



Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Teoría de los Juegos e Información

Tópico 1: Juegos Estáticos con Información Completa

Luis Chávez



Escuela Profesional de Economía
USMP

Lima, 2025



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica
Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones
Productos homogéneos
Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas
Randomización
Geometría

5 Anexos



Bienvenida

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References

¿Los laboratorios farmacéuticos coluden? ¿Cómo compiten las aerolíneas? ¿Qué son los incentivos? ¿Qué puja elegir en las subastas de SUNAT? ¿Cuál es el rol de las señales?

¡Bienvenidos al mundo de las estrategias!



Conceptos básicos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Definición 1 (Estrategias)

Conjunto de **decisiones** (planes de acción) que toma una persona (jugador), según sus preferencias, para enfrentar una determinada situación.

¿Y el comportamiento estratégico? ¿Es inherente al ser humano?

Supuesto 1 (Racionalidad)

Los agentes toman decisiones racionales.



Conceptos básicos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References

Ejemplo 1

¿Qué situación es más complicada?

- 1 Cortar un árbol.
- 2 Matar una serpiente.

Definición 2 (juegos)

Es la interacción estratégica entre jugadores, donde cada uno toma decisiones racionales basadas en reglas preestablecidas, con el objetivo de maximizar una recompensa.



Conceptos básicos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Definición 3 (teoría de juegos)

Área de la matemática aplicada que estudia situaciones donde los agentes toman decisiones estratégicas interdependientes.

Estrategias:

- Puras.
- Mixtas.



Historial

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

- 1 Nace con la aparición de las probabilidades y las apuestas.
- 2 Antoine Gombaud (1654) uno de los pioneros en hablar de loterías.
- 3 Emil Borel estableció algunos intentos para jugar mejor.
- 4 Jon von Newmann (1928) se le acreditó como el fundador de la teoría de juegos moderna.
- 5 Nash (1949) estableció el primer equilibrio en los juegos.
- 6 Nash (1994) ganó el premio Nobel junto a Reinhard Selten y John Harsanyi.

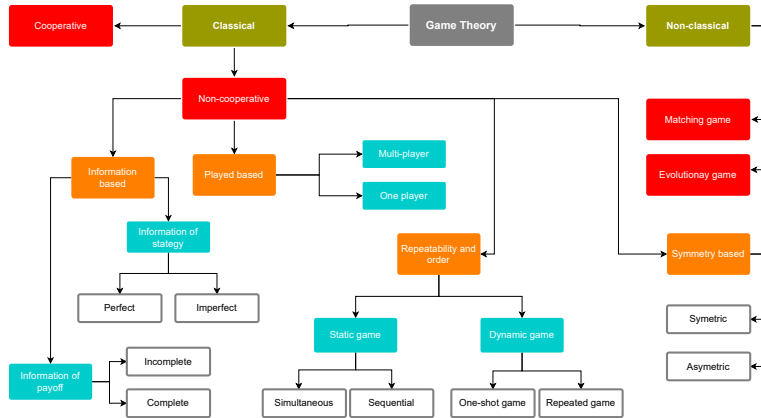


Figure: Taxonomía de teoría de juegos (Ahmad et al., 2023)



Aplicaciones

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References

- ① Deep Learning.
- ② Subastas.
- ③ Estrategias empresariales.
- ④ Relaciones internacionales.
- ⑤ Problemas de principal-agente.
- ⑥ Bargaining.
- ⑦ Elecciones.



Elementos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References

- 1 Conjunto finito N de jugadores: $\forall i = 1, \dots, n, i \in N$.
- 2 Conjunto finito de m estrategias puras $\forall i \in N: S_i = \{s_j\}_{j=1}^m$.
- 3 Conjunto de perfiles de estrategias puras:

$$S = \prod_{i=1}^n S_i$$

- 4 Función de utilidad o de *payoffs*: u_i .
- 5 Conjunto finito \mathcal{O} de *outcomes*: $\mathcal{O} = \{o_1, o_2, \dots\}$.
- 6 Reglas.



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

5 Anexos



Formas

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Definición 4 (Forma normal)

Un juego G se **representa en forma normal** (estratégica) si la cantidad de jugadores, sus respectivas estrategias y los pagos/outcomes están claramente definidos en una matriz de pagos.

