



Fundamentos de Matching Theory

Luis Chávez¹

¹Departamento de Economía

Lima, 2025



Contenido

1. Introducción

2. M two-sided

2.1 Matching 1:1

2.2 Matching m:1

3. M one-sided

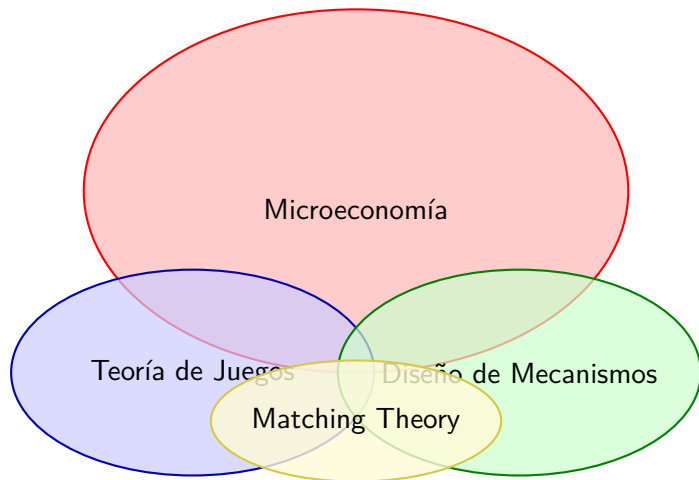
3.1 Matching 1:1

4. Comentarios

Introducción

Overview

- 1962: David Gale y Lloyd Shapley publicaron uno de los artículos más influyentes en teoría de juegos, iniciando la literatura sobre teoría de emparejamiento.
- 2000⁻: aplicaciones en mercados laborales en U.S.
- 2000⁺: aplicaciones en elección escolar e intercambio de riñones (*kidney exchange*).
- 2012: Premio Nobel Economía a Alvin Roth y Lloyd Shapley por contribuciones en asignaciones estables y diseños de mercados.



Definition (1)

Matching theory es la rama de las matemáticas que se encarga de realizar asignaciones, cuyos resultados deben verificar ciertas propiedades.

Ejemplo 1

Una universidad peruana ha lanzado una convocatoria para becas estudiantiles de posgrado. Se ha establecido 30 vacantes de 330 postulantes. ¿Quiénes deben ser admitidos?

Ejemplo 2

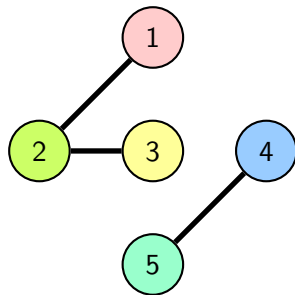
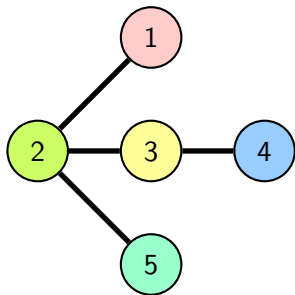
Cientos de personas esperan por un trasplante de riñón en Perú. La probabilidad de encontrar un donante compatible entre sus familiares y amigos es pequeña. Las donaciones son eventuales. ¿Cómo se puede mejorar los trasplantes exitosos?

- El éxito de la teoría del emparejamiento radica en la tradición teórica iniciada por Gale y Shapley (1962).
- 1990⁻ la investigación sobre el emparejamiento se centraba principalmente en los mercados bilaterales.
- El trabajo de Roth y Sotomayor (1990) ofrece una imagen clara del enfoque de la literatura sobre emparejamiento en esta época.
- Si bien Shapley y Scarf (1974) y Hylland y Zeckhauser (1977) introdujeron dos modelos tempranos *one-sided*, tomaron relevancia 1990⁺.

Requisitos

- Matemáticas.
- Teoría de grafos.
- Microfundamentos.

Grafos



M two-sided

Disyuntiva

Dados dos grupos de individuos, ¿es posible distribuirlos de forma óptima en parejas formadas por miembros de ambos grupos?

Conceptos

- Sean dos grupos finitos, M y W , tal que: $M \cup W = N, \{i\}_1^n$.
- Las preferencias son completas y transitivas¹ por los miembros del otro grupo, aunque a veces pueden preferir estar solos:

$$\forall m \in M : P^m \rightarrow W \cup \{m\}$$

$$\forall w \in W : P^w \rightarrow M \cup \{w\}$$

¹Racionalidad.

Definition (2)

Un emparejamiento μ de la forma 1:1 es una función

$$\mu : M \cup W \rightarrow M \cup W \quad (1)$$

que verifica:

- $m_i = \mu(w_j) \Leftrightarrow w_j = \mu(m_i)$.
- $m_k = \mu(m_i) \Leftrightarrow k = i$.
- $w_s = \mu(w_j) \Leftrightarrow s = j$.

Se requiere que los emparejamientos sean **estables**, es decir, **Pareto-eficientes**.

