Macroeconomía II

Tópico 4: Dinámica Macroeconómica

Luis Chávez

Departamento Académico de Economía y Planificación
UNALM

Lima, 2025

Contenido

Background

- La macroeconomía estática es importante pero no suficiente.
- La economía es dinámica, la macro también.
- Las nociones de ecuaciones en diferencia y diferenciales son útiles.
- Ahora se analiza el estado estacionario y el diagrama de fases.

Background

Ejemplo 1

Considere el modelo armamentista de Richardson(1960). Analice las predicciones del modelo.

Modelo discreto

Sea el modelo dinámico básico:

$$C(t) = a + bY(t) \tag{1}$$

$$D(t) = C(t) + I + G \tag{2}$$

$$\Delta Y(t+1) = \lambda[D(t) - Y(t)], \ \lambda > 0 \tag{3}$$

donde la inversión y el gasto público son exógenos. En equilibrio,

$$\Delta Y(t+1) = 0, \ \forall t \tag{4}$$

¿Implicancia?

Modelo discreto

De (3),

$$\Delta Y(t+1) = \lambda(a+I+G) - \lambda(1-b)Y(t) \tag{5}$$

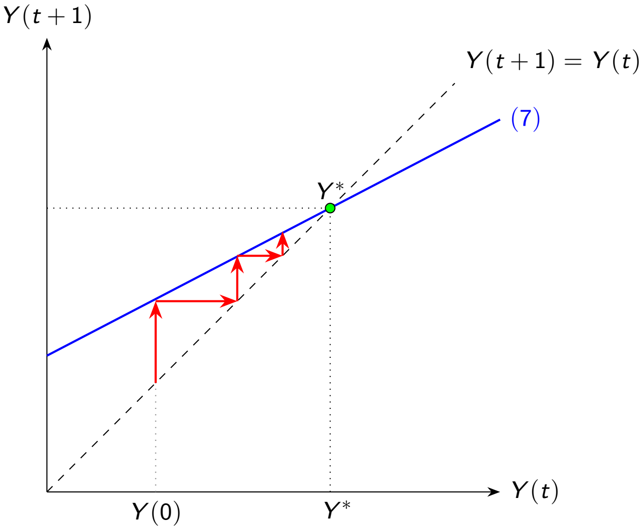
$$Y^* = \frac{a+I+G}{1-b} \tag{6}$$

De (5), se tiene la forma recursiva:

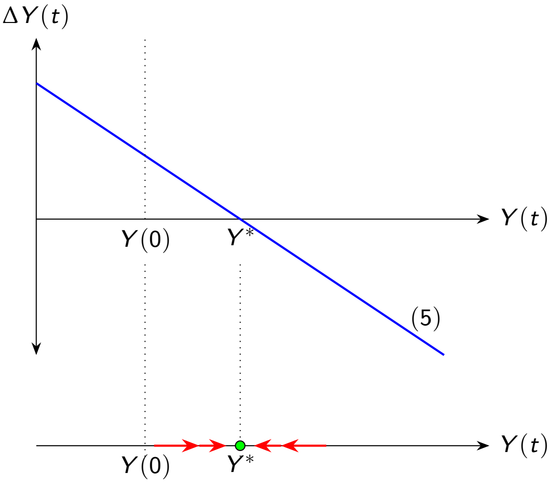
$$Y(t+1) = \lambda(a+I+G) + [1-\lambda(1-b)]Y(t) \tag{7}$$

¿Gráfica?

Modelo discreto



Modelo discreto



Modelo discreto

Aplicación: ver código python.

Contenido

Supuestos

- Economía pequeña y abierta: r_t^* y P_t^* exógenas.
- MB puede estar en desequilibrio a CP: ajuste lento en P bajo la regla de Phillips.
- TCFx.
- Versión continua.
- Expectativas racionales (e.r) en los agentes.

El modelo

La brecha del producto es nula (economía de pleno empleo):

$$Y_t = \bar{Y}_t \tag{8}$$

Implicancia,

$$y_t = \ln(Y_t) = \ln(\bar{Y}_t) = \bar{y}_t \tag{9}$$

donde el producto está en términos reales.

