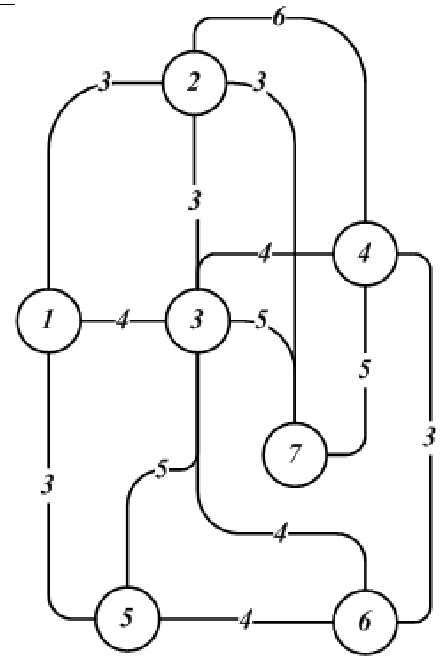
1. Geben Sie bitte für $k = 2, 3, ...$ eine Familie von kritisch k-chromatischen Graphen an.
   Für $k \geq 2$ ist K_k kritisch k-chromatisch.

2. Geben Sie bitte für $n = 3, 5, ...$ eine Familie von kritisch 3-chromatischen Graphen mit n Knoten an.
   C_n ist kritisch 3-chromatisch für ungerades n.

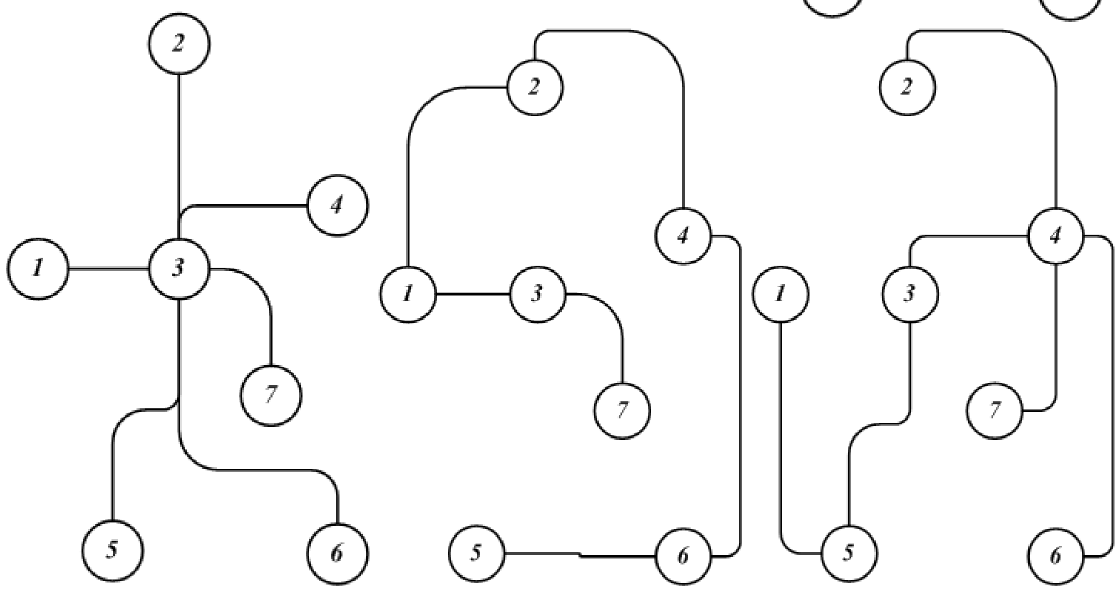
Aufgabe VIII:

1. Geben Sie bitte 3 nicht-isomorphe Gerüste für den folgenden Graph an.
   Dabei ignorieren Sie jetzt erstmal die Kantenbewertung.

2. Bestimmen Sie bitte mittels des Algorithmus von Kruskal das Minimalgerüst.



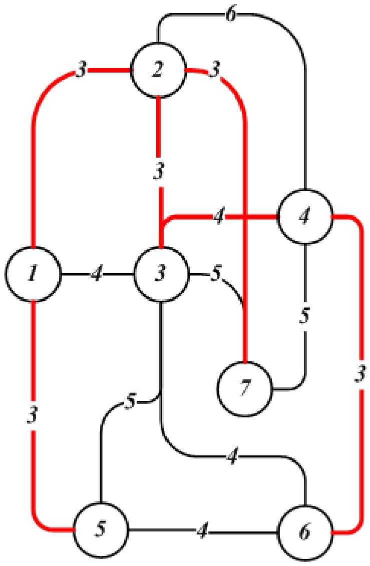
1.



