



Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

# Teoría de los Juegos y Estrategia

## Tópico 1: Juegos Estáticos con Información Completa

Luis Chávez



Escuela Profesional de Economía  
USMP

Lima, 2025



# Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

5 Anexos



# Bienvenida

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación  
Dominancia  
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos  
Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización  
Gráficas

Anexos

References

¿Los laboratorios farmacéuticos coluden? ¿Cómo compiten las aerolíneas? ¿Qué son los incentivos? ¿Qué puja elegir en las subastas de SUNAT? ¿Cuál es el rol de las señales?

¡Bienvenidos al mundo de las estrategias!



# Conceptos básicos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Definición 1 (Estrategias)

Conjunto de **decisiones** (planes de acción) que toma una persona (jugador), según sus preferencias, para enfrentar una determinada situación.

¿Y el comportamiento estratégico? ¿Es inherente al ser humano?

## Supuesto 1 (Racionalidad)

Los agentes toman decisiones racionales.



# Conceptos básicos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación  
Dominancia  
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos  
Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización  
Gráficas

Anexos

References

## Ejemplo 1

¿Qué situación es más complicada?

- 1 Cortar un árbol.
- 2 Matar una serpiente.

## Definición 2 (juegos)

Es la interacción estratégica entre jugadores, donde cada uno toma decisiones racionales basadas en reglas preestablecidas, con el objetivo de maximizar una recompensa.



# Conceptos básicos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Definición 3 (teoría de juegos)

Área de la matemática aplicada que estudia situaciones donde los agentes toman decisiones estratégicas interdependientes.

Estrategias:

- Puras.
- Mixtas.



# Historial

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

- 1 Nace con la aparición de las probabilidades y las apuestas.
- 2 Antoine Gombaud (1654) uno de los pioneros en hablar de loterías.
- 3 Emil Borel estableció algunos intentos para jugar mejor.
- 4 Jon von Newmann (1928) se le acreditó como el fundador de la teoría de juegos moderna.
- 5 Nash (1949) estableció el primer equilibrio en los juegos.
- 6 Nash (1994) ganó el premio Nobel junto a Reinhard Selten y John Harsanyi.

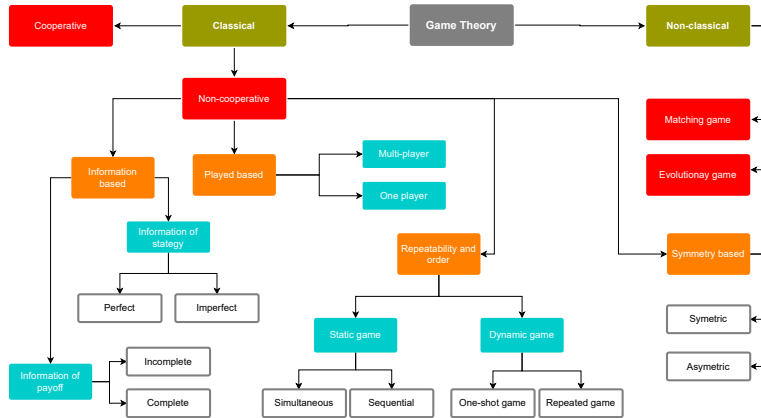


Figure: Taxonomía de teoría de juegos (Ahmad et al., 2023)





# Aplicaciones

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación  
Dominancia  
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos  
Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización  
Gráficas

Anexos

References

- 1 Deep Learning.
- 2 Subastas.
- 3 Estrategias empresariales.
- 4 Relaciones internacionales.
- 5 Problemas de principal-agente.
- 6 Bargaining.
- 7 Elecciones.



# Elementos

## Game Theory

Luis Chávez

### Introducción

#### Teoría básica

Representación  
Dominancia  
Equilibrio de Nash

#### Aplicaciones

Productos homogéneos  
Productos heterogéneos

#### Estrategias mixtas

Randomización  
Gráficas

#### Anexos

#### References

- 1 Conjunto finito  $N$  de jugadores:  $\forall i = 1, \dots, n, i \in N$ .
- 2 Conjunto finito de  $m$  estrategias puras  $\forall i \in N: S_i = \{s_j\}_{j=1}^m$ .
- 3 Conjunto de perfiles de estrategias puras:

$$S = \prod_{i=1}^n S_i$$

- 4 Función de utilidad o de *payoffs*:  $u_i$ .
- 5 Conjunto finito  $\mathcal{O}$  de *outcomes*:  $\mathcal{O} = \{o_1, o_2, \dots\}$ .
- 6 Reglas.



# Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

5 Anexos



## Definición 4 (Forma normal)

Un juego  $G$  se **representa en forma normal** (estratégica) si la cantidad de jugadores, sus respectivas estrategias y los pagos/outcomes están claramente definidos en una matriz de pagos.

## Definición 5 (Forma extensiva)

Un juego se **representa en forma extensiva** cuando las jugadas se describen mediante un árbol de decisión, donde los nodos indican los turnos de decisión de los jugadores y las ramas esquematizan sus posibles estrategias.



Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

**Actividad 1.** Plantear la matriz de pagos para 3 jugadores. Use 4, 3 y 2 estrategias para los jugadores  $N = \{1, 2, 3\}$ , respectivamente.



# Función de utilidad

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Supuesto 2 (simultaneidad)

Los jugadores eligen sus estrategias de forma simultánea (no implica “al mismo tiempo”).

## Supuesto 3 (información imperfecta)

Los jugadores no tienen información de las estrategias elegidas por sus oponentes.



# Función de utilidad

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

Dado  $N = \{1, 2\}$ , se define 2 conjuntos de estrategias  $S_1 = \{a, b\}$  y  $S_2 = \{p, q, r\}$ . En  $\mathbb{R}^2$ , el **producto cartesiano** se escribe:

$$S_1 \times S_2 = \{(a, p), (a, q), (a, r), (b, p), (b, q), (b, r)\} \quad (1)$$

Entonces,

## Definición 6 (Perfil de estrategias)

Dado  $n$  conjuntos, un perfil de estrategias del producto cartesiano  $\prod_{i=1}^n S_i$  es la  $n$ -tupla  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ,  $s \in S$ .



# Función de utilidad

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Definición 7 (Relación de preferencia)

El conjunto  $S$  define una relación binaria  $\succeq$ , denominada **relación de preferencia**, que verifica los axiomas de preferencia.

## Definición 8 (Función de utilidad)

Si  $f : S \rightarrow \mathcal{O}$  asocia un outcome  $f(s) \in \mathcal{O}$  con cada perfil  $s$ , entonces, la función  $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  es una relación de preferencia  $\succeq$  si:

$$\forall o, o' \in \mathcal{O}, o \succeq o' \iff u(o) \geq u(o') \quad (2)$$





# Función de utilidad

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Ejemplo 2

Dado el ranking de preferencias de 2 jugadores, se tiene:

$\mathcal{O}$	$o_1$	$o_2$	$o_3$	$o_4$
$u_1$	13	12	24	12
$u_2$	3	4	2	2

Matriz de pagos:

1\2	A	B
a	(13, 3)	(12, 4)
b	(24, 2)	(12, 2)



# Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

5 Anexos



# Fundamentación

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

**Corolario (supuesto 1):**

En un juego en forma normal,  $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$ , los jugadores no pueden elegir estrategias dominadas.

## Definición 9 (i-dominancia)

Sea  $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$  y las estrategias  $s_1, s_2 \in S_i$ , para el jugador  $i$ :

- ①  $s_1$  **domina estrictamente** a  $s_2$  si  $s_1$  otorga un mayor pago que  $s_2$ :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, \pi_i(s_1, s_{-i}) > \pi_i(s_2, s_{-i}) \quad (3)$$

- ②  $s_1$  **domina débilmente** a  $s_2$  si  $s_1$  otorga un mayor o igual pago que  $s_2$ :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, \pi_i(s_1, s_{-i}) \geq \pi_i(s_2, s_{-i}) \quad (4)$$

- ③  $s_1$  **es equivalente** a  $s_2$  si  $s_1$  otorga igual pago que  $s_2$ :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, \pi_i(s_1, s_{-i}) \equiv \pi_i(s_2, s_{-i}) \quad (5)$$



## Ejemplo 3

Establecer la i-dominancia para J1 en:

1\2	m	p	q
a	(3, 1)	(1, 4)	(1, 1)
b	(2, 2)	(3, 1)	(1, 0)
c	(3, 2)	(3, 3)	(0, 3)
d	(1, 2)	(2, 3)	(1, 0)
e	(4, 2)	(2, 1)	(3, 0)

¿Y J2?



