Teoría de los Juegos y Estrategia

Tópico 3: Juegos con Información Incompleta

Luis Chávez

Escuela Profesional de Economía
USMP

Lima, 2025

Contenido

Notación

1. Un conjunto N de jugadores, $i = \{1, 2, ..., n\}$.
2. Un espacio de acciones $\forall i$, A_i.
3. Una colección de conjuntos de espacios de acciones, $A = \prod A_i$.
4. Un conjunto de tipos $\forall i$, $t_i \in T_i$.
5. Una colección de conjuntos de tipos, T.
6. Un conjunto de probabilidades (creencias) $\forall i$, $p_i : T_i \to \Delta T_{-i}$.
7. Función de utilidad, $u_i = A \times T \to \mathbb{R}$.

Generalidades

Supuesto 1 (información incompleta)

Al menos algún i tiene información privada que no es conocida por su(s) oponente(s), como tal, ya no se verifica *conocimiento común*[1].

A veces se alude como asimetría de información.

[1]Cuando algo es conocido por todos los jugadores, saben que es conocido por todos los jugadores, saben que saben que es conocido por todos, ...

Generalidades

Definición 1 (juego bayesiano)

Un juego bayesiano, $\Psi(N, A, T, p, u)$, es aquella estructura donde se evidencia información asimétrica en alguna parte del juego.

Contenido

Caracterización

John Harsanyi consideraba que los jugadores son de diferentes tipos.

Definición 1 (tipos)

Es aquel atributo de un jugador i que sólo es observable por sí mismo.

Equilibrio

Definición 2 (creencia)

Una creencia de i es aquella distribución de probabilidades sobre los tipos de los otros jugadores (t_{-i}) dado que conoce su propio tipo (t_i):

$$p_i(t_{-i}|t_i) = \mu_i, \qquad \mu_i \in [0,1], \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \mu_i = 1 \tag{1}$$

Cuando hay **independencia** entre los tipos de los jugadores, la creencia se denota por $p_i(t_{-i})$.

Caracterización

Sean $X_1, \ldots, X_n$ las v.a asociadas a los tipos de los n jugadores. Se define la distribución conjunta:

$$p(t_1, \ldots, t_n) = P(X_1 = t_1, \ldots, X_n = t_n), \tag{2}$$

- La distribución conjunta $p(t_1, \ldots, t_n)$ es de conocimiento.
- Cada i conoce su propio tipo (información privada), una realización de X_i.
- Para formar sus creencias sobre los tipos de los demás jugadores, cada jugador i utiliza su información privada y aplica la regla de Bayes. Para $n = 2$:

$$p_i(t_j \mid t_i) = \frac{p(t_i, t_j)}{p(t_i)}. \tag{3}$$

Caracterización

Ejemplo 1

Un sorteo consiste en limpiar la imagen de dos bancos b_i. Éstos deben elegir una ficha de entre tres posibles y observar de forma privada el nombre oculto: banco adecuado (A), banco barato (B) o banco ecológico (E). Si la extracción sigue una distribución uniforme, se tiene:

$t_1 \vert t_2$	A	B	E
A	0	1/6	1/6
B	1/6	0	1/6
E	1/6	1/6	0

$$p_i(t_j \mid t_i) = \begin{cases} 1/6, & t_j \neq t_i \\ 0, & t_j = t_i \end{cases}$$

Caracterización

Ejemplo 1 (cont.)

Si b_1 extrae B (conoce su tipo), sabe que $t_2 \neq B$. Así, su creencia será:

$$p_1(t_2 | t_1 = B) = \frac{p(t_1 = B, t_2)}{p(t_1 = B)}, \quad t_2 = A, E$$

Si, $t_2 = A$, luego

$$p_1(t_2 = A | t_1 = B) = \frac{1/6}{1/6 + 0 + 1/6} = \frac{1}{2}$$

¿Y $p_1(t_2 = E | t_1 = B)$?

Equilibrio

Definición 3 (equilibrio de Nash bayesiano)

Un perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ es un ENB en Ψ si y sólo si $\forall i$ y $t_i \in T_i$,

$$s_i^*(t_i) \in \arg\max_{a_i} \sum u_i(s_i^*(t_i), ..., a_i, ..., s_N(t_N)^*) \times p_i(t'_{-i}|t_i) \tag{4}$$

donde a_i es una acción y $p_i(t'_{-i}|t_i)$ es la creencia de i de que los tipos de todos los demás jugadores son $t'_{-i} = (t'_1, t'_2, ..., t'_{i-1}, t'_{i+1}, ..., t'_n)$, dado su propio tipo.

