



Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos
Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional
Juegos infinitos

Anexos

References

Teoría de los Juegos y Estrategia

Tópico 3: Juegos con Información Incompleta

Luis Chávez



Escuela Profesional de Economía
USMP

Lima, 2025



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

- 1 Introducción
- 2 Juegos estáticos
 - Juegos de tipos
 - Aplicaciones
- 3 Juegos dinámicos
 - Secuencialidad racional
 - Juegos infinitos
- 4 Anexos



Notación

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos
Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional
Juegos infinitos

Anexos

References

- 1 Un conjunto N de jugadores, $i = \{1, 2, \dots, n\}$.
- 2 Un espacio de acciones $\forall i, A_i$.
- 3 Una colección de conjuntos de espacios de acciones, $A = \prod A_i$.
- 4 Un conjunto de tipos $\forall i, t_i \in T_i$.
- 5 Una colección de conjuntos de tipos, T .
- 6 Un conjunto de probabilidades (creencias) $\forall i, p_i : T_i \rightarrow \Delta T_{-i}$.
- 7 Función de utilidad, $u_i = A \times T \rightarrow \mathbb{R}$.



Generalidades

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos
Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional
Juegos infinitos

Anexos

References

Supuesto 1 (información incompleta)

Al menos algún i tiene información privada que no es conocida por su(s) oponente(s).

A veces se alude como asimetría de información.



Definición 1 (juego bayesiano)

Un juego bayesiano, $\Psi(N, A, T, p, u)$, es aquella estructura donde se evidencia información asimétrica en alguna parte del juego.



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

1 Introducción

2 Juegos estáticos

- Juegos de tipos
- Aplicaciones

3 Juegos dinámicos

- Secuencialidad racional
- Juegos infinitos

4 Anexos



Caracterización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos
Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional
Juegos infinitos

Anexos

References

John Harsanyi consideraba que los jugadores son de diferentes tipos.

Definición 1 (tipos)

Es aquel atributo de un jugador i que sólo es observable por sí mismo.

Definición 2 (equilibrio de Nash bayesiano)

Un perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ es un ENB en Ψ si y sólo si $\forall i$ y $t_i \in T_i$,

$$s_i^*(t_i) \in \arg \max_{a_i} \sum u_i(s_i^*(t_i), \dots, a_i, \dots, s_N(t_N)^*) \times p_i(t'_{-i}|t_i) \quad (1)$$

donde a_i es una acción y $p_i(t'_{-i}|t_i)$ es la denota la creencia de i de que los tipos de todos los demás jugadores son $t'_{-i} = (t'_1, t'_2, \dots, t'_{i-1}, t'_{i+1}, \dots, t'_n)$, dado su propio tipo.



Equilibrio

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

- Los tipos de los jugadores pueden estar correlacionados. Así, los jugadores pueden actualizar sus creencias sobre el tipo de los otros jugadores cuando conoce su propio tipo.
- Dado que conoce su tipo al actuar, maximiza su utilidad esperada con respecto a las nuevas creencias que adquirió mediante la regla de Bayes:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad (2)$$

para A y B dos eventos.



Ejemplo 1

Sea el juego donde el jugador 1 observa la realización de la v.a x que admite el valor de 6 con probabilidad $1/2$ y el valor de 9 con probabilidad $1/2$. El jugador 2 no observa la realización de x , sino únicamente la distribución de probabilidad. Resolver el juego bajo información completa e incompleta.

1\2	m	r
a	(8,12)	(2,4)
b	(x,1)	(6,8)

$$S_2 = \{m, r\}, \quad S_1 = \{a^9 a^6, a^9 b^6, b^9 a^6, b^9 b^6\}$$

La estrategia $a^9 b^6$ significa: J1 juega "a" si $x = 9$, "b" si $x = 6$.

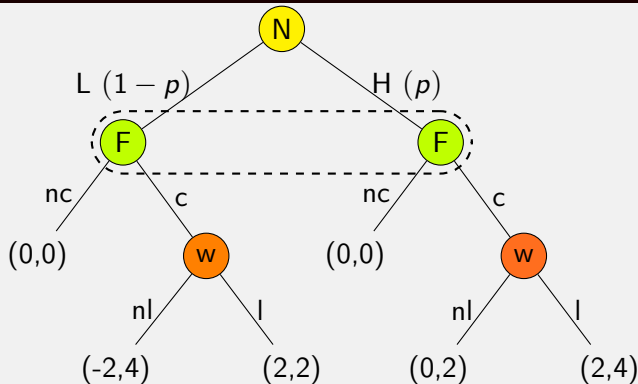


Ejemplo 2

Una firma no sabe si un trabajador es de alta (H) o baja (L) habilidad, aunque, el trabajador si conoce su tipo. El trabajador preferiría laborar si es de alta habilidad y, en caso contrario, preferiría no laborar. La firma preferirá contratar al trabajador que trabajará. La creencia de la firma es que $(H, L) = (p, 1 - p)$.

