



Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side

Subsección 2.2

Anexos

References

Teoría de los Juegos y Estrategia

Tópico 3: Juegos con Información Incompleta

Luis Chávez



Escuela Profesional de Economía
USMP

Lima, 2025



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos
Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompletitud one-side
Subsección 2.2

Anexos

References

- 1 Introducción
- 2 Juegos estáticos
Juegos de tipos
Aplicaciones
- 3 Juegos dinámicos
Incompletitud one-side
Subsección 2.2
- 4 Anexos



Notación

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos
Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side
Subsección 2.2

Anexos

References

- 1 Un conjunto N de jugadores, $i = \{1, 2, \dots, n\}$.
- 2 Un espacio de acciones $\forall i, A_i$.
- 3 Una colección de conjuntos de espacios de acciones, $A = \prod A_i$.
- 4 Un conjunto de tipos $\forall i, t_i \in T_i$.
- 5 Una colección de conjuntos de tipos, T .
- 6 Un conjunto de probabilidades $\forall i, p_i : T_i \rightarrow \Delta T_{-i}$.
- 7 Función de utilidad, $u_i = A \times T \rightarrow \mathbb{R}$.



Generalidades

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos
Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side
Subsección 2.2

Anexos

References

Supuesto 1 (información incompleta)

Al menos algún i tiene información privada que no es conocida por su(s) oponente(s).

A veces se alude como asimetría de información.



Definición 1 (juego bayesiano)

Un juego bayesiano, $\Psi(N, A, T, p, u)$, es aquella estructura donde se evidencia información asimétrica en alguna parte del juego.



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos
Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompletitud one-side
Subsección 2.2

Anexos

References

① Introducción

② Juegos estáticos
Juegos de tipos
Aplicaciones

③ Juegos dinámicos
Incompletitud one-side
Subsección 2.2

④ Anexos



Caracterización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side

Subsección 2.2

Anexos

References

John Harsanyi consideraba que los jugadores son de diferentes tipos.

Definición 1 (tipos)

Es aquel atributo de un jugador i que sólo es observable por sí mismo.



Equilibrio

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side

Subsección 2.2

Anexos

References

Definición 2 (equilibrio de Nash bayesiano)

Un perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ es un ENB en Ψ si y sólo si $\forall i$ y $t_i \in T_i$,

$$s_i^*(t_i) \in \arg \max_{a_i} \sum u_i(s_i^*(t_i), \dots, a_i, \dots, s_N(t_N)^*) \times p_i(t'_{-i} | t_i) \quad (1)$$

donde a_i es una acción y $p_i(t'_{-i} | t_i)$ es la denota la creencia de i de que los tipos de todos los demás jugadores son $t'_{-i} = (t'_1, t'_2, \dots, t'_{i-1}, t'_{i+1}, \dots, t'_n)$, dado su propio tipo.



Caracterización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos
Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side
Subsección 2.2

Anexos

References

Ejemplo 1

Sea el juego donde el jugador 1 observa la realización de la v.a x que admite el valor de 6 con probabilidad $1/2$ y el valor de 9 con probabilidad $1/2$. El jugador 2 no observa la realización de x , sino únicamente la distribución de probabilidad. Resolver el juego bajo información completa e incompleta.

1 2	m	r
a	(8,12)	(2,4)
b	(x,1)	(6,8)

$$S_2 = \{m, r\}, \quad S_1 = \{a^9 a^6, a^9 b^6, b^9 a^6, b^9 b^6\}$$



Caracterización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side

Subsección 2.2

Anexos

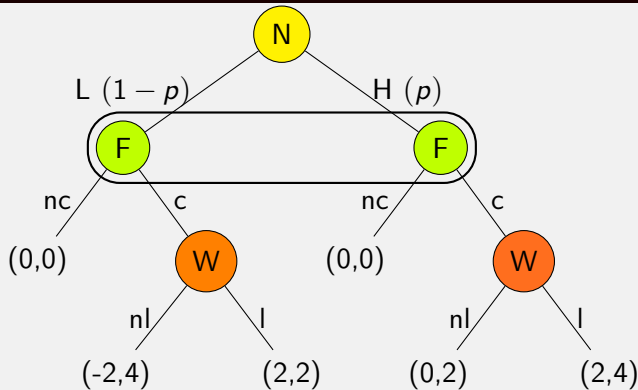
References

Ejemplo 2

Una firma no sabe si un trabajador es de alta (H) o baja (L) habilidad, aunque, el trabajador si conoce su tipo. El trabajador preferiría laborar si es de alta habilidad y, en caso contrario, preferiría no laborar. La firma preferirá contratar al trabajador que trabajará. La creencia de la firma es que $(H, L) = (p, 1 - p)$.

