



Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

Teoría de los Juegos y Estrategia

Tópico 2: Juegos Dinámicos con Información Completa

Luis Chávez



Escuela Profesional de Economía
USMP

Lima, 2025



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

- 1 Introducción
- 2 Información perfecta
 - Racionalidad secuencial
 - Aplicaciones
- 3 Información imperfecta
 - Juegos finitos
 - Otros juegos
- 4 Anexos



Juegos dinámicos y su forma extensiva...

Definición 1 (forma extensiva)

Un juego finito en forma extensiva, H , representa la acciones secuenciales anidadas de un conjunto de jugadores que deciden según \succeq_i , quienes están expresadas ordinalmente vía outcomes dentro de un árbol de decisión.



Definición 2 (árbol de decisión)

Conjunto de nodos y ramas que permite caracterizar las estrategias y los resultados del juego. Las ramas generadas dentro de un nodo x no pueden estar vinculadas a otros nodo del mismo nivel o anterior a x .



Fundamentos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

Reglas:

- No puede haber dos nodos iniciales.
- Un nodo no puede tener dos nodos predecesores.
- Las ramas de un mismo nodo no pueden tener una misma etiqueta.
- Los nodos de un conjunto de información sólo pertenece a un jugador.
- Todos los nodos de un conjunto de información deben tener la misma cantidad de ramas.

Véase más en Espinola and Muñoz (2023).



Fundamentos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

Supuesto 1 (secuencialidad)

Los jugadores efectúan sus acciones según la elección que esperan de su oponente. El resultado de juego puede estar condicionado a quien inicia el juego.

Supuesto 2 (racionalidad)

Los jugadores efectúan acciones racionales.



Definición 3 (conjunto de información)

Representa los nodos dentro de un nivel del árbol de decisión. El conjunto de información puede ser singleton (de único nodo) bajo información perfecta o non-singleton bajo información imperfecta.



Ejemplo 1

El ajedrez es un juego de turnos entre dos jugadores. Si el jugador de piezas blancas inicia el juego, el oponente, debe jugar las piezas negras. El juego termina cuando se efectúa jaque mate al rey, cuando hay empate o cuando un jugador abandona el juego (creencia de que perderá en los siguientes turnos).



Supuesto 3 (información completa)

Un juego es de información completa si:

- 1 Se conoce quienes son los jugadores.
- 2 Se conoce las estrategias de cada jugador.
- 3 Se conoce los outcomes de cada estrategia.

Y, además, es de *conocimiento común* si todos los jugadores saben que sus oponentes tienen información completa.



Notación

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

- 1 Un conjunto finito N de jugadores, $\{1, 2, \dots, n\}$.
- 2 Nodos de decisión.
- 3 Una función que asigna el jugador i a un determinado nodo de decisión.
- 4 Un conjunto H de secuencias.
- 5 Una historia $h_i \in H \forall i$.
- 6 Un conjunto de acciones $a_i \in h_i, \forall i$.
- 7 Un conjunto de outcomes, \mathcal{O} .



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

1 Introducción

2 Información perfecta
Racionalidad secuencial
Aplicaciones

3 Información imperfecta
Juegos finitos
Otros juegos

4 Anexos



Caracterización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

Refinamiento a la racionalidad...

Supuesto 4 (racionalidad secuencial)

La estrategia de un jugador i es **secuencialmente racional** si, en cada nodo de decisión (o conjunto de información), la acción que toma es óptima dadas sus creencias y la estrategia de los demás jugadores (inclusive en aquellos que son improbables a priori).



Caracterización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

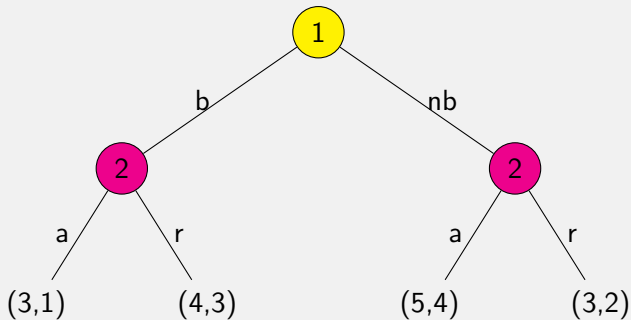
Supuesto 5 (información perfecta)

Los jugadores tienen información de la historia de acciones de su(s) oponente(s).