Definición 5 (Forma extensiva)

Un juego se **representa en forma extensiva** cuando las jugadas se describen mediante un árbol de decisión, donde los nodos indican los turnos de decisión de los jugadores y las ramas esquematizan sus posibles estrategias.



Formas

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Actividad 1. Plantear la matriz de pagos para 3 jugadores. Use 4, 3 y 2 estrategias para los jugadores $N = \{1, 2, 3\}$, respectivamente.



Función de utilidad

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Supuesto 2 (simultaneidad)

Los jugadores eligen sus estrategias de forma simultánea (no implica “al mismo tiempo”).

Supuesto 3 (información imperfecta)

Los jugadores no tienen información de las estrategias elegidas por sus oponentes.



Función de utilidad

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Dado $N = \{1, 2\}$, se define 2 conjuntos de estrategias $S_1 = \{a, b\}$ y $S_2 = \{p, q, r\}$. En \mathbb{R}^2 , el **producto cartesiano** se escribe:

$$S_1 \times S_2 = \{(a, p), (a, q), (a, r), (b, p), (b, q), (b, r)\} \quad (1)$$

Entonces,

Definición 6 (Perfil de estrategias)

Dado n conjuntos, un perfil de estrategias del producto cartesiano $\prod_{i=1}^n S_i$ es la n -tupla $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $s \in S$.



Función de utilidad

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Definición 7 (Relación de preferencia)

El conjunto S define una relación binaria \succeq , denominada **relación de preferencia**, que verifica los axiomas de preferencia.

Definición 8 (Función de utilidad)

Si $f : S \rightarrow \mathcal{O}$ asocia un outcome $f(s) \in \mathcal{O}$ con cada perfil s , entonces, la función $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ es una relación de preferencia \succeq si:

$$\forall o, o' \in \mathcal{O}, o \succeq o' \iff u(o) \geq u(o') \quad (2)$$



Función de utilidad

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Ejemplo 2

Dado el ranking de preferencias de 2 jugadores, se tiene:

\mathcal{O}	o_1	o_2	o_3	o_4
u_1	13	12	24	12
u_2	3	4	2	2

Matriz de pagos:

1\2	A	B
a	(13, 3)	(12, 4)
b	(24, 2)	(12, 2)



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

5 Anexos



Fundamentación

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Corolario (supuesto 1):

En un juego en forma normal, $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$, los jugadores no pueden elegir estrategias dominadas.

Definición 9 (i-dominancia)

Sea $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$ y las estrategias $s_1, s_2 \in S_i$, para el jugador i :

- ① s_1 **domina estrictamente** a s_2 si s_1 otorga un mayor pago que s_2 :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, \pi_i(s_1, s_{-i}) > \pi_i(s_2, s_{-i}) \quad (3)$$

- ② s_1 **domina débilmente** a s_2 si s_1 otorga un mayor o igual pago que s_2 :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, \pi_i(s_1, s_{-i}) \geq \pi_i(s_2, s_{-i}) \quad (4)$$

- ③ s_1 **es equivalente** a s_2 si s_1 otorga igual pago que s_2 :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, \pi_i(s_1, s_{-i}) \equiv \pi_i(s_2, s_{-i}) \quad (5)$$



Ejemplo 3

Establecer la i-dominancia para J1 en:

1\2	m	p	q
a	(3, 1)	(1, 4)	(1, 1)
b	(2, 2)	(3, 1)	(1, 0)
c	(3, 2)	(3, 3)	(0, 3)
d	(1, 2)	(2, 3)	(1, 0)
e	(4, 2)	(2, 1)	(3, 0)

¿Y J2?



Definición 10 (estrategia estrictamente dominante)

Sea $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$ y la estrategia s_1 del jugador i ($s_1 \in S_i$). Luego, $\forall i$, s_1 es una **estrategia estrictamente dominante** si s_1 domina estrictamente al resto de estrategias de i .

Definición 11 (estrategia débilmente dominante)

Sea $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$ y la estrategia s_1 del jugador i ($s_1 \in S_i$). Luego, $\forall i$, s_1 es una **estrategia débilmente dominante** si s_1 domina débilmente al resto de estrategias de i .



Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Características de EED:

- 1 No verifica el teorema de existencia.
- 2 Verifique unicidad.
- 3 Es robusto a perturbaciones pequeñas.
- 4 No siempre el resultado, si existe, es óptimo-paretiano.



Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Actividad 2. Demostrar matemáticamente la unicidad en EED.



Ejemplo 4

Establecer la EED para J1 y J2, si existe:

1\2	m_1	m_2	m_3
a	(0, 4)	(3, 2)	(0, 2)
b	(2, 2)	(1, 1)	(1, 1)
c	(4, 4)	(4, 2)	(2, 3)
d	(1, 2)	(3, 1)	(1, 0)



Definición 12 (s-dominancia)

Dado $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$, sea el perfil de estrategias $s = (s_1, \dots, s_n)$, luego:

- 1 s es un **perfil de estrategia dominante estricto** o solución de dominancia estricta si, $\forall i$, s_i es una estrategia estrictamente dominante.
- 2 s es un **perfil de estrategia dominante débil** o solución de dominancia estricta si, $\forall i$, s_i es una estrategia débilmente dominante y, además, $\exists j$ tal que s_j no es estrictamente dominante.

Más en Gibbons (1992).



Fundamentación

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Ejemplo 5

Dado $G(2, S_i, \mathcal{O}, u_i)$ entre Antony (A) y Bertha (B). Hallar el perfil dominante.

A \ B	b_1	b_2
a_1	(6, 6)	(4, 8)
a_2	(8, 2)	(4, 4)

Como $a_2 \succeq a_1$ y $b_2 \succ b_1$,

$$s = \{s_1, s_2\} = (a_2, b_2)$$

es el perfil débilmente dominante.



Fundamentación

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Ejemplo 6

Dado $G(2, S_i, \mathcal{O}, u_i)$ entre Andy (a) y Bondy (b). Hallar el perfil dominante.

a \ b	b_1	b_2
a_1	(3, 4)	(4, 2)
a_2	(4, 6)	(6, 4)

Como $a_2 \succ a_1$ y $b_1 \succ b_2$,

$$s = \{s_1, s_2\} = (a_2, b_1)$$

es el perfil estrictamente dominante.



Dilema del prisionero

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Ejemplo 7

Dos acusados de un delito fueron encerrados en celdas separadas, pero uno puede salir si confiesa:

- 1 Si ninguno confiesa, ambos son sentenciados a 2 años de cárcel.
- 2 Si ambos confiesan, son sentenciados a 6 años de cárcel.
- 3 Si sólo uno confiesa, éste es liberado pero el otro es sentenciado a 9 años.
- 4 ¿?

1\2	confiesa	silencia
confiesa	$(-6, -6)$	$(0, -9)$
silencia	$(-9, 0)$	$(-2, -2)$



Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Por los axiomas de preferencias, la **eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas** (IESDS) es el mecanismo natural para hallar el resultado (solución) de un juego.

Definición 13 (IESDS)

Las estrategias dominadas en sentido estricto se eliminan como sigue. Dado un juego en forma normal G , G^1 es el juego obtenido al eliminar en G aquella estrategia del jugador i que es estrictamente dominada por alguna otra estrategia; luego, G^2 es el juego resultante del mismo procedimiento a G^1 ; y así continúa hasta la etapa del juego G^h , $h < \infty$.



Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Características de IESDS:

- 1 Verifica el teorema de existencia: $\exists \hat{s}$.
- 2 No cumple unicidad¹: $\forall G, \nexists \hat{s}$.
- 3 Es robusto a perturbaciones pequeñas.
- 4 No siempre el resultado, si existe, es óptimo-paretiano.

Véase más en Tadelis (2013).

¹No siempre se cumple *dominance solvable*.



Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Actividad 3. Demostrar matemáticamente la robustez de IESDS.



Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Teorema 1 (cuasi-unicidad)

Sea un juego G en forma normal que verifica *dominance solvable*. El resultado final de aplicar IESDS en G siempre es único, independientemente del orden de eliminación.



Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Definición 14 (IEWDS)

Las estrategias dominadas en sentido débil se eliminan en el sentido débil de la definición 11.

¿Más problemas que IESDS?



Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Ejemplo 8

Reducir la matriz por IESDS e IEWDS.

