

Hamdy A. Taha

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Décima edición



Pearson

Acceso a los recursos y programas adicionales

Para acceder a los capítulos y apéndices adicionales que se ofrecen con este libro,
así como a los programas AMPL y TORA, visite:

<http://www.biblionline.pearson.com>

Seleccione la opción Registrarse e ingrese sus datos junto con el siguiente código:
(Utilice una moneda para descubrir el código de registro.
No use objetos filosos porque podría dañar el código).



Una vez que se registre tiene sólo 2 días para descargar el material disponible.
Después de este tiempo no podrá acceder a estos archivos.

IMPORTANTE:

¡Este código de registro sólo puede usarse una vez
y no será reemplazado en caso de daño!
Asegúrese de que el código no aparezca descubierto.

Si requiere ayuda, escriba a:

[soporte@pearson.com](mailto:support@pearson.com)

Investigación de operaciones

Investigación de operaciones

Décima edición

Hamdy A. Taha

University of Arkansas, Fayetteville

TRADUCCIÓN

Jesús Elmer Murrieta Murrieta

*Maestro en investigación de operaciones
Tecnológico de Monterrey*

REVISIÓN TÉCNICA

Alicia Nandeli Mercado Zepeda

Humberto Oviedo Galdeano

Francisco García Mora

*Academias de Investigación de Operaciones
Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería
y Ciencias Sociales y Administrativas (UPIICSA)
Instituto Politécnico Nacional, México*

Marco Antonio Montúfar Benítez

*Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Tecnológico de Monterrey*

*Miembro del Programa Iberoamericano de Ciencia
y Tecnología para el Desarrollo - BIGDSSAGRO*



Pearson

Datos de catalogación bibliográfica

TAHA, HAMDY A.

Investigación de operaciones

Décima edición

Pearson Educación de México, S.A. de C.V., 2017

ISBN: 978-607-32-4121-2

Área: Ingeniería

Formato: 20 x 25.5 cm

Páginas: 848

Authorized translation from the English Language edition entitled *Operations Research An Introduction, 10th Edition*, by H. A. Taha, published by Pearson Education, Inc., Copyright © 2017. All rights reserved. ISBN 9780134444017.

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés titulada *Operations Research An Introduction, 10^a Edición*, por H. A. Taha, publicada por Pearson Education, Inc., Copyright © 2017. Todos los derechos reservados.

Edición en español

Director general: Sergio Fonseca ■ **Director de innovación y servicios educativos:** Alan David Palau ■ **Gerente de contenidos y servicios editoriales:** Jorge Luis Íñiguez ■ **Gerente de arte y diseño:** Asbel Ramírez ■ **Coordinador de contenidos de Educación Superior:** Guillermo Domínguez Chávez ■ **Coordinadora de arte y diseño:** Mónica Galván ■ **Editora especialista en desarrollo de contenidos:** Rosa Díaz Sandoval ■ **Editor de desarrollo:** Bernardino Gutiérrez Hernández ■ **Traductor:** Jesús Elmer Murrieta Murrieta ■ **Corrector de estilo:** Felipe Hernández Carrasco ■ **Gestor de arte y diseño:** José Hernández Garduño ■ **Lector de pruebas:** Vicente Gutiérrez ■ **Composición y diagramación:** FOCA Grupo Editorial

Esta edición en español es la única autorizada.

Contacto: soporte@pearson.com

Décima edición, 2017

ISBN LIBRO IMPRESO: 978-607-32-4121-2

D.R. © 2017 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

ISBN LIBRO E-BOOK: 978-607-32-4120-5

Avenida Antonio Dovalí Jaime núm. 70

Torre B, Piso 6, Colonia Zedec Ed. Plaza Santa Fe

Delegación Álvaro Obregón, México, Ciudad de México, C. P. 01210

www.pearsonenespañol.com

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 20 19 18 17



Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

Pearson Hispanoamérica

Argentina ■ Belice ■ Bolivia ■ Chile ■ Colombia ■ Costa Rica ■ Cuba ■ República Dominicana ■ Ecuador ■ El Salvador ■ Guatemala
■ Honduras ■ México ■ Nicaragua ■ Panamá ■ Paraguay ■ Perú ■ Uruguay ■ Venezuela

A Karen

Los ríos no llevan agua,
el sol las fuentes secó ...
¡Yo sé donde hay una fuente
que no ha de secar el sol!
La fuente que no se agota
es mi propio corazón ...

— V. Ruiz Aguilera (1862)

Contenido

Lo nuevo de la décima edición xxiii

Agradecimientos xxv

Acerca del autor xxvii

Marcas registradas xxix

Capítulo 1 ¿Qué es la investigación de operaciones? 1

- 1.1 Introducción 1
- 1.2 Modelos de investigación de operaciones 1
- 1.3 Solución del modelo de IO 4
- 1.4 Modelos de colas y de simulación 5
- 1.5 El arte del modelado 6
- 1.6 Más que sólo matemáticas 7
- 1.7 Fases de un estudio de IO 9
- 1.8 Acerca de este libro 11
- Bibliografía 11
- Problemas 12

Capítulo 2 Modelado con programación lineal 15

- 2.1 Modelo de PL con dos variables 15
- 2.2 Solución gráfica de PL 17
 - 2.2.1 Solución de un modelo de maximización 18
 - 2.2.2 Solución de un modelo de minimización 20
- 2.3 Solución por computadora con Solver y AMPL 22
 - 2.3.1 Solución de PL con Excel Solver 22
 - 2.3.2 Solución de PL con AMPL 26
- 2.4 Aplicaciones de programación lineal 29
 - 2.4.1 Inversión 30
 - 2.4.2 Planeación de la producción y control del inventario 32
 - 2.4.3 Planeación de la fuerza de trabajo 37
 - 2.4.4 Planeación del desarrollo urbano 40
 - 2.4.5 Mezcla y refinación 43
 - 2.4.6 Aplicaciones adicionales de PL 46
- Bibliografía 46
- Problemas 46

Capítulo 3 Método simplex y análisis de sensibilidad 69

- 3.1 Modelo de PL en forma de ecuación 69
- 3.2 Transición de la solución gráfica a la algebraica 70
- 3.3 Método simplex 73
 - 3.3.1 Naturaleza iterativa del método simplex 73
 - 3.3.2 Detalles de cálculo del algoritmo simplex 75
 - 3.3.3 Resumen del método simplex 81
- 3.4 Solución artificial inicial 82
 - 3.4.1 Método M 82
 - 3.4.2 Método de las dos fases 85
- 3.5 Casos especiales en el método simplex 87
 - 3.5.1 Degeneración 88
 - 3.5.2 Óptimos alternativos 89
 - 3.5.3 Solución no acotada 91
 - 3.5.4 Solución no factible (o no existente) 92
- 3.6 Análisis de sensibilidad 93
 - 3.6.1 Análisis de sensibilidad gráfico 94
 - 3.6.2 Análisis de sensibilidad algebraica: Cambios en el lado derecho 98
 - 3.6.3 Análisis de sensibilidad algebraica: Función objetivo 102
 - 3.6.4 Análisis de sensibilidad con TORA, Solver y AMPL 106
- 3.7 Temas de cálculo en la programación lineal 108
 - Bibliografía 112
 - Estudio de caso: Optimización de la producción de válvulas cardíacas 112
 - Problemas 115

Capítulo 4 Dualidad y análisis postóptimo 139

- 4.1 Definición del problema dual 139
- 4.2 Relaciones primal-dual 142
 - 4.2.1 Repaso de operaciones con matrices simples 142
 - 4.2.2 Diseño de la tabla simplex 143
 - 4.2.3 Solución dual óptima 144
 - 4.2.4 Cálculos en la tabla simplex 147
- 4.3 Interpretación económica de la dualidad 148
 - 4.3.1 Interpretación económica de las variables duales 149
 - 4.3.2 Interpretación económica de las restricciones duales 150
- 4.4 Algoritmos simplex adicionales 152
 - 4.4.1 Algoritmo simplex dual 152
 - 4.4.2 Algoritmo simplex generalizado 154

4.5 Análisis postóptimo	155
4.5.1 Cambios que afectan la factibilidad	156
4.5.2 Cambios que afectan la optimalidad	159
Bibliografía	162
Problemas	162

Capítulo 5 Modelo de transporte y sus variantes 177

5.1 Definición del modelo de transporte	177
5.2 Modelos de transporte no tradicionales	181
5.3 Algoritmo de transporte	184
5.3.1 Determinación de la solución inicial	186
5.3.2 Cálculos iterativos del algoritmo de transporte	190
5.3.3 Explicación del método de los multiplicadores usando el método simplex	196
5.4 Modelo de asignación	197
5.4.1 Método húngaro	197
5.4.2 Explicación del método húngaro con simplex	200
Bibliografía	201
Estudio de caso: Programación de citas en eventos comerciales de la Comisión de Turismo Australiana	202
Problemas	206

Capítulo 6 Modelo de redes 217

6.1 Alcance y definición de modelos de redes	217
6.2 Algoritmo del árbol de expansión mínima	220
6.3 Problema de la ruta más corta	221
6.3.1 Ejemplos de aplicaciones de la ruta más corta	222
6.3.2 Algoritmos de la ruta más corta	225
6.3.3 Formulación de programación lineal del problema de la ruta más corta	231
6.4 Modelo de flujo máximo	235
6.4.1 Enumeración de cortes	236
6.4.2 Algoritmo de flujo máximo	237
6.4.3 Formulación de programación lineal en el modo de flujo máximo	242
6.5 CPM y PERT	243
6.5.1 Representación en red	244
6.5.2 Cálculos en el método de la ruta crítica (CPM)	246
6.5.3 Construcción del cronograma	249

6.5.4	Formulación de programación lineal de CPM	252
6.5.5	Redes PERT	253
Bibliografía		255
Estudio de caso: Ahorro de recursos federales para viajes		256
Problemas		259

Capítulo 7 Programación lineal avanzada 275

7.1	Fundamentos del método simplex	275
7.1.1	De puntos extremos a soluciones básicas	276
7.1.2	Tabla simplex generalizada en forma matricial	279
7.2	Método simplex revisado	281
7.2.1	Desarrollo de las condiciones de optimalidad y factibilidad	281
7.2.2	Algoritmo simplex revisado	282
7.2.3	Aspectos computacionales en el método simplex revisado	285
7.3	Algoritmo de variables acotadas	287
7.4	Dualidad	292
7.4.1	Definición matricial del problema dual	292
7.4.2	Solución dual óptima	292
7.5	Programación lineal paramétrica	295
7.5.1	Cambios paramétricos en C	295
7.5.2	Cambios paramétricos en b	297
7.6	Más temas de programación lineal	299
Bibliografía		300
Problemas		300

Capítulo 8 Programación de metas 311

8.1	Formulación de una programación de metas	311
8.2	Algoritmos de programación de metas	313
8.2.1	Método de los pesos	313
8.2.2	Método preventivo	315
Bibliografía		320
Estudio de caso: Asignación de tiempo de quirófano en el Hospital Monte Sinaí		320
Problemas		324

Capítulo 9 Programación lineal entera 329

9.1	Aplicaciones ilustrativas	329
9.1.1	Presupuesto de capital	330
9.1.2	Problema de cobertura de conjunto	331

- 9.1.3 Problema de cargo fijo 332
- 9.1.4 Restricciones uno-u-otro y si-entonces 334

9.2 Algoritmos de programación entera 336

- 9.2.1 Algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B) 337
- 9.2.2 Algoritmo de plano cortante 343

Bibliografía 348**Problemas 349****Capítulo 10 Programación heurística 367****10.1 Introducción 367****10.2 Heurística codicioso (búsqueda local) 368**

- 10.2.1 Heurística de variable discreta 369
- 10.2.2 Heurística de variable continua 371

10.3 Metaheurística 374

- 10.3.1 Algoritmo de búsqueda tabú 374

Resumen del algoritmo de búsqueda tabú 378

- 10.3.2 Algoritmo de recocido simulado 378

Resumen del algoritmo de recocido simulado 380

- 10.3.3 Algoritmo genético 381

Resumen del algoritmo genético 384

10.4 Aplicación de metaheurística a programas lineales enteros 385

- 10.4.1 Algoritmo tabú aplicado a un PLE 386

- 10.4.2 Algoritmo de recocido simulado aplicado a una PLE 388

- 10.4.3 Algoritmo genético aplicado a la PLE 390

10.5 Introducción a la programación de restricciones (PR) 393**Bibliografía 395****Problemas 395****Capítulo 11 Problema del agente viajero (TSP) 405****11.1 Alcances del TSP 405****11.2 Modelo del TSP matemático 407****11.3 Algoritmos del TSP exactos 411**

- 11.3.1 Algoritmo B&B 411

- 11.3.2 Algoritmo del plano cortante 414

11.4 Heurísticas de búsqueda local 415

- 11.4.1 Heurística del vecino más cercano 415

- 11.4.2 Heurística de inversión 416

11.5 Metaheurísticas 419

- 11.5.1 Algoritmo tabú aplicado al modelo del TSP 419

- 11.5.2 Algoritmo de recocido simulado aplicado al modelo del TSP 422

11.5.3 Algoritmo genético del TSP 424

Bibliografía 428

Problemas 428

Capítulo 12 Programación dinámica determinística 439

12.1 Naturaleza recursiva de los cálculos de programación dinámica (PD) 439

12.2 Recursividad de avance y de retroceso 443

12.3 Aplicaciones de PD seleccionadas 444

12.3.1 Modelo de la mochila/equipo de vuelo/carga de contenedor 445

12.3.2 Modelo de tamaño de la fuerza laboral 450

12.3.3 Modelo de reemplazo de equipo 452

12.3.4 Modelo de inversión 455

12.3.5 Modelos de inventario 458

12.4 Problema de dimensionalidad 458

Bibliografía 460

Estudio de caso: Optimización del corte de árboles y asignación de troncos en Weyerhaeuser 461

Problemas 464

Capítulo 13 Modelos de inventario (con introducción a las cadenas de suministro) 471

13.1 Problema de inventario: una perspectiva de la cadena de suministro 471

13.1.1 Una métrica de inventario en las cadenas de suministro 472

13.1.2 Elementos del modelo de optimización del inventario 474

13.2 El papel de la demanda en el desarrollo de modelos de inventario 475

13.3 Modelos estáticos de la cantidad económica de pedido (EOQ) 477

13.3.1 Modelo EOQ clásico 477

13.3.2 EOQ con reducciones de precios 481

13.3.3 EOQ de varios artículos con limitación de almacenamiento 484

13.4 Modelos dinámicos de la EOQ 487

13.4.1 Modelo de EOQ sin costo de preparación 488

13.4.2 Modelo de EOQ con costo de preparación 491

13.5 Problemas pegajosos en el modelado de inventarios 500

Bibliografía 501

Estudio de caso: Kroger mejora la gestión de inventarios de farmacia 501

Problemas 505

Capítulo 14 Repaso de probabilidad básica 513

- 14.1 Leyes de probabilidad 513**
 - 14.1.1 Ley de la adición de probabilidad 514
 - 14.1.2 Ley de probabilidad condicional 514
- 14.2 Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad 515**
- 14.3 Esperanza de una variable aleatoria 517**
 - 14.3.1 Media y varianza (desviación estándar) de una variable aleatoria 517
 - 14.3.2 Variables aleatorias conjuntas 518
- 14.4 Cuatro distribuciones de probabilidad comunes 521**
 - 14.4.1 Distribución binomial 521
 - 14.4.2 Distribución de Poisson 521
 - 14.4.3 Distribución exponencial negativa 522
 - 14.4.4 Distribución normal 523
- 14.5 Distribuciones empíricas 525**
 - Bibliografía 530
 - Problemas 530

Capítulo 15 Análisis de decisiones y juegos 537

- 15.1 Toma de decisiones bajo certidumbre: proceso de jerarquía analítica (PJA) 537**
- 15.2 Toma de decisiones bajo riesgo 544**
 - 15.2.1 Árbol de decisiones con base en el criterio del valor esperado 544
 - 15.2.2 Variantes del criterio del valor esperado 546
- 15.3 Decisión bajo incertidumbre 551**
- 15.4 Teoría de juegos 555**
 - 15.4.1 Solución óptima de juegos de suma cero entre dos personas 555
 - 15.4.2 Solución de juegos con estrategias combinadas 557
- Bibliografía 562
- Estudio de caso: Límites en las reservaciones de un hotel 563
- Problemas 565

Capítulo 16 Modelos de inventario probabilísticos 581

- 16.1 Modelos de revisión continua 581**
 - 16.1.1 Modelo EOQ “probabilizado” 581
 - 16.1.2 Modelo EOQ probabilístico 583
- 16.2 Modelos de un solo periodo 587**
 - 16.2.1 Modelo sin costo de preparación (del vendedor de periódicos) 588
 - 16.2.2 Modelo con costo de preparación (política $s-S$) 590

16.3	Modelo de varios períodos múltiples	593
	Bibliografía	595
	Problemas	595

Capítulo 17 Cadenas de Markov 599

17.1	Definición de una cadena de Markov	599
17.2	Probabilidades de transición absolutas y de n pasos	602
17.3	Clasificación de los estados en una cadena de Markov	603
17.4	Probabilidades de estado estable y tiempos de retorno promedio de cadenas ergódicas	604
17.5	Tiempo de primera visita	606
17.6	Análisis de los estados absorbentes	609
	Bibliografía	612
	Problemas	612

Capítulo 18 Sistemas de colas 623

18.1	¿Por qué estudiar las colas?	623
18.2	Elementos de un modelo de colas	624
18.3	Papel de la distribución exponencial	626
18.4	Modelos de nacimiento y muerte puros (relación entre las distribuciones exponencial y de Poisson)	627
18.4.1	Modelo de nacimiento puro	628
18.4.2	Modelo de muerte pura	631
18.5	Modelo de colas general de Poisson	632
18.6	Colas de Poisson especializadas	635
18.6.1	Medidas de desempeño de estado estable	637
18.6.2	Modelos de un solo servidor	640
18.6.3	Modelos de varios servidores	644
18.6.4	Modelo de servicio de máquinas—($M/M/R$): ($GD/K/K$), $R < K$	650
18.7	($M/G/1$):($GD/\infty/\infty$)—Fórmula de Pollaczek-Khintchine (P-K)	652
18.8	Otros modelos de colas	653
18.9	Modelos de decisión en colas	654
18.9.1	Modelos de costos	654
18.9.2	Modelo del nivel de aspiración	656
	Bibliografía	658

Estudio de caso: Análisis de un sistema de transporte interno en una planta de manufactura 658
Problemas 660

Capítulo 19 Modelado de simulación 681

- 19.1 Simulación de Montecarlo 681
- 19.2 Tipos de simulación 685
- 19.3 Elementos de la simulación de evento discreto 685
 - 19.3.1 Definición genérica de los eventos 685
 - 19.3.2 Muestreo a partir de distribuciones de probabilidad 686
- 19.4 Generación de números aleatorios 690
- 19.5 Mecánica de la simulación discreta 692
 - 19.5.1 Simulación manual de un modelo de un solo servidor 692
 - 19.5.2 Simulación basada en hoja de cálculo del modelo de un solo servidor 696
- 19.6 Métodos para reunir observaciones estadísticas 698
 - 19.6.1 Método de subintervalos 699
 - 19.6.2 Método de réplica 700
- 19.7 Lenguajes de simulación 701
 - Bibliografía 703
 - Problemas 703

Capítulo 20 Teoría de optimización clásica 711

- 20.1 Problemas no restringidos 711
 - 20.1.1 Condiciones necesarias y suficientes 712
 - 20.1.2 Método de Newton-Raphson 714
- 20.2 Problemas restringidos 716
 - 20.2.1 Restricciones de igualdad 717
 - 20.2.2 Restricciones de desigualdad: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 724
- Bibliografía 728
- Problemas 728

Capítulo 21 Algoritmos de programación no lineal 733

- 21.1 Algoritmos no restringidos 733
 - 21.1.1 Método de búsqueda directa 733
 - 21.1.2 Método del gradiente 736
- 21.2 Algoritmos restringidos 739
 - 21.2.1 Programación separable 740
 - 21.2.2 Programación cuadrática 747

21.2.3 Programación estocástica	751
21.2.4 Método de combinaciones lineales	755
21.2.5 Algoritmo SUMT	757
Bibliografía	758
Problemas	758

Apéndice A Tablas estadísticas 763

Apéndice B Respuestas parciales a problemas seleccionados 767

Índice 803

Material disponible en el sitio Web del libro

(www.pearsonenespañol.com/taha)

(se requiere código de acceso)

Chapter 22 Additional Network and LP Algorithms 22.1

22.1 Minimum-Cost Capacitated Flow Problem 22.1
22.1.1 Network Representation 22.1
22.1.2 Linear Programming Formulation 22.2
22.1.3 Capacitated Network Simplex Algorithm 22.6
22.2 Decomposition Algorithm 22.13
22.3 Karmarkar Interior-Point Method 22.21
22.3.1 Basic Idea of the Interior-Point Algorithm 22.21
22.3.2 Interior-Point Algorithm 22.22
Bibliography 22.31
Problems 22.31

Chapter 23 Forecasting Models 23.1

23.1 Moving Average Technique 23.1
23.2 Exponential Smoothing 23.3
23.3 Regression 23.4
Bibliography 23.8
Problems 23.8

Chapter 24 Probabilistic Dynamic Programming 24.1

24.1 A Game of Chance 24.1
24.2 Investment Problem 24.3
24.3 Maximization of the Event of Achieving a Goal 24.6
Bibliography 24.9
Problems 24.9

Chapter 25 Markovian Decision Process 25.1

25.1 Scope of the Markovian Decision Problem 25.1
25.2 Finite-Stage Dynamic Programming Model 25.2
25.2.1 Exhaustive Enumeration Method 25.5
25.2.2 Policy Iteration Method without Discounting 25.8
25.2.3 Policy Iteration Method with Discounting 25.11

25.3 Linear Programming Solution 25.13

Bibliography 25.17

Problems 25.17

Chapter 26 Case Analysis 26.1

Case 1: Airline Fuel Allocation Using Optimum Tankering 26.2

Case 2: Optimization of Heart Valves Production 26.9

Case 3: Scheduling Appointments at Australian Tourist Commission Trade Events 26.13

Case 4: Saving Federal Travel Dollars 26.17

Case 5: Optimal Ship Routing and Personnel Assignment for Naval Recruitment in Thailand 26.21

Case 6: Allocation of Operating Room Time in Mount Sinai Hospital 26.29

Case 7: Optimizing Trailer Payloads at PFG Building Glass 26.33

Case 8: Optimization of Crosscutting and Log Allocation at Weyerhaeuser 26.41

Case 9: Layout Planning for a Computer Integrated Manufacturing (CIM) Facility 26.45

Case 10: Booking Limits in Hotel Reservations 26.53

Case 11: Casey's Problem: Interpreting and Evaluating a New Test 26.56

Case 12: Ordering Golfers on the Final Day of Ryder Cup Matches 26.59

Case 13: Kroger Improves Pharmacy Inventory Management 26.61

Case 14: Inventory Decisions in Dell's Supply Chain 26.65

Case 15: Forest Cover Change Prediction Using Markov Chain Model: A Case Study on Sub-Himalayan Town Gangtok, India 26.69

Case 16: Analysis of an Internal Transport System in a Manufacturing Plant 26.72

Case 17: Telephone Sales Workforce Planning at Qantas Airways 26.74

Appendix C AMPL Modeling Language C.1

C.1 Rudimentary AMPL Model C.1

C.2 Components of AMPL Model C.2

C.3 Mathematical Expressions and Computed Parameters C.9

C.4 Subsets and Indexed Sets C.12

C.5 Accessing External Files	C.13
C.6 Interactive Commands	C.20
C.7 Iterative and Conditional Execution of AMPL Commands	C.22
C.8 Sensitivity Analysis using AMPL	C.23
C.9 Selected AMPL Models	C.23
Bibliography C.36	
Problems C.36	

Appendix D Review of Vectors and Matrices **D.1**

D.1 Vectors	D.1
D.2 Matrices	D.2
D.3 Quadratic Forms	D.14
D.4 Convex and Concave Functions	D.15
Selected References D.15	
Problems D.16	

Appendix E Case Studies **E.1**

Lista de Momentos, ¡ajá!

- Capítulo 1:** Ada Lovelace, la primera programadora de algoritmos (p. 5)
- Capítulo 3:** El nacimiento de la optimización o de cómo Dantzig desarrolló el método simplex (p. 75)
- Capítulo 5:** Breve historia del modelo de transporte (p. 181)
El lado brillante de los cálculos manuales: ¡Modelo de transporte clásico! (p. 184)
Cualquiera que sea su nombre, el método de la esquina noroeste presume una simplicidad elegante (p. 189)
- Capítulo 6:** ¡Se dice que una imagen vale más que mil palabras! (p. 220)
- Capítulo 7:** Primeras implementaciones del algoritmo simplex o cómo surgió el uso de la forma del producto de la inversa (p. 287)
- Capítulo 8:** Satisfactorio contra máximo o cuánto tiempo añesar el vino (p. 314)
- Capítulo 9:** Desarrollo seminal del corte de Dantzig-Fulkerson-Johnson (p. 348)
- Capítulo 10:** Heurística para la toma de decisiones temprana: La regla de Franklin (p. 368)
- Capítulo 11:** El primer modelo matemático en arqueología, o cómo “seriar” tumbas egipcias antiguas usando el TSP (p. 406)
Experiencia computacional del TSP o ¡cómo reproducir la Mona Lisa de Leonardo da Vinci! (p. 418)
- Capítulo 12:** Solución al problema del matrimonio... ¡con programación dinámica! (p. 442)
- Capítulo 13:** Historia de la EOQ o ¡dando crédito a quien lo merece! (p. 480)
- Capítulo 14:** Enseñanza (de probabilidad) mediante un ejemplo: ¡El desafío del cumpleaños! (p. 513)
Mark Twain crea una mala fama de la “estadística” (p. 529)
- Capítulo 15:** Una lotería del siglo XVIII que ofrece un pago esperado infinito, ¿o no? (p. 549)
¡El nombre del juego debería ser “cooperación”! (p. 559)
- Capítulo 17:** ¡El correo basura se vuelve markoviano! (p. 601)
- Capítulo 18:** Percepción de la espera y ¡el factor cultural! (p. 625)
Los últimos serán los primeros... o ¡cómo hacer que las filas de espera avancen más rápido! (p. 636)
- Capítulo 19:** Planeación de la jubilación en línea: ¡El método de Montecarlo! (p. 683)

Lo nuevo de la décima edición

Durante las últimas ediciones de este texto me angustiaba la utilidad de seguir incluyendo los algoritmos de cálculo manuales que, a mi modo de ver, quedaban obsoletos debido a los grandes avances de la computación. Ya no tengo esa angustia porque solicité y recibí comentarios de colegas al respecto. El consenso fue que los algoritmos clásicos deben conservarse porque forman parte importante de la historia de la investigación de operaciones (IO). Algunas respuestas incluso incluyeron posibles escenarios (ahora considerados en esta edición) donde los algoritmos clásicos suelen ser muy benéficos en la práctica.

En el espíritu de la sabiduría colectiva de mis colegas, a la que ahora me adhiero con entusiasmo, he agregado a lo largo del libro unas 25 secciones tituladas *Momento, ¡ajá!*, las cuales están escritas básicamente en un estilo informal, y tratan de anécdotas/historias (algunas de ellas de hace siglos) y de conceptos (teoría, aplicaciones, cálculos y metodología de la enseñanza) de la IO. El objetivo es ofrecer una perspectiva histórica de las raíces de la IO (y esperamos que haga este libro “más ameno” en su lectura).

Otros cambios y adiciones en esta nueva edición incluyen:

- Se presenta el modelado de inventarios dentro del contexto más amplio de las cadenas de suministro (a través de una breve introducción).
- Nuevas secciones sobre aspectos computacionales en el método simplex (sección 7.2.3) y en los inventarios (sección 13.5).
- Dos nuevos análisis de casos, para un total de 17 aplicaciones de la vida real, totalmente desarrolladas. Estos casos aparecen en el capítulo 26, que se ofrece en inglés en el sitio web, como material adicional (requiere código de acceso) al cual se hace referencia en el libro. Una cantidad selecta de esos casos aparece en el libro impreso (hubiera deseado incluirlos todos en los capítulos con mayor aplicación, pero la extensión del libro impreso lo harían inmanejable).
- Todos los problemas ahora aparecen al final de sus respectivos capítulos (a petición expresa de los lectores) con referencias a ellos en las secciones del texto donde son más útiles.
- Se incorporaron problemas inéditos.
- El software TORA fue actualizado y se puede adquirir en el sitio web del libro (requiere código de acceso).

Las instrucciones para consultar el material adicional, el cual se encuentra en inglés, se proporcionan en el sitio web del libro (www.pearsonenespañol.com/taha).

Agradecimientos

Saludo a mis lectores —estudiantes, profesores y practicantes de IO— por su confianza y apoyo durante los últimos 45 años. Agradezco especialmente a los siguientes colegas que aportaron comentarios valiosos en respuesta a mi propuesta de la décima edición: Bhaba Sarker (Louisiana State University), Michael Fraboni (Moravian College), Layek Abdel-Malek (New Jersey Institute of Technology), James Smith (University of Massachusetts), Hansuk Sohn (New Mexico State University), Elif Kongar (University of Bridgeport), Sung, Chung-Hsien (University of Illinois) y Kash A. Barker (University of Oklahoma).

El profesor Michael Trick (Carnegie Mellon University) proporcionó argumentos perspicaces respecto de la importancia de continuar incluyendo los algoritmos clásicos (cálculos manuales) de antaño en el libro y ahora comparto con entusiasmo la esencia de su argumento: “No me haría feliz ver el día en que el algoritmo húngaro se perdiera en nuestros libros de texto”.

Quisiera agradecer también al profesor Donald Erlenkotter (University of California, Los Ángeles) por sus comentarios sobre el material en los capítulos de inventarios, y al profesor Xinhui Zhang (Wright State University) por su aportación durante la preparación del estudio de caso sobre inventarios. Deseo agradecer asimismo a los profesores Hernan Abeledo (The George Washington University), Ali Diabat (Masdar Institute of Science and Technology, Abu Dhabi, EAU), Robert E. Lewis (University of Alabama, Huntsville), Scott Long (Liberty University) y Daryl Santos (Binghamton University) por señalar discrepancias en la novena edición y hacer sugerencias para la décima.

Ofrezco un agradecimiento y un reconocimiento especiales a los equipos editorial y de producción de Pearson por su valiosa ayuda durante la preparación de esta edición: Marcia Horton (vicepresidenta/directora editorial de Ingeniería y Computación), Holly Stark (editora ejecutiva), Scott Disanno (gerente editorial), George Jacob (gerente de proyecto), Erin Ault (gerente de Programación) y Amanda Brands (asistente editorial).

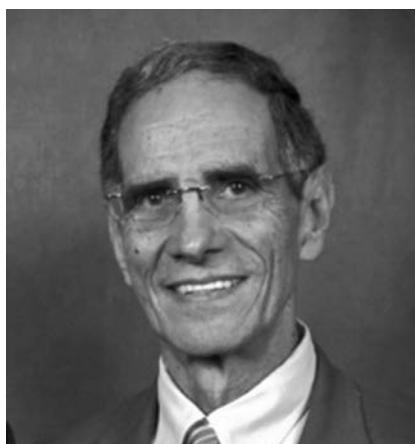
Es un gran placer reconocer a Jack Neifert, el primer editor de adquisiciones en mi antigua editorial Macmillan, quien en 1972, un año después de la publicación de la primera edición, predijo que “este sería un libro con una larga vida”. La décima edición es un buen testimonio de la exactitud del pronóstico de Jack.

Agradezco a Tamara Ellenbecker, Carrie Pennington, Matthew Sparks y Karen Standly, todos del departamento de Ingeniería Industrial de la University of Arkansas, por su gran ayuda (y paciencia) durante la preparación de la décima edición.

Mi hijo Sharif, aunque es neurocientífico, ofreció una crítica perspicaz a las secciones *Momento, ¡ajá!* de esta edición.

HAMDY A. TAHA
hat@uark.edu

Acerca del autor



Hamdy A. Taha es profesor emérito de ingeniería industrial en la University of Arkansas, donde es investigador y docente en investigación de operaciones y simulación. Es autor de otros tres libros sobre programación entera y simulación, y sus obras han sido traducidas a varios idiomas. También es autor de varios capítulos de libros, y sus artículos técnicos han aparecido en revistas sobre investigación de operaciones y ciencias de la administración.

El profesor Taha ha recibido premios universitarios por su excelencia en investigación y docencia, así como numerosos reconocimientos por investigación y enseñanza por parte del Colegio de Ingeniería de la University of Arkansas. También recibió el nombramiento de becario Fulbright Senior de la Universidad Carlos III de Madrid, España. Domina tres idiomas y se ha desempeñado como profesor y consultor en Europa, México y Medio Oriente.

Marcas registradas

AMPL es una marca registrada de AMPL Optimization, LLC, 900 Sierra Place SE, Albuquerque, NM 87108-3379, EUA.

CPLEX es una marca registrada de ILOG, Inc., IBM Corporation, 1 New Orchard Road, Armonk, Nueva York, 10504-1722.

KNITRO es una marca registrada de Ziena Optimization Inc., 1801 Maple Ave, Suite 6320, mailbox #55, Evanston IL, 60201.

LOQO es una marca registrada de Princeton University, Princeton University, Princeton, NJ, 08544.

Microsoft es una marca registrada y Windows y Excel son marcas registradas de Microsoft Corporation, One Microsoft Way Redmond, WA, 98052-7329.

MINOS es una marca registrada de Stanford University, 450 Serra Mall, Stanford, CA 94305.

Solver es una marca registrada de Frontline Systems, Inc., P.O. Box 4288, Incline Village, NV 89450.

TORA es una marca registrada de Hamdy A. Taha.

CAPÍTULO 1

¿Qué es la investigación de operaciones?

1.1 INTRODUCCIÓN

Las primeras actividades formales de la investigación de operaciones (IO) se iniciaron en Inglaterra durante la Segunda Guerra Mundial, cuando un equipo de científicos británicos empezó a evaluar la mejor utilización del material bélico usando principios científicos en vez de reglas *ad hoc*. Al término de la guerra, las ideas formuladas en operaciones militares se adaptaron para mejorar la eficiencia y la productividad en el sector civil.

En este capítulo se presenta la terminología básica de la IO, que comprende el modelado matemático, las soluciones factibles, la optimización y los cálculos algorítmicos iterativos. Se hace hincapié en que la definición correcta del problema es la fase más importante (y más difícil) en la práctica de la IO. También se enfatiza que, aunque el modelado matemático es la piedra angular de la IO, en la decisión final se deben tomar en cuenta factores incuantificables (como el comportamiento humano). En el libro se presentan varias aplicaciones que utilizan ejemplos resueltos y problemas incluidos en los capítulos. En particular, se incluyen análisis de casos totalmente desarrollados al final de cada capítulo.

1.2 MODELOS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Considere el siguiente **problema de compra de boletos**. Un empresario requiere 5 semanas de traslado entre Fayetteville (FYV) y Denver (DEN). Las salidas semanales de Fayetteville son los lunes para regresar los miércoles. Un boleto regular de viaje redondo cuesta \$400, pero se ofrece 20% de descuento si el viaje redondo comprende un fin de semana. Un boleto sencillo en cualquier dirección cuesta 75% del precio regular. ¿Cómo se deberían comprar los boletos para el periodo de 5 semanas?

La situación se puede considerar como un problema de toma de decisiones, cuya solución requiere responder tres preguntas:

1. ¿Cuáles son las **alternativas** de decisión?
2. ¿Con qué **restricciones** se toma la decisión?
3. ¿Cuál es el **criterio objetivo** adecuado para evaluar las alternativas?

Se consideran tres alternativas posibles:

1. Comprar cinco boletos normales FYV-DEN-FYV para salir el lunes y regresar el miércoles de la misma semana.
2. Comprar un boleto FYV-DEN, cuatro DEN-FYV-DEN que abarquen fines de semana, y uno DEN-FYV.
3. Comprar un boleto FYV-DEN-FYV para el lunes de la primera semana y el miércoles de la última semana, y cuatro DEN-FYV-DEN para los viajes restantes. Todos los boletos en esta alternativa cubren por lo menos un fin de semana.

La restricción en estas opciones es que el empresario salga de FYV el lunes y regrese el miércoles de la misma semana.

Un criterio objetivo evidente para evaluar las alternativas propuestas es el precio de los boletos. La alternativa que dé el costo mínimo será la mejor. Específicamente, se tiene:

$$\text{Costo de la alternativa 1} = 5 \times \$400 = \$2000$$

$$\text{Costo de la alternativa 2} = .75 \times \$400 + 4 \times (.8 \times \$400) + .75 \times \$400 = \$1880$$

$$\text{Costo de la alternativa 3} = 5 \times (.8 \times \$400) = \$1600$$

La alternativa 3 es la más económica.

Aunque el ejemplo anterior ilustra los tres componentes principales de un modelo de IO —alternativas, criterio objetivo y restricciones— las situaciones difieren por los detalles de la construcción de cada componente y la solución del modelo resultante. Para ilustrar este punto, considere el siguiente **problema del jardín**: El propietario de una casa está a punto de empezar un jardín de vegetales en su patio trasero. El jardín debe formar un rectángulo para facilitar el riego de las parcelas. Con la finalidad de mantener fuera a los animales, el jardín necesita una cerca. El propietario cuenta con el material suficiente para construir una cerca de longitud $L = 100$ ft. La meta es cercar la mayor área rectangular posible.

En contraste con el ejemplo de los boletos, donde el número de alternativas es finito, en este ejemplo el número de alternativas es infinito; es decir, el *ancho* y la *altura* del rectángulo pueden asumir (teóricamente) una cantidad infinita de valores entre 0 y L . En este caso, el ancho y la altura son **variables continuas**.

Debido a que las variables del problema son continuas, resulta imposible encontrar la solución mediante enumeración exhaustiva. Sin embargo, se *percibe* la tendencia hacia el mejor valor del área del jardín, mediante la colocación de valores crecientes del ancho (y, por lo tanto, disminuyendo los valores de la altura). Por ejemplo, para $L = 100$ ft, las combinaciones (ancho, altura) = (10, 40), (20, 30), (25, 25), (30, 20) y (40, 10) respectivamente producen (área) = (400, 600, 625, 600 y 400), lo cual demuestra, aunque no prueba, que la mayor área ocurre cuando ancho = altura = $L/4 = 25$ ft. Resulta claro que ésta no es una forma de calcular el óptimo, particularmente para situaciones con muchas variables de decisión. Por tal razón, es importante expresar el problema en forma matemática en términos de sus incógnitas, en cuyo caso la mejor solución se encuentra al aplicar métodos de solución adecuados.

Para demostrar cómo el *problema del jardín* se expresa matemáticamente en términos de sus dos incógnitas, ancho y alto, definimos

w = ancho del rectángulo en pies

h = altura del rectángulo en pies

Con base en esas definiciones, las restricciones de la situación pueden expresarse verbalmente como

1. Ancho del rectángulo + altura del rectángulo = la mitad de la longitud de la cerca del jardín.
2. El ancho y la altura no pueden ser negativos.

Estas restricciones se traducen de manera algebraica como sigue:

1. $2(w + h) = L$
2. $w \geq 0, h \geq 0$

Ahora, el único componente restante es el objetivo del problema, es decir, maximizar el área del rectángulo. Si z se define como el área del rectángulo, entonces el modelo completo es

$$\text{Maximizar } z = wh$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2(w + h) &= L \\ w, h &\geq 0 \end{aligned}$$

En realidad, este modelo se simplifica aún más eliminando una de las variables en la función objetivo, usando la ecuación de la restricción:

$$w = \frac{L}{2} - h$$

El resultado es

$$z = wh = \left(\frac{L}{2} - h\right)h = \frac{Lh}{2} - h^2$$

La maximización de z se logra mediante el uso del cálculo diferencial (capítulo 20), de donde se obtiene la mejor solución $h = \frac{L}{4} = 25$ ft. Así, la sustitución en la ecuación de la restricción resulta en $w = \frac{L}{4} = 25$ ft. De esta manera, la solución indica que debe construirse un jardín con forma cuadrada.

Con base en los dos ejemplos anteriores, el modelo general de IO se organiza de acuerdo con el siguiente formato general:

Maximizar o minimizar la **función objetivo**

sujeta a

Restricciones

Una solución es **factible** si satisface todas las restricciones; es **óptima** si, además de ser factible, produce el mejor valor (máximo o mínimo) de la función objetivo. En el *problema de compra de boletos*, el problema considera tres alternativas factibles, y la tercera es la que produce la solución óptima. En el *problema del jardín*, una alternativa factible debe satisfacer la condición $w + h = \frac{L}{2}$, con w y $h \geq 0$, es decir, **variables no negativas**. Esta definición conduce a un número infinito de soluciones factibles y, a diferencia del *problema de compra de boletos*, que utiliza una comparación de precios sencilla, la solución óptima se determina aplicando cálculo diferencial.

Aunque los modelos de IO están diseñados para *optimizar* un criterio objetivo específico sujeto a un conjunto de restricciones, la calidad de la solución resultante depende de qué tan acertadamente el modelo representa el sistema real. Considere, por ejemplo, el *modelo de compra de boletos*. Si no se identifican todas las alternativas dominantes para comprar los boletos, entonces la solución resultante es óptima sólo en relación con las opciones representadas en el modelo. Específicamente, si se omite la alternativa 3 en el modelo, la solución “óptima” requeriría que se compraran los boletos en \$1880, la cual es una solución **subóptima**. La conclusión es que “la” solución óptima de un modelo es mejor sólo para *ese* modelo. Si el modelo resulta ser una representación razonablemente buena del sistema real, entonces su solución también es óptima para la situación real.

1.3 SOLUCIÓN DEL MODELO DE IO

En la práctica, la IO no ofrece una técnica general única para resolver todos los modelos matemáticos. En su lugar, el tipo y la complejidad del modelo matemático determinan la naturaleza del método de solución. Por ejemplo, en la sección 1.2 la solución del *problema de compra de boletos* requiere una clasificación sencilla de las alternativas, basada en el precio de compra total, en tanto que la solución del *problema del jardín* utiliza el cálculo diferencial para determinar el área máxima.

La técnica de IO más importante es la **programación lineal**, que está diseñada para modelos con función objetivo y restricciones lineales. Otras técnicas incluyen la **programación entera** (donde las variables asumen valores enteros), la **programación dinámica** (en la cual el modelo original puede descomponerse en subproblemas más pequeños y manejables), la **programación de redes** (donde el problema puede modelarse como una red), y la **programación no lineal** (en la que las funciones del modelo son no lineales). Éstas son únicamente algunas de las muchas herramientas disponibles de IO.

Una peculiaridad con la mayoría de las técnicas de IO es que por lo general las soluciones no se obtienen en formas cerradas (a manera de fórmulas) sino que, más bien, se determinan mediante **algoritmos**. Un algoritmo proporciona reglas fijas de cálculo que se aplican en forma repetitiva al problema, y cada repetición (llamada **iteración**) acerca la solución al óptimo. Como los cálculos asociados con cada iteración suelen ser tediosos y voluminosos, es recomendable que estos algoritmos se ejecuten usando una computadora.

Algunos modelos matemáticos pueden ser tan complejos que es imposible resolverlos con cualquiera de los algoritmos de optimización disponibles. En esos casos, quizás sea necesario abandonar la búsqueda de la solución *óptima* y simplemente buscar una *buena* solución aplicando la **heurística** o la **metaheurística**, una colección de *reglas empíricas* de búsqueda inteligente que trasladan el punto de solución de manera ventajosa hacia el óptimo.

Momento, ¡ajá!: Ada Lovelace, la primera programadora de algoritmos

Aunque el primer desarrollo conceptual de un algoritmo se atribuye al fundador del álgebra, Muhammad Ibn-Musa Al-Khwarizmi (nacido en Khuwarezm, Uzbekistán, aproximadamente en el año 780 y fallecido cerca del año 850 en Bagdad, Iraq),¹ fue la británica Ada Lovelace (1815-1852), quien desarrolló el primer algoritmo para computadora. Y cuando hablamos de computadoras, nos estamos refiriendo a los primeros mecanismos diferenciales y analíticos mecánicos, diseñados por el famoso matemático inglés Charles Babbage (1791-1871).

Lovelace tenía un gran interés en las matemáticas. Cuando era adolescente, visitó el hogar de Babbage y quedó fascinada por su ingenio y sus potenciales usos para hacer algo más que operaciones aritméticas. En colaboración con Babbage, tradujo al inglés un artículo que proporcionaba detalles del diseño de la máquina analítica. El artículo se basaba en las conferencias presentadas por Babbage en Italia. En el artículo traducido, Lovelace agregó sus propias notas (que resultaron ser más largas que el artículo original e incluían algunas correcciones a las ideas de diseño de Babbage). Una de sus notas detallaba el primer *algoritmo* de la historia, para calcular los números de Bernoulli en la máquina analítica que aún no se terminaba. Incluso predijo que la máquina de Babbage tenía el potencial de manipular símbolos (y no sólo números) y de crear partituras musicales complejas.²

Ada Lovelace murió a la temprana edad de 37 años. El lenguaje de computadora *Ada*, desarrollado para el Departamento de Defensa de Estados Unidos, fue nombrado así en su honor. El *Día de Ada Lovelace*, a mediados de octubre, es una celebración internacional de las mujeres en la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas (CTIM). Y quienes han visitado la Plaza de St. James en Londres pueden recordar una placa azul donde se lee “Ada Condesa de Lovelace (1815-1852), Pionera de la Computación”.

1.4 MODELOS DE COLAS Y DE SIMULACIÓN

Las colas y la simulación se ocupan de estudiar las líneas de espera. No son técnicas de optimización, sino que determinan medidas de desempeño en las líneas de espera, como el tiempo de espera promedio en la cola, el tiempo de espera promedio para recibir el servicio y la utilización de las instalaciones de servicio, entre otras.

Los modelos de colas usan modelos probabilísticos y estocásticos para analizar líneas de espera, y la simulación estima las medidas de desempeño al “imitar” el comportamiento del sistema real. De cierto modo, la simulación es lo siguiente mejor que puede hacerse en vez de observar un sistema real. La diferencia principal entre las colas y la simulación es que los modelos de colas son puramente matemáticos y, en consecuencia, están sujetos a supuestos específicos que limitan el alcance de su aplicación. La simulación, por otro lado, es flexible y puede utilizarse para analizar prácticamente cualquier situación de colas.

¹ De acuerdo con Dictionary.com, la palabra algoritmo se origina “del latino medieval *algorismus*, una transliteración deformada del árabe al-Khwarizmi”.

² La falta de financiamiento, entre otros factores, evitó que Babbage construyera máquinas completamente funcionales durante su vida. Fue sólo hasta 1991 que el Museo de Ciencia de Londres construyó una máquina de diferencias num. 2 completa utilizando los mismos materiales y tecnología disponibles en los tiempos de Babbage, reivindicando así sus ideas de diseño. Actualmente hay un proyecto a largo plazo para construir una máquina analítica funcional, financiado en su totalidad con contribuciones públicas. Es impresionante que las computadoras actuales se basen en los mismos componentes principales (memoria, CPU, entrada y salida) ideados por Babbage hace más de 100 años.

El uso de la simulación no está exento de inconvenientes. El proceso de desarrollar modelos de simulación es costoso, tanto en tiempo como en recursos; además, la ejecución de los modelos de simulación suele ser lenta, aun si se utiliza la computadora más rápida.

1.5 EL ARTE DEL MODELADO

Los modelos ilustrativos que se desarrollaron en la sección 1.2 son representaciones exactas de situaciones reales. Esto no ocurre con frecuencia en la IO, puesto que la mayoría de las aplicaciones implican (diversos grados de) aproximaciones. En la figura 1.1 se muestran los niveles de abstracción que caracterizan el desarrollo de un modelo de IO. Abstraemos de la situación real el mundo real supuesto, al concentrarnos en las variables dominantes que controlan el comportamiento del sistema real. El modelo expresa de manera razonable las funciones matemáticas que representan el comportamiento del mundo real supuesto.

Para ilustrar los niveles de abstracción en el modelado, considere la compañía Tyko Manufacturing, donde se produce una variedad de recipientes de plástico. Cuando se emite una orden de producción al departamento de producción, las materias primas necesarias se toman del inventario de la empresa o se compran a proveedores externos. Una vez que se completa un lote de producción, el departamento de ventas se encarga de distribuir el producto a los minoristas.

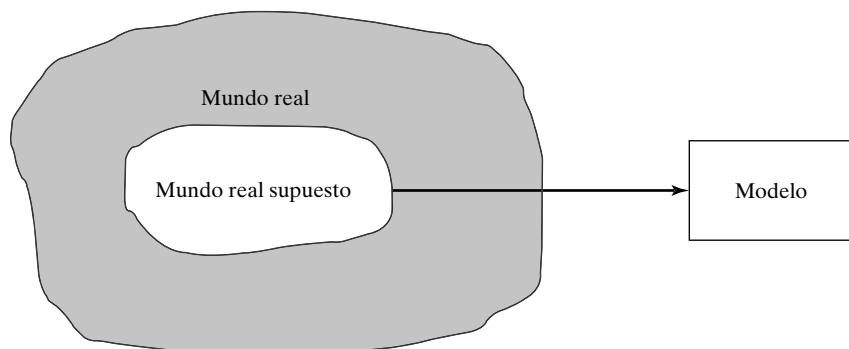
Una pregunta lógica al analizar la situación de Tyko es la determinación del tamaño de un lote de producción. ¿Cómo puede un modelo representar esta situación?

Al observar todo el sistema, es claro que algunas variables pueden incidir directamente en el nivel de producción, incluida la siguiente lista (parcial) clasificada por departamentos.

1. *Departamento de producción:* Capacidad de producción expresada en términos de las horas de maquinaria y de mano de obra disponibles, inventario en proceso y normas de control de calidad.
2. *Departamento de materiales:* Inventario disponible de materias primas, programas de entrega de proveedores externos y limitaciones de almacenamiento.
3. *Departamento de ventas:* Pronóstico de ventas, capacidad de las instalaciones de distribución, eficacia de las campañas publicitarias y efecto de la competencia.

FIGURA 1.1

Niveles de abstracción en el desarrollo de un modelo



Cada una de estas variables influye en el nivel de producción en Tyko. Sin embargo, es realmente difícil establecer relaciones funcionales explícitas entre ellas y el nivel de producción.

Un primer nivel de abstracción requiere definir los límites del mundo real supuesto. Con algo de reflexión, es posible aproximar el sistema real mediante dos parámetros dominantes:

- 1.** Tasa de producción.
- 2.** Tasa de consumo.

La tasa de producción se determina mediante el uso de variables como la capacidad de producción, las normas de control de calidad y la disponibilidad de las materias primas. Los datos de ventas determinan la tasa de consumo. En esencia, la simplificación del mundo real al mundo real supuesto se logra “concentrando” varios parámetros del mundo real en un parámetro único del mundo real supuesto.

Ahora es más fácil abstraer un modelo a partir del mundo real supuesto. Con las tasas de producción y consumo se pueden establecer medidas de exceso o escasez de inventario. Entonces, el modelo abstraído puede construirse para equilibrar los costos del exceso y la escasez de inventario, es decir, para minimizar el costo total del inventario.

1.6 MÁS QUE SÓLO MATEMÁTICAS

Debido a la naturaleza matemática de los modelos de IO, tendemos a pensar que un estudio de IO *siempre* está enraizado en el análisis matemático. Aunque el modelado matemático es un hito de la IO, primero se deberían explorar métodos más fáciles. En algunos casos, se obtiene una solución de “sentido común” mediante observaciones sencillas. De hecho, el elemento humano afecta la mayoría de los problemas de decisión, por lo que un estudio de la psicología de la gente puede ser la clave para resolver el problema. A continuación, se presentan seis ejemplos que respaldan este argumento.

1. La compañía United Parcel Service (UPS) realizó una gran apuesta en 2004 al presentar su software ORION (basado en el sofisticado algoritmo del agente viajero —vea el capítulo 11), para proporcionar a sus conductores itinerarios de entrega personalizados diariamente. Por lo general, el software propone rutas más cortas que las que actualmente toman los conductores, con potenciales ahorros de millones de dólares al año. Por su parte, los conductores resentían el hecho de que una máquina pudiera ser “mejor” que ellos, dados sus muchos años de experiencia en el trabajo. Frente a ese dilema humano, los desarrolladores de ORION resolvieron el problema simplemente colocando un letrero visible en las hojas de itinerario que decía “Gánele a la computadora” pero, al mismo tiempo, mantuvieron intactas las rutas generadas por ORION. Los conductores se tomaron muy en serio el desafío, y algunos en realidad encontraron mejores rutas que las sugeridas por la computadora. ORION ya no los estaba sustituyendo. En cambio, consideraban que el software complementaba su intuición y su experiencia.³

2. Los viajeros que llegaban al Aeropuerto Intercontinental en Houston, Texas, se quejaban de la larga espera por su equipaje. Las autoridades aumentaron el número de estibadores de

³ <http://www.fastcompany.com/3004319/brown-down-ups-drivers-vs-ups-algorithm>. Vea también “At UPS, the Algorithm Is the Driver,” *Wall Street Journal*, 16 de febrero de 2015.

equipaje con la esperanza de aliviar el problema, pero las quejas persistían. Al final, se tomó la decisión de tan sólo colocar las puertas de llegada más lejos del área de recepción de equipaje, lo cual obligaba a los pasajeros a caminar más tiempo antes de llegar a esa zona. Las quejas desaparecieron porque la caminata adicional daba tiempo suficiente para que el equipaje se entregara en el carrusel.⁴

3. En un estudio de los mostradores para documentación en un gran aeropuerto británico, un equipo de consultores estadounidenses y canadienses utilizó la teoría de colas para investigar y analizar la situación. Una parte de la solución recomendaba utilizar letreros bien colocados que avisaran a los pasajeros, cuya salida era en 20 minutos, que avanzaran al inicio de la cola y solicitaran un servicio prioritario. La solución no tuvo éxito porque los pasajeros, en su mayoría británicos, estaban “condicionados a un comportamiento muy estricto en las colas” y, por consiguiente, se rehusaban a adelantarse a los demás que esperaban en la cola.⁵

4. En una fundidora de acero en India, primero se producen lingotes a partir del mineral de hierro, los cuales se utilizan después en la fabricación de varillas y vigas de acero. El gerente notó una gran demora entre la producción de los lingotes y su transferencia hacia la siguiente fase de fabricación (donde se elaboraban los productos finales). De manera ideal, para reducir el costo de recalentamiento, la fabricación debería comenzar en cuanto los lingotes salieran del horno. Al principio, el problema se percibió como una situación de equilibrio de la línea de producción, el cual podría resolverse reduciendo la producción de lingotes o incrementando la capacidad del proceso de fabricación. El equipo de IO utilizó tablas sencillas para registrar la producción de los hornos durante los tres turnos del día. Se descubrió que aun cuando el tercer turno comenzaba a las 11:00 P.M., la mayoría de los lingotes se producían entre las 2:00 y las 7:00 A.M. Una investigación más a fondo reveló que los operadores del tercer turno preferían descansar más al principio del turno y, luego, compensar durante la madrugada la producción perdida. Resultaba claro que los operadores del tercer turno tenían horas a distribuir para cumplir con su cuota. El problema se resolvió “niveling” el número de operadores y el programa de producción de lingotes a lo largo del turno.

5. Al atender quejas sobre la lentitud de los elevadores en un gran edificio de oficinas, el equipo de IO percibió la situación en principio como un problema de línea de espera que podría requerir el uso del análisis matemático o la simulación de colas. Después de estudiar el comportamiento de las personas que se quejaron, el psicólogo del equipo sugirió que se instalaran espejos de cuerpo completo a la entrada de los elevadores. Las quejas desaparecieron, ya que las personas se mantenían ocupadas observándose a sí mismas y a las demás mientras esperaban el elevador.

6. En una planta de producción había varios departamentos que compartían el uso de tres camiones para transportar material. Las solicitudes colocadas por un departamento se respondían según el orden en que llegaban. No obstante, los departamentos se quejaban de la larga espera por el servicio, y exigían la adición de un cuarto camión al lote. El simple cálculo del uso de los camiones mostró una modesta utilización diaria, con lo que se hacía evidente la opción de un cuarto camión. Otras investigaciones revelaron que los camiones se estacionaban en un espacio oscuro fuera de la vista de los departamentos. Así, un supervisor solicitante que no podía ver los camiones asumía que no había camiones disponibles y, por lo tanto, no colocaba una solicitud. El

⁴ Stone, A., “Why Waiting Is Torture”, *The New York Times*, 18 de agosto de 2012.

⁵ Lee, A., *Applied Queueing Theory*, St. Martin’s Press, Nueva York, 1966.

problema se resolvió simplemente instalando comunicación bidireccional entre el lote de camiones y cada departamento.⁶

De estos ejemplos, se obtienen cuatro conclusiones:

1. El equipo de IO debería explorar la posibilidad de utilizar ideas “diferentes” para resolver la situación. Las soluciones (de sentido común) propuestas para el problema de UPS (uso del letrero “Gánele a la computadora” para motivar a los conductores), el aeropuerto de Houston (colocación de las puertas de llegada lejos del área de recepción del equipaje) y el problema de los elevadores (instalación de espejos) se basaron en la psicología humana más que en el modelado matemático. Ésta es la razón por la que los equipos de IO suelen recurrir a los conocimientos de expertos que se desempeñan en ciencias sociales y psicología, un punto que fue aceptado y ejecutado por el primer equipo de IO en Inglaterra durante la Segunda Guerra Mundial.

2. Antes de saltar hacia el uso de un modelado matemático sofisticado, tiene que adoptarse una visión general de la situación para descubrir las posibles razones no técnicas que provocaron el problema en primer lugar. En la situación de la fundidora de acero, esto se logró utilizando sólo gráficas sencillas de la producción de lingotes para descubrir el desequilibrio en la operación del tercer turno. Una observación sencilla semejante en el caso de los camiones de transporte también condujo a una solución sencilla del problema.

3. Un estudio de IO no debe iniciar con el sesgo de utilizar una herramienta matemática específica antes de que se justifique su uso. Por ejemplo, como la programación lineal (que veremos a partir del capítulo 2) es una técnica exitosa, existe la tendencia de utilizarla como “la” herramienta de modelado. Esa forma de proceder suele conducir a un modelo matemático muy alejado de la situación real. Por lo tanto, es imperativo que se analicen primero los datos disponibles aplicando las técnicas más sencillas posibles para entender la esencia del problema. Una vez que se define el problema, puede decidirse cuál será la herramienta más adecuada para la solución. En el problema de la fundidora de acero, todo lo que se necesitaba para aclarar la situación de la producción de lingotes fue la elaboración de tablas sencillas.

4. Las soluciones se originan en las personas y no en la tecnología. Cualquier solución que no tome en cuenta el comportamiento humano quizás falle. Aun cuando la solución matemática del problema del aeropuerto británico pudo haber sido matemáticamente razonable, el hecho de que el equipo consultor no se percatara de las diferencias culturales entre los Estados Unidos e Inglaterra (los estadounidenses y los canadienses suelen ser menos formales) dio como resultado una recomendación que no se podía implementar. De cierta manera, este mismo punto de vista puede expresarse en el caso de UPS.

1.7 FASES DE UN ESTUDIO DE IO

Los estudios de investigación de operaciones se basan en el *trabajo en equipo*, donde los analistas de IO y el cliente trabajan hombro con hombro. Los conocimientos de modelado de los analistas de IO se deben complementar con la experiencia y cooperación del cliente para quien realizan el estudio.

⁶ G. P. Cosmetatos, “The Value of Queuing Theory—A Case Study”, *Interfaces*, vol. 9, núm. 3, pp. 47-51, 1979.

Como herramienta para la toma de decisiones, la IO es tanto una ciencia como un arte. Es una ciencia por las técnicas matemáticas que implica, y un arte porque el éxito de las fases que conducen a la solución del modelo matemático depende en gran medida de la creatividad y experiencia del equipo de IO. Willemain (1994) aconseja que “una práctica [de IO] eficaz necesita más que competencia analítica. También requiere, entre otros atributos, juicio técnico (es decir, cuándo y cómo utilizar una técnica determinada), así como habilidades de comunicación y supervivencia organizacional”.

Es difícil prescribir cursos de acción específicos (semejantes a los que indica la teoría precisa de la mayoría de los modelos matemáticos) para estos factores intangibles. Sin embargo, podemos ofrecer directrices generales para la implementación de la IO en la práctica.

Las fases principales para implementar la IO son las siguientes:

1. Definición del problema.
2. Construcción del modelo.
3. Solución del modelo.
4. Validación del modelo.
5. Implementación de la solución.

La fase 3, relacionada con la *solución del modelo*, es la mejor definida y por lo general la más fácil de implementar en un estudio de IO, ya que maneja principalmente modelos matemáticos precisos. La implementación de las fases restantes es más un arte que una teoría.

La **definición del problema** implica definir el alcance del problema que se investiga. Esta función debe ser realizada por todo el equipo de IO. El objetivo consiste en identificar tres elementos principales del problema de decisión: (1) descripción de las alternativas de decisión; (2) determinación del objetivo del estudio, y (3) especificación de las limitaciones con las cuales funciona el sistema modelado.

La **construcción del modelo** es un intento de traducir la definición del problema en relaciones matemáticas. Si el modelo resultante se ajusta a uno de los modelos matemáticos estándar, como la programación lineal, se suele obtener una solución utilizando los algoritmos disponibles. De manera alternativa, si las relaciones matemáticas son demasiado complejas como para permitir la determinación de una solución analítica, el equipo de IO puede optar por simplificar el modelo y utilizar un método heurístico, o bien, considerar la simulación, si es lo apropiado. En algunos casos, una simulación matemática puede combinarse con modelos heurísticos para resolver el problema de decisión, como lo demuestran algunos de los análisis de casos al final de los capítulos.

La **solución del modelo** es, por mucho, la más sencilla de todas las fases de la IO, porque implica el uso de algoritmos de optimización bien definidos. Un aspecto importante de la fase de solución del modelo es el *análisis de sensibilidad*, que se ocupa de obtener información adicional sobre el comportamiento de la solución óptima cuando el modelo experimenta algunos cambios de parámetros. El análisis de sensibilidad es particularmente necesario cuando no se pueden estimar con precisión los parámetros del modelo. En estos casos, es importante estudiar el comportamiento de la solución óptima en el entorno de los parámetros estimados.

La **valididad del modelo** comprueba si el modelo propuesto hace en realidad lo que dice que hace, es decir, ¿predice adecuadamente el comportamiento del sistema que se estudia? Al principio, el equipo de IO debería estar convencido de que el resultado del modelo no contenga “sorpresa”. En otras palabras, ¿tiene sentido la solución? Los resultados son intuitivamente

aceptables? Del lado formal, un método común de comprobar la validación de un modelo consiste en comparar su resultado con resultados históricos. El modelo es válido si, en condiciones de datos de entrada iguales, reproduce de forma razonable el desempeño pasado. Sin embargo, no suele haber seguridad de que el desempeño futuro continuará copiando el comportamiento pasado. Asimismo, como el modelo se basa generalmente en el examen cuidadoso de datos pasados, la comparación propuesta casi siempre es favorable. Si el modelo propuesto representara un sistema nuevo (inexistente), no habría datos históricos disponibles. En tales casos, es posible usar la simulación como una herramienta independiente para comprobar el resultado del modelo matemático.

La **implementación** de la solución de un modelo validado implica la transformación de los resultados en instrucciones de operación comprensibles, que se darán a las personas que administrarán el sistema recomendado. La responsabilidad de esta tarea recae primordialmente en el equipo de IO.

1.8 ACERCA DE ESTE LIBRO

Morris (1967) establece que “la enseñanza de los modelos no equivale a la enseñanza del modelado”. Tomé en cuenta esta importante afirmación durante la preparación de esta edición, e hice todo el esfuerzo posible por presentar el arte del modelado en la IO, con la inclusión de modelos realistas y estudios de caso en el libro. Dada la importancia de los cálculos en la IO, el libro analiza la forma como los algoritmos teóricos se ajustan a los códigos de computadoras comerciales (vea la sección 3.7). También presenta extensas herramientas para realizar la tarea del cálculo, que van desde TORA (orientado al aspecto tutorial) hasta los paquetes comerciales Excel, Excel Solver y AMPL.

La IO es tanto un arte como una ciencia: el arte de describir y modelar el problema, y la ciencia de resolver el modelo utilizando algoritmos matemáticos (precisos). Un primer curso en la materia debería permitir al estudiante apreciar la importancia de ambas áreas. Así proporcionará a los usuarios de IO la clase de confianza que normalmente no se obtendría si la capacitación se enfocara sólo en el aspecto artístico de la IO, con el pretexto de que las computadoras pueden liberar al usuario de la necesidad de *entender* por qué funcionan los algoritmos de solución.

Las habilidades de modelado y cálculo pueden mejorarse mediante el estudio de los casos prácticos publicados. Para ayudarle en este aspecto, se incluyen análisis de casos totalmente desarrollados al final de los capítulos. Los casos cubren la mayoría de los modelos de IO presentados en este libro. Se dispone de más estudios de casos en revistas y publicaciones. En particular, *Interfaces* (publicada por INFORMS) es una fuente abundante de aplicaciones diversas de IO.

BIBLIOGRAFÍA

Altier, W., *The Thinking Manager's Toolbox: Effective Processes for Problem Solving and Decision Making*, Oxford University Press, Nueva York, 1999.

Brown, S. I., *Insight into Mathematical Thought*, NCTM, Reston, VA, 2013.

- Checkland, P., *Systems Thinking, System Practice*, Wiley, Nueva York, 1999.
- Evans, J., *Creative Thinking in the Decision and Management Sciences*, South-Western Publishing, Cincinnati, 1991.
- Morris, W., "On the Art of Modeling", *Management Science*, vol. 13, pp. B707-B717, 1967.
- Paulos, J., *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences*, Hill and Wang, Nueva York, 1988.
- Singh, S., *Fermat's Enigma*, Walker, Nueva York, 1997.
- Willemain, T., "Insights on Modeling from a Dozen Experts", *Operations Research*, vol. 42, núm. 2, pp. 213-222, 1994.

PROBLEMAS⁷

Sección	Problemas asignados
1.2	1-1 a 1-10

- 1-1.** En el ejemplo de los boletos, identifique una cuarta alternativa factible.
- 1-2.** En el problema del jardín:
- (a) Identifique dos soluciones factibles, y determine cuál es mejor.
 - (b) Determine la solución óptima.
- *1-3.** Se le dan dos bolas idénticas hechas de una aleación resistente. Una prueba de dureza falla si la bola se abolla al impactarse después de dejarla caer desde algún piso en un edificio de 100 pisos. Una bola puede reutilizarse en nuevas caídas únicamente si no se abolló en una prueba anterior. Si usted usa solamente estas dos bolas idénticas, cuál es el menor número de caídas de bola que determinará el piso más alto desde donde se puede soltar una bola sin que ésta se dañe?
- 1-4.** Amy, Jim, John y Kelly están en el margen oriental de un río y desean cruzar al margen occidental en una canoa, la cual sólo puede llevar a dos personas a la vez. Como Amy es la más atlética, puede cruzar el río remando en 1 minuto. Jim, John y Kelly lo harían en 2, 5 y 10 minutos, respectivamente. Si dos personas están en la canoa, la persona más lenta determina el tiempo de cruce. El objetivo es que las cuatro personas estén en el otro margen del río en el menor tiempo posible.
- (a) Defina el criterio para evaluar las alternativas (recuerde que la canoa es el único medio de transporte y no se puede enviar vacía).
 - (b)** ¿Cuál es el menor tiempo para llevar a las cuatro personas al otro lado del río?
- 1-5.** En un juego de béisbol Jim es el lanzador y Joe es el bateador. Suponga que Jim puede lanzar una bola rápida o una curva al azar. Si Joe predice correctamente una curva, puede mantener un promedio de bateo de .500; por otro lado, si Jim lanza una curva y Joe está preparado para una bola rápida, su promedio de bateo se mantiene por debajo de .200. Además, si Joe predice correctamente una bola rápida, obtiene un promedio de bateo de .300; en caso contrario, su promedio es de tan sólo .100.
- (a) Defina las alternativas para esta situación.
 - (b) Determine la función objetivo para el problema, y describa en qué difiere de la optimización común (maximización o minimización) de un criterio.

⁷ En el apéndice B, se da la solución a los problemas marcados con un asterisco. Se usa la misma convención para todos los problemas al final de los capítulos a lo largo del libro. Los problemas 1-7 y 1-8 fueron adaptados de Bruce Goldstein, *Cognitive Psychology: Mind, Research, and Everyday Experience*, Wadsworth Publishing, 2005.

- 1-6.** Durante la construcción de una casa, se deben recortar seis viguetas de 24 ft cada una a la longitud correcta de 23 ft. La operación de recortar una viga implica la siguiente secuencia:

Operación	Tiempo (segundos)
1. Colocar la viga en caballetes de aserrar	15
2. Medir la longitud correcta (23 ft)	5
3. Marcar la línea de corte para la sierra circular	5
4. Recortar la viga a la longitud correcta	20
5. Apilar las viguetas recortadas en un área designada	20

Hay tres personas involucradas: Dos cargadores deben realizar al mismo tiempo las operaciones 1, 2 y 5, y un cortador ejecuta las operaciones 3 y 4. Hay dos pares de caballetes de aserrar donde se colocan las viguetas sin recortar, y cada par puede sostener tres viguetas acomodadas lado a lado. Sugiera un buen programa para recortar las seis viguetas.

- 1-7.** Se construye una pirámide (bidimensional) en cuatro capas. La capa inferior se compone de los puntos (equidistantes) 1, 2, 3 y 4; la siguiente incluye los puntos 5, 6 y 7; la que sigue se compone de los puntos 8 y 9, y la capa superior tiene el punto 10. Se desea invertir la pirámide (que la capa inferior incluya un punto, y la superior cuatro) cambiando de lugar los puntos.
- Identifique dos soluciones factibles.
 - Determine el número mínimo de movimientos necesarios para invertir la pirámide.
- 1-8.** Usted tiene cuatro cadenas y cada una consta de tres eslabones sólidos. Tiene que hacer un brazalete conectando las cuatro cadenas; romper un eslabón cuesta 2 centavos, y volverlo a soldar, 3 centavos.
- Identifique dos soluciones factibles y evalúelas.
 - Determine el costo mínimo para hacer el brazalete.
- 1-9.** Los cuadros de una tablero rectangular de 11 filas y 9 columnas están numerados secuencialmente de 1 a 99 con una recompensa monetaria oculta de entre \$0 y \$20[†] asignada a cada cuadro. El juego consiste en que un jugador elige un cuadrado del tablero seleccionando cualquier número de dos dígitos y, luego, resta al número seleccionado la suma de sus dos dígitos. Después, el jugador recibe la recompensa asignada al cuadro seleccionado. ¿Qué valores monetarios deberían asignarse a los 99 cuadros para minimizar la recompensa del jugador (sin importar cuántas veces se repita el juego)? Para hacer el juego interesante, la asignación de \$0 a *todos* los cuadros no es una opción.
- 1-10.** Usted tiene 10 cajas de cartón idénticas, cada una de las cuales contiene 10 botellas de agua. Las botellas pesan 10 oz cada una, con excepción de las botellas en una caja de cartón defectuosa, donde cada una de las 10 botellas pesa sólo 9 oz. Hay una báscula disponible para realizar los pesajes.
- Sugiera un método para localizar la caja de cartón defectuosa.
 - ¿Cuál es el menor número de pesajes que garantiza localizar la caja de cartón defectuosa?
(Sugerencia: Usted tendrá que ser creativo al decidir qué hay que pesar).

