UNIVERSIDAD DEL PACIFICO
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE ECONOMÍA
MICROECONOMÍA I (Todas las secciones)
SEMESTRE 2024-I

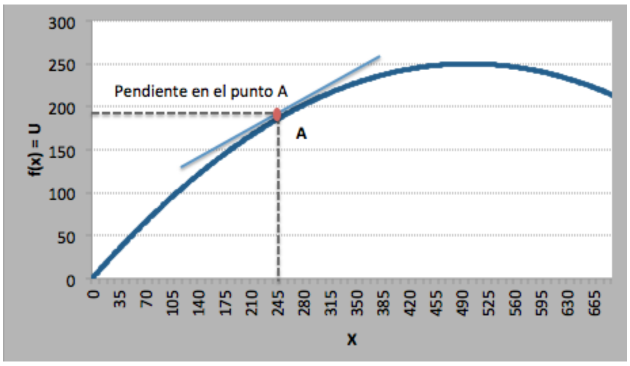
PRÁCTICA DIRIGIDA N° 1

REVISIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS E INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DEL CONSUMIDOR

1. Diferenciación

La diferenciación es el proceso matemático para la obtención de la derivada de una función. La derivada representa cómo se modifica una función ante un cambio infinitesimal en sus variables independientes. Geométricamente es la pendiente de una curva en un punto determinado (noción de marginal).

Ejemplo: Función de Utilidad $U_{(x)}$



Hallar la derivada de las siguientes funciones:

Función	Derivada
a) $Y = x^{13}$	
b) $Y = 6x^{-8}$	
c) $Y = 7x^6 + 18$	
d) $Y = (3x^2 - 13)^3$	
e) $U = x^{0,2}y^{0,8}$	
f) $U = (2x + 3)(3x^2 + 8)$	
g) $U = (5x + 8)/ (25x^3 + 1)$	
h) $Y = Ln(3x+7)^2$	
i) $Y = Ln[\frac{(2x+7)^3}{3x-8}]$	
j) $Y = (x + 4)Ln(3x + 5)$	

k) $Y = e^{\frac{2x}{3}}$	

2. Matrices:

Se definen como un agrupamiento en líneas (filas y columnas) de números, parámetros o variables. Los miembros de cada agrupamiento se denominan elementos de la matriz, suelen estar encerrados entre corchetes, paréntesis o dobles líneas verticales.

Determinante de una matriz: El determinante de una matriz cuadrada "A", se denota |A| y es un escalar (un número). Los determinantes se definen sólo para matrices cuadradas, es decir aquellas que tienen igual número de filas y de columnas.

Determinante de segundo orden. Sea una matriz A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, el determinante se define:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

Determinante de tercer orden. Sea una matriz A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, el determinante se define:

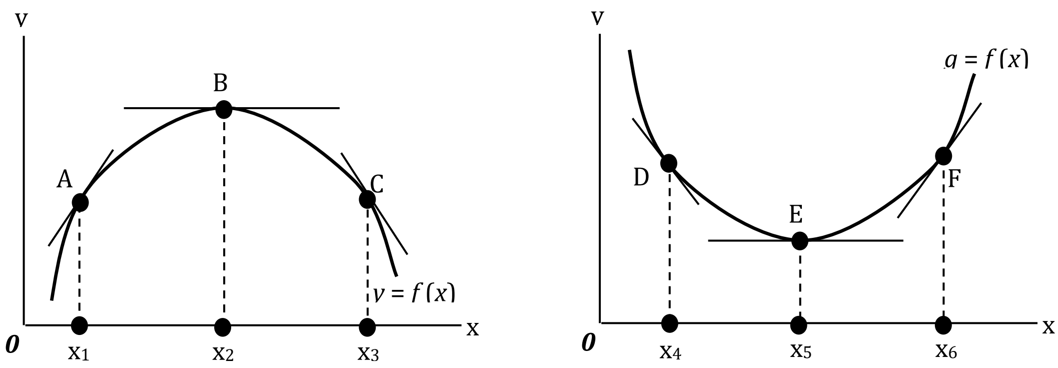
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

a) Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 8 & 9 & 0 \\ 0 & x & 5 \\ 2 & 3 & y \end{bmatrix}$$

