

Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e inversión

Agentes

Equilibrio genera

oferta labora

One-period

Anexos

References

#### Macroeconomía Dinámica

Tópico 1: el enfoque intertemporal

Luis Chávez



Departamento Académico de Economía y Planificación UNALM

Lima, 2025



### Contenido

Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e inversión

Agentes

C-----

oferta la

One-period

Allexus

Reference

- Introducción
- 2 Ahorro e inversión Agentes Equilibrio general
- 3 Consumo y oferta laboral One-period Two-period
- 4 Anexos



## Prolegómenos

Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e

Agentes

Consumo v

oferta labora

Two-perio

Allexos

Reference

Estática	Dinámica
Ignora el paso del tiempo, com-	Considera la evolución de vari-
para equilibrios.	ables en el tiempo.
Ajuste instantáneo al nuevo equi-	Ajuste gradual: trayectorias de
librio.	convergencia, ciclos o inestabili-
	dad.
Supone equilibrio inmediato.	Incluye expectativas, rezagos e
	inercia.
Ejemplo: IS–LM antes y después	Ejemplo: modelo de Solow y el
de un shock.	estado estacionario.



## **Antecedentes**

Macrodinámica

Luis Chávez

#### Introducción

- Tiene microfundamentos neoclásicos.
- Se trata de un equilibrio general intertemporal (dinámico).
- Asume mercados competitivos.
- Se busca optimizar matemáticamente.



Macrodinámica

Luis Chávez

#### Introducción

Ahorro e

Agentes Equilibrio genera

oferta labo

Two-period

THICKOS

Reference

- No hay ahorro ni inversión.
- Continuo de hogares idénticos con dotaciones de k = 1 y l = 1.
- Los hogares viven un único período: hoy.
- Continuo de firmas competitivas que producen un único bien y combinando los inputs k y l.
- Los hogares obtienen rentas capital o trabajo para consumir. La dotación de k puede ser gastado en consumo.

Véase más en Alogoskoufis (2019).



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro dinversión

Agentes

Consumo y

One-period

Two-perio

Allexus

Reference

#### Hogares:

Las preferencias el hogares representativo son descritas por una función de utilidad continua, doblemente diferenciable y cóncava:

$$u(c)$$
 (1)

donde:

$$u'=rac{\partial u}{\partial c}>0$$
 (no saciedad)  $u'=rac{\partial^2 u}{\partial c^2}<0$ 



Macrodinámica

Luis Chávez

#### Introducción

#### Hogares:

Sea k el stock de capital rentado, l el volumen de trabajo contratado y c el nivel de consumo. La restricción de recursos se escribe como:

$$c < 1 + rk + wl$$

$$r \leq 1$$
 (3)

$$I \leq 1$$

(2)

Luego, su problema será:

$$\mathcal{L} = u(c) - \lambda_1(c - 1 - rk - wl) - \lambda_2(k - 1) - \lambda_3(l - 1)$$



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e

Agentes

Consumo

One period

Two-period

Allexo

Reference

#### Firma:

La firma representativa produce según una función de producción neoclásica.

$$y_t = AF(k_t, I_t) (5)$$

donde A es PTF y F es una función doblemente diferenciable y cuasicóncava.

$$F_{k} = \frac{\partial F}{\partial k} > 0, F_{l} = \frac{\partial F}{\partial l} > 0$$

$$F_{kk} = \frac{\partial^{2} F}{\partial k^{2}} < 0, F_{kl} = \frac{\partial^{2} F}{\partial k \partial l} > 0$$

$$F_{ll} = \frac{\partial^{2} F}{\partial l^{2}} < 0, F_{lk} = \frac{\partial^{2} F}{\partial l \partial k} > 0$$



Macrodinámica

Luis Chávez

#### Introducción

Ahorro e

Agentes

Equilibrio genera

Consumo y

One-perio

Anevos

Reference

#### Firma:

En términos de producto-trabajo, al partir por / a ambos lados de (5), se tiene:

$$\hat{y} = Af(\hat{k}) \tag{6}$$

Luego, su problema será:

$$\max_{\substack{\{k,l\}}} \pi = Af(\hat{k}) - r\hat{k} - w$$



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e

Agentes

Equilibrio genera

oferta labor

i wo-perio

Reference

El equilibrio general estará dado por la equivalencia de la oferta y demanda de factores y la equivalencia de la oferta y demanda de bienes.