## Definición 10 (estrategia estrictamente dominante)

Sea  $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$  y la estrategia  $s_1$  del jugador  $i$  ( $s_1 \in S_i$ ). Luego,  $\forall i$ ,  $s_1$  es una **estrategia estrictamente dominante** si  $s_1$  domina estrictamente al resto de estrategias de  $i$ .

## Definición 11 (estrategia débilmente dominante)

Sea  $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$  y la estrategia  $s_1$  del jugador  $i$  ( $s_1 \in S_i$ ). Luego,  $\forall i$ ,  $s_1$  es una **estrategia débilmente dominante** si  $s_1$  domina débilmente al resto de estrategias de  $i$ .



# Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

Características de EED:

- 1 No verifica el teorema de existencia.
- 2 Cumple unicidad.
- 3 Es robusto a perturbaciones pequeñas.
- 4 No siempre el resultado, si existe, es óptimo-paretiano.



# Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

**Actividad 2.** Demostrar matemáticamente la unicidad en EED.





# Fundamentación

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Ejemplo 4

Establecer la EED para J1 y J2, si existe:

1\2	$m_1$	$m_2$	$m_3$
a	(0, 4)	(3, 2)	(0, 2)
b	(2, 2)	(1, 1)	(1, 1)
c	(4, 4)	(4, 2)	(2, 3)
d	(1, 2)	(3, 1)	(1, 0)



## Definición 12 (s-dominancia)

Dado  $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$ , sea el perfil de estrategias  $s = (s_1, \dots, s_n)$ , luego:

- 1  $s$  es un **perfil de estrategia dominante estricto** o solución de dominancia estricta si,  $\forall i$ ,  $s_i$  es una estrategia estrictamente dominante.
- 2  $s$  es un **perfil de estrategia dominante débil** o solución de dominancia estricta si,  $\forall i$ ,  $s_i$  es una estrategia débilmente dominante y, además,  $\exists j$  tal que  $s_j$  no es estrictamente dominante.

Más en Gibbons (1992).



# Fundamentación

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Ejemplo 5

Dado  $G(2, S_i, \mathcal{O}, u_i)$  entre Antony (A) y Bertha (B). Hallar el perfil dominante.

A \ B	$b_1$	$b_2$
$a_1$	(6, 6)	(4, 8)
$a_2$	(8, 2)	(4, 4)

Como  $a_2 \succeq a_1$  y  $b_2 \succ b_1$ ,

$$s = \{s_1, s_2\} = (a_2, b_2)$$

es el perfil débilmente dominante.



# Fundamentación

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Ejemplo 6

Dado  $G(2, S_i, \mathcal{O}, u_i)$  entre Andy (a) y Bondy (b). Hallar el perfil dominante.

a\b	$b_1$	$b_2$
$a_1$	(3, 4)	(4, 2)
$a_2$	(4, 6)	(6, 4)

Como  $a_2 \succ a_1$  y  $b_1 \succ b_2$ ,

$$s = \{s_1, s_2\} = (a_2, b_1)$$

es el perfil estrictamente dominante.



# Dilema del prisionero

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Ejemplo 7

Dos acusados de un delito fueron encerrados en celdas separadas, pero uno puede salir si confiesa:

- 1 Si ninguno confiesa, ambos son sentenciados a 2 años de cárcel.
- 2 Si ambos confiesan, son sentenciados a 6 años de cárcel.
- 3 Si sólo uno confiesa, éste es liberado pero el otro es sentenciado a 9 años.
- 4 ¿?

1\2	confiesa	silencia
confiesa	$(-6, -6)$	$(0, -9)$
silencia	$(-9, 0)$	$(-2, -2)$



# Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

Por los axiomas de preferencias, la **eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas** (IESDS) es el mecanismo natural para hallar el resultado (solución) de un juego.

