



Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multiecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables dependientes limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

Econometría Básica

Tópico 4: Modelos Multiecuacionales y de Variables Dependientes Limitadas

Luis Chávez



Escuela Profesional de Economía
USMP

Lima, 2025



Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multiecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables dependientes limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

- 1 Introducción
- 2 Modelos multiecuacionales
Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación
- 3 Variables dependientes limitadas
MLP
Modelos logit
Modelos probit
- 4 Anexos



Fundamentos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

- Los modelos no siempre tienen que ser uniecuacionales.
- A veces, las variables, se determinan de forma simultánea. En tales casos, existe una ecuación por cada variable endógena.



Ejemplo 1

Considere el modelo competitivo de oferta y demanda.

$$Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t}, \quad \forall \alpha_1 < 0 \quad (1)$$

$$Q_t^s = \gamma_0 + \gamma_1 P_t + u_{2t}, \quad \forall \gamma_1 > 0 \quad (2)$$

¿El P_t y los términos de error son independientes? ¿Se puede demostrar la exogeneidad?



Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multiecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables dependientes limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

1 Introducción

2 Modelos multiecuacionales
Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

3 Variables dependientes limitadas
MLP
Modelos logit
Modelos probit

4 Anexos



Conceptos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas

Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References

La simultaneidad demostrada no puede estimarse con OLS. De hecho, genera estimadores que no son MELI. ¿Que pasa si la simultaneidad no está garantizada? Una prueba de especificación como la de **Hausman** puede ser útil.

Sea el modelo de m ecuaciones estructurales:

$$y_{1t} = \beta_{12}y_{2t} + \beta_{13}y_{3t} + \cdots + \beta_{1m}y_{mt} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + \cdots + \gamma_{1k}x_{kt} + u_{1t}$$

$$y_{2t} = \beta_{21}y_{1t} + \beta_{23}y_{3t} + \cdots + \beta_{2m}y_{mt} + \gamma_{21}x_{1t} + \gamma_{22}x_{2t} + \cdots + \gamma_{2k}x_{kt} + u_{2t}$$

$$y_{3t} = \beta_{31}y_{1t} + \beta_{32}y_{2t} + \cdots + \beta_{3m}y_{mt} + \gamma_{31}x_{1t} + \gamma_{32}x_{2t} + \cdots + \gamma_{3k}x_{kt} + u_{3t}$$

$$\vdots$$

$$y_{mt} = \beta_{m1}y_{1t} + \beta_{m2}y_{2t} + \cdots + \beta_{m,m-1}y_{m-1,t} + \gamma_{m1}x_{1t} + \cdots + \gamma_{mK}x_{kt} + u_{mt}$$

Se puede derivar **ecuaciones en forma reducida**, es decir, endógenas expresadas en términos de exógenas y errores.



Identificación

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas

Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References

Ejemplo 1

Clasificar los sistemas:

$$x = 10 - y$$

$$2x - 3 = y$$

$$x + y = 10$$

$$2x = y + 1$$

$$x - y = 1$$

$$x + y = 10 + z$$

$$2x - y = z$$



Identificación

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

Reglas:

Definición 1 (condición de orden)

En un modelo de m ecuaciones, para que una ecuación esté identificada debe excluir al menos $m - 1$ variables (endógenas y predeterminadas) que aparecen en el modelo. Si excluye exactamente $m - 1$ variables, la ecuación está exactamente identificada. Si excluye más de $m - 1$ variables, estará sobreidentificada.

Definición 2 (condición de orden')

En un modelo de m ecuaciones, para que una ecuación esté identificada, el número de variables predeterminadas excluidas de esa ecuación no debe ser menor que el número de variables endógenas en la ecuación menos 1.



Identificación

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

Reglas:

Definición 3 (condición de rango)

En un modelo de m ecuaciones con m variables endógenas, una ecuación está identificada si puede construirse por lo menos un determinante diferente de cero, de orden $(m-1)(m-1)$, a partir de los coeficientes de las variables (endógenas y predeterminadas) excluidas de esa ecuación particular, pero incluidas en las otras ecuaciones del modelo.



Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multiecuacionales

Ecuaciones simultáneas

Métodos de estimación

Variables dependientes limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References

- 1 Introducción
- 2 Modelos multiecuacionales
 - Ecuaciones simultáneas
 - Métodos de estimación
- 3 Variables dependientes limitadas
 - MLP
 - Modelos logit
 - Modelos probit
- 4 Anexos



Casos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas

Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References

- Indentificación: ILS.
- Sobreidentificación: 2SLS.



Ejemplo 2

Considere el ejemplo de la sección 20.3 de Gujarati and Porter (2010). Hallar las ecuaciones en forma reducida y realizar la aplicación en Stata.



Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

Ejemplo 3

Considere el ejemplo de la sección 20.4 de Gujarati and Porter (2010). Hallar las ecuaciones en forma reducida y realizar el ejemplo de la sección 20.5 en Stata.



Modelos SURE

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

A veces las variables endógenas de un sistema de ecuaciones no puede presentar simultaneidad, pero los errores de las ecuaciones pueden estar correlacionados. La modelación pasa por usar **Seemingly Unrelated Regression Estimator, SURE**.

3SLS es una extensión natural a los modelos SURE.



Generalidades

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

- Denominados modelos de elección discreta o modelos de datos categóricos.
- Se examinan modelos de regresión donde la variable endógena es de escala nominal: modelos de elección binomial y multinomial.
- Se examinan modelos de regresión donde la variable endógena es de escala ordinal: modelos para conteos.



Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

- 1 Introducción
- 2 Modelos multiecuacionales
Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación
- 3 Variables dependientes limitadas
MLP
Modelos logit
Modelos probit
- 4 Anexos

Sea el modelo lineal:

$$y_i = x_i' \beta + u_i, \forall i = 1, \dots, n \quad (3)$$

donde $y_i = 1$ si ocurre un evento (éxito) y 0 en caso contrario.

$$E(y_i | x_i) = x_i' \beta \quad (4)$$

puede interpretarse como la probabilidad condicional de que y_i ocurra, es decir

$$E(y_i | x_i) = p(y_i = 1 | x_i) \quad (5)$$

¿Qué propiedad debe cumplir $E(y_i)$?



Problemas

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

- No normalidad de los errores: los errores sólo toman dos valores.
- Varianzas heteroscedásticas:

$$\text{var}(u_i) = p(y_i = 1|x_i)(1 - x_i'\beta)^2 + p(y_i = 0|x_i)(-x_i'\beta)^2$$

$$\text{var}(u_i) = p(y_i = 1|x_i)[1 - p(y_i = 1|x_i)]$$

Se podría resolver usando WLS.

- No cumple el acotamiento de una probabilidad.
- R^2 subestimado.



Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

Ejemplo 4

Considere el ejemplo de la sección 15.1 de Gujarati and Porter (2010). Construir un fichero `.do` en Stata.



Caracterización

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

Ejemplo 5

Construir una base de datos de ENAHO (INEI) para estimar un modelo de variable dependiente binaria. Estimar por MLP, interpretar los resultados.



Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

- 1 Introducción
- 2 Modelos multiecuacionales
Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación
- 3 Variables dependientes limitadas
MLP
Modelos logit
Modelos probit
- 4 Anexos

En general, se puede establecer que

$$p(y_i = 1|x_i) = F(x_i'\beta) \quad (6)$$

donde $F(\cdot)$ es una FDA de u_i . Cuando la FDA es el tipo logística se tiene el modelo **logit**:

$$p(y_i = 1|x_i) = \frac{e^{x_i'\beta}}{1 + e^{x_i'\beta}} \quad (7)$$

donde los errores siguen una distribución logística estándar con media cero y varianza $\pi^2/3$.



Especificación

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas

Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References

Se puede demostrar que:

$$\lim_{x_i' \beta \rightarrow -\infty} p(y_i = 1 | x_i) = 0 \quad (8)$$

$$\lim_{x_i' \beta \rightarrow \infty} p(y_i = 1 | x_i) = 1 \quad (9)$$

¿Gráfica?

De (7),

$$1 - p(y_i = 1|x_i) = 1 - \frac{e^{x_i'\beta}}{1 + e^{x_i'\beta}}$$
$$1 - p(y_i = 1|x_i) = \frac{1}{1 + e^{x_i'\beta}} \quad (10)$$

Al ratio de (7) y (10) se conoce como **odds-ratio**):

$$\frac{p(y_i = 1|x_i)}{1 - p(y_i = 1|x_i)} = e^{x_i'\beta} \quad (11)$$

y el **logit** se escribe como:

$$L_i = \ln \left(\frac{p(y_i = 1|x_i)}{1 - p(y_i = 1|x_i)} \right) = x_i'\beta \quad (12)$$



Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

Anexos

References

1 Introducción

2 Modelos multiecuacionales

Ecuaciones simultáneas
Métodos de estimación

3 Variables dependientes limitadas

MLP
Modelos logit
Modelos probit

4 Anexos



Especificación

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas

Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References



Referencias

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas

Métodos de estimación

Variables
dependientes
limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References

Gujarati, P. and Porter, D. (2010). *Econometría*. McGraw-Hill, 5th edition.