Al resolver el problema del hogar, se tiene:

$$k = \hat{k} = 1, \quad l = 1 \tag{7}$$

Los precios de los factores estarán dados al reemplazar (7) en la demanda de factores subyacentes al problema de la firma. El cálculo de los otros valores de equilibrio son triviales.



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro dinversión

Agentes

Equilibrio gene

Consumo

One perior

Two-perio

Anexos

Reference

#### Ejemplo 1

Asuma un hogar representativo con dotaciones  $k_0$  y  $l_0$ . Hallar la producción, consumo, tasa de interés y salario real asumiendo una función de producción de la forma

$$y = \frac{1}{4}k^a I^b \tag{8}$$



### Contenido

Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e inversión

#### Agentes

Equilibrio gener

Consumo y

One-period

Anexos

References

- Introducción
  - 2 Ahorro e inversión Agentes
- 3 Consumo y oferta laboral One-period Two-period
  - 4 Anexos



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e inversión

#### Agentes

Equilibrio genera

oferta lab

Two-period

Anexos

Reference

- El hogar vive dos períodos: presente y futuro.
- Esta dotado de 1 unidad de k en t = 1 y 1 unidad de l en t = 1, 2.
- No hay incertidumbre.
- Puede utilizar los ingresos del alquiler de capital y trabajo para consumo o inversión.
- En t = 2, el capital es igual a la dotación inicial y la inversión realizada.
- Al final de t=2, el hogar representativo consume sus ingresos de t=2 más el stock de capital remanente de t=1.



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro dinversión

Agentes

Equilibrio gener

oferta la

One-period

Anevo

Reference

Las preferencias están dadas por

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \frac{1}{1+\rho}u(c_2), \quad \rho > 0$$
 (9)

donde  $u(\cdot)$  es una función continua, doblemente diferenciable y cóncava,  $\rho$  es la tasa pura de preferencia temporal (impaciencia). Las restricciones son:

$$1 + r_1 k_1 + w_1 l_1 - c_1 = k_2 (10)$$

$$c_2 = (1+r_2)k_2 + w_2l_2 (11)$$



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e

Agentes

Equilibrio gener

Consumo y

One-perio

Two-perio

Anexo

Reference

Dado que  $k_1 = l_1 = l_2 = 1$ , se puede escribir

$$(1+r_1)+w_1-c_1=k_2 (12)$$

$$c_2 = (1+r_2)k_2 + w_2 \tag{13}$$

Combinando, la restricción presupuestaria intertemporal:

$$c_1 + \frac{1}{1 + r_2}c_2 = (1 + r_1) + w_1 + \frac{1}{1 + r_2}w_2 \tag{14}$$



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro d

Agentes

Equilibrio genera

Consumo

One-period

Two-nerio

Anexo

References

El problema del hogar es:

$$\mathcal{L} = u(c_1) + rac{1}{1+
ho}u(c_2) - \lambda\left(c_1 + rac{1}{1+r_2}c_2 - 1 - r_1 - w_1 - rac{1}{1+r_2}w_2
ight)$$

FOC:

$$u'(c_1) = \lambda \tag{15}$$

$$\frac{1}{1+\rho}u'(c_2) = \frac{\lambda}{1+r_2} \tag{16}$$



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e

Agentes

Equilibrio genera

oferta labo

One-period

Anexos

Reference

La ecuación de Euler del consumo se puede escribir como

$$\frac{1}{1+\rho}\frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{1}{1+r_2} \tag{17}$$

La tasa marginal de sustitución entre el consumo futuro y el actual es igual a la tasa marginal de transformación del consumo futuro en consumo actual, o el coste de oportunidad (precio) del consumo futuro.

