UNIVERSIDAD DE SAN MARTÍN DE PORRES
Facultad de Ciencias Contables, Económicas y Financieras
Escuela Profesional de Economía
Curso: Econometría Básica
Semestre: 2025-II

EP1 (Solucionario)

Docente: Luis Chávez *Fecha: 26-08-2025*

1. (6 points) Demostrar que:

   (a) (2 points) $p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

   Sea $P(B) > 0$, la medida condicionada

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \forall A \in \mathscr{F}$$

   Se verifica los tres axiomas de Kolmogórov en el espacio reducido B.
   No negatividad. Como P es no negativa y $P(B) > 0$,

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$$

   Normalización. Tomando $A = B$ se obtiene

$$P_B(B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

   Aditividad. Sean $(A_i)_{i \geq 1} \subset \mathscr{F}$ eventos mutuamente disjuntos, es decir $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$. Entonces

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)$$

   y las intersecciones $A_i \cap B$ son también disjuntas dos a dos. Por la propiedad de aditividad de P se tiene

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)$$

   Dividiendo por $P(B)$ se tiene

$$P_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B) \right)}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P_B(A_i)$$

   Por tanto, $P_B(\cdot)$ es una medida de probabilidad en el espacio $(B, \mathscr{F}_B)$, y por tanto la definición

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

   es consistente con los axiomas de probabilidad.

(b) (2 points) $cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$

$$\begin{aligned} cov(x,y) &= E[x - E(x))(y - E(y)] \\ &= E[xy - yE(x) - xE(y) + E(x)E(y)] \\ &= E(xy) - E(y)E(x) - E(x)E(y) + E(x)E(y) \\ &= E(xy) - E(x)E(y) \end{aligned}$$

(c) (2 points) $var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$$\begin{aligned} var(x) &= E[x - E(x)]^2 \\ &= E[x^2 - 2xE(x) + E(x)^2] \\ &= E(x^2) - 2E(x)^2 + E(x)^2 \\ &= E(x^2) - E(x)^2 \end{aligned}$$

2. (4 points) A partir del modelo de regresión lineal de la forma:

$$y_i = x_i'\hat{\beta} + u_i, \forall i = 1,..,n \tag{1}$$

Demostrar que el estimador OLS será:

$$\hat{\beta}_{ols} = \left(\sum x_i x_i'\right)^{-1} \sum x_i y_i \tag{2}$$

$$\begin{aligned} min \sum \hat{u}_i^2 &= \sum (y_i - x_i'\hat{\beta})^2 \\ &= \sum (y_i^2 - 2y_i x_i'\hat{\beta} + \hat{\beta}' x_i x_i'\hat{\beta}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial\hat{\beta}} = -2\sum x_i y_i + 2\sum x_i x_i'\hat{\beta} = 0 \tag{3}$$

$$\hat{\beta}_{OLS} = \left(\sum x_i x_i'\right)^{-1} \sum x_i y_i \tag{4}$$

3. (8 points) Sea la curva de Engel ajustada según el modelo

$$s_i = \beta_1 + \beta_2 y_i + \beta_3 y_i^2 + \beta_4 y_i^3 + u_i, \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

donde s es la proporción de gasto en alimentos y y es el ingreso mensual (en soles).

(a) (2 points) Predecir s cuando una persona percibe S/1800 como ingreso laboral. Hallar la elasticidad del ingreso.

No se puede predecir si no se tiene el modelo estimado. Luego,

$$\frac{\partial s_1}{\partial y_1} = \hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 y_1 + 3\hat{\beta}_4 y_1^2$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial y_1} = \hat{\beta}_2 + 1800(2\hat{\beta}_3 + 5400\hat{\beta}_4)$$

Además,

$$e_I = [\hat{\beta}_2 + 1800(2\hat{\beta}_3 + 5400\hat{\beta}_4)]\frac{y_1}{s_1}$$

(b) (2 points) Explique matemáticamente por qué no basta un modelo lineal.

La curva de Engel es una función cóncava respecto al eje y, por lo que un modelo lineal no captura esa curvatura. Una función polinómica de grado 3 en adelante puede capturar muy bien.

(c) (2 points) Hallar el cambio marginal en s si el ingreso es de S/2000.

$$\frac{\partial s_1}{\partial y_1} = \hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 y_1 + 3\hat{\beta}_4 y_1^2$$

Nuevamente, se requiere el valor de los estimadores para hallar un valor específico marginal.

(d) (2 points) ¿Qué variable dummy explicativa se puede añadir? Estimar la diferencia esperada del gasto en alimento de ambas categorías.

Se puede añadir la variable $D_i = 1$ si renta algún departamento o vivienda y 0 en otros casos. En tal sentido, se tiene

$$s_i = \beta_1 + \beta_2 y_i + \beta_3 y_i^2 + \beta_4 y_i^3 + \beta_5 D_i + u_i, \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

$$E(s_i | D_i = 1) = \beta_1 + \beta_2 y_i + \beta_3 y_i^2 + \beta_4 y_i^3 + \beta_5$$

$$E(s_i | D_i = 0) = \beta_1 + \beta_2 y_i + \beta_3 y_i^2 + \beta_4 y_i^3$$

La diferencia media en el gasto en alimentos de los que rentan departamentos y los que no rentan es β_5.

4. (2 points) A partir del modelo desarrollado en clase sobre talla y peso de niños al nacer, se pide escribir el modelo de regresión con mejor ajuste e interpretar los coeficientes.

El modelo con mejor ajuste fue:

$$peso_i = \beta_1 + \beta_2 talla_i + \beta_3 talla_i^2 + \beta_4 talla_i^3 + u_i$$

El coeficiente β_2 mide el efecto marginal inicial de un cambio en talla sobre el peso, cuando los términos cuadrático y cúbico son pequeños. El coeficiente β_3 captura la curvatura y el coeficiente β_4 mide la flexibilidad de la curva.

Otra oportunidad, no vendría mal y probemos empezar de cero...