PS01 – Economic Policy

Lecturer: Luis Chávez

Los siguientes ejercicios permiten medir la capacidad analítica y procedimental. Se sugiere resolverlos en forma ascendente.

Problema 1: DGE determinístico descentralizado

a) El modelo
La familia representativa resuelve

$$\max_{\{C_t, I_t, O_t\}} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\theta \ln(C_t) + (1-\theta)\ln(1-L_t)]; \quad 0 < \beta < 1 \tag{1}$$

sujeto a

$$C_t + I_t = w_t L_t + r_t K_t \tag{2}$$

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t, \quad \delta > 0 \tag{3}$$

La firma representativa resuelve:

$$\max_{\{K_t, L_t\}} \pi_t = Y_t - w_t L_t - r_t K_t \tag{4}$$

s.a

$$Y_t = A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha} \tag{5}$$

b) Solución
El langriano de la familia será:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t [\theta \ln(C_t) + (1-\theta)\ln(1-L_t)] - \lambda_t [C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t - w_t L_t - r_t K_t] \right\} \tag{6}$$

FOC:

$$\underline{C_t|} \quad \beta^t \left\{ \theta \frac{1}{C_t} - \lambda_t \right\} = 0 \tag{7}$$

$$\underline{L_t|} \quad \beta^t \left\{ -(1-\theta)\frac{1}{1-L_t} + w_t \lambda_t \right\} = 0 \tag{8}$$

$$\underline{K_t|} \quad \beta^t \left\{ \lambda_t (1-\delta + r_t) \right\} - \beta^{t-1}\lambda_{t-1} = 0 \tag{9}$$

$$\underline{\lambda_t|} \quad \beta^t \left\{ C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t - w_t L_t - r_t K_t \right\} = 0 \tag{10}$$

De (7) en (8) se tiene

$$(1-\theta)\frac{1}{1-L_t} = w_t \frac{\theta}{C_t}$$

Organizando, se tiene la ecuación de euler de la relación marginal de sustitución entre consumo y ocio:

$$w_t = \frac{1-\theta}{\theta} \frac{C_t}{1-L_t} \tag{11}$$

De (7) en (9), se tiene

$$\beta\frac{\theta}{C_t}(1-\delta+r_t)=\frac{\theta}{C_{t-1}}$$

Organizando, se tiene la ecuación de Euler del ratio del consumo:

$$\frac{C_t}{C_{t-1}}=\beta[1-\delta+r_t] \tag{12}$$

De (10) se tiene,

$$C_t+K_{t+1}-(1-\delta)K_t=w_tL_t+r_tK_t \tag{13}$$

Por su parte, la firma resuelve una expresión irrestricta si de (4) y (5) se escribe:

$$\max_{\{K_t,L_t\}}\pi_t=A_tK_t^{1-\alpha}L_t^{\alpha}-w_tL_t-r_tK_t \tag{14}$$

FOC:

$$\underline{K_t|}\quad (1-\alpha)A_tK^{-\alpha}L_t^{\alpha}-r_t=0 \tag{15}$$

$$\underline{L_t|}\quad \alpha A_tK^{1-\alpha}L_t^{\alpha-1}-w_t=0 \tag{16}$$

De (15), se tiene la ecuación de demanda de capital:

$$r_t=(1-\alpha)A_tK^{-\alpha}L_t^{\alpha}=(1-\alpha)\frac{Y_t}{K_t} \tag{17}$$

De (16), se tiene la ecuación de demanda laboral:

$$w_t=\alpha A_tK^{1-\alpha}L_t^{\alpha-1}=\alpha\frac{Y_t}{L_t} \tag{18}$$

Ahora, (17) y (18) en (13), se tiene:

$$C_t+K_{t+1}-(1-\delta)K_t=\left[\alpha A_tK^{1-\alpha}L_t^{\alpha-1}\right]L_t+\left[(1-\alpha)A_tK^{-\alpha}L_t^{\alpha}\right]K_t$$

De donde se tiene la ecuación en diferencia (limpieza):

$$C_t+K_{t+1}-(1-\delta)K_t=A_tK^{1-\alpha}L_t^{\alpha} \tag{19}$$

Asimismo, se puede reemplazar (18) en (11) y se tiene

$$\alpha A_tK^{1-\alpha}L_t^{\alpha-1}=\frac{1-\theta}{\theta}\frac{C_t}{1-L_t} \tag{20}$$