¿Qué pasa si  $\rho = r_2$ ? Estabilización del consumo. ¿Y los demás casos?



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e inversiór

#### Agentes

Equilibrio gener

Consumo y

One-period

T....

Anexos

Reference

#### Ejemplo 2

Considerando el marco del modelo y el caso de la función CEIS, dada por

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}, \quad \theta \neq 1 \tag{18}$$

hallar la RMS, la elasticidad de sustitución intertemporal y la ecuación de Euler.



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducció

Ahorro e inversiór

Agentes

Equilibrio gene

Consumo

One-perio

Two-perio

Anexo

Reference

La firma representativa produce un único bien según la FPN:

$$y_t = A_t F(k_t, I_t), \quad \forall t = 1, 2$$
 (19)

o, en términos percápita,

$$y_t = A_t f(\hat{k}_t) I_t \tag{20}$$

Maximizan profits según:

$$\pi_t = A_t f(\hat{k}_t) I_t - r_t k_t - w_t I_t \tag{21}$$

Las firmas emplearán capital y trabajo hasta que PMg(K) = r y hasta que el PMg(L) = w.



Macrodinámica Luis Chávez

Agentes

$$0\pi$$
.

$$\frac{\pi_t}{M} =$$

$$\frac{\pi_t}{\sigma} = A_t f$$

$$=A_t f\left(\frac{k_t}{l_t}\right) +$$

 $r_t = A_t f'(\hat{k}_t)$ 

 $w_t = A_t f(\hat{k}_t) - A_t \hat{k}_t f'(\hat{k}_t)$ 

$$+A_tI_tf'$$

 $r_t = A_t f'(\hat{k}_t) \cdot \frac{1}{I} \cdot I_t$ 

$$\frac{k_t}{l_t}$$

 $\frac{\partial \pi_t}{\partial k_t} = A_t f'\left(\frac{k_t}{l_t}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial k_t}\left(\frac{k_t}{l_t}\right) \cdot l_t - r_t = 0$ 

$$\left(\frac{R_t}{I_t}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial I_t}$$

$$w_t = A_t f(\hat{k}_t) + A_t I_t \cdot f'(\hat{k}_t) \cdot \left(-\frac{k_t}{I^2}\right)$$

$$\left(-\frac{k_t}{l_t^2}\right)$$

$$\cdot \left(-\frac{\kappa_t}{l_t^2}\right)$$

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial I_t} = A_t f\left(\frac{k_t}{I_t}\right) + A_t I_t f'\left(\frac{k_t}{I_t}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial I_t}\left(\frac{k_t}{I_t}\right) - w_t = 0$$



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e

#### Agentes

Equilibrio gener

Consumo y

One-perio

One-perio

Anexo

Reference

### Ejemplo 2 (continuación)

Ahora asuma una función de producción Cobb-Douglas, dada por

$$y_1 = Ak_1^{\alpha} l_1^{1-\alpha} \tag{24}$$

$$y_2 = A(1+g)k_2^{\alpha}l_2^{1-\alpha} \tag{25}$$

donde g es el progreso tecnológico. Hallar las demandas de factores.



### Contenido

Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e inversión

Agentes Equilibrio general

.

oferta labo

One-period

Anexos

References

- Introducción
- 2 Ahorro e inversión

Agentes

Equilibrio general

- 3 Consumo y oferta laboral One-period Two-period
- 4 Anexos



## **Equilibrio**

Macrodinámica Luis Chávez

Equilibrio general

Dado la dotación inicial,  $k_1 = l_1 = 1$ , se tiene

 $\hat{k}_{1}^{*}=1$ 

Reemplazando en (22) y (23), se tiene los precios de renta y capital de equilibrio:

