



Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

# Teoría de Juegos

## Tópico 2: Juegos Dinámicos con Información Completa

Luis Chávez



Departamento Académico de Economía y Planificación  
UNALM

Lima, 2025



# Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

- 1 Introducción
- 2 Información perfecta
  - Racionalidad secuencial
  - Aplicaciones
- 3 Información imperfecta
  - Juegos finitos
  - Otros juegos
- 4 Anexos



- 1 Un conjunto finito  $N$  de jugadores,  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
- 2 Conjunto de nodos de decisión,  $D$ .
- 3 Una función  $p(x)$  que asigna el jugador  $i$  a un determinado nodo de decisión.
- 4 Una colección de conjuntos de información,  $H$ .
- 5 Una historia<sup>1</sup>  $h_i \in H, \forall i$ .
- 6 Un conjunto de acciones  $a_i \in h_i, \forall i$ .
- 7 Un conjunto de outcomes,  $\mathcal{O}$ , anidados en los nodos terminales.

---

<sup>1</sup>Conjunto de información



## Juegos dinámicos y su forma extensiva...

### Definición 1 (forma extensiva)

Un juego finito en forma extensiva,  $\Gamma$ , representa la acciones secuenciales anidadas de un conjunto de jugadores que deciden según  $\succeq_i$ , quienes están expresadas ordinalmente vía outcomes dentro de un árbol de decisión.



## Definición 2 (árbol de decisión)

Conjunto de nodos y ramas que permite caracterizar las acciones y los resultados del juego. Las ramas generadas dentro de un nodo  $x$  no pueden estar vinculadas a otros nodo del mismo nivel o anterior a  $x$ .



# Fundamentos

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

## Reglas:

- No puede haber dos nodos iniciales.
- Un nodo no puede tener dos nodos predecesores.
- Las ramas de un mismo nodo no pueden tener una misma etiqueta.
- Los nodos de un conjunto de información sólo pertenece a un jugador.
- Todos los nodos de un conjunto de información deben tener la misma cantidad de ramas.

Véase más en Espinola and Muñoz (2023).



## Supuesto 1 (secuencialidad)

Los jugadores efectúan sus acciones según la elección que esperan de su oponente. El resultado de juego puede estar condicionado a quien inicia el juego.

## Supuesto 2 (racionalidad)

Los jugadores efectúan acciones racionales.



## Definición 3 (conjunto de información)

Representa los nodos dentro de un nivel del árbol de decisión. El conjunto de información puede ser singleton (de único nodo) bajo información perfecta o non-singleton bajo información imperfecta.





## Ejemplo 1

El ajedrez es un juego de turnos entre dos jugadores. Si el jugador de piezas blancas inicia el juego, el oponente, debe jugar las piezas negras. El juego termina cuando se efectúa jaque mate al rey, cuando hay empate o cuando un jugador abandona el juego (creencia de que perderá en los siguientes turnos).



## Supuesto 3 (información completa)

Un juego es de información completa si:

- 1 Se conoce quienes son los jugadores.
- 2 Se conoce las estrategias de cada jugador.
- 3 Se conoce los outcomes de cada estrategia.

Y, además, es de *conocimiento común* si todos los jugadores saben que sus oponentes tienen información completa.



# Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

1 Introducción

2 Información perfecta  
Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

3 Información imperfecta  
Juegos finitos  
Otros juegos

4 Anexos



Refinamiento a la racionalidad...

## Supuesto 4 (racionalidad secuencial)

La estrategia de un jugador  $i$  es **secuencialmente racional** si, en cada nodo de decisión (o conjunto de información), la acción que toma es óptima dadas sus creencias y la estrategia de los demás jugadores (inclusive en aquellos que son improbables a priori).



## Supuesto 5 (información perfecta)

Los jugadores tienen información de la historia de acciones de su(s) oponente(s).

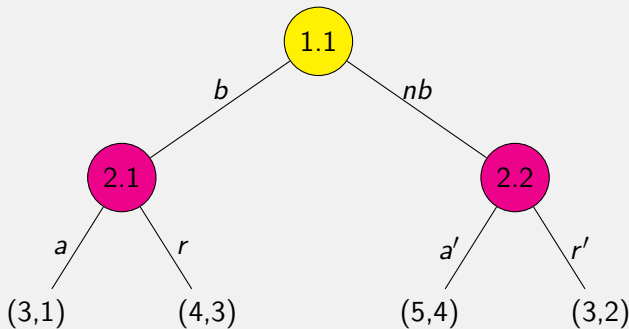
## Nota

Una estrategia de  $i$  puede estar conformada por una o más acciones.



## Ejemplo 2

Solario puede beber o no para declararse a Violeta.