2.

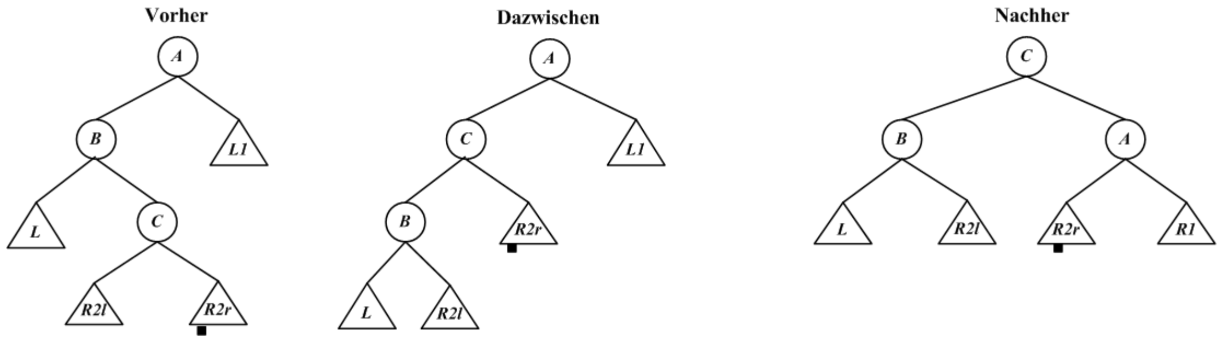
e_{12}	e_{15}	e_{23}	e_{27}	e_{46}	e_{13}	e_{34}	e_{36}	e_{56}	e_{35}	e_{37}	e_{47}	e_{42}
3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6

$F = \{e_{12}, e_{15}, e_{23}, e_{27}, e_{46}, e_{34}\}$ ist das Minimalgerüst.

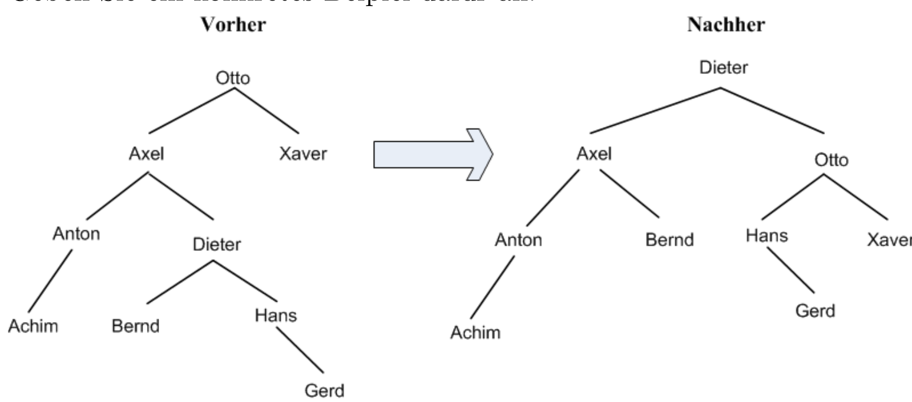


Aufgabe IX:

