Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

Teoría de Juegos

Tópico 3: Juegos con Información Incompleta

Luis Chávez

Departamento Académico de Economía y Planificación
UNALM

Lima, 2025

Contenido

1. Introducción
2. Juegos estáticos
   - Juegos de tipos
   - Aplicaciones
3. Juegos dinámicos
   - Secuencialidad racional
   - Juegos infinitos
4. Anexos

Notación

1. Un conjunto N de jugadores, $i = \{1, 2, ..., n\}$.
2. Un espacio de acciones $\forall i$, A_i.
3. Una colección de conjuntos de espacios de acciones, $A = \prod A_i$.
4. Un conjunto de tipos $\forall i$, $t_i \in T_i$.
5. Una colección de conjuntos de tipos, T.
6. Un conjunto de probabilidades $\forall i$, $p_i : T_i \to \Delta T_{-i}$.
7. Función de utilidad, $u_i = A \times T \to \mathbb{R}$.

Generalidades

Supuesto 1 (información incompleta)

Al menos algún i tiene información privada que no es conocida por su(s) oponente(s).

A veces se alude como asimetría de información.

Generalidades

Definición 1 (juego bayesiano)

Un juego bayesiano, $\Psi(N, A, T, p, u)$, es aquella estructura donde se evidencia información asimétrica en alguna parte del juego.

Contenido

1 Introducción

2 Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

3 Juegos dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

4 Anexos

Caracterización

John Harsanyi consideraba que los jugadores son de diferentes tipos.

Definición 1 (tipos)

Es aquel atributo de un jugador i que sólo es observable por sí mismo.

Equilibrio

Definición 2 (equilibrio de Nash bayesiano)

Un perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ es un ENB en Ψ si y sólo si $\forall i$ y $t_i \in T_i$,

$$s_i^*(t_i) \in \arg\max_{a_i} \sum u_i(s_i^*(t_i), \dots, a_i, \dots, s_N(t_N)^*) \times p_i(t'_{-i}|t_i) \tag{1}$$

donde a_i es una acción y $p_i(t'_{-i}|t_i)$ es la denota la creencia de i de que los tipos de todos los demás jugadores son $t'_{-i} = (t'_1, t'_2, \dots, t'_{i-1}, t'_{i+1}, \dots, t'_n)$, dado su propio tipo.

Caracterización

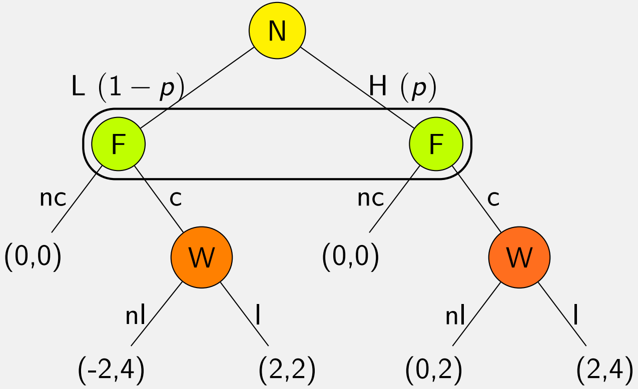
Ejemplo 1

Una firma no sabe si un trabajador es de alta (H) o baja (L) habilidad, aunque, el trabajador si conoce su tipo. El trabajador preferiría laborar si es de alta habilidad y, en caso contrario, preferiría no laborar. La firma preferirá contratar al trabajador que trabajará. La creencia de la firma es que $(H, L) = (p, 1 - p)$.

¿La firma sabe que el trabajador conoce su tipo?

Caracterización

Ejemplo 1 *(continuación...)*



Caracterización

Ejemplo 1 *(continuación...)*

Forma estratégica:

$t_W = L$

$F \mid W$	nl	l
nc	0,0	0,0
c	-2,4	2,2

$t_W = H$

$F \mid W$	nl	l
nc	0,0	0,0
c	0,2	2,4

$$T_F = \{t_F\}, \quad T_W = \{t_H, T_L\}$$

$$A_F = \{c, nc\}, \quad A_W = \{l, nl\}$$

$$p_F = (t_H, t_L) = (p, 1-p), \quad p_W(t_F) = 1$$

Caracterización

Ejemplo 1 *(continuación...)*

Si $p = 3/4$, demostrar que $s^* = (s_F^*(t_F), [s_W^*(t_L), s_W^*(t_H)]) = (c, (l, nl))$ es un ENB.

Solución.

La creencia de la firma es $p_F(H|t_F) = 3/4$ y $p_F(L|t_F) = 1/4$. Luego,

$$u_F^e(c, s_W^*|t_F) = u_F(c, l, H)p_F(H|t_F) + u_F(c, nl, L)p_F(L|t_F) = 2\frac{3}{4} + (-2)\frac{1}{4} = 1$$

$$u_F^e(nc, s_W^*|t_F) = u_F(nc, l, H)p_F(H|t_F) + u_F(nc, nl, L)p_F(L|t_F) = 0\frac{3}{4} + 0\frac{1}{4} = 0$$

Entonces, $MR(F|t_F) = c$.

