# EP4179 — Microeconometría

*Luis Chávez*
Universidad Nacional Agraria La Molina

2024-II
Pset5: BC

## A. Herramientas básicas

**Problema 1.** Se desea predecir la probabilidad de una variable binaria $y_i$ condicionada a un vector de regresoras:

$$x_i' = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

Asumiendo que

$$P(y_i = 1|x_i) = \Lambda(x_i'\beta) = \Lambda(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)$$

con $\beta$ un vector $3 \times 1$ y $\Lambda(\cdot)$ siendo la FDA de la distribución logit:

$$\Lambda(a) = \frac{e^a}{1 + e^a}$$

a) Si $\lambda(\cdot)$ es la densidad de la distribución logística, encontrar $\lambda(a)$.

**Solución:**

$$\begin{aligned}
\lambda(a) &= \frac{d\Lambda(a)}{da} \\
&= \frac{d}{da}\left(1 + e^{-a}\right)^{-1} \\
&= (-1)\left(1 + e^{-a}\right)^{-2}\left(e^{-a}\right)(-1) \\
&= \frac{1}{e^a + 2 + e^{-a}}
\end{aligned}$$

b) Sea el efecto marginal:

$$ef_1(x) = \frac{\partial E(y_i|x_i}{\partial x_1}$$

Hallar $ef_1(x_i)$ como una función de $(\beta, x)$.

$$\begin{aligned}
ef_1(\mathbf{x_i}) &= \frac{\partial E(y \mid \mathbf{x})}{\partial x_1} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda\left(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2\right) \\
&= \lambda\left(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2\right)\beta_1 \\
&= \frac{1}{e^{(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} + 2 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}}\beta_1
\end{aligned}$$

c) Para algún $x_i$, $ef_1(x)$ varía entre cero y $c\beta_1$, siendo $c$ una constante arbitraria. Hallar el valor de $c$.

$$\begin{aligned}\lambda\left(\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2\right) \leq \lambda(0) \\ &= \frac{1}{e^0+2+e^{-0}} \\ &= \frac{1}{1+2+1} \\ &= 0.25\end{aligned}$$

De ese modo, en el límite $c = 1/4$, de forma que el efecto parcial siempre está entre 0 y $1/4\beta_1$.

## B. Herramientas intermedias

**Problema 2.** Sea una variable aleatoria $X$ tal que $D_n = \{(y_i, x_i)\}_{i=1}^n$, donde

$$x_i' = \begin{pmatrix}1 & x_1 & x_2\end{pmatrix}$$

Asumiendo que

$$P(y_i = 1|x_i) = \Lambda(x_i'\beta) = \Lambda(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)$$

y $p(y_i = 1|x_i)$ está caracterizado por un modelo logit. Escribir la función de veroslimilitud y el log de verosimilitud en términos de $\beta$, $D_n$. Puedes sumir la forma típica de la densidad del logit.

**Solución:**

La probabilidad condicional para $i$ se puede escribir como:

$$p\left(y=y_i \mid x=x_i\right)=\Lambda\left(\mathbf{x}_i \beta\right)^{y_i}\left(1-\Lambda\left(\mathbf{x}_i \beta\right)\right)^{1-y_i}$$

Entonces, la función log de verosimilitud se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\ell_i(\beta) &= \ln p\left(y=y_i \mid x=x_i\right) \qquad \text{(por definición)} \\ &= \ln\left(\Lambda\left(\mathbf{x}_i \beta\right)^{y_i}\left(1-\Lambda\left(\mathbf{x}_i \beta\right)\right)^{1-y_i}\right) \\ &= y_i \ln \Lambda\left(\mathbf{x}_i \beta\right)+\left(1-y_i\right) \ln\left(1-\Lambda\left(\mathbf{x}_i \beta\right)\right)\end{aligned}$$

Para el conjunto de datos completos, se tiene:

$$\begin{aligned}\ell(\beta) &= \sum_{i=1}^n \ell_i(\beta) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \ln \Lambda\left(\mathbf{x}_i \beta\right)+\left(1-y_i\right) \ln\left(1-\Lambda\left(\mathbf{x}_i \beta\right)\right)\end{aligned}$$

## C. Herramientas avanzadas

**Problema 3.** Se sabe que el logit es:

$$ln\frac{p(y=1)|x_i}{1-p(y=1)|x_i} = x_i'\beta$$

$$\frac{p(y=1)|x_i}{1-p(y=1)|x_i} = exp(x_i'\beta)$$

Asumiendo el conjunto $(y, x_1, x_2)$, se define el odds-ratio:

$$OR = \frac{p(y=1)|x_1=1,x_2}{1-p(y=1)|x_1=1,x_2} \Big/ \frac{p(y=1)|x_1=0,x_2}{1-p(y=1)|x_1=0,x_2}$$

donde $x_1 = 1$ si está empleado y 0 en su defecto, $x_2$ es en nivel de herencia familiar y $y = 1$ representa si es no pobre (0 en caso contrario).

a) Probar que $OR = exp(\beta_1)$.

**Solución:**

$$\begin{aligned} OR &= \frac{p\left(y=1 \mid x_1=1, x_2\right)}{p\left(y=0 \mid x_1=1, x_2\right)} \Big/ \frac{p\left(y=1 \mid x_1=0, x_2\right)}{p\left(y=0 \mid x_1=0, x_2\right)} \\ &= e^{\beta_0+\beta_1+\beta_2 x_2} / e^{\beta_0+\beta_2 x_2} \\ &= e^{\beta_1} \end{aligned}$$

b) Sea

$$\hat{\beta}' = [\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2]$$

un estimador consistente y asintóticamente normalmente distribuido de $\beta$. Es decir:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}-\beta) \xrightarrow{\text{d}} N(0, \Sigma)$$

Definir un estimador consistente de OR como una función de $\hat{\beta}$. Si $\Sigma = \sigma^2_{OR}$, encontrar el valor de $\sigma^2_{OR}$.

**Solución:**

$$\hat{OR} = e^{\hat{\beta}_1}$$

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} \frac{\partial OR}{\partial \beta_0} & \frac{\partial OR}{\partial \beta_1} & \frac{\partial OR}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial e^{\beta_1}}{\partial \beta_0} & \frac{\partial e^{\beta_1}}{\partial \beta_1} & \frac{\partial e^{\beta_1}}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & e^{\beta_1} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por el método Delta:

$$\sqrt{n}(\hat{OR} - OR) \to^{D} N\left(0, G\Sigma G'\right)$$

y

$$
\begin{aligned}
G\Sigma G' &= \left[\begin{array}{ccc} 0 & e^{\beta_1} & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} \sigma_0^2 & \sigma_{01} & \sigma_{02} \\ \sigma_{01} & \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{02} & \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ e^{\beta_1} \\ 0 \end{array}\right] \\
&= e^{2\beta_1}\sigma_1^2
\end{aligned}
$$

Entonces, $\sigma_{OR}^2 = e^{2\beta_1}\sigma_1^2$.