[†] En este libro, todas las cantidades monetarias referidas representan dólares estadounidenses, a menos que se especifique otra unidad (nota del editor).

CAPÍTULO 2

Modelado con programación lineal

Aplicación de la vida real: Frontier Airlines compra combustible de manera económica

La carga de combustible de un avión puede hacerse en cualquiera de las escalas a lo largo de una ruta de vuelo. El precio del combustible varía entre las escalas y se obtendrían ahorros potenciales cargando más combustible en un lugar más barato, para usarlo en tramos de vuelo subsecuentes. La desventaja es que el peso adicional del combustible cargado hará que la combustión de gasolina sea mayor. La programación lineal (PL) y la heurística se utilizan para determinar la cantidad óptima de carga de combustible que equilibre el costo del consumo excesivo frente a los ahorros en el costo del combustible. El estudio, realizado en 1981, arrojó ahorros netos de aproximadamente \$350,000 al año. Con el incremento significativo del costo del combustible, muchas aerolíneas están utilizando software para comprar y cargar combustible con base en la PL.

2.1 MODELO DE PL CON DOS VARIABLES

En esta sección se analizará la solución gráfica de una PL con dos variables. Aun cuando en la práctica difícilmente ocurren problemas con dos variables, el tratamiento presenta fundamentos concretos para el desarrollo del algoritmo simplex general que se estudia en el capítulo 3.

Ejemplo 2.1-1 (La compañía Reddy Mikks)

Reddy Mikks produce pinturas para interiores y exteriores con dos materias primas, $M1$ y $M2$. La siguiente tabla presenta los datos básicos del problema.

	Toneladas de materia prima por tonelada de		Disponibilidad diaria máxima (toneladas)
	Pintura para exteriores	Pintura para interiores	
Materia prima, $M1$	6	4	24
Materia prima, $M2$	1	2	6
Utilidad por tonelada (\$1000)	5	4	

La demanda diaria de pintura para interiores no puede exceder la de pintura para exteriores en más de una tonelada. Asimismo, la demanda diaria máxima de pintura para interiores es de dos toneladas.

Reddy Mikks se propone determinar la (mejor) combinación óptima de pinturas para interiores y exteriores que maximice la utilidad diaria total.

Todos los modelos de IO, incluidos los de PL, constan de tres componentes básicos.

1. Las **variables** de decisión que pretendemos determinar.
2. El **objetivo** (la meta) que necesitamos optimizar (maximizar o minimizar).
3. Las **restricciones** que la solución debe satisfacer.

La definición correcta de las variables de decisión es un primer paso esencial en el desarrollo del modelo. Una vez hecho esto, la tarea de construir la función objetivo y las restricciones es más directa.

Para el problema de Reddy Mikks es necesario determinar las cantidades diarias que se deben producir de pinturas para exteriores e interiores. Así, las variables del modelo se definen como:

$$x_1 = \text{Toneladas producidas diariamente de pintura para exteriores}$$

$$x_2 = \text{Toneladas producidas diariamente de pintura para interiores}$$

La meta de Reddy Mikks es maximizar (es decir, incrementar lo más posible) la utilidad diaria total de ambas pinturas. Los dos componentes de la utilidad diaria total se expresan en función de las variables x_1 y x_2 como sigue:

$$\text{Utilidad de la pintura para exteriores} = 5x_1 \text{ (miles) de dólares}$$

$$\text{Utilidad de la pintura para interiores} = 4x_2 \text{ (miles) de dólares}$$

Si z representa la utilidad diaria total (en miles de dólares), el objetivo (o meta) de Reddy Mikks se expresa como

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

A continuación, definimos las restricciones que limitan la utilización de las materias primas y la demanda del producto. Las restricciones en las materias primas se expresan verbalmente como

$$\left(\begin{array}{l} \text{Utilización de una materia prima por ambas pinturas} \\ \text{prima} \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{l} \text{Disponibilidad máxima} \\ \text{de materia prima} \end{array} \right)$$

La utilización diaria de la materia prima $M1$ es de 6 toneladas por tonelada de pintura para exteriores, y de 4 toneladas por tonelada de pintura para interiores. Por lo tanto,

$$\text{Utilización de la materia prima } M1 \text{ por ambas pinturas} = 6x_1 + 4x_2 \text{ toneladas/día}$$

Del mismo modo,

$$\text{Utilización de la materia prima } M2 \text{ por ambas pinturas} = 1x_1 + 2x_2 \text{ toneladas/día}$$

Las disponibilidades diarias máximas de las materias primas $M1$ y $M2$ son de 24 y 6 toneladas, respectivamente. Entonces, las restricciones en las materias primas son

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 && (\text{Materia prima } M1) \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 && (\text{Materia prima } M2) \end{aligned}$$

La primera restricción en la demanda del producto estipula que la producción diaria de pintura para interiores no debe exceder a la de pintura para exteriores en más de 1 tonelada, lo cual se traduce en

$$x_2 - x_1 \leq 1 \text{ (Límite del mercado)}$$

La segunda restricción limita la demanda diaria de pintura para interiores a 2 toneladas, es decir,

$$x_2 \leq 2 \text{ (Límite de la demanda)}$$

Una restricción implícita (o “sobreentendida”) requiere que todas las variables, x_1 y x_2 , asuman sólo valores positivos o cero. Las restricciones, expresadas como $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ se conocen como **restricciones de no negatividad**.

El modelo completo de Reddy Mikks es

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (2)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \quad (3)$$

$$x_2 \leq 2 \quad (4)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (5)$$

Todos los valores de x_1 y x_2 que satisfacen *las cinco* restricciones constituyen una **solución factible**. De lo contrario, la solución es **no factible**. Por ejemplo, la solución $x_1 = 3$ toneladas por día y $x_2 = 1$ tonelada por día es una solución factible porque no transgredes *ninguna* de las cinco restricciones; un resultado que se confirma sustituyendo ($x_1 = 3, x_2 = 1$) en el lado izquierdo de cada restricción. En la restricción (1), se tiene $6x_1 + 4x_2 = (6 \times 3) + (4 \times 1) = 22$, la cual es menor que el lado derecho de la restricción (24). Las restricciones 2 a 5 se comprueban de la misma manera (¡hágalo!). Por otra parte, la solución $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$ es no factible porque no satisface al menos una restricción. Por ejemplo, en la restricción (1), $(6 \times 4) + (4 \times 1) = 28$, la cual es mayor que el lado derecho (24).

La meta del problema es determinar la solución **óptima**, es decir, la mejor solución *factible* que maximice la utilidad total z . Primero, es necesario demostrar que el problema de Reddy Mikks tiene un número *infinito* de soluciones factibles, una propiedad compartida por todas las PL no triviales. Esto significa que el problema no puede resolverse por enumeración. El método gráfico de la sección 2.2 y su generalización algebraica en el capítulo 3 demuestran cómo puede determinarse el óptimo en un número finito de pasos.

Comentarios. La función objetivo y las restricciones en todas las PL deben ser lineales. Adicionalmente, se conocen con certeza todos los parámetros (coeficientes de la función objetivo y de las restricciones) del modelo.

2.2 SOLUCIÓN GRÁFICA DE PL

La solución gráfica incluye dos pasos:

1. Determinación del espacio de soluciones factibles.
2. Determinación de la solución óptima de entre todos los puntos localizados en el espacio de soluciones.

A continuación, se presentan dos ejemplos para demostrar cómo se maneja la solución gráfica en las funciones objetivo de maximización y minimización.

2.2.1 Solución de un modelo de maximización

Ejemplo 2.2-1

En este ejemplo se resuelve el modelo de Reddy Mikks del ejemplo 2.1-1.

Paso 1. *Determinación del espacio de soluciones factibles:*

Ante todo, considere las restricciones de no negatividad $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. En la figura 2.1, el eje horizontal x_1 y el eje vertical x_2 representan las variables de pintura para exteriores e interiores, respectivamente. Así, las restricciones de no negatividad limitan las variables al primer cuadrante (sobre el eje x_1 y a la derecha del eje x_2).

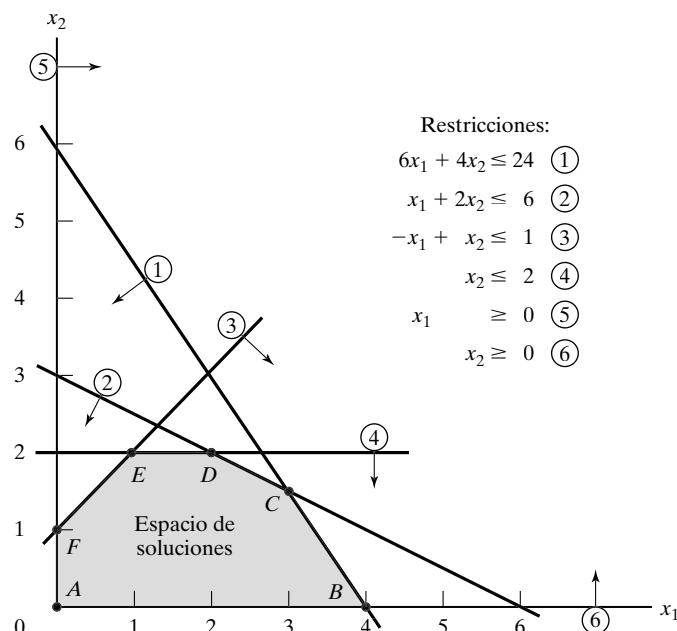
Para tener en cuenta las otras cuatro restricciones, primero sustituya cada desigualdad con una ecuación y, luego, trace la línea recta resultante localizando dos puntos diferentes. Por ejemplo, después de sustituir $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ con la línea recta $6x_1 + 4x_2 = 24$, se determinan dos puntos distintos haciendo $x_1 = 0$ para obtener $x_2 = \frac{24}{4} = 6$ y, luego, $x_2 = 0$ para obtener $x_1 = \frac{24}{6} = 4$. De este modo, la recta $6x_1 + 4x_2 = 24$ que pasa por los puntos $(0, 6)$ y $(4, 0)$ es la línea (1) que se muestra en la figura 2.1.

A continuación, se considera la dirección ($>$ o $<$) de la desigualdad. Ésta divide el plano (x_1, x_2) en dos semiplanos, uno a cada lado de la línea trazada. Tan sólo una de las dos mitades satisface la desigualdad. Para determinar el lado correcto, se selecciona cualquier punto que no pasa por la línea recta como *punto de referencia*. Si el punto de referencia elegido satisface la desigualdad, entonces su lado es factible; de lo contrario, el lado opuesto se convierte en el semiplano factible.

El origen $(0, 0)$ es un punto de referencia conveniente que siempre debería utilizarse mientras no pase sobre la línea que representa la restricción, lo cual resulta verdadero para todas las restricciones de este ejemplo. Comenzando con la restricción $6x_1 + 4x_2 \leq 24$, la sustitución

FIGURA 2.1

Espacio factible del modelo de Reddy Mikks



de $(x_1, x_2) = (0, 0)$ automáticamente da un valor de cero al lado izquierdo. Como es menor que 24, el semiplano que contiene $(0, 0)$ es factible para la desigualdad (1), como muestra la dirección de la flecha en la figura 2.1. Una aplicación similar del procedimiento del punto de referencia a las restricciones restantes produce el **espacio de solución factible** $ABCDEF$ donde se satisfacen todas las restricciones (¡verifíquelo!). Todos los puntos fuera del límite del área $ABCDEF$ son no factibles.

Paso 2. *Determinación de la solución óptima:*

La cantidad de puntos de solución en el espacio factible $ABCDEF$ de la figura 2.1 es *infinita*, lo que claramente impide el uso de una enumeración exhaustiva. En consecuencia, se requiere un procedimiento sistemático para determinar la solución óptima.

En primer lugar, la dirección en la cual se incrementa la función de utilidad $z = 5x_1 + 4x_2$ (recuerde que z se está *maximizando*) se determina asignando valores *crecientes* arbitrarios a z . En la figura 2.2, las dos líneas $5x_1 + 4x_2 = 10$ y $5x_1 + 4x_2 = 15$, correspondientes a $z = 10$ y $z = 15$ (arbitrarios), identifican la dirección en la cual se incrementa z . Al moverse en esa dirección, la solución óptima ocurre en C , ya que es el punto factible en el espacio de soluciones más allá del cual cualquier incremento adicional producirá una solución no factible.

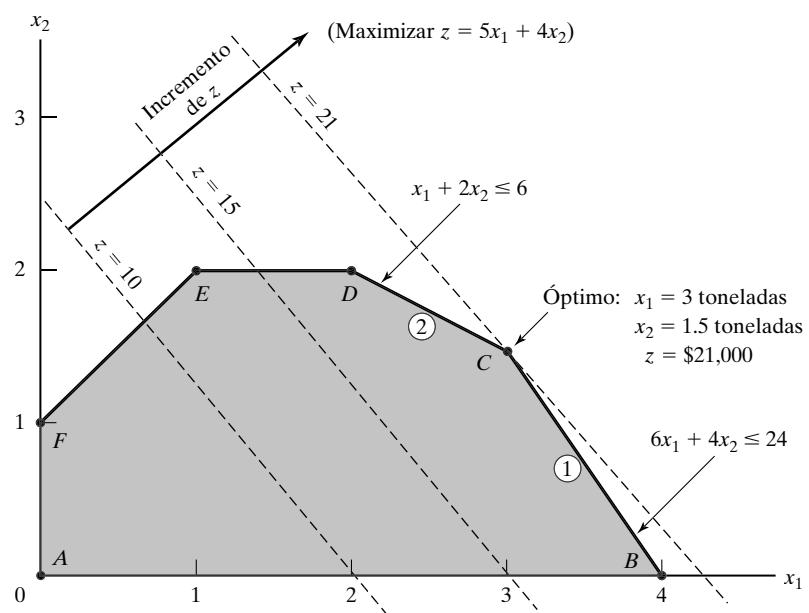
Los valores de x_1 y x_2 asociados con el punto óptimo C se determinan resolviendo las ecuaciones asociadas con las líneas (1) y (2):

$$6x_1 + 4x_2 = 24$$

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

FIGURA 2.2

Solución óptima del modelo de Reddy Mikks



La solución es $x_1 = 3$ y $x_2 = 1.5$ con $z = (5 \times 3) + (4 \times 1.5) = 21$. Esto implica una mezcla de productos diaria de 3 toneladas de pintura para exteriores, y 1.5 toneladas de pintura para interiores. La utilidad diaria asociada es de \$21,000.

Comentarios. En la práctica, una PL típica puede incluir cientos o incluso miles de variables y restricciones. ¿De qué sirve entonces el estudio de una PL con dos variables? La respuesta es que la solución gráfica proporciona un resultado clave: *La solución óptima de una PL, cuando existe, siempre está asociada con un punto de esquina del espacio de solución, limitando así la búsqueda del óptimo de un número infinito de puntos factibles a un número finito de puntos de esquina*. Este poderoso resultado es la base para el desarrollo del *método simplex algebraico* general que se presenta en el capítulo 3.¹

2.2.2 Solución de un modelo de minimización

Ejemplo 2.2-2 (Problema de la dieta)

Ozark Farms utiliza diariamente un mínimo de 800 lb de un alimento especial, el cual es una mezcla de maíz y soya con las siguientes composiciones:

Forraje	lb por lb de forraje		
	Proteína	Fibra	Costo (\$/lb)
Maíz	.09	.02	.30
Soya	.60	.06	.90

Las necesidades dietéticas del alimento especial son un mínimo de 30% de proteína y un máximo de 5% de fibra. La meta es determinar la mezcla diaria de alimento a un costo mínimo.

Las variables de decisión del modelo son

$$x_1 = \text{libras de maíz en la mezcla diaria}$$

$$x_2 = \text{libras de soya en la mezcla diaria}$$

El objetivo es minimizar el costo diario total (en dólares) de la mezcla de alimento, es decir:

$$\text{Minimizar } z = .3x_1 + .9x_2$$

¹ Para reforzar este resultado clave, utilice TORA para verificar que el óptimo de las siguientes funciones objetivo del modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.1-1) producirá los puntos de esquina asociados que se definen en la figura 2.2 (haga clic en **View/Modify Input Data** para modificar los coeficientes objetivo y resolver gráficamente el problema):

- (a) $z = 5x_1 + x_2$ (óptimo: punto *B* en la figura 2.2)
- (b) $z = 5x_1 + 4x_2$ (óptimo: punto *C*)
- (c) $z = x_1 + 3x_2$ (óptimo: punto *D*)
- (d) $z = x_2$ (óptimo: punto *D* o *E*, o cualquier punto intermedio, vea la sección 3.5.2)
- (e) $z = -2x_1 + x_2$ (óptimo: punto *F*)
- (f) $z = -x_1 - x_2$ (óptimo: punto *A*)

Las restricciones representan la cantidad diaria de la mezcla y las necesidades dietéticas. Ozark Farms requiere un mínimo de 800 lb de alimento al día, es decir,

$$x_1 + x_2 \geq 800$$

La cantidad de proteína contenida en x_1 libras de maíz y en x_2 libras de soya es $(.09x_1 + .6x_2)$ lb. Esta cantidad debería ser, al menos, igual a 30% de la mezcla de alimentos total $(x_1 + x_2)$ lb y queda como:

$$.09x_1 + .6x_2 \geq .3(x_1 + x_2)$$

De manera similar, el requisito de fibra de máximo 5% se representa como sigue

$$.02x_1 + .06x_2 \leq .05(x_1 + x_2)$$

Las restricciones se simplifican cambiando los términos en x_1 y x_2 al lado izquierdo de cada desigualdad, con sólo una constante del lado derecho. El modelo completo es

$$\text{Minimizar } z = .3x_1 + .9x_2$$

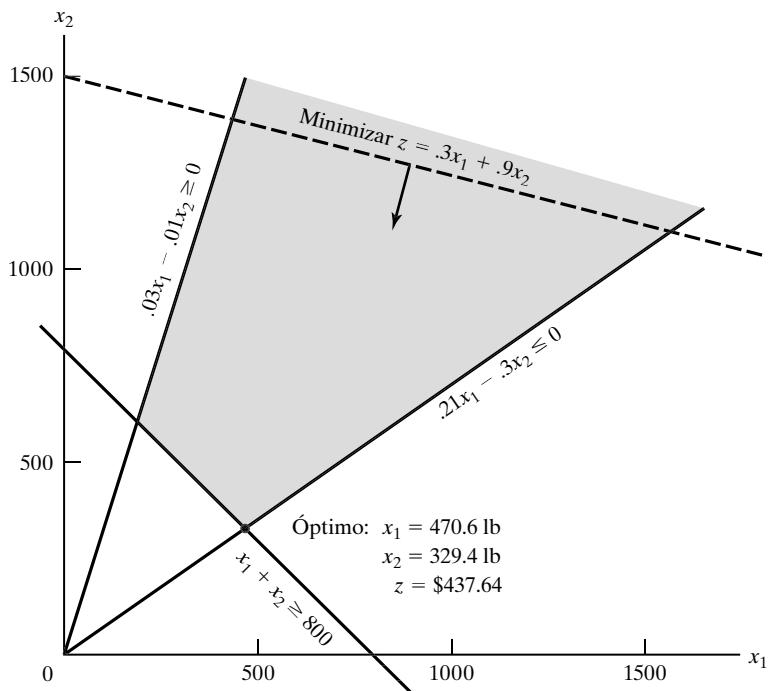
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 800 \\ .21x_1 - .30x_2 &\leq 0 \\ .03x_1 - .01x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La figura 2.3 muestra la solución gráfica del modelo. La segunda y tercera restricciones pasan por el origen. De este modo, a diferencia del modelo de Reddy Mikks del ejemplo 2.2-1, la determinación de los semiplanos

FIGURA 2.3

Solución gráfica del modelo de la dieta



factibles de estas dos restricciones requiere que se utilice un punto de referencia diferente de (0,0), por ejemplo, (100,0) o (0,100).

Solución:

El modelo minimiza el valor de la función objetivo al reducir z en la dirección que se muestra en la figura 2.3. La solución óptima es la intersección de las dos líneas $x_1 + x_2 = 800$ y $.21x_1 - .3x_2 = 0$ y, por consiguiente, $x_1 = 470.6$ lb y $x_2 = 329.4$ lb. El costo mínimo de la mezcla de alimentos es $z = .3 \times 470.6 + .9 \times 329.4 = \437.64 por día.

Comentarios. Podríamos preguntarnos por qué la restricción $x_1 + x_2 \geq 800$ no puede reemplazarse con $x_1 + x_2 = 800$ ya que no sería óptimo producir más que la cantidad mínima. Aunque la solución del presente modelo satisfizo la ecuación, un modelo más complejo puede imponer restricciones adicionales que requerían mezclar más que la cantidad mínima. Aún más importante, la desigualdad débil (\geq), por definición, implica el caso de la igualdad, de modo que la ecuación (=) se permite si la optimalidad lo requiere. La conclusión es que no se debe “prejuzgar” la solución imponiendo la restricción de igualdad adicional.

2.3 SOLUCIÓN POR COMPUTADORA CON SOLVER Y AMPL

En la práctica, los modelos típicos de PL suelen implicar miles de variables y restricciones, y la computadora es el único medio viable para resolver problemas de PL. En esta sección, se presentan dos sistemas de software comúnmente utilizados: Excel Solver y AMPL. Solver tiene un atractivo específico para los usuarios de hojas de cálculo. AMPL es un lenguaje de modelado algebraico que, como todos los lenguajes de programación de alto nivel, requiere más conocimientos. No obstante, AMPL y otros lenguajes semejantes² ofrecen una gran flexibilidad de modelado. Aunque la presentación en esta sección se concentra en programaciones lineales, tanto AMPL como Solver pueden manejar problemas enteros y no lineales, como se mostrará en capítulos posteriores.

2.3.1 Solución de PL con Excel Solver

En Excel Solver, la hoja de cálculo es el medio de entrada y salida para la PL. La figura 2.4 muestra la distribución de los datos para el modelo de Reddy Mikks (archivo *solverRM1.xls*). La parte superior de la figura incluye cuatro tipos de información: (1) celdas para ingresar datos (B5:C9 y F6:F9); (2) celdas que representan las variables y la función objetivo (B13:D13); (3) definiciones algebraicas de la función objetivo y el lado izquierdo de las restricciones (celdas D5:D9); y (4) celdas que proporcionan nombres y símbolos explicativos (opcional). Solver solamente requiere los primeros tres tipos. El cuarto tipo mejora la legibilidad, aunque no sirve para ningún otro propósito. El posicionamiento relativo de los cuatro tipos de información en la hoja de cálculo (como se

² Entre otros paquetes comerciales conocidos están AIMMS, GAMS, LINGO, MPL, OPL Studio y Xpress Mosel.

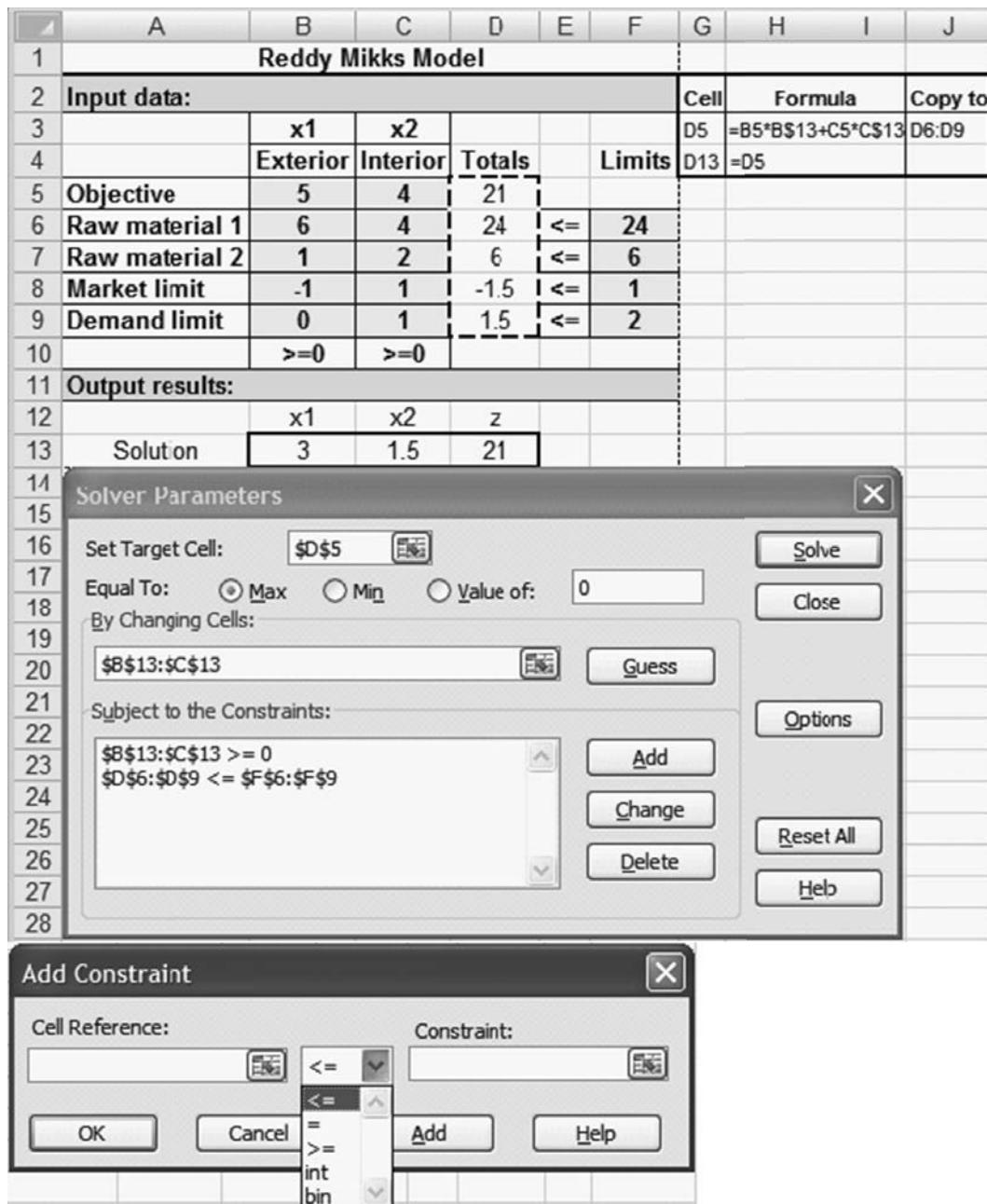


FIGURA 2.4

Definición del modelo de Reddy Mikks con Excel Solver (archivo *solverRMI.xls*)

sugiere en la figura 2.4) es conveniente para la referencia cruzada apropiada de las celdas en Solver, y se recomienda su uso.

¿Cómo se vincula Solver con los datos de la hoja de cálculo? En primer lugar, proporcionamos definiciones “algebraicas” de la función objetivo y el lado izquierdo de las restricciones me-

diente los datos de entrada (celdas B5:C9 y F6:F9), así como la función objetivo y las variables (celdas B13:D13). En seguida colocamos las fórmulas resultantes de forma apropiada en las celdas D5:D9, como se muestra en la siguiente tabla:

	Expresión algebraica	Fórmula en la hoja de cálculo	Ingresada en la celda
Objetivo, z	$5x_1 + 4x_2$	=B5*\$B\$13+C5*\$C\$13	D5
Restricción 1	$6x_1 + 4x_2$	=B6*\$B\$13+C6*\$C\$13	D6
Restricción 2	$x_1 + 2x_2$	=B7*\$B\$13+C7*\$C\$13	D7
Restricción 3	$-x_1 + x_2$	=B8*\$B\$13+C8*\$C\$13	D8
Restricción 4	$0x_1 + x_2$	=B9*\$B\$13+C9*\$C\$13	D9

En realidad, usted sólo tiene que ingresar la fórmula en la celda D5 y, después, copiarla en las celdas D6:D9. Para hacerlo de manera correcta, es necesario utilizar la *referencia fija* de las celdas que representan a x_1 y x_2 (es decir, \$B\$13 y \$C\$13, respectivamente).

Las fórmulas explícitas que se acaban de describir no son prácticas para PL grandes. En su lugar, la fórmula en la celda D5 se escribe en forma compacta como sigue:

$$= \text{SUMPRODUCT}(B5:C5,B13:C13)$$

La nueva fórmula puede copiarse entonces en las celdas D6:D9.

Ahora, todos los elementos del modelo de PL ya están listos para ejecutar el modelo. Haga clic en el menú Solver de la barra de herramientas³ de la hoja de cálculo, para acceder al cuadro de diálogo **Solver Parameters** (que se muestra en la parte media de la figura 2.4). A continuación, actualice el cuadro de diálogo como sigue:

Set Target Cell: \$D\$5
 Equal To: Max
 By Changing Cells: \$B\$13:\$C\$13

Esta información indica a Solver que las variables de PL (celdas \$B\$13 y \$C\$13) se determinan al maximizar la función objetivo en la celda \$D\$5.

Para establecer las restricciones, haga clic en el botón Add del cuadro de diálogo para desplegar el cuadro **Add Constraint** (en la parte inferior de la figura 2.4) y, luego, introduzca el tipo desigualdad en el lado izquierdo, y el lado derecho de las restricciones como⁴

$$\$D\$6:\$D\$9 <= \$F\$6:\$F\$9$$

Para las restricciones de no negatividad, haga clic en el botón Add una vez más e introduzca

$$\$B\$13:\$C\$13 >= 0$$

Otra forma de ingresar las restricciones no negativas es hacer clic en Options del cuadro de diálogo **Solver Parameters** para acceder a **Solver Options** (vea la figura 2.5) y, después, activar la casilla Assume Non-Negative. Además, en el mismo cuadro active la casilla Assume Linear Model.

³ Si Solver no aparece bajo el menú Data (en la barra del menú de Excel), haga clic en el botón Excel Office → Excel Options → Add Ins → Solver Add-in → OK; después, cierre y reinicie Excel.

⁴ En el cuadro de diálogo **Add Constraint** de la figura 2.4, las dos opciones adicionales **int** y **bin**, que significan **integer** y **binary**, se utilizan en programas enteros para limitar las variables a valores enteros o binarios (vea el capítulo 9).

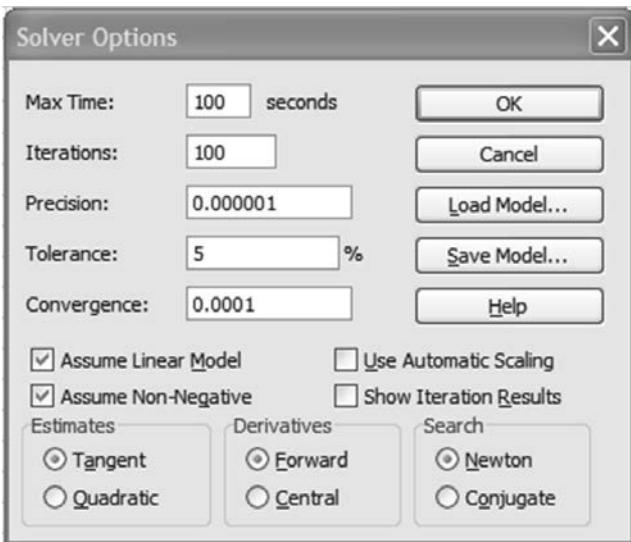


FIGURA 2.5

Cuadro de diálogo Solver Options (Opciones de Solver)

Por lo general, no es necesario cambiar los valores predeterminados restantes en **Solver Options**. Sin embargo, la precisión predeterminada de .000001 suele ser demasiado “alta” para algunos problemas, y Solver puede devolver de forma incorrecta el mensaje “Solver could not find a feasible solution” (Solver no pudo encontrar una solución factible). En esos casos, se tiene que especificar una precisión menor (es decir, un valor más grande). Si el mensaje persiste, entonces es posible que el problema sea no factible.

Los nombres de rango descriptivos de Excel pueden usarse para mejorar la legibilidad. Se crea un rango resaltando las celdas deseadas y escribiendo el nombre del rango en el cuadro superior izquierdo de la hoja, pulsando luego la tecla Return. En la figura 2.6 (archivo *solverRM2.xls*) se proporcionan los detalles con un resumen de los nombres de rango utilizados en el modelo. Es necesario cotejar el modelo contra el archivo *solverRM1.xls* para saber cómo se utilizan los rangos en las fórmulas.

Para resolver el problema, haga clic en el botón **Solve** del cuadro de diálogo **Solver Parameters**. De este modo, el estado de la solución aparece en el nuevo cuadro de diálogo **Solver Results**. Si la configuración del modelo es correcta, el valor óptimo de z aparecerá en la celda D5 y los valores de x_1 y x_2 aparecerán en las celdas B13 y C13, respectivamente. Por conveniencia, la celda D13 exhibe el valor óptimo de z al ingresar la fórmula =D5 en la celda D13, y en celdas contiguas aparece la solución óptima completa.

Si un problema no tiene una solución factible, Solver mostrará el mensaje explícito “Solver could not find a feasible solution” (Solver no pudo encontrar una solución factible). Si el valor objetivo óptimo es ilimitado (no finito), Solver emitirá un mensaje un tanto ambiguo “The Set Cell values do not converge” (Los valores de la celda no convergen). En cualquier caso, el mensaje indica que hay algo erróneo en la formulación del modelo, como se verá en la sección 3.5.

El cuadro de diálogo **Solver Results** da la oportunidad de solicitar más detalles sobre la solución, por ejemplo, los reportes de análisis de sensibilidad. En la sección 3.6.4 se analizarán estos resultados adicionales.

La solución del modelo de Reddy Mikks con Solver es directa. Otros modelos pueden requerir un “poco de imaginación” antes de poder establecerlos. Una clase de modelos de PL que caen en esta categoría tiene que ver con la optimización de redes, como se demostrará en el capítulo 6.

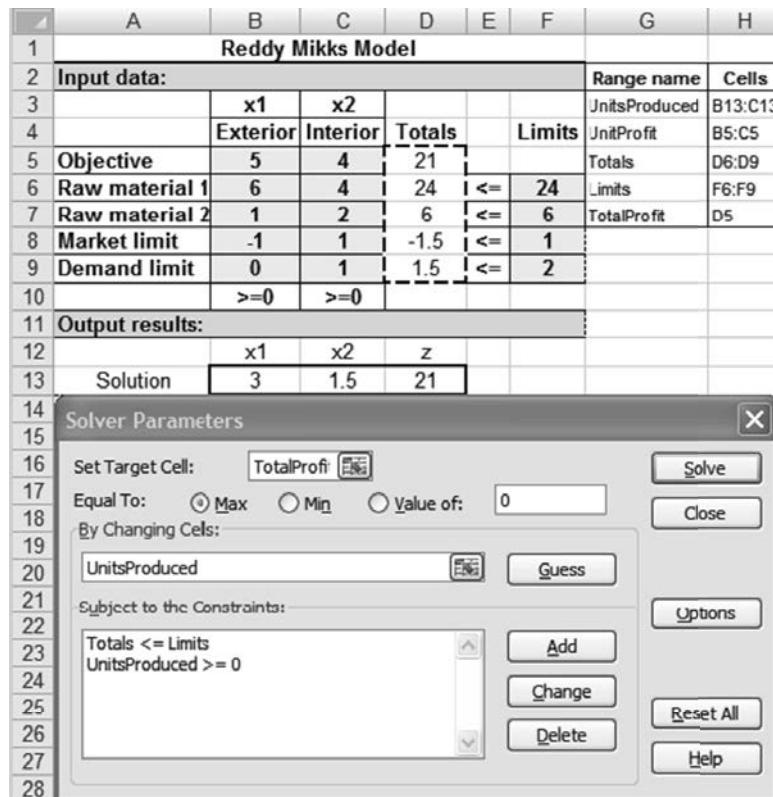


FIGURA 2.6

Uso de nombres de rango en Excel Solver (archivo *solverRM2.xls*)

2.3.2 Solución de PL con AMPL⁵

En esta sección se da una breve introducción a AMPL. Se hará referencia a la presentación de esta sección y a otras presentaciones de AMPL en el libro. Los dos ejemplos que aquí se desarrollan se refieren a los fundamentos de AMPL.

Problema de Reddy Mikks: Un modelo rudimentario. AMPL proporciona herramientas para modelar una PL en un formato manuscrito rudimentario. En la figura 2.7, se muestra un código autoexplicativo para el modelo de Reddy Mikks (archivo *amplRM1.txt*). Todas las palabras clave reservadas aparecen en negritas. Los demás nombres los genera el usuario. La función objetivo y cada una de las restricciones deben tener nombres distintos (generados por el usuario) seguidos de dos puntos. Cada instrucción se cierra con punto y coma.

El formato manuscrito es específico de cada problema, en el sentido de que se requiere un nuevo código siempre que se cambian los datos de entrada. Para problemas prácticos (con estructura compleja y muchas variables y restricciones), el formato manuscrito, en el mejor de los casos, resulta tedioso. AMPL elimina esta dificultad aplicando un código que divide el problema en dos componentes: (1) un modelo algebraico general para una clase específica de problemas aplicable

⁵ Para descargar AMPL visite el sitio web www.ampl.com donde encontrará las indicaciones para obtenerlo.

```

maximize z: 5*x1+4*x2;
subject to
  c1: 6*x1+4*x2<=24;
  c2: x1+2*x2<=6;
  c3: -x1+x2<=1;
  c4: x2<=2;
solve;
display z,x1,x2;

```

FIGURA 2.7

Modelo AMPL rudimentario para el problema de Reddy Mikks (archivo *amplRM1.txt*)

a cualquier cantidad de variables y restricciones, y (2) datos para controlar el modelo algebraico. La implementación de estos dos puntos se estudia en la siguiente sección mediante el problema de Reddy Mikks.

Problema de Reddy Mikks: Un modelo algebraico. En la figura 2.8 se presentan las instrucciones del modelo (archivo *amplRM2.txt*). El archivo debe ser estrictamente texto (ASCII). El símbolo # designa el inicio de los comentarios explicativos. Los comentarios pueden aparecer en renglones distintos, o después del punto y coma al final de una instrucción. El lenguaje es sensible a las mayúsculas o minúsculas, y todas sus palabras clave, con pocas excepciones, se escriben en minúsculas (la sección C.2 proporciona mayores detalles).

El modelo algebraico en AMPL visualiza el problema de PL general con n variables y m restricciones en el siguiente formato genérico (*restr* es un nombre generado por el usuario):

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar } z: \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 & \text{sujeto a } \text{restr}_i: \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \\
 & \quad x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Se dan a la función objetivo y a la restricción i los nombres (especificados por usuario) z y restr_i .

El modelo inicia con las instrucciones **param** que declaran a m, n, c, b y a_{ij} como parámetros (o constantes), cuyos valores específicos se dan en la sección de datos de entrada del modelo. Traduce $c_j (j = 1, 2, \dots, n)$ como $c\{1..n\}$; $b_i (i = 1, 2, \dots, m)$ como $b\{1..m\}$, y $a_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ como $a\{1..m, 1..n\}$. En seguida, las variables $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$, junto con la restricción de no negatividad, las define la instrucción **var**

```
var x{1..n}>=0;
```

Una variable se considera no restringida si elimina $>=0$ de su definición. La notación entre {} representa el conjunto de subíndices para los cuales se definen un **param** o una **var**.

El modelo se desarrolla en términos de los parámetros y las variables de la siguiente manera. La función objetivo y las restricciones tienen nombres distintos seguidos por dos puntos (:). La instrucción objetivo es una traducción directa de maximizar $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$:

```
maximize z: sum{j in 1..n}c[j]*x[j];
```

A la restricción i se le da el nombre raíz (arbitrario) **restr** con un índice dentro del conjunto $\{1..m\}$:

```
restr{i in 1..m}:sum{j in 1..n}a[i,j]*x[j]<=b[i];
```

```

#-----algebraic model
param m;
param n;
param c{1..n};
param b{1..m};
param a{1..m,1..n};

var x{1..n}==0;

maximize z: sum{j in 1..n}c[j]*x[j];
subject to restr{i in 1..m}:
           sum{j in 1..n}a[i,j]*x[j]<=b[i];

#-----specify model data
data;
param n:=2;
param m:=4;
param c:=1 5 2 4;
param b:=1 24 2 6 3 1 4 2;
param a:    1      2 := 
            1      6      4
            2      1      2
            3     -1      1
            4      0      1;

#-----solve the problem
solve;
display z, x;

```

FIGURA 2.8

Modelo AMPL del problema de Reddy Mikks con los datos de entrada en el código fuente (archivo *amplRM2.txt*)

La instrucción es una traducción directa de $\text{restr}_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$.

Ahora el modelo algebraico se utiliza con cualquier conjunto de datos aplicables que se puedan introducir después de la instrucción `data;`. Para el modelo de Reddy Mikks, los datos indican a AMPL que el problema tiene dos variables (`param n:=2;`) y cuatro restricciones (`param m:=4;`). Se debe utilizar el operador compuesto `:=` y la instrucción tiene que iniciar con la palabra clave `param`. Para los parámetros de un solo subíndice, `c` y `b`, cada elemento está representado por su índice seguido de su valor y separados, al menos, por un espacio en blanco. Así, $c_1 = 5$ y $c_2 = 4$ se introducen como

```
param c:= 1 5 2 4;
```

Los datos para `param b` se introducen de una manera similar.

Para el parámetro a_{ij} con subíndice doble, el conjunto de datos se lee como una matriz bidimensional con sus filas que designan a i y sus columnas que designan a j . El renglón superior define al subíndice j , y el subíndice i se introduce al inicio de cada fila como

```
param a: 1 2 :=  
1 6 4  
2 1 2  
3 -1 1  
4 0 1;
```

El conjunto de datos debe terminar con punto y coma. Observe la ubicación *obligatoria* del separador `:` y el operador compuesto `:=` después de `param a`.

Ahora el modelo y sus datos están listos. El comando `solve`; invoca el algoritmo de solución y el comando `display z, x;` proporciona la solución.

Para ejecutar el modelo, primero invoque AMPL (haga clic en `ampl.exe` del directorio de AMPL). En el indicador `ampl:` introduzca el siguiente comando `model` y, luego, pulse la tecla Return:

```
model amplRM2.txt;
```

Entonces, el resultado del sistema aparecerá en la pantalla como sigue:

```
MINOS 5.5: Optimal solution found.  
2 iterations, objective = 21  
  
z = 21  
x[*]:=  
  
1 = 3  
2 = 1.5
```

Los cuatro renglones inferiores son el resultado de ejecutar `display z, x;`. En realidad, AMPL dispone de capacidades de formateo que mejoran la legibilidad de los resultados de salida (vea la sección C.5.2).

AMPL permite separar el modelo algebraico y los datos en dos archivos independientes. Este arreglo es más conveniente porque el archivo de datos sólo se tiene que cambiar una vez que se ha desarrollado el modelo. Para mayores detalles, vea el final de la sección C.2.

AMPL ofrece una amplia variedad de capacidades de programación. Por ejemplo, los datos de entrada y salida pueden asegurarse para que no sean enviados a archivos, hojas de cálculo y bases de datos externos, y el modelo se ejecuta de forma activa para una amplia variedad de opciones.

2.4 APPLICACIONES DE PROGRAMACIÓN LINEAL

En esta sección se presentan modelos realistas de PL, en los cuales la definición de las variables y la construcción de la función objetivo, así como las restricciones, no son tan directas como en el caso del modelo de dos variables. Las áreas cubiertas por estas aplicaciones incluyen lo siguiente:

1. Inversión.
2. Planeación de la producción y control de inventarios.

3. Planeación de la mano de obra.
4. Planeación del desarrollo urbano.
5. Refinación y mezcla de petróleo.

Se detalla cada modelo y se interpreta su solución óptima.

2.4.1 Inversión

Existe una gran cantidad de oportunidades de inversión disponibles para los empresarios actuales. Ejemplos de problemas de inversión son la asignación de presupuestos de capital para proyectos, la estrategia de inversión en bonos, la selección de cartera de acciones y el establecimiento de una política de préstamos bancarios. En muchas de estas situaciones, la PL puede usarse para seleccionar la combinación óptima de oportunidades que maximizarán el rendimiento, al mismo tiempo que se satisfacen los requisitos establecidos por el inversionista y el mercado.

Ejemplo 2.4-1 (Modelo de préstamo bancario)

Bank One está en el proceso de diseñar una política de préstamos que implica un máximo de \$12 millones. La tabla siguiente muestra los datos pertinentes en relación con los préstamos disponibles.

Tipo de préstamo	Tasa de interés	Proporción de deudas incobrables
Personal	.140	.10
Automóvil	.130	.07
Hipotecario	.120	.03
Agrícola	.125	.05
Comercial	.100	.02

Las deudas incobrables son irrecuperables y no producen ingresos por intereses.

La competencia con otras instituciones financieras dicta la asignación de, al menos, 40% de los fondos para préstamos agrícolas y comerciales. Para ayudar a la industria de la construcción de viviendas en la región, los créditos hipotecarios deben ser por lo menos 50% de los préstamos personales, para automóvil e hipotecarios. El banco limita la proporción total de deudas incobrables en todos los préstamos a un máximo de 4%.

Modelo matemático: La situación se refiere a determinar el monto del préstamo en cada categoría, lo que conduce a las siguientes definiciones de las variables:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \text{préstamos personales (en millones de dólares)} \\
 x_2 &= \text{préstamos para automóvil} \\
 x_3 &= \text{préstamos hipotecarios} \\
 x_4 &= \text{préstamos agrícolas} \\
 x_5 &= \text{préstamos comerciales}
 \end{aligned}$$

El objetivo del Bank One es maximizar el rendimiento neto, la diferencia entre el ingreso por intereses y la pérdida por deudas incobrables. El ingreso por intereses se acumula sobre los préstamos al corriente en sus pagos. Por ejemplo, cuando se pierde 10% de préstamos personales por deuda incobrable, el banco recibirá

intereses sobre 90% del préstamo —es decir, recibirá un interés de 14% sobre $.9x_1$ del préstamo original x_1 . Este mismo razonamiento es válido para los cuatro tipos de préstamos restantes. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Interés total} &= .14(.9x_1) + .13(.93x_2) + .12(.97x_3) + .125(.95x_4) + .1(.98x_5) \\ &= .126x_1 + .1209x_2 + .1164x_3 + .11875x_4 + .098x_5\end{aligned}$$

También se tiene

$$\text{Deuda incobrable} = .1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5$$

La función objetivo combina el ingreso por intereses y la deuda incobrable como sigue

$$\begin{aligned}\text{Maximizar } z &= \text{Interés total} - \text{Deuda incobrable} \\ &= (.126x_1 + .1209x_2 + .1164x_3 + .11875x_4 + .098x_5) \\ &\quad - (.1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5) \\ &= .026x_1 + .0509x_2 + .0864x_3 + .06875x_4 + .078x_5\end{aligned}$$

El problema tiene cinco restricciones:

- 1.** *Los fondos totales no deberían exceder \$12 (millones):*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

- 2.** *Los préstamos agrícolas y comerciales deben ser iguales a, por lo menos, 40% de todos los créditos:*

$$x_4 + x_5 \geq .4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

o bien,

$$.4x_1 + .4x_2 + .4x_3 - .6x_4 - .6x_5 \leq 0$$

- 3.** *Los préstamos hipotecarios deben ser iguales a por lo menos 50% de los préstamos personales, para automóvil e hipotecarios:*

$$x_3 \geq .5(x_1 + x_2 + x_3)$$

o bien,

$$.5x_1 + .5x_2 - .5x_3 \leq 0$$

- 4.** *Las deudas incobrables no deberían exceder 4% de todos los préstamos:*

$$.1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5 \leq .04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

o bien,

$$.06x_1 + .03x_2 - .01x_3 + .01x_4 - .02x_5 \leq 0$$

- 5.** *No negatividad:*

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Un sutil supuesto en la formulación anterior es que todos los préstamos se emiten aproximadamente al mismo tiempo, lo cual permite ignorar las diferencias en el valor en el tiempo de los fondos asignados a los diferentes créditos.

Solución:

La solución óptima se calcula utilizando AMPL (archivo *amplEx2.4-1.txt*):

$$z = .99648, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 7.2, x_4 = 0, x_5 = 4.8$$

Comentarios.

1. Usted podría preguntarse por qué no se definió el lado derecho de la segunda restricción como $.4 \times 12$ en vez de $.4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$. Después de todo, parece razonable que el banco quiera prestar los \$12 millones. La respuesta es que el uso dado en la formulación no descarta esta posibilidad, pero hay dos razones más por las que no se debería utilizar $.4 \times 12$: (1) Si otras restricciones en el modelo son tales que *no puedan* usarse los \$12 millones (por ejemplo, el banco puede limitar los diferentes préstamos), entonces, la opción $.4 \times 12$ podría conducir a una solución incorrecta o no factible. (2) Si se desea experimentar con el efecto de cambiar los fondos disponibles (por ejemplo, de \$12 a \$13 millones) en la solución óptima, es posible que olvide cambiar $.4 \times 12$ a $.4 \times 13$, en cuyo caso la solución no será correcta. En el lado izquierdo de la cuarta restricción se aplica un razonamiento semejante.
2. La solución óptima indica que se asignen los \$12 millones: \$7.2 millones a préstamos hipotecarios y \$4.8 millones a préstamos comerciales. Las categorías restantes no reciben nada. El rendimiento de la inversión es

$$\text{Tasa de rendimiento} = \frac{z}{12} = \frac{.99648}{12} = .08034$$

Esto muestra que la tasa de rendimiento anual combinada es de 8.034%, que es menor que la mejor tasa de interés *neta* (= 8.64% para préstamos hipotecarios), y nos preguntamos por qué el modelo no toma ventaja de esta oportunidad. La respuesta es que la estipulación de que los préstamos agrícolas y comerciales deben ser iguales a, por lo menos, 40% de todos los préstamos (restricción 2) hace que la solución asigne \$4.8 millones a préstamos comerciales a la tasa *neta* más baja de 7.8%, de ahí la reducción de la tasa de interés total a $100\left(\frac{.0864 \times 7.2 + .078 \times 4.8}{12}\right) = 8.034\%$. De hecho, si eliminamos la restricción 2, la solución óptima asignará todos los fondos a préstamos hipotecarios a la tasa más alta de 8.64% (inténtelo usando el modelo de AMPL!).

2.4.2 Planeación de la producción y control del inventario

Existe una amplia variedad de aplicaciones de PL para planear la producción y para controlar inventarios. En esta sección se presentan tres ejemplos. El primero trata de la programación de la producción para satisfacer una demanda de un periodo único. El segundo se refiere al uso del inventario en un sistema de producción de períodos múltiples, para satisfacer la demanda futura. Y el tercero trata sobre el uso del inventario, y la contratación y el despido de trabajadores para “suavizar” la producción durante un horizonte de planeación de períodos múltiples.

Ejemplo 2.4-2 (Modelo de producción de un periodo único)

En preparación para la temporada invernal, una compañía de ropa está fabricando chamarra de piel con capucha y chamarra con relleno de plumas de ganso, pantalones con aislamiento y guantes. Todos los productos se elaboran en cuatro departamentos diferentes: corte, aislamiento, costura y empaque. La compañía recibió pedidos en firme de sus productos. El contrato estipula una penalización por los artículos no surtidos. Diseñe un plan de producción óptimo para la compañía con base en los siguientes datos:

Departamento	Tiempo por unidad (h)				Capacidad (h)	
	<i>Chamarras</i>					
	<i>Chamarras de piel</i>	<i>Chamarras con relleno de plumas</i>	<i>Pantalones</i>	<i>Guantes</i>		
Corte	.30	.30	.25	.15	1000	
Aislamiento	.25	.35	.30	.10	1000	
Costura	.45	.50	.40	.22	1000	
Empaque	.15	.15	.1	.05	1000	
Demanda	800	750	600	500		
Utilidad unitaria	\$30	\$40	\$20	\$10		
Penalización unitaria	\$15	\$20	\$10	\$8		

Modelo matemático: Las variables del problema son

$$x_1 = \text{cantidad de chamarras de piel}$$

$$x_2 = \text{cantidad de chamarras con relleno de plumas}$$

$$x_3 = \text{cantidad de pantalones}$$

$$x_4 = \text{cantidad de pares de guantes}$$

Se penaliza a la compañía si no satisface la demanda. Entonces, el objetivo es maximizar la utilidad neta, definida como

$$\text{Utilidad neta} = \text{Utilidad total} - \text{Penalización total}$$

La utilidad total es $30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4$. Para calcular la penalización total, las restricciones de la demanda pueden escribirse como

$$\begin{aligned} x_1 + s_1 &= 800, x_2 + s_2 = 750, x_3 + s_3 = 600, x_4 + s_4 = 500, \\ x_j &\geq 0, s_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

De esta forma, si se produjeron 500 chamarras de piel, entonces $X_1 = 500$ con una escasez relacionada de $800 - 500 = 300$ chamarras de piel, al expresar entonces la escasez de cualquier producto definiendo la variable s_j .

La nueva variable s_j representa la escasez en la demanda del producto j , y la penalización total se puede calcular como $15s_1 + 20s_2 + 10s_3 + 8s_4$. Así, el modelo completo se convierte en

$$\text{Maximizar } z = 30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4 - (15s_1 + 20s_2 + 10s_3 + 8s_4)$$

sujeto a

$$.30x_1 + .30x_2 + .25x_3 + .15x_4 \leq 1000$$

$$.25x_1 + .35x_2 + .30x_3 + .10x_4 \leq 1000$$

$$.45x_1 + .50x_2 + .40x_3 + .22x_4 \leq 1000$$

$$.15x_1 + .15x_2 + .10x_3 + .05x_4 \leq 1000$$

$$x_1 + s_1 = 800, x_2 + s_2 = 750, x_3 + s_3 = 600, x_4 + s_4 = 500$$

$$x_j \geq 0, s_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

Solución:

La solución óptima (obtenida utilizando el archivo *AMPLEx2.4-2.txt*) es $z = \$64,625$, $x_1 = 800$, $x_2 = 750$; $x_3 = 387.5$, $x_4 = 500$, $s_1 = s_2 = s_4 = 0$, $s_3 = 212.5$. La solución satisface toda la demanda de ambos tipos de chaqueta y los guantes. Un déficit de 213 (212.5 redondeado) pantalones resultará en un costo de penalización de $213 \times \$10 = \2130 .

Ejemplo 2.4-3 (Modelo de producción e inventario con períodos múltiples)

La compañía Acme Manufacturing firmó un contrato para entregar 100, 250, 190, 140, 220 y 110 ventanas para casa durante los siguientes seis meses. El costo de producción (mano de obra, material y servicios) por ventana varía por periodo y se estima que será de \$50, \$45, \$55, \$48, \$52 y \$50 durante los próximos seis meses. Para aprovechar las fluctuaciones del costo de manufactura, Acme puede producir más ventanas de las necesarias en un mes dado y conservar las unidades adicionales para entregarlas en meses posteriores. Esto supondrá un costo de almacenamiento a razón de \$8 por ventana por mes, estimado en el inventario de fin de mes. Desarrolle un programa lineal para determinar el programa de producción óptimo.

Modelo matemático: Las variables del problema incluyen la cantidad de producción mensual y el inventario al final de mes. Para $i = 1, 2, \dots, 6$, sean

x_i = Cantidad de unidades producidas en el mes i

I_i = Unidades que quedan en el inventario al final del mes i

Las relaciones entre estas variables y la demanda mensual durante el horizonte de 6 meses se representan de manera esquemática en la figura 2.9. El sistema comienza estando vacío ($I_0 = 0$).

El objetivo es minimizar el costo total de producción y el inventario al final del mes.

$$\text{Costo de producción total} = 50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6$$

$$\text{Costo total del inventario (almacenamiento)} = 8(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)$$

Por consiguiente, la función objetivo es

$$\text{Minimizar } z = 50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6 + 8(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)$$

Las restricciones del problema se determinan directamente a partir de la representación que aparece en la figura 2.9. Para cada periodo se tiene la siguiente ecuación de balance:

$$\text{Inventario inicial} + \text{Cantidad de producción} - \text{Inventario final} = \text{Demanda}$$

Que se traduce matemáticamente para los meses individuales como

$$x_1 - I_1 = 100 \quad (\text{Mes 1})$$

$$I_1 + x_2 - I_2 = 250 \quad (\text{Mes 2})$$

$$I_2 + x_3 - I_3 = 190 \quad (\text{Mes 3})$$

$$I_3 + x_4 - I_4 = 140 \quad (\text{Mes 4})$$

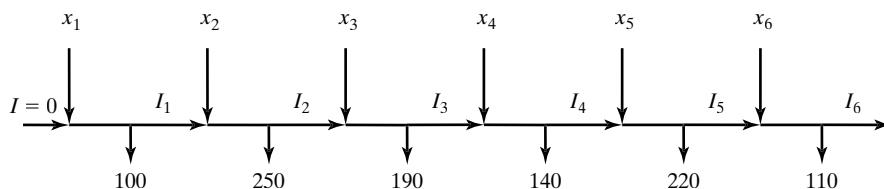
$$I_4 + x_5 - I_5 = 220 \quad (\text{Mes 5})$$

$$I_5 + x_6 = 110 \quad (\text{Mes 6})$$

$$x_i, i = 1, 2, \dots, 6, I_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 5$$

FIGURA 2.9

Representación esquemática del sistema de producción e inventario



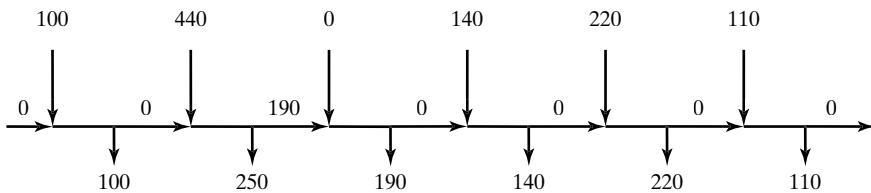


FIGURA 2.10

Solución óptima del problema de producción e inventario

Observe que el inventario inicial, I_0 , es cero. Además, en cualquier solución óptima, el inventario final I_6 será cero, porque no es costeable incurrir en costos de almacenamiento adicionales innecesarios.

Solución:

La solución óptima (obtenida utilizando el archivo *ampLEX2.4-3.txt*) se resume en la figura 2.10. Muestra que la demanda de cada mes se satisface con la misma producción del mes, excepto en el mes 2, donde la cantidad producida (440 unidades) cubre la demanda de los meses 2 y 3. El costo total asociado es $z = \$49,980$.

Ejemplo 2.4-4 (Modelo de suavización de la producción para períodos múltiples)

Una compañía está planeando fabricar un producto para marzo, abril, mayo y junio del próximo año. Las cantidades demandadas son 520, 720, 520 y 620 unidades, respectivamente. La compañía tiene una fuerza de trabajo permanente de 10 empleados, pero puede satisfacer las necesidades de producción fluctuantes contratando y despidiendo a trabajadores temporales. Los costos adicionales de contratar y despedir un trabajador temporal en cualquier mes son de \$200 y \$400, respectivamente. Un trabajador permanente produce 12 unidades por mes; y uno temporal, que no tiene la misma experiencia, produce 10 unidades mensuales. La compañía puede producir más de lo necesario en cualquier mes y guardar el excedente para el mes siguiente a un costo de almacenamiento de \$50 mensuales por unidad. Desarrolle una política óptima de contratación y despido durante el horizonte de planeación de 4 meses.

Modelo matemático: Este modelo es semejante al del ejemplo 2.4-3, en el sentido de que cada mes tiene su producción, demanda e inventario final. La única excepción es el manejo de una fuerza de trabajo permanente contra una temporal.

Los trabajadores permanentes (10 en total) pueden tomarse en cuenta restando las unidades que producen de la demanda mensual respectiva. Entonces, la demanda restante se satisface contratando y despidiendo trabajadores temporales. Por lo tanto,

$$\text{Demanda restante para marzo} = 520 - 12 \times 10 = 400 \text{ unidades}$$

$$\text{Demanda restante para abril} = 720 - 12 \times 10 = 600 \text{ unidades}$$

$$\text{Demanda restante para mayo} = 520 - 12 \times 10 = 400 \text{ unidades}$$

$$\text{Demanda restante para junio} = 620 - 12 \times 10 = 500 \text{ unidades}$$

Las variables del modelo para el mes i se definen como

x_i = Cantidad neta de trabajadores temporales al inicio del mes i después de cualquier contratación o despido

S_i = Cantidad de trabajadores temporales contratados o despedidos al inicio del mes i

I_i = Unidades del inventario final para el mes i

Por definición, x_i e I_i son no negativas, mientras que S_i es *no restringida en cuanto al signo* porque es igual a la cantidad de trabajadores contratados o despedidos en el mes i . Éste es el primer caso de este capítulo donde se usa una variable no restringida. Como se verá en breve, se requiere una sustitución especial para permitir la contratación y el despido en el modelo.

En este modelo, el desarrollo de la función objetivo requiere construir primero las restricciones. La cantidad de unidades producidas en el mes i por x_i trabajadores temporales es $10x_i$. Así, se tienen las siguientes restricciones de inventario:

$$\begin{aligned} 10x_1 &= 400 + I_1 \quad (\text{Marzo}) \\ I_1 + 10x_2 &= 600 + I_2 \quad (\text{Abril}) \\ I_2 + 10x_3 &= 400 + I_3 \quad (\text{Mayo}) \\ I_3 + 10x_4 &= 500 \quad (\text{Junio}) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0, I_1, I_2, I_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Para contratación y despido, la fuerza de trabajo temporal se inicia con x_1 trabajadores a principios de marzo. A principios de abril, x_1 se ajustará (hacia arriba o hacia abajo) con S_2 trabajadores temporales para generar x_2 . La misma idea se aplica a x_3 y x_4 , lo que conduce a las siguientes ecuaciones de restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= S_1 \\ x_2 &= x_1 + S_2 \\ x_3 &= x_2 + S_3 \\ x_4 &= x_3 + S_4 \\ S_1, S_2, S_3, S_4 &(\text{no restringidas en signo}) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

A continuación, se desarrolla la función objetivo. La meta es minimizar el costo del inventario más el costo de contratación y despido. Como en el ejemplo 2.4-3,

$$\text{Costo de almacenamiento de inventario} = 50(I_1 + I_2 + I_3)$$

El modelado del costo de contratación y despido es un poco complicado. Dado que los costos de contratar y despedir a un trabajador temporal son de \$200 y \$400, respectivamente, se tiene

$$\left(\begin{array}{l} \text{Costo de contratación} \\ \text{y despido} \end{array} \right) = 200 \left(\begin{array}{l} \text{Cantidad de trabajadores temporales} \\ \text{contratados al inicio de cada mes} \end{array} \right) + 400 \left(\begin{array}{l} \text{Cantidad de trabajadores temporales} \\ \text{despedidos al inicio de cada mes} \end{array} \right)$$

Si la variable S_i es positiva, ocurre una contratación en el mes i . Si es negativa, entonces ocurre un despido. Esta valoración “cuantitativa” se traduce matemáticamente aplicando la sustitución

$$S_i = S_i^- - S_i^+, \text{ donde } S_i^-, S_i^+ \geq 0$$

Ahora la variable irrestricta S_i es la diferencia entre las dos variables no negativas S_i^- y S_i^+ . Se puede pensar en S_i^- como la cantidad de trabajadores temporales contratados, y en S_i^+ como la de despedidos. Por ejemplo, si $S_i^- = 5$ y $S_i^+ = 0$, entonces $S_i = 5 - 0 = +5$, lo que representa contratación. Si $S_i^- = 0$ y $S_i^+ = 7$, entonces $S_i = 0 - 7 = -7$, lo que representa despido. En el primer caso, el costo de contratación correspondiente es $200S_i^- = 200 \times 5 = \1000 y, en el segundo caso, el costo de despido correspondiente es $400S_i^+ = 400 \times 7 = \2800 .

La sustitución $S_i = S_i^- - S_i^+$ es la base para el desarrollo del costo de contratación y despido. Primero tenemos que responder una posible pregunta: ¿Qué sucede si tanto S_i^- como S_i^+ son valores positivos? La

respuesta es que esto no puede ocurrir porque implica tanto contratación como despido en el mismo mes. De manera interesante, la teoría de la PL (capítulo 7) nos indica que S_i^- y S_i^+ no pueden ser positivos al mismo tiempo, un resultado matemático que confirma la intuición.

Ahora podemos escribir el costo total de contratación y despido como

$$\text{Costo de despido} = 200(S_1^- + S_2^- + S_3^- + S_4^-)$$

$$\text{Costo de contratación} = 400(S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S_4^+)$$

Parecería necesario sumar a z la cantidad de $400x_4$ que representa el costo de despedir a x_4 trabajadores temporales al final del horizonte. Desde el punto de vista de la optimización, este factor se toma en cuenta por la presencia de S_4^+ en la función objetivo. Por consiguiente, el óptimo no cambiará, excepto al inflar el óptimo z en $400x_4$ (inténtelo!).

El modelo completo es

$$\text{Minimizar } z = 50(I_1 + I_2 + I_3) + 200(S_1^- + S_2^- + S_3^- + S_4^-) + 400(S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S_4^+)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 10x_1 &= 400 + I_1 \\ I_1 + 10x_2 &= 600 + I_2 \\ I_2 + 10x_3 &= 400 + I_3 \\ I_3 + 10x_4 &= 500 \\ x_1 &= S_1^- - S_1^+ \\ x_2 &= x_1 + S_2^- - S_2^+ \\ x_3 &= x_2 + S_3^- - S_3^+ \\ x_4 &= x_3 + S_4^- - S_4^+ \\ S_1^-, S_1^+, S_2^-, S_2^+, S_3^-, S_3^+, S_4^-, S_4^+ &\geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ I_1, I_2, I_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

La solución óptima (obtenida mediante el uso del archivo *amplEx2.4-4.txt*) es $z = \$19,500$, $x_1 = 50$, $x_2 = 50$, $x_3 = 45$, $x_4 = 45$, $S_1^- = 50$, $S_3^+ = 5$, $I_1 = 100$, $I_3 = 50$. Todas las demás variables son cero. La solución requiere contratar a 50 trabajadores temporales en marzo ($S_1^- = 50$), y conservar la fuerza de trabajo permanente hasta mayo, cuando se despide a 5 trabajadores temporales. No se recomienda ninguna otra contratación ni despido hasta finales de junio cuando, supuestamente, todos los trabajadores temporales serán despedidos. Esta solución requiere que se conserven 100 unidades de inventario hasta mayo y 50 unidades hasta junio.

2.4.3 Planeación de la fuerza de trabajo

Aplicación de la vida real: Planeación de la fuerza de ventas telefónicas en Qantas Airways

La aerolínea australiana Qantas opera sus principales oficinas de reservas desde las 7:00 hasta las 22:00 usando seis turnos que comienzan en diferentes momentos del día. Qantas usó PL (junto

con análisis de colas) para proveer de personal a su oficina principal de ventas telefónicas, mientras otorgaba un servicio eficiente a sus clientes. El estudio, realizado a finales de la década de 1970, dio como resultado ahorros anuales por más de 200,000 dólares australianos al año.

Las fluctuaciones en una fuerza de trabajo para satisfacer la demanda variable en el tiempo pueden lograrse mediante el proceso de contratación y despido, como se demostró en el ejemplo 2.4-4. Hay situaciones en las que el efecto de las fluctuaciones de la demanda puede ser “absorbido” ajustando las horas de inicio y terminación de un turno de trabajo. Por ejemplo, en vez de respetar las horas de inicio de los tres turnos de 8 horas tradicionales a las 8:00 A.M., 3:00 P.M. y 11:00 P.M., es posible utilizar turnos de 8 horas con traslapes, en los que la hora de inicio de cada uno se establece en respuesta al incremento o la reducción de la demanda.

La idea de redefinir el inicio de un turno para absorber la fluctuación de la demanda también puede extenderse a otros ambientes operativos. El ejemplo 2.4-5 trata de la determinación de la cantidad mínima de autobuses que se requieren para satisfacer las necesidades de transporte durante las horas pico y las regulares.

Ejemplo 2.4-5 (Modelo de horarios de autobuses)

Progress City estudia la factibilidad de utilizar un sistema de autobuses de transportación masiva para reducir el tránsito urbano. El estudio busca la cantidad mínima de autobuses que satisfaga las necesidades de transporte. Después de reunir la información necesaria, el ingeniero de la ciudad observó que la cantidad mínima de autobuses que se requerían fluctuaba según la hora del día, y esta cantidad se podía representar de forma aproximada por valores constantes durante intervalos sucesivos de 4 horas. En la figura 2.11 se resumen los hallazgos del ingeniero. Para realizar el mantenimiento diario requerido, cada autobús puede operar sólo 8 horas continuas al día.

Modelo matemático: Las variables del modelo son la cantidad de autobuses necesarios en cada turno, y las restricciones tienen que ver con la satisfacción de la demanda. El objetivo es minimizar la cantidad de autobuses en operación.

La definición expresada de las variables es un tanto “imprecisa.” Se sabe que cada autobús circulará durante 8 horas consecutivas, pero no cuándo debería iniciar un turno. Si se sigue un horario normal de tres turnos (8:01 A.M. a 4:00 P.M., 4:01 P.M. a 12:00 de medianoche, y 12:01 A.M. a 8:00 A.M.) y se supone que x_1 , x_2 y x_3 son las cantidades de autobuses que inician en el primero, segundo y tercer turnos, en la figura 2.11 se observa que $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 12$ y $x_3 \geq 8$. La cantidad mínima correspondiente de autobuses diarios es $x_1 + x_2 + x_3 = 10 + 12 + 8 = 30$.

La solución dada es aceptable sólo si los turnos *deben* coincidir con el horario normal de tres turnos. Sin embargo, una ventaja sería que el proceso de optimización eligiera la “mejor” hora de inicio para un turno. Una forma razonable de hacerlo es permitir que se inicie un turno cada 4 horas. La parte inferior de la figura 2.11 ilustra esta idea con turnos de 8 horas traslapados que inician a las 12:01 A.M., 4:01 A.M., 8:01 A.M., 12:01 P.M., 4:01 P.M. y 8:01 P.M. Así, las variables se definen como

$$x_1 = \text{cantidad de autobuses que comienzan a las 12:01 A.M.}$$

$$x_2 = \text{cantidad de autobuses que comienzan a las 4:01 A.M.}$$

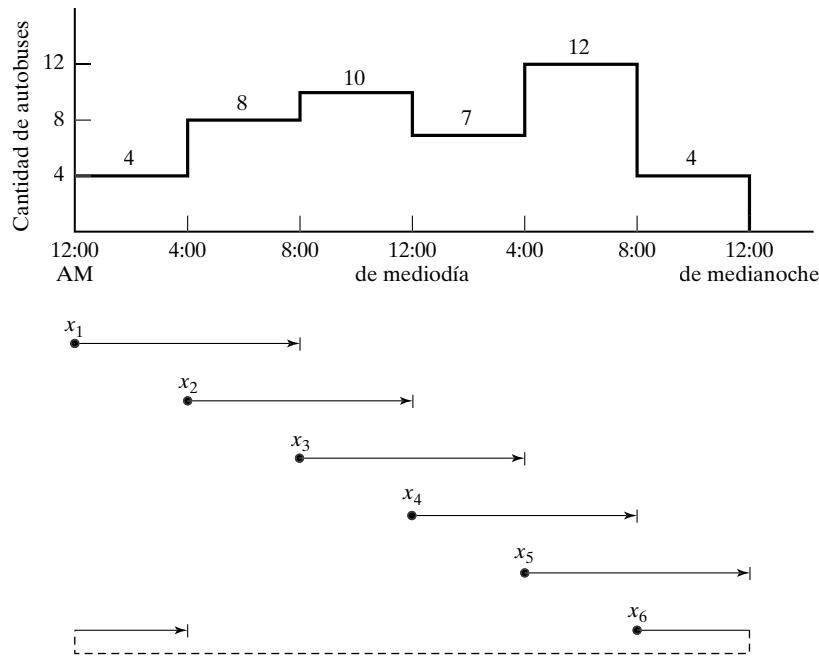


FIGURA 2.11

Cantidad de autobuses en función de la hora del día

 x_3 = cantidad de autobuses que comienzan a las 8:01 A.M. x_4 = cantidad de autobuses que comienzan a las 12:01 P.M. x_5 = cantidad de autobuses que comienzan a las 4:01 P.M. x_6 = cantidad de autobuses que comienzan a las 8:01 P.M.