¿La firma sabe que el trabajador conoce su tipo?

Ejemplo 2 (continuación...)



Ejemplo 2 (*continuación...*)

Forma estratégica:

$$t_W = L$$

$F W$	nl	l
nc	$(0,0)$	$(0,0)$
c	$(-2,4)$	$(2,2)$

$$t_W = H$$

$F W$	nl	l
nc	$(0,0)$	$(0,0)$
c	$(0,2)$	$(2,4)$

$$T_F = \{t_F\}, \quad T_W = \{t_H, t_L\}$$

$$A_F = \{c, nc\}, \quad A_W = \{l, nl\}$$

$$p_F = (t_H, t_L) = (p, 1 - p), \quad p_W(t_F) = 1$$

Ejemplo 2 (continuación...)

Si $p = 3/4$, demostrar que $s^* = (s_F^*(t_F), [s_W^*(t_L), s_W^*(t_H)]) = (c, (l, nl))$ es un ENB.

Solución.

La creencia de la firma es $p_F(H|t_F) = 3/4$ y $p_F(L|t_F) = 1/4$. Luego,

$$u_F^e(c, s_W^*|t_F) = u_F(c, l, H)p_F(H|t_F) + u_F(c, nl, L)p_F(L|t_F) = 2\frac{3}{4} + (-2)\frac{1}{4} = 1$$

$$u_F^e(nc, s_W^*|t_F) = u_F(nc, l, H)p_F(H|t_F) + u_F(nc, nl, L)p_F(L|t_F) = 0\frac{3}{4} + 0\frac{1}{4} = 0$$

Entonces, $MR(F|t_F) = c$.

Ejemplo 2 (*continuación...*)

Ahora, se analiza los tipos de trabajador:

$$u_W^e(s_F^*, I|H) = u_W(c, I, H) = 4$$

$$u_W^e(s_F^*, nl|H) = u_W(c, nl, H) = 2$$

Entonces, $MR(W|t_H) = I$.

$$u_W^e(s_F^*, I|L) = u_W(c, I, L) = 2$$

$$u_W^e(s_F^*, nl|L) = u_W(c, nl, L) = 4$$

Entonces, $MR(W|t_H) = nl$.



Caracterización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side

Subsección 2.2

Anexos

References

Actividad 1. Demostrar que $s^* = (s_F^*, s_W^*) = (nc, (nl, nl))$ es ENB.



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompletitud one-side

Subsección 2.2

Anexos

References

1 Introducción

2 Juegos estáticos
Juegos de tipos
Aplicaciones

3 Juegos dinámicos
Incompletitud one-side
Subsección 2.2

4 Anexos



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side

Subsección 2.2

Anexos

References

Sea dos firmas que compiten en cantidades y enfrentan la demanda del mercado $p(Q) = a - bQ$, con $Q = q_1 + q_2$. Los costes de la firma 1 es $c_1(q_1) = cq_1$, mientras que de la firma 2 es:

$$c_2(q_2) = \begin{cases} c_x q_2 & \text{con probabilidad } \theta \\ c_y q_2 & \text{con probabilidad } 1 - \theta \end{cases}$$

La firma 2 conoce sus CMg y el de la firma 1, pero la firma 1 sólo conoce sus CMg y la distribución de probabilidades de los tipos de CMg de la firma 2.



