

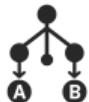


# Fundamentos de Matching Theory

Luis Chávez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Economía

Lima, 2025



# Contenido

---

## 1. Introducción

## 2. M two-sided

- 2.1 Matching 1:1
- 2.2 Matching m:1

## 3. M one-sided

- 3.1 Matching 1:1

## 4. Comentarios

# **Introducción**

---

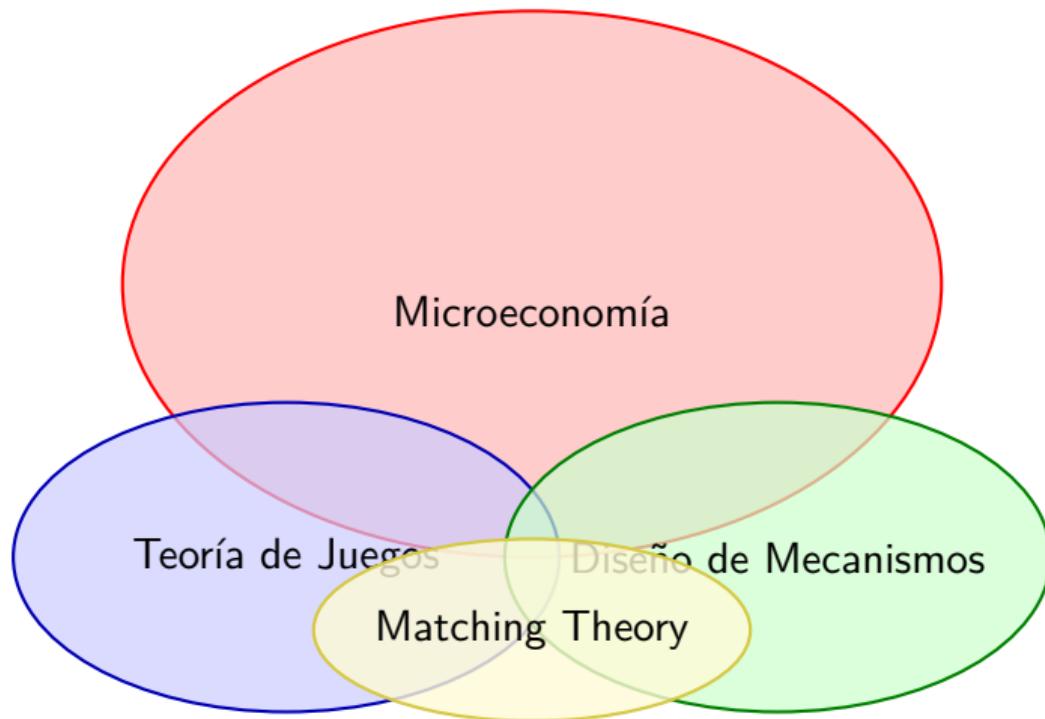
# Overview

---

- 1962: David Gale y Lloyd Shapley publicaron uno de los artículos más influyentes en teoría de juegos, iniciando la literatura sobre teoría de emparejamiento.
- 2000<sup>-</sup>: aplicaciones en mercados laborales en U.S.
- 2000<sup>+</sup>: aplicaciones en elección escolar e intercambio de riñones (*kidney exchange*).
- 2012: Premio Nobel Economía a Alvin Roth y Lloyd Shapley por contribuciones en asignaciones estables y diseños de mercados.

# Fundamentos

---



# Fundamentos

---

## Definition (1)

**Matching theory** es la rama de las matemáticas que se encarga de realizar asignaciones, cuyos resultados deben verificar ciertas propiedades.

# Fundamentos

---

## Ejemplo 1

Una universidad peruana ha lanzado una convocatoria para becas estudiantiles de posgrado. Se ha establecido 30 vacantes de 330 postulantes. ¿Quiénes deben ser admitidos?

# Fundamentos

---

## Ejemplo 2

Cientos de personas esperan por un trasplante de riñón en Perú. La probabilidad de encontrar un donante compatible entre sus familiares y amigos es pequeña. Las donaciones son eventuales. ¿Cómo se puede mejorar los trasplantes exitosos?