En la figura 2.11 se observa que, debido al traslape de los turnos, la cantidad de autobuses durante los períodos sucesivos de 4 horas se calcula como sigue:

Periodo de tiempo	Cantidad de autobuses en operación
12:01 A.M. a 4:00 A.M.	$x_1 + x_6$
4:01 A.M. a 8:00 A.M.	$x_1 + x_2$
8:01 A.M. a 12:00 del medio día	$x_2 + x_3$
12:01 P.M. a 4:00 P.M.	$x_3 + x_4$
4:01 P.M. a 8:00 P.M.	$x_4 + x_5$
8:01 A.M. a 12:00 A.M.	$x_5 + x_6$

Así, el modelo completo se convierte en

$$\text{Minimizar } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 x_1 &+ x_6 \geq 4 \text{ (12:01 A.M.-4:00 A.M.)} \\
 x_1 + x_2 &\geq 8 \text{ (4:01 A.M.-8:00 A.M.)} \\
 x_2 + x_3 &\geq 10 \text{ (8:01 A.M.-12:00 del mediodía)} \\
 x_3 + x_4 &\geq 7 \text{ (12:01 P.M.-4:00 P.M.)} \\
 x_4 + x_5 &\geq 12 \text{ (4:01 P.M.-8:00 P.M.)} \\
 x_5 + x_6 &\geq 4 \text{ (8:01 P.M.-12:00 P.M.)} \\
 x_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, 6
 \end{aligned}$$

Solución:

La solución óptima (obtenida utilizando el archivo *amplEx2.4-5.xls*, *solverEx2.4-5.xls* o *toraEx2.4-5.txt*) requiere programar 26 autobuses (comparados con 30 cuando se utilizan los tres turnos tradicionales). El horario requiere que $x_1 = 4$ autobuses empiecen a las 12:01 A.M., $x_2 = 10$ a las 4:01 A.M., $x_4 = 8$ a las 12:01 P.M. y $x_5 = 4$ a las 4:01 P.M. (*Nota:* El archivo *solverEx2.4-5.xls* genera la solución óptima alternativa $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$, $x_5 = 6$ y $x_6 = 2$, con $z = 26$).

2.4.4 Planeación del desarrollo urbano⁶

La planeación urbana implica atender tres áreas generales: (1) construcción de nuevos desarrollos de vivienda; (2) remodelación de viviendas deterioradas y áreas recreativas urbanas, y (3) planeación de edificios públicos (como escuelas y aeropuertos). Las restricciones asociadas con estos proyectos son tanto económicas (terreno, construcción y financiamiento) como sociales (escuelas, parques y nivel de ingresos). Los objetivos en la planeación urbana varían. En los nuevos desarrollos de vivienda, la utilidad suele ser el motivo para adoptar el proyecto. En las dos categorías restantes, los objetivos implican consideraciones sociales, políticas, económicas y culturales. De hecho, en un caso divulgado en 2004, el alcalde de una ciudad en Ohio deseaba demoler una área vieja de la ciudad para construir departamentos de lujo. El motivo era incrementar la recaudación de impuestos para aliviar la escasez de presupuesto. El ejemplo de esta sección se elaboró con base en el caso de Ohio.

Ejemplo 2.4-6 (Modelo de renovación urbana)

La ciudad de Ersville se enfrenta a una grave escasez de presupuesto. En busca de una solución a largo plazo, el concejo de la ciudad propone aumentar la base tributaria mediante la demolición de un área de viviendas dentro de la ciudad, para reemplazarla con un desarrollo moderno.

El proyecto implica dos fases: (1) demolición de casas precarias para obtener el terreno del nuevo desarrollo, y (2) construcción del nuevo desarrollo. En seguida se presenta un resumen de la situación.

1. Se pueden demoler 300 casas precarias. Cada una ocupa un lote de .25 acres. El costo de demoler una casa es de \$2000.
2. Los tamaños de los lotes para construir casas (unidades) sencillas, dobles, triples y cuádruples son de .18, .28, .4 y .5 acres, respectivamente. Las calles, los espacios abiertos y el área para la instalación de servicios ocupan 15% del área disponible.

⁶ Esta sección se basa en Laidlaw (1972).

3. En el nuevo desarrollo, las unidades triples y cuádruples ocupan, por lo menos, 25% del total. Las unidades sencillas deben ser al menos 20% de todas las unidades, y las unidades dobles deben ocupar un mínimo de 10%.
4. El impuesto por unidad aplicado a las unidades sencillas, dobles, triples y cuádruples es de \$1000, \$1900, \$2700 y \$3400, respectivamente.
5. El costo de construcción por unidad de las casas sencillas, dobles, triples y cuádruples es de \$50,000, \$70,000, \$130,000 y \$160,000, respectivamente.
6. El financiamiento a través de un banco local está limitado a \$15 millones.

¿Cuántas unidades de cada tipo se deberían construir para maximizar la recaudación de impuestos?

Modelo matemático: Además de determinar cuántas unidades se construirán de cada tipo de vivienda, también es necesario decidir cuántas casas se tienen que demoler con la finalidad de crear el espacio para el nuevo desarrollo. Así que las variables del problema se definen como sigue:

$$\begin{aligned}x_1 &= \text{Cantidad de casas sencillas} \\x_2 &= \text{Cantidad de casas dobles} \\x_3 &= \text{Cantidad de casas triples} \\x_4 &= \text{Cantidad de casas cuádruples} \\x_5 &= \text{Cantidad de casas precarias por demoler}\end{aligned}$$

El objetivo es maximizar la recaudación total de impuestos provenientes de los cuatro tipos de casas –es decir,

$$\text{Maximizar } z = 1000x_1 + 1900x_2 + 2700x_3 + 3400x_4$$

La primera restricción del problema trata de la disponibilidad del terreno.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Acres utilizados para la construcción} \\ \text{de casas nuevas} \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{l} \text{Área neta disponible} \\ \text{en acres} \end{array} \right)$$

A partir de los datos del problema, se tiene

$$\text{Acres necesarios para casas nuevas} = .18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4$$

Para determinar la cantidad de acres disponibles, cada casa demolida ocupa un lote de .25 acres, es decir, $.25x_5$ acres. Considerando 15% para espacios abiertos, calles y áreas para servicios, la cantidad neta de acres disponibles es de $.85(.25x_5) = .2125x_5$. La restricción resultante es

$$.18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4 \leq .2125x_5$$

o bien,

$$.18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4 - .2125x_5 \leq 0$$

La cantidad de casas demolidas no puede ser superior a 300, lo cual se expresa como

$$x_5 \leq 300$$

En seguida se agregan las restricciones que limitan la cantidad de casas de cada tipo

$$(\text{Cantidad de casas sencillas}) \geq (20\% \text{ de todas las casas})$$

$$(\text{Cantidad de casas dobles}) \geq (10\% \text{ de todas las casas})$$

$$(\text{Cantidad de casas triples y cuádruples}) \geq (25\% \text{ de todas las casas})$$

Estas restricciones se traducen matemáticamente como

$$\begin{aligned}x_1 &\geq .2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\x_2 &\geq .1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\x_3 + x_4 &\geq .25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\end{aligned}$$

La única restricción restante se refiere a que el costo de demolición y construcción debe mantenerse dentro del presupuesto permisible; es decir,

$$(Costo de construcción y demolición) \leq (\text{Presupuesto disponible})$$

Al expresar todos los costos en miles de dólares, se tiene

$$(50x_1 + 70x_2 + 130x_3 + 160x_4) + 2x_5 \leq 15000$$

Entonces, el modelo completo se convierte en

$$\text{Maximizar } z = 1000x_1 + 1900x_2 + 2700x_3 + 3400x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned}.18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4 - .2125x_5 &\leq 0 \\x_5 &\leq 300 \\-.8x_1 + .2x_2 + .2x_3 + .2x_4 &\leq 0 \\.1x_1 - .9x_2 + .1x_3 + .1x_4 &\leq 0 \\.25x_1 + .25x_2 - .75x_3 - .75x_4 &\leq 0 \\50x_1 + 70x_2 + 130x_3 + 160x_4 + 2x_5 &\leq 15000 \\x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0\end{aligned}$$

Solución:

La solución óptima (obtenida mediante el uso del archivo *amplEX2.4-6.txt* o *solverEx2.4-6.xls*) es:

$$\begin{aligned}\text{Recaudación total de impuestos} &= z = \$343,965 \\ \text{Cantidad de casas sencillas} &= x_1 = 35.83 \approx 36 \text{ unidades} \\ \text{Cantidad de casas dobles} &= x_2 = 98.53 \approx 99 \text{ unidades} \\ \text{Cantidad de casas triples} &= x_3 = 44.79 \approx 45 \text{ unidades} \\ \text{Cantidad de casas cuádruples} &= x_4 = 0 \text{ unidades} \\ \text{Cantidad de casas demolidas} &= x_5 = 244.49 \approx 245 \text{ unidades}\end{aligned}$$

Comentarios. La programación lineal no garantiza una solución entera de manera automática, y ésta es la razón por la que se redondean los valores continuos al entero más próximo. La solución redondeada requiere que se construyan 180 (= 36 + 99 + 45) casas y que se demuelan 245 casas viejas, lo cual genera \$345,600 en impuestos. Sin embargo, tenga en cuenta que quizás no sea factible una solución redondeada. De hecho, la solución redondeada actual quebranta la restricción del presupuesto por \$70,000 (¡verifíquelo!). No obstante, la solución entera óptima verdadera (usando los algoritmos que se presentan en el capítulo 9) es $x_1 = 36$, $x_2 = 98$, $x_3 = 45$, $x_4 = 0$ y $x_5 = 245$ con $z = \$343,700$. Observe con cuidado que la solución redondeada produce un mejor valor objetivo, lo cual parece contradictorio. La razón es que la solución redondeada requiere que se produzca una casa doble adicional, que es factible sólo si el presupuesto se incrementa en \$70,000.

2.4.5 Mezcla y refinación

Existen varias aplicaciones de PL que tratan con la mezcla de diferentes materiales de insumo para fabricar productos que satisfagan ciertas especificaciones, al mismo tiempo que se minimiza el costo y se maximiza la utilidad. Los materiales de insumo pueden ser minerales, desechos metálicos, sustancias químicas o petróleos crudos, y los productos pueden ser lingotes de metal, pinturas o gasolina de varios grados. En esta sección se presenta un modelo (simplificado) para la refinación de petróleo. El proceso se inicia con la refinación de petróleo crudo para crear reservas de gasolina y, luego, mezclarlas con la finalidad de elaborar productos derivados. Los productos finales deben satisfacer ciertas especificaciones de calidad (como la clasificación de octanaje). Asimismo, las capacidades de refinación y los límites de la demanda afectan directamente el nivel de producción de los diferentes grados de gasolina. Un objetivo del modelo es determinar la mezcla óptima de producción de gasolina que maximice una función de utilidad adecuada. En algunos casos, la meta consiste en minimizar una función de costo.

Ejemplo 2.4-7 (Refinación de petróleo crudo y mezcla de gasolinas)

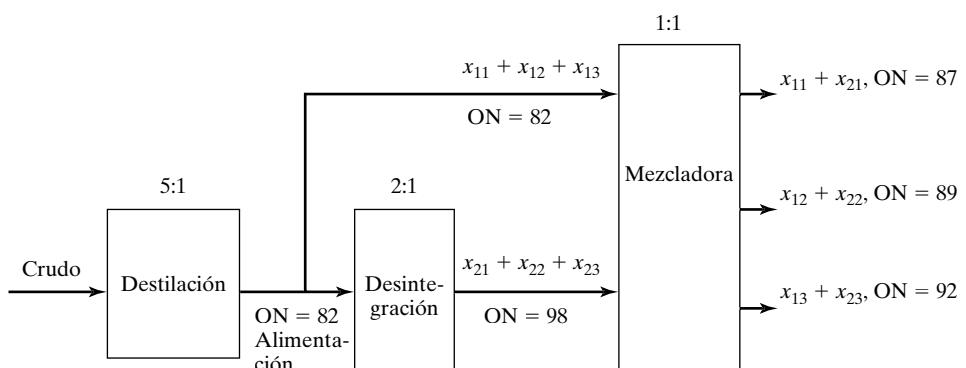
Shale Oil, localizada en la isla de Aruba, tiene una capacidad de 1,500,000 barriles de petróleo crudo al día. Los productos finales de la refinería incluyen tres tipos de gasolina sin plomo con diferentes octanajes (ON, octane numbers): regular con ON = 87; premium con ON = 89 y súper con ON = 92. El proceso de refinación comprende tres etapas: (1) una torre de destilación que produce una carga de alimentación (ON = 82) a razón de .2 barriles por barril de petróleo crudo; (2) una unidad de desintegración que produce gasolina cruda (ON = 98) utilizando una parte de la carga de alimentación producida por la torre de destilación, a razón de 5 barriles por barril de carga de alimentación, y (3) una unidad mezcladora que mezcla la gasolina cruda proveniente de la unidad de desintegración y la carga de destilación proveniente de la torre de destilación. La compañía estima que la utilidad neta por barril de los tres tipos de gasolina deberá ser de \$6.70, \$7.20 y \$8.10, respectivamente. La capacidad de la unidad de desintegración es de 200,000 barriles de carga al día. La demanda de gasolinas regular, premium y súper es de 50,000, 30,000 y 40,000 barriles diarios, respectivamente. Desarrolle un modelo para determinar el programa de producción óptimo para la refinería.

Modelo matemático: En la figura 2.12 se resumen los elementos del modelo. Las variables pueden definirse en términos de dos corrientes de insumos a la mezcladora (carga de alimentación y gasolina desintegrada) y los tres productos finales. Sea

x_{ij} = barriles al día de materia prima del proceso i utilizada para mezclar el producto final j , $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$

FIGURA 2.12

Flujo del producto en el problema de la refinería



Al aplicar esta definición, se tiene

$$\text{Producción diaria de gasolina regular} = x_{11} + x_{21} \text{ barriles/día}$$

$$\text{Producción diaria de gasolina premium} = x_{12} + x_{22} \text{ barriles/día}$$

$$\text{Producción diaria de gasolina súper} = x_{13} + x_{23} \text{ barriles/día}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{Producción diaria de} \\ \text{la unidad mezcladora} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{l} \text{Producción diaria} \\ \text{de gasolina regular} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Producción diaria} \\ \text{de gasolina premium} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Producción diaria} \\ \text{de gasolina súper} \end{array} \right) \\ &= (x_{11} + x_{21}) + (x_{12} + x_{22}) + (x_{13} + x_{23}) \text{ barriles/día} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Carga de alimentación} \\ \text{diaria a la mezcladora} \end{array} \right) = x_{11} + x_{12} + x_{13} \text{ barriles/día}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Alimentación diaria de la unidad} \\ \text{de desintegración a la mezcladora} \end{array} \right) = x_{21} + x_{22} + x_{23} \text{ barriles/día}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Carga de alimentación diaria} \\ \text{a la unidad de desintegración} \end{array} \right) = 2(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \text{ barriles/día}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Petróleo crudo diario} \\ \text{usado en la refinería} \end{array} \right) = 5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 10(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \text{ barriles/día}$$

El objetivo del modelo es maximizar la utilidad total producida por la venta de los tres grados de gasolina. A partir de las definiciones dadas anteriormente, se obtiene

$$\text{Maximizar } z = 6.70(x_{11} + x_{21}) + 7.20(x_{12} + x_{22}) + 8.10(x_{13} + x_{23})$$

Las restricciones del problema se desarrollan como sigue:

1. *El suministro diario de petróleo crudo no debe exceder de 1,500,000 barriles/día:*

$$5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 10(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 1,500,000$$

2. *La capacidad de entrada a la unidad de desintegración no debe exceder 200,000 barriles/día:*

$$2(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 200,000$$

3. *La demanda diaria de gasolina regular no debe exceder 50,000 barriles:*

$$x_{11} + x_{21} \leq 50,000$$

4. *La demanda diaria de gasolina premium no debe exceder 30,000 barriles:*

$$x_{12} + x_{22} \leq 30,000$$

5. *La demanda diaria de gasolina súper no debe exceder de 40,000 barriles:*

$$x_{13} + x_{23} \leq 40,000$$

6. *El octanaje (ON) de la gasolina regular debe ser por lo menos de 87:*

La cantidad de octanos de una gasolina es el promedio ponderado del número de octanos de las corrientes de insumos utilizadas en el proceso de mezcla, y se calcula como

$$\left(\begin{array}{l} \text{Octanaje promedio de} \\ \text{la gasolina regular} \end{array} \right) =$$

$$\frac{\text{Octanaje de la carga de alimentación} \times \text{bariles/día en la alimentación} + \text{octanaje en la unidad de desintegración} \times \text{bariles/día en la unidad de desintegración}}{\text{Total de bariles por día de gasolina regular}}$$

$$= \frac{82x_{11} + 98x_{21}}{x_{11} + x_{21}}$$

Por lo tanto, la restricción del octanaje para la gasolina regular es

$$\frac{82x_{11} + 98x_{21}}{x_{11} + x_{21}} \geq 87$$

La restricción se expresa linealmente como

$$82x_{11} + 98x_{21} \geq 87(x_{11} + x_{21})$$

- 7.** *El octanaje de la gasolina premium es al menos de 89:*

$$\frac{82x_{12} + 98x_{22}}{x_{12} + x_{22}} \geq 89$$

lo que se expresa linealmente como

$$82x_{12} + 98x_{22} \geq 89(x_{12} + x_{22})$$

- 8.** *El octanaje de la gasolina súper es al menos de 92:*

$$\frac{82x_{13} + 98x_{23}}{x_{13} + x_{23}} \geq 92$$

o bien,

$$82x_{13} + 98x_{23} \geq 92(x_{13} + x_{23})$$

Así, el modelo completo se resume como

$$\text{Maximizar } z = 6.70(x_{11} + x_{21}) + 7.20(x_{12} + x_{22}) + 8.10(x_{13} + x_{23})$$

sujeto a

$$5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 10(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 1,500,000$$

$$2(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 200,000$$

$$x_{11} + x_{21} \leq 50,000$$

$$x_{12} + x_{22} \leq 30,000$$

$$x_{13} + x_{23} \leq 40,000$$

$$82x_{11} + 98x_{21} \geq 87(x_{11} + x_{21})$$

$$82x_{12} + 98x_{22} \geq 89(x_{12} + x_{22})$$

$$82x_{13} + 98x_{23} \geq 92(x_{13} + x_{23})$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

Las tres últimas restricciones pueden simplificarse para producir un lado derecho constante.

Solución:

La solución óptima (obtenida mediante los archivos *toraEx2.4-7.txt* o *amplEx2.4-7.txt*) es $z = 875,000$, $x_{11} = 34,375$, $x_{21} = 15,625$, $x_{12} = 16,875$, $x_{22} = 13,125$, $x_{13} = 15,000$, $x_{23} = 25,000$. Esto se traduce como

$$\text{Utilidad diaria} = \$875,000$$

$$\text{Cantidad diaria de gasolina regular} = x_{11} + x_{21} = 34,375 + 13,125 = 30,000 \text{ barriles/día}$$

$$\text{Cantidad diaria de gasolina premium} = x_{12} + x_{22} = 16,875 + 13,125 = 30,000 \text{ barriles/día}$$

$$\text{Cantidad diaria de gasolina súper} = x_{13} + x_{23} = 15,000 + 25,000 = 40,000 \text{ barriles/día}$$

La solución muestra que la producción de gasolina regular está a 20,000 barriles/día de satisfacer la demanda máxima. Sí se satisface la demanda de los dos productos restantes.

2.4.6 Aplicaciones adicionales de PL

En las secciones anteriores se han presentado aplicaciones representativas de PL en cinco áreas. Los problemas 2-77 a 2-87 proporcionan áreas de aplicación adicionales, que van desde agrícolas hasta militares.

BIBLIOGRAFÍA

Dantzig, G. y M. Thapa, *Linear Programming I: Introduction*, Springer, Nueva York, 1997.

Fourer, R., D. Gay y B. Kernighan, *AMPL, A Modeling Language for Mathematical Programming*, 2a. ed., Brooks/Cole-Thomson, Pacific Grove, CA, 2003.

Laidlaw, C. *Linear Programming for Urban Development Plan Evaluation*, Praegers, Londres, 1972.

Lewis, T., "Personal Operations Research: Practicing OR on Ourselves," *Interfaces*, vol. 26, núm. 5, pp. 34-41, 1996.

Shepard, R., D. Hartley, P. Hasman, L. Thorpe y M. Bathe, *Applied Operations Research*, Plenum Press, Nueva York, 1988.

Stark, R. y R. Nicholes, *Mathematical Programming Foundations for Design: Civil Engineering Systems*, McGraw-Hill, Nueva York, 1972.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados	Sección	Problemas asignados
2.1	2-1 a 2-4	2.4.2	2-47 a 2-54
2.2.1	2-5 a 2-27	2.4.3	2-55 a 2-60
2.2.2	2-28 a 2-35	2.4.4	2-61 a 2-66
2.3.1	2-36 a 2-37	2.4.5	2-67 a 2-76
2.3.2	2-38 a 2-39	2.4.6	2-77 a 2-87
2.4.1	2-40 a 2-46		

- 2-1.** Para el modelo de Reddy Mikks, construya cada una de las siguientes restricciones y expréselas con un lado izquierdo lineal y un lado derecho constante:
- *(a) La demanda diaria de pintura para interiores supera la de pintura para exteriores *al menos* por una tonelada.
 - (b) La utilización diaria de materia prima $M2$ en toneladas es *cuando mucho* de 6 y *al menos* de 3.
 - *(c) La demanda de pintura para interiores no puede ser menor que la demanda de pintura para exteriores.
 - (d) La cantidad mínima de pintura que debería producirse tanto para interiores como para exteriores es de 3 toneladas.
 - *(e) La proporción de pintura para interiores respecto de la producción total de pintura para interiores y exteriores no debe exceder de .5.
- 2-2.** Determine la mejor solución *factible* entre las siguientes soluciones (factibles y no factibles) del modelo de Reddy Mikks:
- (a) $x_1 = 1, x_2 = 4$.
 - (b) $x_1 = 2, x_2 = 2$.
 - (c) $x_1 = 3, x_2 = 1.5$.
 - (d) $x_1 = 2, x_2 = 1$.
 - (e) $x_1 = 2, x_2 = -1$.
- ***2-3.** Para la solución factible $x_1 = 2, x_2 = 2$ del modelo de Reddy Mikks, determine las cantidades no usadas de las materias primas $M1$ y $M2$.
- 2-4.** Suponga que Reddy Mikks vende su pintura para exteriores a un solo mayorista con un descuento por cantidad. La utilidad por tonelada es de \$5000 si el contratista compra no más de 2 toneladas diarias, y de \$4500 en caso contrario. Exprese matemáticamente la función objetivo. ¿Es lineal la función resultante?
- 2-5.** Determine el espacio factible para cada una de las siguientes restricciones independientes, dado que $x_1, x_2 \geq 0$.
- *(a) $-3x_1 + x_2 \leq 6$.
 - (b) $x_1 - 2x_2 \geq 5$.
 - (c) $2x_1 - 3x_2 \leq 12$.
 - (d) $x_1 - x_2 \leq 0$.
 - *(e) $-x_1 + x_2 \geq 0$.
- 2-6.** Identifique la dirección de incremento de z en cada uno de los siguientes casos:
- *(a) Maximizar $z = x_1 - x_2$.
 - (b) Maximizar $z = -5x_1 - 6x_2$.
 - (c) Maximizar $z = -x_1 + 2x_2$.
 - *(d) Maximizar $z = -3x_1 + x_2$.
- 2-7.** Determine el espacio de soluciones y la solución óptima del modelo de Reddy Mikks para cada uno de los siguientes cambios independientes:
- (a) La demanda diaria máxima de pintura para exteriores es cuando mucho de 2.5 toneladas.
 - (b) La demanda diaria de pintura para interiores es al menos de 2 toneladas.
 - (c) La demanda diaria de pintura para interiores es exactamente 1 tonelada mayor que la de pintura para exteriores.
 - (d) La disponibilidad diaria de materia prima $M1$ es al menos de 24 toneladas.
 - (e) La disponibilidad diaria de materia prima $M1$ es al menos de 24 toneladas, y la demanda diaria de pintura para interiores es mayor que la de pintura para exteriores por al menos 1 tonelada.

- 2-8.** Una compañía que opera 10 horas al día fabrica dos productos en tres procesos secuenciales. La siguiente tabla resume los datos del problema:

Producto	Minutos por unidad			Utilidad unitaria
	Proceso 1	Proceso 2	Proceso 3	
1	10	6	8	\$2
2	5	20	10	\$3

Determine la mezcla óptima de los dos productos.

- *2-9.** Una compañía fabrica dos productos, *A* y *B*. El volumen de ventas de *A* es al menos 80% de las ventas totales de *A* y *B*. Sin embargo, la compañía no puede vender más de 100 unidades de *A* al día. Ambos productos utilizan una materia prima, cuya disponibilidad diaria máxima es de 240 lb. Las tasas de utilización de la materia prima son de 2 lb por unidad de *A* y de 4 lb por unidad de *B*. Las utilidades unitarias de *A* y *B* son de \$20 y \$50, respectivamente. Determine la mezcla óptima de productos para la compañía.
- 2-10.** Alumco fabrica láminas y barras de aluminio. La capacidad de producción máxima se estima en 800 láminas o 600 barras al día. La demanda diaria máxima es de 550 láminas y 580 barras. La utilidad por tonelada es de \$40 por lámina y de \$35 por barra. Determine la mezcla de producción diaria óptima.
- *2-11.** Un individuo desea invertir \$5000 durante el próximo año en dos tipos de inversión. La inversión *A* rinde 5%, y la inversión *B*, 8%. Una investigación de mercado recomienda una asignación de al menos 25% en *A* y cuando mucho 50% en *B*. Además, la inversión *A* debería ser al menos la mitad de la inversión *B*. ¿Cómo deben asignarse los fondos a las dos inversiones?
- 2-12.** La División de Educación Continua del Colegio Comunitario Ozark ofrece un total de 30 cursos cada semestre. Los cursos ofrecidos suelen ser de dos tipos: prácticos y humanistas. Para satisfacer las demandas de la comunidad, se deben ofrecer al menos 10 cursos de cada tipo cada semestre. La División estima que los ingresos por ofrecer los cursos prácticos y humanistas son aproximadamente de \$1500 y \$1000 por curso, respectivamente.
- (a) Diseñe una oferta de cursos óptima para el Colegio.
 (b) Demuestre que el valor por curso adicional es de \$1500, que es igual al ingreso por curso práctico. ¿Qué significa este resultado en función de la oferta de cursos adicionales?
- 2-13.** ChemLabs utiliza las materias primas *I* y *II* para producir dos soluciones de limpieza doméstica, *A* y *B*. Las disponibilidades diarias de las materias primas *I* y *II* son de 150 y 145 unidades, respectivamente. Una unidad de la solución *A* consume .5 unidades de la materia prima *I* y .6 unidades de la materia prima *II*; mientras que una unidad de la solución *B* consume .5 unidades de la materia prima *I* y .4 unidades de la materia prima *II*. Las utilidades por unidad de las soluciones *A* y *B* son de \$8 y \$10, respectivamente. La demanda diaria de la solución *A* es de entre 30 y 150 unidades, y la de la solución *B* entre 40 y 200 unidades. Encuentre las cantidades de producción óptimas de *A* y *B*.
- 2-14.** En la tienda de abarrotes Ma-and-Pa hay un espacio de anaqueles limitado y debe utilizarse con eficacia para incrementar las utilidades. Dos artículos de cereal, Grano y Wheatie, compiten por un espacio total de 60 ft² en anaqueles. Una caja de Grano ocupa .2 ft² y una caja de Wheatie necesita .4 ft². Las demandas diarias máximas de Grano y Wheatie son de 200 y 120 cajas, respectivamente. Una caja de Grano genera una utilidad neta de \$1.00 y una caja de Wheatie \$1.35. Ma-and-Pa piensa que como la utilidad neta de Wheatie es 35% mayor que la de Grano, a Wheatie se le debe asignar 35% más espacio que a Grano, lo cual equivale a asignar aproximadamente 57% a Wheatie y 43% a Grano. ¿Qué piensa usted de esto?

- 2-15.** Jack es un estudiante de nuevo ingreso en la Universidad de Ulern. Se da cuenta de que “sólo trabajo y nada de diversión lo hacen un muchacho aburrido”. Jack desea distribuir su tiempo disponible de aproximadamente 10 horas al día entre el trabajo y la diversión. Estima que divertirse es dos veces más entretenido que hacer tareas. Pero también desea estudiar al menos el mismo tiempo que se divierte. Sin embargo, Jack comprende que para cumplir con sus tareas no puede divertirse más de 4 horas al día. ¿Cómo debería Jack distribuir su tiempo entre el trabajo y la diversión para maximizar su satisfacción?
- 2-16.** Wild West produce dos tipos de sombreros vaqueros. El sombrero tipo 1 requiere el doble de mano de obra que el tipo 2. Si toda la mano de obra disponible se dedica sólo al tipo 2, la compañía puede producir un total de 400 sombreros de este tipo al día. Los límites de mercado respectivos para el tipo 1 y el tipo 2 son de 150 y 200 sombreros al día. La utilidad es de \$8 por sombrero tipo 1 y de \$5 por sombrero tipo 2. Determine la cantidad de sombreros de cada tipo que maximiza la utilidad.
- 2-17.** Show & Sell puede anunciar sus productos en la radio y la televisión locales. El presupuesto para publicidad se limita a \$10,000 al mes. Cada minuto de publicidad en la radio cuesta \$15 y cada minuto de comerciales de televisión \$300. Show & Sell quiere anunciarse en la radio al menos dos veces más que en televisión. Por otro lado, no resulta práctico usar más de 400 minutos de publicidad por radio al mes. Con base en la experiencias, se estima que la publicidad por televisión es 25 veces más efectiva que la de la radio. Determine la asignación óptima del presupuesto a publicidad por radio y por televisión.
- *2-18.** Wyoming Electric Coop posee una planta generadora de energía mediante turbinas de vapor. Como Wyoming es rico en depósitos de carbón, la planta genera su vapor con este mineral. Sin embargo, esto puede generar emisiones que no satisfagan las normas de la Agencia de Protección Ambiental (EPA, Environmental Protection Agency). Las normas de la EPA limitan la descarga de dióxido de azufre a 2000 partes por millón por tonelada de carbón quemado, y la descarga de humo por las chimeneas de la planta a 20 lb por hora. La Coop recibe dos grados de carbón pulverizado, C1 y C2, para usarlos en la planta de vapor. Los dos grados se suelen mezclar antes de la combustión. Por sencillez, se supone que la cantidad de azufre contaminante descargado (en partes por millón) es un promedio ponderado de la proporción de cada grado usado en la mezcla. Los siguientes datos se basan en el consumo de 1 tonelada por hora de cada uno de los dos grados de carbón.
- | Grado de carbón | Descarga de azufre en partes por millón | Descarga de humo en lb por hora | Vapor generado en lb por hora |
|-----------------|---|---------------------------------|-------------------------------|
| C1 | 1800 | 2.1 | 12,000 |
| C2 | 2100 | .9 | 9,000 |
- (a) Determine la proporción óptima para mezclar los dos tipos de carbón.
- (b) Determine el efecto de relajar el límite de descarga de humo en una libra sobre la cantidad de vapor generado por hora.
- 2-19.** Top Toys planea una nueva campaña de publicidad por radio y televisión. Un comercial de radio cuesta \$300 y uno de televisión \$2000. Se asigna un presupuesto total de \$20,000 a la campaña. Sin embargo, para asegurarse de que cada medio tendrá al menos un comercial de radio y uno de televisión, lo máximo que puede asignarse a uno u otro medio no puede ser mayor a 80% del presupuesto total. Se estima que el primer comercial de radio llegará a 5000 personas y que cada comercial adicional llegará sólo a 2000 personas nuevas. Para la televisión, el primer anuncio llegará a 4500 personas y cada anuncio adicional a 3000. ¿Cómo debería distribuirse la suma presupuestada entre la radio y la televisión?
- 2-20.** La compañía Burroughs Garment fabrica camisas de caballero y blusas de dama para las tiendas de descuento Walmark, quienes aceptarán toda la producción surtida por Burroughs. El proceso de producción incluye el corte, la costura y el empaque. Burroughs emplea a 25 trabajadores en el departamento de corte, 35 en el de costura y 5 en el de empaque. La fábrica trabaja un turno

de 8 horas, 5 días a la semana. La siguiente tabla muestra los requisitos de tiempo y las utilidades unitarias para las dos prendas.

Prenda	Minutos por unidad			Utilidad unitaria (\$)
	Corte	Costura	Empaque	
Camisas	20	70	12	8
Blusas	60	60	4	12

Determine el programa de producción semanal óptimo para Burroughs.

- 2-21.** Una compañía mueblera fabrica escritorios y sillas. El departamento de aserrado corta la madera para ambos productos, la cual se envía después a los distintos departamentos de ensamble. Los muebles ensamblados se envían para su acabado al departamento de pintura. La capacidad diaria del departamento de aserrado es de 200 sillas o de 80 escritorios. El departamento de ensamble de sillas puede producir 120 sillas diarias, y el de ensamble de escritorios, 60 escritorios. La capacidad del departamento de pintura es de 150 sillas o 110 escritorios. Dado que la utilidad por silla es de \$50 y por escritorio de \$100, determine la mezcla de producción óptima para la compañía.
- *2-22.** Una línea de ensamble compuesta de tres estaciones consecutivas produce dos modelos de radio: HiFi-1 y HiFi-2. La siguiente tabla proporciona los tiempos de ensamble de las tres estaciones de trabajo.

Estación de trabajo	Minutos por unidad	
	HiFi-1	HiFi-2
1	6	4
2	5	5
3	4	6

El mantenimiento diario para las estaciones 1, 2 y 3 consume 10, 14 y 12%, respectivamente, de los 480 minutos máximos disponibles por cada estación al día. Determine la mezcla óptima de productos que minimizará el tiempo ocioso (o no utilizado) en las tres estaciones de trabajo.

- 2-23.** *Determinación de la solución óptima de PL mediante la enumeración de todos los puntos de esquina factibles.* La notable observación obtenida de la solución gráfica de PL es que el óptimo, cuando es finito, está siempre asociado con un punto de esquina del espacio de soluciones factibles. Demuestre cómo se aplica esta idea al modelo de Reddy Mikks mediante la evaluación de todos sus puntos de esquina factibles A, B, C, D, E y F .
- 2-24.** *Experimento con TORA.* Introduzca la siguiente PL en TORA, y seleccione el modo de solución gráfica para revelar la pantalla gráfica de PL.

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 8x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 8 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 0 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ 3x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\leq 10 \\ x_2 &\geq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Después, en una hoja de papel, trace a escala los ejes x_1 y x_2 para el problema (también puede hacer clic en la opción Print Graph, en la parte superior derecha de la ventana, para obtener una hoja a escala lista para usarse). Ahora, grafique manualmente una restricción en la hoja preparada y, luego, haga clic en la ventana izquierda de la pantalla para verificar su respuesta. Repita la misma operación para cada restricción, y termine el procedimiento con una gráfica de la función objetivo. El proceso sugerido se diseñó para que usted ponga a prueba y refuerce su entendimiento de la solución gráfica de la PL, mediante una retroalimentación inmediata desde TORA.

- 2-25.** *Experimento con TORA.* Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$6x_1 + 3x_2 \leq 22.5$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En PL se dice que una restricción es *redundante* si su eliminación del modelo no implica un cambio del espacio de soluciones factibles. Use el módulo gráfico de TORA para identificar las restricciones redundantes; luego, demuestre que su eliminación (basta con no graficarlas) no afecta el espacio de soluciones ni la solución óptima.

- 2-26.** *Experimento con TORA.* En el modelo de Reddy Mikks, utilice TORA para demostrar que la eliminación de las restricciones de la materia prima (restricciones 1 y 2) resultaría en un *espacio de soluciones no acotado*. ¿Qué se puede decir en este caso acerca de la solución óptima del modelo?

- 2-27.** *Experimento con TORA.* En el modelo de Reddy Mikks, suponga que se agrega la siguiente restricción al problema:

$$x_2 \geq 3$$

Utilice TORA para demostrar que el modelo resultante tiene restricciones conflictivas que no se pueden satisfacer al mismo tiempo y que, por lo tanto, *no tiene una solución factible*.

- 2-28.** Identifique la dirección de decrecimiento de z en cada uno de los siguientes casos:

***(a)** Minimizar $z = 4x_1 - 2x_2$.

(b) Minimizar $z = -3x_1 + x_2$.

(c) Minimizar $z = -x_1 - 2x_2$.

- 2-29.** Para el modelo de la dieta, suponga que la disponibilidad diaria de maíz se limita a 450 lb. Identifique el nuevo espacio de soluciones y determine la nueva solución óptima.

- 2-30.** Para el modelo de la dieta, ¿qué tipo de solución óptima produciría el modelo, si la mezcla de alimentos no debiera exceder las 800 lb por día? ¿Tiene sentido la solución?

- 2-31.** John debe trabajar al menos 20 horas a la semana para complementar sus ingresos, al mismo tiempo que asiste a la escuela. Tiene la oportunidad de trabajar en dos tiendas al menudeo. En la tienda 1 puede trabajar entre 5 y 12 horas a la semana, y en la tienda 2 le permiten trabajar entre 6 y 10 horas. Ambas tiendas le pagan el mismo salario por hora. Para decidir cuántas horas trabajar en cada tienda, John desea basar su decisión en el estrés del trabajo. Con base en entrevistas a otros empleados, John

estima que, en una escala ascendente de 1 a 10, los factores de estrés son 8 y 6 en las tiendas 1 y 2, respectivamente. Como el estrés aumenta cada hora, supone que el estrés total en cada tienda al final de la semana es proporcional a las horas que trabaja en las tiendas. ¿Cuántas horas debería trabajar John en cada tienda?

- *2-32.** OilCo está construyendo una refinería para producir cuatro productos: diesel, gasolina, lubricantes y combustible para avión. La demanda mínima (en barriles por día) para cada uno de esos productos es de 14,000, 30,000, 10,000 y 8000, respectivamente. Irak y Dubai tienen un contrato para enviar crudo a OilCo. Debido a las cuotas de producción especificadas por la OPEP (Organización de Países Exportadores de Petróleo), la nueva refinería puede recibir al menos 40% de su crudo de Irak y el resto de Dubai. OilCo pronostica que la demanda y las cuotas de petróleo crudo permanecerán estables durante los próximos 10 años.

Las especificaciones de los dos crudos conducen a mezclas de productos diferentes. Un barril de crudo de Irak rinde .2 barriles de diesel, .25 barriles de gasolina, .1 barriles de lubricante y .15 barriles de combustible para avión. Los rendimientos correspondientes del crudo de Dubai son: .1, .6, .15 y .1, respectivamente. OilCo necesita determinar la capacidad mínima de la refinería (barriles/día).

- 2-33.** Day Trader desea invertir una suma de dinero que genere un rendimiento anual de, al menos, \$10,000. Están disponibles dos grupos de acciones: primera clase y alta tecnología, con rendimientos anuales promedio de 10 y 25%, respectivamente. Aunque las acciones de alta tecnología proporcionan un mayor rendimiento, son más riesgosas, y Trader quiere limitar la cantidad invertida en estas acciones a no más de 60% de la inversión total. ¿Cuál es el monto mínimo que Trader debería invertir en cada grupo de acciones para alcanzar su meta de inversión?
- *2-34.** Un centro de reciclaje industrial utiliza dos tipos de desecho de aluminio, A y B , para producir una aleación especial. El desecho A contiene 6% de aluminio, 3% de silicio y 4% de carbono. El desecho B contiene 3% de aluminio, 6% de silicio y 3% de carbono. Los costos por tonelada de los desechos A y B son de \$100 y \$80, respectivamente. Las especificaciones de la aleación especial requieren que (1) el contenido de aluminio debe ser al menos de 3% y cuando mucho de 6%; (2) el contenido de silicio tiene que ser de entre 3 y 5%, y (3) el contenido de carbono debe ser de entre 3 y 7%. Determine la mezcla óptima de los desperdicios que deberían usarse para producir 1000 toneladas de la aleación.

- 2-35.** *Experimento con TORA.* Para el modelo de la dieta, considere que la función objetivo es

$$\text{Minimizar } z = .8x_1 + .8x_2$$

Use TORA para mostrar que la solución óptima está asociada con *dos* puntos de esquina distintos, y que ambos puntos dan como resultado el mismo valor objetivo. En este caso, se dice que el problema tiene *óptimos alternativos*. Explique las condiciones que conducen a esta situación, y muestre que, en efecto, el problema tiene una cantidad infinita de óptimos alternativos. Despues proporcione una fórmula para determinar todas esas soluciones.

- 2-36.** Modifique el modelo de Solver de Reddy Mikks en la figura 2.4 para tomar en cuenta un tercer tipo de pintura denominado "marina". Los requisitos por tonelada de las materias primas 1 y 2 son .5 y .75 toneladas, respectivamente. La demanda diaria de la nueva pintura está entre .5 y 1.5 toneladas, respectivamente. La utilidad por tonelada es de \$3500.
- 2-37.** Desarrolle el modelo de Excel Solver para los siguientes problemas:
- (a) El modelo de la dieta del ejemplo 2.2-2.
 - (b) El problema 2-20.
 - (c) El problema 2-32.
- 2-38.** En el modelo de Reddy Mikks, suponga que se produce un tercer tipo de pintura, llamada "marina". Los requisitos por tonelada de las materias primas $M1$ y $M2$ son .5 y .75 toneladas, respectivamente. La demanda diaria de la nueva pintura está entre .5 y 1.5 toneladas, y la utilidad por tonelada es de \$3500. Modifique el modelo de Excel Solver *solver RM2.xls* y el modelo de AMPL *amplRM2.txt* para tomar

en cuenta la nueva situación y determinar la solución óptima. Compare el esfuerzo adicional asociado con cada modificación.

- 2-39.** Desarrolle modelos de AMPL para los siguientes problemas:

- (a) El problema de la dieta del ejemplo 2.2-2 y encuentre la solución óptima.
- (b) El problema 2-20.
- (c) El problema 2-32.

- 2-40.** Fox Enterprises está considerando seis posibles proyectos de construcción durante los próximos cuatro años. Fox puede emprender cualquiera de los proyectos en parte o en su totalidad. La ejecución parcial de un proyecto prorrataará proporcionalmente tanto el rendimiento como los desembolsos de efectivo. En la siguiente tabla se incluyen los rendimientos (valor presente) y los desembolsos de efectivo para los proyectos.

Proyecto	Desembolso de efectivo (\$1000)				Rendimiento (\$1000)
	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	
1	10.5	14.4	2.2	2.4	32.40
2	8.3	12.6	9.5	3.1	35.80
3	10.2	14.2	5.6	4.2	17.75
4	7.2	10.5	7.5	5.0	14.80
5	12.3	10.1	8.3	6.3	18.20
6	9.2	7.8	6.9	5.1	12.35
Fondos disponibles (\$1000)	60.0	70.0	35.0	20.0	

- (a) Formule el problema como un programa lineal, y determine la mezcla óptima de proyectos que maximice el rendimiento total utilizando AMPL, Solver o TORA. No tome en cuenta el valor del dinero en el tiempo.
 - (b) Suponga que, si se emprende una parte del proyecto 2, entonces debe emprenderse por lo menos una parte igual del proyecto 6. Modifique la formulación del modelo y determine la nueva solución óptima.
 - (c) En el modelo original, suponga que los fondos no utilizados al final de un año se utilizan en el siguiente año. Encuentre la nueva solución óptima, y determine cuánto cada año “pide prestado” al año anterior. Por sencillez, no tome en cuenta el valor del dinero en el tiempo.
 - (d) Suponga en el modelo original que los fondos anuales disponibles para cualquier año se pueden exceder, si fuera necesario, pidiendo prestado a otras actividades financieras dentro de la compañía. Sin considerar el valor del dinero en el tiempo, reformule el modelo de PL y determine la solución óptima. ¿Requeriría la nueva solución que se pida prestado en cualquier año? De ser así, ¿cuál es la tasa de rendimiento sobre el dinero pedido en préstamo?
- *2-41.** El inversionista Doe dispone de \$10,000 para invertir en cuatro proyectos. En la tabla siguiente se presenta el flujo de efectivo para las cuatro inversiones.

Proyecto	Flujo de efectivo (\$1000) al inicio del				
	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
1	-1.00	0.50	0.30	1.80	1.20
2	-1.00	0.60	0.20	1.50	1.30
3	0.00	-1.00	0.80	1.90	0.80
4	-1.00	0.40	0.60	1.80	0.95

La información que aparece en la tabla puede interpretarse como sigue: Para el proyecto 1, \$1.00 invertido al inicio del año 1 redituará \$.50 al inicio del año 2; \$.30 al inicio del año 3; \$1.80 al inicio del año 4; y \$1.20 al inicio del año 5. Las entradas restantes pueden interpretarse de manera semejante.

La entrada 0.00 indica que no se están realizando transacciones. Doe tiene la opción adicional de invertir en una cuenta bancaria que rinde 6.5% anualmente. Todos los fondos acumulados al final del año 1 pueden volverse a invertir en el año siguiente. Formule el problema como un programa lineal para determinar la asignación óptima de fondos a oportunidades de inversión. Resuelva el modelo con Solver o AMPL.

- 2-42.** HiRise Construction puede concursar por dos proyectos de 1 año. La siguiente tabla presenta el flujo de efectivo trimestral (en millones de dólares) para los dos proyectos.

Proyecto	Flujo de efectivo (millones de dólares) el				
	1 de enero	1 de abril	1 de julio	1 de octubre	31 de diciembre
I	-1.0	-3.1	-1.5	1.8	5.0
II	-3.0	-2.5	1.5	1.8	2.8

HiRise dispone de fondos en efectivo por \$1 millón a principios de cada trimestre, y puede pedir prestado un máximo de \$1 millón a una tasa de interés anual nominal de 10%. Cualquier dinero pedido en préstamo debe devolverse al final de cada trimestre. El efecto excedente puede ganar un interés trimestral a una tasa anual nominal de 8%. La acumulación neta al final de cada trimestre se invierte en el siguiente trimestre.

- (a) Suponga que a HiRise tiene permitida una participación parcial o completa en los dos proyectos. Determine el nivel de participación que maximizará el efectivo neto acumulado al 31 de diciembre. Resuelva el modelo con Solver o AMPL.
- (b) ¿Es posible pedir prestado dinero en cualquier trimestre y, al mismo tiempo, terminar con superávit? Explique su respuesta.
- 2-43.** En previsión de los fuertes gastos académicos, Joe y Jill iniciaron un programa de inversión anual en el octavo cumpleaños de su hijo, el cual terminará hasta que cumpla dieciocho años. Planean invertir los siguientes montos al principio de cada año:

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Monto (\$)	2000	2000	2500	2500	3000	3500	3500	4000	4000	5000

Para evitar sorpresas desagradables, quieren invertir el dinero sin riesgo en las siguientes opciones: Ahorros asegurados con rendimiento anual de 7.5%, bonos del gobierno a seis años que rinden 7.9% y cuyo precio de mercado actual es de 98% de su valor nominal, además de bonos municipales a 9 años que rinden 8.5% y cuyo precio de mercado actual es de 1.02 de su valor nominal. ¿Cómo deberá invertirse el dinero?

- ***2-44.** Un ejecutivo empresarial tiene la opción de invertir en dos planes. El plan A garantiza que cada dólar invertido ganará \$.70 dentro de un año, y el plan B garantiza que cada dólar invertido ganará \$2 después de 2 años. En el plan A, las inversiones pueden hacerse anualmente, y en el plan B sólo se permiten durante períodos que sean múltiplos de 2 años. ¿Cómo debería invertir el ejecutivo \$100,000 para maximizar las utilidades al final de 3 años? Resuelva el modelo utilizando Solver o AMPL.
- 2-45.** Un apostador participa en un juego que requiere dividir entre cuatro opciones el dinero apostado. El juego tiene tres resultados. La siguiente tabla presenta la ganancia o la pérdida correspondientes por dólar para las diferentes opciones del juego.

Resultado	Rendimiento por dólar depositado en la opción			
	1	2	3	4
1	-3	4	-7	15
2	5	-3	9	4
3	3	-9	10	-8

El apostador tiene un total de \$500, los cuales puede apostar sólo una vez. El resultado exacto del juego no se conoce a priori. Debido a esta incertidumbre, la estrategia del apostador es maximizar el rendimiento *mínimo* producido por los tres resultados. ¿Cómo debería el apostador asignar los \$500 entre las cuatro opciones? Resuelva el modelo con Solver o AMPL (*sugerencia*: El rendimiento neto del apostador puede ser positivo, cero o negativo).

- 2-46.** Lewis (1996). Las facturas en una casa se reciben mensualmente (por ejemplo, servicios e hipoteca), trimestralmente (como pagos de impuestos estimados), semestralmente (por ejemplo, los seguros), o anualmente (como renovaciones y pagos vencidos de suscripciones). En la siguiente tabla se presentan las facturas mensuales durante el próximo año.

Mes	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	Total
\$	1200	800	400	700	600	900	1500	1000	900	1100	1300	1600	12,000

Para solventar esos gastos, la familia separa \$1000 cada mes, cantidad que es el promedio del total dividido entre 12 meses. Si el dinero se deposita en una cuenta de ahorros convencional, puede ganar un interés anual de 4%, siempre que permanezca en la cuenta por lo menos 1 mes. El banco también ofrece certificados de depósito a 3 y 6 meses que pueden ganar 5.5 y 7% de interés anual, respectivamente. Desarrolle un programa de inversión de 12 meses que maximice el rendimiento total de la familia durante el año. Establezca cualesquiera supuestos o requisitos necesarios para obtener una solución factible. Resuelva el modelo con Solver o AMPL.

- 2-47.** ToolCo ha sido contratada por AutoMate para que abastezca sus tiendas de descuento automotrices con llaves inglesas y cinceles. La demanda semanal de AutoMate consiste en, por lo menos, 1500 llaves y 1200 cinceles. ToolCo no puede fabricar todas las unidades solicitadas con su capacidad actual de un turno, y debe utilizar tiempo extra y posiblemente subcontratar a otros talleres de herramientas. El resultado es un incremento del costo de producción por unidad, como se muestra en la siguiente tabla. La demanda del mercado limita la proporción entre cinceles y llaves inglesas a por lo menos 2:1.

Herramienta	Tipo de producción	Rango de producción semanal (unidades)	Costo unitario (\$)
Llaves inglesas	Regular	0–550	2.00
	Tiempo extra	551–800	2.80
	Subcontratación	801–∞	3.00
Cinceles	Regular	0–620	2.10
	Tiempo extra	621–900	3.20
	Subcontratación	901–∞	4.20

- (a) Formule el problema como un programa lineal, y determine el programa de producción óptimo para cada herramienta.
- (b) Explique por qué la validez del modelo depende del hecho de que el costo de producción unitario sea una función creciente de la cantidad producida.
- (c) Resuelva el modelo aplicando AMPL, Solver o TORA.

- 2-48.** Cuatro productos se procesan secuencialmente en tres máquinas. La siguiente tabla proporciona los datos pertinentes del problema.

Máquina	Costo por h (\$)	Tiempo de fabricación por unidad (h)				Capacidad (h)
		Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4	
1	10	2	3	4	2	500
2	5	3	2	1	2	380
3	4	7	3	2	1	450
Precio de venta unitario		75	70	55	45	

Formule el problema como un modelo de PL, y encuentre la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.

- *2-49.** Un fabricante produce tres modelos, I, II y III, de cierto producto con las materias primas *A* y *B*. En la siguiente tabla se proporcionan los datos del problema.

Materia prima	Requerimientos por unidad			Disponibilidad
	I	II	III	
<i>A</i>	2	3	5	4000
<i>B</i>	4	2	7	6000
Demanda mínima	200	200	150	
Precio por unidad (\$)	30	20	50	

Las horas de trabajo por unidad del modelo I son dos veces las del II y tres veces las del III. Toda la fuerza de trabajo de la fábrica puede producir el equivalente a 1500 unidades del modelo 1. Los requisitos del mercado especifican proporciones de 3:2:5 para la producción de los tres modelos respectivos. Formule el problema como un programa lineal, y determine la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.

- 2-50.** En All-Flavors Parlor, la demanda de helado durante los tres meses de verano (junio, julio y agosto) se estima en 500, 600 y 400 cajas de 20 galones, respectivamente. Dos mayoristas, 1 y 2, le surten helado a All-Flavors. Aunque los sabores de los dos proveedores son diferentes, son intercambiables. El máximo de cajas que cada proveedor puede surtir es de 400 por mes. Además, el precio de los dos proveedores cambia de un mes a otro, de acuerdo con el siguiente programa:

	Precio por caja en el mes de		
	Junio	Julio	Agosto
Proveedor 1	\$100	\$110	\$120
Proveedor 2	\$115	\$108	\$125

Para aprovechar la fluctuación del precio, All-Flavor puede comprar más de lo que necesita en un mes y guardar el excedente para satisfacer la demanda en un mes posterior. El costo de almacenamiento de una caja de helado es de \$5 por mes. En la presente situación es realista suponer que el costo de almacenamiento es una función de la cantidad de cajas promedio disponibles durante el mes. Desarrolle

un modelo para determinar el programa óptimo de compra de helado a los dos proveedores, y determine la solución óptima con TORA, Solver o AMPL.

- 2-51.** La demanda de un artículo durante los siguientes cuatro trimestres es de 300, 400, 450 y 250 unidades, respectivamente. El precio por unidad es de \$20 en el primer trimestre y aumenta \$2 cada trimestre sucesivo. El proveedor no puede surtir más de 400 unidades en cualquier trimestre. Aunque es posible aprovechar los bajos precios en los primeros trimestres, se incurre en un costo de almacenamiento de \$3.50 por unidad por trimestre. Además, la cantidad máxima de unidades que pueden conservarse de un trimestre al siguiente no puede exceder de 100. Desarrolle un modelo de PL para determinar el programa de compra óptimo del artículo para satisfacer la demanda y encuentre la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.
- 2-52.** Una compañía ha sido contratada para fabricar dos productos, *A* y *B*, durante los meses de junio, julio y agosto. La capacidad de producción total (expresada en horas) varía mensualmente. En la siguiente tabla se proporcionan los datos básicos de la situación:

	Junio	Julio	Agosto
Demanda de <i>A</i> (unidades)	500	5000	750
Demanda de <i>B</i> (unidades)	1000	1200	1200
Capacidad (horas)	3000	3500	3000

Las tasas de producción en unidades por hora son .75 y 1 para los productos *A* y *B*, respectivamente. Se debe satisfacer toda la demanda; no obstante, la de un mes posterior se puede satisfacer con la producción de uno anterior. Para cualquier producto guardado de un mes al siguiente, los costos de almacenamiento son de \$.90 y \$.75 por unidad, respectivamente, para los productos *A* y *B*. Los costos de producción unitarios de los dos productos, *A* y *B*, son de \$30 y \$28, respectivamente. Desarrolle un modelo de PL para determinar el programa de producción óptimo para los dos productos y determine la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.

- *2-53.** El proceso de fabricación de un producto consta de dos operaciones sucesivas, I y II. En la siguiente tabla se proporcionan los datos pertinentes durante los meses de junio, julio y agosto:

	Junio	Julio	Agosto
Demanda del producto terminado (unidades)	500	450	600
Capacidad de la operación I (h)	800	700	550
Capacidad de la operación II (h)	1000	850	700

Producir una unidad del producto implica .6 horas en la operación I, más .8 horas en la operación II. Se permite la sobreproducción del producto terminado en parte (en la operación I) o del producto terminado (en la operación II) en cualquier mes para su uso en un mes posterior. Los costos de almacenamiento respectivos para las operaciones I y II son de \$.20 y \$.40 por unidad por mes. El costo de producción varía por operación y por mes. Para la operación I, el costo de producción unitario es de \$10, \$12 y \$11 en junio, julio y agosto, respectivamente. Para la operación II, el costo correspondiente de producción unitario es de \$15, \$18 y \$16. Desarrolle un modelo de PL para determinar el programa de producción óptimo para las dos operaciones en el horizonte de 3 meses, y encuentre la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.

- 2-54.** Dos productos se fabrican secuencialmente en dos máquinas. El tiempo disponible en cada máquina es de 8 horas por día y puede incrementarse hasta 4 horas de tiempo extra, si es necesario, a un costo adicional de \$100 por hora. En la siguiente tabla se proporciona la tasa de producción en las dos máquinas, así como el precio unitario de ambos productos. Desarrolle un modelo de PL para determinar el programa de producción óptimo y el uso recomendado del tiempo extra, si acaso. Resuelva el problema con AMPL, Solver o TORA.

	Tasa de producción (unidades/h)	
	Producto 1	Producto 2
Máquina 1	5	5
Máquina 2	8	4
Precio unitario (\$)	110	118

- *2-55.** En el ejemplo de los horarios de autobuses, suponga que éstos pueden operar turnos de 8 o de 12 horas. Si un autobús opera durante 12 horas, el conductor debe recibir un pago de horas extra a 150% del salario por hora regular. ¿Recomienda utilizar turnos de 12 horas? Resuelva el nuevo modelo utilizando AMPL, Solver o TORA.
- 2-56.** Un hospital emplea voluntarios para atender el escritorio de recepción entre las 8:00 A.M. y las 10:00 P.M. Cada voluntario trabaja tres horas consecutivas, excepto quienes entran a las 8:00 P.M., que sólo trabajan 2 horas. La necesidad mínima de voluntarios se aproxima mediante una función escalonada en intervalos de dos horas, los cuales se inician a las 8:00 A.M. como 4, 6, 8, 6, 4, 6 y 8. Debido a que la mayoría de los voluntarios son personas retiradas, están dispuestos a ofrecer sus servicios a cualquier hora del día (8:00 A.M. a 10:00 P.M.). Sin embargo, debido a la gran cantidad de instituciones que compiten por sus servicios, la cantidad requerida debe mantenerse lo más baja posible. Determine un programa óptimo (utilice AMPL, Solver o TORA) para la hora de inicio de los voluntarios.
- 2-57.** En el problema 2-56, suponga que ningún voluntario iniciará al mediodía o a las 6:00 P.M. para dar oportunidad a la hora del almuerzo y la cena. Desarrolle la PL, y determine el horario óptimo utilizando AMPL, Solver o TORA.
- 2-58.** En una compañía camionera de cargas pequeñas, los andenes de la terminal incluyen trabajadores eventuales que se contratan temporalmente para que se encarguen de las cargas pico. La demanda mínima de trabajadores eventuales durante los 7 días de la semana (a partir del lunes) es de 20, 14, 10, 15, 18, 10 y 12 trabajadores. Cada trabajador se contrata para que labore 5 días consecutivos. Desarrolle el modelo de PL y determine una práctica de contratación semanal óptima de trabajadores eventuales para la compañía usando AMPL, Solver o TORA.
- *2-59.** En la mayoría de las universidades, los departamentos académicos contratan a estudiantes para que realicen encargos de oficina. La necesidad de ese servicio fluctúa durante las horas hábiles (8:00 A.M. a 5:00 P.M.). En un departamento, la cantidad mínima de estudiantes requeridos es de 2 entre las 8:00 A.M. y las 10:00 A.M.; 3 entre las 10:01 A.M. y las 11:00 A.M.; 4 entre las 11:01 A.M. y la 1:00 P.M., y 3 entre la 1:01 P.M. y las 5:00 P.M. A cada estudiante se le asignan 3 horas consecutivas (excepto a quienes inician a las 3:01 P.M. que trabajan 2 horas, y a los que inician a las 4:01 que trabajan 1 hora). Debido al horario flexible de los estudiantes, por lo común pueden iniciar a cualquier hora durante el día de trabajo, excepto a la hora del almuerzo (12:00 del mediodía). Desarrolle el modelo de PL y determine un horario que especifique la hora del día y la cantidad de estudiantes que se reportan al trabajo. Use AMPL, Solver o TORA para determinar la solución.
- 2-60.** Una gran tienda departamental opera 7 días a la semana. El gerente estima que la cantidad mínima de vendedores requeridos para proporcionar un servicio ágil es de 12 el lunes, 18 el martes, 20 el miércoles, 28 el jueves, 32 el viernes, y 40 para el sábado y el domingo. Cada vendedor trabaja 5 días a la semana, con los dos días de descanso escalonados a lo largo de la semana. Por ejemplo, si 10 personas inician el lunes, 2 pueden tomar su día de descanso el martes o el miércoles; 5 el miércoles y jueves, y 3 el sábado y domingo. ¿Cuántos vendedores se deberían contratar, y cómo se distribuirán sus días de descanso? Use AMPL, Solver o TORA para encontrar la solución.
- 2-61.** Una compañía inmobiliaria está desarrollando un área para renta de viviendas y locales comerciales. El área de viviendas se compone de departamentos, casas dúplex y casas unifamiliares. Se estima que la demanda máxima por parte de los arrendatarios potenciales es de 500 departamentos,

300 casas dúplex y 250 casas unifamiliares; pero la cantidad de casas dúplex debe ser al menos 50% de la cantidad de departamentos y casas unifamiliares. El espacio para locales comerciales es proporcional a la cantidad de viviendas en una relación de al menos 10 ft^2 , 15 ft^2 y 18 ft^2 por departamento, casa dúplex y casa unifamiliar, respectivamente. Sin embargo, la disponibilidad del terreno limita el espacio para locales comerciales a no más de $10,000 \text{ ft}^2$. El ingreso por la renta mensual se estima en \$600, \$750 y \$1200 para los departamentos, las casas dúplex y las casas unifamiliares, respectivamente. La renta de los locales comerciales es de $\$100/\text{ft}^2$. Desarrolle un modelo de PL para determinar el área óptima para locales comerciales y la cantidad de viviendas; asimismo, determine la solución con AMPL, Solver o TORA.

- 2-62.** El concejo de la ciudad de Fayetteville está en el proceso de aprobar la construcción de un nuevo centro de convenciones de $200,000 \text{ ft}^2$. Se han propuesto dos sitios, y ambos requieren ejercer la ley de “dominio inminente” para adquirir la propiedad. La siguiente tabla presenta los datos de las propiedades propuestas (contiguas) en ambos sitios, junto con el costo de adquisición.

Propiedad	Sitio 1		Sitio 2	
	Área (1000 ft ²)	Costo (\$1000)	Área (1000 ft ²)	Costo (\$1000)
1	20	1000	80	2800
2	50	2100	60	1900
3	50	2350	50	2800
4	30	1850	70	2500
5	60	2950		

Se permite la adquisición parcial de la propiedad. Se debe adquirir al menos 75% de la propiedad 4 si se selecciona el sitio 1, y al menos 50% de la propiedad 3 si se selecciona el sitio 2. Aunque la propiedad del sitio 1 es más cara (por ft²), el costo de construcción es menor que en el sitio 2 porque la infraestructura del sitio 1 está en mejores condiciones. El costo de construcción es de \$25 millones en el sitio 1 y de \$27 millones en el sitio 2. ¿Cuál sitio debería seleccionarse y qué propiedades deben adquirirse?

Encuentre la solución usando AMPL, Solver o TORA.

- *2-63.** Una ciudad emprenderá cuatro proyectos de renovación de vivienda urbana durante los próximos 5 años. Cada proyecto tiene un año de inicio distinto y una duración diferente. La siguiente tabla muestra los datos básicos de la situación:

	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Costo (millones de \$)	Ingreso anual (millones \$)
Proyecto 1	Inicio		Terminación			5.0	.05
Proyecto 2		Inicio			Terminación	8.0	.07
Proyecto 3	Inicio				Terminación	15.0	.15
Proyecto 4			Inicio	Terminación		1.2	.02
Presupuesto (millones \$)	3.0	6.0	7.0	7.0	7.0		

Los proyectos 1 y 4 deben terminarse por completo dentro de su tiempo estipulado. Los otros dos proyectos pueden terminarse parcialmente de ser necesario, siempre y cuando no excedan su presupuesto. Sin embargo, cada proyecto debe tener al menos un avance de 25%. Al final de cada año, los inquilinos ocupan de inmediato la sección terminada de un proyecto, y así se obtiene una cantidad proporcional de ingreso. Por ejemplo, si en el año 1 se completa 40% del proyecto 1 y 60% en el año 3, el ingreso asociado para el horizonte de planeación a 5 años es de $.4 \times \$50,000$ (en el año 2) + $.4 \times \$50,000$ (en el año 3) + $(.4 + .6) \times \$50,000$ (en el año 4) + $(.4 + .6) \times \$50,000$ (en el año 5) = $(4 \times .4) + (2 \times .6) \times \$50,000$. Desarrolle un modelo de PL para determinar el programa de proyectos que maximice

el ingreso total durante el horizonte de 5 años, y determine la solución con AMPL, Solver o TORA. Por sencillez, no tome en cuenta el valor del dinero en el tiempo.

- 2-64.** La ciudad de Fayetteville iniciará un proyecto de renovación urbana que incluirá casas para personas de bajos y medianos ingresos, departamentos de lujo y viviendas populares. El proyecto también incluye una escuela primaria pública y locales comerciales. El tamaño de la escuela primaria (cantidad de salones de clase) es proporcional a la cantidad de alumnos, y el espacio para locales comerciales es proporcional a la cantidad de viviendas. En la tabla siguiente se proporcionan los datos pertinentes de la situación:

	Ingresos bajos	Ingresos medianos	Ingresos altos	Viviendas populares	Salones de clase	Locales comerciales
Cantidad mínima de unidades	100	125	75	300	0	
Cantidad máxima de unidades	200	190	260	600	25	
Tamaño de lote por unidad (acres)	.05	.07	.03	.025	.045	.1
Cantidad promedio de alumnos por unidad	1.3	1.2	.5	1.4		
Demanda de espacios comerciales por unidad (acres)	.023	.034	.046	.023	.034	
Ingreso anual por unidad (\$)	7,000	12,000	20,000	5,000	—	15,000

La nueva escuela puede ocupar un espacio máximo de 2 acres con salones limitados a 25 alumnos por salón. El costo anual de operación por salón de clase es de \$10,000. El proyecto se ubicará en un lote baldío de 50 acres que es propiedad de la ciudad. Adicionalmente, el proyecto puede utilizar una propiedad adyacente ocupada por 200 casas en ruinas que se demolerán, cada una de las cuales ocupa .25 acres. El costo de comprar y demoler una de estas casas es de \$7000. El espacio abierto, las calles y lotes de estacionamiento consumen 15% del terreno total disponible.

Desarrolle un programa lineal para determinar el plan óptimo para el proyecto, y encuentre la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.

- 2-65.** Realco posee 800 acres de terreno sin urbanizar en un lago escénico en el corazón de las Montañas Ozark. En el pasado, los desarrollos nuevos alrededor del lago estaban sometidos a escasas regulaciones o a ninguna. Ahora en las orillas del lago hay muchas casas de descanso y fosas sépticas, la mayoría de las cuales están instaladas de manera inadecuada. Al paso de los años, el escurreimiento de las fosas sépticas contaminó gravemente el agua. Para detener la degradación del lago, las autoridades del condado aprobaron reglamentos estrictos aplicables a todos los futuros desarrollos: (1) Sólo se pueden construir casas sencillas, dobles y triples, donde al menos 50% del total de casas deben ser casas sencillas. (2) Para limitar la cantidad de fosas sépticas, se requieren tamaños de lotes mínimos de 2, 3 y 4 acres para las casas sencillas, dobles y triples, respectivamente. (3) Deben establecerse áreas recreativas de 1 acre a razón de una por cada 200 familias. (4) Para preservar la ecología del lago, no se puede extraer agua subterránea para las casas o jardines. El presidente de Realco estudia la posibilidad de desarrollar una propiedad de 800 acres. El nuevo desarrollo incluirá casas sencillas, dobles y triples. Se estima que 15% del área en acres se asignará a calles y áreas para servicios. Realco estima las ganancias producidas por las diferentes unidades de vivienda como sigue:

Unidad de vivienda	Sencillas	Dobles	Triples
Ganancia neta por unidad (\$)	10,000	12,000	15,000

El costo de conectar el servicio de agua es proporcional a la cantidad de unidades construidas. Sin embargo, el condado cobra un mínimo de \$100,000 para el proyecto. Adicionalmente, la expansión del sistema de agua por encima de su capacidad actual está limitada a 200,000 galones por día durante los

periodos pico. Los siguientes datos resumen el costo de conexión del agua y el consumo, considerando una familia de tamaño promedio:

Unidad de vivienda	Sencillas	Dobles	Triples	De recreación
Costo de conexión del agua por unidad	1,000	1,200	1,400	800
Consumo de agua por unidad (gal/día)	400	600	840	450

Desarrolle un modelo de PL para determinar el plan óptimo para Realco y encuentre la solución con AMPL, Solver o TORA.