1. Stellen Sie bitte für AVL-Bäume die „Problemsituation Rechts“ schematisch dar.

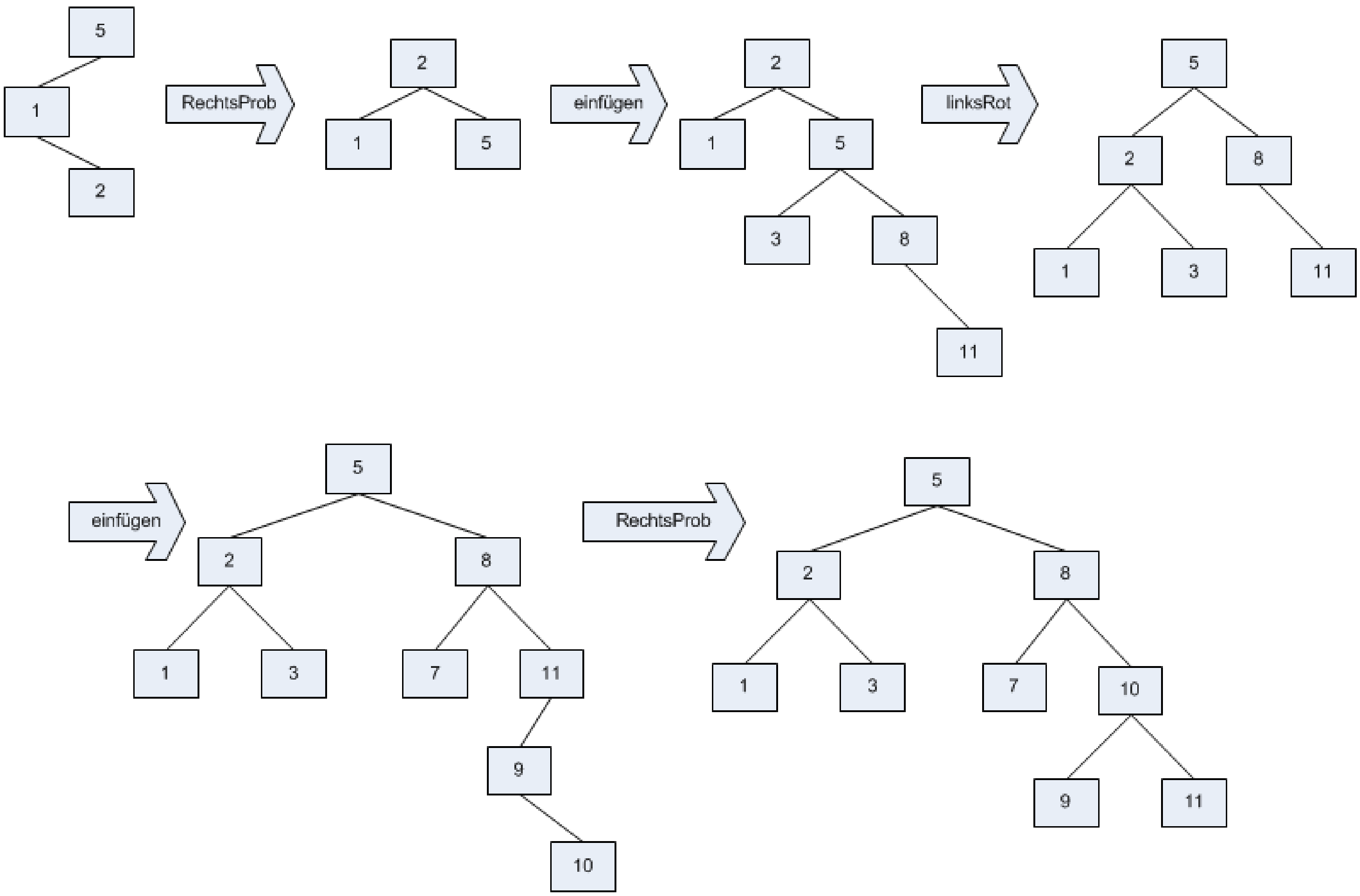


2. Geben Sie ein konkretes Beipiel dafür an.

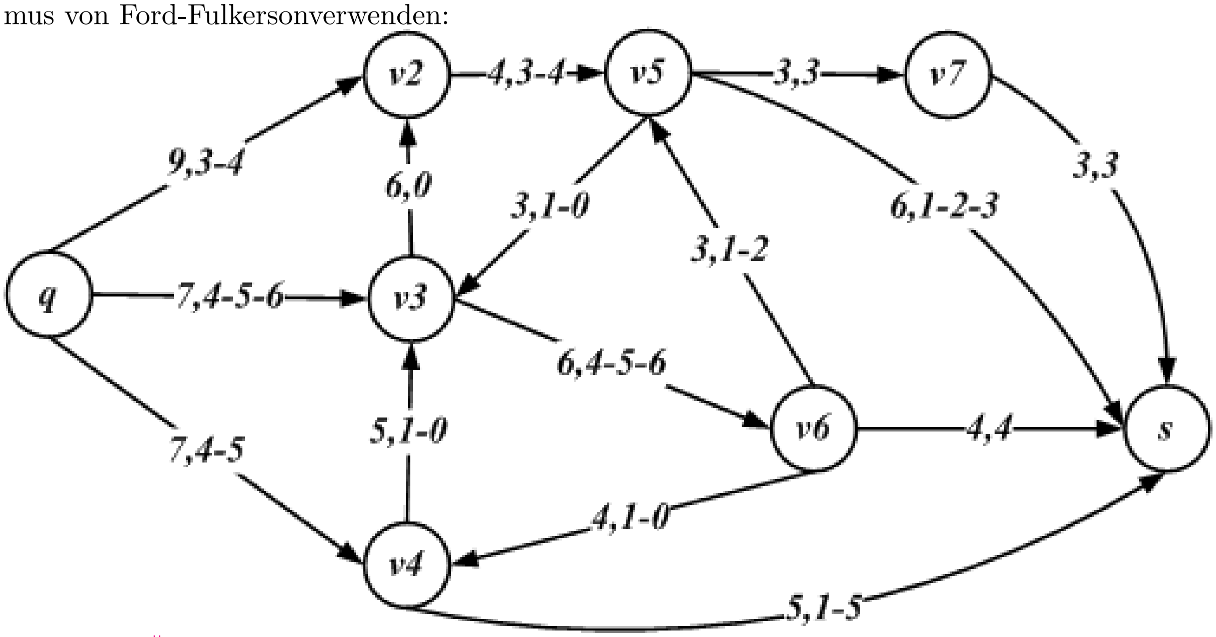


3. Konstruieren sie de AVL-Baum für die Ordnung $\leq$ auf Zahlen in dieser Reihenfolge:

$$5, 1, 2, 3, 8, 11, 7, 9, 10$$


RechtsProb
einfügen
linksRot
einfügen
RechtsProb

Aufgabe X:
Finden Sie zu dem nachfolgenden Netzwerk N den maximalen Fluss f, indem Sie den Algorithmus von Ford-Fulkersonverwenden:



Knoten	q	$v3$	$v6$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 7)$	$(+v3, 6)$	$(+v6, 4)$

Knoten	q	$v2$	$v5$	$v7$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 9)$	$(+v2, 4)$	$(+v5, 3)$	$(+v7, 3)$

Knoten	q	$v2$	$v5$	$v3$	$v6$	$v4$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 6)$	$(+v2, 1)$	$(+v5, 1)$	$(+v3, 1)$	$(+v6, 3)$	$(+v4, 1r)$

Knoten	q	$v4$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 7)$	$(+v4, 4)$