Caracterización

Ejemplo 2

Una firma no sabe si un trabajador es de alta (H) o baja (L) habilidad, aunque, el trabajador si conoce su tipo. El trabajador preferiría laborar si es de alta habilidad y, en caso contrario, preferiría no laborar. La firma preferirá contratar al trabajador que trabajará. La creencia de la firma es que $(H, L) = (p, 1 - p)$.

¿La firma sabe que el trabajador conoce su tipo?

Caracterización

Ejemplo 2 (cont.)

Forma estratégica:

$t_W = L$

$F \mid W$	nl	l
nc	(0,0)	(0,0)
c	(-2,4)	(2,2)

$t_W = H$

$F \mid W$	nl	l
nc	(0,0)	(0,0)
c	(0,2)	(2,4)

$$T_F = \{t_F\}, \qquad T_W = \{t_H, t_L\}$$

$$A_F = \{c, nc\}, \qquad A_W = \{l, nl\}$$

$$p_F = (t_H, t_L) = (p, 1-p), \qquad p_W(t_F) = 1$$

Caracterización

Ejemplo 2 (cont.)

Si $p = 3/4$, demostrar que $s^* = \{s_F^*(t_F), [s_W^*(t_L), s_W^*(t_H)]\} = \{c, (l, nl)\}$ es un ENB.

Solución.

La creencia de la firma es $p_F(H|t_F) = 3/4$ y $p_F(L|t_F) = 1/4$. Luego,

$$u_F^e(c, s_W^*|t_F) = u_F(c, l, H)p_F(H|t_F) + u_F(c, nl, L)p_F(L|t_F) = 2\frac{3}{4} + (-2)\frac{1}{4} = 1$$

$$u_F^e(nc, s_W^*|t_F) = u_F(nc, l, H)p_F(H|t_F) + u_F(nc, nl, L)p_F(L|t_F) = 0\frac{3}{4} + 0\frac{1}{4} = 0$$

Entonces, $MR(F|t_F) = c$.

Caracterización

Ejemplo 2 (cont.)

Ahora, se analiza los tipos de trabajador:

$$u_W^e(s_F^*, l|H) = u_W(c, l, H) = 4$$

$$u_W^e(s_F^*, nl|H) = u_W(c, nl, H) = 2$$

Entonces, $MR(W|t_H) = l$.

$$u_W^e(s_F^*, l|L) = u_W(c, l, L) = 2$$

$$u_W^e(s_F^*, nl|L) = u_W(c, nl, L) = 4$$

Entonces, $MR(W|t_L) = nl$.

Caracterización

Actividad 1. Demostrar que $s^* = \{s_F^*, s_W^*\} = \{nc, (nl, nl)\}$ es ENB.

Caracterización

Ejemplo 3

Adam y Bruno planean, de forma coordinada, salir a Garrison Bar (G) o Viajero Lima Bar (V). Adam no está seguro si a Bruno le gusta Garrison o no, por lo que tiene la creencia $\alpha \in [0, 1]$ que a Bruno le gusta Garrison. Éste último si sabe su tipo. Hallar los ENB.

$B : t_1$

$A \vert B$	G	V
G	(1,1)	(0,0)
V	(0,0)	(1,1)

$B : t_2$

$A \vert B$	G	V
G	(1,-1)	(0,0)
V	(0,0)	(1,1)

Caracterización

Ejemplo 3 (cont.)

$$S_A = \{G, V\}, \quad S_B = \{GG, GV, VG, VV\}$$

Adam juega G:

$$\mu_1(G, GG) = \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 1 = 1$$
$$\mu_1(G, GV) = \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 0 = \alpha$$
$$\mu_1(G, VG) = \alpha \cdot 0 + (1-\alpha) \cdot 1 = 1-\alpha$$
$$\mu_1(G, VV) = \alpha \cdot 0 + (1-\alpha) \cdot 0 = 0$$

Adam juega V:

$$\mu_1(V, GG) = \alpha \cdot 0 + (1-\alpha) \cdot 0 = 0$$
$$\mu_1(V, GV) = \alpha \cdot 0 + (1-\alpha) \cdot 1 = 1-\alpha$$
$$\mu_1(V, VG) = \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 0 = \alpha$$
$$\mu_1(V, VV) = \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 1 = 1$$

Caracterización

Ejemplo 3 (cont.)

