



Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Econometría Básica

Tópico 1: Modelación Econométrica Lineal

Luis Chávez



Escuela Profesional de Economía
USMP

Lima, 2025



Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

- 1 Introducción
 - Relaciones empíricas
 - Acerca de metría
 - Repaso
- 2 Modelos lineales
 - Regresión simple
 - Regresión múltiple
- 3 Modelos Especiales
 - Modelos pseudo lineales
 - Modelos con interacción
- 4 Anexos



Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

- 1 Introducción
 - Relaciones empíricas
 - Acerca de metría
 - Repaso
- 2 Modelos lineales
 - Regresión simple
 - Regresión múltiple
- 3 Modelos Especiales
 - Modelos pseudo lineales
 - Modelos con interacción
- 4 Anexos



Bienvenida

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

¿Che, cómo anda el clima en Córdoba? ¿Ya que andamos, sería muy atrevido pedirte prestado 200 soles para ver si el futuro me sonríe? ¿Cuál es la pensión en la U, vale la pena o lo invierto en bienes raíces en Ancón? ¿Es probable que Dina llegue a la cárcel o es toda de Carlos Álvarez? ¿El 2026 estaremos en la cornisa o podremos respirar tranquilos? ¿Mi SC ganará la CL-2025?

¡Bienvenidos a las estadísticas, matemáticas y economía!



Bienvenida

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

¿Qué hacen los economistas?

- Norma McCorvey y la legalización del aborto en 1973.
- La Gran Depresión de 1929.



Modelos económicos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Definición 1 (Modelo)

A **model** is a simplified representation of an actual phenomenon, such as an actual system or process. The actual phenomenon is represented by the model in order to explain it, to predict it, and control it, goals corresponding to the three purposes of econometrics, namely structural analysis, forecasting, and policy evaluation (Intriligator, 1983, pp. 182–183).

¿Los *supuestos* resuelven la complejidad?



Modelos económicos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Intriligator (1983):

- Modelos verbales.
- Modelos geométricos.
- Modelos físicos.
- Modelos algebraicos \rightarrow funciones.

Componentes: ecuaciones, variables y parámetros.



Modelos económicos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Definición 2 (Variables)

Una **variable** es aquella característica o atributo de una unidad de análisis (u observación).

Taxonomía:

- Rol: dependientes (regresadas, explicadas, target) e independientes (explicativas, regresoras o predictores).
- Naturaleza: cualitativas (ordinales y nominales) y cuantitativas (discretas y continuas).



Modelos económicos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Ejemplo 1

Sea el modelo básico de demanda, según el cual existe una relación inversa entre la demanda de un bien (Y) y su precio (X): a medida que el precio del bien se incrementa, su demanda disminuye y a la inversa. Matemáticamente,

$$Y_i = a + bX_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

donde i recorre una muestra de tamaño n .



Modelos económicos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

El ejemplo 1 denota una relación determinista o exacta. La realidad revela que para cada valor de x existe un conjunto de valores de y ; es decir, lo que se observa es una distribución mas no una función.

Esto ha generado inconsistencia teórico-empíricas a la hora de interpretar una teoría. Como señala Goldberger (1991), $y = f(x_i)$ en realidad implica:

$$\mu_{y|x} = f(x_i) \quad (2)$$

¿Solución?



Modelos econométricos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Actividad 1. Tabular la cantidad promedio de recorrido a pie (min/día) y el consumo de agua (L/día) de 10 estudiantes. ¿Existe una relación exacta? ¿Y si aumentamos la muestra?



Modelos econométricos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Es una expresión algebraica artística más que científica. *Es arte wey.*

Definición 3 (Modelo econométrico)

Es un modelo estocástico en el sentido de que incluye variables aleatorias (Intriligator, 1983).



Modelos econométricos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Ejemplo 2

Reformulando la ecuación 1:

$$y_i = a + bx_i + u_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

donde u_i es el término de perturbación estocástica (error). ¿Es una variable aleatoria?



Principio de regresión

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

- Galton (1877), haciendo una comparación entre un grupo de 100 hombres gigantes y otros 100 medianos, asumía que la cantidad de matrimonios (y el número de descendientes) de los primeros era menor al de los segundos. Como consecuencia, la estatura de los hijos de los hombres gigantes sería –en promedio– menor al de sus padres, por dos razones: primero, porque sus razas serían diluidas por el matrimonio y, segundo, porque la descendencia de todos los individuos tiende a “revertir hacia la mediocridad”.
- Reversión a la mediocridad: la estatura promedio de los hijos de padres altos (y de los hijos de padres bajos) “regresan” al del promedio poblacional¹.