 $r_1^* = A_t f'(\hat{k}_t^*)$ 

 $w_1^* = A_t f(\hat{k}_t^*) - A_t \hat{k}_t^* f'(\hat{k}_t^*)$ 

 $y_1^* = A$ 

 $\hat{k}_{2}^{*} = k_{2}$ 

(29)

(26)

(27)

(28)

(30)

23 / 44

y, dado que  $l_2 = 1$ ,

Además, de (20):



# **Equilibrio**

Macrodinámica

Luis Chávez

Introducció

Ahorro e

Agentes

Fauilibrio general

Equilibrio genera

oferta labor

i wo-peri

Reference

Dada la HG1 de la FP, IT=CT. Luego,

$$y_1^* = r_1^* + w_1^* = A (31)$$

Al reemplazar (31) en (12) y (13), se tiene, respectivamente:

$$c_1^* = 1 + A - k_2 \tag{32}$$

$$c_2^* = k_2 + y_2 = k_2 + Af(\hat{k}_2^*)l_2$$
 (33)

$$r_2^* = PMg(k_2) \tag{34}$$

Al reemplazar (32), (33) y (34) en la ecuación de Euler (17), se tiene  $k_2^*$ , la cual se resuelve con métodos numéricos. Con ello, ya se puede resolver los valores anteriores de equilibrio. Resta hallar  $w_2^*$ , que se calcula usando  $PMg(k_2)$ .



### Contenido

Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e inversiór

Agentes

C-----

oferta la

One-period

Anexos

References

- Introducción
  - 2 Ahorro e inversión Agentes Equilibrio general
- 3 Consumo y oferta laboral One-period
  - 1 WO PENOC
- 4 Anexos



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducció

Ahorro e

Agentes

Consumo

oferta la

One-period

Anexos

Reference

- 1 Los hogares eligen consumo y oferta laboral.
- 2 El trabajo es el único input.
- 3 El tiempo puede ser usado en ocio z, que genera utilidad, o alquilarse como mano de obra l al salario w.
- 4 Las restricciones de recursos se escribe:

$$z + l = 1 \tag{35}$$

$$c = wl (36)$$



Macrodinámica

Luis Chávez

One-period

La utilidad, doblemente diferenciable y cuasicóncava, se escribe como

$$u(c,z) \tag{37}$$

Bajo, no saciedad, el hogar usará todo su tiempo en z o I, luego su problema será:

$$\mathcal{L} = u(c, 1 - I) - \lambda(c - wI)$$
(38)

FOC:

$$u_c = \lambda$$

$$u_c = \lambda \tag{39}$$

$$u_z = \lambda w \tag{40}$$



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro dinversión

Agentes

Equilibrio gener

Consumo

One-period

One-perio

Anexo

Reference

En el óptimo,

$$\frac{u_z}{u_c} = w \tag{41}$$

Diferenciando totalmente (37), se tiene la TMS:

$$\frac{dc}{dz} = -\frac{u_z}{u_c} \tag{42}$$

Por lo que en el óptimo, la TMS es igual al ratio de utilidades marginales de ocio y consumo.



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e

Agentes Equilibrio general

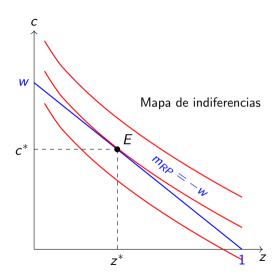
Consumo v

oferta labo

One-period

Two-period

References





Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e inversión

Agentes

C C

Consumo y oferta labor

One-period

Two-perio

Anexo

Reference

### Ejemplo 3

Sea el caso de la función de utilidad aditivamente separable:

$$u(c, 1-I) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} - \frac{I^{1+\gamma}}{1+\gamma}, \quad \gamma, \theta \ge 0$$
(43)

La RMS será:

$$-\frac{u_z}{u_c} = -\frac{I^{\gamma}}{c^{-\theta}} = w \tag{44}$$

Al despejar I y derivar respecto a w se tiene la elasticidad de Frisch de oferta laboral,  $1/\gamma$ .