- 2-66.** Considere el modelo de Realco del problema 2-65. Suponga que se pueden adquirir 100 acres más por \$450,000, los cuales incrementarán el área total a 900 acres. ¿Es rentable para Realco este negocio?
- 2-67.** Una compañía produce tres tipos de jugos enlatados, *A*, *B* y *C*, usando fresas, uvas y manzanas frescas. El abasto diario se limita a 200 toneladas de fresas, 100 toneladas de uvas y 150 toneladas de manzanas. El costo por tonelada de fresas, uvas y manzanas es de \$200, \$100 y \$90, respectivamente. Cada tonelada rinde 1500 lb de jugo de fresa, 1200 lb de jugo de uva, y 1000 lb de jugo de manzana. La bebida *A* es una mezcla al 1:1 de jugo de fresa y jugo de manzana. La bebida *B* es una mezcla al 1:1:2 de jugo de fresa, jugo de uva y jugo de manzana. La bebida *C* es una mezcla al 2:3 de jugo de uva y jugo de manzana. Todas las bebidas se envasan en latas de 16 oz (1 lb). El precio por lata es de \$1.15, \$1.25 y \$1.20 de las bebidas *A*, *B* y *C*, respectivamente. Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de producción óptima de las tres bebidas, y encuentre la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.
- *2-68.** Una ferretería vende bolsas de tornillos, pernos, tuercas y arandelas. Los tornillos vienen en cajas de 100 lb y cuestan \$110 cada caja; los pernos vienen en cajas de 100 lb y cuestan \$150 cada una; las tuercas vienen en cajas de 80 lb y cada una cuesta \$70; y las arandelas vienen en cajas de 30 lb y su costo es de \$20 por caja. Cada bolsa debe pesar por lo menos 1 lb e incluir, en peso, por lo menos 10% de tornillos y 25% de pernos; no más de 15% de tuercas y cuando mucho 10% de arandelas. Para equilibrar la bolsa, la cantidad de pernos no puede exceder a la de tuercas o a la de arandelas. El peso de un perno es 10 veces el de una tuerca y 50 veces el de una arandela. Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla óptima de la bolsa y encuentre la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.
- 2-69.** All-Natural Coop fabrica tres cereales, *A*, *B* y *C*, a partir de cuatro ingredientes: hojuelas de avena, pasas, coco rallado y almendras rebanadas. Las disponibilidades diarias de los ingredientes son 5 toneladas, 2 toneladas, 1 tonelada y 1 tonelada, respectivamente. Los costos correspondientes por tonelada son \$100, \$120, \$110 y \$200. El cereal *A* es una mezcla al 50:5:2 de avena, pasas y almendras. El cereal *B* es una mezcla al 60:2:3 de avena, coco y almendras. El cereal *C* es una mezcla al 60:3:4:2 de avena, pasas, coco y almendras. Los cereales se producen en tamaños jumbo de 5 lb. All-Natural vende los cereales *A*, *B* y *C* a \$2, \$2.50 y \$3.00 por caja, respectivamente. La demanda diaria mínima de los cereales *A*, *B* y *C* es de 500, 600 y 500 cajas, respectivamente. Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de producción óptima de los cereales, así como las cantidades asociadas de ingredientes. Encuentre la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.
- 2-70.** Una refinería fabrica dos grados de combustible para avión, *F1* y *F2*, al mezclar cuatro tipos de gasolina, *A*, *B*, *C* y *D*. El combustible *F1* utiliza las gasolinas *A*, *B*, *C* y *D* en la proporción 1:1:2:4, y el combustible *F2* las usa en la proporción 2:2:1:3. Los límites de suministro de *A*, *B*, *C* y *D* son 1000, 1200, 900 y 1500 barriles/día, respectivamente. Los costos por barril de las gasolinas *A*, *B*, *C* y *D* son \$120, \$90, \$100 y \$150, respectivamente. Los combustibles *F1* y *F2* se venden a \$200 y \$250 por barril, respectivamente. La demanda mínima de *F1* y *F2* es de 200 y 400 barriles/día, respectivamente. Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de producción óptima de *F1* y *F2*, y encuentre la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.
- *2-71.** Una compañía petrolera destila dos tipos de petróleo crudo, *A* y *B*, para producir gasolina regular y premium, así como combustible para avión. La disponibilidad diaria de petróleo crudo y la demanda

mínima de los productos finales están limitadas. Si la producción no es suficiente para satisfacer la demanda, hay proveedores externos que surten la cantidad faltante con una penalización. La producción excedente no se vende de inmediato y se incurre en un costo de almacenamiento. En la siguiente tabla se proporcionan los datos de la situación:

Crudo	Fracción de rendimiento por barril			Precio/barril (\$)	Bariles/día
	Regular	Premium	Combustible para avión		
Crudo A	.20	.1	.25	30	2500
Crudo B	.25	.3	.10	40	3000
Demanda (bariles/día)	500	700	400		
Ingresos (\$/barril)	50	70	120		
Costo de almacenamiento de la producción excedente (\$/barril)	2	3	4		
Penalización por la demanda insatisfecha (\$/barril)	10	15	20		

Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de productos óptima para la refinería, y encuentre la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.

- 2-72.** En la situación de la refinería del problema 2-71, suponga que la unidad de destilación produce en realidad los productos intermedios nafta y aceite ligero. Un barril de crudo *A* produce .35 barriles de nafta y .6 barriles de aceite ligero, y un barril de crudo *B* produce .45 barriles de nafta y .5 barriles de aceite ligero. La nafta y el aceite ligero se mezclan para producir los tres productos finales de gasolina: Un barril de gasolina regular tiene una proporción de mezcla de 2:1 (nafta a aceite ligero); un barril de gasolina premium tiene una mezcla de al 1:1; y un barril de combustible para avión tiene una mezcla al 1:2. Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de producción óptima y encuentre la solución usando AMPL, Solver o TORA.
- 2-73.** La compañía Hawaii Sugar produce azúcar morena, azúcar procesada (blanca), azúcar glass y melazas de jarabe de caña. La compañía compra 4000 toneladas de jarabe semanalmente y la contratan para que suministre cada semana al menos 25 toneladas de cada tipo de azúcar. El proceso de producción se inicia con la fabricación de azúcar morena y melaza a partir del jarabe. Una tonelada de jarabe produce .3 toneladas de azúcar morena y .1 tonelada de melaza. El azúcar blanca resulta de procesar el azúcar morena. Se requiere una tonelada de azúcar morena para producir .8 toneladas de azúcar blanca. El azúcar glass se produce a partir del azúcar blanca mediante un proceso de molienda especial, cuya eficiencia de conversión es de 95% (una tonelada de azúcar blanca produce .95 toneladas de azúcar glass). Las utilidades por tonelada de azúcar morena, azúcar blanca, azúcar glass y melaza son \$150, \$200, \$230 y \$35, respectivamente. Formule el problema como un programa lineal, y determine el programa de producción semanal utilizando AMPL, Solver o TORA.
- 2-74.** La refinería Shale Oil mezcla dos tipos de petróleo, *A* y *B*, para producir dos gasolinas de alto octanaje, I y II. Los petróleos *A* y *B* se producen a las razones máximas de 450 y 700 barriles/hora, respectivamente. Los octanajes correspondientes son 98 y 89, y las presiones de vapor son de 10 y 8 lb/in². La gasolina I y la gasolina II deben tener octanajes de, al menos, 91 y 93, respectivamente. La presión de vapor asociada con ambos productos no deberá exceder las 12 lb/in². Las utilidades por barril de las gasolinas I y II son de \$7 y \$10, respectivamente. Desarrolle un modelo de PL para determinar la tasa de producción óptima de las gasolinas I y II y sus proporciones de mezcla de los petróleos *A* y *B*. Determine la solución con AMPL, Solver o TORA (*sugerencia*: La presión de vapor, al igual que el octanaje, es el promedio ponderado de las presiones de vapor de los petróleos mezclados).
- 2-75.** Una fundidora de desechos de acero, aluminio y hierro produce dos tipos de lingotes de metal, I y II, con límites específicos en los contenidos de aluminio, grafito y silicio. En el proceso de fundición pueden

usarse briquetas de aluminio y silicio para satisfacer las especificaciones deseadas. En las siguientes tablas se establecen las especificaciones del problema:

Insumos	Contenido (%)			Costo/ton (\$)	Disponible (tons/día)
	Aluminio	Grafito	Silicio		
Desecho de acero	10	5	4	100	1000
Desecho de aluminio	95	1	2	150	500
Desecho de hierro fundido	0	15	8	75	2500
Briqueta de aluminio	100	0	0	900	Cualquier cantidad
Briqueta de silicio	0	0	100	380	Cualquier cantidad

Ingrediente	Lingote I (%)		Lingote II (%)	
	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo
Aluminio	8.1	10.8	6.2	8.9
Grafito	1.5	3.0	4.1	∞
Silicio	2.5	∞	2.8	4.1
Demanda (tons/día)		130	250	

Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de insumos óptima para la fundidora, y encuentre la solución con AMPL, Solver o TORA.

- 2-76.** Se fabrican dos aleaciones, *A* y *B*, con cuatro metales I, II, III y IV de acuerdo con las siguientes especificaciones:

Aleación	Especificaciones	Precio de venta (\$)
<i>A</i>	Cuando mucho 80% de I	200
	Cuando mucho 30% de II	
	Al menos 50% de IV	
<i>B</i>	Entre 40 y 60% de II	300
	Al menos 30% de III	
	Cuando mucho 70% de IV	

Los cuatro metales se extraen de tres minerales de acuerdo con los siguientes datos:

Mineral	Cantidad máxima (tons)	Constituyentes (%)						Precio/ton (\$)
		I	II	III	IV	Otros		
1	1000	20	10	30	30	10		30
2	2000	10	20	30	30	10		40
3	3000	5	5	70	20	0		50

Desarrolle un modelo de PL para determinar cuánto debería producirse de cada tipo y encuentre la solución usando AMPL, Solver o TORA (*sugerencia*: Sean x_{kj} las toneladas de mineral *i* asignadas a la aleación *k* y w_k las toneladas de aleación *k* producidas).

- 2-77.** *Asignación de espacios de anaquel.* Una tienda de abarrotes debe decidir el espacio de anaquel que asignará a cada uno de los cinco tipos de cereales para el desayuno. La demanda diaria máxima es

de 100, 85, 140, 80 y 90 cajas, respectivamente. El espacio de anaquel respectivo en pulgadas cuadradas para las cajas es de 16, 24, 18, 22 y 20. El espacio de anaquel total disponible es de 5000 in². La utilidad por unidad es de \$1.10, \$1.30, \$1.08, \$1.25 y \$1.20. Determine la asignación de espacio óptimo para los cinco cereales.

- 2-78. Votación de proyectos.** En cierto condado del estado de Arkansas, en la boleta se presentan cuatro opciones de proyectos a elegir: Construir nuevas carreteras, incrementar el control de armas, aumentar subsidios agrícolas o elevar el impuesto a la gasolina. El condado incluye 100,000 votantes urbanos, 250,000 votantes suburbanos y 50,000 votantes rurales, todos con grados variables de apoyo y oposición a los temas de elección. Por ejemplo, los votantes rurales se oponen al control de armas y al impuesto a las gasolinas, sin embargo, están a favor de la construcción de carreteras y de los subsidios agrícolas. El condado está planeando una campaña publicitaria en televisión con un presupuesto de \$100,000 a un costo de \$1500 por anuncio. En la siguiente tabla se resume el impacto de un solo anuncio en función de la cantidad de votos a favor y en contra de las diferentes opciones en la boleta.

Tema	Cantidad esperada de votos a favor (+) y votos en contra (-) por anuncio		
	Urbanos	Suburbanos	Rurales
Nuevas carreteras	-30,000	+60,000	+30,000
Control de armas	+80,000	+30,000	-45,000
Subsidio agrícola	+40,000	+10,000	0
Impuesto a la gasolina	+90,000	0	-25,000

Una opción será ganadora si acumula al menos 51% de los votos. ¿Qué opciones serán aprobadas por los votantes y cuántos anuncios deberían asignarse a estas opciones?

- 2-79. Balanceo de una línea de ensamble.** Un producto se ensambla a partir de tres piezas diferentes. Dos departamentos fabrican las piezas a diferentes tasas de producción, como se muestra en la siguiente tabla:

Departamento	Capacidad (h/sem)	Tasa de producción (unidades/h)		
		Parte 1	Parte 2	Parte 3
1	100	8	5	10
2	80	6	12	4

Determine la cantidad máxima de unidades de ensamble final que pueden producirse a la semana (*sugerencia*: Unidades de ensamble = mínimo {unidades de la pieza 1, unidades de la pieza 2 y unidades de la pieza 3}). Maximizar $z = \min\{x_1, x_2\}$ equivale a maximizar z sujeta a $z \leq x_1$ y $z \leq x_2$.

- 2-80. Control de la contaminación.** Se pulverizan y mezclan tres tipos de carbón, C1, C2 y C3 para producir 50 toneladas por hora necesarias para impulsar una planta generadora de electricidad. La combustión del carbón emite óxido de azufre (en partes por millón), la cual debe satisfacer las especificaciones de la EPA de no más de 2000 partes por millón. En la siguiente tabla se resumen los datos de la situación:

	C1	C2	C3
Azufre (partes por millón)	2500	1500	1600
Capacidad del pulverizador (ton/h)	30	30	30
Costo por tonelada	\$30	\$35	\$33

Determine la mezcla óptima de los carbonos.

***2-81.** *Control de semáforos, Stark y Nichols (1972).* El tránsito vehicular en tres carreteras, H1, H2 y H3, debe detenerse y esperar una luz verde antes de salir a una carretera de peaje. Las tarifas son de \$3, \$4 y \$5 para los automóviles que salen de H1, H2 y H3, respectivamente. Las razones de flujo de H1, H2 y H3 son de 500, 600 y 400 automóviles por hora. El ciclo de los semáforos no debe exceder de 2.2 minutos, y la luz verde en cualquier carretera tiene que permanecer encendida por lo menos durante 25 segundos. La luz amarilla permanece encendida durante 10 segundos. La caseta de cobro puede atender un máximo de 510 automóviles por hora. Suponiendo que los automóviles no se mueven con la luz amarilla, determine el intervalo óptimo para la luz verde en las tres carreteras que maximizará el ingreso de la caseta de cobro por ciclo de tránsito.

2-82. *Ajuste de una línea recta a datos empíricos (regresión).* En una clase de mecanografía de 10 semanas para principiantes, la velocidad promedio por estudiante (en palabras por minuto) en función de la cantidad de semanas de clase se da en la siguiente tabla.

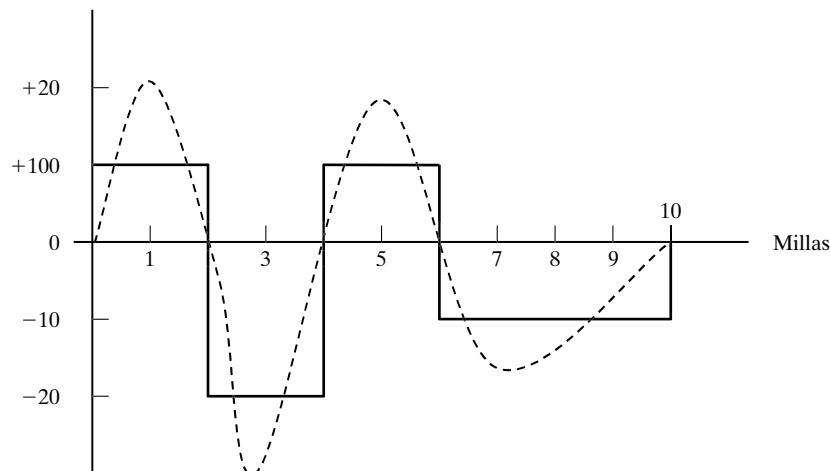
Semana, x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Palabras por minuto, y	5	9	15	19	21	24	26	30	31	35

Determine los coeficientes a y b en la relación de línea recta, $\hat{y} = ax + b$, que mejor se ajuste a los datos proporcionados (*sugerencia:* Minimice la suma del valor absoluto de las desviaciones entre la \hat{y} teórica y la y empírica. $\min |w|$ equivale a $\min z$ sujeta a $z \geq w$ y $z \geq -w$, $z \geq 0$. De manera alternativa, $\min |w|$ equivale a $\min (z^+ + z^-)$ sujeta a $w = z^+ - z^-$ con $z^+, z^- \geq 0$).

2-83. *Nivelación del terreno para una carretera nueva, Stark y Nichols (1972).* El Departamento de Carreteras de Arkansas está planeando una nueva carretera de 10 millas por un terreno accidentado, como se muestra en el perfil de la figura 2.13. El ancho del terreno de construcción es aproximadamente de 50 yardas. Para simplificar la situación, el perfil del terreno se puede reemplazar por una función escalonada, como se muestra en la figura. La tierra removida del terreno alto se transporta con maquinaria pesada para llenar las áreas bajas. También hay dos fosos de mina, I y II, ubicados en los extremos del tramo de 10 millas, de donde se puede extraer más tierra si es necesario. El foso I tiene una capacidad de 20,000 yardas cúbicas, y el foso II una de 15,000 yardas cúbicas. Los costos de extracción de tierra de los fosos I y II,

FIGURA 2.13

Perfil del terreno para el problema 2-83



respectivamente, son de \$1.50 y \$1.90 por yarda cúbica. El costo de transportación por yarda cúbica por milla es de \$.15, y el costo de utilizar la maquinaria pesada para cargar los camiones es de \$.20 por yarda cúbica. Esto significa que transportar una yarda cúbica 1 milla desde el foso I costará un total de $(1.5 + .20) + 1 \times .15 = \1.85 ; y transportar una yarda cúbica 1 milla desde una colina hasta el área de relleno costará $.20 + 1 \times .15 = \$.35$. Desarrolle un plan de costo mínimo para nivelar el tramo de 10 millas.

- 2-84.** *Planeación militar, Shepard y colaboradores (1988).* El Ejército Rojo (R) está tratando de invadir el territorio defendido por el Ejército Azul (B), que tiene tres líneas de defensa y 200 unidades de combate regulares y, además, puede utilizar una reserva de 200 unidades. El Ejército Rojo planea atacar en dos frentes, el norte y el sur, y el Ejército Azul estableció tres líneas de defensa este-oeste, I, II y III. El propósito de las líneas de defensa 1 y 2 es demorar el ataque del Ejército Rojo, por lo menos, 4 días en cada línea para maximizar la duración total de la batalla. El tiempo de avance del Ejército Rojo se calcula mediante la siguiente fórmula empírica:

$$\text{Duración de la batalla en días} = a + b \left(\frac{\text{Unidades azules}}{\text{Unidades rojas}} \right)$$

Las constantes a y b son una función de la línea de defensa y el frente norte/sur, como lo muestra la siguiente tabla:

	<i>a</i>			<i>b</i>		
	I	II	III	I	II	III
Frente norte	.5	.75	.55	8.8	7.9	10.2
Frente sur	1.1	1.3	1.5	10.5	8.1	9.2

Las unidades de reserva del Ejército Azul pueden usarse sólo en las líneas de defensa II y III. La asignación de unidades por parte del Ejército Rojo a las tres líneas de defensa se da en la siguiente tabla:

	Cantidad de unidades de ataque del Ejército Rojo		
	Línea de defensa 1	Línea de defensa 2	Línea de defensa 3
Frente norte	30	60	20
Frente sur	30	40	20

¿Cómo deberá asignar sus recursos el Ejército Azul entre las tres líneas de defensa y los frentes norte y sur?

- 2-85.** *Gestión de calidad del agua, Stark y Nicholes (1972).* Cuatro ciudades descargan aguas residuales en la misma corriente de agua. La ciudad 1 está aguas arriba, seguida por la ciudad 2 aguas abajo; luego la ciudad 3 y finalmente la ciudad 4. Medidas a lo largo de la corriente de agua, las ciudades están aproximadamente a 15 millas entre sí. Una medida de la cantidad de contaminantes en las aguas residuales es la demanda bioquímica de oxígeno (BOD, por las siglas de *biochemical oxygen demand*), que es el peso del oxígeno requerido para estabilizar los constituyentes de desecho en el agua. Una BOD más alta indica una peor calidad del agua. La EPA establece una carga de BOD permisible máxima, expresada en lb de BOD por galón. La eliminación de contaminantes del agua residual se realiza en dos formas: (1) actividad de descomposición natural estimulada por el oxígeno en el aire; y (2) plantas de tratamiento en los puntos de descarga antes de que los desechos lleguen a la corriente de agua. El objetivo es determinar la eficiencia más económica de cada una de las cuatro plantas que reducirán la BOD a niveles aceptables. La eficiencia máxima posible de la planta es de 99%.

Para demostrar los cálculos implicados en el proceso, considere las siguientes definiciones para la planta 1:

Q_1 = Velocidad de flujo de la corriente (gal/h) en el tramo de 15 millas que lleva de la ciudad 1 a la ciudad 2

p_1 = Tasa de descarga de BOD (en lb/h)

x_1 = Eficiencia de la planta 1 ($\leq .99$)

b_1 = Carga de BOD máxima permisible en el tramo 1-2 (en lb de BOD/gal)

Para satisfacer el requerimiento de carga de BOD en el tramo 1-2, se debe tener

$$p_1(1 - x_1) \leq b_1 Q_1$$

Del mismo modo, la restricción de carga de BOD en el tramo 2-3 toma la forma

$$(1 - r_{12}) \left(\begin{array}{l} \text{Tasa de descarga de} \\ \text{BOD en el tramo 1-2} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Tasa de descarga de} \\ \text{BOD en el tramo 2-3} \end{array} \right) \leq b_2 Q_2$$

o bien,

$$(1 - r_{12})p_1(1 - x_1) + p_2(1 - x_2) \leq b_2 Q_2$$

El coeficiente r_{12} (< 1) representa la fracción de desechos eliminada en el tramo 1-2 por descomposición. Para el tramo 2-3, la restricción es

$$(1 - r_{23})[(1 - r_{12})p_1(1 - x_1) + p_2(1 - x_2)] + p_3(1 - x_3) \leq b_3 Q_3$$

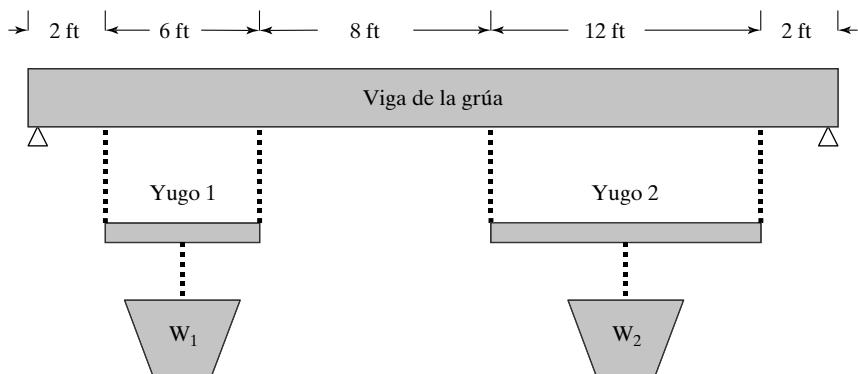
Determine la eficiencia más económica para las cuatro plantas aplicando los siguientes datos (la fracción de BOD eliminada por descomposición es de 6% en los cuatro tramos):

	Tramo 1-2 ($i = 1$)	Tramo 2-3 ($i = 2$)	Tramo 2-3 ($i = 3$)	Tramo 3-4 ($i = 4$)
Q_i (gal/h)	215,000	220,000	200,000	210,000
p_i (lb/h)	500	3,000	6,000	1,000
b_i (lb BOD/gal)	.00085	.0009	.0008	.0008
Costo del tratamiento (\$/lb de BOD eliminada)	.20	.25	.15	.18

- 2-86. *Estructura de carga, Stark y Nicholes (1972).* La grúa elevada que se muestra en la figura 2.14 con dos yugos elevadores, se utiliza para transportar concreto mezclado a un terreno para colar barreras de

FIGURA 2.14

Grúa elevada con dos yugos (problema 2-86)



concreto. La cubeta de concreto cuelga en el punto medio del yugo. Los rieles que sostienen los extremos de la grúa pueden soportar un máximo de 25 kips cada uno, y cada cable del yugo tiene una capacidad de 20 kips. Determine la capacidad de carga máxima, W_1 y W_2 (sugerencia: En equilibrio, la suma de los momentos respecto de cualquier punto de la viga o el yugo es cero).

- 2-87. Asignación de aviones a rutas.** Considere el problema de asignar aviones a cuatro rutas, de acuerdo con los siguientes datos:

Tipo de avión	Capacidad (pasajeros)	Cantidad de aviones	Cantidad de viajes diarios en la ruta			
			1	2	3	4
1	50	5	3	2	2	1
2	30	8	4	3	3	2
3	20	10	5	5	4	2
Cantidad diaria de clientes			1000	2000	900	1200

Los costos asociados, incluyendo las penalizaciones por la pérdida de clientes debido a la falta de espacio, son:

Tipo de avión	Costo de operación (\$) por viaje en la ruta			
	1	2	3	4
1	1000	1100	1200	1500
2	800	900	1000	1000
3	600	800	800	900
Penalización (\$) por pasajero perdido	40	50	45	70

Determine la asignación óptima de aviones a las rutas y la cantidad de viajes asociada.

CAPÍTULO 3

Método simplex y análisis de sensibilidad

Aplicación de la vida real: Optimización de la producción de válvulas cardíacas

Las válvulas cardíacas biológicas son bioprótesis fabricadas de diferentes tamaños, a partir de corazones porcinos, para implantación en seres humanos. Por el lado del suministro, los corazones porcinos no pueden “producirse” en tamaños específicos. Por el lado de la demanda, el tamaño exacto de una válvula fabricada no puede determinarse sino hasta que se procesa el componente biológico del corazón porcino. En consecuencia, puede haber más existencias de las necesarias de algunos tamaños y escasez de las de otros. Se desarrolló un modelo de programación lineal con la finalidad de reducir la cantidad de los tamaños para los que hay más existencias y de incrementar la cantidad de los tamaños cuyas existencias son escasas. Los ahorros resultantes fueron superiores a \$1,476,000 en 1981, el año en que se realizó el estudio. Los detalles de este estudio se presentan al final del capítulo.

3.1 MODELO DE PL EN FORMA DE ECUACIÓN

El desarrollo de los cálculos con el método simplex se facilita si se imponen dos requisitos al modelo de PL.

1. Todas las restricciones son ecuaciones con el lado derecho no negativo.
2. Todas las variables son no negativas.¹

Conversión de desigualdades en ecuaciones con el lado derecho no negativo. Para convertir una desigualdad (\leq) en ecuación, se agrega una **variable de holgura** no negativa al lado izquierdo de

¹ Los paquetes comerciales (y TORA) aceptan las restricciones de desigualdad, el lado derecho no negativo y las variables irrestriccas. Cualquier condición previa de las restricciones y las variables se realiza internamente en el software antes de que el problema se resuelva con el método simplex.

la restricción. Por ejemplo, la restricción $M1$ del modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.1-1) se convierte en ecuación de la manera siguiente:

$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24, s_1 \geq 0$$

La variable no negativa s_1 es la holgura (o la cantidad no utilizada) del recurso $M1$.

La conversión de (\geq) a $(=)$ se logra restando una **variable de exceso** no negativa del lado izquierdo de la desigualdad. Considerando el modelo de la dieta (ejemplo 2.2-2), la variable de exceso $S_1 (\geq 0)$ convierte la restricción de la mezcla de alimentos (\geq) en la ecuación

$$x_1 + x_2 - S_1 = 800, S_1 \geq 0$$

El tamaño de S_1 representa el exceso de toneladas de la mezcla por encima del mínimo requerido ($= 800$ toneladas).

El único requisito faltante es que el lado derecho de la ecuación resultante sea no negativo. El requisito se satisface simplemente multiplicando ambos lados de la ecuación por -1 , en caso de ser necesario.

Manejo de variables irrestrictas. El uso de una variable irrestricta en un modelo de PL se demuestra en el modelo de nivelación de la producción con períodos múltiples del ejemplo 2.4-4, donde la variable irrestricta S_i representa la cantidad de trabajadores contratados o despedidos en el periodo i . En el mismo ejemplo, la variable irrestricta se reemplaza por dos variables no negativas mediante la sustitución

$$S_i = S_i^- - S_i^+, S_i^- \geq 0, S_i^+ \geq 0$$

En este caso, S_i^- representa la cantidad de trabajadores contratados y S_i^+ la de trabajadores despedidos. Como se explicó en el ejemplo 2.4-4, es imposible (tanto intuitiva como matemáticamente) que S_i^- y S_i^+ asuman valores positivos al mismo tiempo.

3.2 TRANSICIÓN DE LA SOLUCIÓN GRÁFICA A LA ALGEBRAICA

El desarrollo del método simplex algebraico está basado en ideas transmitidas por la solución gráfica de PL que se muestra en la sección 2.2. En la figura 3.1 se comparan los dos métodos. En el método gráfico el espacio de soluciones es la intersección de los semiplanos que representan las restricciones; en tanto que en el método simplex el espacio de soluciones está representado por m ecuaciones lineales simultáneas y n variables no negativas. Es posible observar que el espacio de soluciones gráfico tiene un número infinito de puntos de solución; pero, ¿cómo se puede obtener una conclusión parecida a partir de la representación algebraica del espacio de soluciones? La respuesta es que, en todos los PL no triviales, la cantidad de m ecuaciones siempre es *menor que* la de n variables, por lo que se obtiene una cantidad infinita de soluciones (siempre que las ecuaciones sean consistentes).² Por ejemplo, la ecuación $x + y = 1$ tiene $m = 1$ y $n = 2$, y produce una infinidad de soluciones porque cualquier punto sobre la recta $x + y = 1$ es una solución.

² Si la cantidad de m ecuaciones (independientes) es igual a la de n variables (y las ecuaciones son consistentes), el sistema tiene exactamente una solución. Si m es mayor que n , entonces, al menos $m - n$ ecuaciones deben ser redundantes.

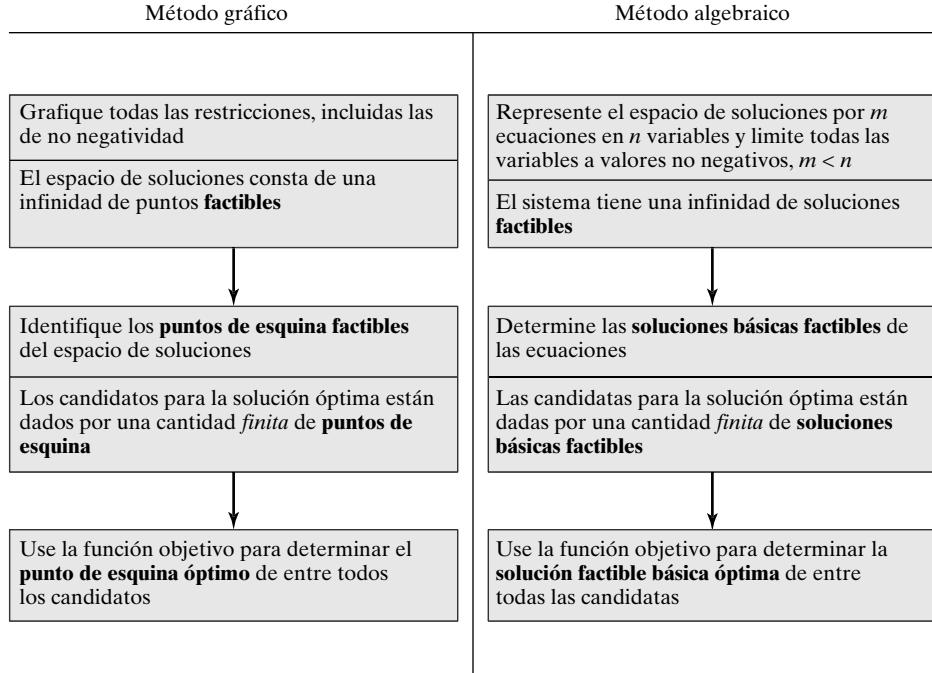


FIGURA 3.1

Transición de la solución gráfica a la solución algebraica

En el espacio de soluciones algebraico (definido mediante $m \times n$ ecuaciones, $m < n$), las **soluciones básicas** corresponden a los *puntos de esquina* en el espacio de soluciones gráfico. Se determinan igualando $n - m$ variables a cero y resolviendo las m ecuaciones para las m variables restantes, *siempre que la solución resultante sea única*. Esto significa que la cantidad *máxima* de puntos de esquina es

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Como sucede con los puntos de esquina, las soluciones básicas factibles definen por completo las candidatas para la solución óptima en el espacio de soluciones algebraico.

Ejemplo 3.2-1

Considere el siguiente PL con dos variables

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En la figura 3.2 se proporciona el espacio de soluciones gráfico para el problema.

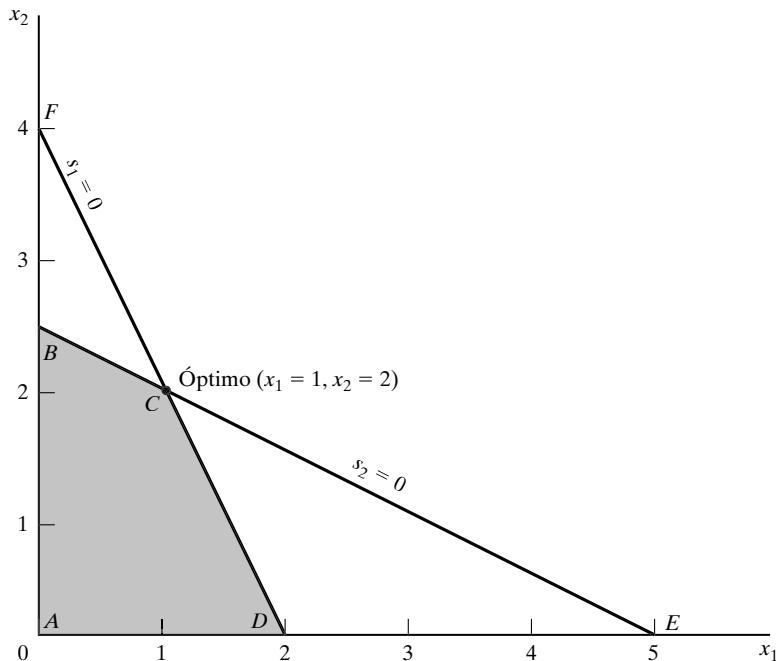


FIGURA 3.2

Espacio de soluciones PL para el ejemplo 3.2-1

De manera algebraica, el espacio de soluciones del PL está representado por las siguientes $m = 2$ ecuaciones y $n = 4$ variables:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + s_1 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 5 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Las soluciones básicas se determinan al establecer las $n - m (= 4 - 2 = 2)$ variables iguales a cero y al despejar las $m (= 2)$ variables restantes. Por ejemplo, si se establece $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, las ecuaciones proporcionan la solución básica única

$$s_1 = 4, s_2 = 5$$

Esta solución corresponde al punto A en la figura 3.2 (dese cuenta de que $s_1 = 4$ y $s_2 = 5$ en el punto A). Puede determinarse otro punto al hacer $s_1 = 0$ y $s_2 = 0$ para, después, resolver las dos ecuaciones resultantes

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

La solución básica asociada es $(x_1 = 1, x_2 = 2)$ o el punto C en la figura 3.2.

Es probable que usted se pregunte cuáles variables $n - m$ deberían igualarse a cero en busca de un punto de esquina (vértice) específico. Sin el beneficio del espacio de soluciones gráfico (que está disponible sólo

cuando mucho con tres variables), no es posible especificar las $(n - m)$ variables cero asociadas con un punto de esquina dado. Sin embargo, eso no impide enumerar *todos* los puntos de esquina del espacio de soluciones. Simplemente considere todas las combinaciones donde $n - m$ variables sean iguales a cero y resuelva las ecuaciones resultantes. Una vez hecho esto, la solución óptima es la solución básica *factible* (punto de esquina) con el mejor valor objetivo.

En el presente ejemplo, el número (máximo) de los puntos de esquina es $C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$. Al examinar la figura 3.2, se observan los cuatro puntos de esquina A, B, C y D . Así que, ¿dónde están los dos restantes? De hecho, los puntos E y F también son puntos de esquina; pero son *no factibles* y, entonces, no son candidatos para la solución óptima.

Para completar la transición de la solución gráfica a la algebraica, las $n - m$ variables cero se conocen como **variables no básicas**. Las m variables restantes se llaman **variables básicas** y su solución (obtenida al resolver las m ecuaciones) se conoce como **solución básica**. En la siguiente tabla se proporcionan todas las soluciones básicas y no básicas de este ejemplo.

Variables no básicas (cero)	Variables básicas	Solución básica	Punto de esquina asociado	¿Factible?	Valor objetivo, z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	$(4, 5)$	A	Sí	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	$(4, -3)$	F	No	—
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	$(2.5, 1.5)$	B	Sí	7.5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	$(2, 3)$	D	Sí	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	$(5, -6)$	E	No	—
(s_1, s_2)	(x_1, x_2)	$(1, 2)$	C	Sí	8 (óptimo)

Comentarios. En la ilustración anterior se observa que a medida que el tamaño del problema crece, la enumeración de todos los puntos de esquina se vuelve una tarea prohibitiva. Por ejemplo, para $m = 10$ y $n = 20$, es necesario resolver C_{10}^{20} ($= 184,756$) conjuntos de 10×10 ecuaciones, una tarea abrumadora, sobre todo si se toma en cuenta que un PL de (10×20) es muy pequeño (los PL reales pueden incluir miles de variables y restricciones). El método simplex atenúa esta carga computacional en forma drástica, al investigar sólo un subconjunto de todas las posibles soluciones básicas factibles (puntos de esquina). Esto es lo que hace el algoritmo simplex.

3.3 MÉTODO SIMPLEX

En vez de enumerar *todas* las soluciones básicas (puntos de esquina) del problema de PL (como se hizo en la sección 3.2), el método simplex investiga sólo “algunas” de esas soluciones. La sección 3.3.1 describe la naturaleza *iterativa* del método, y la sección 3.3.2 proporciona los detalles computacionales del algoritmo simplex.

3.3.1 Naturaleza iterativa del método simplex

La figura 3.3 proporciona el espacio de soluciones del PL del ejemplo 3.2-1. Con la finalidad de estandarizar el algoritmo, el método simplex siempre inicia en el origen, donde todas las variables de decisión, $x_j, j = 1, 2, \dots, n$, son cero. En la figura 3.3, el punto A es el origen ($x_1 = x_2 = 0$), y el valor objetivo asociado, z , es cero. La pregunta lógica ahora es si un incremento en los valores de x_1 y x_2

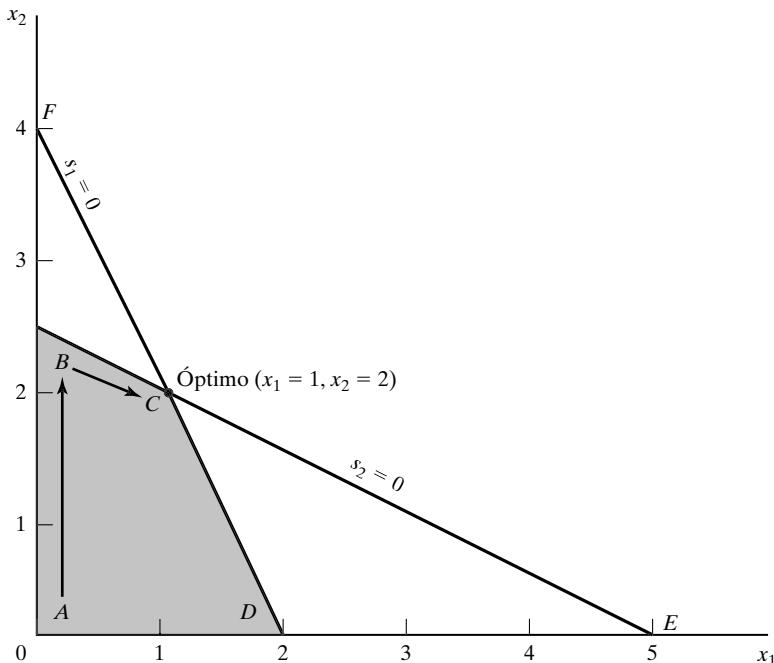


FIGURA 3.3
Proceso iterativo del método simplex

no básicas por encima de sus valores actuales de cero puede mejorar (incrementar) el valor de z . La pregunta se responde al investigar la función objetivo:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

Un incremento de x_1 o x_2 (o de ambas) sobre sus valores actuales de cero *mejorará* el valor de z . El diseño del método simplex no permite el incremento simultáneo de las variables, sino que las hace aumentar *una a la vez*. La variable que se incrementa es aquella con mayor *grado* de mejora en z . En el ejemplo presente, el *grado* de mejora del valor de z es de 2 unidades para x_1 y de 3 para x_2 . Por lo tanto, se elige x_2 (la variable con el mayor grado de mejora entre todas las variables no básicas) para que crezca. En la figura 3.3 se muestra que el valor de x_2 debe incrementarse hasta llegar al punto de esquina B (recuerde de la figura 3.1 que no llegar al punto de esquina B no es una opción, porque un candidato para el óptimo debe ser un punto de esquina). En el punto B , como se explicará adelante, el método simplex incrementará el valor de x_1 para llegar al punto de esquina mejorado C , que es el óptimo.

La trayectoria del algoritmo simplex siempre conecta puntos de esquina. En el ejemplo presente, la trayectoria al óptimo es $A \rightarrow B \rightarrow C$. Cada punto de esquina a lo largo de la trayectoria está asociado con una **iteración**. Es importante hacer notar que el método simplex *siempre* se mueve a lo largo de los **bordes** del espacio de soluciones, lo cual significa que el método no puede cruzarlo. Por ejemplo, el algoritmo simplex no puede ir directamente de A a C .

Momento, ¡ajá!: El nacimiento de la optimización o de cómo Dantzig desarrolló el método simplex.³

El matemático ruso ganador del premio Nobel Leonid Kantorovich (1912-1986) se considera el fundador de la teoría de la programación lineal. Pero fue el algoritmo simplex desarrollado por el matemático estadounidense George B. Dantzig (1914-2005) lo que hizo posible resolver PL (grandes) en la práctica. El éxito del algoritmo de Dantzig marcó el comienzo de desarrollos innovadores en áreas de optimización inexploradas.

Dantzig comenzó su carrera durante la Segunda Guerra Mundial como consejero matemático en el Pentágono, donde “se le pidió que encontrara una manera de calcular más rápidamente el tiempo de despliegue, el entrenamiento y el programa de suministro logístico”. Su desarrollo estuvo influido por el modelo de economía de entrada-salida desarrollado por el ganador del Premio Nobel Wassily Leontief (1906-1999). El modelo de Leontief utilizó una matriz que cuantificó la correspondencia uno a uno entre los procesos de producción y los artículos producidos mediante esos procesos, con la finalidad de determinar el efecto de los cambios en un sector económico sobre otros sectores. Dantzig extendió esa idea fundamental para incluir *actividades alternativas*, culminando con su modelo de análisis de actividades que consistía esencialmente en ecuaciones lineales y desigualdades, que definían el espacio de soluciones factibles. El modelo inicial de Dantzig enfrentaba dos obstáculos importantes: (1) Era muy grande, por lo que la computabilidad (en ausencia de la computadora “digital”) era un problema insuperable. (2) El modelo no tenía función objetivo, ya que la meta del modelo solía expresarse en reglas establecidas sobre un terreno “difuso”.⁴ Finalmente, Dantzig ideó la función objetivo a optimizar (maximizar o minimizar), un concepto que él afirmó era en gran parte desconocido antes de 1947, debido a lo que llamó la “incomputabilidad” del modelo. Dantzig consideró que el concepto de usar una función a optimizar era “revolucionario” y le pavimentó el camino para el descubrimiento de su método simplex. El nuevo algoritmo ha resistido la prueba del tiempo y hasta la fecha ha abierto la puerta para el desarrollo del enorme campo de la *optimización matemática*.

Dantzig demuestra la eficacia de la programación lineal citando el ejemplo (para los estándares de hoy, de un tamaño modesto) donde se pretende encontrar la mejor asignación de 70 personas (con diferentes habilidades y, por lo tanto, costos diferentes) a 70 puestos de trabajo (vea la sección 5.4). Incluso con las computadoras más rápidas que existen en la actualidad, el tiempo necesario para enumerar las $70! (>10^{100})$ permutaciones es increíblemente grande. Por el contrario, sólo toma un momento resolver el programa lineal resultante (140×4900), porque el método simplex evalúa tan sólo una fracción de los *puntos extremos* factibles del espacio de soluciones.

3.3.2 Detalles de cálculo del algoritmo simplex

En esta sección se explican los detalles de cálculo de una iteración simplex. El vehículo de esta explicación será un ejemplo numérico.

Pronto descubrirá que los cálculos del método simplex son repetitivos, tediosos y voluminosos. Sin embargo, es imperativo que experimente esos cálculos manuales, aunque sólo sea para apreciar el papel indispensable de la computadora en la solución de problemas de IO. Y aunque en la práctica nunca resuelva un PL manualmente, la experiencia es importante porque permite una comprensión de cómo y por qué funciona el algoritmo. En este contexto, es recomendable que usted mantenga una imagen mental del espacio de soluciones gráfico que se muestra en el ejem-

³ Dantzig, G. B. “Linear Programming,” *Operations Research*, vol. 15, núm. 1, 2002, pp. 42-47.

⁴ Dantzig afirma que cuando se preguntó a los comandantes militares acerca de su percepción del objetivo de su modelo de análisis de actividades, la respuesta fue “ganar la guerra construyendo mejores bombarderos y acorazados”.

plo 3.3-1 para obtener una idea de la estrecha asociación entre la iteración algebraica y el punto de esquina gráfica. En particular, al final de cada iteración, lea el punto de solución resultante directamente en la tabla simplex y, después, localice su *punto de esquina* correspondiente en el espacio de soluciones gráfico. De esta manera, tendrá una mejor comprensión de la esencia del método simplex.

Ejemplo 3.3-1

Considere el modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.1-1) expresado en forma de ecuación:

$$\text{Minimizar } z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + s_1 &= 24 && \text{(Materia prima M1)} \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 6 && \text{(Materia prima M2)} \\ -x_1 + x_2 + s_3 &= 1 && \text{(Límite del mercado)} \\ x_2 + s_4 &= 2 && \text{(Límite de la demanda)} \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Las variables s_1, s_2, s_3 y s_4 son las holguras asociadas con las restricciones respectivas.

A continuación, se escribe la ecuación objetivo como

$$z - 5x_1 - 4x_2 = 0$$

De esta manera, la tabla simplex inicial se representa como sigue:

Básicas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución	
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0	Fila z
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	Fila s_1
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	Fila s_2
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	Fila s_3
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	Fila s_4

El diseño de la tabla simplex proporciona de manera automática la solución en la iteración inicial. La solución inicia en el origen $(x_1, x_2) = (0, 0)$, por lo que (x_1, x_2) se definen como las variables no básicas y (s_1, s_2, s_3, s_4) como las variables básicas. La variable objetivo z y las variables básicas (s_1, s_2, s_3, s_4) aparecen en la columna de la extrema izquierda (la base). Sus valores, $z = 0, s_1 = 24, s_2 = 6, s_3 = 1, s_4 = 2$, que aparecen en la columna de la extrema derecha (Solución) de la tabla, se dan *directamente* en los lados derechos de las ecuaciones del modelo (lo que es una consecuencia conveniente de empezar en el origen). El resultado se observa al igualar las variables no básicas (x_1, x_2) a cero en todas las ecuaciones y, también, viendo la configuración especial del tipo *matriz identidad* de los coeficientes de restricción de las variables básicas (todos los elementos en las diagonales son 1 y todos los elementos fuera de las diagonales son 0).

¿Es óptima la solución inicial? La función objetivo $z = 5x_1 + 4x_2$ muestra que la solución puede mejorar si se incrementa el valor de la variable x_1 o de la variable x_2 no básica por encima de cero. Con base en el argumento de la sección 3.3.1, x_1 debe incrementarse porque tiene el coeficiente objetivo *más positivo*. De forma equivalente, en la tabla simplex donde la función objetivo aparece como $z - 5x_1 - 4x_2 = 0$, la variable seleccionada es la variable no básica con el coeficiente *más negativo* en la ecuación objetivo. Esta regla de-

fine la llamada **condición de optimalidad simplex**. En la terminología del algoritmo simplex, x_1 se conoce como la **variable de entrada** porque ingresa a la solución básica.

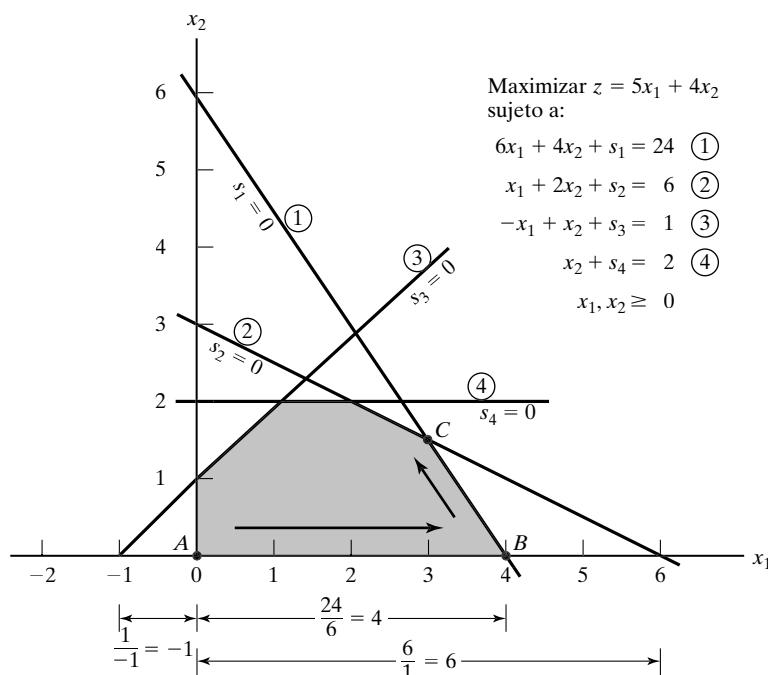
Si x_1 es la variable de entrada, una de las variables básicas actuales debe salir, es decir, se vuelve no básica a un nivel cero (recuerde que la cantidad de variables no básicas debe ser siempre $n - m$). La mecánica para determinar la **variable de salida** implica calcular las **relaciones** del lado derecho de las ecuaciones (*Solución*) con los coeficientes de restricción (estrictamente) *positivos* correspondientes bajo la variable de entrada, x_1 , como se muestra en la siguiente tabla:

Básicas	Entrante x_1	Solución	Relación (o intersección)
s_1	6	24	$x_1 = \frac{24}{6} = 4 \leftarrow$ mínimo
s_2	1	6	$x_1 = \frac{6}{1} = 6$
s_3	-1	1	$x_1 = \frac{1}{-1} = -1$ (denominador negativo, ignorar)
s_4	0	2	$x_1 = \frac{2}{0} = \infty$ (denominador cero, ignorar)
Conclusión: entra x_1 (en el nivel 4) y sale s_1 (en el nivel cero)			

¿Cómo las relaciones calculadas determinan la variable de salida y el valor de la variable de entrada? En la figura 3.4 se muestra que las relaciones calculadas son en realidad las intersecciones de las líneas de restricción con el eje x_1 (variable de entrada). Se observa que el valor de x_1 debe incrementarse hasta la intersección *no negativa*

FIGURA 3.4

Interpretación gráfica de las relaciones del método simplex en el modelo de Reddy Mikks



mínima con el eje x_1 ($= 4$), para alcanzar el punto de esquina B . Cualquier incremento más allá de B no es factible. En el punto B , la variable básica actual s_1 asociada con la restricción 1 asume un valor de cero y se transforma en la *variable de salida*. La regla asociada con las relaciones calculadas se conoce como **condición de factibilidad simplex** porque garantiza la factibilidad de la nueva solución.

El nuevo punto solución B se determina “intercambiando” la variable de entrada x_1 y la variable de salida s_1 en la tabla simplex, para obtener

Variables no básicas (cero) en B : (s_1, x_2)

Variables básicas en B : (x_1, s_2, s_3, s_4)

El proceso de intercambio se basa en las **operaciones de filas de Gauss-Jordan**, que identifica la columna de la variable de entrada como **columna pivote** y la fila de la variable de salida como fila pivote, y cuya intersección se conoce como **elemento pivote**. La siguiente tabla es un replanteamiento de la tabla inicial con sus filas y columnas pivote resaltadas.

									↓	Entrar	
		Básicas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución	
		z	1	-5	-4	0	0	0	0	0	0
Sale \leftarrow		s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	Fila pivote
		s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	
		s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	
		s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	
		Columna pivote									

Los cálculos de Gauss-Jordan necesarios para obtener la nueva solución básica son de dos tipos.

1. Fila pivote

- a. Reemplace la variable de salida en la columna *Básicas* por la variable de entrada.
- b. Nueva fila pivote = Fila pivote actual \div Elemento pivote

2. Todas las demás filas, incluyendo z

$$\text{Nueva fila} = (\text{Fila actual}) - (\text{Coeficiente de la columna pivote}) \times (\text{Nueva fila pivote})$$

Los cálculos se aplican a la tabla anterior como sigue:

1. Reemplace s_1 en la columna *Básicas* por x_1 :

$$\text{Nueva fila } x_1 = \text{Fila } s_1 \text{ actual} \div 6$$

$$= \frac{1}{6}(0 \ 6 \ 4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 24)$$

$$= (0 \ 1 \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 4)$$

2. Nueva fila z = Fila z actual $- (-5) \times$ Nueva fila x_1

$$= (1 \ -5 \ -4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) - (-5) \times (0 \ 1 \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 4)$$

$$= (1 \ 0 \ -\frac{2}{3} \ \frac{5}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 20)$$

3. Nueva fila $s_2 = \text{Fila } s_2 \text{ actual} - (1) \times \text{Nueva fila } x_1$

$$= (0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 6) - (1) \times (0 \ 1 \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 4)$$

$$= (0 \ 0 \ \frac{4}{3} \ -\frac{1}{6} \ 1 \ 0 \ 0 \ 2)$$

4. Nueva fila $s_3 = \text{Fila } s_3 \text{ actual} - (-1) \times \text{Nueva fila } x_1$

$$= (0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1) - (-1) \times (0 \ 1 \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 4)$$

$$= (0 \ 0 \ \frac{5}{3} \ \frac{1}{6} \ 0 \ 1 \ 0 \ 5)$$

5. Nueva fila $s_4 = \text{Fila } s_4 \text{ actual} - (0) \times \text{Nueva fila } x_1$

$$= (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2) - (0)(0 \ 1 \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 4)$$

$$= (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2)$$

La nueva solución básica es (x_1, s_2, s_3, s_4) , y la nueva tabla es

				↓					
Básicas		z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
z		1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	0	0	20
x_1		0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4
\leftarrow	s_2	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	2
	s_3	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	5
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Observe que la estructura de la nueva tabla es semejante a la de la tabla inicial, en el sentido de que los coeficientes de las restricciones de la variable básica forman una matriz identidad. Por consiguiente, cuando las nuevas variables no básicas x_2 y s_1 se igualan a cero, la columna Solución da la nueva solución básica ($x_1 = 4$, $s_2 = 2$, $s_3 = 5$, $s_4 = 2$) de forma automática.⁵ Este “acondicionamiento” de la tabla es el resultado de aplicar las operaciones de filas de Gauss-Jordan. El nuevo valor objetivo correspondiente es $z = 20$, que es consistente con

$$\begin{aligned} \text{Nueva } z &= \text{Anterior } z + \text{Nuevo valor de } x_1 \times \text{su coeficiente objetivo} \\ &= 0 + 4 \times 5 = 20 \end{aligned}$$

Por otro lado, $z = (4 \times \text{valor de } x_1 + 0 \times \text{valor de } s_2 + 0 \times \text{valor de } s_3 + 0 \times \text{valor de } s_4) = (4 \times 5 + 0 \times 2 + 0 \times 5 + 0 \times 2) = 20$.

En la última tabla, la *condición de optimalidad* muestra que x_2 (con el coeficiente más negativo de fila z) es la variable de entrada. La condición de factibilidad produce la siguiente información:

Básicas	Entrante	Solución	Relación
x_1	$\frac{2}{3}$	4	$x_2 = 4 \div \frac{2}{3} = 6$
s_2	$\frac{4}{3}$	2	$x_2 = 2 \div \frac{4}{3} = 1.5$ (mínimo)
s_3	$\frac{5}{3}$	5	$x_2 = 5 \div \frac{5}{3} = 3$
s_4	1	2	$x_2 = 2 \div 1 = 2$

⁵ A lo largo de mi experiencia académica, he notado que, si bien los estudiantes son capaces de realizar los tediosos cálculos del método simplex, al final algunos no pueden decir cuál es la solución. Para ayudar a vencer esa dificultad potencial, se hace un esfuerzo por “leer” la solución del PL a partir de cada tabla.

Por lo tanto, s_2 sale de la solución básica, y el nuevo valor de x_2 es 1.5. El incremento correspondiente en z es $\frac{2}{3}x_2 = \frac{2}{3} \times 1.5 = 1$, el cual proporciona la nueva $z = 20 + 1 = 21$, como lo confirma la siguiente tabla.

Al reemplazar s_2 en la columna *Básicas* por la x_2 de entrada, se aplican las siguientes operaciones de filas de Gauss-Jordan:

1. Nueva fila pivotе $x_2 = \text{Fila } s_2 \text{ actual} \div \frac{4}{3}$
2. Nueva fila $z = \text{Fila } z \text{ actual} - (-\frac{2}{3}) \times \text{Nueva fila } x_2$
3. Nueva fila $x_1 = \text{Fila } x_1 \text{ actual} - (\frac{2}{3}) \times \text{Nueva fila } x_2$
4. Nueva fila $s_3 = \text{Fila } s_3 \text{ actual} - (\frac{5}{3}) \times \text{Nueva fila } x_2$
5. Nueva fila $s_4 = \text{Fila } s_4 \text{ actual} - (1) \times \text{Nueva fila } x_2$

Los cálculos anteriores producen la siguiente tabla (¡verifíquelo!):

Básicas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
z	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	21
x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	3
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$
s_3	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{5}{2}$
s_4	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$

Con base en la condición de optimalidad, *ninguno* de los coeficientes de la fila z son negativos. De ahí que la última tabla sea óptima.

La solución óptima puede leerse en la tabla simplex de la siguiente manera. Los valores óptimos de las variables en la columna *Básicas* aparecen en la columna Solución del lado derecho y se pueden interpretar como

Variable de decisión	Valor óptimo	Recomendación
x_1	3	Producir 3 toneladas diarias de pintura para exteriores
x_2	$\frac{3}{2}$	Producir 1.5 toneladas diarias de pintura para interiores
z	21	La utilidad diaria es de \$21,000

La solución también proporciona el estado de los recursos. Un recurso se designa como **escaso** si la variable de holgura asociada es cero, es decir, las actividades (variables) del modelo consumieron el recurso por completo. De lo contrario, si la holgura es positiva, entonces el recurso es **abundante**. La siguiente tabla clasifica las restricciones del modelo:

Recurso	Valor de holgura	Estado
Materia prima, $M1$	$s_1 = 0$	Escaso
Materia prima, $M2$	$s_2 = 0$	Escaso
Límite del mercado	$s_3 = \frac{5}{2}$	Abundante
Límite de la demanda	$s_4 = \frac{1}{2}$	Abundante

Comentarios. La tabla simplex ofrece mucha información adicional que incluye lo siguiente:

1. *Análisis de sensibilidad*, el cual determina las condiciones que mantendrán la solución actual sin cambios.
2. *Análisis postóptimo*, que determina la nueva solución óptima cuando cambian los datos del modelo.

En la sección 3.6 se presenta el análisis de sensibilidad. El análisis postóptimo se aborda en el capítulo 4.

Momento TORA

Los cálculos de Gauss-Jordan son tediosos, voluminosos y, sobre todo, aburridos. Además, no tienen importancia porque en la práctica estos cálculos son realizados por computadora. Lo importante es entender *cómo* funciona el método simplex. La opción interactiva *guiada para el usuario* de TORA (con retroalimentación instantánea) suele ser útil porque permite especificar el curso de los cálculos simplex (es decir, determinar las variables de entrada y de salida) sin el agobio de los cálculos de Gauss-Jordan. Para utilizar TORA con el problema de Reddy Mikks, introduzca el modelo y, luego, en el menú **SOLVE/MODIFY** seleccione los comandos **Solve \Rightarrow Algebraic \Rightarrow Iterations \Rightarrow All-Slack**. (La selección All-Slack indica que la solución básica inicial se compone sólo de variables de holgura. Las opciones restantes se presentarán en las secciones 3.4, 4.3 y 7.4-2). A continuación, haga clic en el botón **Go To Output Screen**. Se puede generar una o todas las iteraciones haciendo clic en las opciones **Next Iteration** o bien **All Iterations**. Si opta por generar las iteraciones de una en una, puede especificar de manera interactiva las variables de entrada y de salida haciendo clic en los encabezados de sus columnas y filas respectivas. Si sus selecciones son correctas, la columna se torna de color verde y la fila de color rojo. De lo contrario, aparece un mensaje de error.

3.3.3 Resumen del método simplex

Hasta ahora, hemos estudiado el caso de la maximización. En problemas de minimización, la *condición de optimalidad* requiere seleccionar la variable de entrada como la variable no básica con el coeficiente objetivo más *positivo* en la fila z , una regla exactamente opuesta a la del caso de maximización. Esto obedece a que $\max z$ equivale a $\min (-z)$. En lo referente a la *condición de factibilidad* para seleccionar la variable de salida, la regla no cambia.

Condición de optimalidad. La variable de entrada en un problema de maximización (minimización) es la variable *no básica* con el coeficiente más negativo (positivo) en la fila z . Los empates se rompen en forma arbitraria. El óptimo se alcanza en la iteración donde todos los coeficientes en la fila z son no negativos (no positivos).

Condición de factibilidad. Tanto en problemas de maximización como de minimización, la variable de salida es la variable *básica* asociada con la menor relación no negativa con denominador *estrictamente positivo*. Los empates se rompen de manera arbitraria.

Operaciones de filas de Gauss-Jordan.

1. Fila pivoté

- a. Reemplace la variable de salida en la columna *Básicas* por la variable de entrada.
- b. Nueva fila pivoté = Fila pivoté actual \div Elemento pivoté

2. Todas las demás filas, incluida z

Nueva fila = (Fila actual) – (Su coeficiente en la columna pivoté) \times (Nueva fila pivoté).

3.4 SOLUCIÓN ARTIFICIAL INICIAL

Como se demostró en el ejemplo 3.3-1, los PL donde todas las restricciones son (\leq), con lados derechos no negativos, ofrecen una conveniente solución factible básica inicial con todas las holguras. Los modelos que implican restricciones ($=$) y/o (\geq) no lo hacen.

El procedimiento para iniciar PL de “mal comportamiento” con restricciones ($=$) y (\geq) consiste en utilizar **variables artificiales** que desempeñan el papel de holguras en la primera iteración. Estas variables artificiales luego se desechan en una iteración posterior. Aquí se presentan dos métodos estrechamente relacionados: el método *M* y el método de dos fases.

3.4.1 Método *M*⁶

El método *M* inicia con el PL en forma de ecuación (sección 3.1). Si la ecuación i no tiene una holgura (o una variable que pueda desempeñar el papel de ésta), se agrega una variable artificial, R_i , para formar una solución inicial parecida a la solución básica de holgura total. Sin embargo, como las variables artificiales no forman parte del problema original, se requiere un “truco” de modelado para igualarlas a cero en el momento en que se alcance la iteración óptima (suponiendo que el problema tenga una solución factible). La meta deseada se logra asignando una **penalización** que se define como:

$$\text{Coeficiente en la función objetivo de la variable artificial} = \begin{cases} -M, & \text{en problemas de maximización} \\ M, & \text{en problemas de minimización} \end{cases}$$

M es un valor positivo bastante grande (matemáticamente, $M \rightarrow \infty$).

Ejemplo 3.4-1

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Para convertir las restricciones en ecuaciones, se utiliza x_3 como un excedente en la segunda restricción y x_4 como una holgura en la tercera restricción. Por lo que

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

⁶ El método *M*, una de las técnicas de PL más antiguas, nunca se utiliza en códigos comerciales debido a su error de redondeo inherente. En su lugar se prefiere el método de las dos fases (sección 3.4.2) o una variación del mismo. Sin embargo, el uso de penalizaciones M , para forzar a una variable a tomar un valor cero, es un concepto importante en el modelado de IO.

sujeto a

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

La tercera ecuación tiene su variable de holgura, x_4 , pero la primera y la segunda ecuaciones no. Por consiguiente, se agregan las variables artificiales R_1 y R_2 en las primeras dos ecuaciones y se penalizan en la función objetivo con $MR_1 + MR_2$ (porque estamos minimizando). El PL resultante se convierte en

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 + R_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 \geq 0$$

La solución básica inicial es $(R_1, R_2, x_4) = (3, 6, 4)$.

Desde un punto de vista del cálculo, la resolución del problema con la computadora requiere reemplazar M por un valor numérico (suficientemente grande). No obstante, en todos los libros de texto, incluidas las siete ediciones de esta obra, M se maneja algebraicamente en la tabla simplex. El resultado es una dificultad innecesaria agregada al cálculo, la cual puede evitarse sustituyendo un valor numérico apropiado en vez de M (lo que de cualquier modo se debe hacer al usar la computadora). Nos apartamos de la larga tradición de manejar M algebraicamente y utilizamos una sustitución numérica en su lugar. La intención es, desde luego, simplificar la presentación sin perder la esencia.

¿Qué valor de M se debería utilizar? La respuesta depende de los datos de la programación original. Recordemos que la penalización M debe ser lo bastante grande *respecto de los coeficientes objetivo originales* para forzar a las variables originales a ser cero (lo que sucede únicamente si existe una solución factible). Al mismo tiempo, como las computadoras son la herramienta principal para resolver PL, no es conveniente que M sea innecesariamente grande, ya que ello puede conducir a un grave error de redondeo. En este ejemplo, los coeficientes objetivo de x_1 y x_2 son 4 y 1, respectivamente, y parece razonable establecer $M = 100$.⁷

Si se usa $M = 100$, la tabla simplex de inicio es la siguiente (por comodidad, de ahora en adelante la columna z se elimina de la tabla porque no cambia en todas las iteraciones):

Básicas	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	-4	-1	0	-100	-100	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

⁷ Técnicamente, el método M no implica sustituir M en forma numérica. En vez de esto, el i -ésimo coeficiente en la fila objetivo de una tabla simplex se reduce a calcular las constantes a_i y b_i en la expresión algebraica $a_iM + b_i$. La comparación de las dos expresiones algebraicas se basará entonces en condiciones que involucran sólo a las constantes a_i y b_i . La razón por la que no se utiliza en la práctica es la potencialmente enorme carga de cómputo asociada con el cálculo y la comparación de las constantes a_i y b_i .

Antes de proseguir con los cálculos del método simplex, la fila z debe hacerse consistente con el resto de la tabla. El lado derecho de la fila z en la tabla en este momento muestra $z = 0$. Sin embargo, dada la solución no básica $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, la solución básica actual es $R_1 = 3$, $R_2 = 6$ y $x_4 = 4$, la cual da $z = (100 \times 3) + (100 \times 6) + (4 \times 0) = 900$. Esta inconsistencia se deriva del hecho de que R_1 y R_2 no tienen coeficientes de cero ($-100, -100$) en la fila z (compare con la solución de inicio de holgura total en el ejemplo 3.3-1, donde los coeficientes de las holguras en la fila z son cero).

Para eliminar la inconsistencia, es necesario sustituir R_1 y R_2 en la fila z por medio de la siguiente operación de filas:

$$\text{Nueva fila } z = \text{Anterior fila } z + (100 \times \text{fila } R_1 + 100 \times \text{fila } R_2)$$

(Convénzase de que esta operación es lo mismo que sustituir $R_1 = 3 - 3x_1 - x_2$ y $R_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3$ en la fila z .)

Por lo tanto, la tabla modificada es (¡compruébelo!):

Básicas	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	696	399	-100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

El resultado es que R_1 y R_2 ahora están sustituidos (tienen coeficientes cero) en la fila z con $z = 900$, como se deseaba.

La última tabla está lista para la aplicación de las condiciones de optimalidad y factibilidad de simplex, como se explicó en la sección 3.3.2. Dado que se minimiza la función objetivo, la variable x_1 que tiene el coeficiente más *positivo* en la fila z ($= 696$) entra en la solución. La menor relación de la condición de factibilidad especifica a R_1 como la variable de salida (¡compruébelo!).

Una vez que se hayan determinado las variables de entrada y de salida, la nueva tabla se calcula utilizando las operaciones conocidas de Gauss-Jordan.

Básicas	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	0	167	-100	-232	0	0	204
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
R_2	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2
x_4	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	3

La última tabla muestra que x_2 y R_2 son las variables de entrada y de salida, respectivamente. Continuando con los cálculos simplex, se requieren dos iteraciones más para alcanzar el óptimo $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{9}{5}$, $z = \frac{17}{5}$ (¡verifíquelo con TORA!).

Observe que las variables artificiales R_1 y R_2 se salen de la solución básica (es decir, se hacen iguales a cero) rápidamente en la primera y segunda iteraciones, un resultado que es consistente con el concepto de penalizarlas en la función objetivo.

Comentarios. El uso de la penalización M no forzará a una variable artificial a ser cero en la iteración simplex final, si el PL no tiene una solución factible (es decir, las restricciones no pueden satisfacerse al mismo tiempo). En este caso, la iteración simplex final incluirá al menos una variable artificial con un valor positivo. En la sección 3.5.4 se explica esa situación.

3.4.2 Método de las dos fases

En el método M , el uso de la penalización, M , puede conducir a un error de redondeo. El método de dos fases elimina el uso de la constante M . Como su nombre lo indica, el método resuelve el PL en dos fases; en la fase I se trata de encontrar la solución factible básica inicial y, si se halla una, se invoca la fase II para resolver el problema original.

Resumen del método de dos fases

- Fase I.** Ponga el problema en forma de ecuación y agregue las variables artificiales necesarias a las restricciones (exactamente como en el método M), para tener la certeza de una solución básica inicial. Después, determine una solución básica de la ecuación resultante que *siempre* minimice la suma de las variables artificiales, independientemente de si el PL es de maximización o de minimización. Si el valor mínimo de la suma es positivo, el problema de PL no tiene una solución factible. De lo contrario, prosiga con la fase II.
 - Fase II.** Use la solución factible de la fase I como una solución factible básica inicial para el problema *original*.
-

Ejemplo 3.4-2

Se utiliza el mismo problema del ejemplo 3.4-1.

Fase I

$$\text{Minimizar } r = R_1 + R_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 + R_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 \geq 0$$

La tabla asociada es

Básicas	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
r	0	0	0	-1	-1	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

Como en el método M , R_1 y R_2 se sustituyen en la fila r mediante las siguientes operaciones de filas:

$$\text{Nueva fila } r = \text{Fila } r \text{ anterior} + (1 \times \text{fila } R_1 + 1 \times \text{fila } R_2)$$

La nueva fila r se utiliza para resolver la fase I del problema, la cual da como resultado la siguiente tabla óptima (compruébelo con Iterations \Rightarrow Two-phase Method de TORA):

Básicas	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
r	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	-1	1	1

Como el mínimo $r = 0$, la fase I produce la solución factible básica $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$ y $x_4 = 1$. En este punto, las variables artificiales ya completaron su misión, y podemos eliminar sus columnas de la tabla y continuar con la fase II.

Fase II

Después de eliminar las columnas artificiales, se escribe el problema *original* como

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$x_1 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$x_2 - \frac{3}{5}x_3 = \frac{6}{5}$$

$$x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

En esencia, la fase I ha transformado las ecuaciones de restricciones originales de forma que proporcionen una solución factible básica inicial para el problema, si es que existe una. Así, la tabla asociada con la fase II del problema se da como

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	-4	-1	0	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	1

Una vez más, como las variables básicas x_1 y x_2 tienen coeficientes diferentes de cero en la fila z , deben sustituirse mediante las siguientes operaciones.

$$\text{Nueva fila } z = \text{Fila } z \text{ anterior} + (4 \times \text{fila } x_1 + 1 \times \text{fila } x_2)$$

Entonces, la tabla inicial de la fase II es

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{18}{5}$
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	1

Como se está minimizando, x_3 debe entrar en la solución. La aplicación del método simplex producirá el óptimo en una iteración (verifíquelo con TORA).

Comentarios. La eliminación de las variables artificiales y sus columnas al final de la fase I sólo puede ocurrir cuando todas son *no básicas* (como lo ilustra el ejemplo 3.4-2). Si una o más variables son *básicas* (al nivel *cero*) al final de la fase I, entonces, su eliminación requiere los siguientes pasos adicionales:

- Paso 1.** Seleccione una variable artificial cero que salga de la solución básica y designe su fila como *fila pivote*. La variable de entrada puede ser *cualquier* variable *no artificial no básica* con un coeficiente *distinto de cero* (positivo o negativo) en la fila pivote. Realice la iteración simplex asociada.
- Paso 2.** Elimine la columna de la variable artificial (que acaba de salir) de la tabla. Si ya se eliminaron todas las variables artificiales, continúe con la fase II. De lo contrario, regrese al paso 1.