# Estilizados

---

- El éxito de la teoría del emparejamiento radica en la tradición teórica iniciada por Gale y Shapley (1962).
- 1990<sup>-</sup> la investigación sobre el emparejamiento se centraba principalmente en los mercados bilaterales.
- El trabajo de Roth y Sotomayor (1990) ofrece una imagen clara del enfoque de la literatura sobre emparejamiento en esta época.
- Si bien Shapley y Scarf (1974) y Hylland y Zeckhauser (1977) introdujeron dos modelos tempranos *one-sided*, tomaron relevancia 1990<sup>+</sup>.

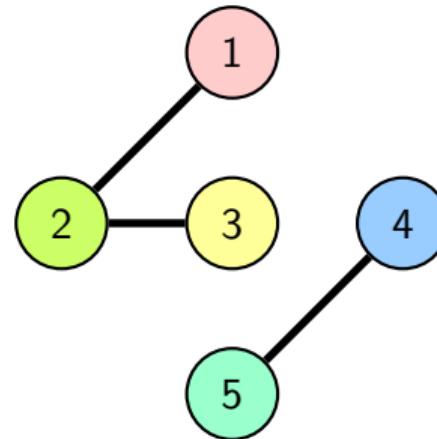
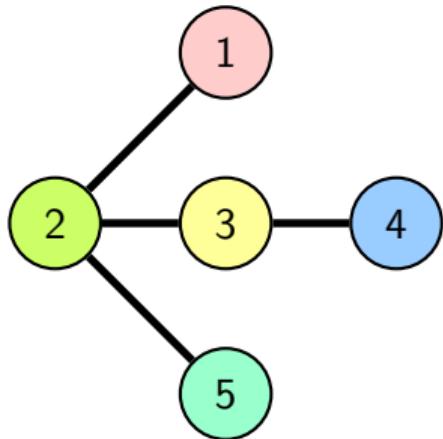
# Requisitos

---

- Matemáticas.
- Teoría de grafos.
- Microfundamentos.

# Grafos

---



**M two-sided**

---

# Conceptos

---

## Disyuntiva

Dados dos grupos de individuos, ¿es posible distribuirlos de forma óptima en parejas formadas por miembros de ambos grupos?

# Conceptos

---

- Sean dos grupos finitos,  $M$  y  $W$ , tal que:  $M \cup W = N, \{i\}_1^n$ .
- Las preferencias son completas y transitivas<sup>1</sup> por los miembros del otro grupo, aunque a veces pueden preferir estar solos:

$$\forall m \in M : P^m \rightarrow W \cup \{m\}$$

$$\forall w \in W : P^w \rightarrow M \cup \{w\}$$

---

<sup>1</sup>Racionalidad.

# Conceptos

---

## Definition (2)

Un emparejamiento  $\mu$  de la forma 1:1 es una función

$$\mu : M \cup W \rightarrow M \cup W \quad (1)$$

que verifica:

- $m_i = \mu(w_j) \Leftrightarrow w_j = \mu(m_i).$
- $m_k = \mu(m_i) \Leftrightarrow k = i.$
- $w_s = \mu(w_j) \Leftrightarrow s = j.$

# Conceptos

---

Se requiere que los emparejamientos sean **estables**, es decir, **Pareto-eficientes**.

## Definition (3)

Un emparejamiento  $\mu$  puede ser bloqueado por **un agente** si  $\exists h \in M \cup W$  que prefiere estar sólo a están emparejado con  $\mu(h)$ . Al unísono, un emparejamiento  $\mu$  puede ser bloqueado por **un par de agentes**  $(m_i, w_j)$  si  $m_i \neq \mu(w_j)$  y ambos prefieren estar emparejando entre sí.

# Conceptos

---

## Definition (4)

Un emparejamiento  $\mu$  es **estable** si no puede ser bloqueado por uno o un par de agentes. Es decir, si no se cumple la definición 3.

