

# PS01 – Economic Policy

Lecturer: Luis Chávez

Los siguientes ejercicios permiten medir la capacidad analítica y procedimental. Se sugiere resolverlos en forma ascendente.

## Problema 1: DGE determinístico

### a) El modelo:

La familia representativa resuelve

$$\max_{\{C_t, I_t, O_t\}} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\theta \ln(C_t) + (1 - \theta) \ln(1 - L_t)]; \quad 0 < \beta < 1 \quad (1)$$

sujeto a

$$C_t + I_t = w_t L_t + r_t K_t \quad (2)$$

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t, \quad \delta > 0 \quad (3)$$

La firma representativa resuelve:

$$\max_{\{K_t, L_t\}} \pi_t = Y_t - w_t L_t - r_t K_t \quad (4)$$

s.a

$$Y_t = A_t K_t^{1-\alpha} L_t^\alpha \quad (5)$$

### b) Solución

El langriano de la familia será:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \{ \beta^t [\theta \ln(C_t) + (1 - \theta) \ln(1 - L_t)] - \lambda_t [C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t - w_t L_t - r_t K_t] \} \quad (6)$$

FOC:

$$\frac{C_t}{\lambda_t} \quad \beta^t \left\{ \theta \frac{1}{C_t} - \lambda_t \right\} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{L_t}{\lambda_t} \quad \beta^t \left\{ -(1 - \theta) \frac{1}{1 - L_t} + w_t \lambda_t \right\} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{K_t}{\lambda_t} \quad \beta^t \{ \lambda_t (1 - \delta + r_t) \} - \beta^{t-1} \lambda_{t-1} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\lambda_t}{\lambda_t} \quad \beta^t \{ C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t - w_t L_t - r_t K_t \} = 0 \quad (10)$$

De (7) en (8) se tiene

$$(1 - \theta) \frac{1}{1 - L_t} = w_t \frac{\theta}{C_t}$$

Organizando, se tiene la ecuación de euler de la relación marginal de sustitución entre consumo y ocio:

$$w_t = \frac{1 - \theta}{\theta} \frac{C_t}{1 - L_t} \quad (11)$$

De (7) en (9), se tiene

$$\beta \frac{\theta}{C_t} (1 - \delta + r_t) = \frac{\theta}{C_{t-1}}$$

Organizando, se tiene la ecuación de Euler del ratio del consumo:

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta [1 - \delta + r_t] \quad (12)$$

De (10) se tiene,

$$C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t = w_t L_t + r_t K_t \quad (13)$$

Por su parte, la firma resuelve una expresión irrestricta si de (4) y (5) se escribe:

$$\max_{\{K_t, L_t\}} \pi_t = A_t K_t^{1-\alpha} L_t^\alpha - w_t L_t - r_t K_t \quad (14)$$

FOC:

$$\frac{K_t}{L_t} \quad (1 - \alpha) A_t K_t^{-\alpha} L_t^\alpha - r_t = 0 \quad (15)$$

$$\frac{L_t}{K_t} \quad \alpha A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha-1} - w_t = 0 \quad (16)$$

De (15), se tiene la ecuación de demanda de capital:

$$r_t = (1 - \alpha) A_t K_t^{-\alpha} L_t^\alpha = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{K_t} \quad (17)$$

De (16), se tiene la ecuación de demanda laboral:

$$w_t = \alpha A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha-1} = \alpha \frac{Y_t}{L_t} \quad (18)$$

Ahora, (17) y (18) en (13), se tiene:

$$C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t = [\alpha A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha-1}] L_t + [(1 - \alpha) A_t K_t^{-\alpha} L_t^\alpha] K_t$$

De donde se tiene la ecuación en diferencia (limpieza):

$$C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t = A_t K_t^{1-\alpha} L_t^\alpha \quad (19)$$

Asimismo, se puede reemplazar (18) en (11) y se tiene

$$\alpha A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha-1} = \frac{1 - \theta}{\theta} \frac{C_t}{1 - L_t} \quad (20)$$

También se puede reemplazar (18) en (12) y se tiene ora ecuación en diferencias:

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta [1 - \delta + (1 - \alpha) A_t K_t^{-\alpha} L_t^\alpha] \quad (21)$$

Por lo tanto, la solución competitiva estará dada por las ecuaciones (19), (20) y (21).

$$\begin{cases} C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t = A_t K_t^{1-\alpha} L_t^\alpha \\ \alpha A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha-1} = \frac{1 - \theta}{\theta} \frac{C_t}{1 - L_t} \\ \frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta [1 - \delta + (1 - \alpha) A_t K_t^{-\alpha} L_t^\alpha] \end{cases} \quad (22)$$

### Problema 2: DGE centralizado

Resuelva el modelo centralizado del problema 1.

### Problema 3: DGE con dinero

Sea un MIU sin incertidumbre de horizonte finito, donde el hogar representativo sólo vive 3 períodos  $\{t\}_0^2$ . El hogar resuelve su problema eligiendo consumo, saldos reales de dinero y bonos reales. En concreto,

$$\max_{\{c_t, m_t, b_t\}_{t=0}^2} \sum_{t=0}^2 \beta^t [\ln(c_t) + \gamma \ln(m_t)], \quad \gamma > 0, \beta \in (0, 1) \quad (23)$$

s.a

$$c_t + m_t + b_t = w_t + \tau_t + b_{t-1} \frac{1 + i_{t-1}}{1 + \pi_t} + m_{t-1} \frac{1}{1 + \pi_t}, \quad \{t\}_0^2 \quad (24)$$

$$m_t \geq 0, \quad \{t\}_0^2$$

$$m_{-1}, b_{-1} \text{ dado}$$

El hogar trabaja para su propia firma y percibe salarios ( $w_t$ ). Otra fuente de ingreso son las transferencias no condicionadas ( $\tau$ ). Los otros precios,  $r_t$  y  $\pi_t$ , también están dados.

- Explique la necesidad de imponer la restricción de no negatividad  $b_2 > 0$ .
- Escriba el lagrangiano del hogar.
- Resuelva las FOC.
- Halle las ecuaciones de Euler e interprete.