Se puede escribir:

$A \vert B$	GG	GV	VG	VV
G	1, (1, -1)	α, (1, 0)	$1-\alpha$, (0, -1)	0, (0, 0)
V	0, (0, 0)	$1-\alpha$, (0, 1)	α, (1, 0)	1, (1, 1)

Por MR, si $\alpha > 1-\alpha$, es decir, $\alpha > 1/2$, ENB:

$$s^* = \{(G, GV), (V, VV)\}$$

En caso contrario, $\alpha < 1/2$, ENB:

$$s^* = \{(V, VV)\}$$

Contenido

Conceptos

Definición 4 (subasta)

Es un mecanismo de asignación de bienes a determinados precios.

Los precios se fijan a través de pujas.

Taxonomía

1. Subastas unitarias: se vende un bien.
   - Ingles
   - Japonés.
   - Holandés.
   - Primer precio (oferta cerrada).
   - Segundo precio o Vickrey (oferta cerrada).
2. Subastas múltiples: se venden varias unidades de un bien.
   - Precio uniforme.
   - Precios discriminatorios (pay-as-bid).
   - Segundo precio generalizado.
3. Subastas combinatorias: bienes diferentes.
   - Oferta sellada.
   - Combinatoria jerárquica.

Notación

Sea X un conjunto de asignaciones de bienes, una subasta puede ser vista como un juego bayesiano de la forma $\Psi(N, A, T, O, \chi, u)$, donde:

- N es el conjunto de potenciales compradores.
- T es la colección de conjuntos de tipos.
- $O = X \times \mathbb{R}^n$ es el conjunto de resultados (asignación de bienes con pagos).
- $\chi : A \to O$ una función de elección.
- $u : A \to \mathbb{R}^n$ es una función de pagos.

Primer precio

Definición 5 (primer precio)

Una subasta de primer precio a oferta cerrada[2], es aquel mecanismo donde:

1. Se efectúan pujas simultáneas, $b_i, \; i \in N$.
2. El ganador paga lo que pujó, es decir, el precio más alto.

[2] Sellada o *sealed-bid*.

Primer precio

Si $x_i \in [0,1]$ es la valoración (creencia) de cada jugador i sobre el bien en subasta, siendo x_i información privada para i, el pago ex-post de i se puede escribir como:

$$u_i(b_i, b_{-i}; x_i) = \begin{cases} x_i - b_i, & \text{si } b_i \geq b_{-i}, \\ 0, & \text{si } b_{-i} > b_i \end{cases} \tag{5}$$

Trade-off:

- Comunicar una oferta baja para pagar menos si resulta ganador.
- Comunicar una oferta alta para tener más posibilidades de ganar.

Primer precio

- Si cada tipo de i formula una estrategia, se define $s_i : T_i \to A_i$, donde una estrategia aquí es $b_i(x_i)$.
- Si i toma como dado $b_{-i}(x_{-i})$, el pago esperado se puede escribir como:

$$\begin{aligned} u_i(b_i; x_i) &= \mathbb{P}(b_i \geq b_{-i}(x_{-i}))[x_i - b_i] + \mathbb{P}(b_i < b_{-i}(x_{-i})) \cdot 0 \\ &= \mathbb{P}(b_i \geq b_{-i}(x_{-i}))[x_i - b_i] \end{aligned} \tag{6}$$

- Una solución de equilibrio sencilla se logra cuando se asume una **forma lineal**:

$$b_i(x_i) = a_i + c_i x_i, \quad \forall i \tag{7}$$

Primer precio

Caso: 2 jugadores

Si para el jugador j se fija la estrategia $b_j(x_j) = a_j + c_j x_j$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(b_i \geq b_j(x_j)) &= \mathbb{P}(b_i \geq a_j + c_j x_j) \\ &= \mathbb{P}\left(x_j \leq \frac{b_i - a_j}{c_j}\right) \\ &= \frac{b_i - a_j}{c_j} \end{aligned} \tag{8}$$

Nota: para $x_j \sim U(0,1)$, $\mathbb{P}(x_j \leq t) = t$.