## Definition (5)

Un emparejamiento  $\mu$  está en el **núcleo** si  $\nexists$  alguna coalición de individuos en  $N$  que puedan emparejarse entre sí para alcanzar una mejora de Pareto.

# Conceptos

---

## Teorema (Roth y Sotomayor, 1990)

El núcleo en el mercado *two-sided* coincide con el conjunto de emparejamiento estables: todo emparejamiento estable es Pareto eficiente.

## Aceptación diferida

---

1. Cada  $m \in M$  hace las propuestas al más preferido de  $W$  según su ranking, si existe la posibilidad.
2. Cada  $w \in W$  acepta temporalmente la propuesta más sugerente, rechazando las no factibles.
3. Cada  $m \in M$  rechazado previamente, hace las propuestas a su segundo mejor de  $w \in W$  si aún estar con alguien a estar solo. Si no quedan alternativas aceptables, no efectúan propuestas.
4. Cada  $w \in W$  elige la alternativa más atractiva entre todas las propuestas que recibió.

# Aceptación diferida

---

## Nota

El resultado del emparejamiento por AD puede depender del lado del mercado que realizan las propuestas.

# Aceptación diferida

---

## Ejemplo 3

Considere los conjuntos  $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$  y  $W = \{w_1, w_2, w_3\}$  con preferencias:

$P^{m_1}$	$P^{m_2}$	$P^{m_3}$	$P^{m_4}$	$P^{w_1}$	$P^{w_2}$	$P^{w_3}$
$w_1$	$w_3$	$w_2$	$w_1$	$m_2$	$m_4$	$m_3$
$w_3$	$w_1$	$m_3$	$w_2$	$m_1$	$m_2$	$m_4$
$m_1$	$w_2$	$w_1$	$w_3$	$m_4$	$m_3$	$m_2$
$w_2$	$m_2$	$w_3$	$m_4$	$w_1$	$m_1$	$m_1$
				$m_3$	$w_2$	$w_3$

# Aceptación diferida

## Ejemplo 4

Considere los conjuntos  $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$  y  $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  con preferencias:

$P^{m_1}$	$P^{m_2}$	$P^{m_3}$	$P^{m_4}$	$P^{w_1}$	$P^{w_2}$	$P^{w_3}$	$P^{w_4}$
$w_1$	$w_4$	$w_1$	$w_1$	$m_2$	$m_4$	$m_3$	$m_3$
$w_3$	$w_2$	$w_4$	$m_4$	$m_1$	$m_2$	$m_4$	$m_2$
$m_1$	$w_1$	$w_2$	$w_4$	$m_4$	$m_3$	$m_2$	$w_4$
$w_2$	$m_2$	$w_3$	$w_2$	$w_1$	$m_1$	$m_1$	$m_4$
$w_4$	$w_3$	$m_3$	$w_3$	$m_3$	$w_2$	$w_3$	$m_1$

# Aceptación diferida

## Ejemplo 5

Considere los conjuntos  $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$  y  $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$  con preferencias:

$P^{m_1}$	$P^{m_2}$	$P^{m_3}$	$P^{m_4}$	$P^{w_1}$	$P^{w_2}$	$P^{w_3}$	$P^{w_4}$	$P^{w_5}$	$P^{w_6}$
$w_1$	$w_3$	$w_2$	$w_1$	$m_2$	$m_4$	$m_1$	$m_3$	$m_1$	$m_2$
$w_3$	$w_2$	$w_4$	$w_2$	$m_1$	$m_2$	$m_4$	$m_1$	$m_3$	$m_1$
$w_4$	$w_5$	$w_1$	$w_4$	$m_4$	$m_3$	$m_2$	$m_4$	$m_4$	$m_3$
$w_6$	$w_4$	$w_3$	$w_6$	$w_1$	$m_1$	$w_3$	$w_4$	$m_2$	$m_4$
$m_1$	$w_6$	$w_5$	$w_5$	$m_3$	$w_2$	$w_3$	$w_2$	$w_5$	$w_6$
$w_5$	$w_1$	$w_6$	$w_3$						
$w_2$	$m_2$	$m_3$	$m_4$						

# Conceptos

---

- Sean dos grupos finitos,  $M$  y  $W$ , tal que:  $M \cup W = N, \{i\}_1^n$ .
- Se extiende el análisis 1:1, de modo que ahora varios individuos  $w \in W$  se emparejan con un elemento  $m \in M$ .