1 2	m	p	q	r
a	(5, 3)	(4, 5)	(4, 3)	(3, 0)
b	(4, 4)	(6, 3)	(0, 2)	(5, 1)
c	(3, 0)	(3, 2)	(5, 1)	(4, 0)
d	(1, 0)	(2, 3)	(4, 4)	(6, 1)

¿Qué pasaría si $\{(a, m), (b, p), (c, q)\} = \{(1, 3), (6, 0), (4, 0)\}$?



Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Actividad 4. A partir del ejemplo 8, si $(b, q) = (5, 1)$, hallar el resultado del juego por IEWDS usando todas las posibilidades. Modifique un perfil de estrategias de forma que se garantice unicidad :).



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

5 Anexos



Conceptualización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Definición 15 (equilibrio de Nash)

Dado un juego en forma normal de dos jugadores, el perfil de estrategias puras $s^* = (s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2$ es un equilibrio de Nash² si:

$$\forall s_1 \in S_1, \pi_1(s_1^*, s_2^*) \geq \pi_1(s_1, s_2^*) \quad (6)$$

$$\forall s_2 \in S_2, \pi_2(s_1^*, s_2^*) \geq \pi_2(s_1^*, s_2) \quad (7)$$

²Véase Bonnano (2024).



Conceptualización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Definición 16 (n-equilibrio de Nash)

Dado un juego en forma normal de n jugadores, el perfil de estrategias puras $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*) \in S$ es un equilibrio de Nash si:

$$\pi_i(s^*) \geq \pi_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*); \quad \forall i, \forall s_i \in S_i \quad (8)$$

Nota: si s^* es análogo al resultado de eliminación iterativa estricta (débil), se trata de un EN estricto (débil).



Conceptualización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Definición 17 (Mejor respuesta)

Dado $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$, un jugador i y el perfil de estrategia $\bar{s}_{-i} \in S_{-i}$ de los jugadores distintos de i . Una estrategia $s_i \in S_i$ del jugador i es mejor respuesta a \bar{s}_{-i} si $\pi_i(s_i, \bar{s}_{-i}) \geq \pi_i(s'_i, \bar{s}_{-i}), \forall s'_i \in S_i$.

Implicancia:

- Se dice que $\bar{s} \in S$ es un equilibrio de Nash, sí y solo sí, $\forall i, \bar{s}_i \in S_i$ es una mejor respuesta a $\bar{s}_{-i} \in S_{-i}$.



Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Características del EN:

- 1 Verifica el teorema de existencia.
- 2 No verifica unicidad.
- 3 Robusto a pequeñas perturbaciones.
- 4 No es pareto-eficiente.

Véase más en Espinola and Muñoz (2023).



Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Teorema 2 (Existencia de Nash)

Dado $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$, tal que $\forall i \in N$, S_i es un conjunto finito. Luego, el EN es un conjunto no vacío.



Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Si un juego tiene más de un EN, ¿cuál seleccionar? Una posibilidad...

Definición 18 (Pareto dominancia)

Un perfil EN s^* domina en sentido paretiano a otro perfil de estrategias EN s' si $u_i(s) > u_i(s'), \forall i$



Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Ejemplo 7 (*continuación*)

En el dilema de los prisioneros, hallar los EN.

1\2	confiesa	silencia
confiesa	$(-6, -6)$	$(0, -9)$
silencia	$(-9, 0)$	$(-2, -2)$



Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Definición 19 (juego simétrico)

Un juego de dos jugadores es simétrico si los conjuntos de estrategias de ambos coinciden, $S_1 = S_2$, y los pagos no se ven afectados por la identidad del jugador que elige cada estrategia, es decir:

$$u_1(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) \quad (9)$$

para cada perfil (s_1, s_2) .

¿Propiedad del anonimato?



Definición 20 (nunca una mejor respuesta)

Dado $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$, una estrategia s_i es **nunca una mejor respuesta** (NMR) si

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}), \quad \forall s'_i \neq s_i \quad (10)$$

no es válido para ningún perfil de estrategia de sus rivales.

Obs.:

s_i es estrictamente dominado $\Rightarrow s_i$ es NMR



Racionalizabilidad

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

¿De qué trata?

- Un símil de IESDS...
- Se puede realizar eliminación iterativa para identificar estrategias que sean NMR para cada jugador, en lugar de estrategias que estén estrictamente dominadas. La secuencia es trivial.