# Caracterización

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

$$A_1^1 = \{b, nb\}$$

$$S_1 = \{b, nb\}$$

$$A_2^1 = \{a, r\}, \quad A_2^2 = \{a', r'\}$$

$$S_2 = A_2^1 \times A_2^2 = \{aa', ar', ra', rr'\}$$

$$S = \{(b, aa'), (b, ar'), (b, ra'), (b, rr'), (nb, aa'), (nb, ar'), (nb, ra'), (nb, rr')\}$$

$$D = \{1.1, 2.1, 2.2\}$$

$$h_1 = \{h_1^1\}, \quad h_2 = \{h_2^1, h_2^2\}$$

Un perfil puede ser:

$$s = (b, ra')$$



# El método

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial

Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos

Otros juegos

Anexos

References

¿Se puede resolver el juego con EN, garantizando S4?  
No, porque no son creíbles...





# El método

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

## Definición 4 (*backward induction*)

Dado un juego  $\Gamma$ , se elige algún nodo inferior  $x$  y se elige la hoja (nodo terminal) que otorga el mayor pago (utilidad) al jugador  $x$ . Luego, se elige un nodo superior a  $x$  ( $y$ ) y se elige la rama con mayor pago del jugador  $y$ . El proceso continua hasta llegar al nodo inicial.

## Definición 5 (subjuego)

Una estructura de árbol definido por un nodo y el conjunto de nodos sucesores<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>La solución de cada subjuego (propio) es un EN.



# El método

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

## Definición 6 (nodo inicial de subjuego)

Sea un nodo  $x \in \Gamma$  y  $S(x)$  el conjunto de información que contiene el nodo  $x$  y sus sucesores. Se dice que  $x$  es un nodo inicial de subjuego si:

- $S(x)$  es singleton.
- $\forall D, D \cap S(x) \neq \emptyset \Rightarrow D \subset S(x)$ .

donde  $D$  es la colección de conjuntos de información de  $\Gamma$ .



# El método

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

El resultado de un juego  $\Gamma$  al aplicar inducción hacia atrás se denomina **Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos, ENPS**.

## Definición 7 (ENPS)

Un perfil de estrategias  $(s_i^*, s_{-i}^*)$  es un ENPS si especifica un EN en cada subjuego.



# El método

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

## Caracterización de ENPS:

- 1 Verifica existencia.
- 2 No cumple unicidad.
- 3 Robusto a perturbaciones.
- 4 No alcanza un óptimo paretiano.



# El método

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

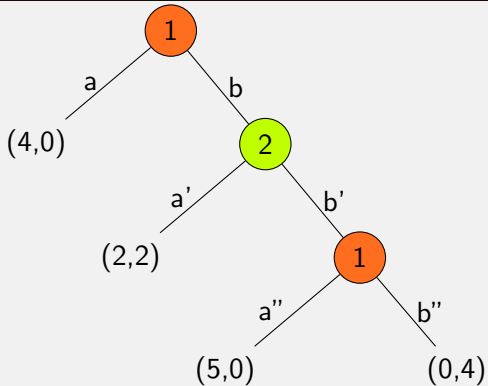
Información imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

## Ejemplo 3





# El método

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información imperfecta

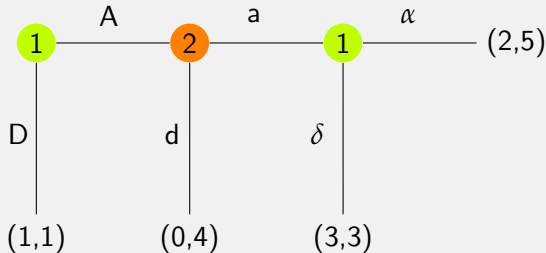
Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

## Ejemplo 4

Dada una pareja, pueden desviar si esperan que el otro jugador decide terminar en adelante.





# Forma estratégica

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

La matriz del ejemplo 4 será:

1 2	$a$	$d$
$D\delta$	$(1, 1)$	$(1, 1)$
$D\alpha$	$(1, 1)$	$(1, 1)$
$A\delta$	$(3, 3)$	$(0, 4)$
$A\alpha$	$(2, 5)$	$(0, 4)$

Véase más en Gibbons (1992) y Bonnano (2024).