## Definición 13 (IESDS)

Las estrategias dominadas en sentido estricto se eliminan como sigue. Dado un juego en forma normal  $G$ ,  $G^1$  es el juego obtenido al eliminar en  $G$  aquella estrategia del jugador  $i$  que es estrictamente dominada por alguna otra estrategia; luego,  $G^2$  es el juego resultante del mismo procedimiento a  $G^1$ ; y así continúa hasta la etapa del juego  $G^h$ ,  $h < \infty$ .



# Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

Características de IESDS:

- 1 Verifica el teorema de existencia:  $\exists \hat{s}$ .
- 2 No cumple unicidad<sup>1</sup>:  $\forall G, \nexists \hat{s}$ .
- 3 Es robusto a perturbaciones pequeñas.
- 4 No siempre el resultado, si existe, es óptimo-paretiano.

Véase más en Tadelis (2013).

---

<sup>1</sup>No siempre se cumple *dominance solvable*.



# Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

**Actividad 3.** Demostrar matemáticamente la robustez de IESDS.





# Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Teorema 1 (cuasi-unicidad)

Sea un juego  $G$  en forma normal que verifica *dominance solvable*. El resultado final de aplicar IESDS en  $G$  siempre es único, independientemente del orden de eliminación.



# Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Definición 14 (IEWDS)

Las estrategias dominadas en sentido débil se eliminan en el sentido débil de la definición 10.

¿Más problemas que IESDS?



# Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Ejemplo 8

Reducir la matriz por IESDS e IEWDS.

1 2	m	p	q	r
a	(5, 3)	(4, 5)	(4, 3)	(3, 0)
b	(4, 4)	(6, 3)	(0, 2)	(5, 1)
c	(3, 0)	(3, 2)	(5, 1)	(4, 0)
d	(1, 0)	(2, 3)	(4, 4)	(6, 1)

¿Qué pasaría si  $\{(a, m), (b, p), (c, q)\} = \{(1, 3), (6, 0), (4, 0)\}$ ?



# Eliminación iterativa

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

**Actividad 4.** A partir del ejemplo 8, si  $(b, q) = (5, 1)$ , hallar el resultado del juego por IEWDS usando todas las posibilidades. Modifique un perfil de estrategias de forma que no se garantice unicidad :).



# Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

5 Anexos



## Definición 15 (equilibrio de Nash)

Dado un juego en forma normal de dos jugadores, el perfil de estrategias puras  $s^* = (s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2$  es un equilibrio de Nash<sup>2</sup> si:

$$\forall s_1 \in S_1, \pi_1(s_1^*, s_2^*) \geq \pi_1(s_1, s_2^*) \quad (6)$$

$$\forall s_2 \in S_2, \pi_2(s_1^*, s_2^*) \geq \pi_2(s_1^*, s_2) \quad (7)$$

---

<sup>2</sup>Véase Bonnano (2024).



# Conceptualización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Definición 16 (n-equilibrio de Nash)

Dado un juego en forma normal de  $n$  jugadores, el perfil de estrategias puras  $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*) \in S$  es un equilibrio de Nash si:

$$\pi_i(s^*) \geq \pi_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*); \quad \forall i, \forall s_i \in S_i \quad (8)$$

**Nota:** si  $s^*$  es análogo al resultado de eliminación iterativa estricta (débil), se trata de un EN estricto (débil).



# Conceptualización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Definición 17 (Mejor respuesta)

Dado  $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$ , un jugador  $i$  y el perfil de estrategia  $\bar{s}_{-i} \in S_{-i}$  de los jugadores distintos de  $i$ . Una estrategia  $s_i \in S_i$  del jugador  $i$  es mejor respuesta a  $\bar{s}_{-i}$  si  $\pi_i(s_i, \bar{s}_{-i}) \geq \pi_i(s'_i, \bar{s}_{-i}), \forall s'_i \in S_i$ .

### Implicancia:

- Se dice que  $\bar{s} \in S$  es un equilibrio de Nash, sí y solo sí,  $\forall i, \bar{s}_i \in S_i$  es una mejor respuesta a  $\bar{s}_{-i} \in S_{-i}$ .





# Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Características del EN:

- 1 Verifica el teorema de existencia.
- 2 No verifica unicidad.
- 3 Robusto a pequeñas perturbaciones.
- 4 No es pareto-eficiente.

Véase más en Espinola and Muñoz (2023).



# Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Teorema 2 (Existencia de Nash)

Dado  $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$ , tal que  $\forall i \in N$ ,  $S_i$  es un conjunto finito. Luego, el EN es un conjunto no vacío.



# Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Ejemplo 7 (*continuación*)

En el dilema de los prisioneros, hallar los EN.

1\2	confiesa	silencia
confiesa	$(-6, -6)$	$(0, -9)$
silencia	$(-9, 0)$	$(-2, -2)$



# Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Definición 18 (juego simétrico)

Un juego de dos jugadores es simétrico si los conjuntos de estrategias de ambos coinciden,  $S_1 = S_2$ , y los pagos no se ven afectados por la identidad del jugador que elige cada estrategia, es decir:

$$u_1(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) \quad (9)$$

para cada perfil  $(s_1, s_2)$ .

¿Propiedad del anonimato?



## Definición 19 (nunca una mejor respuesta)

Dado  $G(N, S_i, \mathcal{O}, u_i)$ , una estrategia  $s_i$  es **nunca una mejor respuesta** (NMR) si

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}), \quad \forall s'_i \neq s_i \quad (10)$$

no es válido para ningún perfil de estrategia de sus rivales.

Obs.:

$s_i$  es estrictamente dominado  $\Rightarrow s_i$  es NMR



# Racionalizabilidad

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

¿De qué trata?

- Un símil de IESDS...
- Se puede realizar eliminación iterativa para identificar estrategias que sean NMR para cada jugador, en lugar de estrategias que estén estrictamente dominadas. La secuencia es trivial.

**Corolario.**

$s$  es racionalizable  $\Rightarrow s$  sobrevive a IESDS



# Racionalizabilidad

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Ejemplo 9

Hallar las estrategias NMR usando racionalizabilidad.

$f_1 \backslash f_2$	$h_0$	$h_1$
H	(6, 8)	(0, 4)
M	(2, 8)	(4, 1)
L	(0, 4)	(0, 0)

Para  $f_1$ , cuando  $f_2$  elige  $h_0$ ,  $f_1$  elige  $H$ ; cuando  $f_2$  elige  $h_1$ ,  $f_1$  elige  $M$ . Luego,  $L$  es  $NMR(f_1)$  y se elimina. Continua...



# Racionalizabilidad

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Características:

- 1 Verifica el teorema de existencia.
- 2 No verifica unicidad.
- 3 Robusto a pequeñas perturbaciones.
- 4 No es pareto-eficiente.





# Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

5 Anexos



# Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias

mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

- Sea  $q_i, \forall i = 1, 2$ , las cantidades producidas por dos empresas.
- La demanda inversa del mercado es  $p(Q) = a - bQ$ .
- Los costes totales son  $C_i(q_i) = cq_i$ ,  $a > c$  (CMg constante).
- Ambas firmas eligen cantidades producidas en forma simultánea e independiente.
- El mercado se limpia siempre.



# Duopolio de Cournot

## Game Theory

Luis Chávez

### Introducción

### Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

### Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

### Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

### Anexos

### References

## EN de Cournot:

Dado el conjunto  $S_i = [0, \infty)$  para cada firma  $i$ , sus profits serán:

$$\pi_i = p(Q) \cdot q_i - cq_i \quad (11)$$

Cada firma  $i$  elige su nivel de producción  $q_i$  tomando el nivel de producción de su rival  $q_j$  como dado. Así, la firma  $i$  resuelve:

$$\max_{q_i} \pi_i(q_i, q_j) = (a - bq_i - bq_j)q_i - cq_i \quad (12)$$

FOC:

$$a - 2bq_i - bq_j - c = 0$$

La función de mejor respuesta de la empresa  $i$  será:

$$q_i(q_j) = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}q_j \quad (13)$$

Por simetría, la función de mejor respuesta de la empresa  $j$  será:

$$q_j(q_i) = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}q_i \quad (14)$$