Knoten	q	$v4$	$v3$	$v6$	$v5$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 3)$	$(+v4, 3)$	$(+v3, 1)$	$(+v6, 1)$	$(+v5, 1)$

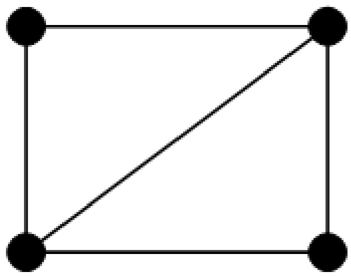
Knoten	q	$v3$	$v5$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 3)$	$(-v3, 1)$	$(+v5, 1)$

Knoten	q	$v3$	$v4$	$v6$	$v5$	s
Kennung	$(\perp, \infty)$	$(+q, 2)$	$(-v3, 1)$	$(-v4, 1)$	$(+v6, 1)$	$(+v5, 1)$

Es gibt keinen vergrößernden Weg mehr, also ist der Flusswert $d = 15$.

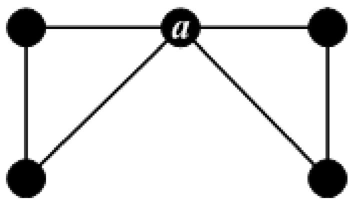
Aufgabe XI:

1. Geben Sie bitte mit Begründung einen zusammenhängenden Graphen an, der einen Hamiltonkreis, aber keinen Eulerkreis enthält.



hat den offensichtlichen Haminltonkreis aussen, aber keinen Euler da für zwei Knoten $d(v) = 3$

2. Geben Sie bitte mit Begründung einen zusammenhängenden Graphen an, der einen Eulerkreis, aber keinen Hamiltonkreis enthält.



hat offensichtlich einen Eulerkreis, da $d8v)$ immer grade ist, aber keinen Hamiltonkreis, da dafür Knoten a zweimal durchlaufen werden muss