Primer precio

Para i no hay incertidumbre sobre $(x_i - b_i)$. Así, el pago esperado del jugador i como función de a_j y x_i será

$$u_i(b_i; x_i) = \frac{b_i - a_j}{c_j}[x_i - b_i]. \tag{9}$$

El jugador i elige el valor de

$$b_i(x_i) \in \arg\max_{b_i \in \mathbb{R}_+} u_i(b_i; x_i)$$

que otorgará la MR_i.

Primer precio

FOC:

$$\frac{1}{c_j}[x_i - b_i] - \frac{b_i - a_j}{c_j} = 0 \tag{10}$$

$$b_i(x_i) = \frac{a_j + x_i}{2} \tag{11}$$

Por simetría,

$$b_j(x_j) = \frac{a_i + x_j}{2} \tag{12}$$

Por (7), (11) y (12), se tiene $c_i = c_j = 1/2$ y $a_i = a_j = 0$. Luego, el ENB será

$$\left(b_i(x_i), b_j(x_j)\right) = \left(\frac{x_i}{2}, \frac{x_j}{2}\right) \tag{13}$$

Primer precio

Ejemplo 4

Sea una subasta de primer precio con valores privados. Hay n postores neutrales al riesgo. Cada postor i tiene una valoración x_i iid en el intervalo $[0, 1]$ con densidad:

$$f(x) = 3x^2, \quad x \in [0, 1]$$

1. Encuentre la función de puja en ENB.
2. Halle el ingreso esperado del vendedor en equilibrio y u^e en equilibrio de un postor con valoración $x \in [0, 1]$.
3. Analice qué ocurre con los resultados de 1) y 2) cuando $n \to \infty$.

Contenido

Duopolio de Cournot

Sea dos firmas que compiten en cantidades y enfrentan la demanda del mercado $p(Q) = a - bQ$, con $Q = q_1 + q_2$. Los costes de la firma 1 es $c_1(q_1) = cq_1$, mientras que de la firma 2 es:

$$c_2(q_2) = \begin{cases} c_x q_2 & \text{con probabilidad } \theta \\ c_y q_2 & \text{con probabilidad } 1 - \theta \end{cases}$$

La firma 2 conoce sus CMg y el de la firma 1, pero la firma 1 sólo conoce sus CMg y la distribución de probabilidades de los tipos de CMg de la firma 2.

Duopolio de Cournot

Caracterización:

$$N = \{1, 2\}$$

$$T_1 = \{c\}$$

$$T_2 = \{c_x, c_y\}$$

$$A_c = A_{cx} = A_{cy} = [0, \infty)$$

$$p_2(c|c_x) = p_2(c|c_y) = 1$$

$$(p_1(c_x|c), p_1(c_y|c)) = (\theta, 1 - \theta)$$

Duopolio de Cournot

Los profits:

$$\max \pi_1(q_1, q_2, c) = (a - bq_1 - bq_2)q_1 - cq_1 = (a - bq_1 - bq_2 - c)q_1$$

$$\max \pi_2(q_1, q_2, c_x) = (a - bq_1 - bq_2)q_2 - c_x q_2 = (a - bq_1 - bq_2 - c_x)q_2$$

$$\max \pi_2(q_1, q_2, c_y) = (a - bq_1 - bq_2)q_2 - c_y q_2 = (a - bq_1 - bq_2 - c_y)q_2$$

Duopolio de Cournot

$MR(2|c_x)$:

$$
\begin{aligned}
a - bq_1 - 2bq_2 - c_x &= 0 \\
q_2(c_x) &= \frac{a - bq_1 - c_x}{2b} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

$MR(2|c_y)$:

$$
\begin{aligned}
a - bq_1 - 2bq_2 - c_y &= 0 \\
q_2(c_y) &= \frac{a - bq_1 - c_y}{2b} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Duopolio de Cournot

$MR(1|c)$:

$$\max_{q_1} \ \theta(a - bq_1 - bq_2(c_x) - c)q_1 + (1-\theta)(a - bq_1 - bq_2(c_y) - c)q_1$$

FOC:

$$\theta(a - 2bq_1 - bq_2(c_x) - c) + (1-\theta)(a - 2bq_1 - bq_2(c_y) - c) = 0$$

$$q_1(c_x, c_y) = \frac{\theta(a - bq_2(c_x) - c) + (1-\theta)(a - bq_2(c_y) - c)}{2b} \tag{16}$$