Corolario.

s es racionalizable $\Rightarrow s$ sobrevive a IESDS



Racionalizabilidad

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Ejemplo 9

Identificar las estrategias NMR y hallar el resultado del juego usando racionalizabilidad.

$f_1 f_2$	h_0	h_1
H	(6, 8)	(0, 4)
M	(2, 8)	(4, 1)
L	(0, 4)	(0, 0)

Para f_1 , cuando f_2 elige h_0 , f_1 elige H ; cuando f_2 elige h_1 , f_1 elige M . Luego, L es $NMR(f_1)$ y se elimina. Continua...



Racionalizabilidad

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Características:

- 1 Verifica el teorema de existencia.
- 2 No verifica unicidad.
- 3 Robusto a pequeñas perturbaciones.
- 4 No es pareto-eficiente.



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica
Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones
Productos homogéneos
Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas
Randomización
Geometría

5 Anexos



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

- Sea $q_i, \forall i = 1, 2$, las cantidades producidas por dos empresas.
- La demanda inversa del mercado es $p(Q) = a - bQ$.
- Los costes totales son $C_i(q_i) = cq_i$, $a > c$ (CMg constante).
- Ambas firmas eligen cantidades producidas en forma simultánea e independiente.
- El mercado se limpia siempre.



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

EN de Cournot:

Dado el conjunto $S_i = [0, \infty)$ para cada firma i , sus profits serán:

$$\pi_i = p(Q) \cdot q_i - cq_i \quad (11)$$

Cada firma i elige su nivel de producción q_i tomando el nivel de producción de su rival q_j como dado. Así, la firma i resuelve:

$$\max_{q_i} \pi_i(q_i, q_j) = (a - bq_i - bq_j)q_i - cq_i \quad (12)$$

FOC:

$$a - 2bq_i - bq_j - c = 0$$



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

La función de mejor respuesta de la empresa i será:

$$q_i(q_j) = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}q_j \quad (13)$$

Por simetría, la función de mejor respuesta de la empresa j será:

$$q_j(q_i) = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}q_i \quad (14)$$

De (11) y (12), se tiene el EN en estrategias puras:

$$\{q_i^*, q_j^*\} = \left\{ \frac{a - c}{3b}, \frac{a - c}{3b} \right\} \quad (15)$$



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

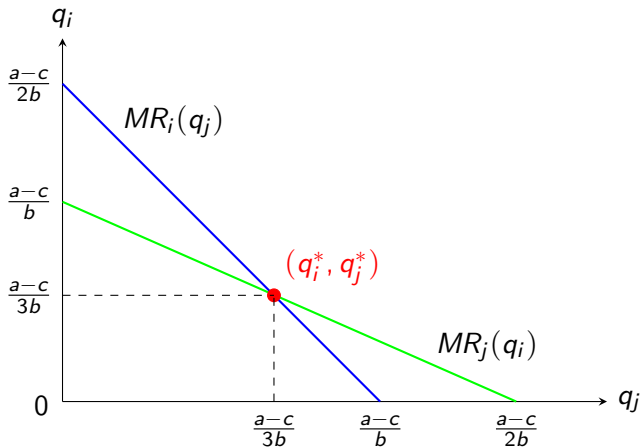
Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References





Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References

Ejemplo 10

La industria de prensa escrita en el Perú está compuesta por dos grupos empresariales, cuyas estructuras de costes son $C_{gc}(q_{gc}) = 30q_{gc}$ y $C_{gr}(q_{gr}) = 0.5q_{gr}^2$. Si la demanda de la industria es $p = 160 - Q$, hallar las funciones MR y el EN.



Duopolio de Bertrand

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Sean las firmas 1 y 2, quienes eligen (deciden) los precios p_1 y p_2 en forma simultánea. La demanda de la empresa i es:

$$q_i(p_i, p_j) = \begin{cases} a - p_i, & p_i < p_j \\ \frac{a - p_i}{2}, & p_i = p_j \\ 0, & p_i > p_j \end{cases} \quad (16)$$

Se sabe que $CMg_i = c$ (con $c < a$) y las estrategias s_i son ahora en precios $p_i > 0$, por lo que el conjunto de estrategias de cada una será $S_i = [0, \infty)$.