¿La firma sabe que el trabajador conoce su tipo?

Ejemplo 2 (cont.)





Ejemplo 2 (cont.)

Forma estratégica:

$$t_W = L$$

$F W$	nl	l
nc	$(0,0)$	$(0,0)$
c	$(-2,4)$	$(2,2)$

$$t_W = H$$

$F W$	nl	l
nc	$(0,0)$	$(0,0)$
c	$(0,2)$	$(2,4)$

$$T_F = \{t_F\}, \quad T_W = \{t_H, t_L\}$$

$$A_F = \{c, nc\}, \quad A_W = \{l, nl\}$$

$$p_F = (t_H, t_L) = (p, 1 - p), \quad p_W(t_F) = 1$$

Ejemplo 2 (cont.)

Si $p = 3/4$, demostrar que $s^* = \{s_F^*(t_F), [s_W^*(t_L), s_W^*(t_H)]\} = \{c, (l, nl)\}$ es un ENB.

Solución.

La creencia de la firma es $p_F(H|t_F) = 3/4$ y $p_F(L|t_F) = 1/4$. Luego,

$$u_F^e(c, s_W^*|t_F) = u_F(c, l, H)p_F(H|t_F) + u_F(c, nl, L)p_F(L|t_F) = 2\frac{3}{4} + (-2)\frac{1}{4} = 1$$

$$u_F^e(nc, s_W^*|t_F) = u_F(nc, l, H)p_F(H|t_F) + u_F(nc, nl, L)p_F(L|t_F) = 0\frac{3}{4} + 0\frac{1}{4} = 0$$

Entonces, $MR(F|t_F) = c$.

Ejemplo 2 (cont.)

Ahora, se analiza los tipos de trabajador:

$$u_W^e(s_F^*, l|H) = u_W(c, l, H) = 4$$

$$u_W^e(s_F^*, nl|H) = u_W(c, nl, H) = 2$$

Entonces, $MR(W|t_H) = l$.

$$u_W^e(s_F^*, l|L) = u_W(c, l, L) = 2$$

$$u_W^e(s_F^*, nl|L) = u_W(c, nl, L) = 4$$

Entonces, $MR(W|t_H) = nl$.



Caracterización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

Actividad 1. Demostrar que $s^* = \{s_F^*, s_W^*\} = \{nc, (nl, nl)\}$ es ENB.



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

1 Introducción

2 Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

3 Juegos dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

4 Anexos



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

Sea dos firmas que compiten en cantidades y enfrentan la demanda del mercado $p(Q) = a - bQ$, con $Q = q_1 + q_2$. Los costes de la firma 1 es $c_1(q_1) = cq_1$, mientras que de la firma 2 es:

$$c_2(q_2) = \begin{cases} c_x q_2 & \text{con probabilidad } \theta \\ c_y q_2 & \text{con probabilidad } 1 - \theta \end{cases}$$

La firma 2 conoce sus CMg y el de la firma 1, pero la firma 1 sólo conoce sus CMg y la distribución de probabilidades de los tipos de CMg de la firma 2.



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

Caracterización:

$$N = \{1, 2\}$$

$$T_1 = \{c\}$$

$$T_2 = \{c_x, c_y\}$$

$$A_c = A_{cx} = A_{yc} = [0, \infty)$$

$$p_2(c|c_x) = p_2(c|c_y) = 1$$

$$(p_1(c_x|c), p_1(c_y|c)) = (\theta, 1 - \theta)$$



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

Los profits:

$$\max \pi_1(q_1, q_2, c) = (a - bq_1 - bq_2)q_1 - cq_1 = (a - bq_1 - bq_2 - c)q_1$$

$$\max \pi_2(q_1, q_2, c_x) = (a - bq_1 - bq_2)q_2 - c_x q_2 = (a - bq_1 - bq_2 - c_x)q_2$$

$$\max \pi_2(q_1, q_2, c_y) = (a - bq_1 - bq_2)q_2 - c_y q_2 = (a - bq_1 - bq_2 - c_y)q_2$$



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

$MR(2|c_x):$

$$a - bq_1 - 2bq_2 - c_x = 0$$

$$q_2(c_x) = \frac{a - bq_1 - c_x}{2b} \quad (3)$$

$MR(2|c_y):$

$$a - bq_1 - 2bq_2 - c_y = 0$$

$$q_2(c_y) = \frac{a - bq_1 - c_y}{2b} \quad (4)$$



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

$MR(1|c):$

$$\max_{q_1} \theta(a - bq_1 - bq_2(c_x) - c)q_1 + (1 - \theta)(a - bq_1 - bq_2(c_y) - c)q_1$$