La lógica detrás del paso 1 es que la factibilidad de las variables básicas restantes no se verá afectada cuando una variable artificial cero se vuelva no básica, independientemente de si el elemento pivote es positivo o negativo. Los problemas 3-47 y 3-48 ilustran esta situación. El problema 3-49 proporciona un detalle adicional sobre los cálculos de la fase I.

3.5 CASOS ESPECIALES EN EL MÉTODO SIMPLEX

En esta sección se consideran cuatro casos especiales que surgen al aplicar el método simplex.

1. Degeneración
2. Óptimos alternativos
3. Solución no acotada
4. Solución no factible (o no existente)

En el resto de la presente sección se da una explicación teórica de esas situaciones. También se hace una interpretación del significado de estos resultados especiales en un problema de la vida real.

3.5.1 Degeneración

Al aplicar la condición de factibilidad del método simplex, se puede presentar un empate para la menor relación, el cual puede romperse arbitrariamente. Cuando ello sucede, al menos una variable *básica* será cero en la siguiente iteración, y se dice que la nueva solución está **degenerada**. La degeneración puede hacer que las iteraciones simplex ocurran de forma indefinida en **ciclos**, y que el algoritmo nunca se termine. La condición también revela la posibilidad de, por lo menos, una restricción *redundante*.

En el siguiente ejemplo se explican las influencias práctica y teórica de la degeneración.

Ejemplo 3.5-1 (Solución óptima degenerada)

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 9x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Si se usan las variables de holgura x_3 y x_4 , las tablas de solución son

Iteración	Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
0	z	-3	-9	0	0	0
Entra x_2	x_3	1	4	1	0	8
Sale x_3	x_4	1	2	0	1	4
1	z	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18
Entra x_1	x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2
Sale x_4	x_4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
2	z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18
(óptimo)	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
	x_1	1	0	-1	2	0

En la iteración 0, x_3 y x_4 empataan como la variable de salida, lo cual provoca degeneración en la iteración 1, porque la variable básica x_4 asume un valor de cero. El óptimo se alcanza en una iteración más.

Comentarios.

1. ¿Cuál es la implicación práctica de la degeneración? Observe la solución gráfica en la figura 3.5. Tres líneas pasan por el punto óptimo ($x_1 = 0, x_2 = 2$). Como éste es un problema bidimensional, el punto está *sobredeterminado*, y una de las restricciones es **redundante**. Redundancia significa que una restricción asociada puede sacarse sin que esto cambie el espacio de soluciones. Por lo tanto, en la figura 3.5, $x_1 + 4x_2 \leq 8$

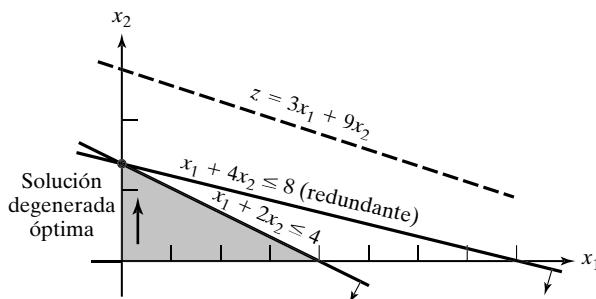


FIGURA 3.5
Degeneración del PL del ejemplo 3.5-1

es redundante, pero $x_1 + 2x_2 \leq 4$ no lo es. El conocimiento sencillo de que algunos recursos son superfluos suele ser importante durante la fase de implementación de la solución. La información también permite descubrir irregularidades en la fase de modelado de la solución. Por desgracia, no existen técnicas de cómputo eficientes para identificar restricciones redundantes.

2. Desde el punto de vista teórico, la degeneración puede originar **ciclado**. En las iteraciones simplex 1 y 2, el valor objetivo no mejora ($z = 18$) y, por consiguiente, es posible que el método simplex entre en una secuencia repetitiva de iteraciones que nunca mejoran el valor objetivo ni satisfacen la condición de optimidad (vea el problema 3-54). El ciclado quizás no sea una ocurrencia común, pero se ha reportado en la práctica.⁸ Aunque se han desarrollado algoritmos para eliminar el ciclado, éstos reducen drásticamente los cálculos, por lo que no deberían implementarse, a menos de que haya evidencia de que en realidad ocurre el ciclado.⁹
3. Aun cuando quizás un modelo de PL no se inicie con restricciones redundantes (en el sentido directo que se muestra en la figura 3.5), el error de redondeo causado por la computadora en realidad puede crear condiciones parecidas a la degeneración, durante el curso del proceso de solución de un PL de la vida real. En esos casos, las iteraciones se “detendrán” en un punto de solución, como si imitaran un ciclado. Los códigos comerciales tratan de aligerar el problema al perturbar periódicamente los valores de las variables básicas (para más detalles sobre cómo se desarrollan los códigos comerciales, vea la sección 3.7).

3.5.2 Óptimos alternativos

Un problema de PL puede tener una cantidad infinita de *óptimos alternativos* cuando la función objetivo es paralela a una restricción *vinculante* no redundante (es decir, una restricción que se satisface como una ecuación en la solución óptima). El siguiente ejemplo demuestra la importancia práctica de esas soluciones.

⁸ Vea T. C. Kotiah y D. I. Steinberg, “Letter to the Editor-On the Possibility of Cycling with the Simplex Method”, *Operations Research*, vol. 26, núm. 2, pp. 374-376, 1978.

⁹ Vea R. Bland, “New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method”, *Mathematics of Operations Research*, vol. 2, núm. 2, pp. 103-107, 1977.

Ejemplo 3.5-2 (Cantidad infinita de soluciones)

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En la figura 3.6 se demuestra cómo surgen óptimos alternativos en el modelo de PL, cuando la función objetivo es paralela a una restricción vinculante. Cualquier punto sobre el *segmento de línea BC* representa un óptimo alternativo con el mismo valor objetivo $z = 10$.

Las iteraciones del modelo se presentan en las siguientes tablas.

Iteración	Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
0	z	-2	-4	0	0	0
Entra x_2	x_3	1	2	1	0	5
Sale x_3	x_4	1	1	0	1	4
1 (óptimo)	z	0	0	2	0	10
Entra x_1	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
Sale x_4	x_4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
2 (óptimo alternativo)	z	0	0	2	0	10
	x_2	0	1	1	-1	1
	x_1	1	0	-1	2	3

La iteración 1 proporciona la solución óptima $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2}$ y $z = 10$ (punto B en la figura 3.6). La existencia de una alternativa se detecta en la tabla óptima examinando los coeficientes de las variables *no* básicas de la

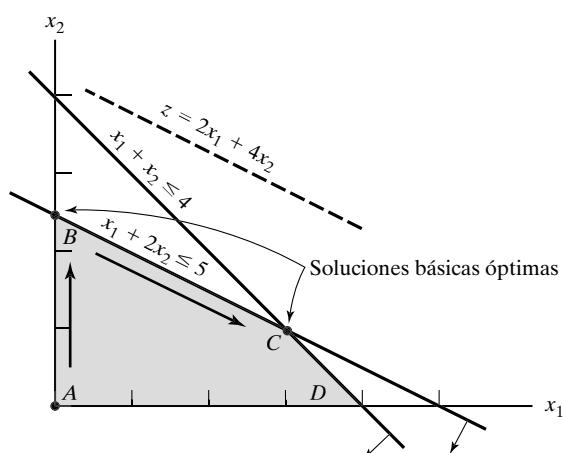


FIGURA 3.6
Óptimos alternativos de PL en el ejemplo 3.5-2

ecuación z . El coeficiente cero de la x_1 no básica indica que x_1 puede hacerse básica alterando los valores de las variables básicas sin cambiar el valor de z . La iteración 2 hace justo eso, aplicando x_1 y x_4 como las variables de entrada y de salida, respectivamente. El nuevo punto solución ocurre en $C(x_1 = 3, x_2 = 1, z = 10)$. (La opción Iterations de TORA permite determinar un óptimo alternativo.)

El método simplex trata sólo con los puntos de esquina óptimos, es decir, los puntos B y C en el presente ejemplo. Podemos determinar de forma matemática todos los puntos (x_1, x_2) sobre el segmento de línea BC como un promedio ponderado no negativo de los puntos $B(x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2})$ y $C(x_1 = 3, x_2 = 1)$; es decir,

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= \alpha(0) + (1 - \alpha)(3) = 3 - 3\alpha \\ \hat{x}_2 &= \alpha\left(\frac{5}{2}\right) + (1 - \alpha)(1) = 1 + \frac{3}{2}\alpha\end{aligned}\}, 0 \leq \alpha \leq 1$$

Comentarios. En la práctica, los óptimos alternativos son útiles porque es posible elegir de entre muchas soluciones sin que se deteriore el valor objetivo. En este ejemplo, la solución en B muestra que la actividad 2 sólo está en un nivel positivo. En cambio, en C ambas actividades están en un nivel positivo. Si el ejemplo representa una situación de mezcla de productos, suele ser ventajoso comercializar dos productos en vez de uno.

3.5.3 Solución no acotada

En algunos modelos de PL, el espacio de soluciones es *no acotado* por lo menos en una variable, es decir, que las variables pueden incrementarse de manera indefinida sin quebrantar alguna de las restricciones. En este caso, el valor objetivo asociado también puede ser no acotado.

Un espacio de soluciones no acotado indica que el modelo está mal construido. La irregularidad más probable en esos modelos es que no se hayan tomado en cuenta algunas restricciones clave. Otra posibilidad es que las estimaciones de los coeficientes de las restricciones quizás no sean precisas.

Ejemplo 3.5-3 (Valor objetivo no acotado)

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeto a

$$x_1 - x_2 \leq 10$$

$$2x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Iteración de inicio

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	-2	-1	0	0	0
x_3	1	-1	1	0	10
x_4	2	0	0	1	40

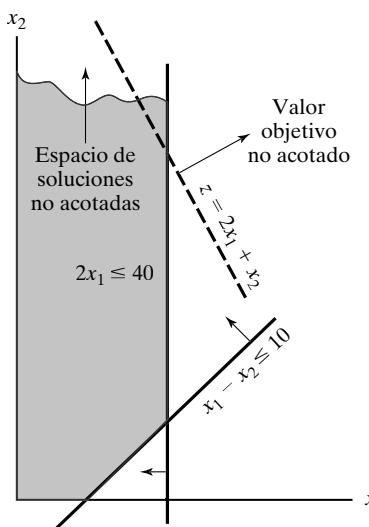


FIGURA 3.7

Solución no acotada de PL en el ejemplo 3.5-3

En la tabla de inicio, tanto x_1 como x_2 tienen coeficientes negativos en la ecuación z , lo cual significa que al incrementarse sus valores también lo hará el valor objetivo. Aunque x_1 debería ser la variable de entrada (tiene el coeficiente z más negativo), observamos que *todos* los coeficientes de restricción bajo x_2 son ≤ 0 , lo cual significa que x_2 puede incrementarse indefinidamente sin vulnerar ninguna de las restricciones (compare esto con la interpretación gráfica de la relación mínima en la figura 3.4). El resultado es que z puede incrementarse indefinidamente. En la figura 3.7 se muestra el espacio de soluciones no acotado y, también, que x_2 y z pueden incrementarse de manera indefinida.

Comentarios. Si se hubiera seleccionado x_1 como la variable de entrada en la iteración de inicio (conforme a la condición de optimalidad), a final de cuentas, una iteración posterior habría producido una variable de entrada con las mismas propiedades que x_2 . Vea el problema 3-58.

3.5.4 Solución no factible (o no existente)

Los modelos de PL con restricciones inconsistentes no tienen una solución factible. Esta situación no ocurre si *todas* las restricciones son del tipo \leq con lados derechos no negativos, porque las holguras ofrecen una solución factible evidente. Para otros tipos de restricciones, se utilizan variables artificiales penalizadas para iniciar la solución. Si al menos una variable artificial es *positiva* en la iteración óptima, entonces, el PL no tiene una solución factible. Desde el punto de vista práctico, un espacio no factible apunta hacia la posibilidad de que el modelo no se haya formulado de manera correcta.

Ejemplo 3.5-4 (Espacio de soluciones no factibles)

Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

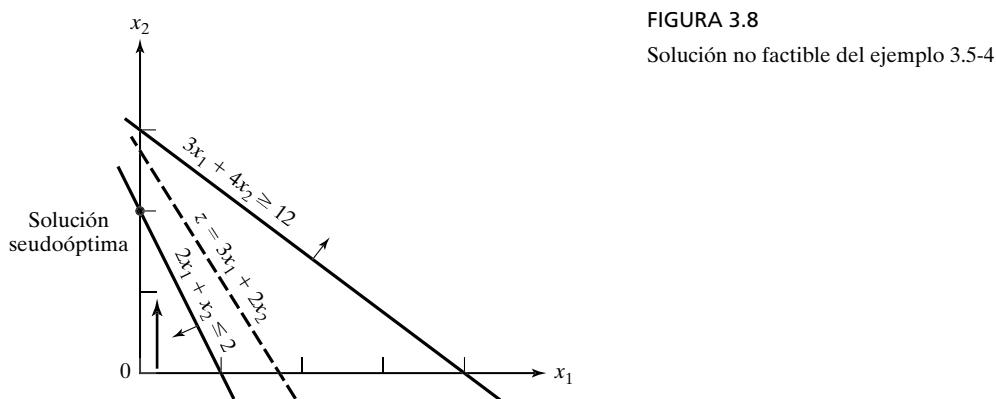
Si se usa la penalización $M = 100$ para la variable artificial R , la siguiente tabla proporciona las iteraciones simplex del modelo.

Iteración	Básicas	x_1	x_2	x_4	x_3	R	Solución
0	z	-303	-402	100	0	0	-1200
Entra x_2	x_3	2	1	0	1	0	2
Entra x_3	R	3	4	-1	0	1	12
1	z	501	0	100	402	0	-396
(seudoóptima)	x_2	2	1	0	1	0	2
	R	-5	0	-1	-4	1	4

La iteración óptima 1 muestra que la variable artificial R es *positiva* ($= 4$), es decir, el PL es no factible. La figura 3.8 ilustra el espacio de soluciones no factibles. Al permitir que la variable artificial sea positiva, el método simplex, de hecho, ha invertido la dirección de la desigualdad de $3x_1 + 4x_2 \geq 12$ a $3x_1 + 4x_2 \leq 12$ (¿puede usted explicar cómo?). El resultado es lo que llamamos una solución **seudoóptima**.

3.6 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En PL los parámetros (datos de entrada) del modelo pueden cambiar dentro de ciertos límites sin que cambie la solución óptima, lo cual se conoce como *análisis de sensibilidad* y será el tema de esta



sección. Más adelante, en el capítulo 4, se estudiará el análisis *postóptimo*, que se relaciona con la determinación de la nueva solución óptima, cuando se cambian ciertos datos de entrada.

La presentación explica las ideas básicas del análisis de sensibilidad por medio de la solución gráfica, que es más concreta. Después, estas ideas se extienden al problema general de PL con base en los resultados que aparecen en la tabla simplex.

3.6.1 Análisis gráfico de sensibilidad

En esta sección se muestra la idea general del análisis de sensibilidad. Se considerarán dos casos:

1. La sensibilidad de la solución óptima ante los cambios de la disponibilidad de recursos (lado derecho de las restricciones).
2. La sensibilidad de la solución óptima ante los cambios en la utilidad unitaria o el costo unitario (coeficientes de la función objetivo).

Se utilizarán ejemplos individuales para explicar ambos casos.

Ejemplo 3.6-1 (Cambios en el lado derecho)

JOBCO fabrica dos productos en dos máquinas. Una unidad del producto 1 requiere 2 horas en la máquina 1 y 1 hora en la máquina 2. Para el producto 2, una unidad requiere 1 hora en la máquina 1 y 3 horas en la máquina 2. Los ingresos por unidad de los productos 1 y 2 son de \$30 y \$20, respectivamente. El tiempo de procesamiento diario total disponible en cada máquina es de 8 horas.

Si x_1 y x_2 representan las cantidades diarias de unidades de los productos 1 y 2, respectivamente, el modelo de PL se da como

$$\text{Maximizar } z = 30x_1 + 20x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \quad (\text{Máquina 1})$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 8 \quad (\text{Máquina 2})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En la figura 3.9 se ilustra el cambio en la solución óptima, cuando se cambia la capacidad de la máquina 1. Si la capacidad diaria se incrementa de 8 a 9 horas, el nuevo óptimo se moverá al punto G. La razón de cambio en la z óptima, a consecuencia del cambio en la capacidad de la máquina 1 de 8 a 9 horas, se calcula como:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Razón de cambio del ingreso} \\ \text{a consecuencia del incremento} \\ \text{de la capacidad de la máquina 1} \\ \text{en 1 hora (del punto C al punto G)} \end{array} \right) = \frac{z_G - z_C}{(\text{Cambio de la capacidad})} = \frac{142 - 128}{9 - 8} = \$14/\text{h}$$

La tasa calculada proporciona un vínculo *directo* entre los datos de entrada al modelo (recursos) y sus resultados (ingreso total). Se dice que un incremento unitario (reducción unitaria) en la capacidad de la máquina 1 aumentará (reducirá) el ingreso en \$14.

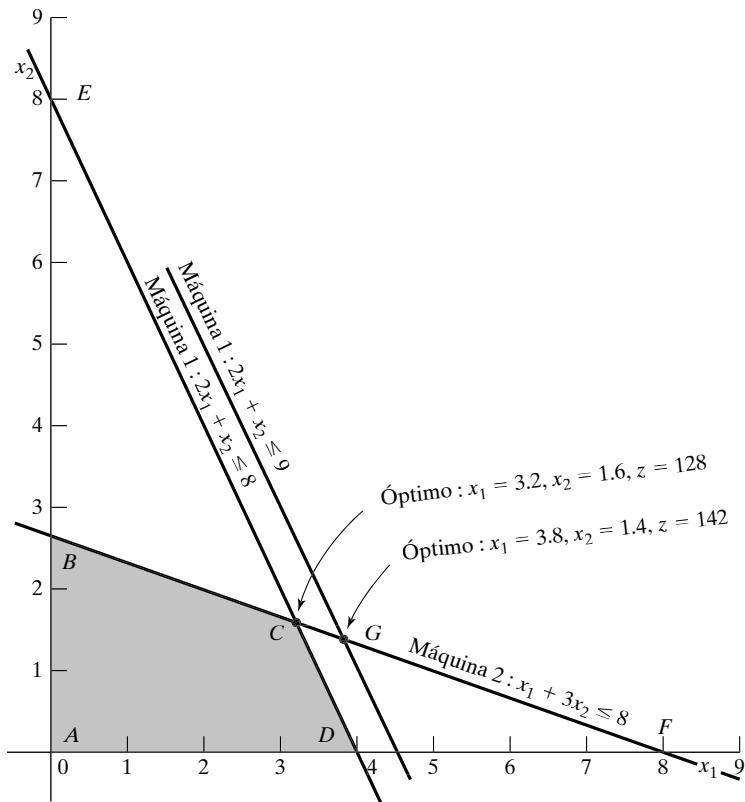


FIGURA 3.9

Sensibilidad gráfica de la solución óptima a cambios en la disponibilidad de recursos (lado derecho de las restricciones)

El nombre **valor unitario de un recurso** es una descripción apropiada de la razón de cambio de la función objetivo por el cambio unitario de un recurso. No obstante, los primeros desarrollos de la PL acuñaron el nombre abstracto de **precio dual** (o **sombra**) y, ahora, este nombre es un estándar en toda la literatura de la PL y en paquetes de software. La presentación en este libro se ajusta a este estándar. Sin embargo, piense en el “valor unitario de un recurso” cuando se encuentre con nombres estándares como “precio dual o precio sombra”.

En la figura 3.9 se observa que el precio dual de \$14/h permanece válido para cambios (incrementos o reducciones) en la capacidad de la máquina 1 que mueven su restricción paralela a sí misma, hacia cualquier punto sobre el segmento de línea *BF*. Las capacidades de la máquina 1 en los puntos *B* y *F* se calculan como sigue:

$$\text{Capacidad mínima de la máquina 1 [en } B = (0, 2.67)] = 2 \times 0 + 1 \times 2.67 = 2.67 \text{ h}$$

$$\text{Capacidad mínima de la máquina 1 [en } F = (8, 0)] = 2 \times 8 + 1 \times 0 = 16 \text{ h}$$

La conclusión es que el precio dual de \$14.00/h permanece válido sólo en el intervalo

$$2.67 \text{ h} \leq \text{Capacidad de la máquina 1} \leq 16 \text{ h}$$

Los cambios fuera de este intervalo producen un precio dual diferente (valor unitario).

Mediante cálculos similares, es posible verificar que el precio dual para la capacidad de la máquina 2 sea de \$2/h, y que no cambia cuando su capacidad se mantiene dentro del segmento de recta DE . Ahora,

$$\text{Capacidad mínima de la máquina 2 [en } D = (4, 0)] = 1 \times 4 + 3 \times 0 = 4 \text{ h}$$

$$\text{Capacidad mínima de la máquina 2 [en } E = (0, 8)] = 1 \times 0 + 3 \times 8 = 24 \text{ h}$$

Así, el precio dual de \$2/h para la máquina 2 continúa siendo aplicable para el intervalo

$$4 \text{ h} \leq \text{Capacidad de la máquina 2} \leq 24 \text{ h}$$

Los límites calculados para las máquinas 1 y 2 se conocen como **intervalos de factibilidad**. Todos los paquetes de software proporcionan información sobre los precios duales y sus intervalos de factibilidad. En la sección 3.6.4 se muestra la forma en que AMPL, Solver y TORA generan esta información.

Los precios duales permiten tomar decisiones económicas sobre el problema de PL, como lo demuestran las siguientes preguntas:

Pregunta 1. Si JOBCO puede incrementar la capacidad de ambas máquinas, ¿cuál máquina tendrá la prioridad?

A partir de los precios duales para las máquinas 1 y 2, cada hora adicional de la máquina 1 incrementa el ingreso en \$14, en comparación con sólo \$2 para la máquina 2. Por lo tanto, la máquina 1 debe tener prioridad.

Pregunta 2. Se sugiere incrementar las capacidades de las máquinas 1 y 2 al costo adicional de \$10/h por cada máquina. ¿Es esto aconsejable?

Para la máquina 1, el ingreso neto adicional por hora es $14 - 10 = \$4$, y para la máquina 2, es $\$2 - \$10 = -\$8$. Entonces, sólo se debería considerar la máquina 1 para el incremento de capacidad.

Pregunta 3. Si la capacidad de la máquina 1 aumenta de 8 a 13 horas, ¿cómo impactará este incremento al ingreso óptimo?

El precio dual para la máquina 1 es \$14 y es válido en el intervalo (2.67, 16) h. El incremento propuesto de 13 horas queda comprendido dentro del intervalo de factibilidad. Por consiguiente, el incremento del ingreso es $\$14(13 - 8) = \70 , lo cual significa que el ingreso total se incrementará de \$128 a \$198 ($= \$128 + \70).

Pregunta 4. Suponga que la capacidad de la máquina 1 se incrementa a 20 horas. ¿Cómo afectará este incremento al ingreso óptimo?

El cambio propuesto queda fuera del intervalo de factibilidad (2.67, 16) h. Por lo tanto, sólo es posible obtener una conclusión inmediata respecto de un incremento hasta de 16 horas. Más allá de eso, se requieren más cálculos para encontrar la respuesta (vea el capítulo 4). Recuerde que quedar fuera del intervalo de factibilidad no significa que el problema no tenga solución. Sólo significa que la información disponible no es suficiente para tomar una decisión completa.

Pregunta 5. ¿Cómo se pueden determinar los nuevos valores óptimos de las variables asociadas con el cambio de un recurso?

Los valores óptimos de las variables cambiarán. Sin embargo, el procedimiento para determinar estos valores requiere más cálculos, como se demostrará en la sección 3.6.2.

Ejemplo 3.6-2 (Cambios en los coeficientes de la función objetivo)

En la figura 3.10 se muestra el espacio de soluciones gráfico del problema de JOBCO presentado en el ejemplo 3.6-1. El óptimo ocurre en el punto $C(x_1 = 3.2, x_2 = 1.6, z = 128)$. Los cambios en unidades de ingresos (es decir, en los coeficientes de la función objetivo) modificarán la pendiente de z . Sin embargo, como se ob-

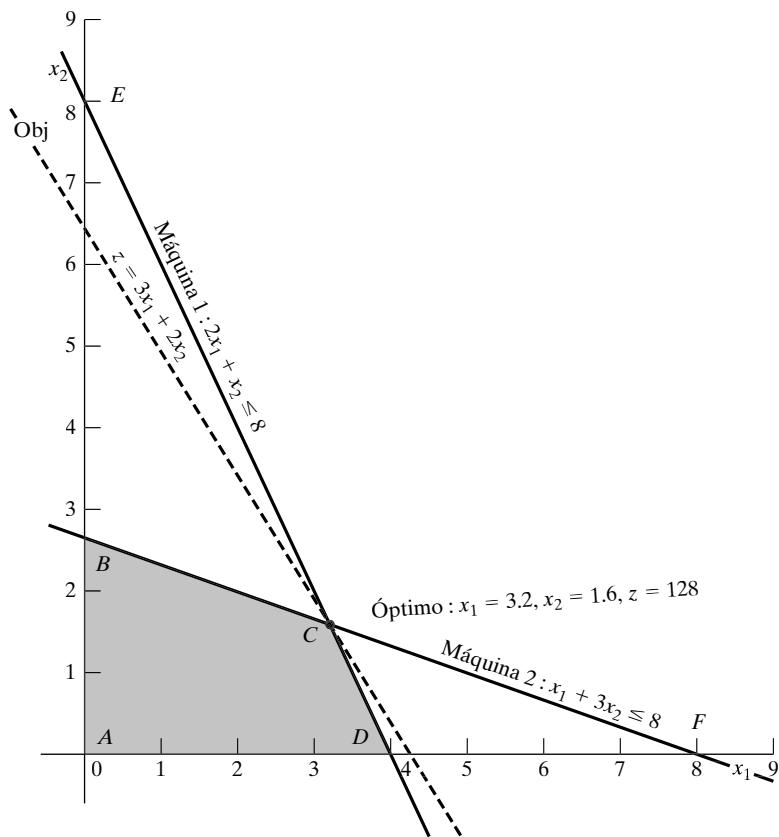


FIGURA 3.10

Sensibilidad gráfica de la solución óptima a cambios en las unidades de ingreso (coeficientes de la función objetivo)

serva en la figura, la solución óptima en el punto C no cambia en tanto la función objetivo quede entre las líneas BF y DE .

¿Cómo se determinan los intervalos para los coeficientes de la función objetivo que mantendrán la solución óptima sin cambios en C ? Primero, se escribe la función objetivo en el formato general

$$\text{Maximizar } z = c_1x_1 + c_2x_2$$

Imagine ahora que la línea z está pivotada en C y que puede girar en sentido horario, así como en el sentido opuesto. La solución óptima permanecerá en el punto C en tanto $z = c_1x_1 + c_2 + x_2$ quede entre las dos líneas $x_1 + 3x_2 = 8$ y $2x_1 + x_2 = 8$. Esto significa que la relación $\frac{c_1}{c_2}$ puede variar entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{1}$, lo que resulta en el siguiente **intervalo de optimalidad**:¹⁰

$$\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{2}{1} \quad \text{o bien} \quad .333 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$$

¹⁰ La condición de “relación” funciona correctamente en esta situación, ya que las pendientes para las dos líneas que pasan por el punto óptimo C tienen el mismo signo. Existen otras situaciones más complejas.

Esta información proporciona respuestas inmediatas respecto de la solución óptima como lo demuestran las siguientes preguntas:

Pregunta 1. Suponga que los ingresos unitarios para los productos 1 y 2 cambian a \$35 y \$25, respectivamente. ¿Permanecerá igual el óptimo actual?

La nueva función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 35x_1 + 25x_2$$

La solución en C permanecerá óptima porque $\frac{c_1}{c_2} = \frac{35}{25} = 1.4$ se mantiene dentro del intervalo de optimalidad (.333, 2). Cuando la relación queda fuera de este intervalo, se requieren más cálculos para determinar el nuevo óptimo (vea el capítulo 4). Observe que, aunque los valores de las variables en el punto óptimo C no cambian, el valor óptimo de z cambia a $35 \times (3.2) + 25 \times (1.6) = \152 .

Pregunta 2. Suponga que el ingreso unitario del producto 2 se fija a su valor actual $c_2 = \$20$. ¿Cuál es el intervalo de optimalidad asociado para el ingreso unitario del producto 1, c_1 , que mantendrá el óptimo sin cambio?

Al sustituir $c_2 = 20$ en la condición $\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$, se obtiene

$$\frac{1}{3} \times 20 \leq c_1 \leq 2 \times 20 \text{ o bien } 6.67 \leq c_1 \leq 40$$

De una manera similar, es posible determinar el intervalo de optimalidad para c_2 si se fija el valor de c_1 en \$30.00. Por lo tanto,

$$(c_2 \leq 30 \times 3 \text{ y } c_2 \geq \frac{30}{2}) \text{ o bien } 15 \leq c_2 \leq 90$$

Como en el caso del lado derecho, todos los paquetes de software proporcionan los intervalos de optimalidad para cada uno de los coeficientes de la función objetivo. En la sección 3.6.4 se muestra cómo AMPL, Solver y TORA generan estos resultados.

Comentarios. Aunque el material en esta sección trató sólo de dos variables, los resultados sientan las bases para el desarrollo del análisis de sensibilidad en un problema general de PL en las secciones 3.6.2 y 3.6.3.

3.6.2 Análisis de sensibilidad algebraica: Cambios en el lado derecho

En la sección 3.6.1, se utiliza la solución gráfica para determinar el precio dual (valor unitario de un recurso) y sus intervalos de factibilidad. Esta sección amplía el análisis al modelo de PL general. Se utilizará un ejemplo numérico (el modelo de TOYCO) para facilitar la presentación.

Ejemplo 3.6-3 (Modelo de TOYCO)

TOYCO utiliza tres operaciones para ensamblar tres tipos de juguetes: trenes, camiones y automóviles. Los tiempos diarios disponibles para las tres operaciones son 430, 460 y 420 minutos, respectivamente, y los ingresos respectivos por unidad de tren, camión y automóvil de juguete son de \$3, \$2 y \$5. Los tiempos de ensamble por tren en las tres operaciones son de 1, 3 y 1 minutos, respectivamente. Los tiempos correspondientes por tren y por automóvil son (2, 0, 4) y (1, 2, 0) minutos (un tiempo cero indica que no se utiliza la operación).

Sean x_1, x_2 y x_3 las cantidades diarias de unidades ensambladas de trenes, camiones y automóviles, respectivamente. El modelo de PL asociado se da como:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \text{ (Operación 1)}$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 460 \text{ (Operación 2)}$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 420 \text{ (Operación 3)}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Si se usan x_4, x_5 y x_6 como las variables de holgura para las restricciones de las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente, la tabla óptima es

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	20

La solución recomienda fabricar 100 camiones y 230 automóviles, pero no trenes. El ingreso asociado es \$1350.

Determinación de precios duales e intervalos de factibilidad. Se utilizará el modelo de TOYCO para demostrar cómo se obtiene esta información con la tabla simplex óptima. Si se reconoce que los precios duales y sus intervalos de factibilidad tienen que ver con los cambios del lado derecho de las restricciones, suponga que D_1, D_2 y D_3 son los cambios (positivos o negativos) realizados en el tiempo de fabricación diario asignado de las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente. El modelo de TOYCO original puede cambiarse entonces a

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 + D_1 \quad (\text{Operación 1})$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 460 + D_2 \quad (\text{Operación 2})$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 420 + D_3 \quad (\text{Operación 3})$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Para expresar la tabla simplex óptima del problema modificado en función de los cambios D_1, D_2 y D_3 , primero se escribe de nuevo la tabla de inicio con los nuevos lados derechos, $430 + D_1$, $460 + D_2$ y $420 + D_3$.

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución			
							LD (recursos)	D_1	D_2	D_3
z	-3	-2	-5	0	0	0	0	0	0	0
x_4	1	2	1	1	0	0	430	1	0	0
x_5	3	0	2	0	1	0	460	0	1	0
x_6	1	4	0	0	0	1	420	0	0	1

Las dos áreas sombreadas son idénticas. Por lo tanto, si se repiten las *mismas* iteraciones simplex (con las *mismas* operaciones de filas) como en el modelo *original*, las columnas en las dos áreas resaltadas también serán idénticas en la tabla óptima, es decir,

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución			
							LD (recursos)	D_1	D_2	D_3
z	4	0	0	1	2	0	1350	1	2	0
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230	0	$\frac{1}{2}$	0
x_6	2	0	0	-2	1	1	20	-2	1	1

La nueva tabla óptima proporciona la siguiente solución óptima:

$$\begin{aligned} z &= 1350 + D_1 + 2D_2 \\ x_2 &= 100 + \frac{1}{2}D_1 - \frac{1}{4}D_2 \\ x_3 &= 230 + \frac{1}{2}D_2 \\ x_6 &= 20 - 2D_1 + D_2 + D_3 \end{aligned}$$

Ahora se utiliza esta solución para determinar los precios duales y los intervalos de factibilidad.

Precios duales: El valor de la función objetivo puede escribirse como

$$z = 1350 + 1D_1 + 2D_2 + 0D_3$$

La ecuación muestra que

1. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 1 ($D_1 = \pm 1$ min) cambia a z en \$1.
2. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 2 ($D_2 = \pm 1$ min) cambia a z en \$2.
3. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 3 ($D_3 = \pm 1$ min) cambia a z en \$0.

Esto significa que, por definición, los precios duales correspondientes son de 1, 2 y 0 (\$/min) para las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente.

Los coeficientes D_1 , D_2 y D_3 en la fila z óptima son exactamente los de las variables de holgura x_4 , x_3 y x_6 , lo cual significa que los precios duales son iguales a los coeficientes de las variables de hol-

gura en la fila z óptima. No existe ambigüedad en cuanto a qué coeficiente corresponde a qué recurso, ya que cada variable de holgura está identificada de forma única con una restricción.

Intervalo de factibilidad: La solución actual permanece factible, si todas las variables básicas se mantienen no negativas, es decir,

$$x_2 = 100 + \frac{1}{2}D_1 - \frac{1}{4}D_2 \geq 0$$

$$x_3 = 230 + \frac{1}{2}D_2 \geq 0$$

$$x_6 = 20 - 2D_1 + D_2 + D_3 \geq 0$$

Los cambios simultáneos de D_1 , D_2 y D_3 que satisfacen estas desigualdades mantendrán la solución factible. La nueva solución óptima se determina al sustituir los valores de D_1 , D_2 y D_3 .

Para ilustrar el uso de esas condiciones, suponga que los tiempos de fabricación disponibles para las operaciones 1, 2 y 3 son de 480, 440 y 400 minutos, respectivamente. Entonces, $D_1 = 480 - 430 = 50$, $D_2 = 440 - 460 = -20$ y $D_3 = 400 - 420 = -20$. Al sustituir en las condiciones de factibilidad, se obtiene

$$x_2 = 100 + \frac{1}{2}(50) - \frac{1}{4}(-20) = 130 > 0 \quad (\text{factible})$$

$$x_3 = 230 + \frac{1}{2}(-20) = 220 > 0 \quad (\text{factible})$$

$$x_6 = 20 - 2(50) + (-20) + (-10) = -110 < 0 \quad (\text{no factible})$$

Los cálculos demuestran que $x_6 < 0$, de ahí que la solución actual no permanezca factible. Se requerirán más cálculos para encontrar la nueva solución (vea el capítulo 4).

De manera alternativa, si los cambios de los recursos son tales que $D_1 = -30$, $D_2 = -12$ y $D_3 = 10$, entonces,

$$x_2 = 100 + \frac{1}{2}(-30) - \frac{1}{4}(-12) = 88 > 0 \quad (\text{factible})$$

$$x_3 = 230 + \frac{1}{2}(-12) = 224 > 0 \quad (\text{factible})$$

$$x_6 = 20 - 2(-30) + (-12) + (10) = 78 > 0 \quad (\text{factible})$$

La nueva solución factible (óptima) es $x_1 = 88$, $x_3 = 224$ y $x_6 = 68$ con $z = 3(0) + 2(88) + 5(224) = \1296 . Observe que el valor objetivo óptimo también se calcula utilizando los precios duales como $z = 1350 + 1(-30) + 2(-12) + 0(10) = \1296 .

Las condiciones dadas pueden producir los *intervalos de factibilidad* individuales asociados con cambiar los recursos *uno a la vez* (como se define en la sección 3.6.1). Por ejemplo, un cambio en el tiempo de la operación 1 sólo implica que $D_2 = D_3 = 0$. Entonces, las condiciones simultáneas se reducen a

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = 100 + \frac{1}{2}D_1 \geq 0 \Rightarrow D_1 \geq -200 \\ x_3 = 230 > 0 \\ x_6 = 20 - 2D_1 \geq 0 \Rightarrow D_1 \leq 10 \end{array} \right\} \Rightarrow -200 \leq D_1 \leq 10$$

Esto significa que el precio dual para la operación 1 es válido en el intervalo de factibilidad $-200 \leq D_1 \leq 10$.

De manera similar, es posible demostrar que los intervalos de factibilidad para las operaciones 2 y 3 son $-20 \leq D_2 \leq 400$ y $-20 \leq D_3 \leq \infty$, respectivamente (¡compruébelo!).

Ahora es posible resumir los precios duales y sus intervalos de factibilidad para el modelo de TOYCO como sigue:¹¹

Recurso	Precio dual (\$)	Intervalo de factibilidad	Cantidad de recurso (minutos)		
			Mínima	Actual	Máxima
Operación 1	1	$-200 \leq D_1 \leq 10$	230	430	440
Operación 2	2	$-20 \leq D_2 \leq 400$	440	440	860
Operación 3	0	$-20 \leq D_3 < \infty$	400	420	∞

Es importante destacar que los precios duales permanecerán aplicables con cualquier cambio *simultáneo* que mantenga la solución factible, aun cuando los cambios transgredan los intervalos individuales. Por ejemplo, los cambios $D_1 = 30$, $D_2 = -12$ y $D_3 = 100$ mantendrán la solución factible, aunque $D_1 = 30$ transgreda el intervalo de factibilidad $-200 \leq D_1 \leq 10$, como lo muestran los siguientes cálculos:

$$x_2 = 100 + \frac{1}{2}(30) - \frac{1}{4}(-12) = 118 > 0 \quad (\text{factible})$$

$$x_3 = 230 + \frac{1}{2}(-12) = 224 > 0 \quad (\text{factible})$$

$$x_6 = 20 - 2(30) + (-12) + (100) = 48 > 0 \quad (\text{factible})$$

Esto significa que los precios duales permanecerán aplicables, y que es posible calcular el nuevo valor objetivo óptimo con los precios duales como $z = 1350 + 1(30) + 2(-12) + 0(100) = \1356 .

3.6.3 Análisis de sensibilidad algebraica: Función objetivo

En la sección 3.6.1 se usó el análisis de sensibilidad gráfico para determinar las condiciones que mantendrán la optimalidad de la solución de un PL de dos variables. En esta sección, extendemos esas ideas al problema de PL general.

Definición de costo reducido. Para facilitar la explicación del análisis de sensibilidad de la función objetivo, primero se deben definir los *costos reducidos*. En el modelo de TOYCO (ejemplo 3.6-2), la ecuación z objetivo que aparece en la tabla óptima puede escribirse como

$$z = 1350 - 4x_1 - x_4 - 2x_5$$

La solución óptima no produce trenes de juguete ($x_1 = 0$). La razón se observa en la ecuación z , donde un incremento unitario en x_1 (sobre su valor de cero actual) reduce a z en \$4, es decir, $z = 1350 - 4 \times (1) - 1 \times (0) - 2 \times (0) = \1346 .

¹¹ Los paquetes de PL disponibles normalmente presentan esta información como salida estándar. Prácticamente ninguno proporciona el caso de condiciones simultáneas, presumiblemente porque su despliegue es engorroso para PL grandes.

Se puede pensar en el coeficiente de x_1 en la ecuación $z (= 4)$ como en un *costo* unitario porque reduce el ingreso z . Pero, ¿de dónde proviene este “costo”? Se sabe que el ingreso por unidad de x_1 es de \$3 (según el modelo original). También se sabe que la producción de trenes de juguete incurre en un costo porque consume recursos (tiempo de operaciones). Por consiguiente, desde el punto de vista de la optimización, el “atractivo” de x_1 depende del costo de los recursos consumidos en relación con el ingreso. Esta relación define el llamado **costo reducido** y se formaliza en la literatura de PL como

$$\left(\begin{array}{l} \text{Costo reducido} \\ \text{por unidad} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Costo de los recursos} \\ \text{consumidos por unidad} \end{array} \right) - (\text{Ingreso por unidad})$$

Para apreciar la importancia de esta definición, en el modelo de TOYCO original el ingreso por unidad de camiones de juguete ($= \$2$) es menor que el de trenes de juguete ($= \$3$). No obstante, la solución óptima recomienda producir camiones de juguete ($x_2 = 100$ unidades) y no producir trenes ($x_1 = 0$). La razón es que el costo de los recursos consumidos por un camión de juguete (es decir, tiempo de operaciones) es menor que su precio unitario, al contrario de lo que sucede en el caso de los trenes de juguete.

Con la definición dada de *costo reducido*, se observa que una variable no rentable (como x_1) se vuelve rentable de dos maneras:

1. Incrementando el ingreso unitario.
2. Reduciendo el costo unitario de los recursos consumidos.

En la mayoría de las situaciones, las condiciones del mercado dictan el precio por unidad y quizás sea difícil incrementarlo a voluntad. Por otro lado, una opción más viable consiste en reducir el consumo de recursos, ya que el fabricante puede reducir el costo, si logra que el proceso de producción sea más eficiente.

Determinación de los intervalos de optimalidad. Ahora nos enfocamos en la determinación de las condiciones que mantendrán óptima una solución. El desarrollo se basa en la definición de *costo reducido*.

En el modelo de TOYCO, sean d_1 , d_2 y d_3 los cambios en los ingresos unitarios de los camiones, trenes y automóviles de juguete, respectivamente. Entonces, la función objetivo se escribe como

$$\text{Maximizar } z = (3 + d_1)x_1 + (2 + d_2)x_2 + (5 + d_3)x_3$$

Primero se considera la situación general en la cual todos los coeficientes en la función objetivo cambian *simultáneamente*.

Con los cambios simultáneos, la fila z en la tabla de inicio aparece como:

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	$-3 - d_1$	$-2 - d_2$	$-5 - d_3$	0	0	0	0

Cuando se genera la tabla simplex con la misma secuencia de las variables de entrada y salida utilizadas en el modelo original (antes de que se realicen los cambios de d_j), la iteración óptima aparecerá como sigue (compruebe que esto es cierto realizando las operaciones de filas simplex):

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	$4 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{3}{2}d_3 - d_1$	0	0	$1 + \frac{1}{2}d_2$	$2 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{2}d_3$	0	$1350 + 100d_2 + 23d_3$
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	$-\frac{1}{4}$	0	0	-2	1	1	20

La nueva tabla óptima es igual a la tabla óptima *original*, excepto por los *costos reducidos* (coeficientes de la ecuación z), lo cual significa que los *cambios en los coeficientes de la función objetivo pueden afectar sólo la optimalidad del problema* (compare con la sección 3.6.2, donde los cambios del lado derecho sólo afectan la factibilidad).

En realidad, no se tiene que realizar la operación de filas simplex para calcular los nuevos costos reducidos. Un examen de la nueva fila z muestra que los coeficientes de d_j se toman directamente de los coeficientes de las restricciones de la tabla óptima. Una forma conveniente de calcular el nuevo costo reducido es agregar una nueva fila superior y una nueva columna a la izquierda de la tabla óptima, como muestran las áreas sombreadas en la siguiente ilustración.

	d_1	d_2	d_3	0	0	0		
Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución	
1	z	4	0	0	1	2	0	1350
d_2	x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
d_3	x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
0	x_6	2	0	0	-2	1	1	20

Las entradas en la fila superior son los cambios d_j asociados con la variable x_j . En la columna a la extrema izquierda, el elemento superior es 1 en la fila z seguido del cambio d_i de la variable básica x_i . Tenga en mente que $d_i = 0$ para la variable de holgura x_i .

Con la finalidad de calcular el nuevo costo reducido para cualquier variable (o el valor de z), multiplique los elementos de su columna por los elementos correspondientes que aparecen en la

columna de la izquierda, súmelos y reste el elemento en la fila superior de la suma. Por ejemplo, para x_1 , se tiene

$$\begin{aligned}\text{Costo reducido para } x_1 &= [4 \times 1 + (-\frac{1}{4}) \times d_2 + \frac{3}{2} \times d_3 + 2 \times 0] - d_1 \\ &= 4 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{3}{2}d_3 - d_1\end{aligned}$$

La solución actual permanece óptima, en tanto los costos reducidos (coeficientes de la ecuación z) permanezcan no negativos (caso de maximización). Por lo tanto, tenemos las siguientes *condiciones de optimalidad simultáneas* correspondientes a las x_1 , x_4 y x_5 no básicas:

$$\begin{aligned}4 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{3}{2}d_3 - d_1 &\geq 0 \\ 1 + \frac{1}{2}d_2 &\geq 0 \\ 2 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{2}d_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Recuerde que el costo reducido de una variable básica siempre es cero, como indica la tabla óptima modificada.

Para ilustrar el uso de estas condiciones, suponga que la función objetivo de TOYCO cambia de $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ a $z = 2x_1 + x_2 + 6x_3$. Entonces, $d_1 = 2 - 3 = -\$1$, $d_2 = 1 - 2 = -\$1$ y $d_3 = 6 - 5 = \$1$. La sustitución en las condiciones dadas resulta

$$\begin{aligned}4 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{3}{2}d_3 - d_1 &= 4 - \frac{1}{4}(-1) + \frac{3}{2}(1) - (-1) = 6.75 > 0 \text{ (satisficha)} \\ 1 + \frac{1}{2}d_2 &= 1 + \frac{1}{2}(-1) = .5 > 0 \quad \text{(satisficha)} \\ 2 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{2}d_3 &= 2 - \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{2}(1) = 2.75 > 0 \quad \text{(satisficha)}\end{aligned}$$

Los resultados muestran que los cambios propuestos mantendrán la solución actual ($x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_3 = 230$) óptima (con un nuevo valor de $z = 1350 + 100d_2 + 230d_3 = 1350 + 100 \times (-1) + 230 \times 1 = \1480). Si alguna condición no se satisface, debe determinarse una nueva solución (vea el capítulo 4).

El análisis anterior abordó el caso de la maximización. La única diferencia en el caso de la minimización es que los costos reducidos (coeficientes de la ecuación z) deben ser ≤ 0 para mantener la optimalidad.

Los *intervalos de optimalidad* que se relacionan con los cambios de d_j uno a la vez pueden desarrollarse a partir de las condiciones de optimalidad simultáneas.¹² Por ejemplo, suponga que el coeficiente objetivo de x_2 sólo cambia a $2 + d_2$; es decir, que $d_1 = d_3 = 0$. Las condiciones de optimalidad simultáneas se reducen, por lo tanto, a

$$\left. \begin{aligned}4 - \frac{1}{4}d_2 &\geq 0 \Rightarrow d_2 \leq 16 \\ 1 + \frac{1}{2}d_2 &\geq 0 \Rightarrow d_2 \geq -2 \\ 2 - \frac{1}{4}d_2 &\geq 0 \Rightarrow d_2 \leq 8\end{aligned} \right\} \Rightarrow -2 \leq d_2 \leq 8$$

¹² Los intervalos individuales son resultados estándar en cualquier software de PL. Por lo general, las condiciones simultáneas no forman parte de los resultados, quizás porque son voluminosas en los problemas grandes.

De manera similar, puede verificar que los cambios individuales $(3 + d_1)$ y $(5 + d_3)$ para x_1 y x_3 dan los intervalos de optimalidad $d_1 \leq 4$ y $d_3 \geq -\frac{8}{3}$, respectivamente.

Las condiciones individuales dadas pueden traducirse a intervalos de ingresos unitarios totales. Por ejemplo, para los camiones de juguete (variable x_2), el ingreso unitario total es $2 + d_2$, y su intervalo de optimalidad $-2 \leq d_2 \leq 8$ se traduce a

$$\$0 \leq (\text{Ingreso unitario del camión de juguete}) \leq \$10$$

Se supone que los ingresos unitarios de los trenes y automóviles de juguete permanecen fijos en \$3 y \$5, respectivamente.

Es importante observar que los cambios d_1 , d_2 y d_3 pueden estar dentro de sus intervalos individuales permisibles, sin satisfacer las condiciones simultáneas y viceversa. Por ejemplo, considere $z = 6x_1 + 8x_2 + 3x_3$. Aquí $d_1 = 6 - 3 = \$3$, $d_2 = 8 - 2 = \$6$ y $d_3 = 3 - 5 = -\$2$, los cuales quedan dentro de los intervalos individuales permisibles ($-\infty < d_1 \leq 4$, $-2 \leq d_2 \leq 8$ y $-\frac{8}{3} \leq d_3 < \infty$). Sin embargo, las condiciones simultáneas correspondientes dan como resultado

$$4 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{3}{2}d_3 - d_1 = 4 - \frac{1}{4}(6) + \frac{3}{2}(-2) - 3 = -3.5 < 0 \quad (\text{no satisfecha})$$

$$1 + \frac{1}{2}d_2 = 1 + \frac{1}{2}(6) = 4 > 0 \quad (\text{satisfecha})$$

$$2 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{2}d_3 = 2 - \frac{1}{4}(6) + \frac{1}{2}(-2) = -.5 < 0 \quad (\text{no satisfecha})$$

Comentarios. Los *rangos de factibilidad* presentados en la sección 3.6.2 y los *rangos de optimalidad* desarrollados en la sección 3.6.3 funcionan bien siempre que la situación del análisis de sensibilidad requiera cambiar los parámetros del problema *uno a la vez*, lo que es poco común en la práctica. El hecho en esta situación es que la utilidad limitada está determinada por el punto hasta el cual las matemáticas permiten ir antes de que los resultados se vuelvan demasiado difíciles de manejar. *Entonces, ¿qué se debería hacer en la práctica para llevar a cabo un análisis de sensibilidad significativo que implique hacer cambios simultáneos en cualquier parte del modelo?* La buena noticia es que los avances en la computación y en los lenguajes de programación matemáticos (por ejemplo, AMPL) hacen posible resolver PL enormes con bastante rapidez. Por lo tanto, una opción viable es resolver totalmente escenarios de PL completos y, luego, comparar las respuestas. Por supuesto, es necesario pensar mucho en la construcción de escenarios viables, que permitan probar los cambios del modelo de una manera sistemática y lógica.

3.6.4 Análisis de sensibilidad con TORA, Solver y AMPL

Ahora tenemos todas las herramientas para descifrar los resultados proporcionados por el software de PL, en particular respecto del análisis de sensibilidad. Se utilizará el ejemplo de TOYCO para demostrar los resultados de TORA, Solver y AMPL.

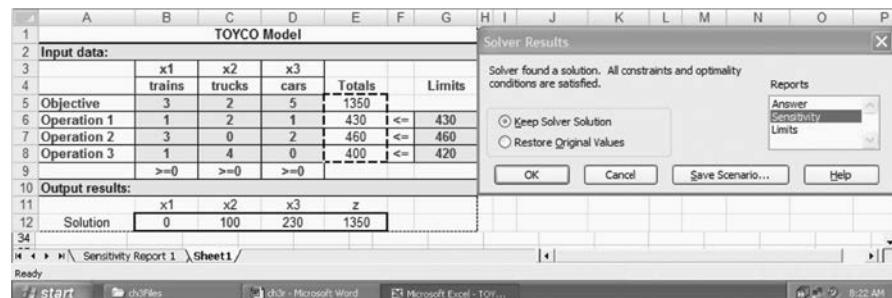
El reporte de los resultados de PL obtenidos con TORA ofrece los datos del análisis de sensibilidad de forma automática, como se muestra en la figura 3.11 (archivo *toraTOYCO.txt*). Los resultados incluyen los costos reducidos y los precios duales, así como los intervalos permisibles de optimalidad y de factibilidad.

La figura 3.12 muestra el modelo de TOYCO en Solver (archivo *solverTOYCO.xls*) y su reporte del análisis de sensibilidad. Después de hacer clic en la opción **Solve** en el cuadro de diálogo **Solver Parameters**, puede solicitar el reporte del análisis de sensibilidad en el nuevo cuadro de diálogo

Sensitivity Analysis					
Variable	CurrObjCoeff	MinObjCoeff	MaxObjCoeff	Reduced Cost	
x1:	3.00	-infinity	7.00	4.00	
x2:	2.00	0.00	10.00	0.00	
x3:	5.00	2.33	infinity	0.00	
Constraint	Curr RHS	Min RHS	Max RHS	Dual Price	
1 (<):	430.00	230.00	440.00	1.00	
2 (<):	460.00	440.00	860.00	2.00	
3 (<):	420.00	400.00	infinity	0.00	

FIGURA 3.11

Análisis de sensibilidad en TORA para el modelo de TOYCO



Adjustable Cells						
Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$12	Solution x1	0	-4	3	4	1E+30
\$C\$12	Solution x2	100	0	2	8	2
\$D\$12	Solution x3	230	0	5	1E+30	2.666666667

Constraints						
Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$E\$6	Operation 1 Totals	430	1	430	10	200
\$E\$7	Operation 2 Totals	460	2	460	400	20
\$E\$8	Operation 3 Totals	400	0	420	1E+30	20

FIGURA 3.12

Reporte del análisis de sensibilidad, realizado con Excel Solver, para el modelo de TOYCO

Solver Results. Después, usted puede hacer clic en **Sensitivity Report 1** para ver los resultados. El reporte es parecido al de TORA, con tres excepciones: (1) el costo reducido tiene un signo opuesto; (2) utiliza el nombre *shadow price* (precio sombra) en vez de *dual price* (precio dual), y (3) los intervalos de optimalidad son tan sólo para los *cambios* d_j y D_i y no para los coeficientes objetivo *originales* y los lados derechos de las restricciones. Las diferencias son menores y no cambia la interpretación de los resultados.

```

: oper.down  oper.current  oper.up    oper.dual   := FIGURA 3.13
1      230          430        440       1
2      440          460        860       2
3      400          420      1e+20p     0

:      x.down    x.current    x.up      x.rc      :=
1    -1e+20           3         7      -4
2        0            2        10       0
3    2.333333        5      1e+20       0

```

En AMPL, el reporte del análisis de sensibilidad se obtiene de inmediato. El archivo *ampl/TOYCO.txt* proporciona el código necesario para determinar los resultados obtenidos con el análisis de sensibilidad. Requiere las siguientes instrucciones adicionales (el reporte se envía al archivo *a.out*):

```

option solver cplex;
option cplex_options 'sensitivity';
solve;
#-----sensitivity analysis
display oper.down,oper.current,oper.up,oper.dual>a.out;
display x.down,x.current,x.up,x.rc>a.out;

```

Se requieren las instrucciones de CPLEX option para obtener el reporte del análisis de sensibilidad estándar. En el modelo de TOYCO, las variables y restricciones con subíndices utilizan los nombres de raíz *x* y *oper*, respectivamente. Si se usan estos nombres, los sugerentes sufijos *.down*, *.current* y *.up* en las instrucciones *display* generan automáticamente el reporte del análisis de sensibilidad formateado, que se muestra en la figura 3.13. Los sufijos *.dual* y *.rc* proporcionan el precio dual y el costo reducido, respectivamente.

3.7 TEMAS DE CÁLCULO EN LA PROGRAMACIÓN LINEAL¹³

En este capítulo se han presentado los detalles del algoritmo simplex. En capítulos posteriores se estudian otros algoritmos: el simplex dual (capítulo 4) y el simplex revisado (capítulo 7). ¿Por qué existe esa variedad? La razón es que cada algoritmo tiene características específicas que pueden ser beneficiosas en el desarrollo de códigos de computadora eficientes.

Un código de PL se considera eficiente si satisface dos requisitos fundamentales:

- 1. Velocidad.**
- 2. Precisión.**

Ambos requisitos presentan desafíos incluso para las computadoras más avanzadas. Las razones se derivan de la naturaleza de los cálculos algorítmicos y de las limitaciones de la computadora. Para estar seguros, el formato de tabla simplex presentado en este capítulo no es *numéricamente estable*, es decir, que el error de redondeo cometido por la computadora y la pérdida de dígitos presentan serios problemas de cálculo, en específico cuando los coeficientes del modelo de PL difieren mucho en magnitud. A pesar de los retos, los diferentes algoritmos de PL se han integrado de manera ingeniosa para producir códigos altamente eficientes y resolver PL extremadamente grandes.

¹³ Esta sección se ha visto beneficiada con elementos de R. Bixby, "Solving Real-World Linear Programs: A Decade and More of Progress," *Operations Research*, vol. 50, núm. 1, pp. 3-15, 2002.

En esta sección se explica la transición desde las presentaciones básicas en libros de texto hasta los códigos eficientes de PL más actuales. Se abordan los temas que afectan la velocidad y la precisión, y se presentan remedios para aliviar los problemas. También se muestra un amplio marco de referencia de los roles de los diferentes algoritmos de PL (simplex, simplex dual, simplex revisado y punto interior) en el desarrollo de códigos de computadora numéricamente estables. De manera intencionada, la presentación se mantiene libre de matemáticas y se concentra en los conceptos clave que subyacen al fundamento de los códigos de PL exitosos.

1. Regla simplex para la variable de entrada (pivot). Una nueva iteración simplex determina las variables de entrada y de salida mediante criterios de *optimalidad* y *factibilidad*. Una vez determinadas las dos variables, se utilizan operaciones de filas pivot para generar la siguiente tabla simplex.

En realidad, el *criterio de optimalidad* presentado en la sección 3.3.2 es sólo uno de los muchos que se han utilizado en el desarrollo de códigos de PL. En la siguiente tabla se resumen los tres criterios prominentes.

Regla de la variable de entrada	Descripción
Clásica (sección 3.3.2)	La variable de entrada es la del <i>costo reducido</i> más favorable entre todas las variables no básicas.
Mejora máxima	La variable de entrada es la que produce la <i>mejora total</i> máxima del valor objetivo entre todas las variables no básicas.
Borde más inclinado ¹⁴	La variable de entrada es la que proporciona el <i>costo reducido más favorable</i> entre todas las variables no básicas. El algoritmo se mueve a lo largo del <i>borde más inclinado</i> que va del punto actual a un punto extremo vecino.

Para la *regla clásica*, la fila objetivo de la tabla simplex proporciona de inmediato los costos reducidos de todas las variables no básicas sin cálculos adicionales. Por otro lado, la *regla de la mejora máxima* requiere una considerable cantidad de cálculos adicionales para determinar primero el valor con el cual una variable no básica entra en la solución y, luego, la mejora total resultante del valor objetivo. La idea de la *regla del borde más inclinado*, aunque posee el “espíritu” de la *regla de la mejora máxima* (en el sentido de que toma en cuenta indirectamente el valor de la variable de entrada), requiere mucho menos cálculos.

La compensación entre las tres reglas es que la *regla clásica* es la menos costosa desde el punto de vista computacional pero, sin duda, requiere la máxima cantidad de iteraciones para llegar al óptimo. Asimismo, la *regla de la mejora máxima* es la más costosa desde el punto de vista computacional pero, sin duda, implica la menor cantidad de iteraciones simplex. La *regla del borde más inclinado* parece ser el término medio en función de la cantidad de cálculos adicionales y la cantidad de iteraciones simplex. Es interesante observar que los resultados de las pruebas muestran que los beneficios generados por los cálculos adicionales en la *regla de la mejora máxima* no parecen mejores que los generados por la *regla del borde más inclinado*. Por esa razón, es poco común que se implemente la *regla de la mejora máxima* en los códigos de PL.

Aunque la *regla del borde más inclinado* es la regla predeterminada más común para la selección de la variable de entrada, los códigos de PL exitosos tienden a utilizar una fijación de precios

¹⁴ Vea D. Goldfarb y J. Reid, “A Practicable Steepest Edge Simplex Algorithm”, *Mathematical Programming*, vol. 12, núm. 1, pp. 361-377, 1977.

híbrida. Inicialmente, las iteraciones simplex utilizan (una variación de) la *regla clásica*. Conforme se incrementa la cantidad de iteraciones, se comienza a usar (una variación de) la *regla del borde más inclinado*. La extensa experiencia de cálculo indica que esta estrategia reditúa en función del tiempo total de computadora necesario para resolver un PL.

2. Algoritmo primal vs. simplex dual. El presente capítulo se ha enfocado principalmente en los detalles de lo que en ocasiones se conoce en la literatura como método *simplex primal*. En el algoritmo primal, la solución básica inicial es factible, pero no óptima. Las iteraciones sucesivas permanecen factibles a medida que avanzan hacia el óptimo. Se desarrolló un algoritmo subsecuente para PL, llamado *simplex dual*, que inicia como no factible pero (mejor que) óptimo y que se mueve hacia la factibilidad, al tiempo que mantiene la optimalidad. La iteración final ocurre cuando se restaura la factibilidad. Los detalles del algoritmo simplex dual se dan en el capítulo 4 (sección 4.4.1).

En un inicio, el algoritmo dual se utilizó sobre todo en el análisis postóptimo de PL (sección 4.5) y en la programación lineal entera (capítulo 9), pero no como un algoritmo independiente para resolver PL. La razón principal es que su regla para seleccionar la variable de salida era débil. Sin embargo, todo esto cambió cuando se adoptó la idea de la regla del borde más inclinado primal, para determinar la variable de salida en el algoritmo simplex dual.¹⁵ En la actualidad, el simplex dual con la adaptación del borde más inclinado ha demostrado que es dos veces más rápido que el simplex primal y, por el momento, es el algoritmo simplex de propósito general dominante entre los códigos comerciales más importantes.

3. Simplex revisado vs. tabla simplex. Los cálculos simplex presentados al principio de este capítulo (y también en el capítulo 4 para el simplex dual) generan la siguiente tabla simplex a partir de la inmediata anterior. Las siguientes razones explican por qué la tabla simplex no se usa en ninguno de los códigos comerciales de PL:

- (a) La mayoría de los modelos prácticos de PL son sumamente dispersos (es decir, contienen un alto porcentaje de coeficientes cero en la iteración de inicio). Los métodos numéricos disponibles pueden reducir la cantidad de cálculos locales al economizar (incluso eliminar) operaciones aritméticas que implican coeficientes cero, lo que a su vez acelera sustancialmente los cálculos. Ésta es una fuerte oportunidad perdida en cálculos con tablas, ya que las tablas sucesivas pronto se saturan de elementos distintos de cero.
- (b) El error de redondeo y la pérdida de dígitos, inherentes en todas las computadoras, pueden propagarse con rapidez a medida que crece la cantidad de iteraciones, lo que conlleva una grave pérdida de exactitud, sobre todo en PL grandes.
- (c) Las operaciones de filas simplex realizan más cálculos de los que se requieren para generar la siguiente tabla (recuerde que todo lo que se necesita en una iteración son las variables de entrada y de salida). Estos cálculos extra representan tiempo de computadora desperdiciado.

El algoritmo simplex revisado que se presenta en la sección 7.2 representa una mejora respecto de esas desventajas. Aunque el método utiliza las reglas de pivoteo exactas como en el método de tabla, la diferencia principal es que realiza los cálculos aplicando álgebra matricial. En la sección 7.2.3, después de la presentación del algoritmo simplex revisado, se dan más detalles sobre este punto.

¹⁵ Vea J. Forrest y D. Goldfarb, “Steepest-Edge Simplex Algorithm for Linear Programming”, *Mathematical Programming*, vol. 57, núm. 3, pp. 341-374, 1992.

4. Algoritmo de barrera (punto interior) vs. algoritmo simplex. El algoritmo de punto interior es totalmente diferente del algoritmo simplex en que cruza el espacio factible y, poco a poco, se mueve (en el límite) hacia el óptimo. Computacionalmente, el algoritmo es *polinomial* en el tamaño del problema. Por otro lado, el algoritmo simplex es *exponencial* en el tamaño del problema (se han construido ejemplos hipotéticos en los que el algoritmo simplex visita *cada* punto de esquina del espacio de soluciones antes de alcanzar el óptimo).

El algoritmo de punto interior se introdujo en 1984 y, sorpresivamente, fue patentado por AT&T y vendido en una computadora especializada (aparentemente por una cantidad excesiva) sin revelar sus detalles computacionales. Al fin, la comunidad científica “se ocupó” y descubrió que el método de punto interior tenía raíces en los primeros algoritmos de programación no lineal de la década de 1960 (vea, por ejemplo, el algoritmo SUMT en la sección 21.2.5). El resultado es el llamado *método de barrera* con algunas variaciones algorítmicas.

Para problemas extremadamente grandes, el método de barrera ha demostrado ser mucho más rápido que el algoritmo simplex dual. La desventaja es que el algoritmo de barrera no produce soluciones de punto de esquina, una restricción que limita su aplicación en el análisis postóptimo (capítulo 4) y, también, en la programación lineal entera (capítulo 9). Aunque se han desarrollado métodos para convertir una solución de punto interior óptimo de barrera en una solución de punto de esquina, la carga de cómputo asociada es enorme, lo que limita su uso en aplicaciones como programación entera, donde la frecuente necesidad de localizar soluciones de punto de esquina es fundamental para el algoritmo. No obstante, todos los códigos comerciales incluyen el algoritmo de barrera como herramienta para resolver PL grandes.

5. Degeneración. Como se explicó en la sección 3.5.1, las soluciones básicas degeneradas pueden generar ciclado, lo que haría que las iteraciones simplex se quedaran atoradas indefinidamente en un punto de esquina degenerado, sin alcanzar su término. En las primeras versiones del algoritmo simplex, la degeneración y el ciclado no se incorporaron en la mayoría de los códigos porque se suponía que era rara su ocurrencia en la práctica. A medida que se probaron instancias de problemas más difíciles y más grandes (sobre todo en el área de la programación entera), el error de redondeo producido por las computadoras dio lugar a comportamientos de los tipos ciclado y degenerado, que provocaron que los cálculos “se quedaran atorados” en el mismo valor objetivo. El problema se evadió interponiendo una perturbación aleatoria condicional y cambiando los valores de las variables básicas.¹⁶

6. Acondicionamiento del modelo de entrada (solución previa). Todos los lenguajes y solucionadores comerciales de modelado de PL tratan de acondicionar los datos de entrada antes de resolverlos. El objetivo es “simplificar” el modelo de dos maneras clave:¹⁷

- (a) Reduciendo el tamaño del modelo (filas y columnas) mediante la identificación y eliminación de las restricciones redundantes y, posiblemente, fijando y sustituyendo las variables.
- (b) Escalando los coeficientes del modelo que sean de magnitud ampliamente diferente, para mitigar el efecto adverso de la pérdida de dígitos cuando se manipulan números reales de magnitudes ampliamente diferentes.

¹⁶ Vea P. Harris, “Pivot Selection Methods of the devex LP Code”, *Mathematical Programming*, vol. 5, pp. 1-28, 1974.

¹⁷ Vea L. Bearley, L., Mitra y H. Williams, “Analysis of Mathematical Programming Problems Prior to Applying the Simplex Algorithm”, *Mathematical Programming*, vol. 8, pp. 54-83, 1975.

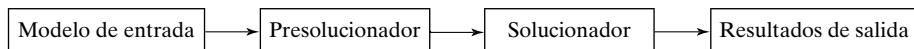


FIGURA 3.14

Componentes de un PL numérico

En la figura 3.14 se resumen las etapas de solución de un problema de PL. El modelo de entrada puede alimentarse mediante un presolucionador a un solucionador, como CPLEX o XPRESS. A manera de alternativa, puede usarse un lenguaje conveniente de modelado como AMPL, GAMS, LINDO, MOSEL o MPL, para modelar algebraicamente el PL y, luego, presolucionar de manera interna y transformar sus datos de entrada para ajustarlos al formato del solucionador. Despues, el solucionador produce los resultados de salida en función de las variables y restricciones del modelo de PL *original*.

7. Avance en las computadoras. No debería sorprender que, en el último cuarto del siglo xx, la velocidad de las computadoras se hubiera incrementado más de mil veces. En la actualidad, una computadora de escritorio es más potente y veloz que las antiguas supercomputadoras. Estos avances de hardware (junto con los avances algorítmicos antes citados) han hecho posible resolver enormes PL en cuestión de segundos y ya no días (¡sí, días!) como en el pasado.

BIBLIOGRAFÍA

- Bazaraa, M., J. Jarvis y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.
 Chvátal, V., *Linear Programming*, Freeman, Nueva York, 1983.
 Dantzig, G., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.
 Dantzig, G. y M. Thapa, *Linear Programming 1: Introduction*, Springer, Nueva York, 1997.
 Nering, E. y A. Tucker, *Linear Programming and Related Problems*, Academic Press, Boston, 1992.
 Taha, H., “Linear Programming”, capítulo II-1 en *Handbook of Operations Research*, J. Moder y S. Elmaghraby (eds.), Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1987.

Estudio de caso: Optimización de la producción de válvulas cardíacas¹⁸

Herramienta: PL

Área de aplicación: Bioprótesis (planeación de la producción)

Descripción de la situación:

Las válvulas cardíacas biológicas son bioprótesis fabricadas a partir de corazones porcinos para la implantación en seres humanos. Las válvulas de reemplazo necesarias para la población humana vienen en diferentes tamaños. Por el lado de la oferta, los corazones porcinos no pueden “producirse” en tamaños específicos. Además, el tamaño exacto de una válvula fabricada no se determina sino hasta que se haya procesado el componente biológico del corazón porcino. En consecuencia, puede haber más existencias de las necesarias de algunos tamaños y escasez de otros.

¹⁸ Fuente: S. S. Hilal y W. Erikson, “Matching Supplies to Save Lives: Linear Programming the Production of Heart Valves”, *Interfaces*, vol. 11, núm. 6, pp. 48-55, 1981.

Los corazones crudos son suministrados por varios proveedores en seis a ocho tamaños, generalmente en diversas proporciones, dependiendo de cómo se crían los animales. La distribución de los tamaños en cada envío se expresa en forma de un histograma. Especialistas porcinos trabajan con los proveedores para asegurar la estabilidad de la distribución tanto como sea posible. De esta manera, el fabricante obtiene una estimación razonablemente confiable del número de unidades de cada tamaño en cada envío. La selección de la mezcla de proveedores y el tamaño de sus envíos es crucial para reducir los desajustes entre la oferta y la demanda.

Modelo de PL:

Sean

m = Número de tamaños de válvulas

n = Número de proveedores

p_{ij} = Proporción de válvulas crudas de tamaño i suministradas por el proveedor j , $0 < p_{ij} < 1$, $i = 1, 2, \dots, m$.
 $j = 1, 2, \dots, n$, $\sum_{i=1}^m p_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$

c_i = Costo de adquisición y procesamiento de un corazón crudo de tamaño i , $i = 1, 2, \dots, m$

\bar{c}_j = Costo medio del proveedor j

$$= \sum_{i=1}^m c_i p_{ij}, j = 1, 2, \dots, n$$

D_i = Demanda promedio mensual de válvulas de tamaño i

H_j = Suministro mensual máximo que el proveedor j puede hacer, $j = 1, 2, \dots, n$

L_j = Suministro mensual mínimo que el proveedor j está dispuesto a hacer, $j = 1, 2, \dots, n$

Las variables del problema se definen como

x_j = Cantidad de suministro mensual (número de corazones crudos) por proveedor j , $j = 1, 2, \dots, n$

El modelo de PL busca determinar la cantidad proveniente de cada proveedor que minimizará el costo total de compra y procesamiento sujeto a las restricciones de demanda y oferta.

