Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos dinámicos

Anexos

References

# Teoría de Juegos

## Tópico 3: Juegos con Información Incompleta

Luis Chávez

Departamento Académico de Economía y Planificación
UNALM

Lima, 2025

# Contenido

1. Introducción
2. Juegos estáticos
   - Juegos de tipos
   - Aplicaciones
3. Juegos dinámicos
4. Anexos

# Notación

1. Un conjunto N de jugadores, $i = \{1, 2, ..., n\}$.
2. Un espacio de acciones $\forall i$, $A_i$.
3. Una colección de conjuntos de espacios de acciones, $A = \prod A_i$.
4. Un conjunto de tipos $\forall i$, $t_i \in T_i$.
5. Una colección de conjuntos de tipos, $T$.
6. Un conjunto de probabilidades $\forall i$, $p_i : T_i \rightarrow \Delta T_{-i}$.
7. Función de utilidad, $u_i = A \times T \rightarrow \mathbb{R}$.

# Generalidades

**Supuesto 1 (información incompleta)**

Al menos algún $i$ tiene información privada que no es conocida por su(s) oponente(s).

A veces se alude como asimetría de información.

# Generalidades

**Definición 1 (juego bayesiano)**

Un juego bayesiano, $\Psi(N, A, T, p, u)$, es aquella estructura donde se evidencia información asimétrica en alguna parte del juego.

# Contenido

1. Introducción
2. Juegos estáticos
   - Juegos de tipos
   - Aplicaciones
3. Juegos dinámicos
4. Anexos

# Caracterización

John Harsanyi consideraba que los jugadores son de diferentes tipos.

**Definición 1 (tipos)**

Es aquel atributo de un jugador $i$ que sólo es observable por sí mismo.

# Equilibrio

## Definición 2 (equilibrio de Nash bayesiano)

Un perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ es un ENB en $\Psi$ si y sólo si $\forall i$ y $t_i \in T_i$,

$$s_i^*(t_i) \in \arg\max_{a_i} \sum u_i(s_i^*(t_i), ..., a_i, ..., s_N(t_N)^*) \times p_i(t'_{-i}|t_i) \tag{1}$$

donde $a_i$ es una acción y $p_i(t'_{-i}|t_i)$ es la denota la creencia de $i$ de que los tipos de todos los demás jugadores son $t'_{-i} = (t'_1, t'_2, ..., t'_{i-1}, t'_{i+1}, ..., t'_n)$, dado su propio tipo.

# Caracterización

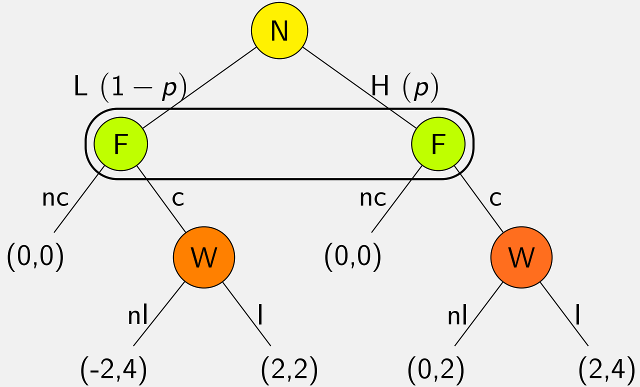
## Ejemplo 1

Una firma no sabe si un trabajador es de alta (H) o baja (L) habilidad, aunque, el trabajador si conoce su tipo. El trabajador preferiría laborar si es de alta habilidad y, en caso contrario, preferiría no laborar. La firma preferirá contratar al trabajador que trabajará. La creencia de la firma es que $(H, L) = (p, 1 - p)$.

¿La firma sabe que el trabajador conoce su tipo?

# Caracterización

## Ejemplo 1 *(continuación...)*



# Caracterización

## Ejemplo 1 *(continuación...)*

Forma estratégica:

$t_W = L$

| $F \mid W$ | nl | l |
|---|---|---|
| nc | 0,0 | 0,0 |
| c | -2,4 | 2,2 |

$t_W = H$

| $F \mid W$ | nl | l |
|---|---|---|
| nc | 0,0 | 0,0 |
| c | 0,2 | 2,4 |

$$T_F = \{t_F\}, \quad T_W = \{t_H, T_L\}$$

$$A_F = \{c, nc\}, \quad A_W = \{l, nl\}$$

$$p_F = (t_H, t_L) = (p, 1-p), \quad p_W(t_F) = 1$$

# Caracterización

## Ejemplo 1 *(continuación...)*

Si $p = 3/4$, demostrar que $s^* = (s_F^*(t_F), [s_W^*(t_L), s_W^*(t_H)]) = (c, (l, nl))$ es un ENB.