Definition (3)

Un emparejamiento μ puede ser bloqueado por **un agente** si $\exists h \in M \cup W$ que prefiere estar sólo a están emparejado con $\mu(h)$. Al unísono, un emparejamiento μ puede ser bloqueado por **un par de agentes** (m_i, w_j) si $m_i \neq \mu(w_j)$ y ambos prefieren estar emparejando entre sí.

Definition (4)

Un emparejamiento μ es **estable** si no puede ser bloqueado por uno o un par de agentes. Es decir, si no se cumple la definición 3.

Definition (5)

Un emparejamiento μ está en el **núcleo** si \nexists alguna coalición de individuos en N que puedan emparejarse entre sí para alcanzar una mejora de Pareto.

Teorema (Roth y Sotomayor, 1990)

El núcleo en el mercado *two-sided* coincide con el conjunto de emparejamiento estables: todo emparejamiento estable es Pareto eficiente.

Aceptación diferida

1. Cada $m \in M$ hace las propuestas al más preferido de W según su ranking, si existe la posibilidad.
2. Cada $w \in W$ acepta temporalmente la propuesta más sugerente, rechazando las no factibles.
3. Cada $m \in M$ rechazado previamente, hace las propuestas a su segundo mejor de $w \in W$ si aún estar con alguien a estar solo. Si no quedan alternativas aceptables, no efectúan propuestas.
4. Cada $w \in W$ elige la alternativa más atractiva entre todas las propuestas que recibió.

Aceptación diferida

Nota

El resultado del emparejamiento por AD puede depender del lado del mercado que realizan las propuestas.

Aceptación diferida

Ejemplo 3

Considere los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ con preferencias:

P^{m_1}	P^{m_2}	P^{m_3}	P^{m_4}	P^{w_1}	P^{w_2}	P^{w_3}
w_1	w_3	w_2	w_1	m_2	m_4	m_3
w_3	w_1	m_3	w_2	m_1	m_2	m_4
m_1	w_2	w_1	w_3	m_4	m_3	m_2
w_2	m_2	w_3	m_4	w_1	m_1	m_1
				m_3	w_2	w_3

Aceptación diferida

Ejemplo 4

Considere los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ con preferencias:

P^{m_1}	P^{m_2}	P^{m_3}	P^{m_4}	P^{w_1}	P^{w_2}	P^{w_3}	P^{w_4}
w_1	w_4	w_1	w_1	m_2	m_4	m_3	m_3
w_3	w_2	w_4	m_4	m_1	m_2	m_4	m_2
m_1	w_1	w_2	w_4	m_4	m_3	m_2	w_4
w_2	m_2	w_3	w_2	w_1	m_1	m_1	m_4
w_4	w_3	m_3	w_3	m_3	w_2	w_3	m_1

Aceptación diferida

Ejemplo 5

Considere los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ con preferencias:

P^{m_1}	P^{m_2}	P^{m_3}	P^{m_4}	P^{w_1}	P^{w_2}	P^{w_3}	P^{w_4}	P^{w_5}	P^{w_6}
w_1	w_3	w_2	w_1	m_2	m_4	m_1	m_3	m_1	m_2
w_3	w_2	w_4	w_2	m_1	m_2	m_4	m_1	m_3	m_1
w_4	w_5	w_1	w_4	m_4	m_3	m_2	m_4	m_4	m_3
w_6	w_4	w_3	w_6	w_1	m_1	w_3	w_4	m_2	m_4
m_1	w_6	w_5	w_5	m_3	w_2	w_3	w_2	w_5	w_6
w_5	w_1	w_6	w_3						
w_2	m_2	m_3	m_4						

Conceptos

- Sean dos grupos finitos, M y W , tal que: $M \cup W = N, \{i\}_1^n$.
- Se extiende el análisis 1:1, de modo que ahora varios individuos $w \in W$ se emparejan con un elemento $m \in M$.

Definition (6)

Un emparejamiento μ de la forma m:1 es una correspondencia

$$\mu : M \cup W \rightrightarrows M \cup W \quad (2)$$

que verifica:

- $w \in \mu(m) \Leftrightarrow m = \mu(w).$
- $m_k = \mu(m_i) \Leftrightarrow k = i.$
- $w_s = \mu(w_j) \Leftrightarrow s = j.$

donde $\#\{h \in M \cup W : h \in \mu(m)\} \leq q_m, \forall m \in M.$

Definition (7)

Un emparejamiento μ puede ser bloqueado por **un agente** $w \in M$ si prefiere $wP^w\mu(w)$ o por un agente $m \in M$ si $\exists w \in \mu(m)$ que es inaceptable por m (m prefiere no llenar el cupo que aceptar a w). Al unísono, un emparejamiento μ puede ser bloqueado por **un par de agentes** $(m, w \in M \times W)$ si:

- $mP^w\mu(w)$.
- $\exists w' \in \mu(w) : wP^m w' \text{ o } wP^m m \text{ si } \#\mu(m) < q_m$.

Definition (8)

Un emparejamiento μ es **estable** si no puede ser bloqueado por uno o un par de agentes. Es decir, si no se cumple la definición 7.

Nota

En aplicaciones a estudiantes y colegios, los colegios tienen orden de prioridad más que preferencias.