3. Optimización

Si en:	los signos de la derivada son:		podemos ilustrarlo por:
$x = x_1$	$f'(x1) > 0$	$f''(x1) < 0$	punto A
$x = x_2$	$f'(x2) = 0$	$f''(x2) < 0$	punto B
$x = x_3$	$f'(x3) < 0$	$f''(x3) < 0$	punto C
$x = x_4$	$g'(x4) < 0$	$g''(x4) > 0$	punto D
$x = x_5$	$g'(x5) = 0$	$g''(x5) > 0$	punto E
$x = x_6$	$g'(x6) > 0$	$g''(x6) > 0$	punto F



Optimización con restricciones

Dada una función objetivo: z = $f(x, y)$
sujeta a la restricción $g(x, y) = c$
donde c es una constante, podemos escribir la función lagrangiana como

$Z = f(x, y) + \lambda \; [c - g(x, y)]$

a) Un consumidor tiene la función de utilidad $U = (x + 2)\,(y + 1)$, donde x e y corresponden a las cantidades de los dos bienes que consume regularmente. Si $P_x = 4$, $P_y = 6$ y su Ingreso = 130. Calcule qué combinación de x e y le dará la mayor utilidad dentro de las posibilidades de consumo que le da su ingreso.
b) Un consumidor tiene la función de utilidad $U = x^{0.6}\, y^{0.4}$, donde x e y corresponden a las cantidades de los dos bienes que consume regularmente. Si $P_x = 6$, $P_y = 3$ y su Ingreso = 240. Calcule qué combinación de x e y le dará la mayor utilidad dentro de las posibilidades de consumo que le da su ingreso. Asimismo, calcule cuál es el valor del multiplicador de Lagrange en el óptimo.
c) Ejercicio: Si en la función de VENTAS = f(TIEMPO) la primera derivada es positiva y la segunda negativa entonces, ¿se puede afirmar que las ventas crecen a ritmo creciente?

4. Homogeneidad de una función

Una función $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ es homogénea de grado "m" si cumple con:

$$f(kx_1, kx_2, kx_3, \dots, kx_n) = k^m f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Ejemplo: La función de la demanda ordinaria es una función homogénea de grado cero.

$$X(R, P_x) = \gamma \frac{R}{P_x}$$
$$X(\lambda R, \lambda P_x) = \gamma \frac{(\lambda R)}{(\lambda P_x)} = \lambda^0 \gamma \frac{R}{P_x}$$

Demostrar si las siguientes funciones son homogéneas e indicar el grado de homogeneidad en el caso de que lo fueran:

a) $$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

b) $f(x,y) = e^{x/y}$

c) $C(x) = x^2 + 100$

d) $f(x) = 4x^5 + 20(x)^{1/3}$

5. La integración.

La integración es la operación inversa a la diferenciación. Si la diferenciación de una función primitiva $F(x)$ conduce a la derivada $f(x)$, podemos integrar $f(x)$ para hallar $F(x)$, siempre que dispongamos de información suficiente para definir la constante arbitraria que surgirá en el proceso de integración. La función $F(x)$ se denomina una integral (o antiderivada) de la función $f(x)$. C es la constante de integración

Regla 1: regla de la potencia

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C(n \neq -1)$$

Regla 2: la regla exponencial

$$\int e^x dx = e^x + C$$
$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$$

Regla 3: la regla logarítmica

$$\int \frac{dx}{x} = Ln|x| + C(x \neq 0)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = Ln|f(x)| + C[f(x) \neq 0])$$

Regla 4: integral de una suma

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Regla 5: integral de un producto

