# Fundamentos de Matching Theory

Luis Chávez[1]

[1]Departamento de Economía

Lima, 2025

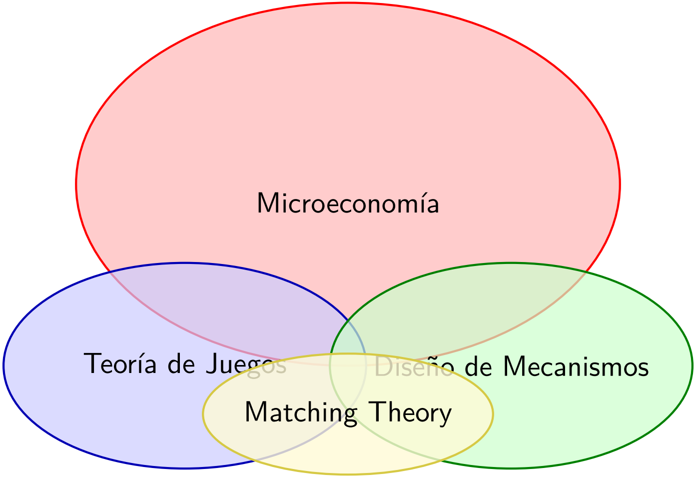
# Contenido

# Introducción

# Overview

- 1962: David Gale y Lloyd Shapley publicaron uno de los artículos más influyentes en teoría de juegos, iniciando la literatura sobre teoría de emparejamiento.
- $2000^{-}$: aplicaciones en mercados laborales en U.S.
- $2000^{+}$: aplicaciones en elección escolar e intercambio de riñones (*kidney exchange*).
- 2012: Premio Nobel Economía a Alvin Roth y Lloyd Shapley por contribuciones en asignaciones estables y diseños de mercados.

# Fundamentos



# Fundamentos

**Definition (1)**

**Matching theory** es la rama de las matemáticas que se encarga se realizar asignaciones, cuyos resultados deben verificar ciertas propiedades.

# Fundamentos

**Ejemplo 1**

Una universidad peruana ha lanzado una convocatoria para becas estudiantiles de posgrado. Se ha establecido 30 vacantes de 330 postulantes. ¿Quiénes deben ser admitidos?

# Fundamentos

**Ejemplo 2**

Cientos de personas esperan por un trasplante de riñón en Perú. La probabilidad de encontrar un donante compatible entre sus familiares y amigos es pequeña. Las donaciones son eventuales. ¿Cómo se puede mejorar los trasplantes exitosos?

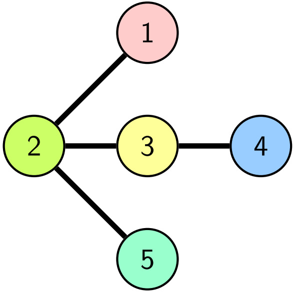
# Estilizados

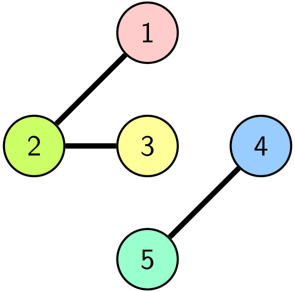
- El éxito de la teoría del emparejamiento radica en la tradición teórica iniciada por Gale y Shapley (1962).
- $1990^{-}$ la investigación sobre el emparejamiento se centraba principalmente en los mercados bilaterales.
- El trabajo de Roth y Sotomayor (1990) ofrece una imagen clara del enfoque de la literatura sobre emparejamiento en esta época.
- Si bien Shapley y Scarf (1974) y Hylland y Zeckhauser (1977) introdujeron dos modelos tempranos *one-sided*, tomaron relevancia $1990^{+}$.

# Requisitos

- Matemáticas.
- Teoría de grafos.
- Microfundamentos.

# Grafos



# M two-sided

# Conceptos

**Disyuntiva**

Dados dos grupos de individuos, ¿es posible distribuirlos de forma óptima en parejas formadas por miembros de ambos grupos?

# Conceptos

- Sean dos grupos finitos, $M$ y $W$, tal que: $M \cup W = N, \{i\}_1^n$.
- Las preferencias son completas y transitivas[1] por los miembros del otro grupo, aunque a veces pueden preferir estar solos:

$$\forall m \in M : P^m \rightarrow W \cup \{m\}$$

$$\forall w \in W : P^w \rightarrow M \cup \{w\}$$

[1] Racionalidad.