También se puede reemplazar (18) en (12) y se tiene ora ecuación en diferencias:

$$\frac{C_t}{C_{t-1}}=\beta[1-\delta+(1-\alpha)A_tK^{-\alpha}L_t^{\alpha}] \tag{21}$$

Por lo tanto, la solución competitiva estará dada por las ecuaciones (19), (20) y (21).

$$\begin{cases} C_t+K_{t+1}-(1-\delta)K_t=A_tK^{1-\alpha}L_t^{\alpha}\\ \alpha A_tK^{1-\alpha}L_t^{\alpha-1}=\frac{1-\theta}{\theta}\frac{C_t}{1-L_t}\\ \frac{C_t}{C_{t-1}}=\beta\left[1-\delta+(1-\alpha)A_tK^{-\alpha}L_t^{\alpha}\right]\end{cases} \tag{22}$$

Problema 2: DGE centralizado

a) El modelo

Para mudar al modelo centralizado, sólo se resuelve un problema de optimización, donde se va a setear el consumo, la inversión y la cantidad de laburo:

$$\max_{\{C_t,I_t,L_t\}} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t[\theta \ln(C_t) + (1-\theta)\ln(1-L_t)]; \quad 0 < \beta < 1 \tag{23}$$

sujeto a

$$C_t + I_t = A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha}$$

o, al ajustar por (3), se tiene:

$$C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha} \tag{24}$$

b) Solución

El langriano del planner será:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{\beta^t[\theta \ln(C_t) + (1-\theta)\ln(1-L_t)] - \lambda_t[C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t - A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha}]\right\} \tag{25}$$

FOC:

$$\underline{C_t|} \quad \beta^t \left\{\theta \frac{1}{C_t} - \lambda_t\right\} = 0 \tag{26}$$

$$\underline{L_t|} \quad \beta^t \left\{-(1-\theta)\frac{1}{1-L_t} + \lambda_t \alpha A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha-1}\right\} = 0 \tag{27}$$

$$\underline{K_t|} \quad \beta^t \left\{\lambda_t(1-\delta) + \lambda_t(1-\alpha)A_t K_t^{-\alpha} L_t^{\alpha}\right\} - \beta^{t-1}\lambda_{t-1} = 0 \tag{28}$$

$$\underline{\lambda_t|} \quad \beta^t \left\{C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t - A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha}\right\} = 0 \tag{29}$$

De (29) se tiene la misma ecuación (19):

$$C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha} \tag{19}$$

De (26) en (27),

$$(1-\theta)\frac{1}{1-L_t} = \frac{\theta}{C_t}\alpha A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha-1}$$

Reordenando, se tiene la misma ecuación (20):

$$\frac{1-\theta}{\theta}\frac{1}{1-L_t} = \alpha A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha-1} \tag{20}$$

De (26) en (28),

$$\beta\frac{\theta}{C_t}[(1-\delta) + (1-\alpha)A_t K_t^{-\alpha} L_t^{\alpha}] = \frac{\theta}{C_{t-1}}$$

Reordenando, se tiene la misma ecuación (21):

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta[(1-\delta) + (1-\alpha)A_t K_t^{-\alpha} L_t^{\alpha}] \tag{21}$$

Por lo tanto, el problema del planner alcanza el mismo sistema de ecuaciones que el modelo descentralizado.

Problema 3: DGE con dinero

Sea un MIU sin incertidumbre de horizonte finito, donde el hogar representativo sólo vive 3 períodos $\{t\}_0^2$. El hogar resuelve su problema eligiendo consumo, saldos reales de dinero y bonos reales. En concreto,

$$\max_{\{c_t, m_t, b_t\}_{t=0}^2} \sum_{t=0}^{2} \beta^t \left[\ln(c_t) + \gamma \ln(m_t)\right], \quad \gamma > 0,\ \beta \in (0,1) \tag{30}$$

s.a

$$c_t + m_t + b_t = w_t + \tau_t + b_{t-1}\frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t} + m_{t-1}\frac{1}{1+\pi_t}, \quad \{t\}_0^2 \tag{31}$$

$$m_t \geq 0, \quad \{t\}_0^2$$

$$m_{-1}, b_{-1} \text{ dado}$$

El hogar trabaja para su propia firma y percibe salarios (w_t). Otra fuente de ingreso son las transferencias no condicionadas (τ). Los otros precios, r_t y π_t, también están dados.

a) Explique la necesidad de imponer la restricción de no negatividad $b_2 > 0$.

b) Escriba el lagrangiano del hogar.

c) Resuelva las FOC.

d) Halle las ecuaciones de Euler e interprete.