# Conceptos

---

## Definition (6)

Un emparejamiento  $\mu$  de la forma m:1 es una correspondencia

$$\mu : M \cup W \rightrightarrows M \cup W \quad (2)$$

que verifica:

- $w \in \mu(m) \Leftrightarrow m = \mu(w).$
- $m_k = \mu(m_i) \Leftrightarrow k = i.$
- $w_s = \mu(w_j) \Leftrightarrow s = j.$

donde  $\#\{h \in M \cup W : h \in \mu(m)\} \leq q_m, \forall m \in M.$

# Conceptos

---

## Definition (7)

Un emparejamiento  $\mu$  puede ser bloqueado por **un agente**  $w \in M$  si prefiere  $wP^w\mu(w)$  o por un agente  $m \in M$  si  $\exists w \in \mu(m)$  que es inaceptable por  $m$  ( $m$  prefiere no llenar el cupo que aceptar a  $w$ ). Al unísono, un emparejamiento  $\mu$  puede ser bloqueado por **un par de agentes**  $(m, w \in M \times W)$  si:

- $mP^w\mu(w)$ .
- $\exists w' \in \mu(w) : wP^mw' \circ wP^wm$  si  $\#\mu(m) < q_m$ .

# Conceptos

---

## Definition (8)

Un emparejamiento  $\mu$  es **estable** si no puede ser bloqueado por uno o un par de agentes. Es decir, si no se cumple la definición 7.

## Nota

En aplicaciones a estudiantes y colegios, los colegios tienen orden de prioridad más que preferencias.

# Mecanismo de Boston

---

- E1 Se empareja a cada colegio con los estudiantes que lo han posicionado como el más preferido, uno por uno, siguiendo el orden de prioridad de los colegios y la cantidad de cupos ofrecidos por éstos.
- Ek El estudiante que no ha sido emparejado en las etapas previas, se considera únicamente su  $k$ -ésima mayor preferencia. Como tal, los colegios que aún cuentan con cupos se les asigna los estudiantes que lo eligieron como  $k$ -ésima preferencia, uno por uno.

# Mecanismo de Boston

## Ejemplo 6

Considere los conjuntos  $M = \{m_1, m_2\}$  y  $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$  con cupos  $q_m = (2, 3)$  y preferencias:

$P^{m_1}$	$P^{m_2}$	$P^{w_1}$	$P^{w_2}$	$P^{w_3}$	$P^{w_4}$	$P^{w_5}$
$w_1$	$w_3$	$m_1$	$m_1$	$m_2$	$m_2$	$m_1$
$w_3$	$w_1$	$m_2$	$m_2$	$m_1$	$m_1$	$m_2$
$w_4$	$w_2$					
$w_2$	$w_5$					
$w_5$	$w_4$					

# Mecanismo de Boston

## Ejemplo 7

Considere los conjuntos  $M = \{m_1, m_2, m_3\}$  y  $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\}$  con cupos  $q_m = (2, 3, 2)$  y preferencias:

$P^{m_1}$	$P^{m_2}$	$P^{m_3}$	$P^{w_1}$	$P^{w_2}$	$P^{w_3}$	$P^{w_4}$	$P^{w_5}$	$P^{w_6}$	$P^{w_7}$
$w_2$	$w_1$	$w_4$	$m_3$	$m_2$	$m_3$	$m_1$	$m_3$	$m_2$	$m_1$
$w_4$	$w_3$	$w_5$	$m_2$	$m_1$	$m_1$	$m_2$	$m_1$	$m_1$	$m_3$
$w_1$	$w_2$	$w_3$	$m_1$	$m_3$	$m_2$	$m_3$	$m_2$	$m_3$	$m_2$
$w_3$	$w_5$	$w_2$							
$w_6$	$w_4$	$w_6$							
$w_5$	$w_6$	$w_1$							
$w_7$	$w_7$	$w_7$							