# Forma estratégica

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información imperfecta

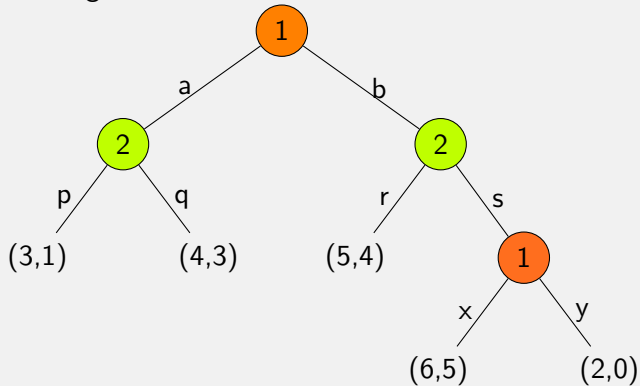
Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

## Ejemplo 5

Halle la forma estratégica.







# Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial

Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos

Otros juegos

Anexos

References

1 Introducción

2 Información perfecta

Racionalidad secuencial

Aplicaciones

3 Información imperfecta

Juegos finitos

Otros juegos

4 Anexos



# Duopolio de Stackelberg

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

- Stackelberg (2010) diseñó un modelo dinámico en 1936. Era el caso de una firma dominante (líder) que decide primero y, a continuación, la seguidora.
- Las firmas deciden cantidades producidas en forma secuencial.
- La firma 1 elige una cantidad  $q_1 \geq 0$ , 2 observa  $q_1$  y elige  $q_2 \geq 0$ .



# Duopolio de Stackelberg

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

Formalizando, si la demanda inversa del mercado es  $p(Q) = a - bQ$ , los profits de  $i$  serán:

$$\max \pi_i(q_i, q_j) = q_i[p(Q) - c] \quad (1)$$

donde nuevamente se asume que  $CF = 0$ .



# Duopolio de Stackelberg

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

Asumiendo que 1 elige una cierta cantidad  $q_1$ , la  $MR_2(q_1)$  será:

$$\max_{q_2} \pi_2(q_1, q_2) = \max_{q_2} q_2(a - bq_1 - bq_2 - c) \quad (2)$$

FOC:

$$a - bq_1 - 2bq_2 - c = 0$$

$$q_2(q_1) = \frac{a - bq_1 - c}{2b} \quad (3)$$

donde  $(a - c)/b > q_1$ .



# Duopolio de Stackelberg

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información perfecta

Racionalidad secuencial

Aplicaciones

Información imperfecta

Juegos finitos

Otros juegos

Anexos

References

Ante la creencia de lo que 2 elegirá, 1 resolverá en una primera etapa:

$$\max_{q_1} \pi_1(q_1, q_2(q_1)) = \max_{q_1} q_1[a - bq_1 - bq_2(q_1) - c] \quad (4)$$

$$\pi_1(\cdot) = q_1 \left[ a - bq_1 - b \left( \frac{a - bq_1 - c}{2b} \right) - c \right] \quad (5)$$

FOC:

$$a - 2bq_1 - \frac{a}{2} + bq_1 + \frac{c}{2} - c = 0$$
$$q_1 = \frac{a - c}{2b} \quad (6)$$



# Duopolio de Stackelberg

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información perfecta

Racionalidad secuencial

Aplicaciones

Información imperfecta

Juegos finitos

Otros juegos

Anexos

References

Finalmente, el resultado del juego por inducción hacia atrás será:

$$ENPS = \{q_1^*, q_2^*(q_1^*)\} \quad (7)$$

Por tanto,

$$ENPS = (q_1^*, q_2^*) = \left( \frac{a-c}{2b}, \frac{a-c}{4b} \right) \quad (8)$$