Duopolio de Bertrand

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

MR_i :

- Si j elige un precio por encima del precio de monopolio $p^m = (a + c)/2$, la MR de i será ajustar $p^i = p^m$.
- Si j elige un precio entre p^m y c , la firma elige un precio ligeramente por debajo de su rival $p_i = p_j - \epsilon$, $\epsilon > 0$.
- Si j elige $p_j < c$, la firma i elige $p_i = c$.

$$p_i(p_j) = \begin{cases} p^m, & p_j > p^m \\ p_i - \epsilon, & c \leq p_j \leq p^m \\ c, & p_j < c \end{cases} \quad (17)$$



Duopolio de Bertrand

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References

¿ MR_j ?

Entonces, $p_i = p_j = c$ será el único punto donde ninguna firma querrá desviar.
Luego, el EN en estrategias puras será:

$$\{p_i^*, p_j^*\} = \{c, c\} \quad (18)$$



Duopolio de Bertrand

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

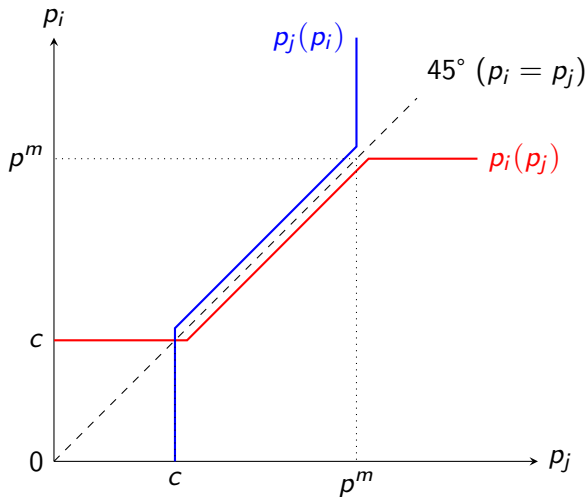
Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References





Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

5 Anexos



Duopolio de Bertrand

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Sean las firmas 1 y 2, quienes eligen (deciden) los precios p_1 y p_2 en forma simultánea. La demanda de la empresa i es:

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j, \quad b > 0 \quad (19)$$

Si $CMg_i = c$ y las estrategias s_i son ahora en precios $p_i > 0$, el conjunto de estrategias de cada una será $S_i = [0, \infty)$. Luego,

$$\max_{p_i} \pi_i(p_i, p_j) = (a - p_i + bp_j)(p_i - c) \quad (20)$$



Duopolio de Bertrand

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

FOC:

$$a - 2p_i + bp_j + c = 0$$

La función de mejor respuesta de la empresa i será:

$$p_i(p_j) = \frac{a + bp_j + c}{2} \quad (21)$$

Por simetría,

$$p_j(p_i) = \frac{a + bp_i + c}{2} \quad (22)$$

Luego, el EN en estrategias puras será:

$$\{p_i^*, p_j^*\} = \left\{ \frac{a + c}{2 - b}, \frac{a + c}{2 - b} \right\} \quad (23)$$

Duopolio de Bertrand

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

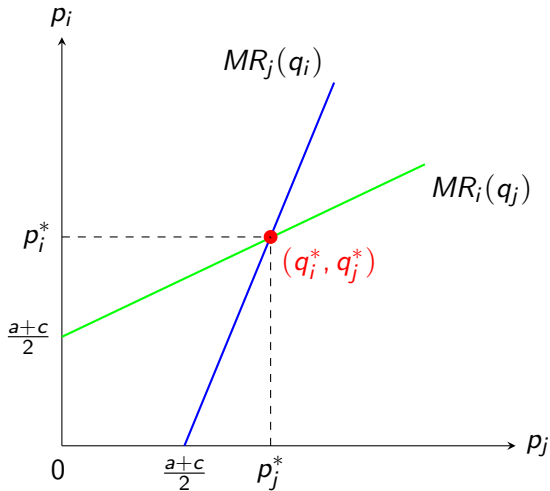
Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References





Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica
Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones
Productos homogéneos
Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas
Randomización
Geometría

5 Anexos



Notación

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

- 1 Conjunto finito N de jugadores: $\forall i = 1, \dots, n, i \in N$.
- 2 Conjunto finito de estrategias mixtas³ $\forall i \in N: \Sigma_i = \{\sigma_j\}_{j=1}^{\leq \infty}$.
- 3 Perfil de estrategias mixtas: σ .
- 4 Conjunto de perfiles de estrategias mixtas:

$$\Sigma = \prod_{i=1}^n \Sigma_i$$

- 5 Función de utilidad esperada: $u_i^e, \forall i$.