Mecanismo de Boston

- E1 Se empareja a cada colegio con los estudiantes que lo han posicionado como el más preferido, uno por uno, siguiendo el orden de prioridad de los colegios y la cantidad de cupos ofrecidos por éstos.
- Ek El estudiante que no ha sido emparejado en las etapas previas, se considera únicamente su k -ésima mayor preferencia. Como tal, los colegios que aún cuentan con cupos se les asigna los estudiantes que lo eligieron como k -ésima preferencia, uno por uno.

Mecanismo de Boston

Ejemplo 6

Considere los conjuntos $M = \{m_1, m_2\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ con cupos $q_m = (2, 3)$ y preferencias:

P^{m_1}	P^{m_2}	P^{w_1}	P^{w_2}	P^{w_3}	P^{w_4}	P^{w_5}
w_1	w_3	m_1	m_1	m_2	m_2	m_1
w_3	w_1	m_2	m_2	m_1	m_1	m_2
w_4	w_2					
w_2	w_5					
w_5	w_4					

Mecanismo de Boston

Ejemplo 7

Considere los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\}$ con cupos $q_m = (2, 3, 2)$ y preferencias:

P^{m_1}	P^{m_2}	P^{m_3}	P^{w_1}	P^{w_2}	P^{w_3}	P^{w_4}	P^{w_5}	P^{w_6}	P^{w_7}
w_2	w_1	w_4	m_1	m_2	m_3	m_1	m_3	m_2	m_1
w_4	w_3	w_5	m_2	m_1	m_1	m_2	m_1	m_1	m_3
w_1	w_2	w_3	m_3	m_3	m_2	m_3	m_2	m_3	m_2
w_3	w_5	w_2							
w_6	w_4	w_6							
w_5	w_6	w_1							
w_7	w_7	w_7							

Definition (9)

Un **ciclo** $(m_{i1}, w_{i1}, \dots, m_{ik}, w_{ik})$ es una cadena ordenada de colegios y estudiantes donde el colegio m_{i1} anuncia al estudiante w_{i1} , quien anuncia al colegio m_{i2} , y así sucesivamente, hasta que w_{ik} anuncia a m_{i1} , es decir, cerrar la cadena.

Mecanismo TTC

- E1 Cada estudiante anuncia su colegio de preferencia y cada colegio anuncia al estudiante prioritario.
- Ek El estudiante que aún no tiene colegio anuncia a aquellos que aún están disponibles y los colegios anuncian al estudiante prioritario libre.

Nota

En cada ciclo, los estudiantes son asignados al colegio que anunciaron y los colegios que llenaron sus cupos se retiran. El mecanismo concluye cuando todos los estudiantes han sido asignados.

Mecanismo TTC

Ejemplo 8

Considere los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ con cupos $q_m = (2, 2, 1)$ y preferencias:

P^{m_1}	P^{m_2}	P^{m_3}	P^{w_1}	P^{w_2}	P^{w_3}	P^{w_4}	P^{w_5}
w_2	w_3	w_1	m_1	m_2	m_3	m_1	m_2
w_3	w_5	w_2	m_2	m_3	m_1	m_3	m_3
w_1	w_1	w_4	m_3	m_1	m_2	m_2	m_1
w_4	w_2	w_3					
w_5	w_4	w_5					

M one-sided

- Los emparejamientos unilaterales asignan bienes indivisibles.
- Sólo un lado del mercado tiene preferencias.
- Los agentes son asignados a un único bien, es decir, tiene naturaleza 1:1.
- Variantes: no hay entrantes (todos tiene una casa), no hay propietarios (todos son entrantes) y mixto.

Asignación de casas

Definition (10)

Dado un conjunto N finito y no vacío de individuos, donde cada uno es propietario de una casa. Bajo preferencias racionales y estrictas, un emparejamiento es una función biyectiva

$$\mu : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

que asigna a cada agente h la casa del agente $\mu(h)$.

Asignación de casas

Mecanismos:

1. TTC.
2. RSD.
3. YRMH-IGYT.

Asignación de casas

Ejemplo 8





Considere un mercado de 3 agentes, $N = 1, 2, 3$, y 3 casas (h_i). Las preferencias son:

P^{i_1}	P^{i_2}	P^{i_3}
h_2	h_3	h_1
h_3	w_2	h_3
h_1	w_1	h_2

Comentarios

- El mecanismo de aceptación diferida necesita ser refinado.
- TTC es condicional cuando se aplica a mercados donde los agentes no tienen derechos sobre los bienes.
- La asignación de bienes indivisibles depende de la naturaleza de los que buscan una casa.
- Se puede extender el mecanismo de asignación de bienes a donación de órganos, médicos a hospitales, etc.

References

-  Gale, D. and Shapley, L. *College Admissions and the Stability of Marriage*. The American Mathematical Monthly, 69(1), 1962.
-  Roth, A. and Sotomayor, M. *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*. Cambridge University Press, 1990.
-  Shapley, L and Scarf, H. *On cores and indivisibility*. Journal of Mathematical Economics, 1(1), 1974.
-  Torres, Juan Pablo. *Apuntes de Clase, Universidad de Chile*.