

PS06 – Game Theory

Lecturer: Luis Chávez

Los siguientes ejercicios permiten medir la capacidad analítica y procedimental. Se sugiere resolverlos en forma ascendente.

Problema 1: riesgo moral

Asuma que el Agente puede asignar tiempo a dos tareas diferentes. Sea e_i la cantidad de tiempo dedicada a la tarea $i \in \{1, 2\}$. El Principal solo se preocupa por la tarea 1 y obtiene un beneficio $y = e_1 + \varepsilon$, donde $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Sin embargo, el Agente obtiene un beneficio $v(e_2)$ por dedicar tiempo a la tarea 2. El Agente tiene preferencias CARA con función de utilidad:

$$u(w, e_1, e_2) = -\exp\{-r[w - c(e_1 + e_2) + v(e_2)]\},$$

donde $c(e_1 + e_2)$ es el costo del tiempo, con $c'(\cdot) > 0$, $c''(\cdot) > 0$ y $c(0) = 0$. Suponga también que $v'(\cdot) > 0$, $v''(\cdot) < 0$ y $v(0) = 0$, y que la optimización con respecto a (e_1, e_2) resulta en una solución interior. Sea \bar{w} el salario que el Agente recibe de su opción externa, por lo que $\bar{u} = -\exp\{-r\bar{w}\}$.

- ¿Cuál es el resultado de primer óptimo (first-best) en este entorno?.
- Suponga que el esfuerzo e_1 no es contratable, y que el Principal puede redactar un contrato que sea una función afín del output y además permitir al Agente participar o no en la tarea 2. Bajo estas suposiciones, ¿cuál es el espacio de contratos?.
- Suponga que el Principal debe pagar al Agente $b = 1$ (es decir, debe pagarle un sol por cada unidad de output). ¿Permitirá el Principal que el Agente se involucre en la tarea 2? Compare esta situación con la del apartado a). ¿Qué pasa si $b < 1$ se establece exógenamente?.

Problema 2: riesgo moral estándar

Sea el caso donde hay tres niveles de esfuerzo, $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, y dos posibles niveles de output, $y = \{0, 10\}$, y que el precio del output es $p = 1$. La probabilidad de que $y = 10$ dado cada uno de los niveles de esfuerzo está dada por la función de probabilidad:

$$f(10 | e_1) = \frac{2}{3}, \quad f(10 | e_2) = \frac{1}{2}, \quad f(10 | e_3) = \frac{1}{3}.$$

La función de costo de esfuerzo del Agente verifica que $c(e_1) = \frac{5}{3}$, $c(e_2) = \frac{8}{5}$, y $c(e_3) = \frac{4}{3}$. Finalmente, la utilidad del Agente sobre el ingreso está dada por $u(w) = \sqrt{w}$, por lo que su utilidad esperada es:

$$U(w, e) = \mathbb{E}[\sqrt{w} | e] - c(e),$$

y su opción externa (valor de reserva) le otorga una utilidad $\underline{U} = 0$.

- ¿Cuál es el contrato óptimo para el Principal cuando el esfuerzo es contractible?
- Demuestre que si el esfuerzo no es contratable, y $W = \{w : y \rightarrow \mathbb{R}\}$, entonces no existe un contrato w bajo el cual el Agente elija e_2 . ¿Para qué valores de $c(e_2)$ existiría un contrato w bajo el cual el Agente elegiría e_2 ?

- c) ¿Cuál es el contrato óptimo cuando el esfuerzo no es contractible, y $W = \{w : y \rightarrow \mathbb{R}\}$?
- d) Suponga en cambio que $c(e_1) = \sqrt{8}$ y que $f(10 | e_1) = x \in (0, 1)$. Si el esfuerzo no es contractible, y $W = \{w : y \rightarrow \mathbb{R}\}$, ¿cuál es el contrato óptimo para el Principal cuando x tiende a 1? ¿El nivel de esfuerzo implementado es mayor o menor que cuando el esfuerzo es contractible?

Problema 3: selección adversa

La calidad en el mercado de autos usados volkswagen es variable. Suponga que la calidad de un volkswagen determinado, medida en soles, puede tomar cualquier valor entre 2000 y 7000, con probabilidad uniforme. La distribución de la calidad es conocida por todos, y los propietarios conocen la calidad de su volkswagen, pero los compradores no. Todos los agentes son neutrales al riesgo.

- a) Si un comprador piensa que todos los volkswagen están en el mercado, ¿cuál es el precio máximo que está dispuesto a pagar?
- b) A ese precio, ¿cuál es la calidad de los volkswagen que efectivamente se ofrecen en el mercado?
- c) Encuentre el equilibrio en este mercado.
- d) Ahora suponga que los compradores valoran cada volkswagen en un precio 20 % mayor que el del propietario. Los precios de venta para los propietarios se mantienen como antes. Suponga que hay más compradores que vendedores, de modo que, al precio competitivo, cada comprador paga su precio de reserva. ¿Cuál es el nuevo equilibrio?