¹Véase <https://n9.cl/cqiqb4>.



Principio de regresión

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Actividad 2. Demostrar/refutar la hipótesis de Galton utilizando cualquier herramienta/técnica estadística. Utilice como información su edad, su peso, su talla, el peso y talla de su padre, así como el peso y talla de su madre².

²Es obligatorio colocar datos reales.



Principio de regresión

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Definición 4 (Análisis de regresión)

Técnica estadística que explica la dependencia fundada entre una variable (target) y otras (independientes) vía una expresión algebraica.

Taxonomía:

- Regresión simple
- Regresión múltiple

¿Regresión implica causalidad?



Principio de regresión

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Actividad 3. Estudiar el concepto de **regresión espuria**. Identificar 2 ejemplos dentro de economía y explicar.



Datos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

- Idoneidad de los datos empíricos: confiabilidad, representatividad y pertinencia.
- Datos no experimentales. ¿Y el resto?
- Estructura de datos: corte transversal, series de tiempo y panel (longitudinales).
- Escala³.

³Véase (Spanos, 2019).



Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

1 Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

2 Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

3 Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

4 Anexos



Antecedentes

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

- 1690: primer intento sistemático para estudiar el fenómeno económico usando datos con la publicación de *Political Arithmetick* por William Petty.
- 1834: creación de la Sociedad Estadística.
- 1869: análisis de correlación en economía por Yule.
- 1900: primeros intentos de econometría a cargo de Henry Moore (precursor).
- 1926: Ragnar Frisch acuña por vez primera “oekonometrie” en *Sur un problème d'économie pure*.
- 1930: fundación de la Sociedad Econométrica y la revista *Econometrica*.
- 1932: se crea la fundación Cowles.



Conceptos básicos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

[...] Thus, econometrics is by no means the same as economic statistics. Nor is it identical with what we call general economic theory, although a considerable portion of this theory has a definitely quantitative character. Nor should econometrics be taken as synonymous with the application of mathematics to economics. Experience has shown that each of these three view-points, that of statistics, economic theory, and mathematics, is a necessary, but not by itself a sufficient, condition for a real understanding of the quantitative relations in modern economic life. It is the unification of all three that is powerful. And it is this unification that constitutes econometrics. (Frisch, 1933, pp. 2)



Conceptos básicos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Es cuestión de preferencias...

Definición 5 (Econometría)

Es la estimación de relaciones económicas (teoría), sobre la base de datos empíricos, mediante técnicas estadísticas y herramientas matemáticas.

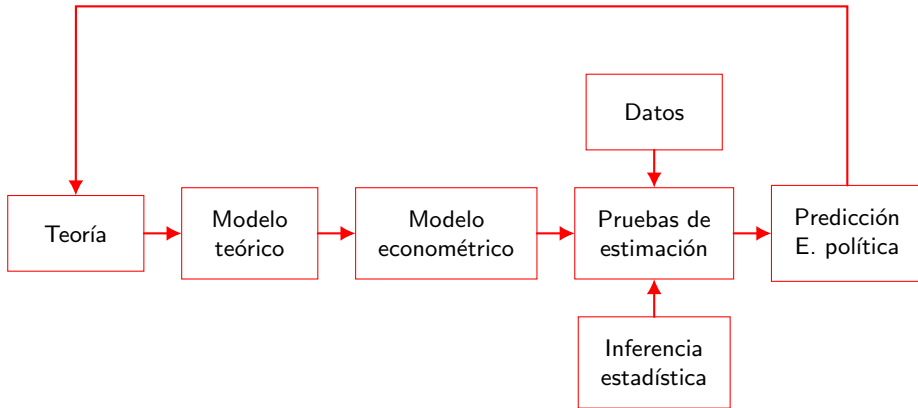


Figura: Metodología de la econometría (Spanos, 1986).

Ejemplo 3

Sea la teoría de demanda de dinero:

$$m^d = f(y, r) \quad (4)$$

cuyo modelo teórico puede escribirse como:

$$m^d = Ay^{\alpha_1} r^{\alpha_2} \quad (5)$$

$$\ln(m^d) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(y) + \alpha_2 \ln(r) \quad (6)$$

(Continuar...)



Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

1 Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

2 Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

3 Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

4 Anexos



Definición 6 (Experimento aleatorio)

Es todo experimento, \mathcal{E} , que verifica (Spanos, 1986):

- Las posibles respuestas son conocidas a priori.
- En algún ensayo particular, la respuesta no es conocida a priori.
- Puede ser repetido bajo condiciones idénticas.

Todas las posibles respuesta a \mathcal{E} se conoce como **espacio muestral**, Ω . El subconjunto A de Ω es un evento ⁴.

⁴Para el repaso estadístico, se recomienda Amemiya (1994).



Definición 7 (Probabilidad)

Si en un \mathcal{E} se puede obtener n resultados mutuamente excluyentes e igualmente probables, la probabilidad del evento A que ha ocurrido n_A veces es:

$$p(A) = \frac{n_A}{n} \quad (7)$$

¿Qué es la suerte?



Axioma 1 (de probabilidad)

- ① $p(A) \geq 0$
- ② $p(\Omega) = 1$
- ③ $p(\cup_{i=1} A_i) = \sum_{i=1} p(A_i) \Leftarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

Ejemplo 4

- ¿Cuál es la probabilidad que dos alumnos de la clase sean del mismo mes?
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un resultado de fútbol?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un prestatario no pague su deuda?

Axioma 2 (de probabilidad condicional)

- 1 $p(A|B) \geq 0, \exists A$
- 2 $p(A|B) = 1, \exists A \supset B$
- 3 $p(\cup_{i=1} A_i|B) = \sum_{i=1} p(A_i|B) \Leftarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
- 4 $\frac{p(H|B)}{p(G|B)} = \frac{P(H)}{P(G)} \Leftarrow B \supset H \wedge B \supset G \wedge p(G) \neq 0$

Teorema 1. $p(A|B) = p(A \cap B) / p(B)$. Demostrar!



Definición 8 (Independencia estadística)

Dos eventos, A y B, son independientes si:

$$p(A) = p(A|B) \quad (8)$$

Símil (por teorema 1):

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) \quad (9)$$



Variables aleatorias

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Definición 9 (Variable aleatoria)

Es aquella función X que asigna un número real a cada resultado posible (ω) de un \mathcal{E} .

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (10)$$

donde $X(\omega)$ es el número real asociado a ω .

Taxonomía:

- Discretas: univariadas, bi y multi...
- Continuas: univariadas, bi y multi...



Variables aleatorias

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Caracterización:

- Variables aleatorias discretas:
 - Función masa $p(X)$.
 - Función de distribución acumulada $F(X)$.
- Variables aleatorias continuas:
 - Función de densidad $f(X)$.
 - Función de distribución acumulada $F(X)$.

Definición 10 (Esperanza matemática)

Dada una v.a discreta X con tuplas $\{x_i, p(x_i)\}$, la expectativa de X es

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad (11)$$

Dada una v.a continua con densidad $f(X)$, la expectativa de X es

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (12)$$



Definición 11 (Varianza)

El segundo momento alrededor de la media es:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 \quad (13)$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (14)$$

Definición 12 (Covarianza)

La relación entre dos variables aleatorias, X e Y , es la covarianza, σ_{XY} :

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \quad (15)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (16)$$

Teorema 2. Si X e Y son independientes, $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Definición 13 (Correlación)

La correlación, ρ , una medida del grado de asociación entre dos v.a., X e Y :

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (17)$$

Teorema 3. $|\rho| \leq 1$.



Álgebra matricial

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Definición 14 (Matriz)

Es todo aquel ordenamiento de elementos distribuidos en m filas y n columnas, a quienes se conoce como orden o dimensión.

$$A = [a_{ij}] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



Álgebra matricial

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

- 1 La **transpuesta** de una matriz A de orden $m \times n$ tiene orden $n \times m$.
- 2 Dada A de orden $m \times n$, una **submatriz** es toda matriz de menor orden.
- 3 Una **matriz cuadrada** es aquella que tiene orden $n \times n$.
- 4 Una **matriz identidad**, I_n , es aquella cuya diagonal principal es de unos.
- 5 Matriz **idempotente**: $A^2 = A$.
- 6 Matriz **ortogonal**: $A'A = I$.
- 7 Matriz **simétrica**: $A = A'$.