El modelo

MD siempre en equilibrio:

$$H_t^s = \frac{M_t}{P_t} = H_t^d = Y_t^{b_0} e^{-b_1 r_t}, \quad b_i > 0, \ \forall i \tag{10}$$

donde r_t es el tipo de interés nominal, M_t el stock nominal de dinero en soles, P_t es el IPC expresado en soles por unidades reales de consumo y M_t/P_t son los saldos reales expresados en unidades reales de consumo y

$$b_0 = \frac{\partial(M_t/P_t)}{\partial Y_t} \frac{Y_t}{(M_t/P_t)} \tag{11}$$

$$b_1 = \frac{\partial \ln(M_t/P_t)}{\partial r_t} \tag{12}$$

El modelo

De (10),

$$\ln\left(\frac{M_t}{P_t}\right) = \ln(Y_t^{b_0} e^{-b_1 r_t}) = b_0 \ln Y_t - b_1 r_t \tag{13}$$

O también,

$$\ln M_t - \ln P_t = b_0 \ln Y_t - b_1 r_t \tag{14}$$

El modelo

Para un X_t arbitrario, $x_t = ln(X_t)$, las tasas de crecimiento instantáneas se pueden escribir:

$$\dot{m}_t = \frac{\dot{M}_t}{M_t} \tag{15}$$

$$\dot{p}_t = \frac{\dot{P}_t}{P_t} \tag{16}$$

$$\dot{y}_t = \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} \tag{17}$$

Además, la LM:

$$m_t - p_t = b_0 \bar{y}_{-} b_1 r_t \tag{18}$$

El modelo

Bajo paridad de intereses descubierta[1] $\forall t$,

$$r_t = r_t^* + \dot{e}_t^e \tag{19}$$

donde $\dot{e}_t^e$ es la tasa de (de)crecimiento instantáneo del tipo de cambio nominal, con $e_t^e = \ln(E_t^e)$ y

$$\dot{e}_t^e = \frac{\dot{E}_t^e}{E_t^e} \tag{20}$$

Se asume expectativas racionales, por lo que se espera previsión perfecta:

$$\dot{e}_t^e = \dot{e}_t \tag{21}$$

[1] Los activos domésticos y externos son sustitutos perfectos.

El modelo

El mercado doméstico de bienes se ajusta según la ecuación diferencial:

$$\frac{\dot{P}_t}{P_t} = \mu \ln\left(\frac{Y_t^d}{\bar{Y}_t}\right) = \mu\left[\ln(Y_t^d) - \ln(\bar{Y}_t)\right], \quad \mu > 0 \tag{22}$$

Si,

$$y_t^d = \ln(Y_t^d) \tag{23}$$

$$\dot{y}_t^d = \frac{\dot{Y}_t^d}{Y_t^d} \tag{24}$$

$$\dot{\bar{y}}_t = \frac{\dot{\bar{Y}}_t}{\bar{Y}_t} \tag{25}$$

Luego, la curva de Phillips será:

$$\dot{p}_t = \mu(y_t^d - \bar{y}_t) \tag{26}$$

El modelo

La PPA establece que $E_t = P_t / P_t^*$. Al normalizar $P_t^* = 1$, se tiene la PPA

$$e_t = p_t \tag{27}$$

la IS preliminar será:

$$Y_t^d = \left(\frac{E_t P_t^*}{P_t} \right)^{\beta_1} e^{(\beta_0 - \beta_2 r_t)}; \quad \beta_j > 0, \ \forall j \tag{28}$$

donde β_0 es el componente autónomo de la demanda de bienes (incluido G). Ajustando, se tiene la IS:

$$y_t^d = \beta_0 + \beta_1 (e_t - p_t) - \beta_2 r_t \tag{29}$$

Contenido

Solución

Taxonomía:

- Exógenas: m_t, p_t^{*}[2]$, r_t^{*}, \bar{y}_t, \beta_0$.
- Endógenas: e_t, p_t, r_t, y_t^d.
- Endógenas claves: e_t, p_t.

[2] Aunque se normalizó y se hizo=0.