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \geq D_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$L_j \leq x_j \leq H_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Para estar completamente en lo correcto, las variables x_j deben estar restringidas a valores enteros. Sin embargo, los parámetros p_{ij} y D_i son meras estimaciones y, por lo tanto, redondear la solución continua al entero más cercano quizás no sea una mala aproximación en este caso.

Implementación en AMPL:

Aunque la PL es muy sencilla como una aplicación de AMPL, la naturaleza de los datos de entrada es algo engorrosa. Una manera conveniente de suministrar los datos a este modelo es a través de una hoja de cálculo. En

el archivo *excelCase2.xls* se proporcionan todas las tablas para el modelo y el archivo de AMPL *amplCase2.txt* muestra cómo se leen datos de 8 tamaños de válvulas y 12 proveedores, a partir de las tablas de Excel.¹⁹

Análisis de resultados:

En la figura 3.15 se muestran los resultados del modelo AMPL para los datos en *excelCase2.xls*. En sentido estricto, los resultados de la solución no pueden utilizarse con propósitos de programación, ya que la demanda D_i para la válvula cardiaca i se basa en cálculos de valor esperado. Así, la solución $x_j, j = 1, 2, \dots, n$, dará como resultado que algunos meses tengan excedentes, y otros, escasez.

¿Qué tan útil es el modelo? En realidad, los resultados pueden utilizarse eficazmente con fines de planeación. Específicamente, la solución sugiere agrupar a los proveedores en tres categorías:

1. Los proveedores 1, 2 y 3 deben eliminarse de la lista de proveedores porque $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
2. Los proveedores 5, 6, 8 y 9 son cruciales para satisfacer la demanda porque la solución requiere que suministren todos los corazones que puedan producir.
3. Los proveedores restantes (4, 7, 10, 11 y 12) presentan una importancia “moderada” desde el punto de vista de la satisfacción de la demanda, porque su capacidad de producción máxima no se utiliza por completo.

FIGURA 3.15

Resultados del modelo de producción de las válvulas

Cost = \$ 42210.82						
solution:						
j	L[j]	x[j]	H[j]	reduced cost	Avg. unit price	
1	0	0.0	500	2.39	14.22	
2	0	0.0	500	0.12	15.88	
3	0	0.0	400	5.22	15.12	
4	0	116.4	500	0.00	14.70	
5	0	300.0	300	-0.49	16.68	
6	0	500.0	500	-2.13	14.89	
7	0	250.5	600	0.00	18.12	
8	0	400.0	400	-6.22	16.61	
9	0	300.0	300	-4.20	17.19	
10	0	357.4	500	-0.00	14.47	
11	0	112.9	400	0.00	15.62	
12	0	293.1	500	0.00	16.31	
i	D[i]	Surplus[i]	Dual value			
1	275	0.0	29.28			
2	310	28.9	0.00			
3	400	0.0	19.18			
4	320	88.1	0.00			
5	400	0.0	24.33			
6	350	0.0	8.55			
7	300	0.0	62.41			
8	130	28.2	0.00			

¹⁹ Hay un requisito para leer los datos en formato de arreglo desde la hoja de cálculo *excelCase2.xls* como se utiliza en el archivo *amplCase2.txt*. El controlador ODBC requiere que los encabezados de columna en una tabla de lectura de Excel sean del tipo string, lo cual significa que un encabezado numérico puro no es aceptable. Para evitar esta restricción, todos los encabezados de columna se convierten al tipo string utilizando la función TEXT de Excel. Por lo tanto, el encabezado 1 puede ser reemplazado por la fórmula =TEXT(COLUMN(A1), "0"). Al copiar esta fórmula en columnas sucesivas el código numérico se convertirá automáticamente en las cadenas deseadas.

Las recomendaciones dadas se apoyan además en los valores de los *costos reducidos* de la figura 3.15. El proveedor 9 puede aumentar sus precios unitarios promedio en hasta \$4.00 y seguir siendo viable en la solución óptima, mientras que el proveedor 3 seguirá siendo poco atractivo, incluso si reduce el costo unitario promedio en hasta \$5.00. Este resultado es cierto a pesar del hecho de que el precio unitario promedio para el proveedor excluido 9 está entre los más bajos (= \$15.12) y que para el proveedor “estrella” 9 es uno de los más altos (= \$17.19). La razón de esta conclusión aparentemente no intuitiva es que el modelo está básicamente impulsado por la demanda, en el sentido de que los proveedores 5, 6, 8 y 9 ofrecen relativamente más de los tamaños necesarios que los vendedores restantes. Lo contrario es cierto para los proveedores 1, 2 y 3, lo cual significa que un cambio en los niveles de demanda podría resultar en una mezcla de proveedores diferente. Ésta es la razón por la cual, con una demanda proyectada razonablemente estable, el fabricante trabaja estrechamente con sus proveedores “estrella” proporcionándoles recomendaciones de nutrición y cuidado de los animales, que aseguran que su distribución de tamaños de válvula se mantendrá razonablemente estable.

El tamaño de válvula 7 parece ser el más importante entre todos los tamaños, ya que tiene el precio dual más alto (= \$62.41), que es más de dos veces los precios duales de otros tamaños. Esto significa que el almacenamiento del tamaño 7 debería ser monitoreado de cerca para mantener su inventario excedente al nivel más bajo posible. Por otro lado, los tamaños 2, 4 y 8 muestran excedentes, y se tienen que hacer esfuerzos para reducir su inventario.

Comentarios sobre la implementación del modelo:

El modelo de PL propuesto es “rudimentario”, en el sentido de que sus resultados producen directrices generales de planeación en vez de los programas de producción definitivos. Sin embargo, los ahorros monetarios del plan propuesto, como se informa en el artículo original, son impresionantes. La eliminación de un gran número de proveedores del grupo y la identificación del proveedor “estrella” han resultado en una reducción en el inventario con importantes ahorros de costos. El mismo plan es responsable de reducir las oportunidades de escasez que prevalecían antes de que se usaran los resultados del modelo. Asimismo, al identificar a los proveedores más favorecidos, fue posible que los especialistas porcinos en instalaciones de producción capacitaran a los trabajadores de los rastros de esos proveedores para proporcionar corazones bien aislados y bien recortados. Esto, a su vez, ha llevado a racionalizar la producción en la planta correspondiente.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados	Sección	Problemas asignados
3.1	3-1 a 3-10	3.5.2	3-55 a 3-57
3.2	3-11 a 3-15	3.5.3	3-58 a 3-60
3.3.1	3-16 a 3-20	3.5.4	3-61 a 3-62
3.3.2	3-21 a 3-33	3.6.1	3-63 a 3-67
3.4.1	3-34 a 3-42	3.6.2	3-68 a 3-80
3.4.2	3-43 a 3-50	3.6.3	3-81 a 3-88
3.5.1	3-51 a 3-54	3.6.4	3-89 a 3-98

- *3-1. En el modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.2-1), considere la solución factible $x_1 = 3$ toneladas y $x_2 = 1$ tonelada. Determine el valor de las holguras asociadas para las materias primas $M1$ y $M2$.
- 3-2. En el modelo de la dieta (ejemplo 2.2-2), determine el excedente de alimento compuesto de 500 lb de maíz y 600 lb de soya.
- 3-3. Considere la siguiente desigualdad

$$10x_1 - 3x_2 \geq -5$$

Demuestre que multiplicar ambos lados de la desigualdad por -1 y, luego, convertir la desigualdad resultante en ecuación es lo mismo que convertirla primero en ecuación y después multiplicar ambos lados por -1 .

- *3-4.** Dos productos diferentes, $P1$ y $P2$, pueden ser fabricados por una o dos máquinas diferentes, $M1$ y $M2$. El tiempo de procesamiento de cualquier producto en cualquier máquina es el mismo. La capacidad diaria de la máquina $M1$ es de 200 unidades (de $P1$ o de $P2$, o una combinación de ambos), y la capacidad diaria de la máquina $M2$ es de 250 unidades. El supervisor de la fábrica desea equilibrar el programa de producción de las dos máquinas, de modo que la cantidad total de unidades producidas en una máquina no sea mayor a 5 unidades de la cantidad producida en la otra. La utilidad por unidad de $P1$ es de \$10 y la de $P2$ es de \$15. Plantee el problema como un PL en forma de ecuación.

- 3-5.** Muestre cómo puede presentarse la siguiente función objetivo en forma de ecuación:

$$\text{Minimizar } z = \max_{x_1, x_2, x_3} \{ |x_1 - x_2 + 3x_3|, |-x_1 + 3x_2 - x_3| \}$$

(Sugerencia: $|a| \leq b$ equivale a $a \leq b$ y $a \geq -b$.)

- 3-6.** Demuestre que las m ecuaciones

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

equivalen a las siguientes $m + 1$ desigualdades:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right) x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i$$

- 3-7.** El restaurante de comida rápida McBurger vende hamburguesas cuarto de libra y hamburguesas con queso. Una hamburguesa cuarto de libra se prepara con 0.25 lb de carne y una hamburguesa con queso se prepara con 0.20 lb de carne. El restaurante inicia el día con 200 lb de carne, pero puede pedir más a un costo adicional de 25 centavos por libra para cubrir el costo de entrega. Toda la carne que sobra al final del día se dona a instituciones de caridad.

Las utilidades de McBurger son de 20 centavos por hamburguesa cuarto de libra y de 15 centavos por hamburguesa con queso. McBurger no espera vender más de 900 hamburguesas en cualquier día. ¿Cuántas hamburguesas de cada tipo debería planear McBurger para el día? Resuelva el problema utilizando TORA, Solver o AMPL.

- 3-8.** En un centro de maquinado se fabrican dos productos. Los tiempos de producción por unidad de los productos 1 y 2 son de 10 y 12 minutos, respectivamente. El tiempo de máquina regular total es de 2500 minutos por día. La producción diaria del producto 1 está entre 150 y 200, pero no más de 45 unidades del producto 2. Se puede utilizar tiempo extra para satisfacer la demanda a un costo adicional de \$0.50 por minuto. Suponiendo que las utilidades unitarias de los productos 1 y 2 son de \$6.00 y \$7.50, respectivamente, formule el problema como un modelo de PL y, luego, resuévalo con TORA, Solver o AMPL para determinar el nivel de producción óptimo de cada producto, así como cualquier tiempo extra necesario en el centro.

- *3-9.** JoShop fabrica tres productos cuyas utilidades unitarias son de \$2, \$5 y \$3, respectivamente. La compañía presupuestó 80 horas de mano de obra y 65 horas de tiempo de máquina para la producción de los tres productos. Los requisitos de mano de obra por unidad de los productos 1, 2 y 3 son de 2, 1 y 2 horas, respectivamente. Los requisitos de tiempo de máquina correspondientes por unidad son 1, 1 y 2 horas. JoShop considera las horas de mano de obra y máquina presupuestadas como metas que pueden sobreponerse, si es necesario, pero a un costo adicional de \$15 por hora de mano de obra y \$10 por hora de máquina.

Formule el problema como un PL y determine su solución óptima usando TORA, Solver o AMPL.

- 3-10.** En un PL donde hay algunas variables no acotadas, una transformación del tipo $x_j = x_j^- - x_j^+$, $x_j^-, x_j^+ \geq 0$ duplicará la cantidad correspondiente de variables no negativas. En su lugar, podemos reemplazar k variables no acotadas con exactamente $k + 1$ variables no negativas por medio de la sustitución $x_j = x'_j - w$, $x'_j, w \geq 0$. Use TORA, Solver o AMPL para demostrar que los dos métodos producen la misma solución para el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

sujeto a

$$4x_1 - x_2 - 5x_3 = 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2, x_3 \text{ no acotadas}$$

- 3-11.** Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- (a) Exprese el problema en forma de ecuación.
 - (b) Determine todas las funciones básicas del problema y clasifíquelas como factibles y no factibles.
 - *(c) Use la sustitución directa en la función objetivo para determinar la solución factible básica óptima.
 - (d) Verifique gráficamente que la solución obtenida en (c) sea la solución de PL óptima; por consiguiente, concluya que la solución óptima puede determinarse algebraicamente considerando sólo las soluciones básicas factibles.
 - *(e) Muestre cómo se representan las soluciones básicas *no factibles* en el espacio de soluciones gráfico.
- 3-12.** Determine la solución óptima para cada una de los siguientes PL mediante la enumeración de todas las soluciones básicas.

- (a) Maximizar $z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4$

sujeto a

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- (b) Minimizar $z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- *3-13.** Demuestre algebraicamente que todas las soluciones básicas (puntos de esquina) del siguiente PL son no factibles.

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- 3-14.** Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$-6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \geq 4$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 10$$

$$x_1, x_3 \geq 0$$

$$x_2 \text{ irrestricta}$$

La conversión a la forma de ecuación implica utilizar la sustitución $x_2 = x_2^- - x_2^+$. Demuestre que una solución básica no puede incluir x_2^- y x_2^+ en forma simultánea.

- 3-15.** Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \text{ irrestricta}$$

$$x_2 \geq 0$$

- (a) Determine todas las soluciones factibles del problema.
- (b) Use la sustitución directa en la función objetivo para determinar la mejor solución básica.
- (c) Resuelva el problema gráficamente y verifique que la solución obtenida en (b) sea la óptima.

- 3-16.** En la figura 3.3, suponga que la función objetivo se cambia a

$$\text{Maximizar } z = 8x_1 + 4x_2$$

Identifique la trayectoria del método simplex y las variables básicas y no básicas que la definen.

- 3-17.** Considere la solución gráfica del modelo de Reddy Mikks dada en la figura 2.2. Identifique la trayectoria del método simplex, así como las variables básicas y no básicas que la definen.

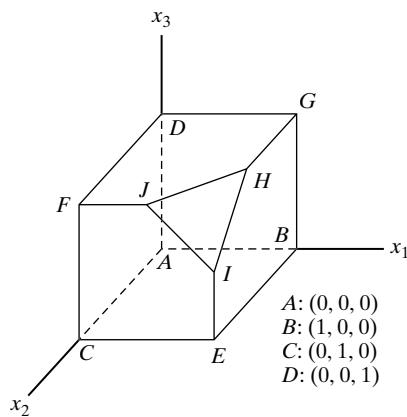


FIGURA 3.16

Espacio de soluciones del problema 3-18

- *3-18.** Considere el espacio tridimensional de soluciones de PL que se muestra en la figura 3.16, cuyos puntos extremos factibles son A, B, \dots , y J .
- ¿Cuáles de los siguientes pares de puntos de esquina no pueden representar iteraciones simplex sucesivas: (A, B) , (B, D) , (E, H) y (A, I) ? Explique la razón.
 - Suponga que las iteraciones simplex se inician en A y que el óptimo ocurre en H . Indique si alguna de las siguientes trayectorias son *no* legítimas para el algoritmo simplex, y explique la razón.
 - $A \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow H$
 - $A \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow H$
 - $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H$
- 3-19.** Para el espacio de soluciones de la figura 3.16, todas las restricciones son del tipo \leq , y todas las variables x_1, x_2 y x_3 son no negativas. Suponga que s_1, s_2, s_3 y s_4 (≥ 0) son las holguras asociadas con las restricciones representadas por los planos $CEIJF$, $BEIHG$, $DFJHG$ e IJH , respectivamente. Identifique las variables básicas y no básicas asociadas con cada punto de esquina factible del espacio de soluciones.
- 3-20.** Para cada una de las funciones objetivo dadas y el espacio de soluciones de la figura 3.16, seleccione la variable no básica que conduce al siguiente punto de esquina simplex, y determine la mejora asociada en z .
- Maximizar $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$
 - Maximizar $z = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$
 - Maximizar $z = -2x_1 + 7x_2 + 2x_3$
 - Maximizar $z = x_1 + x_2 + x_3$
- 3-21.** Este problema está diseñado para reforzar su comprensión de la condición de factibilidad simplex. En la primera tabla del ejemplo 3.3-1 utilizamos la prueba de relación mínima (no negativa) para determinar la variable de salida. La condición garantiza la factibilidad (todos los nuevos valores de las variables básicas permanecen no negativos, según lo estipulado por la definición de la PL). Para demostrar este punto, haga que s_2 , en vez de s_1 , salga de la solución básica, y realice los cálculos de Gauss-Jordan. En la tabla simplex resultante, s_1 es no factible ($= -12$).

3-22. Consideré el siguiente conjunto de restricciones:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 40$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Resuelva el problema para cada una de las siguientes funciones objetivo.

- (a) Maximizar $z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$.
- (b) Maximizar $z = 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4$.
- (c) Maximizar $z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4$.
- (d) Minimizar $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4$.

***3-23.** Consideré el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 4$$

$$5x_1 - 2x_2 + 6x_4 + x_6 = 8$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_7 = 3$$

$$-x_1 + x_3 - 2x_4 + x_8 = 0$$

$$x_1, x_2, \dots, x_8 \geq 0$$

Sean $x_5, x_6, \dots, y x_8$ una solución factible básica inicial dada. Suponga que x_1 se vuelve básica. ¿Cuáles de las variables básicas dadas deben volverse no básicas al nivel cero, para garantizar que todas las variables permanezcan no negativas, y cuál es el valor de x_1 en la nueva solución? Repita este procedimiento para x_2, x_3 y x_4 .

3-24. Consideré el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = x_1$$

sujeto a

$$5x_1 + x_2 = 4$$

$$6x_1 + x_3 = 8$$

$$3x_1 + x_4 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- (a) Resuelva el problema por inspección (no utilice las operaciones de filas de Gauss-Jordan) y justifique la respuesta en función de las soluciones básicas del método simplex.

- (b) Repita (a) suponiendo que la función objetivo requiere minimizar $z = x_1$.

3-25. Resuelva el siguiente problema por inspección y justifique el método de solución en función de las soluciones básicas del método simplex.

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 12x_5.$$

sujeto a

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 3x_5 \leq 90$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(Sugerencia: Una solución básica se compone de una sola variable.)

- 3-26.** La siguiente tabla representa una iteración simplex específica. Todas las variables son no negativas. La tabla no es óptima en cuanto a maximización o minimización. Por lo tanto, cuando una variable no básica entra en la solución, puede incrementar o reducir z , o bien, dejarla sin cambio, dependiendo de los parámetros de la variable no básica de entrada.

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Solución
z	0	-5	0	4	-1	-10	0	0	620
x_8	0	3	0	-2	-3	-1	5	1	12
x_3	0	1	1	3	1	0	3	0	6
x_1	1	-1	0	0	6	-4	0	0	0

- (a) Clasifique las variables como básicas y no básicas, y proporcione los valores actuales de todas las variables.
- *(b) Si se supone que el problema es de maximización, identifique las variables no básicas que tienen el potencial de mejorar el valor de z . Si cada una de esas variables entra en la solución básica, determine la variable de salida asociada, si acaso, y el cambio asociado de z . No utilice operaciones de filas de Gauss-Jordan.
- (c) Repita el inciso (b) suponiendo que el problema es de minimización.
- (d) ¿Cuál(es) variable(s) no básica(s) no ocasionará(n) un cambio en el valor de z al seleccionarlas para entrar a la solución?
- 3-27.** Considere el espacio de soluciones bidimensional que se muestra en la figura 3.17.
- (a) Suponga que la función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 6x_2$$

Si las iteraciones simplex inician en el punto A , identifique la trayectoria que conduce al punto E óptimo.

- (b) Determine la variable de entrada, las relaciones correspondientes de la condición de factibilidad y el cambio en el valor de z , si se supone que la iteración inicial ocurre en el punto A y que la función objetivo está dada como

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + x_2$$

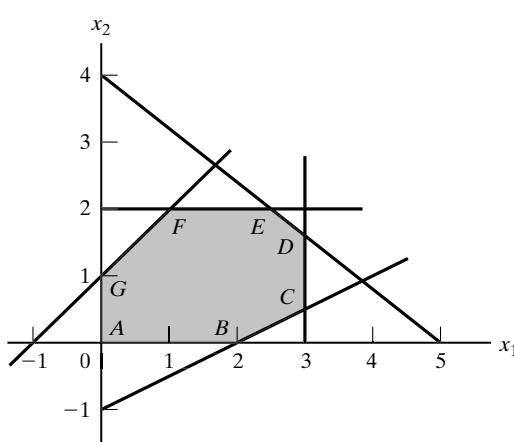


FIGURA 3.17
Espacio de soluciones para el problema 3.27

- (c) Repita (b), suponiendo que la función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 4x_2$$

- 3-28.** Consideré el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 16x_1 + 15x_2$$

sujeto a

$$40x_1 + 31x_2 \leq 124$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- (a) Resuelva el problema usando el método simplex, donde la variable de entrada es la variable no básica con el coeficiente *más* negativo en la fila z .
- (b) Resuelva el problema mediante el algoritmo simplex, seleccionando siempre la variable de entrada como la variable no básica con el coeficiente *menos* negativo en la fila z .
- (c) Compare la cantidad de iteraciones en (a) y (b). ¿Conduce la selección de la variable de entrada como la variable no básica con el coeficiente *más* negativo en la fila z a un menor número de iteraciones? ¿Qué conclusión puede hacerse respecto de la condición de optimalidad?
- (d) Suponga que el sentido de optimización se cambia a minimización al multiplicar z por -1 . ¿Cómo afecta este cambio a las iteraciones simplex?
- *3-29. En el ejemplo 3.3-1, muestre cómo puede determinarse el segundo mejor valor óptimo de z a partir de la tabla óptima.
- 3-30. ¿Puede usted extender el procedimiento del problema 3-9 para determinar el tercer mejor valor óptimo de z ?
- 3-31. La compañía Gutchi fabrica monederos, bolsas para rasuradora y mochilas. La elaboración incluye piel y materiales sintéticos, y la piel es una materia prima escasa. El proceso de producción requiere dos tipos de mano de obra calificada: costura y acabado. En la siguiente tabla se da la disponibilidad de los recursos, su utilización para los tres productos y las utilidades unitarias.

Recurso	Requisitos de recursos por unidad			Disponibilidad diaria
	Monedero	Bolsa	Mochila	
Piel (pies ²)	2	1	3	42 pies ²
Costura (h)	2	1	2	40 h
Acabado (h)	1	.5	1	45 h
Precio de venta (\$)	24	22	45	

- (a) Formule el problema como un programa lineal y encuentre la solución óptima (utilice TORA, Excel Solver o AMPL).
- (b) A partir de la solución óptima, determine el estado de cada recurso.

- 3-32.** *Experimento con TORA.* Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 \leq 4$$

$$5x_1 - 2x_2 + 6x_4 \leq 8$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 3$$

$$-x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- (a)** Utilice la opción de iteraciones de TORA para determinar la tabla óptima.
(b) Seleccione cualquier variable no básica para que “entre” en la solución básica, y haga clic en la opción **Next Iteration** para producir la iteración asociada. ¿Cómo se compara el nuevo valor objetivo con el óptimo en (a)? La idea es demostrar que la tabla en (a) es óptima porque ninguna de las variables no básicas puede mejorar el valor objetivo.

3-33. *Experimento con TORA.* En el problema 3-32, utilice TORA para determinar la siguiente mejor solución óptima.

3-34. Complete las iteraciones simplex del ejemplo 3.4-1 con cálculos manuales y obtenga la solución óptima.

3-35. *Experimento con TORA.* Genere las iteraciones simplex del ejemplo 3.4-1 utilizando el módulo **Iterations** ⇒ **M-method** (archivo *toraEx3.4-1.txt*). Compare el efecto de utilizar $M = 1$, $M = 10$ y $M = 1000$ en la solución. ¿Qué conclusión se puede obtener de este experimento?

3-36. En el ejemplo 3.4-1, identifique la tabla de inicio en cada uno de los siguientes casos (independientes) y desarrolle la fila z asociada después de sustituir todas las variables artificiales:

- ***(a)** La tercera restricción es $x_1 + 2x_2 \geq 4$.
- ***(b)** La segunda restricción es $4x_1 + 3x_2 \leq 6$.
- (c)** La segunda restricción es $4x_1 + 3x_2 = 6$.
- (d)** La función objetivo es maximizar $z = 4x_1 + x_2$.

3-37. Considere el siguiente conjunto de restricciones:

$$-2x_1 + 3x_2 = 3 \quad (1)$$

$$4x_1 + 5x_2 \geq 10 \quad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5 \quad (3)$$

$$6x_1 + 7x_2 \leq 3 \quad (4)$$

$$4x_1 + 8x_2 \geq 5 \quad (5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En cada uno de los siguientes problemas, desarrolle la fila z después de sustituir las variables artificiales:

- (a)** Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$ sujeto a (1), (3) y (4).
- (b)** Maximizar $z = 2x_1 - 7x_2$ sujeto a (1), (2), (4) y (5).
- (c)** Minimizar $z = 3x_1 + 6x_2$ sujeto a (3), (4) y (5).
- (d)** Minimizar $z = 4x_1 + 6x_2$ sujeto a (1), (2) y (5).
- (e)** Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2$ sujeto a (1) y (5).

3-38. Considere el siguiente conjunto de restricciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Resuelva el problema para cada una de las siguientes funciones objetivo:

- (a) Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$.
- (b) Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$.
- (c) Maximizar $z = x_1 + 2x_2 + x_3$.
- (d) Minimizar $z = 4x_1 - 8x_2 + 3x_3$.

***3-39.** Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Resuelva el problema con x_3 y x_4 como las variables básicas de inicio y *sin utilizar variables artificiales*. (Sugerencia: x_3 y x_4 juegan el papel de variables de holgura. La diferencia principal es que tienen coeficientes objetivo distintos de cero.)

***3-40.** Resuelva el siguiente problema con x_3 y x_4 como variables básicas factibles de inicio. Como en el problema 3-39, no utilice ninguna variable artificial.

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

***3-41.** Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La variable x_3 juega el papel de una holgura. Por lo tanto, no se requiere ninguna variable artificial en la primera restricción. En la segunda restricción, se requiere una variable artificial, R . Resuelva el problema con x_3 y R como variables de inicio.

3-42. Demuestre que el método M concluirá que el siguiente problema no tiene una solución factible.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- *3-43.** En la fase I, si el PL es de maximización, explique por qué no maximiza la suma de las variables artificiales en la fase I.

- 3-44.** Para cada uno de los casos del problema 3-37, escriba la función objetivo correspondiente en la fase I.

- 3-45.** Resuelva el problema 3-38 con el método de las dos fases.

- 3-46.** Escriba la fase I para el siguiente problema y, luego, resúélvalo (con TORA por conveniencia) para demostrar que el problema no tiene una solución factible.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- 3-47.** Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- (a)** Demuestre que la fase I terminará con una variable artificial *básica* en el nivel cero (puede utilizar TORA por conveniencia).

- (b)** Elimine la variable artificial cero antes de iniciar la fase II y, después, realice las iteraciones de esta fase.

- 3-48.** Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- (a)** Demuestre que la fase I termina con dos variables artificiales cero en la solución básica (use TORA por conveniencia).

- (b)** Demuestre que cuando se aplica el procedimiento del problema 3-47(b) al final de la fase I, tan sólo una de las dos variables artificiales cero puede hacerse no básica.

- (c) Demuestre que la restricción original asociada con la variable artificial cero que no puede hacerse no básica en (b) debe ser redundante; por consiguiente, su fila y su columna pueden eliminarse al inicio de la fase II.

*3-49. Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La tabla simplex óptima al final de la fase I es

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R	Solución
r	-5	0	-2	-1	-4	0	0
x_2	2	1	1	0	1	0	2
R	-5	0	-2	-1	-4	1	0

Explique por qué las variables no básicas x_1, x_3, x_4 y x_5 nunca pueden asumir valores positivos al final de la fase II. Por consiguiente, se concluye que sus columnas pueden eliminarse antes de iniciar la fase II. En esencia, la eliminación de estas variables reduce las ecuaciones de restricción del problema a $x_2 = 2$, lo cual indica que, en este problema, no es necesario realizar la fase II.

3-50. Considere el modelo de PL

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$5x_1 - 6x_2 + 2x_3 \geq 5$$

$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 8$$

$$2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Demuestre cómo pueden modificarse las desigualdades a un conjunto de ecuaciones que requiere el uso de sólo una variable artificial (en vez de dos).

- *3-51. Considere el espacio de soluciones gráfico que se muestra en la figura 3.18. Suponga que las iteraciones simplex inician en A y que la solución óptima ocurre en D . Además, suponga que la función objetivo se define de modo que, en A , x_1 ingresa primero a la solución.
- (a) Identifique (en la gráfica) los puntos de esquina que definen la trayectoria del método simplex hacia el punto óptimo.
 - (b) Determine el número máximo posible de iteraciones simplex necesarias para alcanzar la solución óptima, suponiendo que no hay ciclado.
- 3-52. Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

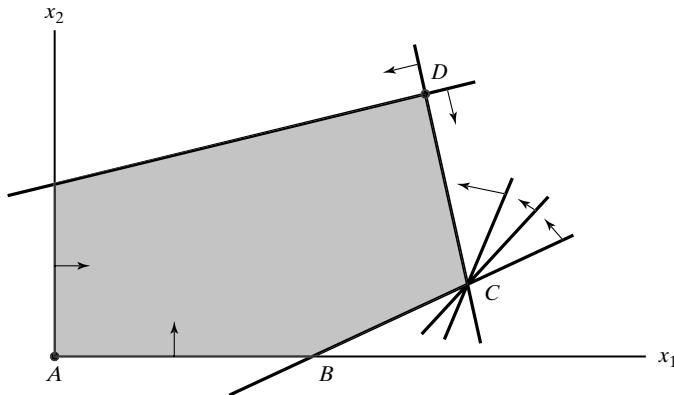


FIGURA 3.18

Espacio de soluciones del problema 3-51

sujeto a

$$4x_1 - x_2 \leq 8$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- (a) Demuestre que las iteraciones simplex asociadas son temporalmente degeneradas (puede utilizar TORA por conveniencia).
- (b) Verifique el resultado resolviendo gráficamente el problema (aquí puede usarse el módulo gráfico de TORA).

3-53. *Experimento con TORA.* Considere el PL del problema 3-52.

- (a) Use TORA para generar las iteraciones simplex. ¿Cuántas iteraciones se requieren para alcanzar el óptimo?
- (b) Intercambie las restricciones (1) y (3), y vuelva a resolver el problema con TORA. ¿Cuántas iteraciones se requieren para resolverlo?
- (c) Explique por qué las cantidades de iteraciones en (a) y (b) son diferentes.

3-54. *Experimento con TORA.* Considere el siguiente PL (escrito por E. M. Beale para demostrar el ciclado):

$$\text{Maximizar } z = \frac{3}{4}x_1 - 20x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 6x_4$$

sujeto a

$$\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \leq 0$$

$$x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

En el menú de TORA **SOLVE/MODIFY**, seleccione las opciones **Solve** \Rightarrow **Algebraic** \Rightarrow **Iterations** \Rightarrow **All-slack**. En seguida, “recorra” las iteraciones simplex sucesivas usando el comando **Next iteration** (no utilice **All iterations**, porque entonces el método simplex entrará en un proceso de ciclado durante un tiempo indefinido). Notará que la solución factible básica inicial con todas las holguras en la iteración 0 reaparecerá de forma idéntica en la iteración 6. Este ejemplo ilustra la ocurrencia de ciclado en las iteraciones simplex y la posibilidad de que el algoritmo nunca converja hacia la solución óptima. (lo interesante en este ejemplo es que si todos los coeficientes en este PL se convierten en enteros, no ocurrirá el ciclado. ¡Inténtelo!).

- *3-55.** Para el siguiente PL, identifique tres soluciones básicas óptimas alternativas que comprendan estas tres soluciones básicas

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Nota: Aun cuando el problema tiene más de tres soluciones básicas óptimas alternativas, tan sólo necesita identificar tres de ellas. Puede utilizar TORA por conveniencia.

- 3-56.** Resuelva el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

A partir de la tabla óptima, demuestre que no todos los óptimos alternativos son puntos de esquina (es decir, no básicos). Proporcione una demostración gráfica bidimensional del tipo de espacio de soluciones y de la función objetivo que producirá este resultado. Puede utilizar TORA por conveniencia.

- 3-57.** Para el siguiente PL, demuestre que la solución óptima es degenerada y que las soluciones alternativas no son puntos de esquina. Puede utilizar TORA por conveniencia.

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- 3-58.** *Experimento con TORA.* Resuelva el ejemplo 3.5-3 aplicando la opción **Iterations** de TORA y demuestre que, aunque la solución inicia con x_1 como variable de entrada (por la condición de optimalidad), el algoritmo simplex apuntará en algún momento hacia una solución no acotada.

*3-59. Considere el PL:

$$\text{Maximizar } z = 20x_1 + 10x_2 + x_3$$

sujeto a

$$3x_1 - 3x_2 + 5x_3 \leq 50$$

$$x_1 + x_3 \leq 10$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- (a) Mediante una inspección de las restricciones, determine la dirección (x_1, x_2 o x_3) en la cual el espacio de soluciones no esté acotado.
- (b) Sin realizar más cálculos, ¿qué puede concluir respecto del valor objetivo óptimo?
- 3-60. En algunos modelos de PL mal construidos, el espacio de soluciones quizás no esté acotado aun cuando el problema tenga un valor objetivo acotado. Esta ocurrencia apunta hacia posibles irregularidades en la construcción del modelo. En problemas grandes, puede ser difícil detectar la situación de “sin acotación” por inspección. Idee un procedimiento analítico para determinar si el espacio de soluciones es no acotado.
- *3-61. Toolco produce tres tipos de herramientas, $T1$, $T2$ y $T3$, las cuales utilizan dos materias primas, $M1$ y $M2$, de acuerdo con los datos de la siguiente tabla:

Materia prima	Cantidad de unidades de materia prima por herramienta		
	$T1$	$T2$	$T3$
$M1$	3	5	6
$M2$	5	3	4

Las cantidades diarias disponibles de las materias primas $M1$ y $M2$ son 1000 unidades y 1200 unidades, respectivamente. La investigación de mercado muestra que la demanda diaria de las tres herramientas debe ser, al menos, de 500 unidades. ¿Puede satisfacer la demanda el departamento de manufactura? Si no es así, ¿cuál es la máxima cantidad que Toolco puede producir?

3-62. *Experimento con TORA*. Considere el modelo de PL

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Use la opción **Iterations** \Rightarrow **M-Method** para mostrar que la solución óptima incluye una variable básica artificial, pero en el nivel cero. ¿Tiene el problema una solución óptima *factible*?

- 3-63. Una compañía fabrica dos productos, A y B . Los ingresos unitarios son \$2 y \$3, respectivamente. Las disponibilidades diarias de dos materias primas, $M1$ y $M2$, utilizadas para fabricar los dos productos son de 8 y 18 unidades, respectivamente. Una unidad de A utiliza 2 unidades de $M1$ y 2 unidades de $M2$, y una unidad de B utiliza 3 unidades de $M1$ y 6 unidades de $M2$.

- (a) Determine los precios duales de $M1$ y $M2$ y sus intervalos de factibilidad.
- (b) Suponga que pueden adquirirse 4 unidades más de $M1$ a un costo de 30 centavos por unidad. ¿Recomendaría la compra adicional?
- (c) ¿Cuánto es lo máximo que la compañía debería pagar por unidad de $M2$?
- (d) Si la disponibilidad de $M2$ se incrementa en 5 unidades, determine el ingreso óptimo asociado.
- *3-64. Wild West produce dos tipos de sombreros vaqueros. Un sombrero tipo 1 requiere dos veces la mano de obra que el tipo 2. Si toda la mano de obra disponible se dedica sólo al tipo 2, la compañía puede producir un total de 400 sombreros tipo 2 al día. Los límites de mercado para los dos tipos son 150 y 200 sombreros al día, respectivamente. El ingreso es de \$8 por sombrero tipo 1 y de \$5 por sombrero tipo 2.
- (a) Use la solución gráfica para determinar la cantidad de sombreros de cada tipo que maximiza el ingreso.
- (b) Determine el precio dual de la capacidad de producción (en términos del sombrero tipo 2) y el intervalo dentro del cual se aplica.
- (c) Si el límite de la demanda diaria del sombrero tipo 1 se reduce a 120, use el precio dual para determinar el efecto correspondiente en el ingreso óptimo.
- (d) ¿Cuál es el precio dual de la participación en el mercado del sombrero tipo 2? ¿Qué tanto se puede incrementar la participación en el mercado al mismo tiempo que se obtiene el valor calculado por unidad?
- 3-65. Considere el problema 3-63.
- (a) Determine la condición de optimalidad para $\frac{c_A}{c_B}$ que mantendrá el óptimo sin cambio.
- (b) Determine los intervalos de optimalidad para c_A y c_B , suponiendo que el otro coeficiente se mantiene constante en su valor actual.
- (c) Si los ingresos unitarios c_A y c_B cambian al mismo tiempo a \$5 y \$4, respectivamente, determine la nueva solución óptima.
- (d) Si los cambios en (c) se hacen uno a la vez, ¿qué se puede decir acerca de la solución óptima?
- 3-66. En el modelo de Reddy Mikks del ejemplo 2.2-1:
- (a) Determine el intervalo para la relación del ingreso unitario de la pintura para exteriores con el ingreso unitario de la pintura para interiores.
- (b) Si el ingreso de pintura para exteriores permanece constante en \$5000 por tonelada, determine el ingreso unitario máximo de la pintura para interiores que mantendrá sin cambios la solución óptima actual.
- (c) Si por razones de marketing el ingreso unitario de pintura para interiores debe reducirse a \$3000, ¿cambiará la mezcla de producción óptima actual?
- *3-67. En el problema 3-64:
- (a) Determine el intervalo de optimalidad para la relación de los ingresos unitarios de los dos tipos de sombreros que mantendrá el óptimo actual sin cambio.
- (b) Con la información en (a), ¿cambiará la solución óptima si el ingreso unitario es el mismo para ambos tipos?
- 3-68. En el modelo de TOYCO, suponga que los cambios D_1 , D_2 y D_3 se hacen *al mismo tiempo* en las tres operaciones.²⁰
- (a) Si las disponibilidades de las operaciones 1, 2 y 3 se cambian a 438, 500 y 410 minutos, respectivamente, use las condiciones simultáneas para demostrar que la solución básica actual

²⁰ En los problemas 3-68 a 3-80, puede resultarle conveniente generar la tabla simplex óptima con TORA.

sigue siendo factible, y determine el cambio en el ingreso óptimo a través de los precios duales óptimos.

- (b) Si las disponibilidades de las tres operaciones se cambian a 460, 440 y 380 minutos, respectivamente, use las condiciones simultáneas para demostrar que la solución básica actual es no factible.
- *3-69.** Considere el modelo de TOYCO:
- (a) Suponga que cualquier tiempo adicional para la operación 1 por encima de su capacidad actual de 430 minutos al día debe hacerse con base en un tiempo extra a \$50 por hora. El costo por hora incluye tanto la mano de obra como la operación de la máquina. ¿Es económicamente ventajoso utilizar tiempo extra con la operación 1?
 - (b) Suponga que el encargado de la operación 2 ha acordado trabajar 2 horas de tiempo extra diarias a \$45 por hora. Adicionalmente, el costo de la operación en sí es de \$10 por hora. ¿Cuál es el efecto neto de esta actividad en el ingreso diario?
 - (c) ¿Es necesario el tiempo extra para la operación 3?
 - (d) Suponga que la disponibilidad diaria de la operación 1 se incrementa a 440 minutos. Cualquier tiempo extra por encima de la capacidad máxima actual costará \$40 por hora. Determine la nueva solución óptima e incluya el ingreso neto asociado.
 - (e) Suponga que la disponibilidad de la operación 2 se reduce en 15 minutos al día y que el costo por hora de la operación durante el tiempo regular es de \$30. ¿Es ventajoso reducir la disponibilidad de la operación 2?
- 3-70.** Una compañía fabrica tres productos, *A*, *B* y *C*. El volumen de ventas de *A* es, al menos, 50% de las ventas totales de los tres productos. Sin embargo, la compañía no puede vender más de 75 unidades por día. Los tres productos utilizan una materia prima de la cual la máxima disponibilidad diaria es de 240 lb. Las tasas de consumo de la materia prima son de 2 lb por unidad de *A*, 4 lb por unidad de *B* y 3 lb por unidad de *C*. Los precios unitarios de *A*, *B* y *C* son \$20, \$50 y \$35, respectivamente.
- (a) Determine la mezcla óptima de productos para la compañía.
 - (b) Calcule el precio dual de la materia prima y su intervalo permisible. Si la materia prima disponible se incrementa en 120 lb, determine la solución óptima y el cambio del ingreso total mediante el precio dual.
 - (c) Use el precio dual para determinar el efecto de cambiar la demanda máxima del producto *A* en ± 10 unidades.
- 3-71.** Una compañía que opera 10 horas al día fabrica tres productos con tres procesos. En la siguiente tabla se resumen los datos del problema:

Producto	Minutos por unidad			Precio unitario
	Proceso 1	Proceso 2	Proceso 3	
1	10	6	8	\$4.50
2	5	8	10	\$5.00
3	6	9	12	\$4.00

- (a) Determine la mezcla de productos óptima.
- (b) Use el precio dual para priorizar los tres procesos en el caso de una posible expansión.
- (c) Si es posible asignar horas adicionales de producción, ¿cuál sería un costo justo por hora adicional para cada proceso?

3-72. La división de educación continua del Colegio Comunitario de Ozark ofrece un total de 30 cursos cada semestre. Por lo general, los cursos ofrecidos son de dos tipos: prácticos, como carpintería, procesamiento de palabras y mantenimiento automotriz; y humanistas, como historia, música y bellas artes. Para satisfacer las demandas de la comunidad, cada semestre deben ofrecerse al menos 10 cursos de cada tipo. La división estima que los ingresos producidos por la impartición de cursos prácticos y humanistas son aproximadamente de \$1500 y \$1000 por curso, respectivamente.

- (a) Diseñe una oferta de cursos óptima para el colegio.
- (b) Demuestre que el precio dual de un curso adicional es de \$1500, que es igual al ingreso por curso práctico. ¿Qué significa este resultado en función de la oferta de cursos adicionales?
- (c) ¿Cuántos cursos más pueden ofrecerse al mismo tiempo, de modo que se garantice una contribución de \$1500 por cada uno de ellos al ingreso total?
- (d) Determine el cambio en los ingresos resultantes al aumentar el requisito mínimo de cursos humanistas en uno.

***3-73.** Show & Sell puede anunciar sus productos en la radio y la televisión (TV) locales, o en periódicos. El presupuesto de publicidad está limitado a \$10,000 mensuales. Cada minuto de publicidad en radio cuesta \$15 y cada minuto en TV cuesta \$300. Un anuncio en el periódico cuesta \$50. A Show & Sell le gusta anunciararse en radio al menos el doble de veces que en TV. Por otro lado, se recomienda el uso de, al menos, 5 anuncios en el periódico y no más de 400 minutos de publicidad por radio al mes. La experiencia muestra que la publicidad en TV es 50 veces más efectiva que la publicidad en radio y 10 veces más efectiva que en periódicos.

- (a) Determine la asignación óptima del presupuesto a los tres medios.
- (b) ¿Son los límites impuestos a la publicidad por radio y periódicos económicamente justificables?
- (c) Si el presupuesto mensual se incrementa en 50%, ¿produciría esto un incremento proporcional en la efectividad global de la publicidad?

3-74. La compañía Burroughs Garment fabrica camisas de caballero y blusas de dama para las tiendas de descuento Walmark, que aceptará toda la producción surtida por Burroughs. El proceso de producción incluye corte, costura y empacado. Burroughs emplea a 25 trabajadores en el departamento de corte, 35 en el de costura y 5 en el de empacado. La fábrica labora un turno de 8 horas, 5 días a la semana. En la siguiente tabla, se proporcionan los requisitos de tiempo y los precios unitarios de ambas prendas:

Prenda	Minutos por unidad			Precio unitario (\$)
	Corte	Costura	Empacado	
Camisas	20	70	12	8.00
Blusas	60	60	4	12.00

- (a) Determine el programa de producción semanal óptimo para Burroughs.
- (b) Determine el valor de 1 hora de corte, costura y empacado en función del ingreso total.
- (c) Si es posible usar tiempo extra en los departamentos de corte y costura, ¿cuál es la tarifa por hora máxima que Burroughs debería pagar por el tiempo extra?

3-75. ChemLabs utiliza las materias primas I y II para producir dos soluciones de limpieza doméstica, *A* y *B*. Las disponibilidades diarias de las materias primas I y II son de 150 y 145 unidades, respectivamente. Una unidad de la solución *A* consume 0.5 unidades de la materia prima I y 0.6 unidades de la materia prima II, y una unidad de la solución *B* usa 0.5 unidades de la materia prima I y 0.4 unidades de la materia prima II. Los precios unitarios de las soluciones *A* y *B* son de \$8 y \$10, respectivamente.

La demanda diaria de la solución *A* es de entre 30 y 150 unidades, y la de la solución *B* de entre 40 y 200 unidades.

- (a) Encuentre las cantidades óptimas de *A* y *B* que ChemLabs debería producir.
 - (b) Use los precios duales para determinar qué límites de demanda de los productos *A* y *B* se deberían relajar para mejorar la rentabilidad.
 - (c) Si es posible adquirir unidades adicionales de materia prima a \$20 por unidad, ¿es esto aconsejable? Explique su respuesta.
 - (d) Se hace la sugerencia de incrementar 25% la materia prima *H* para eliminar un cuello de botella en la producción. ¿Es esto aconsejable? Explique su respuesta.
- 3-76.** Una línea de ensamble compuesta de tres estaciones de trabajo consecutivas produce dos modelos de radio: DiGi-1 y DiGi-2. La siguiente tabla proporciona los tiempos de ensamble para las tres estaciones de trabajo.

Estación de trabajo	Minutos por unidad	
	<i>DiGi-1</i>	<i>DiGi-2</i>
1	6	4
2	5	4
3	4	6

El mantenimiento diario de las estaciones de trabajo 1, 2 y 3 consume 10, 14 y 12%, respectivamente, de los 480 minutos máximos disponibles por estación cada día.

- (a) La compañía desea determinar la combinación óptima de productos que minimizará los tiempos desocupados (o no utilizados) en las tres estaciones de trabajo. Determine la utilización óptima de las estaciones de trabajo [sugerencia: Exprese la suma de los tiempos desocupados (holguras) para las tres operaciones en términos de las variables originales].
 - (b) Determine el valor de una reducción en el tiempo de mantenimiento diario de cada estación en un punto porcentual.
 - (c) Se hace una propuesta para que el tiempo de operación de las tres estaciones se incremente a 600 minutos por día a un costo adicional de \$1.50 por minuto. ¿Puede mejorarse esta propuesta?
- 3-77.** La compañía Gutchi fabrica monederos, bolsas para rasuradora y mochilas. La construcción de los tres productos requiere piel y materiales sintéticos, donde la piel es la materia prima limitada. El proceso de producción utiliza dos tipos de mano de obra calificada: costura y acabado. En la siguiente tabla se muestra la disponibilidad de los recursos, su utilización para los tres productos y los precios unitarios.

Recurso	Requisitos de recursos por unidad			Disponibilidad diaria
	<i>Monedero</i>	<i>Bolsa</i>	<i>Mochila</i>	
Piel (ft^2)	2	1	3	42
Costura (h)	2	1	2	40
Acabado (h)	1	.5	1	45
Precio (\$)	24	22	45	

Formule el problema como una programación lineal, y determine la solución óptima. A continuación, indique si los siguientes cambios en los recursos mantendrán factible la solución actual. En los casos

donde se mantenga la factibilidad, determine la nueva solución óptima (valores de las variables y de la función objetivo).

- (a) La piel disponible se incrementa a 45 ft².
 - (b) La piel disponible se reduce en 1 ft².
 - (c) Las horas de costura disponibles se cambian a 38 h.
 - (d) Las horas de costura disponibles se cambian a 46 h.
 - (e) Las horas de acabado disponibles se reducen a 15 h.
 - (f) Las horas de acabado disponibles se incrementan a 50 h.
 - (g) ¿Recomendaría contratar a una costurera adicional a \$15 la hora?
- 3-78.** HiDec produce dos modelos de dispositivos electrónicos que utilizan resistores, capacitores y chips. En la siguiente tabla se resumen los datos de la situación:

Recurso	Requisitos de recursos unitarios		Disponibilidad máxima (unidades)
	Modelo 1 (unidades)	Modelo 2 (unidades)	
Resistores	2	3	1200
Capacitores	2	1	1000
Chips	0	4	800
Precio unitario (\$)	3	4	

Sean x_1 y x_2 las cantidades producidas de los modelos 1 y 2, respectivamente. A continuación, se presentan el modelo de PL y su tabla simplex óptima asociada.

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + 3x_2 \leq 1200 \quad (\text{Resistores})$$

$$2x_1 + x_2 \leq 1000 \quad (\text{Capacitores})$$

$$4x_2 \leq 800 \quad (\text{Chips})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Básicas	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución
z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1750
x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	450
s_3	0	0	-2	2	1	400
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	100

- *(a) Determine el estado de cada recurso.
- *(b) En términos del ingreso óptimo, encuentre los precios duales para resistores, capacitores y chips.
- (c) Determine los intervalos de factibilidad para los precios duales obtenidos en (b).
- (d) Si la cantidad de resistores disponibles se incrementa a 1300 unidades, encuentre la nueva solución óptima.
- *(e) Si la cantidad de chips disponibles se reduce a 350 unidades, ¿podrá usted determinar la nueva solución óptima directamente con la información dada? Explique su respuesta.

- (f) Si la disponibilidad de capacitores está limitada por el intervalo de factibilidad calculado en (c), determine el intervalo correspondiente del ingreso óptimo, y los intervalos correspondientes para las cantidades de unidades de los modelos 1 y 2 que se producirán.
- (g) Un nuevo contratista ofrece a HiDec resistores adicionales a 40 centavos cada uno, pero sólo si HiDec compra al menos 500 unidades. ¿Debería HiDec aceptar la oferta?
- 3-79.** *Regla de factibilidad del 100%.* Es posible usar una regla simplificada basada en los cambios *individuales* $D_1, D_2, \dots, y D_m$ en el lado derecho de las restricciones, para probar si los cambios *simultáneos* mantendrán la factibilidad de la solución actual. Suponga que el lado derecho b_i de la restricción i se cambia a $b_i + D_i$ elemento por elemento, y que $p_i \leq D_i \leq q_i$ es el intervalo de factibilidad correspondiente obtenido utilizando el procedimiento de la sección 3.6.2. Por definición, se tiene que $p_i \leq 0$ ($q_i \geq 0$) porque representa la reducción (el incremento) máxima(o) permisible en b_i . En seguida definimos r_i como igual a $\frac{D_i}{p_i}$ si D_i es negativo, y $\frac{D_i}{q_i}$ si D_i es positivo. Por definición, se tiene que $0 \leq r_i \leq 1$. Por lo tanto, la regla del 100% dice que, dados los cambios $D_1, D_2, \dots, y D_m$, una condición suficiente (pero no necesaria) para que la solución actual permanezca factible es que $r_1 + r_2 + \dots + r_m \leq 1$. Si la condición no se satisface, entonces, la solución actual puede permanecer factible o no. La regla no es aplicable si D_i cae fuera del intervalo (p_i, q_i) .

En realidad, la regla del 100% es demasiado débil para que sea consistentemente útil. Aun en los casos donde puede confirmarse la factibilidad, sigue habiendo la necesidad de obtener la nueva solución utilizando las condiciones comunes de factibilidad simplex. Además, los cálculos directos asociados con los cambios simultáneos dados en la sección 3.6.2 son sencillos y manejables.

Para demostrar la debilidad de la regla, aplíquela a los incisos (a) y (b) del problema 3-68, basado en el modelo de TOYCO del ejemplo 3.6-2. La regla no confirma la factibilidad de la solución en (a) y no es aplicable en (b), porque los cambios en D_i están fuera de los intervalos permisibles. El problema 3-80 demuestra aún más este punto.

- 3-80.** Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 0$$

- (a) Demuestre que la solución básica óptima incluye tanto a x_1 como a x_2 y que los intervalos de factibilidad para las dos restricciones, considerados uno a la vez, son $-3 \leq D_i \leq 6$ y $-3 \leq D_2 \leq 6$.
- *(b) Suponga que los dos recursos se incrementan al mismo tiempo en $\Delta > 0$ cada uno. Primero, demuestre que la solución básica permanece factible para todos los incrementos $\Delta > 0$. En seguida, demuestre que la regla del 100% confirmará la factibilidad tan sólo si el incremento está en el intervalo $0 < \Delta \leq 3$ unidades. De lo contrario, la regla falla para $3 < \Delta \leq 6$ y no es válida para $\Delta > 6$.
- 3-81.** En el modelo de TOYCO, determine si la solución actual cambiará en cada uno de los siguientes casos:²¹
- (i) $z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$
 - (ii) $z = 3x_1 + 6x_2 + x_3$
 - (iii) $z = 8x_1 + 3x_2 + 9x_3$

²¹ En los problemas 3-81 a 3-87, puede resultarle conveniente generar la tabla simplex óptima con TORA.

***3-82.** La tienda de abarrotes B&K vende tres tipos de bebidas refrescantes: las marcas Cola A1, Cola A2 y la marca genérica más barata Cola BK. Los precios por lata del A1, A2 y BK son de 80, 70 y 60 centavos, respectivamente. En promedio, la tienda no vende más de 500 latas de todas las bebidas de cola al día. Aunque A1 es una marca reconocida, los clientes tienden a comprar más A2 y BK porque son más baratas. Se estima que como mínimo se venden 100 latas de A1 al día, y que las ventas combinadas de A2 y BK sobrepasan las de A1 por un margen de al menos 4:2.

- (a) Demuestre que la solución óptima no requiere vender la marca BK.
- (b) ¿Qué tanto se debe incrementar el precio por lata de BK para que la tienda la venda?
- (c) Para competir con otras tiendas, B&K decidió reducir el precio de los tres tipos de bebidas de cola en 5 centavos por lata. Calcule de nuevo los costos reducidos para determinar si esta promoción cambiará la solución óptima actual.

3-83. La compañía Baba Furniture emplea a cuatro carpinteros durante 10 días para ensamblar mesas y sillas. Se requieren dos horas-hombre para ensamblar una mesa y media hora-hombre para ensamblar una silla. Los clientes suelen comprar una mesa y de cuatro a seis sillas. Los precios son \$135 por mesa y \$50 por silla. La compañía opera un turno de ocho horas diarias.

- (a) Determine la mezcla de producción óptima para 10 días.
- (b) Si los precios unitarios presentes por mesa y silla se reducen en un 10%, aplique el análisis de sensibilidad para determinar si cambiará la solución óptima obtenida en (a).
- (c) Si los precios unitarios presentes por mesa y silla cambian a \$120 y \$25, respectivamente, ¿cambiará la solución obtenida en (a)?

3-84. El Banco de Elkins desea asignar un máximo de \$200,000 para créditos personales y automotrices durante el siguiente mes. El banco cobra 14% por los préstamos personales y 12% por los préstamos automotrices. Ambos tipos de créditos se pagan al final del periodo de 1 año. La experiencia muestra que aproximadamente 3% de los préstamos personales y 2% de los préstamos automotrices no se reembolsan. El banco suele asignar a los créditos para automóvil el doble de lo que asigna a los personales.

- (a) Determine la asignación óptima de fondos entre los dos tipos de créditos y la tasa neta de rendimiento en todos los préstamos.
- (b) Si los porcentajes de los préstamos personales y para automóvil se cambian a 4 y 3%, respectivamente, use el análisis de sensibilidad para determinar si cambiará la solución óptima en (a).

***3-85.** Electra produce cuatro tipos de motores eléctricos, cada uno en una línea de ensamble distinta. Las capacidades respectivas de las líneas son 500, 500, 800 y 750 motores al día. El motor tipo 1 utiliza 8 unidades de cierto componente electrónico; el motor tipo 2 usa 5 unidades; el motor tipo 3 usa 4 unidades y el motor tipo 4 utiliza 6 unidades. El proveedor del componente puede surtir 8000 piezas al día. Los precios de los tipos de motor respectivos son \$60, \$40, \$25 y \$30.

- (a) Determine la mezcla óptima de producción diaria.
- (b) El programa de producción actual satisface las necesidades de Electra. Sin embargo, debido a la competencia, es posible que la compañía tenga que reducir el precio del motor tipo 2. ¿Cuál es la reducción máxima que puede implementarse sin que cambie el programa de producción actual?
- (c) Electra ha decidido reducir 25% el precio de todos los tipos de motores. Use el análisis de sensibilidad para determinar si la solución óptima no cambia.
- (d) En la actualidad, el motor tipo 4 ya no se produce. ¿Qué tanto debería incrementarse su precio para incluirlo en el programa de producción?

3-86. La enlatadora Popeye firmó un contrato para recibir 60,000 lb diarias de tomates maduros a 7 centavos por libra, con los cuales produce jugo de tomate, salsa de tomate y puré de tomate enlatados. Los productos enlatados se empacan en cajas de 24 latas. Una lata de jugo utiliza 1 lb de tomates frescos, una lata de salsa utiliza $\frac{1}{2}$ lb, y una lata de puré utiliza $\frac{3}{4}$ lb. La participación diaria del mercado de la compañía

está limitada a 2000 cajas de jugo, 5000 cajas de salsa y 6000 cajas de puré. Los precios al mayoreo por caja de jugo, salsa y puré son \$21, \$9 y \$12, respectivamente.

- (a) Desarrolle un programa de producción diaria óptimo para Popeye.
 - (b) Si los precios por caja de jugo y puré permanecen fijos en los valores dados, aplique el análisis de sensibilidad para determinar el intervalo de precio unitario que Popeye debería cobrar por caja de salsa para mantener sin cambios la mezcla óptima de productos.
- 3-87.** La compañía mueblera de Dean ensambla gabinetes de cocina regulares y de lujo utilizando madera precortada. Los gabinetes regulares se pintan de blanco, y los de lujo se barnizan. Un departamento realiza tanto el pintado como el barnizado. La capacidad diaria del departamento de ensamble es de 200 gabinetes regulares y 150 de lujo. El barnizado de una unidad de lujo requiere el doble de tiempo que pintar uno regular. Si el departamento de pintura/barnizado se dedica sólo a las unidades de lujo, puede completar 180 unidades diarias. La compañía estima que los ingresos por unidad de los gabinetes regulares y de lujo son de \$100 y \$140, respectivamente.
- (a) Formule el problema como un programa lineal y encuentre el programa de producción óptimo por día.
 - (b) Suponga que la competencia dicta que el precio por unidad de cada gabinete regular y de lujo se reduzca a \$80. Use el análisis de sensibilidad para determinar si la solución óptima en (a) permanece sin cambio.
- 3-88.** *Regla de optimalidad del 100%.* Es posible desarrollar una regla similar a la regla de factibilidad del 100% descrita en el problema 3-79, para probar el efecto del cambio simultáneo de todas las c_j a $c_j + d_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, sobre la optimalidad de la solución actual. Suponga que $u_j \leq d_j \leq v_j$ es el intervalo de optimalidad obtenido como resultado del cambio de cada c_j a $c_j + d_j$, uno a la vez, siguiendo el procedimiento descrito en la sección 3.6.3. En este caso, $u_j \leq 0$ ($v_j \geq 0$), porque representa la reducción (el incremento) máxima(o) permisible en c_j que mantendría óptima la solución actual. Para los casos en que $u_j \leq d_j \leq v_j$, defina r_j igual a $\frac{d_j}{v_j}$ si d_j es positivo y $\frac{d_j}{u_j}$ si d_j es negativo. Por definición, $0 \leq r_j \leq 1$. La regla del 100% indica que una condición suficiente (pero no necesaria) para que la solución actual permanezca óptima es que $r_1 + r_2 + \dots + r_n \leq 1$. Si la condición no se satisface, la solución actual puede o no permanecer óptima. La regla no es aplicable si d_j cae fuera de los intervalos especificados.
- Demuestre que la regla de optimalidad del 100% es demasiado débil para ser consistentemente confiable como herramienta en la toma de decisiones, al aplicarla a los siguientes casos.
- (a) Los incisos (ii) y (iii) del problema 3-81.
 - (b) El inciso (b) del problema 3-87.
- 3-89.** Considere el problema 2-40 (capítulo 2). Use el precio dual para decidir si vale la pena incrementar los fondos para el año 4.²²
- 3-90.** Considere el problema 2-41 (capítulo 2).
- (a) Use los precios duales para determinar el rendimiento total sobre la inversión.
 - (b) Si quisiera gastar \$1000 en diversión al final del año 1, ¿cómo afectaría esto a la suma acumulada al inicio del año 5?
- 3-91.** Considere el problema 2-42 (capítulo 2).
- (a) Dé una interpretación económica a los precios duales del modelo.

²² Antes de responder los problemas 3-89 a 3-98, se espera que usted genere el reporte del análisis de sensibilidad usando AMPL, Solver o TORA.

- (b) Demuestre cómo el precio dual asociado con el límite superior del dinero prestado al inicio del tercer trimestre puede obtenerse a partir de los precios duales asociados con las ecuaciones de balance que representan el flujo de efectivo de entrada y de salida en las cinco fechas designadas del año.
- 3-92.** Considere el problema 2-43 (capítulo 2). Use los precios duales para determinar la tasa de rendimiento asociada con cada año.
- ***3-93.** Considere el problema 2-44 (capítulo 2). Use el precio dual para determinar si vale la pena que el ejecutivo invierta más dinero en los planes.
- 3-94.** Considere el problema 2-45 (capítulo 2). Use el precio dual para decidir si es aconsejable que el jugador apueste dinero adicional.
- 3-95.** Considere el problema 2-47 (capítulo 2). Relacione los precios duales con los costos de producción unitarios del modelo.
- 3-96.** Considere el problema 2-48 (capítulo 2). Suponga que cualquier capacidad adicional de las máquinas 1 y 2 puede obtenerse sólo si se utiliza tiempo extra. ¿Cuál es el costo máximo por hora en que la compañía estaría dispuesta a incurrir para cualquier máquina?
- ***3-97.** Considere el problema 2-49 (capítulo 2).
- (a) Suponga que el fabricante puede comprar unidades adicionales de la materia prima A a \$12 por unidad. ¿Sería aconsejable hacer esto?
- (b) ¿Recomendaría usted que el fabricante comprara más unidades de la materia prima B a \$5 por unidad?
- 3-98.** Considere el problema 2.76 (capítulo 2).
- (a) ¿Cuál de las restricciones especificadas impacta adversamente la solución óptima?
- (b) ¿Cuánto es lo máximo que la compañía debería pagar por tonelada de cada mineral?

CAPÍTULO 4

Dualidad y análisis postóptimo

4.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DUAL

El problema **dual** se define sistemáticamente a partir del modelo **primal** (u original) de PL. Los dos problemas están estrechamente relacionados *en el sentido de que la solución óptima de un problema proporciona automáticamente la solución óptima del otro*. Es así que, desde el punto de vista computacional, en algunos casos sería ventajoso determinar la solución primal mediante la solución del dual. Pero esa ventaja computacional es modesta si se compara con lo que ofrece la rica teoría primal-dual, como se demostrará a lo largo del presente libro.

En todos los textos que este autor conoce, el dual se define para varias formas del primal, según el sentido de la optimización (maximización o minimización), los tipos de restricciones (\leq , \geq o $=$) y el signo de las variables (no negativas o irrestrictas). No sólo existen demasiadas combinaciones que memorizar, sino que su uso puede requerir de un grado de reconciliación con los resultados del algoritmo simplex, principalmente porque el primal a partir del cual se construye el dual no está en el formato estándar que utiliza el algoritmo simplex (es decir, el primal a partir del cual se construye el dual puede tener lados derechos negativos en las restricciones).

En este libro se ofrece una definición única que abarca de manera automática *todas* las formas del primal. Nuestra definición del problema dual requiere expresar el problema primal en la *forma de ecuación* que se presentó en la sección 3.1, un formato que consiste en la tabla inicial simplex (todas las restricciones son ecuaciones con lado derecho no negativo, y todas las variables son no negativas). Por lo tanto, cualesquiera resultados obtenidos a partir de la solución óptima primal se aplican directamente al problema dual asociado.

A continuación, se presenta un resumen sobre cómo se construye el dual a partir del primal (en forma de ecuación):

1. Se asigna una variable dual a cada restricción (ecuación) primal, y una restricción dual, a cada variable primal.
2. El lado derecho de las restricciones primales proporciona los coeficientes de la función objetivo dual.

TABLA 4.1 Reglas para construir el problema dual

Objetivo del problema primal ^a	Problema dual		
	Objetivo	Tipo de restricciones ^b	Signo de las variables
Maximización	Minimización	\geq	Irrestringida
Minimización	Maximización	\leq	Irrestringida

^a Todas las restricciones primales son ecuaciones con lado derecho no negativo, y todas las variables son no negativas.

^b Un modo conveniente de recordar el tipo de restricción (\geq o \leq) en el dual es que, si el objetivo dual es una minimización que “apunta hacia abajo”, entonces, *todas* las restricciones son desigualdades (\geq) que “apuntan hacia arriba”. Se aplica lo contrario cuando el objetivo dual es de maximización.

3. La restricción dual correspondiente a una variable primal se construye mediante la transposición de la *columna* de la variable primal en una *fila*, donde (i) el coeficiente de la función objetivo primal se convierte en el lado derecho dual, y (ii) los coeficientes de restricciones faltantes (columnas) se convierten en los coeficientes del lado izquierdo dual (filas).
4. El sentido de la optimización, la dirección de las desigualdades y los signos de las variables en el dual se rigen por las reglas de la tabla 4.1.

Los siguientes ejemplos demuestran el uso de las reglas en la tabla 4.1 y, también, que nuestra definición incorpora de manera automática todas las formas del primal.

Ejemplo 4.1-1

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$ sujeto a $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$ sujeto a $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	y_1 y_2

Problema dual

$$\text{Minimizar } w = 10y_1 + 8y_2$$

sujeto a

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$2y_1 - y_2 \geq 12$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 + 0y_2 \geq 0 \\ y_1, y_2 \text{ irrestringidas} \end{array} \right\} \Rightarrow (y_1 \geq 0, y_2 \text{ irrestringida})$$

Ejemplo 4.1-2

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$ sujeto a $x_1 + 2x_2 \geq 3$ $2x_1 - 4x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$	Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4$ sujeto a $x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 3$ $2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 5$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	y_1 y_2

Problema dual

$$\text{Maximizar } w = 3y_1 + 5y_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\leq 15 \\ 2y_1 - 4y_2 &\leq 12 \\ -y_1 &\leq 0 \\ y_2 &\leq 0 \\ y_1, y_2 \text{ irrestictas} \end{aligned} \Rightarrow (y_1 \geq 0, y_2 \leq 0)$$

Ejemplo 4.1-3

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$ sujeto a $x_1 + 2x_2 = 5$ $-x_1 + 5x_2 \geq 3$ $4x_1 + 7x_2 \leq 8$ $x_1 \text{ irrestictas}, x_2 \geq 0$	Sustituir $x_1 = x_1^- - x_1^+$. Maximizar $z = 5x_1^- - 5x_1^+ + 6x_2$ sujeto a $x_1^- - x_1^+ + 2x_2 = 5$ $-x_1^- + x_1^+ + 5x_2 - x_3 = 3$ $4x_1^- - 4x_1^+ + 7x_2 + x_4 = 8$ $x_1^-, x_1^+, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	y_1 y_2 y_3

Problema dual

$$\text{Minimizar } z = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 + 4y_3 &\geq 5 \\ -y_1 + y_2 - 4y_3 &\geq -5 \\ 2y_1 + 5y_2 + 7y_3 &\geq 6 \\ -y_2 &\geq 0 \\ y_3 &\geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 \text{ irrestictas} \end{aligned} \Rightarrow (y_1 \text{ irresticta}, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0)$$

La primera y segunda restricciones se reemplazan por una ecuación. La regla general es que una variable primal irresticta siempre corresponde a una restricción dual de igualdad. De manera inversa, una ecuación primal de igualdad produce una variable dual irresticta, como lo demuestra la primera restricción primal.

TABLA 4.2 Reglas para construir el problema dual

Problema de maximización		Problema de minimización
Restricciones		Variables
\geq	\Leftrightarrow	≤ 0
\leq	\Leftrightarrow	≥ 0
$=$	\Leftrightarrow	Irrestric平as
Variables		Restricciones
≥ 0	\Leftrightarrow	\geq
≤ 0	\Leftrightarrow	\leq
Irrestric平as	\Leftrightarrow	$=$

Resumen de las reglas para construir el dual. En la tabla 4.2 se resumen las reglas del primal-dual como suelen presentarse en la literatura. Un buen ejercicio consiste en verificar que las dos reglas que se presentan en la tabla 4.1 abarquen estas reglas explícitas.

Observe que los encabezados de columna que aparecen en la tabla no utilizan la designación primal y dual. En este caso, lo que importa es el sentido de la optimización. Si el primal es de maximización, entonces el dual es de minimización, y viceversa. Observe también que no hay medidas específicas para incluir variables artificiales en el primal, debido a que las variables artificiales no cambiarían la definición del dual (vea el problema 4-5).

4.2 RELACIONES PRIMAL-DUAL

Los cambios realizados en los datos de un modelo de PL pueden afectar la optimalidad y/o la factibilidad de la solución óptima actual. Esta sección presenta varias relaciones primal-dual que pueden usarse para calcular de nuevo los elementos de la tabla simplex óptima. Estas relaciones constituyen la base de la interpretación económica del modelo de PL y del análisis postóptimo.

La sección inicia con un breve repaso de las matrices, una herramienta muy útil para realizar los cálculos en una tabla simplex.

4.2.1 Repaso de operaciones con matrices simples

La tabla simplex puede generarse por medio de tres operaciones de matrices elementales: (vector fila) \times (matriz), (matriz) \times (vector columna) y (escalar) \times (matriz). Por comodidad, aquí se resumen las operaciones. En primer lugar, se presentan algunas definiciones de matriz:

1. Una *matriz*, \mathbf{A} , de tamaño $(m \times n)$ es un arreglo rectangular de elementos con m filas y n columnas.
2. Un *vector fila*, \mathbf{V} , de tamaño m es una matriz $(1 \times m)$.
3. Un *vector columna*, \mathbf{P} , de tamaño n es una matriz $(n \times 1)$.

Estas definiciones se representan matemáticamente como

$$\mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_m), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

- (Vector fila \times matriz, \mathbf{VA}).** La operación es válida sólo si son iguales el tamaño del vector fila \mathbf{V} y el número de filas de \mathbf{A} . Por ejemplo,

$$(11, 22, 33) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \times 11 + 3 \times 22 + 5 \times 33, 2 \times 11 + 4 \times 22 + 6 \times 33) \\ = (242, 308)$$

- (Matriz \times vector columna, \mathbf{AP}).** La operación es válida sólo si son iguales el número de columnas de \mathbf{A} y el tamaño del vector columna \mathbf{P} . Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 11 + 3 \times 22 + 5 \times 33 \\ 2 \times 11 + 4 \times 22 + 6 \times 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 242 \\ 308 \end{pmatrix}$$

- (Escalar \times matriz, $\alpha\mathbf{A}$).** Dada la cantidad escalar α (o constante), la operación de multiplicación $\alpha\mathbf{A}$ da una matriz del mismo tamaño que la matriz \mathbf{A} . Por ejemplo, dada $\alpha = 10$,

$$(10) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

4.2.2 Diseño de la tabla simplex

La tabla simplex del capítulo 3 es la base para la presentación en este capítulo. En la figura 4.1 se representan esquemáticamente las tablas simplex *inicial* y *general*. En la tabla inicial, los coeficientes de restricción bajo las variables iniciales forman una **matriz identidad** (todos los elementos en la diagonal principal son 1, y todos los elementos fuera de la diagonal son cero). Con esa disposición, las iteraciones siguientes de la tabla simplex generadas por las operaciones de filas de Gauss-Jordan (vea el capítulo 3) modifican los elementos de la matriz identidad para producir lo que se conoce como **matriz inversa**. En el resto de este capítulo, se verá que la matriz inversa es la clave para calcular todos los elementos de la tabla simplex asociada.