Álgebra matricial

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Definición 15 (Determinante)

El determinante de una matriz A , $|A|$, es aquel escalar que la caracteriza.

Ejemplo 5

Dada la matriz A , hallar su determinante.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$



Álgebra matricial

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Definición 16 (Rango)

Dada una matriz A , su rango es el orden de la submatriz cuadrada más grande cuyo determinante no es cero.

Atención: ¿El rango induce singularidad?



Álgebra matricial

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

- 1 Al borrar la i -ésima fila y j -ésima columna, el determinante de la submatriz inducida se conoce como **menor** del elemento a_{ij} : $|M_{ij}|$.
- 2 El cofactor del elemento a_{ij} se define por:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}| \quad (18)$$

- 3 Una matriz de adjunta es la transpuesta de una matriz de cofactores:

$$\text{adj}(A) = [\text{cof}(A)]' \quad (19)$$



Álgebra matricial

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de métrica

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Definición 16 (Inversa)

Si la matriz A es cuadrada y no singular, su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) \quad (20)$$

¿Porqué necesitamos saber si una matriz es invertible?



Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

1 Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

2 Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

3 Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

4 Anexos



El modelo

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Sea $y = f(x)$ en el sentido de (2), asumiendo una forma lineal se tiene:

$$E(y|x_{i2}) = \beta_1 + \beta_2 x_{i2}, \quad i = 1, \dots, N \quad (21)$$

conocida como **FRP**. Dada la inexactitud, el error se define por:

$$u_i = y_i - E(y|x_{i2}) \quad (22)$$

Reemplazando,

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + u_i \quad (23)$$

¿Error?



El modelo

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

El análogo muestral, FRM, es

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_{i2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (24)$$

El **residuo** será:

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i \quad (25)$$

Reemplazando,

$$y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \hat{u}_i \quad (26)$$

¿Qué miden los parámetros? ¿Se pueden calcular?



Estimación del modelo

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Existen varios métodos de estimación:

- 1 **Mínimo Cuadrados Ordinarios (OLS).**
- 2 Mínimo Cuadrados Ponderados (WLS).
- 3 Mínimos cuadrados Generalizados (GLS).
- 4 Máxima Verosimilitud (ML).
- 5 Método Generalizado de Momentos (GMM).

OLS minimiza la suma cuadrática de los residuos:

$$\min \sum_{i=1}^n (u_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_{i2})^2 \quad (27)$$

¿Gráficamente? FOC:

$$\hat{\beta}_1 : -2 \sum (y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_{i2}) = 0 \quad (28)$$

$$\hat{\beta}_2 : -2 \sum (y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_{i2})(x_{i2}) = 0 \quad (29)$$

Los estimadores de MCO (LSE) son:

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 \quad (30)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum y_i x_{i2} - n \bar{y} \bar{x}_2}{\sum x_{i2}^2 - n \bar{x}_2^2} \quad (31)$$

Alternativas:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \quad (32)$$

$$\hat{\beta}_2 = r \frac{S_y}{S_x} \quad (33)$$



Estimación del modelo

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Propiedades numéricas en OLS:

- ① LSE son estimadores puntuales.
- ② $\bar{\hat{y}}_i = \bar{y}$.
- ③ $\bar{\hat{u}}_i = 0$.
- ④ $\sum \hat{u}_i x_{i2} = cov(\hat{u}_i, x_{i2}) = 0$.
- ⑤ $\sum \underline{\hat{y}}_i \underline{\hat{u}}_i = cov(\underline{\hat{y}}_i, \underline{\hat{u}}_i) = 0$, con $\underline{y}_i = y_i - \bar{y}$.



Estimación del modelo

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Supuesto 1 (Gauss)

- 1 Linealidad en los parámetros.
- 2 Regresor fijo: $cov(x_{i2}, u_i) = 0$.
- 3 $E(u_i|x_{i2}) = 0 \rightarrow E(u_i) = 0$.
- 4 Homoscedasticidad: $var(u_i|x_{i2}) = \sigma^2$.
- 5 No autocorrelación: $cov(u_i, u_j|x_i, x_j) = 0, i \neq j$.
- 6 n grande.
- 7 No *outliers*.