Solución

De (18),

$$r_t = \frac{1}{b_1}(b_0\bar{y}_t - m_t + p_t) \tag{30}$$

y al reemplazar r_t de (29) en (30), se tiene

$$y_t^d = \beta_0 + \beta_1(e_t - p_t) - \frac{\beta_2}{b_1}(b_0\bar{y}_t - m_t + p_t) \tag{31}$$

Al reemplazar (31) en (26) se tiene la curva de DA:

$$\dot{p}_t = \mu\left[\beta_0 + \beta_1(e_t - p_t) - \frac{\beta_2}{b_1}(b_0\bar{y}_t - m_t + p_t) - \bar{y}_t\right] \tag{32}$$

$$\dot{p}_t = -\mu\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{b_1}\right)p_t + (\mu\beta_1)e_t + \mu\left[\beta_0 + \frac{\beta_2 m_t}{b_1} - \left(1 + \frac{\beta_2 b_0}{b_1}\right)\bar{y}_t\right] \tag{33}$$

Solución

De (30) en (19),

$$\frac{1}{b_1}\left(b_0\bar{y}_t - m_t + p_t\right) - r_t^* = \dot{e}_t^e \tag{34}$$

De (21) en (34), se tiene el equilibrio del mercado de activos financieros:

$$\dot{e}_t = \frac{1}{b_1}p_t + \frac{1}{b_1}\left(b_0\bar{y}_t - m_t\right) - r_t^* \tag{35}$$

Forma compacta

Se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_t \\ \dot{e}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{b_1}\right) & \mu\beta_1 \\ \frac{1}{b_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ e_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu & \mu\frac{\beta_2}{b_1} & -\mu\left(1 + \frac{\beta_2 b_0}{b_1}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b_1} & \frac{b_0}{b_1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ \bar{y}_t \\ r_t^* \end{bmatrix} \tag{36}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_t \\ \dot{e}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{b_1}\right) & \mu\beta_1 \\ \frac{1}{b_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ e_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu\left[\beta_0 + \frac{\beta_2 m_t}{b_1} - \left(1 + \frac{\beta_2 b_0}{b_1}\right)\bar{y}_t\right] \\ \frac{1}{b_1}\left(b_0\bar{y}_t - m_t\right) - r_t^* \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$\dot{x}_t = Ax_t + B \tag{38}$$

Análisis

Ejemplo 2

Hallar los valores y vectores propios de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: una ecuación característica se escribe como $det(A - \lambda I) = 0$, cuyo lado izquierdo es el polinomio característico $p_A(\lambda)$. Además, el espacio generado de cada valor propio, el vector propio, se halla vía $(A - \lambda_i I)v_i = 0, \forall \lambda_i \neq 0$.

Análisis

De A,

$$\begin{cases} trA = -\mu\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{b_1}\right) < 0 \\ |A| = -\frac{\mu\beta_1}{b_1} < 0 \\ \Delta = (trA)^2 - 4|A| = \mu^2\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{b_1}\right)^2 + 4\frac{\mu\beta_1}{b_1} > 0 \end{cases} \tag{39}$$

Como A no es singular, se puede calcular

$$x_t^{eq} = -A^{-1}B$$

Análisis

Resolviendo, se tiene:

$$\begin{bmatrix} p^{eq} \\ e^{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_t + b_1 r_t^* - b_0 \bar{y}_t \\ \dfrac{\beta_1 m_t - \beta_0 - \bar{y}_t(b_0\beta_1 - 1) + (b_1\beta_1 + \beta_2) r_t^*}{\beta_1} \end{bmatrix} \tag{40}$$

donde ambas son función de las exógenas. Luego, el polinomio característico se escribe como:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + |A| = 0 \tag{41}$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{trA + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{trA - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Análisis

Los autovalores tienen signos opuestos, lo que sugiere punto de silla. Así, los autovectores serán útiles. Para $\lambda_1 > 0$,

$$\begin{bmatrix} -\mu\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{b_1}\right) - \lambda_1 & \mu\beta_1 \\ \frac{1}{b_1} & -\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

con pendiente

$$b = \left(\frac{1}{b_1\lambda_1}\right) a = \left[\frac{\mu\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{b_1}\right) + \lambda_1}{\mu\beta_1}\right] a \to \frac{b}{a} = \frac{1}{b_1\lambda_1} = \frac{\mu\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{b_1}\right) + \lambda_1}{\mu\beta_1} > 0 \tag{43}$$

Análisis

Luego,

$$\frac{e_t - e^{eq}}{p_t - p^{eq}} = \frac{1}{b_1 \lambda_1} \tag{44}$$

Despejando,

$$e_t = e^{eq} + \left(\frac{1}{b_1 \lambda_1}\right)(p_t - p^{eq})$$

$$e_t = \left[e^{eq} - \left(\frac{1}{b_1 \lambda_1}\right) p^{eq}\right] + \left(\frac{1}{b_1 \lambda_1}\right) p_t \tag{45}$$