Comentarios. La matriz inversa en la tabla *general* tiene sus raíces en las columnas de restricción de la tabla *inicial*. Esto significa que la inversa en cualquier iteración se calcula (desde cero) usando las columnas de restricción originales del problema de PL (como se demostrará en los comentarios que siguen al ejemplo 4.2-1). Se trata de una relación importante que se ha utilizado para controlar los errores de redondeo en los cálculos del algoritmo simplex.

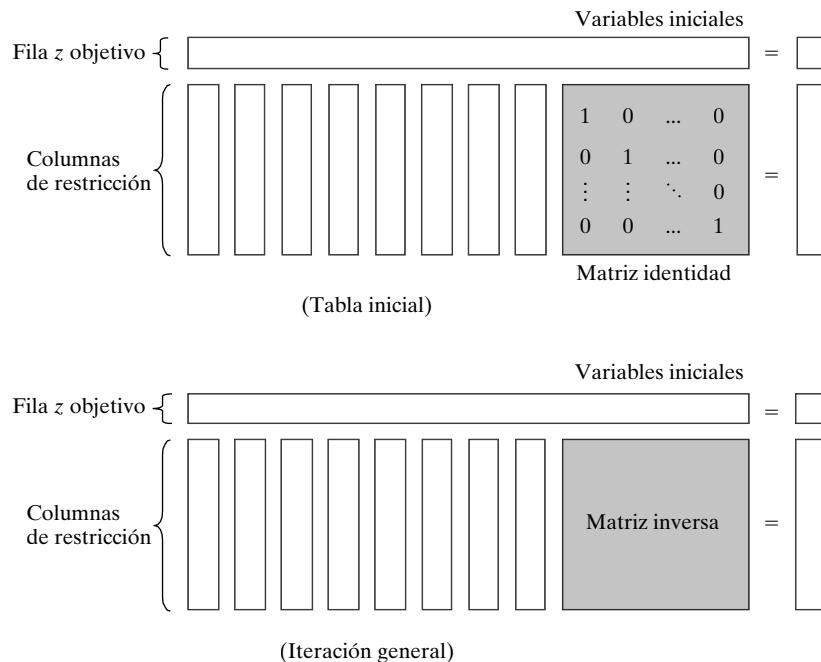


FIGURA 4.1

Representación esquemática de las tablas simplex inicial y general

4.2.3 Solución dual óptima

Las soluciones primal y dual están estrechamente relacionadas en el sentido de que la solución óptima de uno u otro problema da directamente la solución óptima al otro, como se explicará más adelante. Por consiguiente, en un modelo de PL donde el número de variables sea considerablemente menor que el número de restricciones, *pueden* ahorrarse cálculos resolviendo el dual porque la cantidad de cálculos asociados con la determinación de la matriz inversa se incrementa principalmente con el número de restricciones. Observe que la regla se refiere solamente a la cantidad de cálculos en *cada iteración*, pero no dice nada sobre el *número total de iteraciones* necesarias para resolver cada problema.

En esta sección se presentan dos métodos para determinar los valores duales.

Método 1.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Valor óptimo de} \\ \text{la variable dual } y_i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Coeficiente primal óptimo } z \text{ de la variable básica } \textit{initial } x_i \\ + \\ \text{Coeficiente objetivo } \textit{original} \text{ de } x_i \end{array} \right)$$

Método 2.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Valores óptimos de} \\ \text{las variables } \textit{duales} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Vector fila de los coeficientes} \\ \text{objetivo } \textit{originales} \text{ de las variables} \\ \text{básicas } \textit{principales} \text{ óptimas} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{Inversa } \textit{primal} \\ \text{óptima} \end{array} \right)$$

Los elementos del vector fila deben aparecer en el mismo orden en que aparecen las variables básicas en la columna Básicas de la tabla simplex.

Ejemplo 4.2-1

Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Con la finalidad de preparar el problema para su solución mediante el método simplex, se agrega una variable de holgura x_4 en la primera restricción, y una variable artificial R en la segunda. El primal resultante y los problemas duales asociados se definen como sigue:

Primal	Dual
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - MR$ sujeto a $\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + R & = & 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, R & \geq & 0 \end{array}$	Minimizar $w = 10y_1 + 8y_2$ sujeto a $\begin{array}{rcl} y_1 + 2y_2 & \geq & 5 \\ 2y_1 - y_2 & \geq & 12 \\ y_1 + 3y_2 & \geq & 4 \\ y_1 & \geq & 0 \\ y_2 & \geq & -M \quad (\Rightarrow y_2 \text{ irrestricta}) \end{array}$

En la tabla 4.3 se presenta la tabla primal óptima.

A continuación se demuestra cómo se determinan los valores duales óptimos aplicando los dos métodos descritos al inicio de esta sección.

Método 1. En la tabla 4.3, las variables primales iniciales x_4 y R corresponden de manera única a las variables duales y_1 y y_2 , respectivamente. Por lo tanto, la solución dual óptima se determina como sigue:

Variables básicas primales iniciales	x_4	R
Coeficientes de la ecuación z	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M$
Coeficiente objetivo original	0	$-M$
Variables duales	y_1	y_2
Valores duales óptimos	$\frac{29}{5} + 0 = \frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M + (-M) = -\frac{2}{5}$

Método 2. La matriz inversa óptima, resaltada en la tabla 4.3 bajo las variables iniciales x_4 y R , es

$$\text{Inversa óptima} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

TABLA 4.3 Tabla óptima del primal del ejemplo 4.2-1

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	R	Solución
z	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M$	$54\frac{4}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{5}$

El orden de las variables básicas primales óptimas en la columna Básicas es x_2 seguida por x_1 . Los elementos de los coeficientes objetivo originales para las dos variables deben aparecer en el mismo orden, a saber,

$$\begin{aligned} (\text{Coeficientes objetivo originales}) &= (\text{Coeficiente de } x_2, \text{ coeficiente de } x_1) \\ &= (12, 5) \end{aligned}$$

Los valores duales óptimos son

$$\begin{aligned} (y_1, y_2) &= \left(\begin{array}{l} \text{Coeficientes objetivo} \\ \text{originales de } x_2, x_1 \end{array} \right) \times (\text{Inversa óptima}) \\ &= (12, 5) \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{29}{5}, -\frac{2}{5} \right) \end{aligned}$$

Comentarios. Es necesario hacer una pausa aquí para demostrar la importante relación entre la *matriz inversa* en una tabla simplex y la *matriz básica* asociada, que se obtiene a partir de las columnas de restricción originales en la tabla inicial. Por ejemplo, en la tabla óptima, las variables básicas, *tomadas en orden*, son (x_2, x_1) . Por lo tanto, la matriz básica (óptima) asociada se obtiene a partir del problema original como

$$\begin{pmatrix} \text{Matriz} \\ \text{básica} \\ \text{óptima} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Columna de} & \text{Columna de} \\ \text{restricción} & \text{restricción} \\ \text{de } x_2 & \text{de } x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cuando se *invierte* esta matriz básica se obtiene la inversa en la tabla óptima. Es posible comprobar que esto es cierto porque la teoría de las matrices indica que el producto de la matriz básica y su inversa debe ser una matriz identidad, es decir,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación es válida para *cualquier* iteración simplex. Es importante destacar que las columnas de la matriz básica deben coincidir con el orden de las variables básicas en la tabla.

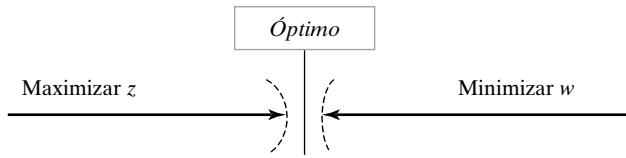


FIGURA 4.2

Relación entre z máxima y w mínima

Valores objetivo primales-duales. Para cualquier par de soluciones primales y duales factibles,

$$\left(\begin{array}{l} \text{Valor objetivo en el} \\ \text{problema de maximización} \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{l} \text{Valor objetivo en el} \\ \text{problema de minimización} \end{array} \right)$$

En el óptimo, la relación se mantiene como una ecuación estricta, lo cual significa que los dos valores objetivo son iguales. Observe que la relación no especifica cuál problema es el primal y cuál el dual. En este caso, tan sólo es importante el sentido de la optimización (maximización o minimización).

El óptimo no puede ocurrir con z estrictamente menor que w (es decir, $z < w$) porque, no importa qué tan cerca estén los dos valores, siempre hay la oportunidad de una mejora, lo que contradice la optimalidad como lo demuestra la figura 4.2.

Ejemplo 4.2-2

En el ejemplo 4.2-1 ($x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{8}{3}$) y ($y_1 = 6, y_2 = 0$) son soluciones primales y duales factibles (arbitrarias). Los valores asociados de las funciones objetivo son

$$\text{Maximización (primal): } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 5(0) + 12(0) + 4\left(\frac{8}{3}\right) = 10\frac{2}{3}$$

$$\text{Minimización (dual): } w = 10y_1 + 8y_2 = 10(6) + 8(0) = 60$$

Como $z < w$, las soluciones no son óptimas. El valor óptimo de z ($= 54\frac{4}{5}$) cae en el intervalo $(10\frac{2}{3}, 60)$.

4.2.4 Cálculos en la tabla simplex

En esta sección se muestra cómo es posible generar *cualquier iteración* de la tabla simplex a partir de los datos *originales* del problema, la *inversa* asociada con la iteración y el problema dual. Con el diseño de la tabla simplex que se muestra en la figura 4.1, los cálculos se pueden dividir en dos tipos:

1. Columnas de restricción (lados izquierdo y derecho).
2. Fila z objetivo.

Fórmula 1: Cálculos con la columna de restricción. En cualquier iteración simplex, una columna izquierda o derecha se calcula como sigue:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Columna de restricción} \\ \text{en la iteración } i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Inversa en} \\ \text{la iteración } i \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{l} \text{Columna de restricción} \\ \text{original} \end{array} \right)$$

Fórmula 2: Cálculos con la fila z objetivo. En cualquier iteración simplex, el coeficiente en la ecuación objetivo (costo reducido) de x_j se calcula como sigue:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Coeficiente de la variable } x_j \\ \text{en la ecuación } z \text{ primal} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Lado izquierdo de la} \\ j\text{-ésima restricción dual} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{Lado derecho de la} \\ j\text{-ésima restricción dual} \end{array} \right)$$

Ejemplo 4.2-3

Se utilizará el PL del ejemplo 4.2-1 para ilustrar la aplicación de las fórmulas 1 y 2. A partir de la tabla óptima que se muestra en la tabla 4.3, se tiene

$$\text{Inversa óptima} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{Columna } x_1 \text{ en la} \\ \text{iteración óptima} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{l} \text{Inversa en la} \\ \text{iteración óptima} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{l} \text{Columna } x_1 \\ \text{original} \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Con cálculos similares, es posible generar las columnas óptimas para x_2, x_3, x_4, R y el lado derecho (¡compruébelo!).

A continuación, se demuestra cómo se realizan los cálculos de la fila objetivo con la fórmula 2. Los valores óptimos de las variables duales $(y_1, y_2) = (\frac{29}{5}, -\frac{2}{5})$, se calcularon en el ejemplo 4.2-1. Estos valores se utilizan en la fórmula 2 para calcular todos los coeficientes z , como se ilustra aquí para x_1 y R .

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente } z \text{ de } x_1 &= y_1 + 2y_2 - 5 = \frac{29}{5} + 2 \times -\frac{2}{5} - 5 = 0 \\ \text{Coeficiente } z \text{ de } R &= y_2 - (-M) = -\frac{2}{5} - (-M) = -\frac{2}{5} + M \end{aligned}$$

Pueden usarse cálculos semejantes para determinar los coeficientes z de x_2, x_3 y x_4 (¡verifíquelo!).

Comentarios. El formato de la tabla simplex del capítulo 3 que genera la tabla actual a partir de la precedente es una receta segura para propagar el error de redondeo, lo que distorsiona en gran medida la calidad de la solución óptima. ¡Por fortuna, hay una salida! A partir de la explicación de las secciones 4.2.2 y 4.2.3 se observará que la *matriz inversa* de una iteración tiene *el* papel clave en la determinación de todos los elementos de la tabla simplex asociada (utilizando esta inversa y los datos *originales* del problema). De hecho, la inversa misma se determina a partir de los datos originales una vez que se conoce la solución básica, como se demuestra en los comentarios que siguen al ejemplo 4.2-1. Esto significa esencialmente que, en cualquier iteración, se pueden determinar *todos* los elementos de una tabla (incluida la matriz inversa) a partir de los datos originales del modelo. Se trata de un poderoso resultado que se ha utilizado para mantener bajo control el error de redondeo computacional. Y ésta es precisamente la razón primordial para el desarrollo del *método simplex revisado* que se presenta en el capítulo 7.

4.3 INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LA DUALIDAD

El problema de PL puede considerarse como un modelo de asignación de recursos que busca maximizar los ingresos con recursos limitados. Si el problema se observa desde este punto de vista, el problema dual asociado ofrece interpretaciones económicas interesantes.

Para formalizar el planteamiento, considere la siguiente representación de los problemas primal y dual:

Primal	Dual
Maximizar $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$	Minimizar $w = \sum_{i=1}^m b_i y_i$
sujeto a	sujeto a
$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j = 1, 2, \dots, n$
$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$	$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$

Si se aborda como un modelo de asignación de recursos, el problema primal consta de n actividades económicas y m recursos. El coeficiente c_j en el primal representa el ingreso por unidad de la actividad j , y el recurso i con disponibilidad b_i se consume a razón de a_{ij} unidades por unidad de la actividad j .

4.3.1 Interpretación económica de las variables duales

En la sección 4.2.3 se establece que, para cualquiera de las dos soluciones primal y dual *factibles*, los valores de las funciones objetivo, cuando son finitos, deben satisfacer la siguiente desigualdad:

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i = w$$

En el óptimo, los dos valores objetivo son iguales, es decir, $z = w$.

En términos del modelo de asignación de recursos, z representa \$ ingresos, y b_i representa unidades disponibles del recurso i . Por lo tanto, dimensionalmente, $z = w$ implica

$$\$ \text{ ingresos} = \sum_{i=1}^m b_i y_i = \sum_{i=1}^m (\text{unidades del recurso } i) \times (\$ \text{ por unidad del recurso } i)$$

lo cual significa que la variable dual, y_i , representa el **valor por unidad** del recurso i (la definición gráfica del **valor por unidad de un recurso** se expuso en la sección 3.6.1).

Como se estableció en la sección 3.6.1, el nombre estándar **precio dual** (o **precio sombra**) del recurso i reemplaza el nombre (sugestivo) *valor por unidad* usado en toda la literatura de PL y en los paquetes de software, de ahí que también en este libro se adoptó el nombre estándar.

Al utilizar el mismo análisis dimensional, se puede interpretar la desigualdad $z < w$ (para cualquiera de las dos soluciones factibles primal y dual) como

$$(\text{Ingreso}) < (\text{Valor de los recursos})$$

Esta relación expresa que en tanto el ingreso total de todas las actividades sea menor que el valor de los recursos, las soluciones primal y dual correspondientes no serán óptimas. La optimalidad se alcanza únicamente cuando los recursos se han explotado por completo. Esto puede suceder únicamente cuando la entrada (valor de los recursos) es igual a la salida (ingreso en dólares).

Ejemplo 4.3-1

El modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.1-1) y su dual se dan de la siguiente manera:

Primal de Reddy Mikks	Dual de Reddy Mikks
Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$	Minimizar $w = 24y_1 + 6y_2 + y_3 + 2y_4$
sujeto a	sujeto a
$6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (recurso 1, $M1$)	$6y_1 + y_2 - y_3 \geq 5$
$x_1 + 2x_2 \leq 6$ (recurso 2, $M2$)	$4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \geq 4$
$-x_1 + x_2 \leq 1$ (recurso 3, mercado)	$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$
$x_2 \leq 2$ (recurso 4, demanda)	
$x_1, x_2 \geq 0$	
Solución óptima: $x_1 = 3, x_2 = 1.5, z = 21$	Solución óptima: $y_1 = .75, y_2 = 0.5, y_3 = y_4 = 0, w = 21$

El modelo de Reddy Mikks trata de la producción de dos tipos de pintura (para interiores y para exteriores) con dos materias primas $M1$ y $M2$ (recursos 1 y 2) y sujetos a los límites del mercado y la demanda, representados por la tercera y cuarta restricciones. El modelo determina las cantidades (en toneladas/día) de pinturas para exteriores e interiores que maximizan el ingreso diario (expresado en miles de dólares).

La solución dual óptima muestra que el precio dual (valor por unidad) de la materia prima $M1$ (recurso 1) es $y_1 = .75$ (o \$750 por tonelada) y el de la materia prima $M2$ (recurso 2) es $y_2 = .5$ (o \$500 por tonelada). Esos resultados se mantienen ciertos en *intervalos de factibilidad* específicos como se mostró en la sección 3.6. Para los recursos 3 y 4, que representan los límites del mercado y de la demanda, ambos precios duales son cero, lo cual indica que sus recursos asociados son abundantes (es decir, no son críticos al determinar el óptimo y, por consiguiente, su valor por unidad, o precio dual, es cero).

4.3.2 Interpretación económica de las restricciones duales

El significado económico de las restricciones duales puede lograrse mediante el uso de la fórmula 2 de la sección 4.2.4, la cual establece que en cualquier iteración primal,

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente objetivo de } x_j &= \left(\begin{array}{l} \text{Lado izquierdo de la} \\ \text{restricción dual } j \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{Lado derecho de la} \\ \text{restricción dual } j \end{array} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - c_j \end{aligned}$$

Una vez más, se utiliza el análisis dimensional para interpretar esta ecuación. El ingreso por unidad, c_j , de la actividad j se da en dólares por unidad. De ahí que, por consistencia, la cantidad $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$ también debe estar en dólares por unidad. Después, como c_j representa el ingreso, la cantidad $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$, con signo opuesto, debe representar el costo. Por lo tanto, se tiene

$$\$ \text{ costo} = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = \sum_{i=1}^m \left(\begin{array}{l} \text{Utilización del recurso } i \\ \text{por unidad de la actividad } j \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{l} \text{Costo por unidad} \\ \text{del recurso } i \end{array} \right)$$

La conclusión es que la variable dual y_i representa lo que en la literatura de PL se conoce como **costo imputado** por unidad del recurso i , y que se puede considerar la cantidad $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$ como el costo imputado de todos los recursos necesarios para producir una unidad de la actividad j . Como se indica en la sección 3.6, la cantidad $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - c_j$ ($=$ costo imputado de la actividad $j - c_j$) se conoce con el nombre estándar de **costo reducido** de la actividad j . La condición de optimalidad

para la maximización en el método simplex plantea que un incremento en el nivel de una actividad j no utilizada (no básica) mejoraría el ingreso, sólo si su *costo reducido* es negativo. En términos de la interpretación anterior, esta condición establece que

$$\left(\begin{array}{l} \text{Costo imputado de recursos} \\ \text{utilizados por una unidad} \\ \text{de la actividad } j \end{array} \right) < \left(\begin{array}{l} \text{Ingreso por unidad} \\ \text{de la actividad } j \end{array} \right)$$

Así, la condición de optimalidad para la maximización indica que es económico ventajoso incrementar el nivel de una actividad, si su ingreso unitario excede su costo unitario imputado.

Ejemplo 4.3-2

TOYCO ensambla tres tipos de juguetes: trenes, camiones y automóviles, mediante la ejecución de tres operaciones. Los tiempos de ensamble disponibles para las tres operaciones son 430, 460 y 420 minutos por día, y los ingresos por tren, camión y automóvil de juguete son \$3, \$2 y \$5, respectivamente. Los tiempos de ensamble por tren para las tres operaciones son 1, 3 y 1 minutos, respectivamente. Los tiempos correspondientes por camión y por automóvil son (2, 0, 4) y (1, 2, 0) minutos (un tiempo cero indica que la operación no se utiliza).

Si x_1, x_2 y x_3 son las cantidades diarias de unidades ensambladas de trenes, camiones y automóviles, el modelo de PL asociado y su dual se dan como sigue:

Primal de TOYCO	Dual de TOYCO
Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$	Minimizar $w = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$
sujeto a	sujeto a
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$ (Operación 1)	$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$
$3x_1 + 2x_3 \leq 460$ (Operación 2)	$2y_1 + 4y_3 \geq 2$
$x_1 + 4x_2 \leq 420$ (Operación 3)	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
Solución óptima:	Solución óptima:
$x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230, z = \1350	$y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0, w = \1350

La solución óptima primal implica la producción de 100 camiones, 230 automóviles y ningún tren de juguete.

Suponga que a TOYCO también le interesa producir trenes de juguete (x_1). ¿Cómo se obtiene esto? Al observar el *costo reducido* de x_1 , un tren de juguete se vuelve económico atractivo tan sólo si su costo unitario imputado es estrictamente menor que su ingreso unitario. TOYCO puede lograrlo si incrementa el precio unitario. También puede reducir el costo imputado de los recursos consumidos ($= y_1 + 3y_2 + y_3$).

Una reducción en el costo unitario imputado lleva a reducir los tiempos de ensamble utilizados por un tren de juguete en las tres operaciones. Sean r_1, r_2 y r_3 las relaciones de las reducciones en las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente. La meta es determinar los valores de r_1, r_2 y r_3 que el nuevo costo imputado por tren sea menor que su ingreso unitario, es decir,

$$\begin{aligned} 1(1 - r_1)y_1 + 3(1 - r_2)y_2 + 1(1 - r_3)y_3 &< 3 \\ 0 \leq r_1 \leq 1, 0 \leq r_2 \leq 1, 0 \leq r_3 \leq 1 \end{aligned}$$

Para los valores duales óptimos, $y_1 = 1, y_2 = 2$ y $y_3 = 0$, esta desigualdad se reduce a

$$r_1 + 6r_2 > 4, 0 \leq r_1 \leq 1, 0 \leq r_2 \leq 1$$

Cualesquier valores de r_1 y r_2 que cumplan con estas condiciones harán que los trenes sean rentables. Observe, sin embargo, que quizás esta meta no sea alcanzable porque requiere grandes reducciones en los tiempos de las operaciones 1 y 2 que no parecen ser prácticas. Por ejemplo, incluso una reducción de 50% (es decir,

$r_1 = r_2 = .5$) no satisface la condición dada. Entonces la conclusión lógica es que TOYCO no debería producir trenes de juguete, a menos que las reducciones del tiempo vayan acompañadas de un incremento en el ingreso unitario.

4.4 ALGORITMOS SIMPLEX ADICIONALES

En el capítulo 3 se presenta el algoritmo simplex (primal) que inicia siendo factible y continúa siéndolo hasta que se alcanza el óptimo. En esta sección se presentan otros dos algoritmos, el **simplex dual** que inicia como *no factible* (pero mejor que óptimo) y así permanece hasta que se restaura la factibilidad; y el **simplex generalizado** (creado por el autor de este libro), que combina los métodos simplex primal y dual, los cuales inician sin ser óptimos ni factibles. En los tres algoritmos se utiliza el análisis postóptimo de la sección 4.5.

4.4.1 Algoritmo simplex dual

El método simplex dual inicia con una solución mejor que óptima y una solución básica no factible. Las condiciones de optimalidad y factibilidad están diseñadas para preservar la optimalidad de las soluciones básicas, a medida que la solución se mueve hacia la factibilidad.

Condición dual de factibilidad. La variable de salida, x_r , es la variable básica que tiene el valor más negativo (los empates se rompen de forma arbitraria). Si todas las variables básicas son no negativas, el algoritmo termina.¹

Condición dual de optimalidad. Dado que x_r es la variable de salida, sea \bar{c}_j el costo reducido de la variable no básica x_j , y α_{rj} el coeficiente de restricción en la fila x_r y en la columna x_j de la tabla. La variable de entrada es la variable no básica con $\alpha_{rj} < 0$ que corresponde a

$$\min_{x_j \text{ no básica}} \left\{ \left| \frac{\bar{c}_j}{\alpha_{rj}} \right|, \alpha_{rj} < 0 \right\}$$

(Los empates se rompen en forma arbitraria). Si $\alpha_{rj} \geq 0$ para todas las x_j no básicas, el problema no tiene una solución factible.

Para iniciar el PL óptimo y no factible, se tiene que cumplir con dos requisitos:

1. La función objetivo debe satisfacer la condición de optimalidad del método simplex regular (capítulo 3).
2. Todas las restricciones deben ser del tipo (\leq).

Las desigualdades del tipo (\geq) se convierten en (\leq) multiplicando ambos lados de la desigualdad por -1 . Si el PL incluye restricciones ($=$), la ecuación se puede reemplazar por dos desigualdades.

¹ Como se explicó en la sección 3.7, otra condición de factibilidad, conocida como el borde más inclinado, ha mejorado tanto la eficiencia de cálculo del algoritmo simplex dual, que ahora es el algoritmo dominante (basado en simplex) para resolver PL en todos los códigos comerciales.

Por ejemplo, $x_1 + x_2 = 1$ equivale a $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 + x_2 \geq 1$ o $x_1 + x_2 \leq 1$, $-x_1 - x_2 \leq -1$. La solución inicial es no factible si, al menos, es negativo uno de los lados derechos de las desigualdades.

Ejemplo 4.4-1

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$$

$$-3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

En este ejemplo, las primeras dos desigualdades se multiplican por -1 para convertirlas en restricciones (\leq). Por lo tanto, la tabla inicial se da como sigue:

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	-3	-2	-1	0	0	0	0
x_4	-3	-1	-1	1	0	0	-3
x_5	3	-3	-1	0	1	0	-6
x_6	1	1	1	0	0	1	3

La tabla es óptima porque todos los costos reducidos en la fila z son ≤ 0 ($\bar{c}_1 = -3$, $\bar{c}_2 = -2$, $\bar{c}_3 = -1$, $\bar{c}_4 = 0$, $\bar{c}_5 = 0$, $\bar{c}_6 = 0$). También es no factible porque, al menos, una de las variables básicas es negativa ($x_4 = -3$, $x_5 = -6$, $x_6 = 3$).

De acuerdo con la condición dual de factibilidad, x_5 ($= -6$) es la variable de salida. La siguiente tabla muestra cómo se utiliza la condición dual de optimalidad para determinar la variable de entrada.

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
Variable no básica	x_1	x_2	x_3
Fila z (\bar{c}_j)	-3	-2	-1
Fila x_5 , α_{4j}	3	-3	-1
Relación, $\left \frac{\bar{c}_j}{\alpha_{sj}} \right , \alpha_{sj} < 0$	—	$\frac{2}{3}$	1

Las relaciones muestran que x_2 es la variable de entrada.

La siguiente tabla se obtiene al utilizar las operaciones de filas ya conocidas, de donde se obtiene

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	-5	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	4
x_4	-4	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1
x_2	-1	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_6	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	1
Razón	$\frac{5}{4}$	—	$\frac{1}{2}$	—	2	—	

La tabla anterior muestra que x_4 sale y x_3 entra, con lo que se obtiene la siguiente tabla, que es tanto óptima como factible.

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	-3	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{2}$
x_3	6	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_2	-3	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_6	-2	0	0	1	0	1	0

Observe cómo funciona el simplex dual. En todas las iteraciones, se mantiene la optimalidad (todos los costos reducidos son ≤ 0) ya que cada nueva iteración mueve la solución hacia la factibilidad. En la iteración 3, la factibilidad se restaura por primera vez, y el proceso termina con la solución factible óptima dada como $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$ y $z = \frac{9}{2}$.

Momento de TORA

TORA incluye un módulo tutorial para el método simplex dual. En el menú **SOLVE/MODIFY** seleccione **Solve** \Rightarrow **Algebraic** \Rightarrow **Iterations** \Rightarrow **Dual Simplex**. Recuerde que es necesario convertir las restricciones ($=$) en desigualdades; no se requiere convertir las restricciones (\geq) porque TORA hará la conversión de manera interna.

4.4.2 Algoritmo simplex generalizado

El algoritmo simplex (primal) del capítulo 3 inicia factible pero no óptimo. El simplex dual (sección 4.4.1) inicia mejor que óptimo y no factible. ¿Qué pasa si un modelo de PL inicia no óptimo y no factible al mismo tiempo? Desde luego, se pueden utilizar variables y restricciones artificiales para asegurar una solución inicial. Pero esto no es necesario porque la idea clave de los métodos simplex primal y dual es que la solución factible óptima, cuando es finita, siempre ocurre en un punto de esquina o vértice (o una solución básica). Esto sugiere que es posible desarrollar un nuevo algoritmo simplex (creado por el autor de este libro) basado en el uso sucesivo de los métodos simplex dual y simplex primal. Primero se utiliza el algoritmo dual para deshacerse de la no factibilidad (sin preocuparse de la optimalidad). Una vez restaurada la factibilidad, puede usarse el simplex primal para hallar el óptimo. Como alternativa, se aplica primero el simplex primal para asegurar la optimalidad (sin preocuparse de la factibilidad) y, luego, se utiliza el simplex dual para buscar la factibilidad.

Ejemplo 4.4-2

Considere el modelo de PL para maximización del problema 4-38(a), que se repite aquí por conveniencia.

$$\text{Maximizar } z = 2x_3$$

sujeto a

$$-x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 8$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

El siguiente formato de tabla para el problema muestra que la solución básica inicial (x_4, x_5, x_6) es, al mismo tiempo, no óptima (debido a la variable x_3 no básica) y no factible (debido a la variable básica x_4).

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	0	0	-2	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	-8
x_5	-1	1	1	0	1	0	4
x_6	2	-1	4	0	0	1	10

Es posible resolver el problema sin el uso de variables o restricciones artificiales, asegurando primero la factibilidad al aplicar el simplex dual y buscando, luego, la optimalidad mediante el simplex primal. El simplex dual selecciona a x_4 como la variable de salida. La variable de entrada puede ser *cualquier* variable no básica con un coeficiente de restricción negativo en la fila x_4 (recuerde que, si no existe un coeficiente de restricción negativo, el problema no tiene solución factible). En este ejemplo, x_2 tiene un coeficiente negativo en la fila x_4 y se le selecciona como la variable de entrada. Por lo tanto, la siguiente tabla se calcula como

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	0	0	-2	0	0	0	0
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	4
x_5	$-\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{1}{2}$	1	0	0
x_6	$\frac{3}{2}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	1	14

La nueva solución ahora es factible pero no óptima y se puede utilizar el simplex primal para determinar la solución óptima. En general, si no se hubiera restaurado la factibilidad en la tabla anterior, se repetiría el procedimiento según se necesitara, hasta satisfacer la factibilidad o hasta que hubiera evidencia de que el problema no tiene una solución factible.

Comentarios. La esencia del método simplex generalizado del ejemplo 4.4-2 es que el algoritmo simplex no es rígido. La literatura presenta casos abundantes de variaciones del método simplex (por ejemplo, el método primal-dual, el método entrecruzado y el método multiplex), que dan la impresión de que cada procedimiento es diferente, cuando, en realidad, todos buscan una solución de punto de esquina, con una tendencia hacia los cálculos automáticos y, quizás, eficiencia computacional.

4.5 ANÁLISIS POSTÓPTIMO

En la sección 3.6 se abordó la sensibilidad de la solución óptima al determinar los intervalos de los diferentes parámetros de PL que mantendrían sin cambios las variables básicas óptimas. En esta sección se verán los cambios de los parámetros del modelo y la determinación de la nueva solución óptima. Por ejemplo, considere un caso en la industria avícola, donde comúnmente se utiliza un modelo de PL para determinar la mezcla de alimentos óptima por pollo (vea el ejemplo 2.2-2). El consumo semanal por pollo varía de .26 lb (120 gramos) para un pollo de una semana de nacido hasta 2.1 lb (950 gramos) para uno de ocho semanas de edad. Además, el costo de los ingredientes en la mezcla puede cambiar periódicamente. Estos cambios requieren un nuevo cálculo periódico de la solución óptima. El *análisis postóptimo* determina la nueva solución de una manera eficiente. Los nuevos cálculos tienen su base en el uso de las relaciones duales y primales-duales dadas en la sección 4.2.

En la siguiente tabla se listan los casos que pueden surgir en el análisis postóptimo y las acciones necesarias para obtener la nueva solución (suponiendo que existe una):

Condiciones después de que cambian los parámetros	Acción recomendada
La solución actual permanece óptima y factible.	No es necesaria ninguna otra acción.
La solución actual se vuelve no factible.	Use el simplex dual para recuperar factibilidad.
La solución actual se vuelve no óptima.	Use el simplex primal para recuperar optimalidad.
La solución actual se vuelve no óptima y no factible al mismo tiempo.	Use el método simplex generalizado para recuperar optimalidad y factibilidad.

En esta sección se investigan los primeros tres casos. El cuarto caso, por ser una combinación de los casos 2 y 3, se trata en el problema 4-47.

Se utilizará el modelo de TOYCO del ejemplo 4.3-2 para explicar los diferentes procedimientos. Recuerde que el problema tiene que ver con el ensamble de tres tipos de juguetes: trenes, camiones y automóviles. En el ensamble intervienen tres operaciones. El modelo y su dual se repiten aquí por conveniencia.

Primal de TOYCO	Dual de TOYCO
Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$	Minimizar $z = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$
sujeto a	sujeto a
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$ (Operación 1)	$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$
$3x_1 + 2x_3 \leq 460$ (Operación 2)	$2y_1 + 4y_3 \geq 2$
$x_1 + 4x_2 \leq 420$ (Operación 3)	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
Solución óptima:	Solución óptima:
$x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230, z = \1350	$y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0, w = \1350

La tabla óptima asociada para el primal se da como

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
Z	4	0	0	1	2	0	1,350
X_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
X_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
X_6	2	0	0	-2	1	1	20

4.5.1 Cambios que afectan la factibilidad

La factibilidad de la solución óptima actual se ve afectada sólo si cambia el lado derecho de las restricciones, o se agrega una nueva restricción al modelo. En ambos casos, la no factibilidad ocurre cuando se vuelven negativas una o más de las variables básicas actuales.

Cambios en el lado derecho. Este cambio requiere volver a calcular el lado derecho de la tabla aplicando la fórmula 1 de la sección 4.2.4:

$$\begin{pmatrix} \text{Nuevo lado derecho de} \\ \text{la tabla en la iteración } i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Inversa en la} \\ \text{iteración } i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{Nuevo lado derecho} \\ \text{de las restricciones} \end{pmatrix}$$

Recuerde que el lado derecho de la tabla muestra los valores de las variables básicas.

Ejemplo 4.5-1

Situación 1. Suponga que TOYCO incrementa la capacidad diaria de las operaciones 1, 2 y 3 a 600, 640 y 590 minutos, respectivamente. ¿Cómo afectaría este cambio al ingreso total?

Con estos incrementos, el único cambio que tendrá lugar en la tabla óptima es el lado derecho de las restricciones (y el valor objetivo óptimo). Así, la nueva solución básica se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 640 \\ 590 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 320 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, las variables básicas actuales, x_2 , x_3 y x_6 , permanecen factibles con los nuevos valores de 140, 320 y 30 unidades, respectivamente. El ingreso óptimo asociado es de \$1880.

Situación 2. Aunque la nueva solución es atractiva desde el punto de vista del incremento en el ingreso, TOYCO reconoce que su nueva implementación quizás lleve tiempo. Otra propuesta cambia la capacidad de la operación 3 ($x_6 = 20$ minutos) a la capacidad de la operación 1. ¿Cómo impactaría este cambio la solución óptima?

La mezcla de capacidades de las tres operaciones cambia a 450, 460 y 400 minutos, respectivamente. La solución resultante es

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 450 \\ 460 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 230 \\ -40 \end{pmatrix}$$

La solución resultante es no factible porque $x_6 = -40$, la cual requiere aplicar el método simplex dual para recuperar la factibilidad. Primero, se modifica el lado derecho de la tabla, como se muestra mediante la columna sombreada. Observe que el valor asociado de $z = 3 \times 0 + 2 \times 110 + 5 \times 230 = \1370 .

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	1370
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	110
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	-40

Si se utiliza el simplex dual, x_6 sale y x_4 entra, lo que da la siguiente tabla factible óptima (en general, el simplex dual puede requerir más de una iteración para recuperar la factibilidad).

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	5	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1350
x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_4	-1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	20

La solución óptima (en función de x_1, x_2 y x_3) permanece igual que en el modelo original. Lo anterior quiere decir que el cambio propuesto para la asignación de la capacidad no es ventajoso, ya que simplemente cambia la capacidad excedente de la operación 3 a una capacidad excedente en la operación 1. Entonces, la conclusión es que la operación 2 es el cuello de botella, y que puede ser ventajoso cambiar el excedente a la operación 2 (vea el problema 4-42).

Adición de una nueva restricción. La adición de una nueva restricción nunca puede mejorar el valor objetivo óptimo actual. Si la nueva restricción es redundante, no afectará la solución actual. Asimismo, la solución actual no satisface la nueva restricción, y debe determinarse una nueva solución mediante el método simplex dual.

Ejemplo 4.5-2

Situación 1. Suponga que TOYCO va a cambiar el diseño de sus juguetes y que el cambio requerirá agregar una cuarta operación de ensamble. La capacidad diaria de la nueva operación es de 500 minutos y los tiempos por unidad de los tres productos en esta operación son 3, 1 y 1 minutos, respectivamente.

La nueva restricción para la operación 4 es

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$$

Esta restricción es redundante porque la satisface la solución óptima actual $x_1 = 0, x_2 = 100$ y $x_3 = 230$. Por consiguiente, no cambia la solución óptima actual.

Situación 2. Suponga, en cambio, que los tiempos de TOYCO por unidad en la cuarta operación se cambian a 3, 3 y 1 minutos, respectivamente. Los datos restantes del modelo no cambian.

La nueva restricción para la operación 4 es

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 500$$

La solución óptima actual no satisface esta restricción; a saber, para $x_1 = 0, x_2 = 100$ y $x_3 = 230$,

$$x_7 = 500 - (3 \times 0 + 3 \times 100 + 1 \times 230) = -30$$

lo cual significa que la nueva restricción *no* es redundante. Sin embargo, lo anterior no es una buena noticia porque indica que la restricción adicional empeorará el valor objetivo óptimo (recuerde el argumento intuitivo de que las restricciones adicionales nunca pueden mejorar el valor objetivo óptimo). No obstante, para obtener

la nueva solución sin tener que resolver de nuevo el problema por completo, la restricción se agrega a la tabla óptima actual como sigue (x_7 es una variable de holgura):

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Solución
z	4	0	0	1	2	0	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	0	20
x_7	3	3	1	0	0	0	1	500

Esto significa que $x_7 = 500$ no es consistente con los valores de x_1 , x_2 y x_3 en el resto de la tabla. Para lograr la consistencia, la fila x_7 debe estar “condicionada” a realizar las siguientes operaciones de fila:

$$\text{Nueva fila } x_7 = \text{Fila anterior } x_7 - [3 \times (\text{fila } x_2) + 1 \times (\text{fila } x_3)]$$

Estas operaciones son las mismas que se usaron en el método M (sección 3.4.1) para anular los coeficientes de las variables artificiales en la función objetivo y son exactamente equivalentes a usar las sustituciones

$$\begin{aligned}x_2 &= 100 - (-\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5) \\x_3 &= 230 - (\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5)\end{aligned}$$

Por ende, la nueva tabla (consistente) es

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Solución
z	4	0	0	1	2	0	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	0	20
x_7	$\frac{9}{4}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	-30

La aplicación del método simplex dual producirá la nueva solución óptima $x_1 = 0$, $x_2 = 90$, $x_3 = 230$ y $z = \$1330$ (¡verifíquelo!). La solución muestra que no es recomendable agregar la restricción no redundante de la operación 4 porque, como era de esperarse, reduce los ingresos de \$1350 a \$1330.

4.5.2 Cambios que afectan la optimalidad

En esta sección se considera la realización de cambios de los coeficientes objetivos y la adición de una nueva actividad económica (variable).

Cambios en los coeficientes de la función objetivo. Estos cambios afectan sólo la optimalidad de la solución y requieren calcular de nuevo los coeficientes de la fila z (costos reducidos), según el procedimiento siguiente:

1. Calcule los valores duales aplicando el método 2, sección 4.2.3.
2. Sustituya los nuevos valores duales en la fórmula 2, sección 4.2.4, para determinar los nuevos costos reducidos (coeficientes de la fila z).

Si la nueva fila z satisface la condición de optimalidad, la solución no cambia (sin embargo, el valor objetivo óptimo puede cambiar). Si no la satisface, se utiliza el simplex primal para recuperar la optimalidad.

Ejemplo 4.5-3

Situación 1. En el modelo de TOYCO, suponga que la compañía va a instituir una nueva política de fijación de precios para enfrentar a la competencia. Los nuevos ingresos unitarios son \$2, \$3 y \$4 por los trenes, camiones y automóviles de juguete, respectivamente.

La nueva función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

Así,

$$(\text{Nuevos coeficientes objetivo de las variables básicas } x_2, x_3 \text{ y } x_6) = (3, 4, 0)$$

Si se utiliza el método 2, sección 4.2.3, las nuevas variables duales se calculan como

$$(y_1, y_2, y_3) = (3, 4, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0 \right)$$

Los coeficientes de la fila z se determinan como la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de las restricciones duales (fórmula 2, sección 4.2.4). No es necesario calcular de nuevo los coeficientes de la fila objetivo de las variables básicas (x_2, x_3 y x_6) porque siempre son cero, independientemente de cualquier cambio realizado en los coeficientes objetivo (¡verifíquelo!).

$$(\text{Costo reducido de } x_1) = y_1 + 3y_2 + y_3 - 2 = \frac{3}{2} + 3\left(\frac{5}{4}\right) + 0 - 2 = \frac{13}{4}$$

$$(\text{Costo reducido de } x_4) = y_1 - 0 = \frac{3}{2}$$

$$(\text{Costo reducido de } x_5) = y_2 - 0 = \frac{5}{4}$$

Observe que el lado derecho de la primera restricción dual es 2, el *nuevo* coeficiente en la función objetivo modificada.

Los cálculos demuestran que la solución actual, $x_1 = 0$ trenes, $x_2 = 100$ camiones y $x_3 = 230$ automóviles, permanece óptima. El nuevo ingreso correspondiente se calcula como $2 \times 0 + 3 \times 100 + 4 \times 230 = \1220 . No se recomienda la nueva política de fijación de precios porque reduce el ingreso.

Situación 2. Suponga ahora que la función objetivo de TOYCO se cambia a

$$\text{Maximizar } z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

¿Cambiará la solución óptima?

Se tiene

$$(y_1, y_2, y_3) = (3, 4, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0 \right)$$

$$(\text{Costo reducido de } x_1) = y_1 + 3y_2 + y_3 - 6 = \frac{3}{2} + 3\left(\frac{5}{4}\right) + 0 - 6 = -\frac{3}{4}$$

$$(\text{Costo reducido de } x_4) = y_1 - 0 = \frac{3}{2}$$

$$(\text{Costo reducido de } x_5) = y_2 - 0 = \frac{5}{4}$$

El nuevo costo reducido de x_1 muestra que la solución actual no es óptima.

Para determinar la nueva solución, la fila z se cambia de la manera resaltada en la siguiente tabla:

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	$-\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	1220
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	20

Los elementos resaltados son los nuevos costos reducidos y el nuevo valor objetivo. Todos los demás elementos son los mismos que aparecen en la tabla óptima original. Entonces, la nueva solución óptima se determina mediante la entrada de x_1 y la salida de x_6 , de donde se obtiene la solución $x_1 = 10$, $x_2 = 102.5$, $x_3 = 215$ y $z = \$1227.50$ (¡verifíquelo!). Aunque la nueva solución recomienda la producción de los tres juguetes, el ingreso óptimo es menor que cuando se fabricaban sólo dos juguetes.

Adición de una nueva actividad. Una nueva actividad supone agregar una nueva variable al modelo. Por intuición, la adición de una nueva actividad es deseable únicamente si es rentable. Esta condición puede verificarse aplicando la fórmula 2, sección 4.2.4, para calcular el costo reducido de la nueva variable. La nueva actividad no es rentable si satisface la condición de optimalidad.

Ejemplo 4.5-4

TOYCO reconoce que, en la actualidad, los trenes de juguete no se están produciendo porque no son rentables. La compañía desea reemplazarlos con un nuevo producto, un camión de bomberos de juguete, que se ensamblará en las instalaciones existentes. TOYCO estima que el ingreso por camión de bomberos de juguete será de \$4, y que los tiempos de ensamble por unidad serán de 1 minuto en cada una de las operaciones 1 y 2, y de 2 minutos en la operación 3.

Sea x_7 el nuevo producto de camión de bomberos. Dado que $(y_1, y_2, y_3) = (1, 2, 0)$ son los valores duales óptimos, se obtiene

$$(\text{Costo reducido de } x_7) = 1y_1 + 1y_2 + 2y_3 - 4 = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 0 - 4 = -1$$

El resultado muestra que es rentable incluir x_7 en la solución básica óptima. Para obtener el nuevo óptimo, primero se calcula su columna de restricción aplicando la fórmula 1, sección 4.2.4, como

$$\text{Costo reducido de } x_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

De este modo, la tabla simplex actual debe modificarse como sigue²

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_7	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	-1	1	2	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	1	-2	1	1	20

² Como observación complementaria, la variable x_1 se puede eliminar de la tabla adjunta, lo cual reduce el tamaño de la tabla y, por lo tanto, la cantidad de cálculos asociada.

El nuevo óptimo se determina al hacer que x_7 entre en la solución básica, en cuyo caso x_6 debe salir. La nueva solución es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 125$, $x_7 = 210$ y $z = \$1465$ (¡verifíquelo!), lo que mejora los ingresos en \$115.

Comentarios. El corazón de los cálculos postóptimos es la *matriz inversa* de la tabla óptima, lo cual significa que para que las matemáticas funcionen correctamente, el análisis de sensibilidad postóptimo no puede incluir cambios en los datos del problema original que afecten la matriz inversa (recuerde en las secciones 4.2.2 y 4.2.3 que la inversa se calcula a partir de la *matriz básica* compuesta de las columnas de restricción del problema *original*). Por consiguiente, aunque el análisis postóptimo en este capítulo es más amplio que la presentación dada en las secciones 3.6.2 y 3.6.3, en el sentido de que permite cambios simultáneos tanto en la función objetivo como en las restricciones, aún tiene la deficiencia de no permitir cambios en las columnas de restricción de las variables básicas. Y aquí reside un problema típico donde las matemáticas no son suficientemente sensibles a las necesidades prácticas; es decir, en un sentido práctico, no es posible usar la excusa técnica de que los cambios no pueden hacerse ¡“porque la variable asociada es básica”! Por el contrario, los cambios deben probarse de una manera diferente y, como se indica en el capítulo 3, una alternativa viable en este caso consiste en volver a analizar por completo el escenario de PL propuesto.

BIBLIOGRAFÍA

- Bazaraa, M., J. Jarvis y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.
 Bradley, S., A. Hax y T. Magnanti, *Applied Mathematical Programming*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1977.
 Diwckar, U., *Introduction to Applied Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.
 Nering, E. y A. Tucker, *Linear Programming and Related Problems*, Academic Press, Boston, 1992.
 Vanderbei, R., *Linear Programming: Foundation and Extensions*, 3a. ed., Springer, Nueva York, 2008.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados	Sección	Problemas asignados
4.1	4-1 a 4-6	4.3.2	4-31 a 4-34
4.2.1	4-7 a 4-7	4.4.1	4-35 a 4-39
4.2.2	4-8 a 4-9	4.4.2	4-40 a 4-41
4.2.3	4-10 a 4-18	4.5.1	4-42 a 4-49
4.2.4	4-19 a 4-27	4.5.2	4-50 a 4-56
4.3.1	4-28 a 4-30		

- 4-1.** En el ejemplo 4.1-1, obtenga el problema dual asociado si el sentido de la optimización en el problema primal se cambia a minimización.
- *4-2.** En el ejemplo 4.1-2, obtenga el problema dual asociado dado que al problema primal se le agrega una tercera restricción, $3x_1 + x_2 = 4$.
- 4-3.** En el ejemplo 4.1-3, demuestre que, aunque el sentido de la optimización en el primal se cambie a minimización, una variable primal irrestricta siempre corresponde a una restricción dual de igualdad.

4-4. Escriba el dual para cada uno de los siguientes problemas primales:

- (a) Maximizar $z = -5x_1 + 2x_2$
sujeto a

$$-x_1 + x_2 \leq -2$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- (b) Minimizar $z = 6x_1 + 3x_2$
sujeto a

$$6x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- *(c) Maximizar $z = x_1 + x_2$
sujeto a

$$2x_1 + x_2 = 5$$

$$3x_1 - x_2 = 6$$

$$x_1, x_2 \text{ irrestricta}$$

***4-5.** Considere el ejemplo 4.1-1. La aplicación del método simplex al primal requiere utilizar una variable artificial en la segunda restricción del primal estándar, para asegurar una solución básica inicial. Demuestre que la presencia de un primal artificial en forma de ecuación no afecta la definición del dual porque conduce a una restricción dual redundante.

4-6. ¿Verdadero o falso?

- (a) El dual del problema dual resulta en el primal original.
- (b) Si la restricción primal está originalmente en forma de ecuación, la variable dual correspondiente es necesariamente irrestricta.
- (c) Si la restricción primal es del tipo \leq , la variable dual correspondiente será no negativa (no positiva), si la función objetivo primal es de maximización (minimización).
- (d) Si la restricción primal es del tipo \geq , la variable dual correspondiente será no negativa (no positiva), si la función objetivo primal es de minimización (maximización).
- (e) Una variable primal irrestricta resultará en una restricción dual de igualdad.

4-7. Considere las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_1 = (11, 22), \mathbf{V}_2 = (-1, -2, -3)$$

En cada uno de los siguientes casos, indique si la operación matricial dada es legítima y, si lo es, calcule el resultado.

- *(a) \mathbf{AV}_1
(b) \mathbf{AP}_1

- (c) \mathbf{AP}_2
- (d) $\mathbf{V}_1\mathbf{A}$
- *(e) $\mathbf{V}_2\mathbf{A}$
- (f) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$
- (g) $\mathbf{V}_1\mathbf{P}_1$

4-8. Considere la tabla óptima del ejemplo 3.3-1.

- *(a) Identifique la matriz inversa óptima.
- (b) Demuestre que el lado derecho es igual a la inversa multiplicada por el vector del lado derecho original de las restricciones originales.
- 4-9.** Repita el problema 4-8 para la última tabla del ejemplo 3.4-1.
- 4-10.** Encuentre el valor óptimo de la función objetivo en el siguiente problema mediante la inspección solamente del dual (no resuelva el dual con el método simplex).

$$\text{Minimizar } z = 10x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq 50$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- 4-11.** Resuelva el dual del siguiente problema y, después, encuentre su solución óptima a partir de la solución del dual. ¿La solución del dual ofrece ventajas computacionales sobre la solución directa del primal?

$$\text{Minimizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 50$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 20$$

$$7x_1 + 6x_2 - 9x_3 \geq 30$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 \geq 35$$

$$2x_1 + 4x_2 - 15x_3 \geq 10$$

$$12x_1 + 10x_2 \geq 90$$

$$x_2 - 10x_3 \geq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- *4-12.** Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Dado que la variable artificial x_4 y la variable de holgura x_5 forman las variables básicas iniciales y que M se estableció igual a 100 al resolver el problema, la tabla óptima está dada como:

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	23	7	105	0	150
x_1	1	5	2	1	0	30
x_5	0	-10	-8	-1	1	10

Escriba el problema dual asociado y determine su solución óptima de dos maneras.

- 4-13.** Considere el siguiente PL:

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución inicial se compone de las variables artificiales x_4 y x_5 para la primera y segunda restricciones, y la variable de holgura x_6 para la tercera restricción. Si se utiliza $M = 100$ para las variables artificiales, la tabla óptima está dada como sigue:

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	0	0	0	-98.6	-100	-2	3.4
x_1	1	0	0	.4	0	-.2	.4
x_2	0	1	0	-.2	0	.6	1.8
x_3	0	0	1	1	-1	1	1.0

Escriba el problema dual asociado y determine su solución óptima de dos maneras.

- 4-14.** Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Si se usan x_3 y x_4 como variables iniciales, la tabla óptima está dada como

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	2	0	0	3	16
x_3	.75	0	1	-.25	2
x_2	.25	1	0	.25	2

Escriba el problema dual asociado y determine su solución óptima de dos maneras.

*4-15. Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La solución inicial se compone de la variable x_3 en la primera restricción y una variable artificial x_4 en la segunda restricción con $M = 100$. La tabla óptima está dada como

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	2	0	99	5
x_3	1	2.5	1	-.5	1
x_1	0	-.5	0	.5	2

Escriba el problema dual asociado y determine su solución óptima de dos maneras.

4-16. Considere el siguiente conjunto de desigualdades:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq -4$$

$$3x_1 - 5x_2 \leq 2$$

$$x_1 \text{ irrestricta}$$

$$x_2 \geq 0$$

Es posible encontrar una solución factible al aumentar la función objetivo trivial y maximizar $z = x_1 + x_2$ para después resolver el problema. Otra forma consiste en resolver el dual, con lo que es posible determinar una solución para el conjunto de desigualdades. Aplique ambos métodos.

4-17. Estime un intervalo para el valor objetivo óptimo de los siguientes PL:

*(a) Minimizar $z = 5x_1 + 2x_2$

sujeto a

$$x_1 - x_2 \geq 3$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(b) Maximizar $z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- (c)** Maximizar $z = 2x_1 + x_2$
sujeto a

$$x_1 - x_2 \leq 10$$

$$2x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- (d)** Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2$
sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- 4-18.** En el problema 4-17(a), sean y_1 y y_2 las variables duales. Determine si los siguientes pares de soluciones primales-duales son óptimos.

- *(a) $(x_1 = 3, x_2 = 1; y_1 = 4, y_2 = 1)$
- (b) $(x_1 = 4, x_2 = 1; y_1 = 1, y_2 = 0)$
- (c) $(x_1 = 3, x_2 = 0; y_1 = 5, y_2 = 0)$

- 4-19.** Genere la primera iteración simplex del ejemplo 4.2-1 (por conveniencia, puede utilizar la opción Iterations $\Rightarrow M\text{-method}$ de TORA con $M = 100$) y luego utilice las fórmulas 1 y 2 para verificar todos los elementos de la tabla resultante.

- 4-20.** Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + 14x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + 7x_2 + x_3 = 21$$

$$7x_1 + 2x_2 + x_4 = 21$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Compruebe la optimalidad y factibilidad de cada una de las siguientes soluciones básicas.

*(a) Variables básicas = (x_2, x_4) , Inversa = $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix}$

(b) Variables básicas = (x_2, x_3) , Inversa = $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

(c) Variables básicas = (x_2, x_1) , Inversa = $\begin{pmatrix} \frac{7}{45} & -\frac{2}{45} \\ -\frac{2}{45} & \frac{7}{45} \end{pmatrix}$

(d) Variables básicas = (x_1, x_4) , Inversa = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$

- 4-21.** Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 30$$

$$3x_1 + 2x_3 + x_5 = 60$$

$$x_1 + 4x_2 + x_6 = 20$$

$$x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Compruebe la optimalidad y factibilidad de las siguientes soluciones básicas.

(a) Variables básicas = (x_4, x_3, x_6) , Inversa = $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Variables básicas = (x_2, x_3, x_1) , Inversa = $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(c) Variables básicas = (x_2, x_3, x_6) , Inversa = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

*4-22. Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Calcule la tabla simplex completa asociada con la siguiente solución básica, y compruebe su optimalidad y factibilidad.

Variables básicas = (x_1, x_2, x_5) , Inversa = $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4-23. Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(a) Identifique la mejor solución de entre las siguientes soluciones factibles básicas:

(i) Variables básicas = (x_4, x_3) , Inversa = $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(ii) Variables básicas = (x_2, x_1) , Inversa = $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

(iii) Variables básicas = (x_2, x_3) , Inversa = $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

(b) ¿Es óptima la solución obtenida en (a) para el modelo de PL?

4-24. Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq b_1$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq b_2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La siguiente tabla óptima corresponde a valores específicos de b_1 y b_2 :

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	a	7	d	e	150
x_1	1	b	2	1	0	30
x_5	0	c	-8	-1	1	10

Determine lo siguiente:

- (a)** Los valores del lado derecho, b_1 y b_2 .
- (b)** La solución dual óptima.
- (c)** Los elementos a, b, c, d y e .

***4-25.** A continuación se presenta la tabla óptima para un modelo de PL de maximización con tres restricciones (\leq) y todas las variables no negativas. Las variables x_3, x_4 y x_5 son las holguras asociadas con las tres restricciones. Determine el valor objetivo óptimo asociado de dos maneras diferentes usando las funciones objetivo primal y dual.

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	0	0	3	2	?
x_3	0	0	1	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	0	6
x_1	1	0	0	-1	1	2

- 4-26.** Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Use el problema dual para demostrar que la solución básica (x_1, x_2) no es óptima.

- 4-27.** Demuestre que el método 1 de la sección 4.2.3, para determinar los valores duales óptimos, en realidad está basado en la fórmula 2 de la sección 4.2.4.
- 4-28.** En el ejemplo 4.3-1, calcule el cambio del ingreso óptimo en cada uno de los siguientes casos (use el resultado de TORA para obtener los intervalos de factibilidad):
- (a) La restricción para la materia prima $M1$ (recurso 1) es $6x_1 + 4x_2 \leq 22$.
 - (b) La restricción para la materia prima $M2$ (recurso 2) es $x_1 + 2x_2 \leq 4.5$.
 - (c) La condición del mercado representada por el recurso 4 es $x_2 \leq 10$.
- *4-29.** NWAC Electronics fabrica cuatro tipos de cable sencillo para un contratista militar. Cada cable debe pasar a través de cuatro operaciones consecutivas: corte, estañado, encamisado e inspección. En la siguiente tabla se presentan los datos pertinentes de la situación.

Cable	Minutos por unidad				Ingreso por unidad (dólares)
	Corte	Estañado	Encamisado	Inspección	
SC320	10.5	20.4	3.2	5.0	9.40
SC325	9.3	24.6	2.5	5.0	10.80
SC340	11.6	17.7	3.6	5.0	8.75
SC370	8.2	26.5	5.5	5.0	7.80
Capacidad diaria (minutos)	4,800.0	9,600.0	4,700.0	4,500.0	

El contratista garantiza un nivel de producción mínimo de 100 unidades para cada uno de los cuatro cables.

- (a) Formule el problema como un modelo de programación lineal y determine el programa de producción óptimo.
 - (b) Con base en los precios duales, ¿recomienda incrementar las capacidades diarias de cualquiera de las cuatro operaciones? Explique su respuesta.
 - (c) ¿Representan los requisitos mínimos de producción de los cuatro cables una ventaja o una desventaja para NWAC Electronics? Dé una explicación con base en los precios duales.
 - (d) ¿Se puede garantizar la contribución actual de cada unidad al ingreso por el precio dual, si la capacidad del proceso de estañado se incrementa en 10%?
- 4-30.** BagCo produce chamarras y bolsos de mano de piel. Una chamarra requiere 8 m^2 de piel y un bolso de mano sólo 2 m^2 . Los requisitos de mano de obra para los dos productos son de 12 y 15 horas, respectivamente. Los actuales suministros semanales de piel y mano de obra están limitados a 1200 m^2

y 1850 horas, respectivamente. La compañía vende las chamarras a \$350 y los bolsos de mano a \$120. El objetivo es determinar el programa de producción que maximice el ingreso neto.

- (a) Determine la solución óptima.
 - (b) BagCo está considerando aumentar la producción. ¿Cuál es el precio de compra máximo que la compañía debería pagar por la piel adicional? ¿Y cuánto por la mano de obra adicional?
- 4-31.** En el ejemplo 4.3-2 suponga que, para los trenes de juguete, el tiempo por unidad de la operación 2 puede reducirse de 3 a cuando mucho 1.25 minutos. ¿Qué tanto debe reducirse el tiempo por unidad de la operación 1 para que los trenes de juguete sean apenas rentables?
- *4-32.** En el ejemplo 4.3-2 suponga que TOYCO estudia la posibilidad de introducir un cuarto juguete: camiones de bomberos. El ensamble no utiliza la operación 1. Sus tiempos de ensamble unitarios en las operaciones 2 y 3 son 1 y 3 minutos, respectivamente. El ingreso por unidad es de \$4. ¿Aconsejaría usted a TOYCO introducir el nuevo producto?
- *4-33.** JoShop utiliza tornos y taladros de banco para producir cuatro tipos de piezas de máquina, $PP1$, $PP2$, $PP3$ y $PP4$. En la siguiente tabla se resumen los datos pertinentes:

Máquina	Tiempo de maquinado en minutos por unidad de				Capacidad (min)
	$PP1$	$PP2$	$PP3$	$PP4$	
Tornos	2	5	3	4	5300
Taladros de banco	3	4	6	4	5300
Ingreso unitario (\$)	3	6	5	4	

Para las piezas que no se producen mediante la solución óptima actual, determine la tasa de deterioro del ingreso óptimo por incremento unitario de cada uno de estos productos.

- 4-34.** Considere la solución óptima de JoShop en el problema 4-33. La compañía estima que por cada pieza que no se produce (conforme a la solución óptima), el tiempo de maquinado se puede reducir 20% gracias a mejoras del proceso. ¿Harían esas mejoras que las piezas fueran rentables? De no ser así, ¿cuál es el porcentaje de reducción mínimo necesario para lograr la rentabilidad?
- 4-35.** Considere el espacio de soluciones de la figura 4.3, donde se desea determinar el punto extremo óptimo que utiliza el método simplex dual para minimizar $z = 2x_1 + x_2$. La solución óptima ocurre en el punto $F = (0.5, 1.5)$ de la gráfica.
- (a) ¿Puede el simplex dual iniciar en el punto A ?
 - (b) Si el punto G proporciona la solución básica inicial (no factible pero mejor que óptima) y el punto F da el óptimo, ¿sería posible que las iteraciones del método simplex dual sigan la trayectoria $G \rightarrow E \rightarrow F$? Explique su respuesta.
 - (c) Si la solución básica (no factible) inicial empieza en el punto L , identifique una posible trayectoria del método simplex dual que conduzca al punto factible óptimo en el punto F .
- 4-36.** Genere las iteraciones simplex duales para los siguientes problemas (utilice TORA por conveniencia) y trace la trayectoria del algoritmo en el espacio de soluciones gráfico.
- (a) Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2$
sujeto a

$$2x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

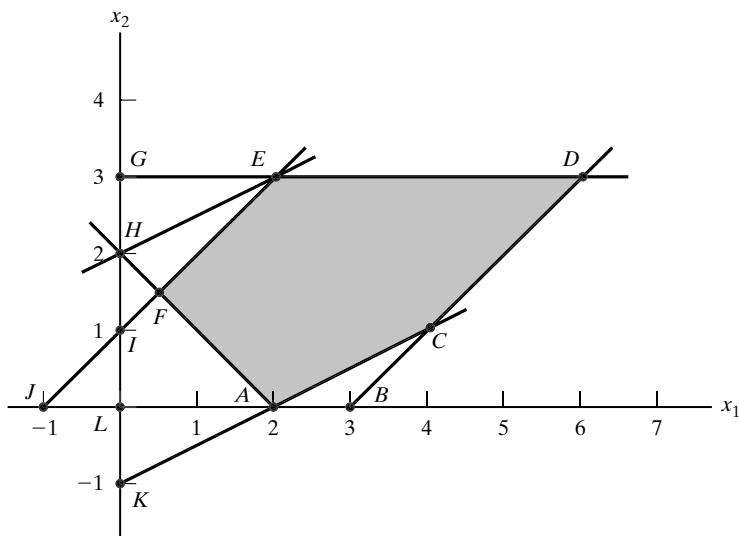


FIGURA 4.3

Espacio de soluciones para el problema 4-35

- (b)** Minimizar $z = 5x_1 + 6x_2$
sujeto a

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$4x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- (c)** Minimizar $z = 4x_1 + 2x_2$
sujeto a

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$3x_1 - x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- (d)** Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2$
sujeto a

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

4-37. Simplex dual con restricciones artificiales. Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 4$$

$$-x_1 + 9x_2 - x_3 \geq 3$$

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La solución básica inicial consistente en las variables de exceso x_4 y x_5 , y la variable de holgura x_6 es no factible porque $x_4 = -4$ y $x_5 = -3$. Sin embargo, el simplex dual no es aplicable de forma directa, ya que x_1 y x_3 no satisfacen la condición de optimalidad para la maximización. Demuestre que al agregar la restricción artificial $x_1 + x_3 \leq M$ (donde M es suficientemente grande como para no eliminar cualesquiera puntos factibles en el espacio de soluciones original) para, después, utilizar la nueva restricción como fila pivote, la selección de x_1 como la variable de entrada (porque tiene el coeficiente objetivo más negativo) resultará en una fila objetivo totalmente óptima. En seguida, ejecute el método simplex dual regular en el problema modificado.

- 4-38.** Utilice el procedimiento de restricción artificial presentado en el problema 4-37 para resolver los siguientes problemas con el método simplex dual. En cada caso, indique si la solución resultante es factible, no factible o no acotada.

(a) Maximizar $z = 2x_3$

sujeto a

$$-x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 8$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(b) Maximizar $z = x_1 - 3x_2$

sujeto a

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$2x_1 - 2x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

*(c) Minimizar $z = -x_1 + x_2$

sujeto a

$$x_1 - 4x_2 \geq 5$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 1$$

$$2x_1 - 5x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- (d) Maximizar $z = 2x_3$
sujeto a

$$-x_1 + 3x_2 - 7x_3 \geq 5$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$$

$$3x_1 + x_2 - 10x_3 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- 4-39. Resuelva el siguiente PL de tres maneras diferentes (use TORA por conveniencia). ¿Cuál método parece ser computacionalmente el más eficiente?

$$\text{Minimizar } z = 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

sujeto a

$$5x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 \geq 12$$

$$x_2 - 5x_3 - 6x_4 \geq 10$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \geq 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- 4-40. El modelo de PL del problema 4-38(c) no tiene solución factible. Muestre cómo detecta esta condición el *procedimiento simplex generalizado*.
- 4-41. El modelo de PL del problema 4-38(d) tiene una solución no acotada. Demuestre cómo detecta esta condición el *procedimiento simplex generalizado*.
- 4-42. En el modelo de TOYCO que aparece al inicio de la sección 4.5, ¿sería más ventajoso asignar la capacidad en exceso de 20 minutos de la operación 3 a la operación 2 en vez de a la operación 1?
- 4-43. Suponga que TOYCO desea cambiar las capacidades de las tres operaciones de acuerdo con los siguientes casos:

(a) $\begin{pmatrix} 460 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 500 \\ 400 \\ 600 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 300 \\ 800 \\ 200 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 450 \\ 700 \\ 350 \end{pmatrix}$

Utilice el análisis postóptimo para determinar la solución óptima en cada caso.

- 4-44. Considere el modelo de Reddy Mikks del ejemplo 2.1-1. Su tabla óptima se da en el ejemplo 3.3-1. Si las disponibilidades diarias de las materias primas $M1$ y $M2$ se incrementan a 28 y 8 toneladas, respectivamente, utilice el análisis postóptimo para determinar la nueva solución óptima.
- *4-45. Ozark Farm tiene 20,000 pollos que alimenta durante ocho semanas antes de enviarlos al mercado. La alimentación semanal por pollo varía de acuerdo con el siguiente programa:

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8
libras/pollo	.26	.48	.75	1.00	1.30	1.60	1.90	2.10

Para que el pollo alcance el peso deseado en 8 semanas, los alimentos deben satisfacer necesidades nutricionales específicas. Aunque una lista típica de alimentos es grande, por sencillez el modelo se

limitará a sólo tres ingredientes: piedra caliza, maíz y soya. Las necesidades de nutrición también se limitarán a tres tipos: calcio, proteína y fibra. En la siguiente tabla se resume el contenido correspondiente de los ingredientes seleccionados junto con sus costos.

Ingrediente	Contenido (lb) por lb de			Dólares por lb
	Calcio	Proteína	Fibra	
Piedra caliza	.380	.00	.00	.12
Maíz	.001	.09	.02	.45
Soya	.002	.50	.08	1.60

La mezcla alimenticia debe contener al menos .8% pero no más de 1.2% de calcio, un mínimo de 22% de proteína y cuando mucho 5% de fibra cruda.

Resuelva el PL para la semana 1, luego aplique el análisis postóptimo con la finalidad de desarrollar un programa óptimo para las 7 semanas restantes.

- 4-46.** Demuestre que la regla de factibilidad del 100% del problema 3-79 (capítulo 3) está basada en la condición

$$\begin{pmatrix} \text{Inversa} \\ \text{óptima} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Vector del lado} \\ \text{derecho original} \end{pmatrix} \geq 0$$

- 4-47.** *Análisis postóptimo para casos que afectan tanto la optimalidad como la factibilidad.* Suponga que se le dan los siguientes cambios simultáneos en el modelo de Reddy Mikks. El ingreso por tonelada de pinturas para exteriores e interiores es de \$1000 y \$4000, respectivamente, y las disponibilidades diarias máximas de las materias primas M_1 y M_2 son de 28 y 8 toneladas, respectivamente.

- (a) Muestre que los cambios propuestos resultarán en una solución óptima actual, tanto no óptima como no factible.
 (b) Use el *algoritmo simplex generalizado* (sección 4.4-2) para determinar la nueva solución factible óptima.

- 4-48.** En el modelo de TOYCO, suponga que las especificaciones de la cuarta operación son las siguientes: La tasa de producción máxima basada en 480 minutos al día es de 120 unidades del producto 1, 480 unidades del producto 2 o 240 unidades del producto 3. Determine la solución óptima suponiendo que la capacidad diaria está limitada a

*(a) 570 minutos.

(b) 548 minutos.

- 4-49.** *Restricciones secundarias.* En vez de resolver un problema usando todas sus restricciones, es posible empezar identificando las llamadas *restricciones secundarias*, que son las restricciones que sospechamos son menos restrictivas en función de la solución óptima. El modelo se resuelve utilizando las restricciones (primarias) restantes. Entonces, es posible agregar las restricciones secundarias de una en una. Una restricción secundaria se desecha, si satisface la solución óptima disponible. El proceso se repite hasta que se toman en cuenta todas las restricciones secundarias.