FOC:

$$\theta(a - 2bq_1 - bq_2(c_x) - c) + (1 - \theta)(a - 2bq_1 - bq_2(c_y) - c) = 0$$

$$q_1(c_x, c_y) = \frac{\theta(a - bq_2(c_x) - c) + (1 - \theta)(a - bq_2(c_y) - c)}{2b} \quad (5)$$



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

De (2) y (3) en (4), se tiene:

$$2bq_1 = \theta \left(a - b \frac{a - bq_1 - c_x}{2b} - c \right) + (1 - \theta) \left(a - b \frac{a - bq_1 - c_y}{2b} - c \right)$$
$$q_1^* = \frac{a + (1 - \theta)c_y + \theta c_x - 2c}{3b} \quad (6)$$

Resolviendo, se puede hallar el ENB:

$$(q_1^*, q_2(c_x)^*, q_2(c_y)^*)$$



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos
Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional
Juegos infinitos

Anexos

References

1 Introducción

2 Juegos estáticos
Juegos de tipos
Aplicaciones

3 Juegos dinámicos
Secuencialidad racional
Juegos infinitos

4 Anexos



Definición 3 (sistema de creencias)

Dado un juego Ψ , un sistema de creencias μ es una distribución de probabilidad sobre los nodos de decisión dentro de cada conjunto de información H_i .

$$\forall i \in N, \forall h \in H_i \wedge x \in h, \exists \mu(x) \in [0, 1] \quad (7)$$



Definición 4 (trayectoria de equilibrio)

Dado Ψ , un conjunto de información está en la trayectoria de equilibrio si se alcanza con probabilidad positiva cuando el juego se desarrolla según las estrategias de equilibrio, y está fuera de la trayectoria de equilibrio si es seguro que no se alcanza cuando el juego se desarrolla según las estrategias de equilibrio¹.

Véase Gibbons (1993).

¹Puede ser EN, ENPS, ENP o ENBP



Requerimientos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

Véase Tadelis (2013):

- 1 Cada i tendrá una creencia bien definida sobre su posición en conjunto de información. Es decir, el juego cuenta con un sistema de creencias.
- 2 Sea el perfil $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ un ENB. Se requiere que en todos los conjuntos de información las creencias que están en la trayectoria de equilibrio sean consistentes con la regla de Bayes.
- 3 En conjuntos de información que están fuera de la trayectoria de equilibrio se puede asignar cualquier creencia a la que no se aplique la regla de Bayes.
- 4 Dadas sus creencias, las estrategias de los jugadores deben ser **secuencialmente racionales**. Es decir, en cada conjunto de información, los jugadores buscarán la mejor respuesta a sus creencias.



Conceptos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

Definición 4 (ENBP)

Un **Equilibrio de Nash Bayesiano Perfecto** es un Equilibrio de Nash Bayesiano, $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$, junto con un sistema de creencias μ que satisfacen los 4 requerimientos de Tadelis (2013).



Definición 5 (consistencia)

Un perfil de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ junto con un sistema de creencias μ^* es **consistente** si existe una secuencia de estrategias mixtas no degeneradas $\{\sigma^k\}_1^\infty$ y una secuencia de creencias que son derivadas de cada σ^k de acuerdo a la regla de Bayes, $\{\mu^k\}_1^\infty$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sigma^k, \mu^k) = (\sigma^*, \mu^*)$.



Conceptos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos
Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional
Juegos infinitos

Anexos

References

Definición 6 (equilibrio secuencial)

Un perfil de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ junto con un sistema de creencias μ^* es un **equilibrio secuencial** si (σ^*, μ^*) es un ENBP consistente.



Creencias

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos
Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional
Juegos infinitos

Anexos

References

- En ENB las creencias eran exógenas:
 - Las estrategias dependían de las creencias.
 - Las creencias eran independientes de las estrategias.
- En ENBP tanto las creencias como las estrategias son parte del resultado del equilibrio:
 - Las estrategias dependen de las creencias.
 - Las creencias dependen de la naturaleza (dada) o de las estrategias (que otros jugadores pueden hacer).

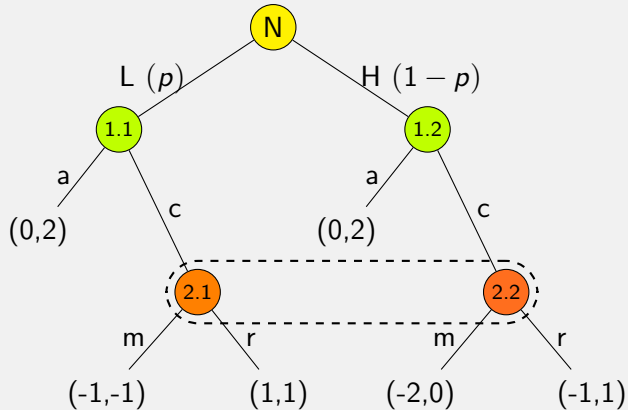


Restricciones consistentes de las creencias:

- 1 Exógenas: las creencias deben ser consistentes con la regla de Bayes
- 2 Endógenas: las creencias deben ser consistentes con cómo anticipamos las estrategias de otros jugadores.