El siguiente ejemplo es un árbol que verifica los 5 supuestos...

Ejemplo 2

Solario puede beber o no para declararse a Violeta.





El método

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

¿Se puede resolver el juego con EN, garantizando S4?
No, porque no son creíbles...



El método

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

Definición 4 (*backward induction*)

Dado H , se elige algún nodo inferior x y se elige la hoja (nodo terminal) que otorga el mayor pago (utilidad) al jugador x . Luego, se elige un nodo superior a x (y) y se elige la rama con mayor pago del jugador y . El proceso continua hasta llegar al nodo inicial.

Se requiere la noción de **subjuego**¹.

¹La solución de cada subjuego (propio) es un EN.



El método

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

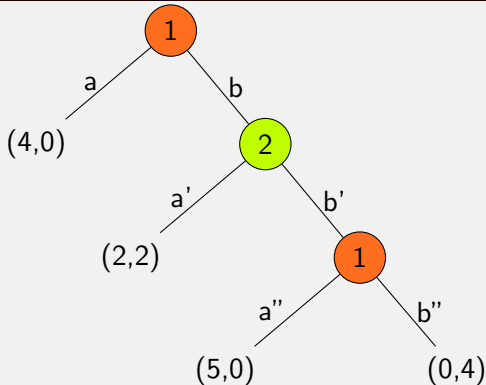
Anexos

References

Definición 5 (ENPS)

El resultado de aplicar inducción hacia atrás en un juego secuencial se denomina **Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos**, ENPS. En particular, es uno de los EN de los subjuegos propios.

Ejemplo 3





El método

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información imperfecta

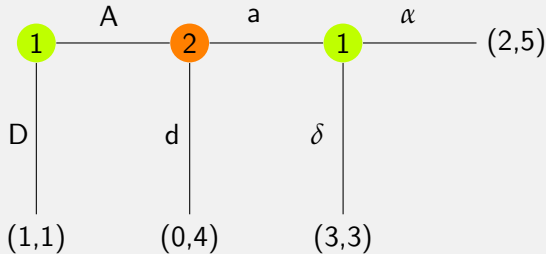
Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

Ejemplo 4

Dada una pareja, pueden desviar si esperan que el otro jugador decide terminar en adelante.





Forma estratégica

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

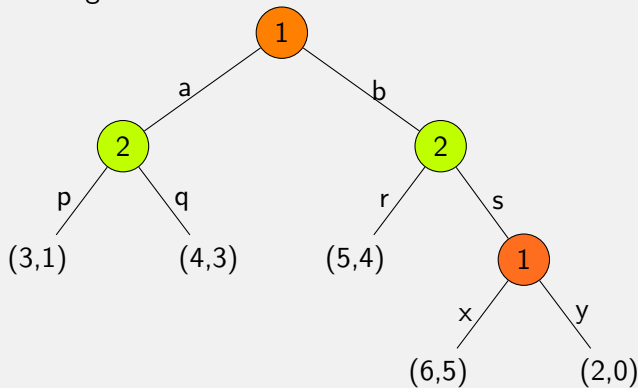
La matriz del ejemplo 4 será:

1 2	a	d
$D\delta$	$(1, 1)$	$(1, 1)$
$D\alpha$	$(1, 1)$	$(1, 1)$
$A\delta$	$(3, 3)$	$(0, 4)$
$A\alpha$	$(2, 5)$	$(0, 4)$

Véase más en Gibbons (1992) y Bonnano (2024).

Ejemplo 5

Halle la forma estratégica.





Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial

Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos

Otros juegos

Anexos

References

1 Introducción

2 Información perfecta

Racionalidad secuencial

Aplicaciones

3 Información imperfecta

Juegos finitos

Otros juegos

4 Anexos



Duopolio de Stackelberg

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

- Stackelberg (2010) diseñó un modelo dinámico en 1936. Era el caso de una firma dominante (líder) que decide primero y, a continuación, la seguidora.
- Las firmas deciden cantidades producidas en forma secuencial.
- La firma 1 elige una cantidad $q_1 \geq 0$, 2 observa q_1 y elige $q_2 \geq 0$.