## La firma

Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e inversión

Agentes

Equilibrio genera

oferta labor

One-period

Anexos

Reference

1 La firma competitiva renta laburo en un mercado de factores competitivo.

2 La tecnología de la firma para una PTF de A es

$$y = AI (45)$$

3 El problema de la firma es

$$\max_{l} \pi = Al - wl \tag{46}$$

4 En condiciones de equilibrio,

$$A = w (47)$$



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducció

Ahorro inversió

Agentes Equilibrio genera

\_\_\_\_\_

Consumo y oferta labora

One-period

Δηργο

Reference

De (36) y (45) y (47), se tiene la condición de equilibrio del mercado de bienes

$$c^* = AI \tag{48}$$

De (44) y (47), se tiene la condición de equilibrio del mercado laboral

$$-\frac{I^{\gamma}}{c^{-\theta}} = A \tag{49}$$

Resolviendo (48) y (49), se tiene la tasa de empleo de equilibrio:

$$I^* = A^{\frac{1-\theta}{\gamma+\theta}} \tag{50}$$



Macrodinámica

Luis Chávez

troducció

Ahorro e

Agentes

Equilibrio gener

Consumo y oferta labo

One-period

.

References

De (47),

(47),

 $w^* = A$ 

4

De (45), se tiene la producción de equilibrio

 $y^* = A^{rac{\gamma+1}{\gamma+ heta}}$ 

(52)

(51)

De (48),

 $c^* = A^{\frac{\gamma+1}{\gamma+\theta}} = v^*$ 

 $=y^* \tag{53}$ 



## Contenido

Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e inversiór

Agentes

Consumo

oferta la

One-period Two-period

Δ ...

References

- Introducción
  - Ahorro e inversión Agentes Equilibrio general
- 3 Consumo y oferta laboral

One-period

Two-period

4 Anexos



# Hogar

Macrodinámica

Luis Chávez

Introducció

Ahorro e

Agentes

Equilibrio gener

Consumo

Oleita ia

One-period

Two-period

Anexos

Reference

1 Escoge consumo y empleo en ambos períodos.

- 2 Dotaciones  $l_1 = l_2 = 1$ .
- 3 Su tiempo puede usarlo en ocio o en oferta laboral a la firma competitiva.
- 4 Su ingreso puede usarlo en consumo.
- **5** No hay ahorro en t = 2.



## Bases

Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e inversiór

Agentes

Equilibrio genera

Consumo y

One perior

Two-period

Anexos

Reference

Sea la función de utilidad:

$$U = rac{c_1^{1- heta}}{1- heta} - rac{l_1^{1+\gamma}}{1+\gamma} + rac{1}{1+
ho} \left(rac{c_2^{1- heta}}{1- heta} - rac{l_2^{1+\gamma}}{1+\gamma}
ight)$$

sujeto a

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = w_1 l_1 + \frac{w_2 l_2}{1+r} \tag{55}$$

(54)



# Hogar

Macrodinámica

Luis Chávez

 $L = \frac{c_1^{1-\theta}}{1-\theta} - \frac{l_1^{1+\gamma}}{1+\gamma} + \frac{1}{1+\rho} \left( \frac{c_2^{1-\theta}}{1-\theta} - \frac{l_2^{1+\gamma}}{1+\gamma} \right) - \lambda \left( c_1 + \frac{c_2}{1+r} - w_1 l_1 - \frac{w_2 l_2}{1+r} \right)$ 

FOC:

$$rac{c_2^{- heta}}{1+
ho}=rac{\lambda}{1+ heta}$$

 $c_1^{-\theta} = \lambda$ 

$$1+r$$

$$1+r$$

$$= \lambda w_1$$

$$I_1^{\gamma} = \lambda w_1$$

$$l_1^{\gamma} = \lambda w_1$$

$$J_2^{\gamma}$$
 \_ \_ \_

(56)