Estimación del modelo

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Bajo el supuesto 1, se tiene las siguientes propiedades estadísticas:

- 1 Linealidad: los LSE son una función lineal de la v.a y .
- 2 Insesgadez:

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad \forall j = 1, 2 \quad (34)$$

- 3 Eficiencia: varianza mínima.



Estimación del modelo

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Ejemplo 6

Sea el modelo de demanda considerado en el ejemplo 1. A partir de los datos del fichero [be_ejemplo06.csv](#) estimar la ecuación de demanda de camotes piuranos. Los precios están expresados en soles/kg y las cantidades en kg. Interpretar.



ANOVA

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

El análisis de varianza (ANOVA) en *regression analysis* comprende SS y MS:

$$SCT = SCE + SCR \quad (35)$$

Véase Greene (2018).

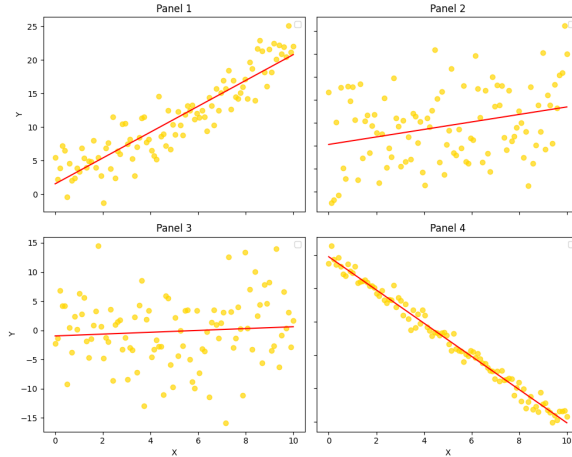


Figure: ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?



Bondad de ajuste

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

- 1 Coeficiente de determinación:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT}, \quad SCE = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2, \quad SCT = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

- 2 **Root mean squared error (RMSE)** o error estándar de regresión:

$$ee = \hat{\sigma}_{\hat{u}}, \quad \hat{\sigma}_{\hat{u}}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n - 2}$$

donde $\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$ es conocido como **mean squared error (MSE)**. ¿Y el MAE?



Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

- 1 **Introducción**
 - Relaciones empíricas
 - Acerca de metría
 - Repaso
- 2 **Modelos lineales**
 - Regresión simple
 - Regresión múltiple
- 3 **Modelos Especiales**
 - Modelos pseudo lineales
 - Modelos con interacción
- 4 **Anexos**

Sea el conjunto de k variables que conforman un hiperplano, $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, el MRLG se escribe:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (36)$$

En forma compacta,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2k} \\ 1 & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N2} & x_{N3} & \cdots & x_{Nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

En forma resumida,

$$y = X\beta + u \quad (37)$$

$$y_i = x_i'\beta + u_i \quad (38)$$

Por su lado, bajo la FRM, los análogos muestrales de (37) y (38) serán:

$$y = X\hat{\beta} + \hat{u} \quad (39)$$

$$y_i = x_i'\hat{\beta} + \hat{u}_i \quad (40)$$

con predicción $\hat{y} = X\hat{\beta}$ y $\hat{y}_i = x_i'\hat{\beta}$, respectivamente.

De (39), el objetivo LS:

$$\begin{aligned} \min \hat{u}'\hat{u} &= (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) \\ &= (y' - \hat{\beta}'X')(y - X\hat{\beta}) \\ &= y'y - \hat{\beta}'X'y - y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \\ &= y'y - 2y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial\hat{\beta}} = -2X'y + 2X'X\hat{\beta} = 0 \quad (41)$$

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}(X'y) \quad (42)$$



Estimación del modelo

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

De (41),

$$X' \hat{u} = 0$$

Implicancias⁵:

- $x_1' \hat{u} = 1' \hat{u} = 0$.
- El hiperplano de regresión pasa por los puntos medios de los datos.
- $\bar{\hat{y}} = \bar{y}$.

⁵Sólo si el modelo contiene intercepto.

Alternativamente, de (39):

$$\begin{aligned} \min \sum \hat{u}_i^2 &= \sum (y_i - x_i' \hat{\beta})^2 \\ &= \sum (y_i^2 - 2y_i x_i' \hat{\beta} + \hat{\beta}' x_i x_i' \hat{\beta}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \hat{\beta}} = -2 \sum x_i y_i + 2 \sum x_i x_i' \hat{\beta} = 0 \quad (43)$$

$$\hat{\beta}_{OLS} = (\sum x_i x_i')^{-1} \sum x_i y_i \quad (44)$$

¿Y SOC?