³Simplex.



Definición 21 (estrategia mixta)

Sean $m \geq 2$ estrategias puras en el conjunto de estrategias S_i del jugador i , la **estrategia mixta**

$$\sigma_i = \{\sigma_i(s_1), \sigma_i(s_2), \dots, \sigma_i(s_m)\}, \quad \forall \sigma_i \in \Sigma_i \quad (24)$$

es una distribución de probabilidades sobre las estrategias puras de S_i , donde:

- 1 $\sigma_i(s_k) \geq 0, \quad \forall k = 1, \dots, m$
- 2 $\sum_k \sigma_i(s_k) = 1$



Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References

Definición 22 (mejor respuesta con estrategias mixtas)

Para el jugador i , la estrategia mixta σ_i es mejor respuesta a la estrategia mixta de sus oponentes σ_{-i} si y sólo si

$$u_i^e(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i^e(\sigma'_i, \sigma_{-i}), \quad \forall \sigma'_i \neq \sigma_i \quad (25)$$



Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References

Definición 23 (EN en estrategias mixtas)

El perfil de estrategias $(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$, es un EN en estrategias mixtas si y sólo si σ_i^* es mejor respuesta para cada i .



Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Ejemplo 11

Hallar el EN en estrategias puras y mixtas.

1\2	a	b	
v	(5, 5)	(4, 2)	p
w	(2, 4)	(-1, -1)	$1 - p$
	q	$1 - q$	1

$$J1 : u_1^e(v, \sigma_2) = 5q + 4(1 - q)$$

$$u_1^e(w, \sigma_2) = 2q - 1(1 - q)$$

$$J2 : u_2^e(a, \sigma_1) = 5p + 4(1 - p)$$

$$u_2^e(b, \sigma_1) = 2p - 1(1 - p)$$

¿Qué pasó?



Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References

Ejemplo 12

Hallar las funciones de MR de ambos jugadores y graficar.

1\2	a	b	
v	$(0, 0)$	$(-5, 8)$	p
w	$(-5, 8)$	$(0, 0)$	$1 - p$
	q	$1 - q$	1



Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

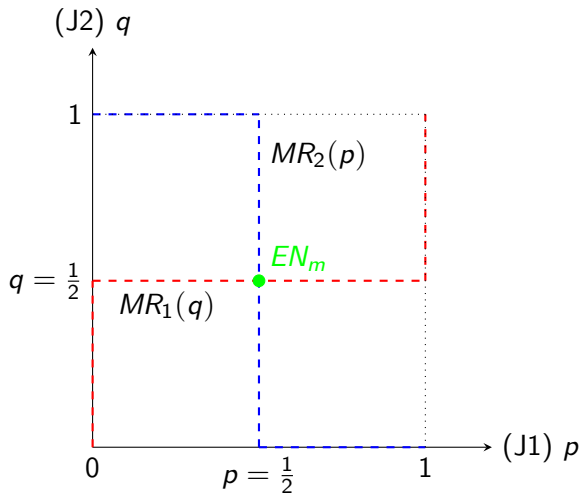
Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References





Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica
Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones
Productos homogéneos
Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas
Randomización
Geometría

5 Anexos



Simplex

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References

- Las estrategias se pueden representar sobre un casco convexo de $k + 1$ puntos afines independientes, a quien se conoce como *k-simplex*.
- Los casos sencillos del simplex es cuando $k = 0$ (un punto), $k = 1$ (una recta), $k = 2$ (un triángulo).
- Un k -simplex tiene $k+1$ vértices o caras.