(57)



# Hogar

Macrodinámica

Luis Chávez

Introducció

Ahorro e

Agentes

Equilibrio genera

Consumo y oferta labor

One-period

Anexos

References

De (56 y (57) se tiene la ecuación de Euler del consumo:

$$\frac{1}{1+\rho} \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{-\theta} = \frac{1}{1+r} \tag{60}$$

De (58 y (59) se tiene la ecuación de Euler de la oferta laboral:

$$\frac{1}{1+\rho} \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{\gamma} = \frac{1}{1+r} \frac{w_2}{w_1} \tag{61}$$

Al reemplazar (56) en (58) y (57) en (59), se tiene las condiciones óptimas de consumo y ocio de cada período:

$$(w_1, w_2) = \left(\frac{l_1^{\gamma}}{c_1^{-\theta}}, \frac{l_2^{\gamma}}{c_2^{-\theta}}\right)$$
 (62)



Macrodinámica

Luis Chávez

Two-period

Se asume que:

Su problema es:

Resolviendo.

 $(w_1, w_2) = (A, A(1+g))$ 

 $v_1 = AI_1, A > 0$ 

 $y_2 = A(1+g)I_2$ , A > 0, g > 0

 $\max_{i} \pi_1 = AI_1 - w_1I_1$ 

 $\max \pi_2 = A(1+g)I_2 - w_2I_2$ 

(67)

39 / 44

(63)

(64)

(65)

(66)



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducció

Ahorro d

Agentes

Equilibrio genera

Consumo y

.

One-period
Two-period

Anexos

Reference

Dado que el salario real es igual a la productividad total del factor,

$$y_1 = AI_1 = w_1I_1$$

$$y_2 = A(1+g)I_2 = w_2I_2$$

(68)



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducció

Ahorro e

Agentes

Equilibrio gener

Consumo

One-period

Two-period

Anexos

Reference

Dada la RR c = wl, las condiciones de equilibrio del mercado de productos son

$$c_1 = A I_1 \tag{70}$$

$$c_2 = A(1+g)I_2 (71)$$

De (62) y (67), se tiene las condiciones de equilibrio del mercado de trabajo:

$$A = \frac{I_1^{\gamma}}{c_1^{-\theta}} \tag{72}$$

$$A(1+g) = \frac{l_2^{\gamma}}{c_2^{-\theta}} \tag{73}$$



Macrodinámica

Luis Chávez

Two-period

De (70) y (72),

$$I_1^* = A^{\frac{1-\theta}{\gamma+\theta}} \tag{74}$$

De (71) y (73),

$$I_2^* = [A(1+g)]^{\frac{1-\theta}{\gamma+\theta}}$$
 (75)

Los valores de equilibrio del empleo serán función directa de A si  $\theta < 1$ , es decir, si  $\epsilon = 1/\theta > 1$ . Además.

$$w_1^* = A$$

(76)

$$w_2^* = A(1+g)$$

(77)



Macrodinámica

Luis Chávez

Introducció

Ahorro e inversión

Agentes

Equilibrio genera

oferta labo

One-period

Two-period

De la ecuación de Euler, se tiene la tasa de interés de equilibrio

$$1 + r^* = (1 + \rho)(1 + g)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma + \theta}} \tag{78}$$

También, se puede inferir que

$$y_1^* = c_1^* = A^{\frac{\gamma+1}{\gamma+\theta}} \tag{79}$$

$$y_2^* = c_2^* = [A(1+g)]^{\frac{\gamma+1}{\gamma+\theta}}$$
 (80)

#### Nota

¿Para qué tanta abstracción? Este modelo es la base de los modelos DSGE.



### Referencias

Macrodinámica

Luis Chávez

Introducción

Ahorro e

Agentes

Equilibrio gener

Consumo

oferta la

One-perio

Anexos

References

Alogoskoufis, G. (2019). Dynamic Macroeconomics. MIT Press.