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side

Subsección 2.2

Anexos

References

Caracterización:

$$N = \{1, 2\}$$

$$T_1 = \{c\}$$

$$T_2 = \{c_x, c_y\}$$

$$A_c = A_{cx} = A_{yc} = [0, \infty)$$

$$p_2(c|c_x) = p_2(c|c_y) = 1$$

$$(p_1(c_x|c), p_1(c_y|c)) = (\theta, 1 - \theta)$$



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side

Subsección 2.2

Anexos

References

Los profits:

$$\max \pi_1(q_1, q_2, c) = (a - bq_1 - bq_2)q_1 - cq_1 = (a - bq_1 - bq_2 - c)q_1$$

$$\max \pi_2(q_1, q_2, c_x) = (a - bq_1 - bq_2)q_2 - c_x q_2 = (a - bq_1 - bq_2 - c_x)q_2$$

$$\max \pi_2(q_1, q_2, c_y) = (a - bq_1 - bq_2)q_2 - c_y q_2 = (a - bq_1 - bq_2 - c_y)q_2$$



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side

Subsección 2.2

Anexos

References

$MR(2|c_x):$

$$a - bq_1 - 2bq_2 - c_x = 0$$

$$q_2(c_x) = \frac{a - bq_1 - c_x}{2b} \quad (2)$$

$MR(2|c_y):$

$$a - bq_1 - 2bq_2 - c_y = 0$$

$$q_2(c_y) = \frac{a - bq_1 - c_y}{2b} \quad (3)$$



Duopolio de Cournot

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side

Subsección 2.2

Anexos

References

$MR(1|c)$:

$$\max_{q_1} \theta(a - bq_1 - bq_2(c_x) - c)q_1 + (1 - \theta)(a - bq_1 - bq_2(c_y) - c)q_1$$

FOC:

$$\theta(a - 2bq_1 - bq_2(c_x) - c) + (1 - \theta)(a - 2bq_1 - bq_2(c_y) - c) = 0$$

$$q_1(c_x, c_y) = \frac{\theta(a - bq_2(c_x) - c) + (1 - \theta)(a - bq_2(c_y) - c)}{2b} \quad (4)$$

De (2) y (3) en (4), se tiene:

$$2bq_1 = \theta \left(a - b \frac{a - bq_1 - c_x}{2b} - c \right) + (1 - \theta) \left(a - b \frac{a - bq_1 - c_y}{2b} - c \right)$$
$$q_1^* = \frac{a + (1 - \theta)c_y + \theta c_x - 2c}{3b} \quad (5)$$

Resolviendo, se puede hallar el ENB:

$$(q_1^*, q_2(c_x)^*, q_2(c_y)^*)$$



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos
Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompletitud one-side
Subsección 2.2

Anexos

References

1 Introducción

2 Juegos estáticos
Juegos de tipos
Aplicaciones

3 Juegos dinámicos
Incompletitud one-side
Subsección 2.2

4 Anexos



Definición 3 (sistema de creencias)

Dado un juego Ψ , un sistema de creencias μ es una distribución de probabilidad sobre los nodos de decisión dentro de cada conjunto de información H_i .

$$\forall i \in N, \forall h \in H_i \wedge x \in h, \exists \mu(x) \in [0, 1] \quad (6)$$



Definición 4 (secuencialidad racional)

Dado un juego Ψ , en cada conjunto de información h , los jugadores juegan la mejor respuesta a sus creencias y, a su vez, éstas verifican la regla de Bayes.



Conceptos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side

Subsección 2.2

Anexos

References

Definición 5 (ENBP)

Un **Equilibrio de Nash Bayesiano Perfecto** es un Equilibrio de Nash Bayesiano, $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$, junto con un sistema de creencias μ que satisfacen secuencialidad racional en cada conjunto de información.



Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos
Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompletitud one-side
Subsección 2.2

Anexos

References

1 Introducción

2 Juegos estáticos
Juegos de tipos
Aplicaciones

3 Juegos dinámicos
Incompletitud one-side
Subsección 2.2

4 Anexos



XXXXXXXXXXXX

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side

Subsección 2.2

Anexos

References



Referencias

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Juegos estáticos

Juegos de tipos

Aplicaciones

Juegos
dinámicos

Incompleteness one-side

Subsección 2.2

Anexos

References