# Duopolio de Stackelberg

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información perfecta

Racionalidad secuencial

Aplicaciones

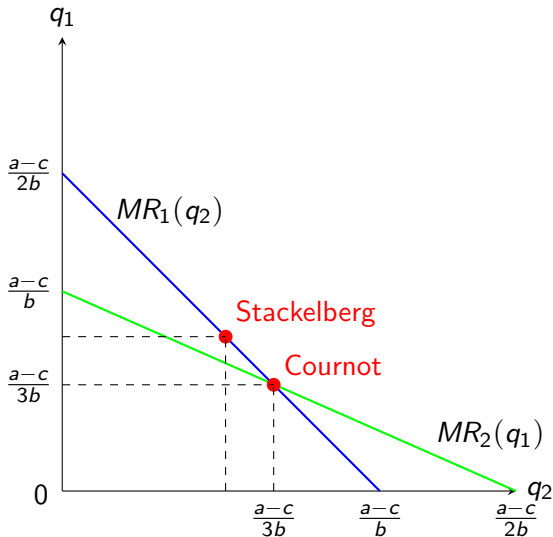
Información imperfecta

Juegos finitos

Otros juegos

Anexos

References





# Duopolio de Stackelberg

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial

Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos

Otros juegos

Anexos

References

**Actividad 1.** Resolver el duopolio de Stackelberg cuando las firmas compiten en precios.





# Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

1 Introducción

2 Información perfecta  
Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

3 Información imperfecta  
Juegos finitos  
Otros juegos

4 Anexos



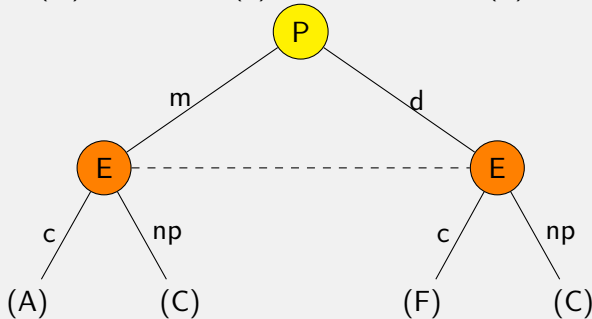
## Supuesto 6 (información imperfecta)

Los jugadores no tienen plena información de la historia de acciones de su(s) oponente(s).



## Ejemplo 6

Un profesor (P) imprime el examen en 2 colores de hojas. La pregunta del examen puede ser la misma (m) o diferente (d). Los estudiantes (E) pueden copiar o no.





# El método

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

## Revisita a la definición 6.

*Una vez más ENPS (o EPS)...*



# El método

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

## Revisita a la definición 6.

*Una vez más ENPS (o EPS)...*



# Árboles especiales

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

## Definición 8 (árbol-R)

Representación rectangular de un juego en forma extensiva donde existe 2 conjuntos de información non-singleton para algún  $i$  que no inicia el juego.

## Definición 9 (árbol-C)

Representación cuadrada de un juego en forma extensiva donde existe un conjunto de información non-singleton para cada  $i$  que no inicia el juego.



## Caso 1:

- Sean los jugadores Advíncula, Ballón y Cueva. Advíncula le comenta a Ballón si Gareca es (s) o no (n) un buen DT. Cueva ingresa a la conversación y Ballón le informa sobre el comentario de Advíncula (puede estar mintiendo). En seguida, Cueva debe adivinar sobre el comentario de Advíncula. Al conocerse la verdad, si Cueva acierta, los otros jugadores deben darle 1 caja de cerveza, de lo contrario, Cueva debe dar una caja de cerveza a cada uno.



# Árbol-R

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información perfecta

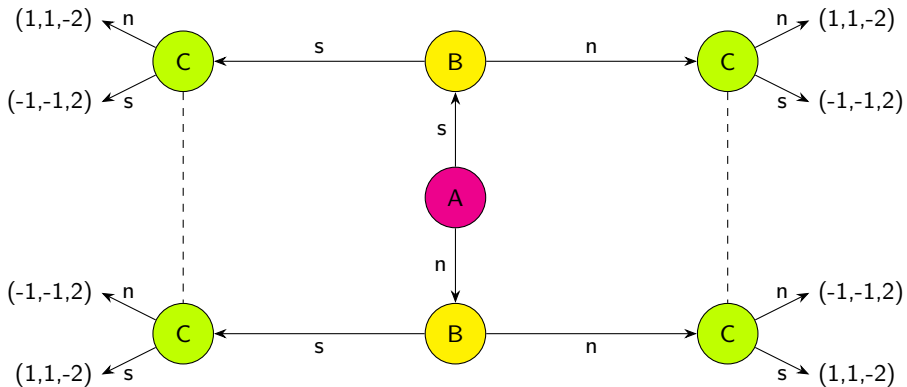
Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References







Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

**Actividad 2.** Según la lógica del caso 1, dibuje el juego en forma extensiva con dos cambios: i) hay 3 jugadores al inicio de la conversación (Advíncula, Ballón y Zambrano) y ii) cuando Cueva ingresa a la conversación, Ballón y Zambrano informan del comentario de Advíncula.



# Árbol-C

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

*Pizarra...*



# Contenido

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

1 Introducción

2 Información perfecta  
Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

3 Información imperfecta  
Juegos finitos  
Otros juegos

4 Anexos



XXXXXXXXXXXX

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References



# Referencias

Game Theory

Luis Chávez

Introducción

Información  
perfecta

Racionalidad secuencial  
Aplicaciones

Información  
imperfecta

Juegos finitos  
Otros juegos

Anexos

References

Bonnano, G. (2024). *Game Theory*. Addison-Wesley Professional, 3 edition.

Espinola, A. and Muñoz, F. (2023). *Game Theory: An Introduction with Step-by-Step Examples*. Springer Nature.

Gibbons, R. (1992). *Game theory for applied economists*. Princeton University Press.

Stackelberg, H. (2010). *Market structure and equilibrium*. Springer Science & Business Media.