Análisis

Para $\lambda_2 < 0$,

$$\begin{bmatrix} -\mu\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{b_1}\right) - \lambda_2 & \mu\beta_1 \\ \frac{1}{b_1} & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

donde

$$d = \left(\frac{1}{b_1\lambda_2}\right) c = \left[\frac{\mu\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{b_1}\right) + \lambda_2}{\mu\beta_1}\right] c \implies \frac{d}{c} = \frac{1}{b_1\lambda_2} = \frac{\mu\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{b_1}\right) + \lambda_2}{\mu\beta_1} < 0 \tag{47}$$

Análisis

$$\frac{e_t - e^{eq}}{p_t - p^{eq}} = \frac{e_0 - e^{eq}}{p_0 - p^{eq}} = \frac{d}{c} = \frac{1}{b_1 \lambda_2} \tag{48}$$

Despejando,

$$e_t = e^{eq} + \left(\frac{1}{b_1 \lambda_2}\right)(p_t - p^{eq})$$

$$e_t = \left[e^{eq} - \left(\frac{1}{b_1 \lambda_2}\right) p^{eq}\right] + \left(\frac{1}{b_1 \lambda_2}\right) p_t \tag{49}$$

De (48), si se conoce p_0, se conoce:

$$e_0 = e^{eq} + \left(\frac{1}{b_1 \lambda_2}\right)(p_0 - p^{eq}) \tag{50}$$

Diagrama de fases

De la primera ecuación de (37), la ceroclina $\dot{p}_t = 0$ permite obtener la IS:

$$e_t = \left[\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{\beta_2\psi}{\beta_1 b_1}\right)\bar{y}_t - \frac{\beta_0}{\beta_1} - \frac{\beta_2 m_t}{\beta_1 b_1}\right] + \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1 b_1}\right)p_t \tag{51}$$

De la segunda ecuación de (37), la ceroclina $\dot{e}_t = 0$ permite obtener la LM:

$$p_t = m_t + b_1 r_t^* - b_0\bar{y}_t = p^{eq} \tag{52}$$

Diagrama de fases

De (35) y (52),

$$\dot{e}_t = \frac{1}{b_1} p^{eq} + \frac{1}{b_1} \left(b_0 \bar{y}_t - m_t \right) - r_t^* = 0 \tag{53}$$

Nota 1

La IS representa el equilibrio conjunto del mercado de bienes y de dinero, mientras que la LM representa el equilibrio de los mercados de activos.

Diagrama de fases

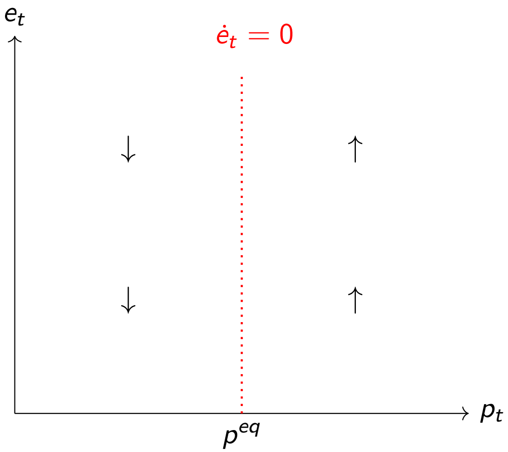
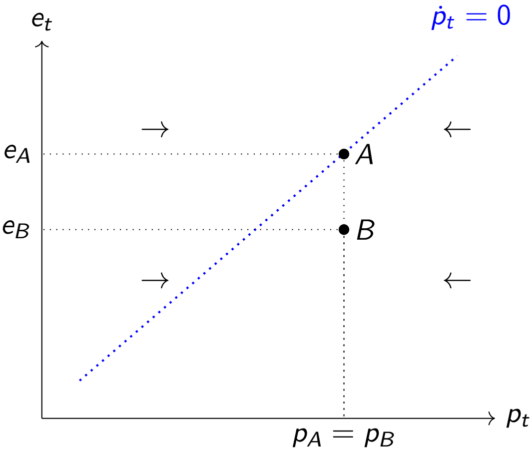


Diagrama de fases



Cuantitativo

La solución general se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} p_t - p^{eq} \\ e_t - e^{eq} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} \tag{54}$$

$$\begin{cases} p_t = p^{eq} + c_1 \cdot a \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot c \cdot e^{\lambda_2 t} \\ e_t = e^{eq} + c_1 \cdot b \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot d \cdot e^{\lambda_2 t} \end{cases} \tag{55}$$