# Conceptos

## Definition (2)

Un emparejamiento $\mu$ de la forma 1:1 es una función

$$\mu : M \cup W \to M \cup W \tag{1}$$

que verifica:

- $m_i = \mu(w_j) \Leftrightarrow w_j = \mu(m_i)$.
- $m_k = \mu(m_i) \Leftrightarrow k = i$.
- $w_s = \mu(w_j) \Leftrightarrow s = j$.

# Conceptos

Se requiere que los emparejamientos sean **estables**, es decir, **Pareto-eficientes**.

**Definition (3)**

Un emparejamiento $\mu$ puede ser bloqueado por **un agente** si $\exists h \in M \cup W$ que prefiere estar sólo a están emparejado con $\mu(h)$. Al unísono, un emparejamiento $\mu$ puede ser bloqueado por **un par de agentes** $(m_i, w_j)$ si $m_i \neq \mu(w_j)$ y ambos prefieren estar emparejando entre sí.

# Conceptos

**Definition (4)**

Un emparejamiento $\mu$ es **estable** si no puede ser bloqueado por uno o un par de agentes. Es decir, si no se cumple la definición 3.

**Definition (5)**

Un emparejamiento $\mu$ está en el **núcleo** si $\nexists$ alguna coalición de individuos en $N$ que puedan emparejarse entre sí para alcanzar una mejora de Pareto.

# Conceptos

**Teorema (Roth y Sotomayor, 1990)**

El núcleo en el mercado *two-sided* coincide con el conjunto de emparejamiento estables: todo emparejamiento estable es Pareto eficiente.

# Aceptación diferida

1. Cada $m \in M$ hace las propuestas al más preferido de $W$ según su ranking, si existe la posibilidad.
2. Cada $w \in W$ acepta temporalmente la propuesta más sugerente, rechazando las no factibles.
3. Cada $m \in M$ rechazado previamente, hace las propuestas a su segundo mejor de $w \in W$ si aún estar con alguien a estar solo. Si no quedan alternativas aceptables, no efectúan propuestas.
4. Cada $w \in W$ elige la alternativa más atractiva entre todas las propuestas que recibió.

# Aceptación diferida

**Nota**

El resultado del emparejamiento por AD puede depender del lado del mercado que realizan las propuestas.

# Aceptación diferida

**Ejemplo 3**

Considere los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ con preferencias:

| $P^{m_1}$ | $P^{m_2}$ | $P^{m_3}$ | $P^{m_4}$ | $P^{w_1}$ | $P^{w_2}$ | $P^{w_3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | $w_3$ | $w_2$ | $w_1$ | $m_2$ | $m_4$ | $m_3$ |
| $w_3$ | $w_1$ | $m_3$ | $w_2$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_4$ |
| $m_1$ | $w_2$ | $w_1$ | $w_2$ | $m_4$ | $m_3$ | $m_2$ |
| $w_2$ | $m_2$ | $w_3$ | $m_4$ | $w_1$ | $m_1$ | $m_1$ |
| | | | | $m_3$ | $w_2$ | $w_3$ |

# Aceptación diferida

## Ejemplo 4

Considere los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ con preferencias:

| $P^{m_1}$ | $P^{m_2}$ | $P^{m_3}$ | $P^{m_4}$ | $P^{w_1}$ | $P^{w_2}$ | $P^{w_3}$ | $P^{w_4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | $w_4$ | $w_1$ | $w_1$ | $m_2$ | $m_4$ | $m_3$ | $m_3$ |
| $w_3$ | $w_2$ | $w_4$ | $m_4$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_4$ | $m_2$ |
| $m_1$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_4$ | $m_4$ | $m_3$ | $m_2$ | $w_4$ |
| $w_2$ | $m_2$ | $w_3$ | $w_2$ | $w_1$ | $m_1$ | $m_1$ | $m_4$ |
| $w_4$ | $w_3$ | $m_3$ | $w_3$ | $m_3$ | $w_2$ | $w_3$ | $m_1$ |