Duopolio de Cournot

De (2) y (3) en (4), se tiene:

$$2bq_1 = \theta \left(a - b\frac{a - bq_1 - c_x}{2b} - c \right) + (1-\theta) \left(a - b\frac{a - bq_1 - c_y}{2b} - c \right)$$

$$q_1^*(c_x, c_y) = \frac{a + (1-\theta)c_y + \theta c_x - 2c}{3b} \tag{17}$$

Resolviendo, se puede hallar el ENB:

$$\left(q_1^*(c_x, c_y), q_2(c_x)^*, q_2(c_y)^*\right)$$

Contenido

Creencias

Definición 6 (sistema de creencias)

Dado un juego Ψ, un sistema de creencias μ es una distribución de probabilidad sobre los nodos de decisión dentro de cada conjunto de información H_i.

$$\forall i \in N, \forall h \in H_i \wedge x \in h, \exists \mu(x) \in [0,1] \tag{18}$$

Creencias

Game Theory

Luis Chávez

Definición 7 (trayectoria de equilibrio)

Dado Ψ, un conjunto de información está en la trayectoria de equilibrio si se alcanza con probabilidad positiva cuando el juego se desarrolla según las estrategias de equilibrio, y está fuera de la trayectoria de equilibrio si es seguro que no se alcanza cuando el juego se desarrolla según las estrategias de equilibrio[3].

Véase Gibbons (1993).

[3] Puede ser EN, ENPS, ENP o ENBP

Requerimientos

Véase Tadelis (2013):

1. Cada i tendrá una creencia bien definida sobre su posición en conjunto de información. Es decir, el juego cuenta con un sistema de creencias.
2. Sea el perfil $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ un ENB. Se requiere que en todos los conjuntos de información las creencias que están en la trayectoria de equilibrio sean consistentes con la regla de Bayes.
3. En conjuntos de información que están fuera de la trayectoria de equilibrio se puede asignar cualquier creencia a la que no se aplique la regla de Bayes.
4. Dadas sus creencias, las estrategias de los jugadores deben ser **secuencialmente racionales**. Es decir, en cada conjunto de información, los jugadores buscarán la mejor respuesta a sus creencias.

Conceptos

Definición 8 (ENBP)

Un **Equilibrio de Nash Bayesiano Perfecto** es un Equilibrio de Nash Bayesiano, $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$, junto con un sistema de creencias μ que satisfacen los 4 requerimientos de Tadelis (2013).

Conceptos

Definición 9 (consistencia)

Un perfil de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ junto con un sistema de creencias μ^* es **consistente** si existe una secuencia de estrategias mixtas no degeneradas $\{\sigma^k\}_1^\infty$ y una secuencia de creencias que son derivadas de cada σ^k de acuerdo a la regla de Bayes, $\{\mu^k\}_1^\infty$, tal que $\lim_{k\to\infty}(\sigma^k, \mu^k) = (\sigma^*, \mu^*)$.

Conceptos

Definición 10 (equilibrio secuencial)

Un perfil de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ junto con un sistema de creencias μ^* es un **equilibrio secuencial** si (σ^*, μ^*) es un ENBP consistente.

Creencias

- En ENB las creencias eran exógenas:
  - Las estrategias dependían de las creencias.
  - Las creencias eran independientes de las estrategias.
- En ENBP tanto las creencias como las estrategias son parte del resultado del equilibrio:
  - Las estrategias dependen de las creencias.
  - Las creencias dependen de la naturaleza (dada) o de las estrategias (que otros jugadores pueden hacer).

Creencias

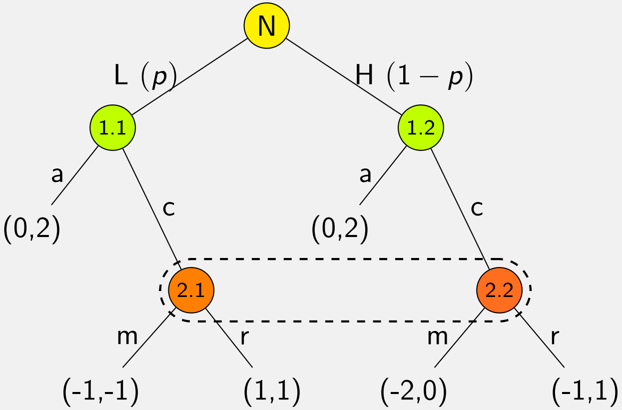
Restricciones consistentes de las creencias:

1. Exógenas: las creencias deben ser consistentes con la regla de Bayes
2. Endógenas: las creencias deben ser consistentes con cómo anticipamos las estrategias de otros jugadores.