Bajo condiciones iniciales (s_0, p_0),

$$\begin{cases} p_0 = p^{eq} + c_1 \cdot a + c_2 \cdot c \\ e_0 = e^{eq} + c_1 \cdot b + c_2 \cdot d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{d(p_0 - p^{eq}) - c(e_0 - e^{eq})}{ad - bc} \\ c_2 = \frac{a(e_0 - e^{eq}) - b(p_0 - p^{eq})}{ad - bc} \end{cases} \tag{56}$$

Cuantitativo

Reemplazando (56) en (55), se tiene:

$$\begin{cases} p_t = p^{eq} + \left[\dfrac{\left(\frac{d}{c}\right)(p_0 - p^{eq}) - (e_0 - e^{eq})}{\frac{d}{c} - \frac{b}{a}} \right] e^{\lambda_1 t} + \left[\dfrac{(e_0 - e^{eq}) - \left(\frac{b}{a}\right)(p_0 - p^{eq})}{\frac{d}{c} - \frac{b}{a}} \right] e^{\lambda_2 t} \\ e_t = e^{eq} + \left[\dfrac{(p_0 - p^{eq}) - \left(\frac{c}{d}\right)(e_0 - e^{eq})}{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}} \right] e^{\lambda_1 t} + \left[\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)(e_0 - e^{eq}) - (p_0 - p^{eq})}{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}} \right] e^{\lambda_2 t} \end{cases} \tag{57}$$

Cuantitativo

Reemplazando (43) y (47) en (57),

$$\begin{cases} p_t = p^{eq} + \left[\dfrac{\lambda_1(p_0 - p^{eq}) - b_1\lambda_1\lambda_2(e_0 - e^{eq})}{\lambda_1 - \lambda_2}\right] e^{\lambda_1 t} + \left[\dfrac{b_1\lambda_1\lambda_2(e_0 - e^{eq}) - \lambda_2(p_0 - p^{eq})}{\lambda_1 - \lambda_2}\right] e^{\lambda_2 t} \\ e_t = e^{eq} + \left[\dfrac{\left(\frac{1}{b_1}\right)(p_0 - p^{eq}) - \lambda_2(e_0 - e^{eq})}{\lambda_1 - \lambda_2}\right] e^{\lambda_1 t} + \left[\dfrac{\lambda_1(e_0 - e^{eq}) - \left(\frac{1}{b_1}\right)(p_0 - p^{eq})}{\lambda_1 - \lambda_2}\right] e^{\lambda_2 t} \end{cases} \tag{58}$$

Los primeros corchetes de cada ecuación deben ser cero. ¿Porqué?

Cuantitativo

Resolviendo, se tiene:

$$\begin{cases} p_t = p^{eq} + \left[\dfrac{\lambda_1 (p_0 - p^{eq}) - \lambda_2 (p_0 - p^{eq})}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] e^{\lambda_2 t} \\ e_t = e^{eq} + \left[\dfrac{\lambda_1 (e_0 - e^{eq}) - \lambda_2 (e_0 - e^{eq})}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] e^{\lambda_2 t} \end{cases} \tag{59}$$

$$\begin{aligned} p_t &= p^{eq} + (p_0 - p^{eq}) e^{\lambda_2 t} \\ e_t &= e^{eq} + (e_0 - e^{eq}) e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \tag{60}$$

Contenido

CP

$$\uparrow m_t \text{ no anticipada:}$$

$$\uparrow m_t \rightarrow\uparrow (m_t - p_t) \rightarrow m_t^s > m_t^d \rightarrow\downarrow r_t \rightarrow\uparrow rent^* \rightarrow\uparrow Q(act^*) \rightarrow\uparrow e_t$$

$$(e.r) \rightarrow\uparrow new(e_t) \rightarrow e_t > e^{eq} \text{ (overshooting)}$$

$$r_t < r^{eq} \rightarrow e_t^{eq} > e_t^{eq'}$$

MP

$$\uparrow y_t^d \rightarrow \uparrow p_t \rightarrow \downarrow (m_t - p_t) \rightarrow \uparrow r_t \rightarrow \downarrow e^e \rightarrow (r_t = r^{eq}, e^e = 0, p_t = p^{eq})$$

Referencias