De (11) y (12), se tiene el EN en estrategias puras:

$$\{q_i^*, q_j^*\} = \left\{ \frac{a - c}{3}, \frac{a - c}{3} \right\} \quad (15)$$

# Duopolio de Cournot

## Game Theory

Luis Chávez

## Introducción

## Teoría básica

Representación  
Dominancia  
Equilibrio de Nash

## Aplicaciones

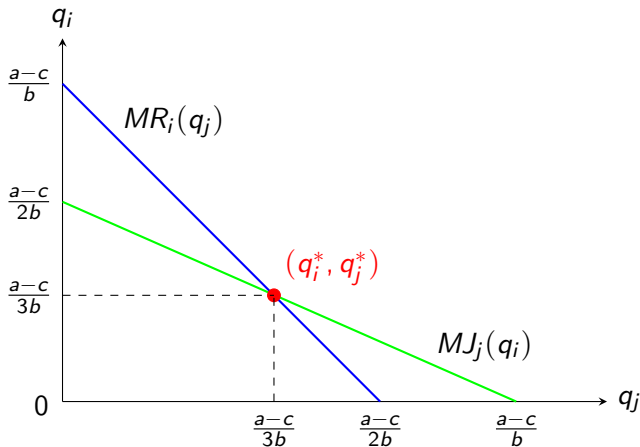
Productos homogéneos  
Productos heterogéneos

## Estrategias mixtas

Randomización  
Gráficas

## Anexos

## References





# Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Ejemplo 10

La industria de prensa escrita en el Perú está compuesta por dos grupos empresariales, cuyas estructuras de costes son  $C_{gc}(q_{gc}) = 30q_{gc}$  y  $C_{gr}(q_{gr}) = 0.5q_{gr}^2$ . Si la demanda de la industria es  $p = 160 - Q$ , hallar las funciones MR y el EN.



# Duopolio de Bertrand

## Game Theory

Luis Chávez

### Introducción

### Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

### Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

### Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

### Anexos

### References

Sean las firmas 1 y 2, quienes eligen (deciden) los precios  $p_1$  y  $p_2$  en forma simultánea. La demanda de la empresa  $i$  es:

$$q_i(p_i, p_j) = \begin{cases} a - p_i, & p_i < p_j \\ \frac{a - p_i}{2}, & p_i = p_j \\ 0, & p_i > p_j \end{cases} \quad (16)$$

Se sabe que  $CMg_i = c$  (con  $c < a$ ) y las estrategias  $s_i$  son ahora en precios  $p_i > 0$ , por lo que el conjunto de estrategias de cada una será  $S_i = [0, \infty)$ .

# Duopolio de Bertrand

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

Se tiene posibilidades:

- Si se elige un precio de monopolio  $p^m = c$ , las firmas compartirán el mercado, pero  $\pi_i = \pi_j = 0$ .
- Si  $i$  elige  $p_i > c$ , la firma  $j$  absolverá todo el mercado, por lo que  $\pi_i = 0$ .
- Si  $i$  elige  $p_i < c$ , la firma  $i$  absolverá todo el mercado, por lo que  $\pi_i < 0$ .

Entonces,  $p_i = p_j = c$  será el único punto donde ninguna firma querrá desviar. Luego, el EN en estrategias puras será:

$$\{p_i^*, p_j^*\} = \{c, c\} \quad (17)$$





# Duopolio de Bertrand

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

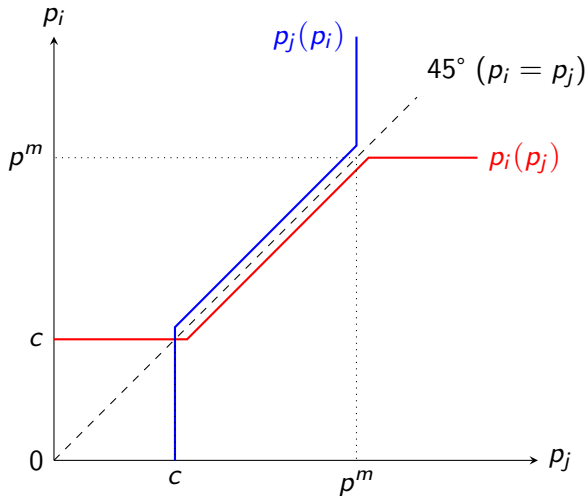
Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References





# Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación  
Dominancia  
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos  
Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización  
Gráficas

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica  
Representación  
Dominancia  
Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones  
Productos homogéneos  
Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas  
Randomización  
Gráficas

5 Anexos



# Duopolio de Bertrand

## Game Theory

Luis Chávez

### Introducción

### Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

### Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

### Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

### Anexos

### References

Sean las firmas 1 y 2, quienes eligen (deciden) los precios  $p_1$  y  $p_2$  en forma simultánea. La demanda de la empresa  $i$  es:

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j, \quad b > 0 \quad (18)$$

Si  $CMg_i = c$  y las estrategias  $s_i$  son ahora en precios  $p_i > 0$ , el conjunto de estrategias de cada una será  $S_i = [0, \infty)$ . Luego,

$$\max_{p_i} \pi_i(p_i, p_j) = (a - p_i + bp_j)(p_i - c) \quad (19)$$



# Duopolio de Bertrand

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

FOC:

$$a - 2p_i + bp_j + c = 0$$

La función de mejor respuesta de la empresa  $i$  será:

$$p_i(p_j) = \frac{a + bp_j + c}{2} \quad (20)$$

Por simetría,

$$p_j(p_i) = \frac{a + bp_i + c}{2} \quad (21)$$

Luego, el EN en estrategias puras será:

$$\{p_i^*, p_j^*\} = \left\{ \frac{a + c}{2 - b}, \frac{a + c}{2 - b} \right\} \quad (22)$$



# Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación  
Dominancia  
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos  
Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización  
Gráficas

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica  
Representación  
Dominancia  
Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones  
Productos homogéneos  
Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas  
Randomización  
Gráficas

5 Anexos



# Notación

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

- 1 Conjunto finito  $N$  de jugadores:  $\forall i = 1, \dots, n, i \in N$ .
- 2 Conjunto finito de estrategias mixtas<sup>3</sup>  $\forall i \in N: \Sigma_i = \{\sigma_j\}_{j=1}^{\leq \infty}$ .
- 3 Perfil de estrategias mixtas:  $\sigma$ .
- 4 Conjunto de perfiles de estrategias mixtas:

$$\Sigma = \prod_{i=1}^n \Sigma_i$$

- 5 Función de utilidad esperada:  $u_i^e, \forall i$ .

---

<sup>3</sup>Simplex.

## Definición 20 (estrategia mixta)

Sean  $m > 2$  estrategias puras en el conjunto de estrategias  $S_i$  del jugador  $i$ , la **estrategia mixta**

$$\sigma_i = \{\sigma_i(s_1), \sigma_i(s_2), \dots, \sigma_i(s_m)\}, \quad \forall \sigma_i \in \Sigma_i \quad (23)$$

es una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras de  $S_i$ , donde:

- 1  $\sigma_i(s_k) \geq 0, \quad \forall k = 1, \dots, m$
- 2  $\sum_k \sigma_i(s_k) = 1$



# Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación  
Dominancia  
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos  
Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización  
Gráficas

Anexos

References

## Definición 21 (mejor respuesta con estrategias mixtas)

Para el jugador  $i$ , la estrategia mixta  $\sigma_i$  es mejor respuesta a la estrategia mixta de sus oponentes  $\sigma_{-i}$  si y sólo si

$$u_i^e(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i^e(\sigma'_i, \sigma_{-i}), \quad \forall \sigma'_i \neq \sigma_i \quad (24)$$





# Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Definición 22 (EN en estrategias mixtas)

El perfil de estrategias  $(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$ , es un EN en estrategias mixtas si y sólo si  $\sigma_i^*$  es mejor respuesta para cada  $i$ .



# Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

## Ejemplo 11

Hallar el EN en estrategias puras y mixtas.