Caracterización

Ejemplo 1 *(continuación...)*

Ahora, se analiza los tipos de trabajador:

$$u_W^e(s_F^*, l|H) = u_W(c, l, H) = 4$$

$$u_W^e(s_F^*, nl|H) = u_W(c, nl, H) = 2$$

Entonces, $MR(W|t_H) = l$.

$$u_W^e(s_F^*, l|L) = u_W(c, l, L) = 2$$

$$u_W^e(s_F^*, nl|L) = u_W(c, nl, L) = 4$$

Entonces, $MR(W|t_H) = nl$.

Caracterización

Actividad 1. Demostrar que $s^* = (s_F^*, s_W^*) = (nc, (nl, nl))$ es ENB.

Contenido

1 Introducción

2 Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

3 Juegos dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

4 Anexos

Duopolio de Cournot

Sea dos firmas que compiten en cantidades y enfrentan la demanda del mercado $p(Q) = a - bQ$, con $Q = q_1 + q_2$. Los costes de la firma 1 es $c_1(q_1) = cq_1$, mientras que de la firma 2 es:

$$c_2(q_2) = \begin{cases} c_x q_2 & \text{con probabilidad } \theta \\ c_y q_2 & \text{con probabilidad } 1 - \theta \end{cases}$$

La firma 2 conoce sus CMg y el de la firma 1, pero la firma 1 sólo conoce sus CMg y la distribución de probabilidades de los tipos de CMg de la firma 2.

Duopolio de Cournot

Caracterización:

$$N = \{1, 2\}$$

$$T_1 = \{c\}$$

$$T_2 = \{c_x, c_y\}$$

$$A_c = A_{cx} = A_{yc} = [0, \infty)$$

$$p_2(c|c_x) = p_2(c|c_y) = 1$$

$$(p_1(c_x|c), p_1(c_y|c)) = (\theta, 1 - \theta)$$

Duopolio de Cournot

Los profits:

$$\max \pi_1(q_1, q_2, c) = (a - bq_1 - bq_2)q_1 - cq_1 = (a - bq_1 - bq_2 - c)q_1$$

$$\max \pi_2(q_1, q_2, c_x) = (a - bq_1 - bq_2)q_2 - c_x q_2 = (a - bq_1 - bq_2 - c_x)q_2$$

$$\max \pi_2(q_1, q_2, c_y) = (a - bq_1 - bq_2)q_2 - c_y q_2 = (a - bq_1 - bq_2 - c_y)q_2$$

Duopolio de Cournot

$MR(2|c_x)$:

$$a - bq_1 - 2bq_2 - c_x = 0$$
$$q_2(c_x) = \frac{a - bq_1 - c_x}{2b} \tag{2}$$

$MR(2|c_y)$:

$$a - bq_1 - 2bq_2 - c_y = 0$$
$$q_2(c_y) = \frac{a - bq_1 - c_y}{2b} \tag{3}$$

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

Duopolio de Cournot

$MR(1|c)$:

$$\max_{q_1} \; \theta(a - bq_1 - bq_2(c_x) - c)q_1 + (1-\theta)(a - bq_1 - bq_2(c_y) - c)q_1$$

FOC:

$$\theta(a - 2bq_1 - bq_2(c_x) - c) + (1-\theta)(a - 2bq_1 - bq_2(c_y) - c) = 0$$

$$q_1(c_x, c_y) = \frac{\theta(a - bq_2(c_x) - c) + (1-\theta)(a - bq_2(c_y) - c)}{2b} \tag{4}$$

Duopolio de Cournot

De (2) y (3) en (4), se tiene:

$$2bq_1 = \theta\left(a - b\frac{a - bq_1 - c_x}{2b} - c\right) + (1-\theta)\left(a - b\frac{a - bq_1 - c_y}{2b} - c\right)$$

$$q_1^* = \frac{a + (1-\theta)c_y + \theta c_x - 2c}{3b} \tag{5}$$

Resolviendo, se puede hallar el ENB:

$$\left(q_1^*, q_2(c_x)^*, q_2(c_y)^*\right)$$

Contenido

1. Introducción
2. Juegos estáticos
   - Juegos de tipos
   - Aplicaciones
3. Juegos dinámicos
   - Secuencialidad racional
   - Juegos infinitos
4. Anexos

Creencias

Definición 3 (sistema de creencias)

Dado un juego Ψ, un sistema de creencias μ es una distribución de probabilidad sobre los nodos de decisión dentro de cada conjunto de información H_i.

$$\forall i \in N, \forall h \in H_i \wedge x \in h, \exists \mu(x) \in [0,1] \tag{6}$$

Requerimientos

Véase Tadelis (2013):

1. Cada i tendrá una creencia bien definida sobre su posición en conjunto de información. Es decir, el juego cuenta con un sistema de creencias.
2. Sea el perfil $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ un ENB. Se requiere que en todos los conjuntos de información las creencias que están en el camino del equilibrio sean consistentes con la regla de Bayes.
3. En conjuntos de información que están fuera de la trayectoria de equilibrio se puede asignar cualquier creencia a la que no se aplique la regla de Bayes.
4. Dadas sus creencias, las estrategias de los jugadores deben ser **secuencialmente racionales**. Es decir, en cada conjunto de información, los jugadores buscarán la mejor respuesta a sus creencias.