Estimación del modelo

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de métrica

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Supuesto 2 (Gauss)

- 1 Linealidad en los parámetros.
- 2 Matriz de regresores fijo: $E(x_i u_i) = 0$.
- 3 $E(u_i | x_i) = 0 \rightarrow E(u_i) = 0$.
- 4 Perturbaciones esféricas: $E(u_i^2) = \sigma^2 I_n$.
- 5 No multicolinealidad: $\text{ran}(X) = k$.



Normalidad

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Supuesto 3 (Distribución de los errores)

Los errores siguen una distribución de probabilidad normal multivariante:

$$u_i \sim N(0, \sigma^2 I_n) \quad (45)$$



Teorema de Gauss-Markov

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Los LSE son **MELI** (ELIO).

- Muestras pequeñas
 - Linealidad
 - Insesgamiento: $E(\hat{\beta}) = \beta$
 - Eficiencia: $var(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(\sum x_i x_i')^{-1}$
- Muestras grandes
 - Consistencia: $plim_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta} = \beta$
 - Normalidad asintótica: $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \sim N[0, \sigma^2(\frac{X'X}{n})^{-1}]$

El ANOVA es trivial.

- 1 Coeficiente de determinación:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT}, \quad SCT = y'y - n\bar{y}^2, \quad SCE = \hat{y}'\hat{y} - n\bar{y}^2$$

- 2 R^2 ajustado (Henri Theil):

$$\hat{R}^2 = 1 - \frac{\hat{u}'\hat{u} / (n - k)}{y'y - n\bar{y}^2 / (n - 1)}$$

- 3 RMSE o error estándar de regresión:

$$ee = \hat{\sigma}_{\hat{u}}, \quad \hat{\sigma}_{\hat{u}}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n - k}$$



Bondad de ajuste

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Estadísticos de comparación:

① AIC:

$$\ln \left(\frac{\hat{u}' \hat{u}}{n} \right) + \frac{2k}{n}$$

② BIC:

$$\ln \left(\frac{\hat{u}' \hat{u}}{n} \right) + \frac{k}{n} \ln(n)$$

A partir de (42), se puede escribir:

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\beta}) &= E [(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))'] \\&= E [(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] \\&= E \left[((X'X)^{-1}X'u) ((X'X)^{-1}X'u)' \right] \\&= E \left[(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1} \right] \\&= (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1} \\&= (X'X)^{-1}X'(\sigma^2I)X(X'X)^{-1} \\&= \sigma^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} \\&= \sigma^2(X'X)^{-1}\end{aligned}\tag{46}$$



Integración temática

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Ejemplo 7

Con los datos de [be_ejemplo07.dta](#), extraídos de Stock y Watson, realizar el análisis de regresión integral. Véase el ejercicio E6.2 de los autores.



Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

1 Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

2 Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

3 Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

4 Anexos

Se define 3 modelos genéricos. Los **modelos polinómicos** son de la forma

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_2 x_{i2}^2 + \dots + \beta x_{i2}^r + u_i \quad (47)$$

Ejemplo 8

A partir del fichero [be_ejemplo08.do](#), analizar el modelo de regresión cuadrático, es decir, cuando $r = 2$.

¿Qué valor de r elegir?

Los **modelos logarítmicos** tienen 3 formas:

Tipo	Forma	$\Delta x \rightarrow \Delta y$
Lin-Log	$y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln x_{i2} + u_i$	$1\% \rightarrow 0.01\beta_2 \text{ unid}$
Log-Lin	$\ln y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + u_i$	$1\text{unid} \rightarrow 100 * \beta_2\%$
Log-Log	$\ln y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln x_{i2} + u_i$	$1\% \rightarrow 1\%$

Table: Tipología logarítmica

¿Y los exponenciales?

Los **modelos recíprocos** tiene la forma:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{x_{i2}} \right) + u_i \quad (48)$$

¿Qué signos pueden tener los parámetros? ¿Y el log-recíproco?

Ejemplo 9

A partir del fichero [be_ejemplo09.csv](#), evaluar si se cumple la curva de Phillips para el caso peruano. Los datos, extraídos del BM, están en tasas.