1\2	a	b	
v	(5, 5)	(4, 2)	$p$
w	(2, 4)	(-1, -1)	$1 - p$
	$q$	$1 - q$	1

$$J1 : u_1^e(v, \sigma_2) = 5q + 4(1 - q)$$

$$u_1^e(w, \sigma_2) = 2q - 1(1 - q)$$

$$J2 : u_2^e(a, \sigma_1) = 5p + 4(1 - p)$$

$$u_2^e(b, \sigma_1) = 2p - 1(1 - p)$$



# Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

1 Introducción

2 Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

3 Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

4 Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

5 Anexos



# Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

Las estrategias identificadas por mejor respuesta (puras y mixtas) se pueden representar vía gráficas dimensionales.



# Mejor respuesta

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación  
Dominancia  
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos  
Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización  
Gráficas

Anexos

References

## Ejemplo 12

Hallar las funciones de MR de ambos jugadores y graficar.

1\2	a	b	
v	$(0, 0)$	$(-5, 8)$	$p$
w	$(-5, 8)$	$(0, 0)$	$1 - p$
	$q$	$1 - q$	1



# Mejor respuesta

## Game Theory

Luis Chávez

## Introducción

## Teoría básica

Representación  
Dominancia  
Equilibrio de Nash

## Aplicaciones

Productos homogéneos  
Productos heterogéneos

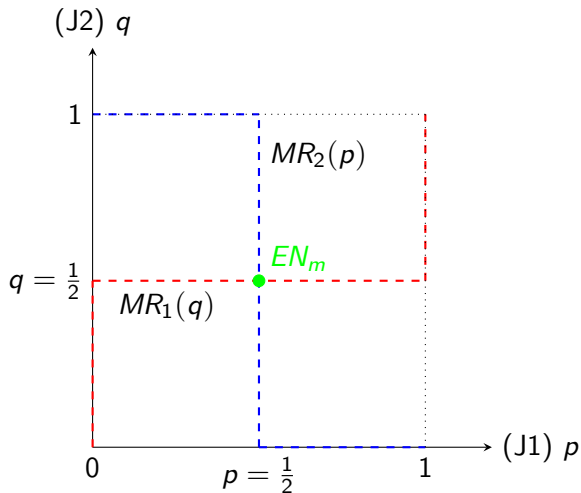
## Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

## Anexos

## References





# Especificación

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación  
Dominancia  
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos  
Productos heterogéneos

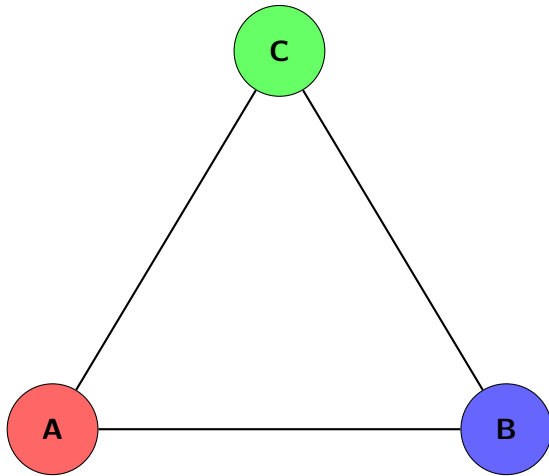
Estrategias  
mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References





# Referencias

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación

Dominancia

Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos

Productos heterogéneos

Estrategias mixtas

Randomización

Gráficas

Anexos

References

Ahmad, F., Almarri, O., Shah, Z., and Al-Fagih, L. (2023). Game theory applications in traffic management: A review of authority-based travel modelling. *Travel behaviour and society*, 32:100–585.

Bonnano, G. (2024). *Game Theory*. Addison-Wesley Professional, 3 edition.

Espinola, A. and Muñoz, F. (2023). *Game Theory: An Introduction with Step-by-Step Examples*. Springer Nature.

Gibbons, R. (1992). *Game theory for applied economists*. Princeton University Press.

Tadelis, S. (2013). *Game theory: an introduction*. Princeton university press.





# Recursos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Teoría básica

Representación  
Dominancia  
Equilibrio de Nash

Aplicaciones

Productos homogéneos  
Productos heterogéneos

Estrategias  
mixtas

Randomización  
Gráficas

Anexos

References

- Ben Pollak.
- Game Theory. International Journal of Game Theory.
- Erich Prisner.
- Bernhard von Stengel.
- Game Theory Explorer.
- Roger Myerson.