Conceptos

Definición 4 (ENBP)

Un **Equilibrio de Nash Bayesiano Perfecto** es un Equilibrio de Nash Bayesiano, $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$, junto con un sistema de creencias μ que satisfacen los 4 requerimientos de Tadelis (2013).

Conceptos

Definición 5 (consistencia)

Un perfil de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ junto con un sistema de creencias μ^* es **consistente** si existe una secuencia de estrategias mixtas no degeneradas $\{\sigma^k\}_1^\infty$ y una secuencia de creencias que son derivadas de cada σ^k de acuerdo a la regla de Bayes, $\{\mu^k\}_1^\infty$, tal que $\lim_{k\to\infty}(\sigma^k, \mu^k) = (\sigma^*, \mu^*)$.

Conceptos

Definición 6 (equilibrio secuencial)

Un perfil de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ junto con un sistema de creencias μ^* es un **equilibrio secuencial** si (σ^*, μ^*) es un ENBP consistente.

Creencias

- En ENB las creencias eran exógenas:
  - Las estrategias dependían de las creencias.
  - Las creencias eran independientes de las estrategias.
- En ENBP tanto las creencias como las estrategias son parte del resultado del equilibrio:
  - Las estrategias dependen de las creencias.
  - Las creencias dependen de la naturaleza (dada) o de las estrategias (que otros jugadores pueden hacer).

Creencias

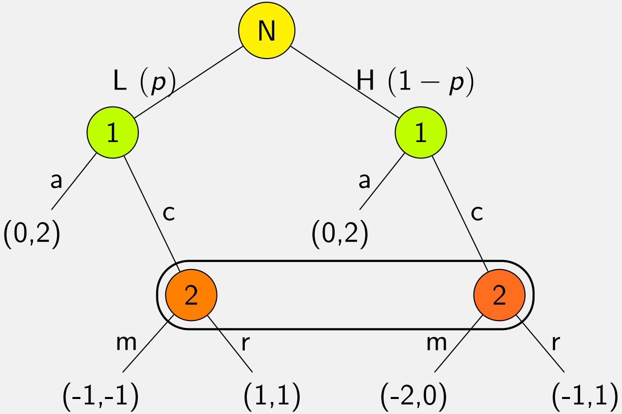
Restricciones consistentes de las creencias:

1. Exógenas: las creencias deben ser consistentes con la regla de Bayes
2. Endógenas: las creencias deben ser consistentes con cómo anticipamos las estrategias de otros jugadores.

Creencias

Ejemplo 3

Sea el juego dinámico:



Creencias

Ejemplo 3 (continuación...)

Caracterización del sistema de creencias:

$$\mu(h_1^1) = \mu(h_1^2) = 1$$

$$\mu(h_2^1) \in [0, 1]$$

$$\mu(h_2^2) \in [0, 1]$$

$$\mu(h_2^1) + \mu(h_2^2) = 1$$

Nota: las creencias son parcialmente determinadas por la naturaleza (exógenas) o parcialmente determinadas por las estrategias de i (endógenas).

Creencias

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

Ejemplo 3 (continuación...)

Asumiendo que J1 juega *ca*. ¿Es una creencia endógena consistente?

$$\mu(h_2^1) = P[J1 \text{ es } L)|c]$$

$$1 - \mu(h_2^1) = P[J1 \text{ es } H)|c]$$

$$J1(ca) \Rightarrow \mu(h_2^1) = 1$$

Si J2 observa que el juego llegó a esta etapa, debe ser porque J1 no es H. Así, las creencias de J2 deben ser consistentes con lo que J2 piensa que J1 jugará.

Creencias

Ejemplo 3 (continuación...)

Esto también significa que si J1 considera jugar ca:

- Anticipa que $\mu(h_2^1) = 1$.
- Por lo tanto, puede anticipar que J2 jugará r después de c.

Entonces, cuando J1 considera una desviación de ca,

- J1 podría intentar jugar c cuando se elige H.
- J2 creería erróneamente que J1 es L y jugaría r.
- Por lo tanto, J1 sabe que esta desviación no sería rentable.

Contenido

1. Introducción
2. Juegos estáticos
   - Juegos de tipos
   - Aplicaciones
3. Juegos dinámicos
   - Secuencialidad racional
   - Juegos infinitos
4. Anexos

Conceptos

Game Theory
Luis Chávez
Introducción
Juegos estáticos
Juegos de tipos
Aplicaciones
Juegos dinámicos
Secuencialidad racional
Juegos infinitos
Anexos
References

Pizarra...

Referencias

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

Tadelis, S. (2013). *Game theory: an introduction*. Princeton university press.