Creencias

Ejemplo 5

Sea el juego dinámico:



Creencias

Ejemplo 5 (cont.)

Caracterización del sistema de creencias:

$$\mu(h_1^1) = \mu(h_1^2) = 1$$

$$\mu(h_2^1) \in [0, 1]$$

$$\mu(h_2^2) \in [0, 1]$$

$$\mu(h_2^1) + \mu(h_2^2) = 1$$

Nota: las creencias son parcialmente determinadas por la naturaleza (exógenas) o parcialmente determinadas por las estrategias de i (endógenas).

Creencias

Ejemplo 5 (cont.)

Forma estratégica del juego[4], asumiendo $p = 1/2$:

1|2	m	r
aa	({0,0}, 2)	({0,0}, 2)
ac	({0,-2}, 1)	({0,-1], $\frac{3}{2}$)
ca	({-1,0}, $\frac{1}{2}$)	({1,0}, $\frac{3}{2}$)
cc	({-1,-2}, -$\frac{1}{2}$)	({1,-1}, 1)

$$ENB = \{(aa, m), (ca, r)\}$$

¿Cuál de los 2 sobrevive?

[4]Dentro de las llaves están los pagos de J1 y los pagos de J2 están ponderados por p.

Creencias

Ejemplo 5 (cont.)

Sea (aa, m):

- El conjunto de información $h_2 = (2.1, 2.2)$ está fuera de la trayectoria del equilibrio, por lo que $0 \leq \mu(h_2^1) \leq 1$ (R3).
- Los pagos esperados de J2 serán:

$$\mu(h_2^1)(-1) + \mu(h_2^2)(0) = -\mu(h_2^1), \quad \text{si J2 elige m.}$$

$$\mu(h_2^1)(1) + \mu(h_2^2)(1) = 1, \quad \text{si J2 elige r.}$$

  por lo que J2 elige r.
- J2 no es secuencialmente racional (R4), entonces (aa, m) no es ENBP.

Creencias

Ejemplo 5 (cont.)

Sea (ca, r):

- El conjunto de información $h_2 = (2.1, 2.2)$ está en la trayectoria del equilibrio de Nash.
- La creencia $\mu(h_2^1) = 1$ ya que sólo por L se llega a c.
- J2 está seguro que observar c significa que J1 es el tipo L.
- Entonces, si J2 llega a h_2, su MR es r.

Conceptos

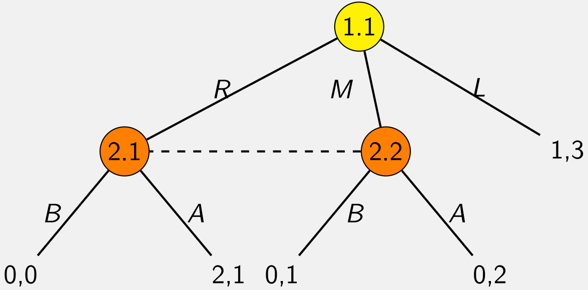
Ejemplo 5 (cont.)

- Para demostrar que ca es MR a r y la creencia $\mu(h_2^1) = 1$, fijar r con prob. 1:
  - J1 se desvía a cc. No es secuencialmente racional para J1. Como J2 sabe que J1 es L, J2 jugará r. Pero si J1 es H, sabe que J2 jugará r y J1 elegirá a.
  - J1 se desvía a ac. No es secuencialmente racional. J1 debe ser L para llegar a a, pero podría mejorar si elige c ya que J2 elegirá r. Si J1 fuera H y elige c, también podría mejorar.
  - J1 se desvía a aa. No es secuencialmente racional. J1 debe ser L para llegar a a, pero podría mejorar si elige c ya que J2 elegirá r.
- Así, $ENBP = \{(ca, r)\}$.

Conceptos

Ejemplo 6

Hallar ENBP en:



Contenido

Conceptos

Pizarra...

Referencias

Gibbons, R. (1993). *Un primer curso de teoría de juegos*. Antoni Bosch.

Tadelis, S. (2013). *Game theory: an introduction*. Princeton university press.