# Aceptación diferida

## Ejemplo 5

Considere los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ con preferencias:

| $P^{m_1}$ | $P^{m_2}$ | $P^{m_3}$ | $P^{m_4}$ | $P^{w_1}$ | $P^{w_2}$ | $P^{w_3}$ | $P^{w_4}$ | $P^{w_5}$ | $P^{w_6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | $w_3$ | $w_2$ | $w_1$ | $m_2$ | $m_4$ | $m_1$ | $m_3$ | $m_1$ | $m_2$ |
| $w_3$ | $w_2$ | $w_4$ | $w_2$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_4$ | $m_1$ | $m_3$ | $m_1$ |
| $w_4$ | $w_5$ | $w_1$ | $w_4$ | $m_4$ | $m_3$ | $m_2$ | $m_4$ | $m_4$ | $m_3$ |
| $w_6$ | $w_4$ | $w_3$ | $w_6$ | $w_1$ | $m_1$ | $w_3$ | $w_4$ | $m_2$ | $m_4$ |
| $m_1$ | $w_6$ | $w_5$ | $w_5$ | $m_3$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_2$ | $w_5$ | $w_6$ |
| $w_5$ | $w_1$ | $w_6$ | $w_3$ | | | | | | |
| $w_2$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | | | | | | |

# Conceptos

- Sean dos grupos finitos, $M$ y $W$, tal que: $M \cup W = N, \{i\}_1^n$.
- Se extiende el análisis 1:1, de modo que ahora varios individuos $w \in W$ se emparejan con un elemento $m \in M$.

# Conceptos

**Definition (6)**

Un emparejamiento $\mu$ de la forma m:1 es una correspondencia

$$\mu : M \cup W \rightrightarrows M \cup W \tag{2}$$

que verifica:

- $w \in \mu(m) \Leftrightarrow m = \mu(w)$.
- $m_k = \mu(m_i) \Leftrightarrow k = i$.
- $w_s = \mu(w_j) \Leftrightarrow s = j$.

donde $\#\{h \in M \cup W : h \in \mu(m)\} \leq q_m, \forall m \in M$.

# Conceptos

**Definition (7)**

Un emparejamiento $\mu$ puede ser bloqueado por **un agente** $w \in M$ si prefiere $wP^w\mu(w)$ o por un agente $m \in M$ si $\exists w \in \mu(m)$ que es inaceptable por $m$ ($m$ prefiere no llenar el cupo que aceptar a $w$). Al unísono, un emparejamiento $\mu$ puede ser bloqueado por **un par de agentes** $(m, w \in M \times W)$ si:

- $mP^w\mu(w)$.
- $\exists w' \in \mu(w) : wP^m w'$ o $wP^m m$ si $\#\mu(m) < q_m$.

# Conceptos

### Definition (8)

Un emparejamiento $\mu$ es **estable** si no puede ser bloqueado por uno o un par de agentes. Es decir, si no se cumple la definición 7.

### Nota

En aplicaciones a estudiantes y colegios, los colegios tienen orden de prioridad más que preferencias.

# Mecanismo de Boston

E1 Se empareja a cada colegio con los estudiantes que lo han posicionado como el más preferido, uno por uno, siguiendo el orden de prioridad de los colegios y la cantidad de cupos ofrecidos por éstos.

Ek El estudiante que no ha sido emparejado en las etapas previas, se considera únicamente su k-ésima mayor preferencia. Como tal, los colegios que aún cuentan con cupos se les asigna los estudiantes que lo eligieron como k-ésima preferencia, uno por uno.

# Mecanismo de Boston

## Ejemplo 6

Considere los conjuntos $M = \{m_1, m_2\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ con cupos $q_m = (2, 3)$ y preferencias:

| $P^{m_1}$ | $P^{m_2}$ | $P^{w_1}$ | $P^{w_2}$ | $P^{w_3}$ | $P^{w_4}$ | $P^{w_5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | $w_3$ | $m_1$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_2$ | $m_1$ |
| $w_3$ | $w_1$ | $m_2$ | $m_2$ | $m_1$ | $m_1$ | $m_2$ |
| $w_4$ | $w_2$ | | | | | |
| $w_2$ | $w_5$ | | | | | |
| $w_5$ | $w_4$ | | | | | |