**Solución.**

La creencia de la firma es $p_F(H|t_F) = 3/4$ y $p_F(L|t_F) = 1/4$. Luego,

$$u_F^e(c, s_W^*|t_F) = u_F(c, l, H)p_F(H|t_F) + u_F(c, nl, L)p_F(L|t_F) = 2\frac{3}{4} + (-2)\frac{1}{4} = 1$$

$$u_F^e(nc, s_W^*|t_F) = u_F(nc, l, H)p_F(H|t_F) + u_F(nc, nl, L)p_F(L|t_F) = 0\frac{3}{4} + 0\frac{1}{4} = 0$$

Entonces, $MR(F|t_F) = c$.

# Caracterización

## Ejemplo 1 *(continuación...)*

Ahora, se analiza los tipos de trabajador:

$$u^e_W(s^*_F, l|H) = u_W(c, l, H) = 4$$

$$u^e_W(s^*_F, nl|H) = u_W(c, nl, H) = 2$$

Entonces, $MR(W|t_H) = l$.

$$u^e_W(s^*_F, l|L) = u_W(c, l, L) = 2$$

$$u^e_W(s^*_F, nl|L) = u_W(c, nl, L) = 4$$

Entonces, $MR(W|t_H) = nl$.

# Caracterización

Actividad 1. Demostrar que $s^* = (s_F^*, s_W^*) = (nc, (nl, nl))$ es ENB.

# Contenido

1 Introducción

2 Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

3 Juegos dinámicos

4 Anexos

# Duopolio de Cournot



Sea dos firmas que compiten en cantidades y enfrentan la demanda del mercado $p(Q) = a - bQ$, con $Q = q_1 + q_2$. Los costes de la firma 1 es $c_1(q_1) = cq_1$, mientras que de la firma 2 es:

$$c_2(q_2) = \begin{cases} c_x q_2 & \text{con probabilidad } \theta \\ c_y q_2 & \text{con probabilidad } 1 - \theta \end{cases}$$

La firma 2 conoce sus CMg y el de la firma 1, pero la firma 1 sólo conoce sus CMg y la distribución de probabilidades de los tipos de CMg de la firma 2.

# Duopolio de Cournot



Caracterización:

$$N = \{1, 2\}$$

$$T_1 = \{c\}$$

$$T_2 = \{c_x, c_y\}$$

$$A_c = A_{cx} = A_{yc} = [0, \infty)$$

$$p_2(c|c_x) = p_2(c|c_y) = 1$$

$$(p_1(c_x|c), p_1(c_y|c)) = (\theta, 1 - \theta)$$

# Duopolio de Cournot

Los profits:

$$\max \pi_1(q_1, q_2, c) = (a - bq_1 - bq_2)q_1 - cq_1 = (a - bq_1 - bq_2 - c)q_1$$

$$\max \pi_2(q_1, q_2, c_x) = (a - bq_1 - bq_2)q_2 - c_x q_2 = (a - bq_1 - bq_2 - c_x)q_2$$

$$\max \pi_2(q_1, q_2, c_y) = (a - bq_1 - bq_2)q_2 - c_y q_2 = (a - bq_1 - bq_2 - c_y)q_2$$

# Duopolio de Cournot



$MR(2|c_x)$:

$$\begin{aligned} a - bq_1 - 2bq_2 - c_x &= 0 \\ q_2(c_x) &= \frac{a - bq_1 - c_x}{2b} \end{aligned} \tag{2}$$

$MR(2|c_y)$:

$$\begin{aligned} a - bq_1 - 2bq_2 - c_y &= 0 \\ q_2(c_y) &= \frac{a - bq_1 - c_y}{2b} \end{aligned} \tag{3}$$

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos dinámicos

Anexos

References

# Duopolio de Cournot

$MR(1|c)$:

$$\max_{q_1} \; \theta(a - bq_1 - bq_2(c_x) - c)q_1 + (1-\theta)(a - bq_1 - bq_2(c_y) - c)q_1$$

FOC:

$$\theta(a - 2bq_1 - bq_2(c_x) - c) + (1-\theta)(a - 2bq_1 - bq_2(c_y) - c) = 0$$

$$q_1(c_x, c_y) = \frac{\theta(a - bq_2(c_x) - c) + (1-\theta)(a - bq_2(c_y) - c)}{2b} \tag{4}$$

# Duopolio de Cournot

De (2) y (3) en (4), se tiene:

$$2bq_1 = \theta \left( a - b\frac{a - bq_1 - c_x}{2b} - c \right) + (1-\theta) \left( a - b\frac{a - bq_1 - c_y}{2b} - c \right)$$

$$q_1^* = \frac{a + (1-\theta)c_y + \theta c_x - 2c}{3b} \tag{5}$$

Resolviendo, se puede hallar el ENB:

$$\left( q_1^*, q_2(c_x)^*, q_2(c_y)^* \right)$$

# Referencias