# Mecanismo TTC

---

## Definition (9)

Un **ciclo**  $(m_{i1}, w_{i1}, \dots, m_{ik}, w_{ik})$  es una cadena ordenada de colegios y estudiantes donde el colegio  $m_{i1}$  anuncia al estudiante  $w_{i1}$ , quien anuncia al colegio  $m_{i2}$ , y así sucesivamente, hasta que  $w_{ik}$  anuncia a  $m_{i1}$ , es decir, cerrar la cadena.

# Mecanismo TTC

---

- E1 Cada estudiante anuncia su colegio de preferencia y cada colegio anuncia al estudiante prioritario.
- Ek El estudiante que aún no tiene colegio anuncia a aquellos que aún están disponibles y los colegios anuncian al estudiante prioritario libre.

## Nota

En cada ciclo, los estudiantes son asignados al colegio que anunciaron y los colegios que llenaron sus cupos se retiran. El mecanismo concluye cuando todos los estudiantes han sido asignados.

# Mecanismo TTC

## Ejemplo 8

Considere los conjuntos  $M = \{m_1, m_2, m_3\}$  y  $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$  con cupos  $q_m = (2, 2, 1)$  y preferencias:

$P^{m_1}$	$P^{m_2}$	$P^{m_3}$	$P^{w_1}$	$P^{w_2}$	$P^{w_3}$	$P^{w_4}$	$P^{w_5}$
$w_2$	$w_3$	$w_1$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_1$	$m_2$
$w_3$	$w_5$	$w_2$	$m_2$	$m_3$	$m_1$	$m_3$	$m_3$
$w_1$	$w_1$	$w_4$	$m_3$	$m_1$	$m_2$	$m_2$	$m_1$
$w_4$	$w_2$	$w_3$					
$w_5$	$w_4$	$w_5$					

**M one-sided**

---

# Conceptos

---

- Los emparejamientos unilaterales asignan bienes indivisibles.
- Sólo un lado del mercado tiene preferencias.
- Los agentes son asignados a un único bien, es decir, tiene naturaleza 1:1.
- Variantes: no hay entrantes (todos tiene una casa), no hay propietarios (todos son entrantes) y mixto.

# Asignación de casas

---

## Definition (10)

Dado un conjunto  $N$  finito y no vacío de individuos, donde cada uno es propietario de una casa. Bajo preferencias racionales y estrictas, un emparejamiento es una función biyectiva

$$\mu : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

que asigna a cada agente  $h$  la casa del agente  $\mu(h)$ .

# Asignación de casas

---

Mecanismos:

1. TTC.
2. RSD.
3. YRMH-IGYT.

# Asignación de casas

---

## Ejemplo 8

Considere un mercado de 3 agentes,  $N = 1, 2, 3$ , y 3 casas ( $h_i$ ). Las preferencias son:

$P^{i_1}$	$P^{i_2}$	$P^{i_3}$
$h_2$	$h_3$	$h_1$
$h_3$	$h_2$	$h_3$
$h_1$	$h_1$	$h_2$

## **Comentarios**

---

# Reflexiones

---

- El mecanismo de aceptación diferida necesita ser refinado.
- TTC es condicional cuando se aplica a mercados donde los agentes no tienen derechos sobre los bienes.
- La asignación de bienes indivisibles depende de la naturaleza de los que buscan una casa.
- Se puede extender el mecanismo de asignación de bienes a donación de órganos, médicos a hospitales, etc.

# References

---

-  Gale, D. and Shapley, L. *College Admissions and the Stability of Marriage*. The American Mathematical Monthly, 69(1), 1962.
-  Roth, A. and Sotomayor, M. *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*. Cambridge University Press, 1990.
-  Shapley, L and Scarf, H. *On cores and indivisibility*. Journal of Mathematical Economics, 1(1), 1974.
-  Torres, Juan Pablo. *Apuntes de Clase, Universidad de Chile*.