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Regla 6: regla de la sustitución

$$\int f(u)\frac{du}{dx}dx = \int f(u)du = F(u) + C$$

Regla 7: integración por partes

$$\int vdu = uv - \int udv$$

Hallar las siguientes integrales:

a) $\int 2x^2 + x + 1 \quad dx$

b) $\int 2e^{(2x+1)} \quad dx$, dado que $x \neq 0$.

c) $\int \frac{\ln x}{x^3} \quad dx$, dado que $x \neq 0$.

d) $\int e^{2x}(x^3 + 5x^2 - 2) \quad dx$

6. Repaso de Excedente del Consumidor y Excedente del Productor

En un determinado mercado la demanda y la oferta que se enfrenta son iguales a:

P=100 – 5Q
P=20+3Q

a) Hallar el punto de equilibrio (precio y cantidad)
b) Empleando las fórmulas de integrales, hallar el Excedente del Consumidor y el Excedente del Productor

7. Curvas de Indiferencia

a) Alfredo sostiene que sus curvas de indiferencia entre dos productos A y B tienen pendiente positiva y constante. Para que ello sea cierto, analice: ¿De qué tipo de bienes tendría que tratarse? Dé ejemplos concretos de ello y explique la relación entre ambos a partir de la pendiente de la curva de indiferencia.
b) Waldir y Yordy se reúnen a tomar unos concentrados vitamínicos y comentan:
   - Yordy: "Yo no iría a ver un partido de la "U" ni aunque me pagaran por verlo".
   - Waldir: "Yo iría a ver a la "U" sólo si me pagaran por verlo".

   ¿Se pueden graficar las curvas de indiferencia de Waldir entre "Partidos de la U" e "Ingreso"?, ¿Se pueden graficar las curvas de Yordy entre "Partidos de la U" e "Ingreso"?

8. Ejercicios extra

a) Se ha afirmado que si las preferencias son transitivas entonces las curvas de indiferencia no pueden intersectarse. ¿También queda eliminada la tangencia de las curvas de indiferencia? ¿Por qué?
b) Una consecuencia directa de preferencias convexas es la de los ratios de sustitución marginales decrecientes. Mencione que sucede con la tasa marginal de sustitución cuando las preferencias dejan de ser convexas.
c) La función de utilidad de un consumidor está dada por:

   $U(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$

   c.1) Calcular las utilidades marginales y la TMgS entre los dos bienes.
   c.2) Si el $p_{x1}=1$, $p_{x2}= 1$, y el ingreso del consumidor es igual a 6. Determine gráficamente la canasta que maximiza la utilidad del consumidor.

REGLAS PARA HALLAR DERIVADAS[1]

1. Si b es una constante, entonces

$$\frac{db}{dx} = 0$$

2. Si a y b son constantes y b ≠ 0, entonces

$$\frac{dax^b}{dx} = bax^{b-1}$$

Si f = g(x), entonces

$$\frac{dg(x)^b}{dx} = bg(x)^{b-1} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

3. Si Ln significa el logaritmo en base e (e= 2,71828). Estos logaritmos se denominan logaritmos naturales.

$$\frac{dLn(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

4. Si a es una constante:

$$\frac{da^x}{dx} = a^x Ln(a)$$

Un caso particular de esta regla es $de^x/dx = e^x$. La función e^x es la única función que es su propia derivada.

5. Suponiendo que f(x) y g(x) son dos funciones de x y que f ’(x) y g ’(x) existen. En ese caso,

$$\frac{d[f(x) + g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d[f(x) \cdot g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]}{dx} = \frac{\frac{df(x)}{dx} g(x) - f(x) \frac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2}$$

6. Si y = f(x) y x = g(z) y si existen tanto f ‘(x) como g’(z), entonces,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dz} = \frac{df}{dx} \times \frac{dg}{dz}$$

[1] Fuente: Nicholson, Walter; Teoría Microeconómica, Principios básicos y aplicaciones, MCGraw-Hill, 6ta. edición, 1997.