# Mecanismo de Boston

## Ejemplo 7

Considere los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\}$ con cupos $q_m = (2, 3, 2)$ y preferencias:

| $P^{m_1}$ | $P^{m_2}$ | $P^{m_3}$ | $P^{w_1}$ | $P^{w_2}$ | $P^{w_3}$ | $P^{w_4}$ | $P^{w_5}$ | $P^{w_6}$ | $P^{w_7}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_2$ | $w_1$ | $w_4$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_1$ | $m_3$ | $m_2$ | $m_1$ |
| $w_4$ | $w_3$ | $w_5$ | $m_2$ | $m_1$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_1$ | $m_1$ | $m_3$ |
| $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $m_3$ | $m_3$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_2$ |
| $w_3$ | $w_5$ | $w_2$ | | | | | | | |
| $w_6$ | $w_4$ | $w_6$ | | | | | | | |
| $w_5$ | $w_6$ | $w_1$ | | | | | | | |
| $w_7$ | $w_7$ | $w_7$ | | | | | | | |

# Mecanismo TTC

**Definition (9)**

Un **ciclo** $(m_{i1}, w_{i1}, ..., m_{ik}, w_{ik})$ es una cadena ordenada de colegios y estudiantes donde el colegio $m_{i1}$ anuncia al estudiante $w_{i1}$, quien anuncia al colegio $m_{i2}$, y así sucesivamente, hasta que $w_{ik}$ anuncia a $m_{i1}$, es decir, cerrar la cadena.

# Mecanismo TTC

E1 Cada estudiante anuncia su colegio de preferencia y cada colegio anuncia al estudiante prioritario.

Ek El estudiante que aún no tiene colegio anuncia a aquellos que aún están disponibles y los colegios anuncian al estudiante prioritario libre.

**Nota**

En cada ciclo, los estudiantes son asignados al colegio que anunciaron y los colegios que llenaron sus cupos se retiran. El mecanismo concluye cuando todos los estudiantes han sido asignados.

# Mecanismo TTC

### Ejemplo 8

Considere los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ con cupos $q_m = (2, 2, 1)$ y preferencias:

| $P^{m_1}$ | $P^{m_2}$ | $P^{m_3}$ | $P^{w_1}$ | $P^{w_2}$ | $P^{w_3}$ | $P^{w_4}$ | $P^{w_5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_2$ | $w_3$ | $w_1$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_1$ | $m_2$ |
| $w_3$ | $w_5$ | $w_2$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_1$ | $m_3$ | $m_3$ |
| $w_1$ | $w_1$ | $w_4$ | $m_3$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_2$ | $m_1$ |
| $w_4$ | $w_2$ | $w_3$ | | | | | |
| $w_5$ | $w_4$ | $w_5$ | | | | | |

# M one-sided

# Conceptos

- Los emparejamientos unilaterales asignan bienes indivisibles.
- Sólo un lado del mercado tiene preferencias.
- Los agentes son asignados a un único bien, es decir, tiene naturaleza 1:1.
- Variantes: no hay entrantes (todos tiene una casa), no hay propietarios (todos son entrantes) y mixto.

# Asignación de casas

**Definition (10)**

Dado un conjunto $N$ finito y no vacío de individuos, donde cada uno es propietario de una casa. Bajo preferencias racionales y estrictas, un emparejamiento es una función biyectiva

$$\mu : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\} \tag{3}$$

que asigna a cada agente $h$ la casa del agente $\mu(h)$.

# Asignación de casas

Mecanismos:

1. TTC.
2. RSD.
3. YRMH-IGYT.

# Asignación de casas

**Ejemplo 8**

Considere un mercado de 3 agentes, $N = 1, 2, 3$, y 3 casas $(h_i)$. Las preferencias son:

$$\begin{array}{ccc} P^{i_1} & P^{i_2} & P^{i_3} \\ h_2 & h_3 & h_1 \\ h_3 & w_2 & h_3 \\ h_1 & w_1 & h_2 \end{array}$$

# Comentarios

# Reflexiones

- El mecanismo de aceptación diferida necesita ser refinado.
- TTC es condicional cuando se aplica a mercados donde los agentes no tienen derechos sobre los bienes.
- La asignación de bienes indivisibles depende de la naturaleza de los que buscan una casa.
- Se puede extender el mecanismo de asignación de bienes a donación de órganos, médicos a hospitales, etc.

# References


- Gale, D. and Shapley, L. *College Admissions and the Stability of Marriage*. The American Mathematical Monthly, 69(1), 1962.
- Roth, A. and Sotomayor, M. *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- Shapley, L and Scarf, H. *On cores and indivisibility*. Journal of Mathematical Economics, 1(1), 1974.
- Torres, Juan Pablo. *Apuntes de Clase, Universidad de Chile*.