Duopolio de Stackelberg

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

Formalizando, si la demanda inversa del mercado es $p(Q) = a - bQ$, los profits de i serán:

$$\max \pi_i(q_i, q_j) = q_i[p(Q) - c] \quad (1)$$

donde nuevamente se asume que $CF = 0$.



Duopolio de Stackelberg

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

Asumiendo que 1 elige una cierta cantidad q_1 , la $MR_2(q_1)$ será:

$$\max_{q_2} \pi_2(q_1, q_2) = \max_{q_2} q_2(a - bq_1 - bq_2 - c) \quad (2)$$

FOC:

$$a - bq_1 - 2bq_2 - c = 0$$

$$q_2(q_1) = \frac{a - bq_1 - c}{2b} \quad (3)$$

donde $(a - c)/b > q_1$.



Duopolio de Stackelberg

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información perfecta

Racionalidad secuencial

Aplicaciones

Información imperfecta

Juegos finitos

Otros juegos

Anexos

References

Ante la creencia de lo que 2 elegirá, 1 resolverá en una primera etapa:

$$\max_{q_1} \pi_1(q_1, q_2(q_1)) = \max_{q_1} q_1[a - bq_1 - bq_2(q_1) - c] \quad (4)$$

$$\pi_1(\cdot) = q_1 \left[a - bq_1 - b \left(\frac{a - bq_1 - c}{2b} \right) - c \right] \quad (5)$$

FOC:

$$a - 2bq_1 - \frac{a}{2} + bq_1 + \frac{c}{2} - c = 0$$
$$q_1 = \frac{a - c}{2b} \quad (6)$$



Duopolio de Stackelberg

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial

Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos

Otros juegos

Anexos

References

Finalmente, el resultado del juego por inducción hacia atrás será:

$$ENPS = \{q_1^*, q_2^*(q_1^*)\} \quad (7)$$

Por tanto,

$$ENPS = (q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a-c}{2b}, \frac{a-c}{4b} \right) \quad (8)$$



Duopolio de Stackelberg

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial

Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos

Otros juegos

Anexos

References

Actividad 1. Resolver el duopolio de Stackelberg cuando las firmas compiten en precios.



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

1 Introducción

2 Información perfecta
Racionalidad secuencial
Aplicaciones

3 Información imperfecta
Juegos finitos
Otros juegos

4 Anexos



Caracterización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

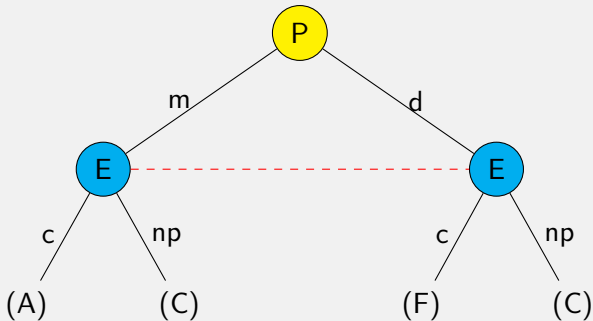
References

Supuesto 6 (información imperfecta)

Los jugadores no tienen plena información de la historia de acciones de su(s) oponente(s).

Ejemplo 6

Un profesor (P) imprime el examen en 2 colores de hojas. La pregunta del examen puede ser la misma (m) o diferente (d). Los estudiantes (E) pueden copiar o no.





Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

1 Introducción

2 Información perfecta
Racionalidad secuencial
Aplicaciones

3 Información imperfecta
Juegos finitos
Otros juegos

4 Anexos



XXXXXXXXXXXX

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References



Referencias

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información
perfecta

Racionalidad secuencial
Aplicaciones

Información
imperfecta

Juegos finitos
Otros juegos

Anexos

References

Bonnano, G. (2024). *Game Theory*. Addison-Wesley Professional, 3 edition.

Espinola, A. and Muñoz, F. (2023). *Game Theory: An Introduction with Step-by-Step Examples*. Springer Nature.

Gibbons, R. (1992). *Game theory for applied economists*. Princeton University Press.

Stackelberg, H. (2010). *Market structure and equilibrium*. Springer Science & Business Media.