Modelos de regresora única

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Modelo	Forma funcional	Efecto marginal	Elasticidad
Lineal	$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2}$	β_2	$\beta_1 \frac{x_{i2}}{y_i}$
Lin-Log	$y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln x_{i2}$	$\frac{\beta_2}{x_{i2}}$	$\frac{\beta_2}{y_i}$
Log-Lin	$\ln y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2}$	$\beta_2 y_i$	$\beta_1 x_{i1}$
Log-Log	$\ln y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln x_{i2}$	$\frac{\beta_2 y_i}{x_{i2}}$	β_2
Cuadrática	$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i2}^2$	$\beta_2 + 2\beta_3 x_{i2}$	$\frac{(\beta_2 + 2\beta_3 x_{i2}) x_{i2}}{y_i}$
Recíproca	$y_i = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{x_{i2}} \right)$	$-\frac{\beta_2}{x_{i2}^2}$	$-\frac{\beta_2}{y_i x_{i1}}$

Table: Métricas en modelos de regresora única



Modelos de múltiples regresoras

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

En un modelo con varias variables independientes, alguna(s) pueden tener formas pseudo-lineales y otras si. En general, se puede escribir:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_{r+1} x_{i2}^r + \theta_1 x_{i3} + \dots + \theta_{k-3} x_{ik-1} + f(x_{ik}) + u_i \quad (49)$$

donde $f(x_{ik})$ es una función no lineal en x_{ik} .

Ejemplo 10

Mincer (1974) planteó una ecuación de capital humano que predice los ingresos:

$$\ln y_i = \beta_1 + \beta_2 ed_i + \beta_3 exp_i + \beta_4 exp_i^2 + u_i$$

Use [be_ejemplo10.csv](#) y analice.



Contenido

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

1 Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

2 Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

3 Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

4 Anexos



Interacciones binarias

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Modelo 1:

Sea:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 d_{i1} + \beta_3 d_{i2} + u_i \quad (50)$$

donde y_i es el valor de una inmueble urbano, $\{d_1 = 1, \text{urbana} | \text{industrial}\}$ y $\{d_2 = 1, \text{pista} | \text{no_pista}\}$. ¿Problemas? Redefiniendo,

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 d_{i1} + \beta_3 d_{i2} + \beta_4 (d_{i1} \times d_{i2}) + u_i \quad (51)$$



Interacciones mixtas

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Modelo 2:

Redefiniendo (50):

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 d_{i1} + u_i \quad (52)$$

donde x_{i2} representa la cantidad de m^2 del predio. ¿Problemas?

Luego,

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 d_{i1} + \beta_4 (x_{i2} d_{i1}) + u_i \quad (53)$$



Interacciones mixtas

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos
Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Modelo 3:

Redefiniendo (52):

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 d_{i1} + u_i \quad (54)$$

donde x_{i3} representa la cantidad de años de antigüedad del predio. ¿Problemas?

Luego,

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 d_{i1} + \beta_5 (x_{i2} x_{i3}) + u_i \quad (55)$$



Referencias

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas

Acerca de metría

Repaso

Modelos lineales

Regresión simple

Regresión múltiple

Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales

Modelos con interacción

Anexos

References

Amemiya, T. (1994). *Introduction to statistics and econometrics*. Harvard University Press.

Frisch, R. (1933). Editor's note. *Econometrica*, 1(1):1–4.

Goldberger, A. (1991). *A course in econometrics*. Harvard University Press.

Greene, W. (2018). *Econometric Analysis*. Pearson, 8th edition.

Intriligator, M. (1983). Economic and econometric models. In Griliches, Z. and Intriligator, M., editors, *Handbook of Econometrics*, volume 1, pages 181–221. Elsevier.

Spanos, A. (1986). *Statistical foundations of econometric modelling*. Cambridge University Press.

Spanos, A. (2019). *Probability theory and statistical inference: Empirical modeling with observational data*. Cambridge University Press.



Recursos

Econometría

Luis Chávez

Introducción

Relaciones empíricas
Acerca de metría
Repaso

Modelos lineales

Regresión simple
Regresión múltiple

Modelos Especiales

Modelos pseudo lineales
Modelos con interacción

Anexos

References

- Stock y Watson.
- Colin Cameron.
- Florian Heiss y Daniel Brunner.
- Econometrics Navigator.
- AEA.
- Econometrics Academy.