Ejemplo 3

Sea el juego dinámico:



Ejemplo 3 (continuación...)

Caracterización del sistema de creencias:

$$\mu(h_1^1) = \mu(h_1^2) = 1$$

$$\mu(h_2^1) \in [0, 1]$$

$$\mu(h_2^2) \in [0, 1]$$

$$\mu(h_2^1) + \mu(h_2^2) = 1$$

Nota: las creencias son parcialmente determinadas por la naturaleza (exógenas) o parcialmente determinadas por las estrategias de i (endógenas).



Ejemplo 3 (continuación...)

Forma estratégica del juego², asumiendo $p = 1/2$:

1 2	m	r
aa	$(\{0,0\}, 2)$	$(\{0,0\}, 2)$
ac	$(\{0,-2\}, 1)$	$(\{0,-1\}, \frac{3}{2})$
ca	$(\{-1,0\}, \frac{1}{2})$	$(\{1,0\}, \frac{3}{2})$
cc	$(\{-1,-2\}, -\frac{1}{2})$	$(\{1,-1\}, 1)$

$$ENB = \{(aa, m), (ca, r)\}$$

¿Cuál de los 2 sobrevive?

²Dentro de las llaves están los pagos de J1 y los pagos de J2 están ponderados por p .

Ejemplo 3 (continuación...)

Sea (aa, m) :

- El conjunto de información $h_2 = (2.1, 2.2)$ está fuera de la trayectoria del equilibrio, por lo que $0 \leq \mu(h_2^1) \leq 1$ (R3).
- Los pagos esperados de J2 serán:

$$\mu(h_2^1)(-1) + \mu(h_2^2)(0) = -\mu(h_2^1), \text{ si J2 elige m.}$$

$$\mu(h_2^1)(1) + \mu(h_2^2)(1) = 1, \text{ si J2 elige r.}$$

por lo que J2 elige r .

- J2 no es secuencialmente racional (R4), entonces (aa, m) no es ENBP.



Ejemplo 3 (continuación...)

Sea (ca, r) :

- El conjunto de información $h_2 = (2.1, 2.2)$ está en la trayectoria del equilibrio de Nash.
- La creencia $\mu(h_2^1) = 1$ ya que sólo por L se llega a c .
- J2 está seguro que observar c significa que J1 es el tipo L .
- Entonces, si J2 llega a h_2 , su MR es r .



Ejemplo 3 (continuación...)

- Para demostrar que ca es MR a r y la creencia $\mu(h_2^1) = 1$, fijar r con prob. 1:
 - J1 se desvía a cc . No es secuencialmente racional para J1. Como J2 sabe que J1 es L, J2 jugará r . Pero si J1 es H, sabe que J2 jugará r y J1 elegirá a .
 - J1 se desvía a ac . No es secuencialmente racional. J1 debe ser L para llegar a a , pero podría mejorar si elige c ya que J2 elegirá r . Si J1 fuera H y elige c , también podría mejorar.
 - J1 se desvía a aa . No es secuencialmente racional. J1 debe ser L para llegar a a , pero podría mejorar si elige c ya que J2 elegirá r .
- Así, $ENBP = \{(ca, r)\}$.



Conceptos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos dinámicos

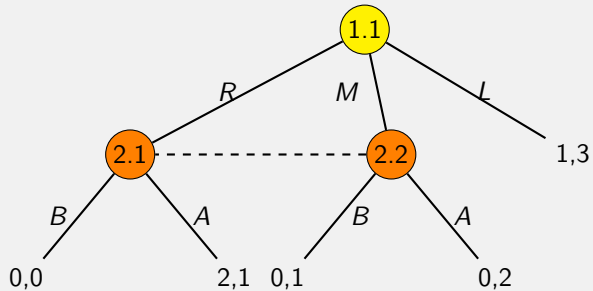
Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

Ejemplo 4





Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

1 Introducción

2 Juegos estáticos
Juegos de tipos
Aplicaciones

3 Juegos dinámicos
Secuencialidad racional
Juegos infinitos

4 Anexos



Fundamentos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

Pizarra...



Referencias

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Secuencialidad racional

Juegos infinitos

Anexos

References

Gibbons, R. (1993). *Un primer curso de teoría de juegos*. Antoni Bosch.

Tadelis, S. (2013). *Game theory: an introduction*. Princeton university press.