Simplex 1D

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References





Simplex 2D

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

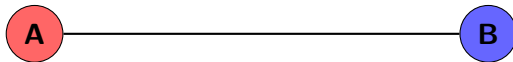
Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References





Simplex 2D

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

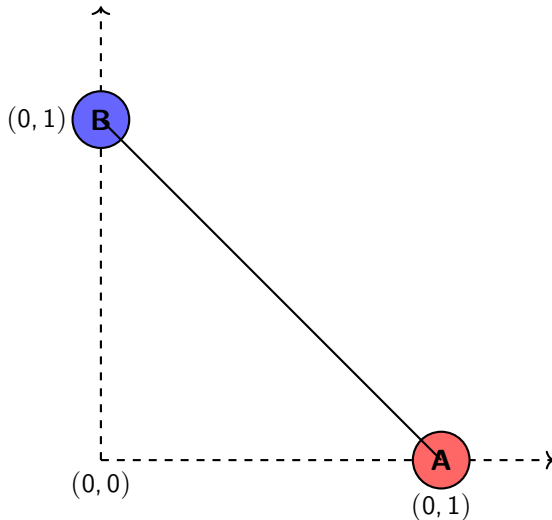
Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References





Simplex 3D

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

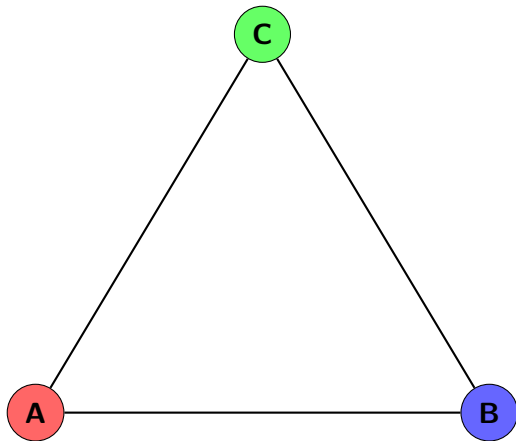
Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References





Simplex 3D

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

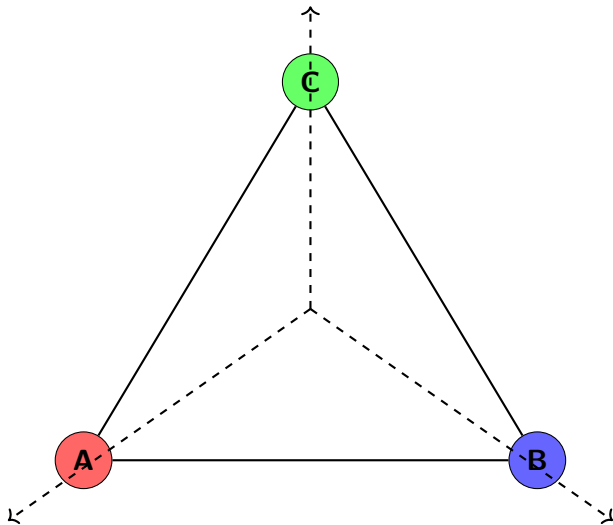
Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References





Simplex 4D

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

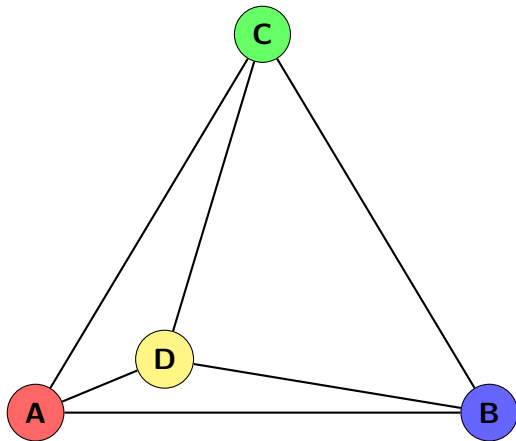
Estrategias
mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References





Referencias

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Geometría

Anexos

References

Ahmad, F., Almarri, O., Shah, Z., and Al-Fagih, L. (2023). Game theory applications in traffic management: A review of authority-based travel modelling. *Travel behaviour and society*, 32:100–585.

Bonnano, G. (2024). *Game Theory*. Addison-Wesley Professional, 3 edition.

Espinola, A. and Muñoz, F. (2023). *Game Theory: An Introduction with Step-by-Step Examples*. Springer Nature.

Gibbons, R. (1992). *Game theory for applied economists*. Princeton University Press.

Tadelis, S. (2013). *Game theory: an introduction*. Princeton university press.



Recursos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación
Dominancia
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos
Productos heterogéneos

Estrategias
mixtas

Randomización
Geometría

Anexos

References

- Ben Pollak.
- Game Theory. International Journal of Game Theory.
- Erich Prisner.
- Bernhard von Stengel.
- Game Theory Explorer.
- Roger Myerson.