



Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multiecuacionales

Ecuaciones simultáneas

Métodos de estimación

Variables dependientes limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References

# Econometría Básica

## Tópico 4: Modelos Multiecuacionales y de Variables Dependientes Limitadas

Luis Chávez



Escuela Profesional de Economía  
USMP

Lima, 2025



# Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multiecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables dependientes limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

- 1 Introducción
- 2 Modelos multiecuacionales  
Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación
- 3 Variables dependientes limitadas  
MLP  
Modelos logit  
Modelos probit
- 4 Anexos



# Fundamentos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

- Los modelos no siempre tienen que ser uniecuacionales.
- A veces, las variables, se determinan de forma simultánea. En tales casos, existe una ecuación por cada variable endógena.

## Ejemplo 1

Considere el modelo competitivo de oferta y demanda.

$$Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t}, \quad \forall \alpha_1 < 0 \quad (1)$$

$$Q_t^s = \gamma_0 + \gamma_1 P_t + u_{2t}, \quad \forall \gamma_1 > 0 \quad (2)$$

¿El  $P_t$  y los términos de error son independientes? ¿Se puede demostrar la exogeneidad?



# Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multiecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables dependientes limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

1 Introducción

2 Modelos multiecuacionales  
Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

3 Variables dependientes limitadas  
MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

4 Anexos



# Conceptos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas

Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References

La simultaneidad demostrada no puede estimarse con OLS. De hecho, genera estimadores que no son MELI. ¿Que pasa si la simultaneidad no está garantizada? Una prueba de especificación como la de **Hausman** puede ser útil.

Sea el modelo de  $m$  ecuaciones estructurales:

$$y_{1t} = \beta_{12}y_{2t} + \beta_{13}y_{3t} + \cdots + \beta_{1m}y_{mt} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + \cdots + \gamma_{1k}x_{kt} + u_{1t}$$

$$y_{2t} = \beta_{21}y_{1t} + \beta_{23}y_{3t} + \cdots + \beta_{2m}y_{mt} + \gamma_{21}x_{1t} + \gamma_{22}x_{2t} + \cdots + \gamma_{2k}x_{kt} + u_{2t}$$

$$y_{3t} = \beta_{31}y_{1t} + \beta_{32}y_{2t} + \cdots + \beta_{3m}y_{mt} + \gamma_{31}x_{1t} + \gamma_{32}x_{2t} + \cdots + \gamma_{3k}x_{kt} + u_{3t}$$

$$\vdots$$

$$y_{mt} = \beta_{m1}y_{1t} + \beta_{m2}y_{2t} + \cdots + \beta_{m,m-1}y_{m-1,t} + \gamma_{m1}x_{1t} + \cdots + \gamma_{mK}x_{kt} + u_{mt}$$

Se puede derivar **ecuaciones en forma reducida**, es decir, endógenas expresadas en términos de exógenas y errores.



# Identificación

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

## Ejemplo 1

Clasificar los sistemas:

$$x = 10 - y$$

$$2x - 3 = y$$

$$x + y = 10$$

$$2x = y + 1$$

$$x - y = 1$$

$$x + y = 10 + z$$

$$2x - y = z$$





# Identificación

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

Reglas:

## Definición 1 (condición de orden)

En un modelo de  $m$  ecuaciones, para que una ecuación esté identificada debe excluir al menos  $m - 1$  variables (endógenas y predeterminadas) que aparecen en el modelo. Si excluye exactamente  $m - 1$  variables, la ecuación está exactamente identificada. Si excluye más de  $m - 1$  variables, estará sobreidentificada.

## Definición 2 (condición de orden')

En un modelo de  $m$  ecuaciones, para que una ecuación esté identificada, el número de variables predeterminadas excluidas de esa ecuación no debe ser menor que el número de variables endógenas en la ecuación menos 1.



# Identificación

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

Reglas:

## Definición 3 (condición de rango)

En un modelo de  $m$  ecuaciones con  $m$  variables endógenas, una ecuación está identificada si puede construirse por lo menos un determinante diferente de cero, de orden  $(m-1)(m-1)$ , a partir de los coeficientes de las variables (endógenas y predeterminadas) excluidas de esa ecuación particular, pero incluidas en las otras ecuaciones del modelo.



# Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multiecuacionales

Ecuaciones simultáneas

Métodos de estimación

Variables dependientes limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References

1 Introducción

2 Modelos multiecuacionales  
Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

3 Variables dependientes limitadas  
MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

4 Anexos



# Casos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas

Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References

- Indentificación: ILS.
- Sobreidentificación: 2SLS.



Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas

Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References

## Ejemplo 2

Considere el ejemplo de la sección 20.3 de Gujarati and Porter (2010). Hallar las ecuaciones en forma reducida y realizar la aplicación en Stata.



Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

## Ejemplo 3

Considere el ejemplo de la sección 20.4 de Gujarati and Porter (2010). Hallar las ecuaciones en forma reducida y realizar el ejemplo de la sección 20.5 en Stata.



# Modelos SURE

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

A veces las variables endógenas de un sistema de ecuaciones no puede presentar simultaneidad, pero los errores de las ecuaciones pueden estar correlacionados. La modelación pasa por usar **Seemingly Unrelated Regression Estimator, SURE**.

3SLS es una extensión natural a los modelos SURE.



# Generalidades

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

- Denominados modelos de elección discreta o modelos de datos categóricos.
- Se examinan modelos de regresión donde la variable endógena es de escala nominal: modelos de elección binomial y multinomial.
- Se examinan modelos de regresión donde la variable endógena es de escala ordinal: modelos para conteos.





# Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

- 1 Introducción
- 2 Modelos multiecuacionales  
Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación
- 3 Variables dependientes limitadas  
MLP  
Modelos logit  
Modelos probit
- 4 Anexos

Sea el modelo lineal:

$$y_i = x_i' \beta + u_i, \forall i = 1, \dots, n \quad (3)$$

donde  $y_i = 1$  si ocurre un evento (éxito) y 0 en caso contrario.

$$E(y_i | x_i) = x_i' \beta \quad (4)$$

puede interpretarse como la probabilidad condicional de que  $y_i$  ocurra, es decir

$$E(y_i | x_i) = p(y_i = 1 | x_i) \quad (5)$$

¿Qué propiedad debe cumplir  $E(y_i)$ ?



# Problemas

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

- No normalidad de los errores: los errores sólo toman dos valores.
- Varianzas heteroscedásticas:

$$\text{var}(u_i) = p(y_i = 1|x_i)(1 - x_i'\beta)^2 + p(y_i = 0|x_i)(-x_i'\beta)^2$$

$$\text{var}(u_i) = p(y_i = 1|x_i)[1 - p(y_i = 1|x_i)]$$

Se podría resolver usando WLS.

- No cumple el acotamiento de una probabilidad.
- $R^2$  subestimado.



Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

## Ejemplo 4

Considere el ejemplo de la sección 15.1 de Gujarati and Porter (2010). Construir un fichero `.do` en Stata.



# Caracterización

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

## Ejemplo 5

Construir una base de datos de ENAHO (INEI) para estimar un modelo de variable dependiente binaria. Estimar por MLP, interpretar los resultados.



# Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

- 1 Introducción
- 2 Modelos multiecuacionales  
Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación
- 3 Variables dependientes limitadas  
MLP  
Modelos logit  
Modelos probit
- 4 Anexos

En general, se puede establecer que

$$p(y_i = 1|x_i) = F(x_i'\beta) \quad (6)$$

donde  $F(\cdot)$  es una FDA de  $u_i$ . Cuando la FDA es el tipo logística se tiene el modelo **logit**:

$$p(y_i = 1|x_i) = \frac{e^{x_i'\beta}}{1 + e^{x_i'\beta}} \quad (7)$$

donde los errores siguen una distribución logística estándar con media cero y varianza  $\pi^2/3$ .



# Especificación

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas

Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References

Se puede demostrar que:

$$\lim_{x_i' \beta \rightarrow -\infty} p(y_i = 1 | x_i) = 0 \quad (8)$$

$$\lim_{x_i' \beta \rightarrow \infty} p(y_i = 1 | x_i) = 1 \quad (9)$$

¿Gráfica?





# Especificación

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References

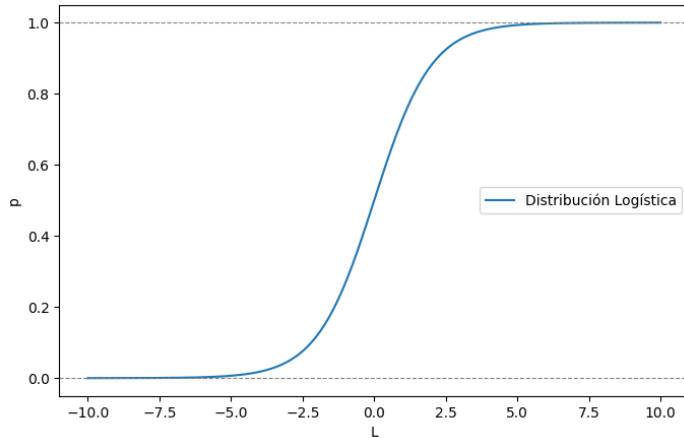


Figure: Logit

De (7),

$$1 - p(y_i = 1|x_i) = 1 - \frac{e^{x_i'\beta}}{1 + e^{x_i'\beta}}$$
$$1 - p(y_i = 1|x_i) = \frac{1}{1 + e^{x_i'\beta}} \quad (10)$$

Al ratio de (7) y (10) se conoce como **odds-ratio**):

$$\frac{p(y_i = 1|x_i)}{1 - p(y_i = 1|x_i)} = e^{x_i'\beta} \quad (11)$$

y el **logit** se escribe como:

$$L_i = \ln \left( \frac{p(y_i = 1|x_i)}{1 - p(y_i = 1|x_i)} \right) = x_i'\beta \quad (12)$$



Variantes:

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_{ij}} = \beta_j \quad (13)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_{ij}} = \beta_j p_i (1 - p_i) \quad (14)$$

La primera ecuación siempre es constante, pero la segunda varía según las observaciones.

El  $R^2$  de Efron (1978):

$$R^2 = 1 - \frac{n}{n_1 n_2} \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (15)$$

El  $R^2$  de McFadden (1974) se puede escribir como:

$$R^2 = 1 - \frac{\ln L_u}{\ln L_r} \quad (16)$$

donde  $L_u$  y  $L_r$  son, respectivamente, el máximo de la función de verosimilitud sin restricciones y el máximo de la función de verosimilitud donde todos los coeficientes excepto el intercepto son cero.



Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

## Ejemplo 6

Considere el ejemplo de la sección 15.8 de Gujarati and Porter (2010). Resolver en Stata.



# Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

- 1 Introducción
- 2 Modelos multiecuacionales  
Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación
- 3 Variables dependientes limitadas  
MLP  
Modelos logit  
Modelos probit
- 4 Anexos



# Conceptos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

La forma de (6) también puede ser

$$p(y_i = 1|x_i) = \int_{-\infty}^{x_i'\beta} (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}u_i^2} du_i \quad (17)$$

a quien se conoce como modelo **probit**. Donde se asume que los errores siguen una distribución normal estándar, es decir,  $F(x_i'\beta)$  es una CDF de la distribución Z.



# Interpretación

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas

Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP

Modelos logit

Modelos probit

Anexos

References

La elasticidad principal es:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_{ij}} = \beta_j f(x_i' \beta) \quad (18)$$

donde  $f(\cdot)$  es la PDF de la distribución  $Z$ . El efecto de un cambio en la variable  $j$ -ésima sobre  $p_i$  se puede evaluar para diferentes valores de  $x_i$  o en las medias muestrales  $\bar{x}$  o  $\bar{p} = \bar{y}$ . Véase más en Greene (2017).





# Diferencias

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

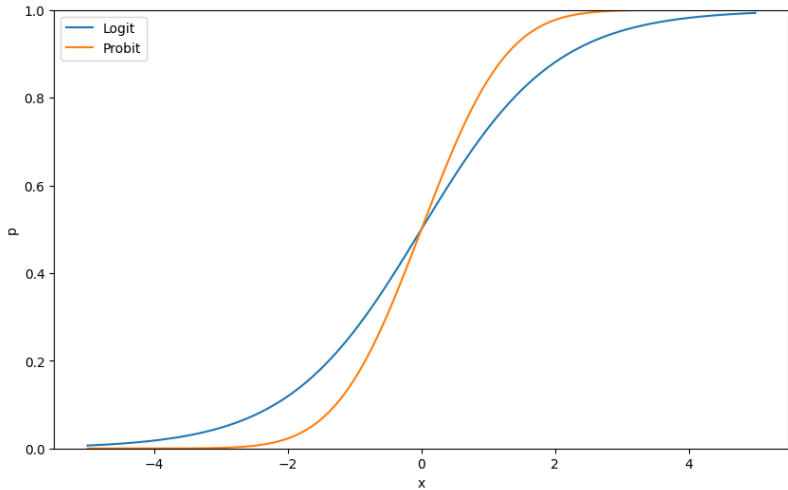
Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
**Modelos probit**

Anexos

References





# Aplicación

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

Considere el caso 'Aplicación a los datos de las hipotecas' de Stock and Watson (2012).



# Referencias

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Modelos multi-  
ecuacionales

Ecuaciones simultáneas  
Métodos de estimación

Variables  
dependientes  
limitadas

MLP  
Modelos logit  
Modelos probit

Anexos

References

Greene, W. (2017). *Econometric Analysis*. Pearson, 8th edition.

Gujarati, P. and Porter, D. (2010). *Econometría*. McGraw-Hill, 5th edition.

Stock, J. and Watson, M. (2012). *Introducción a la Econometría*. Pearson, 3th edition.