Aplique el procedimiento propuesto al siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 50 \\
 x_1 + x_2 - x_3 &\leq 20 \\
 7x_1 + 6x_2 - 9x_3 &\leq 30 \\
 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 35 \\
 12x_1 + 6x_2 &\leq 90 \\
 x_2 - 9x_3 &\leq 20 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- 4-50.** Investigue la optimalidad de la solución de TOYCO para cada una de las siguientes funciones objetivo. Si es necesario, use el análisis postóptimo para determinar el nuevo óptimo (la tabla óptima de TOYCO se da al inicio de la sección 4.5).
- (a) $z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$
 - (b) $z = 3x_1 + 6x_2 + x_3$
 - (c) $z = 8x_1 + 3x_2 + 9x_3$
- 4-51.** Investigue la optimalidad de la solución de Reddy Mikks (ejemplo 4.3-1) para cada una de las siguientes funciones objetivo. Si es necesario, use el análisis postóptimo para determinar el nuevo óptimo (la tabla óptima del modelo se da en el ejemplo 3.3-1).
- *(a) $z = 3x_1 + 2x_2$
 - (b) $z = 8x_1 + 10x_2$
 - *(c) $z = 2x_1 + 5x_2$
- 4-52.** Demuestre que la regla de optimalidad del 100% (problema 3-88, capítulo 3) se deriva de (costos reducidos) ≥ 0 para problemas de maximización y de (costos reducidos) ≤ 0 para problemas de minimización.
- *4-53.** En el modelo original de TOYCO, los trenes de juguete no son parte de la mezcla óptima de productos. La compañía reconoce que la competencia del mercado no permitirá elevar el precio unitario del juguete. En vez de ello, la compañía desea concentrarse en mejorar la operación de ensamble. Lo anterior implica reducir el tiempo de ensamble por unidad en cada una de las tres operaciones en un porcentaje específico, $p\%$. Determine el valor de p que hará que los trenes de juguete apenas sean rentables (la tabla óptima del modelo de TOYCO se da al inicio de la sección 4.5).
- 4-54.** En el modelo de TOYCO, suponga que la compañía reduce los tiempos por unidad en las operaciones 1, 2 y 3 para los trenes de juguete, desde los niveles actuales de 1, 3 y 1 minutos a .5, 1 y .5 minutos, respectivamente. El ingreso por unidad permanece en \$3. Determine la nueva solución óptima.
- 4-55.** En el modelo de TOYCO, suponga que un juguete nuevo (el camión de bomberos) requiere 3, 2 y 4 minutos, respectivamente, para las operaciones 1, 2 y 3. Determine la solución óptima si el ingreso por unidad es de
- (a) \$5.
 - (b) \$10.
- 4-56.** En el modelo de Reddy Mikks, la compañía está considerando producir una marca más económica de pintura para exteriores, cuyos requerimientos de entrada por tonelada incluyen .75 toneladas de cada una de las materias primas $M1$ y $M2$. Las condiciones del mercado siguen dictando que el exceso de pintura para interiores sobre la producción de *ambos* tipos de pintura para exteriores se limite a una tonelada diaria. El ingreso por tonelada de la nueva pintura para exteriores es de \$3500. Determine la nueva solución óptima (el modelo se explica en el ejemplo 4.5-1, y su tabla óptima se da en el ejemplo 3.3-1).

CAPÍTULO 5

Modelo de transporte y sus variantes

Aplicación de la vida real: Programación de citas en eventos comerciales australianos

La Comisión de Turismo Australiana (ATC, por las siglas de *Australian Tourist Commission*) organiza eventos comerciales alrededor del mundo, que sirven de foro donde los vendedores australianos se reúnen con los compradores internacionales de productos turísticos. Durante los eventos, los vendedores se sitúan en cubículos y los compradores los visitan de acuerdo con citas programadas. Debido a la limitación de tiempo disponible en cada evento y al hecho de que la cantidad de compradores y vendedores suele ser muy grande (en 1997 un evento de este tipo en Melbourne atrajo 620 vendedores y 700 compradores), la ATC procura programar las citas entre vendedor y comprador con anticipación para maximizar las preferencias. El modelo ha tenido resultados muy satisfactorios tanto para los compradores como para los vendedores.

Los detalles de este estudio se presentan al final del capítulo.

5.1 DEFINICIÓN DEL MODELO DE TRANSPORTE

El problema se representa mediante la red que se ilustra en la figura 5.1. Hay m orígenes y n destinos, cada uno representado por un **nodo**. Los **arcos** son las rutas que unen los orígenes con los destinos. El arco (i, j) que une el origen i con el destino j transporta dos piezas de información: el costo de transporte por unidad, c_{ij} , y la cantidad transportada, x_{ij} . La cantidad de la oferta en el origen i es a_m y la cantidad de la demanda en el destino j es b_n . El objetivo del modelo es minimizar el costo de transporte total mientras se satisfacen las restricciones de la oferta y la demanda.

Ejemplo 5.1-1

MG Auto tiene tres plantas en Los Ángeles, Detroit y Nueva Orleáns, y dos centros de distribución importantes en Denver y Miami. Las capacidades trimestrales de las tres plantas son 1000, 1500 y 1200 automóviles, respectivamente, y las demandas de los dos centros de distribución durante el mismo periodo son de 2300 y 1400 automóviles. En la tabla 5.1 se presenta la distancia en millas entre las plantas y los centros de distribución.

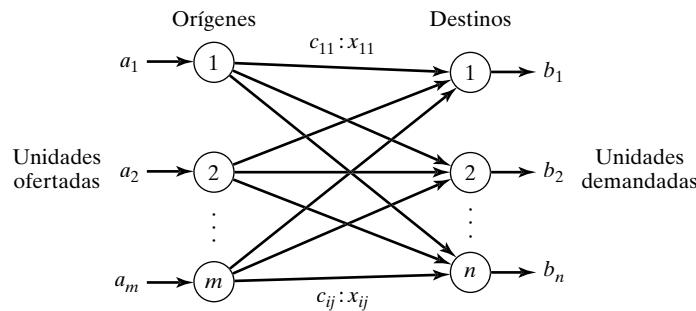


FIGURA 5.1

Representación del modelo de transporte con nodos y arcos

TABLA 5.1 Gráfica de distancia en millas

	Denver	Miami
Los Ángeles	1000	2690
Detroit	1250	1350
Nueva Orleáns	1275	850

La compañía a cargo del transporte cobra 8 centavos por milla por automóvil. Entonces, los costos de transporte por automóvil en las diferentes rutas, redondeados al dólar más cercano, se calculan a partir de la tabla 5.1 como se muestra en la tabla 5.2.

El modelo PL del problema es

$$\text{Minimizar } z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} &= 1000 \text{ (Los Ángeles)} \\
 x_{21} + x_{22} &= 1500 \text{ (Detroit)} \\
 &\quad + x_{31} + x_{32} = 1200 \text{ (Nueva Orleáns)} \\
 x_{11} &\quad + x_{21} \quad + x_{31} = 2300 \text{ (Denver)} \\
 x_{12} &\quad + x_{22} \quad + x_{32} = 1400 \text{ (Miami)} \\
 x_{ij} &\geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2
 \end{aligned}$$

Todas estas restricciones son ecuaciones porque la oferta total ($= 1000 + 1500 + 1200 = 3700$ automóviles) es igual a la demanda total ($= 2300 + 1400 = 3700$ automóviles).

TABLA 5.2 Costo de transporte por automóvil

	Denver (1)	Miami (2)
Los Ángeles (1)	\$80	\$215
Detroit (2)	\$100	\$108
Nueva Orleáns (3)	\$102	\$68

TABLA 5.3 Modelo de transporte de MG

	Denver	Miami	Oferta
Los Ángeles	80 x_{11}	215 x_{12}	1000
Detroit	100 x_{21}	108 x_{22}	1500
Nueva Orleáns	102 x_{31}	68 x_{32}	1200
Demandas	2300	1400	

La estructura especial del problema de transporte permite una representación compacta del problema utilizando el formato **tabla de transporte** que se muestra en la tabla 5.3. Este formato permite modelar muchas situaciones que no tienen que ver con el transporte de bienes, como lo demuestran los ejemplos de la sección 5.2.

La solución óptima de la figura 5.2 (obtenida mediante el uso de TORA¹) envía 1000 automóviles de Los Ángeles a Denver ($x_{11} = 1000$), 1300 de Detroit a Denver ($x_{21} = 1300$), 200 de Detroit a Miami ($x_{22} = 200$) y 1200 de Nueva Orleáns a Miami ($x_{32} = 1200$). El costo de transporte mínimo asociado se calcula como $1000 \times \$80 + 1300 \times \$100 + 200 \times \$108 + 1200 \times \$68 = \$313,200$.

Balanceo del modelo de transporte. La representación de la tabla de transporte supone que el modelo está balanceado, es decir, que la demanda total es igual a la oferta total (lo cual —por coincidencia— resulta ser cierto en el modelo de MG). Si el modelo está desbalanceado, se deben agregar un origen o un destino ficticios para restaurar el equilibrio.

Ejemplo 5.1-2

En el modelo de MG, suponga que la capacidad de la planta de Detroit es de 1300 automóviles (en lugar de 1500). La oferta total (= 3500) es menor que la demanda total (= 3700 automóviles), lo cual significa que no se satisfará una parte de la demanda en Denver y Miami.

Como la demanda excede la oferta, se agrega un origen (planta) ficticio con una capacidad de 200 automóviles (= 3700 – 3500) para balancear el modelo. El costo de transporte por unidad de la planta ficticia a los dos destinos es cero porque la planta no existe.

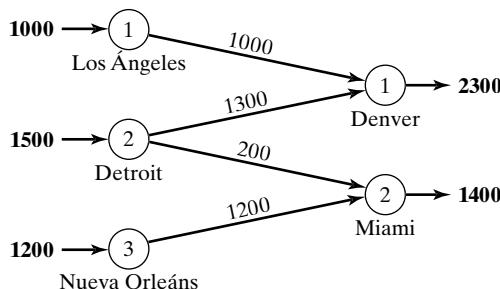


FIGURA 5.2
Solución óptima del modelo de MG Auto

¹ Para utilizar TORA, en el comando **Main Menu** seleccione **Transportation Model**. En el menú **SOLVE/MODIFY**, seleccione **Solve ⇒ Final Solution** para obtener un resumen de la solución óptima. En la sección 5.3.3 se da una descripción detallada de la solución iterativa del modelo de transporte.

TABLA 5.4 Modelo de MG con una planta ficticia

	Denver	Miami	Oferta
Los Ángeles	80 1000	215	1000
Detroit	100 1300	108	1300
Nueva Orleáns	102	68 1200	1200
Planta ficticia	0	0 200	200
Demanda	2300	1400	

En la tabla 5.4 se da el modelo balanceado junto con su solución óptima. La solución muestra que la planta ficticia envía 200 automóviles a Miami, es decir, que a Miami le faltarán 200 automóviles para satisfacer su demanda de 1400 automóviles.

Podemos asegurar que un destino específico no experimente escasez al asignar un costo de transporte por unidad muy alto del origen ficticio a dicho destino. Por ejemplo, una penalización de \$1000 en la celda ficticia de Miami evitará que haya escasez en Miami. Desde luego, no se puede utilizar este “artilugio” con todos los destinos, porque debe haber escasez en alguna parte.

El caso en que la oferta excede la demanda se puede demostrar al suponer que la demanda en Denver es de sólo 1900 automóviles. En este caso, es necesario agregar un centro de distribución ficticio para que “reciba” la oferta excedente. De nuevo, el costo de transporte por unidad al centro de distribución ficticio es cero, a menos que se requiera agotar todo el inventario de una fábrica; en este caso, se asigna un costo alto de transporte por unidad de la fábrica designada al destino ficticio.

En la tabla 5.5 se da el nuevo modelo y su solución óptima (obtenida mediante TORA). La solución muestra que la planta de Detroit tendrá un excedente de 400 automóviles.

TABLA 5.5 Modelo de MG con un destino ficticio

	Denver	Miami	Ficticio	
Los Ángeles	80 1000	215	0	1000
Detroit	100 900	108	0	1500
Nueva Orleáns	102	68 1200	0	1200
Demanda	1900	1400	400	

Momento, ¡ajá! Breve historia del modelo de transporte.²

En 1781 el matemático francés Gaspard Monge (1746-1818), quien trabajaba con el ejército de Napoleón Bonaparte, publicó un modelo matemático con el que pretendía transportar tierra, al menor costo posible, entre diferentes sitios de construcción con el propósito de construir fuertes y caminos militares. Aunque Monge estableció una base teórica para resolver el problema de transporte, no fue sino hasta 1941 que se desarrolló un algoritmo, cuando el matemático estadounidense Frank L. Hitchcock (1875-1957) publicó su solución al problema de Monge. En 1939 el economista ruso Leonid V. Kantorovich publicó un folleto titulado *The Mathematical Method of Production Planning and Organization*, que de hecho sentó las bases para la programación lineal moderna. Sin embargo, Kantorovich no tenía conocimiento del trabajo que realizó Monge en 1781, y fue hasta 1947 cuando reconoció inmediatamente las similitudes entre su obra y la de Monge. Mientras tanto, el holandés-estadounidense Tjalling C. Koopmans (1910-1985) había estudiado de manera independiente el problema de transporte en apoyo a los esfuerzos de la Segunda Guerra Mundial, y fue sólo a finales de la década de 1950 que descubrió el trabajo de Kantorovich sobre la programación y el transporte lineales. Koopmans resultó fundamental en la reimpresión del folleto de Kantorovich en Estados Unidos,³ favoreciendo así la difusión de la obra de Kantorovich en Occidente. Para entonces, el matemático estadounidense George B. Danzig ya había desarrollado su método simplex en 1947 para resolver cualquier problema de programación lineal, incluyendo el modelo de transporte.

En 1975 Leonid V. Kantorovich y Tjalling C. Koopmans compartieron el Premio Nobel de Economía.

5.2 MODELOS DE TRANSPORTE NO TRADICIONALES

La aplicación del modelo de transporte no se limita al *transporte* de bienes. En esta sección se presentan dos aplicaciones no tradicionales en las áreas de control de la producción y los inventarios, y el servicio de afilado de herramientas.

Ejemplo 5.2-1 (Control de la producción y los inventarios)

Boralis fabrica mochilas para senderistas (excursionistas). La demanda de su producto durante el periodo pico de marzo a junio de cada año es de 100, 200, 180 y 300 unidades, respectivamente. La compañía utiliza mano de obra de tiempo parcial para ajustarse a las fluctuaciones de la demanda. Se estima que Boralis puede producir 50, 180, 280 y 270 unidades de marzo a junio. La demanda de un mes en curso se puede satisfacer de tres maneras.

1. Con la producción del mes en curso a un costo de \$40 por mochila.
2. Con la producción excedente del mes anterior a un costo de almacenaje adicional de \$.50 por mochila cada mes.
3. Con la producción excedente en un mes posterior (pedido en espera) a un costo de penalización adicional de \$2.00 por mochila cada mes.

Boralis desea determinar el programa de producción óptimo durante los cuatro meses.

² A. M. Vershik, Long History of the Monge-Kantorovich Transportation Problem, *The Mathematical Intelligencer*, Springer Science + Business Media New York, 2013, DOI 10.1007/s00283-013-9380-x.

³ L. V. Kantorovich, *Mathematical methods in the organization and planning of production*, Leningrad University, 1939. English translation: *Management Science*, vol. 6, núm. 4, pp. 363-422, 1960.

En la siguiente tabla se resumen los paralelismos entre los elementos del problema de producción e inventario y el modelo de transporte:

Transporte	Inventario de producción
1. Origen i	1. Periodo de producción i
2. Destino j	2. Periodo de demanda j
3. Cantidad de abasto en el origen i	3. Capacidad de producción en el periodo i
4. Demanda en el destino j	4. Demanda en el periodo j
5. Costo de transporte por unidad del origen i al destino j	5. Costo unitario (producción + almacenaje + penalización) en el periodo i para el periodo j

El modelo de transporte resultante se da en la tabla 5.6.

El costo unitario de “transporte” del periodo i al periodo j se calcula como

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{Costo de producción en } i, i=j \\ \text{Costo de producción en } i + \text{costo de almacenaje de } i \text{ a } j, i < j \\ \text{Costo de producción en } i + \text{costo de penalización de } i \text{ a } j, i > j \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$c_{11} = \$40.00$$

$$c_{24} = \$40.00 + (\$.50 + \$.50) = \$41.00$$

$$c_{41} = \$40.00 + (\$2.00 + \$2.00 + \$2.00) = \$46.00$$

La solución óptima se resume en la figura 5.3. Las líneas discontinuas indican pedidos en espera, las líneas punteadas significan producción para un periodo futuro y las líneas continuas muestran la producción en un periodo en curso. El costo total es de \$31,455.

TABLA 5.6 Modelo de transporte para el ejemplo 5.2-1

	1	2	3	4	Capacidad
1	\$40.00	\$40.50	\$41.00	\$41.50	50
2	\$42.00	\$40.00	\$40.50	\$41.00	180
3	\$44.00	\$42.00	\$40.00	\$40.50	280
4	\$46.00	\$44.00	\$42.00	\$40.00	270
Demanda	100	200	180	300	

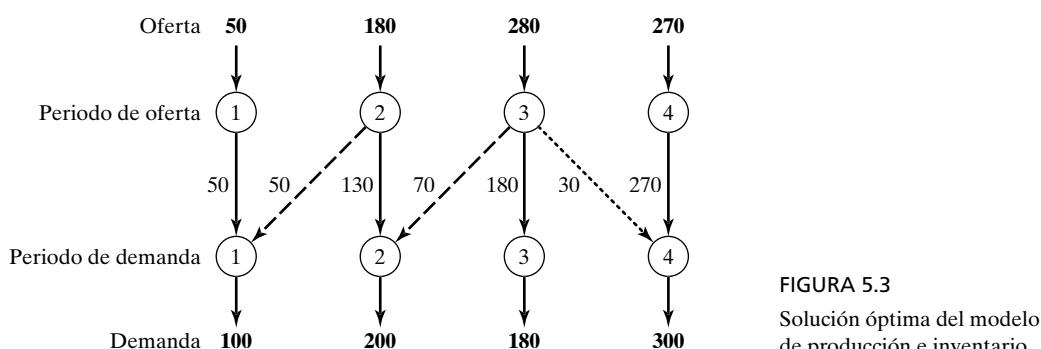


FIGURA 5.3
Solución óptima del modelo de producción e inventario

Ejemplo 5.2-2 (Afilado de herramientas)

Arkansas Pacific opera un aserradero que produce tablas de diferentes tipos de madera. De acuerdo con el tipo de madera que se asierre, la demanda de hojas de sierra afiladas varía de un día a otro según los siguientes datos de una semana (7 días):

Día	Lun.	Mar.	Mié.	Jue.	Vie.	Sáb.	Dom.
Demanda (hojas de sierra)	24	12	14	20	18	14	22

El aserradero puede satisfacer la demanda diaria de cuatro maneras:

1. Hojas nuevas a un costo de \$12 cada una.
2. Servicio de afilado nocturno a \$6 por hoja.
3. Servicio de afilado en un día a \$5 por hoja.
4. Servicio de afiliado en dos días a \$3 por hoja.

La situación puede representarse como un modelo de transporte con ocho orígenes y siete destinos. Los destinos representan los 7 días de la semana. Los orígenes del modelo se definen como sigue: El origen 1 corresponde a la compra de hojas nuevas que, en el caso extremo, pueden satisfacer la demanda de los siete días ($= 24 + 12 + 14 + 20 + 18 + 14 + 22 = 124$). Los orígenes 2 a 8 corresponden a los 7 días de la semana. La cantidad de oferta de cada uno de estos orígenes es igual a la de hojas utilizadas al final del día asociado. Por ejemplo, el origen 2 (lunes) tendrá una oferta de hojas utilizadas igual a la demanda del lunes. El “costo de transporte” por unidad para el modelo es de \$12 para la hoja nueva, \$6 para el afilado nocturno, \$5 para el afilado de un día o \$3 para todo lo demás. La columna “desecho” es un destino ficticio para balancear el modelo. El modelo completo y su solución se dan en la tabla 5.7.

La siguiente tabla resume la solución óptima a un costo total de \$818 (archivo *toraEx5.2-2.txt*).

Periodo	Número de hojas afiladas (Objetivo diario)				
	Nuevas	Nocturno	1 día	≥ 2 días	Desecho
Lun.	24 (Lun.)	0	14 (Mié.)	10 (Jue.)	0
Mar.	12 (Mar.)	0	0	12 (Vie.)	0
Mié.	0	10 (Jue.)	4 (Vie.)	0	0
Jue.	0	2 (Vie.)	0	18 (Dom.)	0
Vie.	0	14 (Sáb.)	4 (Dom.)	0	0
Sáb.	0	0		0	14
Dom.	0	0		0	22

Comentarios. El modelo de la tabla 5.7 supone sólo una semana de operación. Para varias semanas, el modelo debe ocuparse de la naturaleza *rotatoria* de los días de la semana, en el sentido de que los días pueden actuar como orígenes para la demanda de la siguiente semana. Una forma de manejar esta situación consiste en suponer que la primera semana de operación se inicia con todas las hojas de sierra nuevas para cada día. De ahí en adelante se utiliza un modelo compuesto de exactamente 7 orígenes y 7 destinos que correspondan a los días de la semana. El nuevo modelo será como el de la tabla 5.7, menos el origen “Nuevas” y el destino “Deshecho”. Asimismo, sólo se bloquearán las celdas en las diagonales (costo unitario = M). Las celdas restantes tendrán un costo unitario de \$3.00, \$5.00 o \$6.00. Por ejemplo, el afilado del domingo de esta semana costará \$6 para el lunes de la siguiente semana, \$5 para el martes y \$3 para el resto, lo cual significa que el costo unitario para la fila del domingo en la tabla se leerá \$6, \$5, \$3, \$3, \$3, \$3 y M , respectivamente.

TABLA 5.7 Problema de afilado de herramientas, expresado como un modelo de transporte.

	1 Lun.	2 Mar.	3 Mié.	4 Jue.	5 Vie.	6 Sáb.	7 Dom.	8 Desecho	
1-Nuevas	\$12 24	\$12 12	\$12	\$12	\$12	\$12	\$12	\$0 88	124
2-Lun.	<i>M</i>	\$6	\$5 14	\$3 10	\$3	\$3	\$3	\$0	24
3-Mar.	<i>M</i>	<i>M</i>	\$6	\$5	\$3 12	\$3	\$3	\$0	12
4-Mié.	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	\$6 10	\$5 4	\$3	\$3	\$0	14
5-Jue.	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	\$6 2	\$5	\$3 18	\$0	20
6-Vie.	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	\$6 14	\$5 4	\$0	18
7-Sáb.	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	\$6 0	\$0 14	14
8-Dom.	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i> 22	22
	24	12	14	20	18	14	22	124	

De manera intuitiva, y sin resolver el nuevo modelo de transporte en absoluto, resulta evidente que es posible usar el servicio de afilado más barato (≥ 2 días) para satisfacer toda la demanda a partir de la semana 2. Esta conclusión intuitiva puede confirmarse resolviendo el nuevo modelo (archivo *toraEx5.2-2a.txt*).

5.3 ALGORITMO DE TRANSPORTE

Momento, ¡ajá! El lado brillante de los cálculos manuales: ¡Modelo de transporte clásico!

El algoritmo de transporte especial que se presentará en esta sección se desarrolló inicialmente cuando la norma eran los cálculos manuales y los atajos estaban justificados. En la actualidad, los poderosos códigos de computadora resuelven modelos de transporte de cualquier tamaño como una PL regular. No obstante, hay más acerca del modelo de transporte que los cálculos manuales. Primero, su significado histórico en la evolución de las técnicas de IO es importante y debe preservarse. Segundo, el formato de la tabla de transporte especial suele facilitar el modelado de una serie de situaciones que no tratan directamente del transporte de bienes (vea la sección 5.2). Tercero, los cálculos algorítmicos manuales son tan sencillos (casi intuitivos) que un principiante puede obtener una “sensación” de lo que es la optimización (¿podría ser ésta la razón por la que algunos libros de texto antiguos presentaban el modelo de transporte —también conocido como *método de*

escalonamiento—antes que el método simplex, que es más exigente en lo relativo a los cálculos?). Por último, el algoritmo de transporte ofrece información sobre el uso de las relaciones teóricas primal-dual (que se presentan en la sección 4.2) para lograr un resultado final práctico, es decir, desarrollar reglas sencillas para los cálculos manuales. El ejercicio es teóricamente intrigante.

Los pasos básicos del algoritmo de transporte son *exactamente* iguales a los del método simplex (capítulo 3). Sin embargo, en vez de utilizar la tabla simplex regular, se aprovecha la estructura especial del modelo de transporte para organizar los cálculos en una forma más conveniente.

Paso 1. Determine una solución factible básica *inicial* y vaya al paso 2.

Paso 2. Utilice la condición de optimalidad del método simplex para determinar la *variable de entrada* de entre todas las variables no básicas. Si se satisface la condición de optimalidad, deténgase. De lo contrario, avance al paso 3.

Paso 3. Use la condición de factibilidad del método simplex para determinar la *variable de salida* de entre todas las variables básicas actuales, y encuentre la nueva solución básica. Regrese al paso 2.

Los detalles del algoritmo se explican en las secciones 5.3.1 y 5.3.2 por medio del siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.3-1 (SunRay Transport)

La compañía SunRay Transport usa camiones para transportar granos desde tres silos hasta cuatro molinos. En la tabla 5.8 se resumen la oferta (en camiones cargados) y la demanda (también en camiones cargados) junto con los costos de transporte por unidad por camión cargado en las diferentes rutas. Los costos de transporte por unidad, c_{ij} (que se muestran en la esquina de cada casilla), se dan en cientos de dólares. El modelo busca el programa de envíos a un costo mínimo entre los silos y los molinos.

TABLA 5.8 Modelo de transporte de SunRay

		Molino				Oferta
		1	2	3	4	
Silo 1	1	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	15
	2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	
	3	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	
Demanda		5	15	15	15	

5.3.1 Determinación de la solución inicial

Un modelo de transporte general con m orígenes y n destinos tiene $m + n$ ecuaciones de restricción, una por cada origen y cada destino. Sin embargo, como el modelo de transporte siempre está balanceado (suma de la oferta = suma de la demanda), una de las ecuaciones es redundante, por lo que el modelo se reduce a $m + n - 1$ ecuaciones independientes y $m + n - 1$ variables básicas. En el ejemplo 5.3-1 la solución inicial tiene $3 + 4 - 1 = 6$ variables básicas.

La estructura especial del problema de transporte permite asegurar una solución básica inicial no artificial siguiendo uno de los tres métodos:⁴

1. Método de la esquina noroeste.
2. Método del costo mínimo.
3. Método de aproximación de Vogel.

El primer método es de naturaleza “mecánica”, ya que su finalidad principal es dar una solución (básica factible) inicial sin importar el costo. Los dos restantes son heurísticas que buscan una solución inicial de mejor calidad (un menor valor objetivo). Por lo general, el método heurístico de Vogel es el mejor, en tanto que el método de la esquina noroeste es el peor. Lo que lo compensa es que el método de la esquina noroeste implica menor cantidad de cálculos.

Método de la esquina noroeste. El método inicia en la celda de la *esquina noroeste* (ruta) de la tabla (variable x_{11}).

- Paso 1.** Asigne la mayor cantidad posible a la celda seleccionada, y ajuste las cantidades asociadas de oferta y demanda restando la cantidad asignada.
- Paso 2.** Tache la columna o fila con oferta o demanda cero para indicar que no se hagan más asignaciones en esa fila o columna. Si una fila y una columna dan cero al mismo tiempo, *tache sólo una*, y deje una oferta (demanda) cero en la fila (columna) que no se haya tachado.
- Paso 3.** Si se deja sin tachar *exactamente una* fila o columna, deténgase. De lo contrario, muévase a la celda de la derecha si acaba de tachar una columna, o a la de abajo si acaba de tachar una fila. Vaya al paso 1.

Ejemplo 5.3-2

La aplicación del procedimiento al modelo del ejemplo 5.3-1 da la solución básica inicial que se muestra en la tabla 5.9. Las flechas indican el orden en que se generan las cantidades asignadas.

La solución básica inicial es $x_{11} = 5, x_{12} = 10, x_{22} = 5, x_{23} = 15, x_{24} = 5, x_{34} = 10$.

El costo asociado del programa es $z = 5 \times 10 + 10 \times 2 + 5 \times 7 + 15 \times 9 + 5 \times 20 + 10 \times 18 = \520 .

Método del costo mínimo. El método del costo mínimo determina una mejor solución inicial al concentrarse en las rutas más económicas, y asigna la mayor cantidad posible a la celda con el costo unitario mínimo (los empates se rompen arbitrariamente). Luego se tacha la fila o columna

⁴ Todos los métodos están disponibles en TORA. Vea el final de la sección 5.3.3.

TABLA 5.9 Solución inicial del método de la esquina noroeste

	1	2	3	4	Oferta
1	10 5 → 10	2	20	11	15
2	12	7 5 → 15 → 5	9	20	25
3	4	14	16	18 10 ↓	10
Demanda	5	15	15	15	

satisfiecha y se ajustan las cantidades de oferta y demanda según corresponda. Si una fila o una columna se satisfacen al mismo tiempo, *sólo se tacha una*, al igual que en el método de la esquina noroeste. A continuación se selecciona la celda sin tachar con el costo unitario mínimo, y se repite el proceso hasta que quede exactamente una fila o una columna sin tachar.

Ejemplo 5.3-3

El método del costo mínimo se aplica al ejemplo 5.3-1.

1. La celda (1, 2) tiene el costo unitario mínimo en la tabla (= \$2). La mayor cantidad que se puede enviar a través de (1, 2) es $x_{12} = 15$ camiones cargados, con lo que se satisfacen tanto la fila 1 como la columna 2. Se tacha arbitrariamente la columna 2 y se ajusta a cero la oferta en la fila 1.
2. La celda (3, 1) tiene el menor costo unitario sin tachar (= \$4). Asigne $x_{31} = 5$ y tache la columna 1 porque se satisface; después ajuste la demanda de la fila 3 a $10 - 5 = 5$ camiones cargados.
3. Si se continúa de la misma manera, es posible asignar sucesivamente 15 camiones cargados a la celda (2, 3), 0 a la celda (1, 4), 5 a la celda (3, 4) y 10 a la celda (2, 4) (¡verifíquelo!).

La solución inicial resultante se resume en la tabla 5.10. Las flechas indican el orden en el cual se hacen las asignaciones. La solución inicial (compuesta de 6 variables básicas) es $x_{12} = 5$, $x_{14} = 0$, $x_{23} = 15$, $x_{24} = 10$, $x_{31} = 5$, $x_{34} = 5$. El valor objetivo asociado es $z = 15 \times 2 + 0 \times 11 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 4 + 5 \times 18 = \475 , que resulta ser mejor que la solución obtenida por el método de la esquina noroeste.

TABLA 5.10 Solución inicial de costo mínimo

	1	2	3	4	Oferta
1	10	(inicio) 2 15	20	11 0 → (final) 20	15
2	12	7	9	20 10 ↓	25
3	4	14	16	18 5 ↑	10
Demanda	5	15	15	15	

Método de aproximación de Vogel (MAV). Este método es una versión mejorada del método del costo mínimo que generalmente, aunque siempre, produce mejores soluciones iniciales.

- Paso 1.** Para cada fila (columna) determine una *medida de penalización* al restar el costo unitario mínimo en la fila (columna) del *siguiente* costo unitario *mínimo* en la misma fila (columna). Esta penalidad en realidad es una medida de la *oportunidad de pérdida* que se experimenta si no se elige la celda de menor costo unitario.
- Paso 2.** Identifique la fila o columna con la penalización máxima rompiendo los empates de manera arbitraria. Asigne la mayor cantidad posible a la variable con el menor costo unitario en la fila o columna seleccionada. Ajuste la oferta y la demanda, y tache la fila o columna satisfecha. Si una fila y una columna se satisfacen al mismo tiempo, sólo se tacha una de ambas, y a la fila (columna) restante se le asigna una oferta (demanda) igual a cero.
- Paso 3.**
- (a) Si exactamente una fila o columna con oferta o demanda cero permanece sin tachar, deténgase.
 - (b) Si una fila (columna) con oferta (demanda) *positiva* permanece sin tachar, determine las variables básicas en la fila (columna) usando el método del costo mínimo. Deténgase.
 - (c) Si todas las filas y columnas sin tachar tienen oferta y demanda cero (restantes), determine las variables básicas *cero* por el método del costo mínimo. Deténgase.
 - (d) De lo contrario, vaya al paso 1.

Ejemplo 5.3-4

Se aplicará el MAV al ejemplo 5.3-1. En la tabla 5.11 se calcula el primer conjunto de penalizaciones.

Debido a que la fila 3 tiene la mayor penalización ($= 10$) y la celda $(3, 1)$ tiene el menor costo unitario en esa fila, se asigna la cantidad 5 a x_{31} . Ahora la columna 1 está satisfecha y se debe tachar. Luego se vuelven a calcular nuevas penalizaciones como en la tabla 5.12, donde se muestra que la fila 1 tiene la mayor penalización ($= 9$). Por consiguiente, se asigna la cantidad máxima posible a la celda $(1, 2)$, la cual da $x_{12} = 15$ y al mismo tiempo satisface tanto la fila 1 como la columna 2. Se tacha arbitrariamente la columna 2 y se ajusta a cero la oferta en la fila 1.

TABLA 5.11 Penalizaciones en filas y columnas con el MAV

	1	2	3	4	Penalización en las filas
1	10	2	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	4	14	16	18	10
	5	15	15	15	
Penalización en las columnas	$10 - 4 = 6$	$7 - 2 = 5$	$16 - 9 = 7$	$18 - 11 = 7$	

TABLA 5.12 Primera asignación en el MAV ($x_{31} = 5$)

	1	2	3	4	Penalización en las filas
1	10	2	20	11	9
2	12	7	9	20	2
3	4	14	16	18	2
	5	15	15	15	10
Penalización en las columnas		—	5	7	7

Si se continúa de la misma manera, la fila 2 producirá la mayor penalización (= 11), y se asigna $x_{23} = 15$, con lo que se tacha la columna 3 y quedan 10 unidades en la fila 2. Sólo queda la columna 4, y tiene una oferta positiva de 15 unidades. Al aplicar el método del costo mínimo a esa columna, se asignan sucesivamente $x_{14} = 0$, $x_{34} = 5$ y $x_{24} = 10$ (¡verifíquelo!). El valor objetivo asociado con esta solución es $z = 15 \times 2 + 0 \times 11 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 4 + 5 \times 18 = \475 . Esta solución resulta tener el mismo valor objetivo obtenido con el método del costo mínimo.

Momento, ¡ajá! Cualquiera que sea su nombre, el método de la esquina noroeste presume una simplicidad elegante

No hay nada realmente sagrado en iniciar el método en la esquina noroeste (NO) desde la celda de la esquina noroeste y en cascada hacia abajo hasta llegar a la esquina sureste (SE), porque la misma solución se producirá si el procedimiento se inicia desde la esquina SE, zigzagueando hacia arriba hacia la celda NO (recuerde que todo lo que se está haciendo es resolver $x_{ij} = \min \{sobrantes de la oferta i y la demanda j\}$, ¡verifíquelo!). De hecho, iniciar el procedimiento desde la esquina noreste (NE) y en cascada hacia abajo a la esquina suroeste (SO), y viceversa, producirá una solución factible básica válida inicial, aunque diferente. Por cierto, esto es evidente dado que los métodos del costo mínimo y de Vogel pueden comenzar desde cualquier celda y aun así producir una solución factible básica. Pero independientemente de la celda específica utilizada para encontrar la solución inicial, la esquina NO goza de una sencillez elegante que no es compartida por los métodos del costo mínimo y de Vogel. Tal sencillez podría ser una ventaja en algunas situaciones prácticas. “Imagine que Facebook intenta usar un problema de transporte (literalmente enorme) para asignar el tráfico de clientes a sus servidores y que no hay tiempos, datos de costo ni valor para resolver el problema de transporte como un PL. A esa escala, el uso de la esquina NO para generar una solución factible es probablemente mejor que esperar a que el PL produzca, en cualquier cantidad de tiempo, una solución óptima”.⁵

⁵ Michael Trick (Carnegie Mellon University) me propuso esta aplicación en un correo electrónico con fecha de 13 de marzo de 2015 (su texto se reproduce aquí fielmente), en respuesta parcial a mi cuestionamiento acerca de la utilidad práctica del método de la esquina NO y el algoritmo de transporte (entre otras técnicas manuales clásicas de la IO).

5.3.2 Cálculos iterativos del algoritmo de transporte

Después de determinar la solución inicial (utilizando uno de los métodos de la sección 5.3.1), se utiliza el siguiente algoritmo para determinar la solución óptima:

- Paso 1.** Utilice la *condición de optimalidad simplex* para determinar la *variable de entrada*. Si se cumple la condición de optimalidad, deténgase. De lo contrario, vaya al paso 2.
- Paso 2.** Determine la *variable de salida* utilizando la *condición de factibilidad simplex*. Cambie la base y vuelva al paso 1.

Las condiciones de optimalidad y factibilidad no implican las operaciones familiares de filas utilizadas en el método simplex. En cambio, la estructura especial del modelo de transporte permite cálculos más sencillos (manuales).

Ejemplo 5.3-5

Resuelva el modelo de transporte del ejemplo 5.3-1, comenzando con la solución de la esquina noroeste.

En la tabla 5.13 se da la solución inicial de la esquina noroeste tal como aparece en la tabla 5.9, ejemplo 5.3-2. La determinación de la variable de entrada de entre las variables no básicas actuales (las que no forman parte de la solución básica inicial) se realiza calculando los coeficientes no básicos en la fila z , con el **método de los multiplicadores** (que tiene su origen en la teoría de dualidad de la PL, como se muestra en la sección 5.3.3).

En el método de los multiplicadores, los multiplicadores u_i y v_j se asocian con la fila i y la columna j de la tabla de transporte. Para cada variable *básica* actual x_{ij} , en la sección 5.3.3 se muestra que los multiplicadores satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ para cada } x_{ij} \text{ básica}$$

Como se muestra en la tabla 5.13, la solución inicial tiene seis variables básicas, lo que conduce a seis ecuaciones en siete incógnitas. Para resolver estas ecuaciones, el método de los multiplicadores requiere que cualquiera de

TABLA 5.13 Iteración inicial

	1	2	3	4	Oferta
1	10 5	2 10	20	11	15
2	12	7 5	9 15	20 5	25
3	4	14	16	18 10	10
Demand	5	15	15	15	

ellos se iguale a cero. Arbitriamente se establecerá $u_1 = 0$, y luego se despejarán las variables restantes como se muestra en la siguiente tabla:

Variable básica	Ecuación (u, v)	Solución
x_{11}	$u_1 + v_1 = 10$	Sean $u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 10$
x_{12}	$u_1 + v_2 = 2$	$u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 2$
x_{22}	$u_2 + v_2 = 7$	$v_2 = 2 \Rightarrow u_2 = 5$
x_{23}	$u_2 + v_3 = 9$	$u_2 = 5 \Rightarrow v_3 = 4$
x_{24}	$u_2 + v_4 = 20$	$u_2 = 5 \Rightarrow v_4 = 15$
x_{34}	$u_3 + v_4 = 18$	$v_4 = 15 \Rightarrow u_3 = 3$

En resumen, se tiene

$$u_1 = 0, u_2 = 5, u_3 = 3$$

$$v_1 = 10, v_2 = 2, v_3 = 4, v_4 = 15$$

A continuación, se utilizan u_i y v_j para evaluar las variables no básicas calculando

$$u_i + v_j - c_{ij} \text{ para cada } x_{ij} \text{ no básica}$$

Los resultados de estas evaluaciones se muestran en la tabla siguiente:

Variable no básica	$u_i + v_j - c_{ij}$
x_{13}	$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 4 - 20 = -16$
x_{14}	$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 15 - 11 = 4$
x_{21}	$u_2 + v_1 - c_{21} = 5 + 10 - 12 = 3$
x_{31}	$u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 10 - 4 = 9$
x_{32}	$u_3 + v_2 - c_{32} = 3 + 2 - 14 = -9$
x_{33}	$u_3 + v_3 - c_{33} = 3 + 4 - 16 = -9$

La información anterior, junto con el hecho de que $u_i + v_j - c_{ij} = 0$, para la x_{ij} básica, en realidad es equivalente a calcular la fila z de la tabla simplex, como lo muestra el siguiente resumen:

Básicas	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
Z	0	0	-16	4	3	0	0	0	9	-9	-9	0

Como el modelo de transporte *minimiza* el costo, la variable de entrada es aquella con el coeficiente *más positivo* en la fila z , es decir, x_{31} es la variable de entrada.

Todos los cálculos anteriores suelen hacerse directamente en la tabla de transporte como lo muestra la tabla 5.14, lo cual significa que no es necesario escribir las ecuaciones (u, v) en forma explícita. En su lugar, se inicia con $u_1 = 0$.⁶ Entonces es posible calcular los valores v de todas las columnas que tienen variables *básicas* en la fila 1: v_1 y v_2 . Luego se calcula u_2 con base en la ecuación (u, v) de la x_{22} básica. Ahora, dada u_2 , se calculan v_3 y v_4 .

⁶ El módulo tutorial de TORA está diseñado para demostrar que si se asigna un valor inicial cero a cualquier u o v se produce la misma $u + v - c$ para todas las variables no básicas. Vea el *momento de TORA* después de este ejemplo.

TABLA 5.14 Cálculos de la iteración 1

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Oferta
$u_1 \equiv 0$	10 5	2 10	20 -16	11 4	15
$u_2 = 5$	12 3	7 5	9 15	20 5	25
$u_3 = 3$	4 9	14 -9	16 -9	18 10	10
Demanda	5	15	15	15	

Por último, se determina u_3 aplicando la ecuación básica de x_{33} . El paso siguiente es para evaluar las variables no básicas al calcular $u_i + v_j - c_{ij}$ para cada x_{ij} no básica, como se muestra en la tabla 5.14 en la casilla situada en la esquina sureste de cada celda.

Después de identificar x_{31} como la variable de entrada, es necesario determinar la variable de salida. Recuerde que si x_{31} entra en la solución para volverse básica, una de las variables básicas actuales debe salir como no básica (a nivel cero).

La selección de x_{31} como la variable de entrada significa que transportar por esta ruta reduce el costo de transporte total. ¿Cuánto es lo máximo que se puede transportar a través de la nueva ruta? Observe en la tabla 5.14 que si la ruta (3, 1) transporta θ unidades (es decir, $x_{31} = \theta$), entonces el valor máximo de θ se determina con base en dos condiciones:

1. Los límites de la oferta y los requerimientos de la demanda permanecen satisfechos.
2. Las cargas a través de todas las rutas permanecen no negativas.

Ambas condiciones determinan el valor máximo de θ y la variable de salida como sigue: Primero construimos un *lazo cerrado* que se inicia y termina en la celda de la variable de entrada (3, 1). El lazo se compone sólo de segmentos horizontales y verticales *conectados* (no se permiten diagonales), cuyos elementos (excluyendo la celda de la variable de entrada) deben coincidir con una variable básica actual.⁷ En la tabla 5.15 se muestra el lazo para x_{31} . Hay exactamente un lazo para una variable de entrada dada.

En seguida se asigna la cantidad θ a la celda de la variable de entrada (3, 1). Para que los límites de la oferta y la demanda permanezcan satisfechos, se debe alternar entre restar y sumar la cantidad θ en las *casillas* sucesivas del lazo que se muestra en la tabla 5.15 (es indiferente si el lazo se traza en sentido horario o en sentido antihorario). Para $\theta \geq 0$, los nuevos valores de todas las variables permanecen no negativos si

$$x_{11} = 5 - \theta \geq 0$$

$$x_{22} = 5 - \theta \geq 0$$

$$x_{34} = 10 - \theta \geq 0$$

⁷ El módulo tutorial de TORA permite determinar, de forma interactiva, las celdas del *lazo cerrado* con confirmación inmediata de la validez de sus selecciones. Vea el *momento de TORA* después de este ejemplo.

TABLA 5.15 Determinación del lazo cerrado para x_{31}

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Oferta
$u_1 \equiv 0$	10 5 - 0 ↗ -	2 10 + 0 ↑ +	20 -16 -	11 4 -	15
$u_2 = 5$	12 3 -	7 5 - 0 ↗ -	9 15 -	20 5 + 0 ↑ +	25
$u_3 = 3$	4 0 +	14 -9 -	16 -9 -	18 10 - 0 -	10
Demanda	5	15	15	15	

El valor máximo correspondiente de θ es 5, que ocurre cuando x_{11} y x_{22} alcanzan un nivel cero. x_{11} o x_{22} salen de la solución. De manera intuitiva, aunque no es crucial, será computacionalmente ventajoso romper el empate seleccionando la variable con el mayor costo unitario. Por lo tanto, se elige x_{11} (con $c_{11} = 10$ en comparación a $c_{22} = 7$) como la variable de salida.

Los valores de las variables básicas en las casillas del lazo cerrado se ajustan para establecer $x_{31} = 5$, como se indica en la tabla 5.16. Como cada unidad transportada por la ruta (3, 1) reduce el costo de transporte en \$9 ($= u_3 + v_1 - c_{31}$), el costo total asociado con el nuevo programa es $\$9 \times 5 = \45 menos que el programa anterior. Así, el nuevo costo es $\$520 - \$45 = \$475$.

Dada la nueva solución básica, se repite el cálculo de los multiplicadores u y v , como se muestra en la tabla 5.16. La variable de entrada es x_{14} . El lazo cerrado indica que $x_{14} = 10$ y que x_{24} es la variable de salida.

La nueva solución, que se observa en la tabla 5.17, cuesta $\$4 \times 10 = \40 menos que la anterior, y así el nuevo costo es $\$475 - \$40 = \$435$. Los nuevos valores de $u_i + v_j - c_{ij}$ ahora son negativos para todas las x_{ij} no básicas. Por lo tanto, la solución dada en la tabla 5.17 es óptima.

TABLA 5.16 Cálculos en la iteración 2

	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Oferta
$u_1 \equiv 0$	10 -9 -	2 15 - 0 ↗ +	20 -16 -	11 0 4	15
$u_2 = 5$	12 -6 +	7 0 + 0 ↗ -	9 15 -	20 -10 - 0 -	25
$u_3 = 3$	4 5	14 -9 -	16 -9 -	18 5 -	10
Demanda	5	15	15	15	

TABLA 5.17 Cálculos en la iteración 3 (óptima)

	$v_1 = -3$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 11$	Oferta
$u_1 = 0$	10 -13	2 5	20 -16	11 10	15
$u_2 = 5$	12 -10	7 10	9 15	20 -4	25
$u_3 = 7$	4 5	14 -5	16 -5	18 5	10
Demanda	5	15	15	15	

La siguiente tabla resume la solución óptima:

Del silo	Al molino	Cantidad de camiones cargados
1	2	5
1	4	10
2	2	10
2	3	15
3	1	5
3	4	5
Costo óptimo = \$435		

Modelo de transbordo. El modelo de transporte supone transportes *directos* entre los orígenes y los destinos. Quizá éste no sea el caso en muchas situaciones donde puede ser más barato *transbordar* a través de nodos intermedios, antes de llegar al destino final. Es posible usar un artificio de modelado basado en el uso de *zonas intermedias* para convertir el modelo de transbordo en uno de transporte regular. La idea de la conversión es teóricamente interesante, pero rara vez se pone en práctica porque el modelo de transbordo (y de hecho el mismo modelo de transporte) es un caso especial de un modelo de red de costo mínimo altamente eficiente.

Momento de TORA

A partir de **Solve/Modify Menu**, seleccione las opciones **Solve** \Rightarrow **Iterations** y elija uno de los tres métodos (esquina noroeste, costo mínimo o Vogel) para iniciar las iteraciones del modelo de transporte. El módulo de iteraciones ofrece dos funciones interactivas útiles:

- Usted puede establecer cualquier u o v igual a cero antes de generar la iteración 2 (el valor predeterminado es $u_1 = 0$). Aunque los valores de u_i y v_j cambian, permanece igual la evaluación de las celdas no básicas ($= u_i + v_j - c_{ij}$).

2. También puede poner a prueba su comprensión de la selección del *lazo cerrado*, haciendo clic (en cualquier orden) en las celdas de la *esquina* que comprenden la ruta. Si su selección es correcta, la celda cambiará de color (verde para la variable de entrada, roja para la variable de salida y gris en otro caso).

Momento de Solver

En la figura 5.4 se proporciona la plantilla de Excel Solver para el ejemplo 5.3-1 (archivo *solverEx5.3-1.xls*), junto con todas las fórmulas y la definición de los nombres de los intervalos.

En la sección de entrada, los datos incluyen la matriz de costo unitario (celdas B4:E6), los nombres de los orígenes (celdas A4:A6), los nombres de los destinos (celdas B3:E3), la oferta (celdas F4:F6) y la de-

FIGURA 5.4

Solución de Excel Solver para el modelo de transporte del ejemplo 5.3-1 (archivo *solverEx5.3-1.xls*)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Solver Transportation Model (Example 5.3-1)								
2	Input data:								
3	Unit Cost Matrix	D1	D2	D3	D4	Supply			
4	S1	10	2	20	11	15			
5	S2	12	7	9	20	25			
6	S3	4	14	16	18	10			
7	Demand	5	15	15	15				
8	Optimum solution:								
9	Total cost								
10	435	D1	D2	D3	D4	rowSum			
11	S1	0	5	0	10	15			
12	S2	0	10	15	0	25			
13	S3	5	0	0	5	10			
14	colSum	5	15	15	15				
15									
16	Range name	Cells							
17	totalCost	A10	Cell		Formula		Copy to		
18	unitCost	B4:E6	B10	= B3			C10:E10		
19	supply	F4:F6	A11	= A4			A12:A13		
20	demand	B7:E7	F11	= SUM(\$B\$11:\$E\$11))			F12:F13		
21	rowSum	F11:F13	B14	= SUM(B\$11:B\$13))			C14:E14		
22	colSum	B14:E14	A10	= SUMPRODUCT(unitCost, shipment)					
23	shipment	B11:E13							
24									

Solver Parameters

Set Target Cell:

Equal To: Max Min Value of:

By Changing Cells:

Subject to the Constraints:

```
colSum = demand
rowSum = supply
shipment >= 0
```

manda (celdas B7:E7). En la sección de salida, las celdas B11:E13 proporcionan la solución óptima en forma de matriz. La fórmula del costo total se encuentra en la celda A10.

Momento de AMPL

Los archivos *amplEx5.3-1a.txt*, *amplEx5.3-1b.txt* y *amplEx5.3-1c.txt* presentan tres modelos de AMPL para el ejemplo 5.3-1.

5.3.3 Explicación del método de los multiplicadores usando el método simplex

La relación entre el método de los multiplicadores y el método simplex puede explicarse con base en las relaciones primal-dual (sección 4.2). Por la estructura especial del PL que representa el modelo de transporte (vea el ejemplo 5.1-1 como ilustración), el problema dual asociado se escribe de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

sujeto a

$$\begin{aligned} u_i + v_j &\leq c_{ij}, \text{ para toda } i \text{ y } j \\ u_i \text{ y } v_j &\text{ irrestrictas} \end{aligned}$$

donde

a_i = Oferta en el origen i

b_j = Demanda en el destino j

c_{ij} = Costo de transporte por unidad del origen i al destino j

u_i = Variable dual de la restricción asociada con el origen i

v_j = Variable dual de la restricción asociada con el destino j

De acuerdo con la fórmula 2, sección 4.2.4, los coeficientes de la función objetivo (costos reducidos) de la variable x_{ij} son iguales a la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de la restricción dual correspondiente, es decir, $u_i + v_j - c_{ij}$. Sin embargo, se sabe que esta cantidad debe ser igual a cero para cada *variable básica*, lo que produce el siguiente resultado:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ para cada variable básica } x_{ij}.$$

Hay $m + n - 1$ ecuaciones de este tipo que al resolverlas (después de suponer un valor arbitrario $u_1 = 0$) dan como resultado los multiplicadores u_i y v_j . Una vez calculados estos multiplicadores, la variable de entrada se determina a partir de todas las variables *no básicas*, como aquella con el mayor valor positivo $u_i + v_j - c_{ij}$.

La asignación de un valor arbitrario a una de las variables duales (es decir, $u_1 = 0$) parecería inconsistente con la forma como se calculan las variables duales siguiendo el método 2 de la

sección 4.2.3. Es decir, para una solución básica dada (y por consiguiente para la inversa) los valores duales deben ser únicos. El problema 5-31 aborda este punto.

5.4 MODELO DE ASIGNACIÓN

El modelo de asignación clásico se ocupa de vincular trabajadores (que poseen diversas habilidades) con puestos de trabajo. Presumiblemente, la variación de la habilidad afecta el costo de cubrir un puesto. La meta es determinar la asignación con costo mínimo de los trabajadores a los puestos de trabajo. El modelo de asignación general con n trabajadores y n puestos de trabajo se representa en la tabla 5.18. El elemento c_{ij} representa el costo de asignar el trabajador i al puesto j ($i, j = 1, 2, \dots, n$). No se pierde la generalidad al suponer que la cantidad de trabajadores y de puestos de trabajo son iguales, ya que siempre se pueden agregar trabajadores o puestos ficticios para satisfacer este supuesto.

El modelo de asignación es un caso especial del modelo de transporte, donde los trabajadores representan los orígenes, y los puestos de trabajo, los destinos. La oferta (demanda) en cada origen (destino) es igual a 1. El costo de “transportar” al trabajador i al puesto j es c_{ij} . De hecho, el modelo de asignación puede resolverse de forma directa como un modelo de transporte (o como un PL) regular. No obstante, el hecho de que la oferta y la demanda sean iguales a 1 conduce al desarrollo de un algoritmo de solución simple llamado **método húngaro**. Aunque el nuevo método de solución parece totalmente ajeno al modelo de transporte, en realidad el algoritmo tiene su origen en el método simplex, del mismo modo que el modelo de transporte.

5.4.1 Método húngaro⁸

Se utilizarán dos ejemplos para presentar la mecánica de este nuevo algoritmo. La siguiente sección proporciona una explicación del procedimiento basada en simplex.

TABLA 5.18 Modelo de asignación

		Puestos de trabajo				
		1	2	...	n	
Trabajadores	1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	1
	2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	1
	:	:	:	⋮	⋮	⋮
	N	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nn}	1
		1	1	...	1	

⁸ Como con el método de transporte, el método húngaro clásico (diseñado principalmente para cálculos manuales) es algo del pasado, y se expone aquí por razones históricas. En la actualidad no está garantizada la necesidad de ese tipo de cálculos, ya que el problema puede resolverse mediante códigos de computadora de PL altamente eficientes. Tal vez el beneficio de estudiar esas técnicas clásicas sea que se basan en una teoría compleja, que reduce los pasos de solución a reglas simples adecuadas para cálculos manuales.

Ejemplo 5.4-1

Los tres hijos de Joe Klyne, John, Karen y Terri, desean ganar algún dinero para sus gastos personales. El señor Klyne eligió tres actividades para sus hijos: podar el césped, pintar la puerta de la cochera y lavar los automóviles de la familia. Para evitar la competencia anticipada entre los hermanos, les pide que presenten propuestas individuales (secretas) por lo que consideren un pago justo por cada una de las tres tareas. En la tabla 5.19 se resumen las propuestas recibidas. Los niños acatarán la asignación de actividades que realice su padre.

El problema de asignación se resolverá por el método húngaro.

- Paso 1.** Determine p_i , el elemento de costo mínimo en la fila i de la matriz de costos original, y réstelo de todos los elementos de la fila i , $i = 1, 2, 3$.
- Paso 2.** Para la matriz creada en el paso 1, determine q_j , el elemento de costo mínimo de la columna j , y réstelo de todos los elementos de la columna j , $j = 1, 2, 3$.
- Paso 3.** A partir de la matriz del paso 2, intente determinar una asignación *factible* entre todas las entradas cero resultantes.
- 3a. Si puede hallarse esa asignación, es óptima.
- 3b. De lo contrario, se requieren más cálculos (como se explicará en el ejemplo 5.4-2).

En la tabla 5.20 se muestra la aplicación de los tres pasos al problema actual.

Las celdas con entradas cero subrayadas en el paso 3 dan la solución óptima (factible): John obtiene el trabajo de pintar, Karen el de podar el césped y Terri el de lavar los automóviles de la familia. El costo total para el señor Klyne es $9 + 10 + 8 = \$27$. Esta cantidad siempre será igual $(p_1 + p_2 + p_3) + (q_1 + q_2 + q_3) = (9 + 9 + 8) + (0 + 1 + 0) = \27 (en la siguiente sección se da una justificación de este resultado).

TABLA 5.19 Problema de asignación de Klyne

	Podar	Pintar	Lavar
John	\$15	\$10	\$9
Karen	\$9	\$15	\$10
Terri	\$10	\$12	\$8

TABLA 5.20 Aplicación del método húngaro al problema de asignación del ejemplo 5.4-1

Paso 1:

	Podar	Pintar	Lavar
John	15	10	9
Karen	9	15	10
Terri	10	12	8

Paso 2:

$$\begin{aligned} p_1 &= 9 \\ p_2 &= 9 \\ p_3 &= 8 \end{aligned}$$

	Podar	Pintar	Lavar
John	6	1	0
Karen	0	6	1
Terri	2	4	0

$$\text{Máx, columna } q_1 = 0 \quad q_2 = 1 \quad q_3 = 0$$

Paso 3:

	Podar	Pintar	Lavar
John	6	0	0
Karen	0	5	1
Terri	2	3	0

Como se indica en el paso 3 del método húngaro, los ceros creados por los pasos 1 y 2 quizás no den una solución factible de forma directa. En este caso, se necesitan más pasos para determinar la asignación óptima (factible). Esta situación se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.4-2

Suponga que la situación analizada en el ejemplo 5.4-1 se amplía a cuatro niños y cuatro actividades. En la tabla 5.21 se resumen los elementos de costo del problema.

La aplicación de los pasos 1 y 2 a la matriz de la tabla 5.21 (con $p_1 = 1, p_2 = 7, p_3 = 4, p_4 = 5, q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 3$ y $q_4 = 0$) da como resultado la matriz reducida de la tabla 5.22 (*¡verifíquelo!*):

Las ubicaciones de las entradas cero no permiten asignar actividades únicas a todos los niños. Por ejemplo, si se le asigna al niño 1 la actividad 1, entonces se eliminará la columna 1, y el niño 3 no tendrá una entrada cero en las tres columnas restantes. Este obstáculo se supera agregando el siguiente paso al procedimiento dado en el ejemplo 5.4-1:

Paso 3b. Si no pueden encontrarse asignaciones de elemento cero factibles:

- (i) Trace la cantidad *mínima* de líneas horizontales y verticales en la última matriz reducida para cubrir *todas* las entradas cero.
- (ii) Seleccione la entrada *mínima no cubierta*, réstela de cada entrada no cubierta y luego súmela a cada entrada en la intersección de dos líneas.
- (iii) Si no se puede determinar una asignación factible entre las entradas cero resultantes, repita el paso 3a.

La aplicación del paso 3b a la última matriz produce las celdas sombreadas en la tabla 5.23. La entrada mínima no sombreada (que se muestra subrayada) es igual a 1. Esta entrada se suma a la celda de intersección y se resta de las celdas sombreadas restantes para producir la matriz de la tabla 5.24, y la solución óptima indicada por los ceros subrayados.

TABLA 5.21 Modelo de asignación

		Actividad			
		1	2	3	4
Niño	1	\$1	\$4	\$6	\$3
	2	\$9	\$7	\$10	\$9
	3	\$4	\$5	\$11	\$7
	4	\$8	\$7	\$8	\$5

TABLA 5.22 Matriz de asignación reducida

		Actividad			
		1	2	3	4
Niño	1	0	3	2	2
	2	2	0	0	2
	3	0	1	4	3
	4	3	2	0	0

TABLA 5.23 Aplicación del paso 3b

		Actividad			
		1	2	3	4
Niño	1	0	3	2	2
	2	2	0	0	2
	3	0	1	4	3
	4	3	2	0	0

TABLA 5.24 Asignación óptima

		Actividad			
		1	2	3	4
Niño	1	0	2	1	1
	2	3	0	0	2
	3	0	0	3	2
	4	4	2	0	0

Momento de AMPL

El archivo *amplEx5.4-2.txt* proporciona el modelo AMPL para el modelo de asignación. El modelo es parecido al del modelo de transporte.

5.4.2 Explicación del método húngaro con simplex

El problema de asignación donde se determinan n trabajadores a n puestos de trabajo puede representarse como un modelo de PL de la siguiente manera: Sea c_{ij} el costo de asignar el trabajador i al puesto j , y defina

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el trabajador } i \text{ se asigna al puesto } j \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Entonces el modelo de PL se da como

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ o } 1$$

La solución óptima del modelo de PL anterior no cambia si se agrega una constante, o se resta de cualquier fila o columna de la matriz de costos (c_{ij}). Para probar este punto, sean p_i y q_j las constantes restadas de la fila i y la columna j . Por lo tanto, el elemento de costo c_{ij} cambia a

$$c'_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$$

Ahora

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} &= \sum_i \sum_j (c_{ij} - p_i - q_j) x_{ij} = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_i p_i \left(\sum_j x_{ij} \right) - \sum_j q_j \left(\sum_i x_{ij} \right) \\ &= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_i p_i (1) - \sum_j q_j (1) \\ &= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \text{constante}\end{aligned}$$

Como la nueva función objetivo difiere de la original por una constante, los valores óptimos de x_{ij} son los mismos en ambos casos. El desarrollo muestra que los pasos 1 y 2 del método húngaro, el cual pide restar p_i de la fila i y luego restar q_j de la columna j , produce un modelo de asignación equivalente. Al respecto, si puede hallarse una solución factible entre las entradas cero de la matriz de costos creada por los pasos 1 y 2, entonces debe ser óptima (porque el costo en la matriz modificada no puede ser menor que cero).

Si las entradas cero creadas no logran dar una solución factible (como se muestra en el ejemplo 5.4-2), entonces debe aplicarse el paso 2a (que trata de la cobertura de las entradas cero). La validez de este procedimiento tiene de nuevo su raíz en el método simplex de programación lineal y puede explicarse mediante la teoría de la dualidad (capítulo 4) y el teorema de holgura complementaria (capítulo 7). Los detalles de la demostración no se presentan aquí ya que son un tanto complejos.

La razón por la que $(p_1 + p_2 + \dots + p_n) + (q_1 + q_2 + \dots + q_n)$ da como resultado el valor objetivo óptimo es que representa la función objetivo dual del modelo de asignación. Este resultado puede verse mediante una comparación con la función objetivo dual del modelo de transporte dado en la sección 5.3.3. [Para mayores detalles, vea Bazaraa y colaboradores (2009)].

BIBLIOGRAFÍA

- Bazaraa, M., J. Jarvis y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.
- Dantzig, G., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- Hansen, P. y R. Wendell, “A Note on Airline Commuting”, *Interfaces*, vol. 12, núm. 1, pp. 85-87, 1982.
- Murty, K., *Network Programming*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1992.

Estudio de caso: Programación de citas en eventos comerciales de la Comisión de Turismo Australiana⁹

Herramientas: Modelo de asignación, heurística

Área de aplicación: Turismo

Descripción de la situación:

La Comisión de Turismo Australiana (ATC) organiza eventos comerciales alrededor del mundo para que sirvan de foro donde se puedan reunir los vendedores australianos de productos turísticos con los compradores internacionales de este tipo de productos, que incluyen hospedaje, paseos, transporte, entre otros. Durante esos eventos los vendedores se sitúan en cubículos y los compradores los visitan de acuerdo con citas programadas. Debido a la limitación de tiempo disponible en cada evento, y al hecho de que la cantidad de compradores y vendedores suele ser muy grande (en 1997 un evento de este tipo en Melbourne atrajo a 620 vendedores y a 700 compradores), la ATC procura programar con anticipación las citas entre vendedor y comprador para maximizar las preferencias. La idea es unir intereses mutuos para producir el uso de los tiempos disponibles de la manera más efectiva durante el evento.

Análisis:

El problema se ve como un modelo de asignación tridimensional que representa a los compradores, los vendedores y los tiempos programados. Para un evento con m compradores, n vendedores y T tiempos, se define

$$x_{ijt} = \begin{cases} 1, & \text{si el comprador } i \text{ se reúne con el vendedor } j \text{ en el periodo } t \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

c_{ij} = Una puntuación que representa las preferencias mutuas del comprador i y el vendedor j

El modelo de asignación asociado se expresa como

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \left(\sum_{t=1}^T x_{ijt} \right)$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^m x_{ijt} \leq 1, j = 1, 2, \dots, n, t = 1, 2, \dots, T$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ijt} \leq 1, i = 1, 2, \dots, m, t = 1, 2, \dots, T$$

$$\sum_{t=1}^T x_{ijt} \leq 1, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ijt} = (0, 1) \text{ para toda } i, j \text{ y } t$$

El modelo expresa las restricciones básicas de un modelo de asignación: Cada comprador o vendedor pueden reunirse con una persona como máximo por sesión y una reunión específica comprador-vendedor puede tener lugar cuando mucho en una sesión. En la función objetivo, los coeficientes c_{ij} , que representan las preferencias

⁹ A. T. Ernst, R. G. J. Mills y P. Welgama, "Scheduling Appointments at Trade Events for the Australian Tourist Commission," *Interfaces*, vol. 33, núm. 3, pp. 12-23, 2003.

del comprador-vendedor para las reuniones, no dependen de la sesión suponiendo que los compradores y vendedores son indiferentes al tiempo de sesión.

¿Cómo se determinan los coeficientes c_{ij} ? Después del registro de todos los compradores y vendedores, cada vendedor proporciona al ATC una lista priorizada de compradores que el vendedor quiere ver. A cada comprador se le pide una lista similar respecto de los vendedores. La lista asigna el valor 1 a la opción principal, y da valores mayores a las preferencias más bajas. Las listas no tienen que ser exhaustivas, en el sentido de que los vendedores y los compradores tienen la libertad para expresar su interés de reunirse con algunas, pero no con todas las contrapartes registradas. Por ejemplo, en una lista con 100 vendedores, un comprador puede buscar reuniones con sólo 10 vendedores, en cuyo caso las preferencias expresadas serán 1, 2, ..., 10 para los vendedores seleccionados.

Después, los datos brutos recogidos en la lista de compradores/vendedores se expresan algebraicamente como

$$b_{ij} = \text{clasificación asignada por el comprador } i \text{ a una reunión con el vendedor } j$$

$$s_{ji} = \text{clasificación asignada por el vendedor } j \text{ a una reunión con el comprador } i$$

$$B = \text{número máximo de preferencias elegidas por todos los compradores}$$

$$S = \text{número máximo de preferencias elegidas por todos los vendedores}$$

$$\alpha = \text{peso relativo de las preferencias del comprador (al calcular las puntuaciones } c_{ij}), 0 < \alpha < 1$$

$$1 - \alpha = \text{peso relativo de las preferencias del vendedor}$$

A partir de estas definiciones, los coeficientes objetivo c_{ij} se calculan como

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 + \alpha \left(\frac{B - b_{ij}}{B} \right) + (1 - \alpha) \left(\frac{S - s_{ji}}{S} \right), & \text{si } b_{ij} \neq 0 \text{ y } s_{ji} \neq 0 \\ 1 + \alpha \left(\frac{B - b_{ij}}{B} \right), & \text{si } b_{ij} \neq 0 \text{ y } s_{ji} = 0 \\ 1 + (1 - \alpha) \left(\frac{S - s_{ji}}{S} \right), & \text{si } b_{ij} = 0 \text{ y } s_{ji} \neq 0 \\ 0, & \text{si } b_{ij} = s_{ji} = 0 \end{cases}$$

La lógica detrás de estas fórmulas es que un valor menor de b_{ij} significa un valor mayor de $(B - b_{ij})$ y, por lo tanto, una puntuación más alta asignada a una reunión solicitada entre el comprador i y el vendedor j . Una interpretación similar se da a la puntuación $S - s_{ji}$ para la reunión solicitada por el vendedor j con el comprador i . Ambas puntuaciones se normalizan a valores entre 0 y 1 dividiéndolas entre B y S , respectivamente, y luego se ponderan con α y $1 - \alpha$ para reflejar la importancia relativa de las preferencias del comprador y el vendedor, $0 < \alpha < 1$, con valores de α menores a .5 a favor de las preferencias de los vendedores. Observe que $b_{ij} = 0$ y $s_{ji} = 0$ indican que no se solicitaron reuniones entre el comprador i y el vendedor j . La cantidad 1 aparece en las tres fórmulas principales de c_{ij} para darle una preferencia relativamente mayor que el caso donde no se solicitaron reuniones (es decir, $b_{ij} = s_{ji} = 0$). La normalización de las puntuaciones brutas asegura que $0 \leq c_{ij} \leq 2$.

Confiabilidad de los datos de entrada:

Un aspecto crucial en la situación actual es la confiabilidad de los datos de preferencia proporcionados por los compradores y vendedores. Se ha diseñado una herramienta de recolección de preferencias para garantizar que se observen las siguientes restricciones:

1. Las listas de compradores y vendedores están disponibles sólo después de que haya pasado la fecha límite de inscripción.
2. Sólo los compradores y vendedores registrados pueden participar en el proceso.
3. La ATC considera las preferencias de los participantes como confidenciales y no pueden ser vistas ni alteradas por otros participantes.

Con estas restricciones, se crea un sitio interactivo en Internet para permitir a los participantes introducir sus preferencias de manera conveniente. Más importante aún, el diseño del sitio garantiza datos de entrada válidos. Por ejemplo, el sistema evita que un comprador busque más de una reunión con el mismo vendedor y viceversa.

Solución del problema:

El modelo de asignación dado es sencillo y puede resolverse con los paquetes de PL disponibles. Los archivos de texto *amplCase3a.txt* y *amplCase3b.txt* proporcionan dos modelos de AMPL para esta situación. Los datos para los dos modelos se dan en un formato de hoja de cálculo (archivo *excelCase3.xls*). En el primer modelo, la hoja de cálculo se utiliza para calcular los coeficientes c_{ij} , que se utilizan a continuación como datos de entrada. En el segundo modelo, las puntuaciones de preferencia brutas, b_{ij} y s_{ji} , son los datos de entrada y el modelo en sí calcula los coeficientes c_{ij} . La ventaja del segundo modelo es que permite calcular los porcentajes de satisfacción del comprador y del vendedor en cuanto a sus preferencias expresadas.

En la figura 5.5a se muestra la salida del modelo *amplCase3b.txt* para los datos del archivo *excelCase3.xls* (6 compradores, 7 vendedores y 6 sesiones). La salida proporciona la asignación de compradores a vendedores dentro de cada sesión, así como el porcentaje de satisfacción de cada comprador y vendedor por un factor de peso $\alpha = .5$. Los resultados muestran una alta satisfacción tanto del comprador como del vendedor (92 y 86%, respectivamente). Si $\alpha < .5$, aumentará la satisfacción del vendedor.

Consideraciones prácticas:

Para que la solución del modelo de asignación sea realista, debe tener en cuenta los retrasos entre las citas sucesivas. En esencia, un comprador, una vez con cita, muy probablemente tendrá que pasar a otro cubículo para la siguiente cita. Por lo tanto, un calendario factible debe tener en cuenta el tiempo de transición entre las citas sucesivas. Las siguientes restricciones de *traslado* alcanzan este resultado:

$$x_{ijt} + \sum_{k \in J_i} x_{i,k,t+1} = 1, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T$$

El conjunto J_i representa a los vendedores que el comprador i no pudo atender en el periodo $t + 1$ sin experimentar un retraso indeseado. La lógica es que si el comprador i tiene una cita con el vendedor j en el periodo t ($x_{ijt} = 1$), entonces el mismo comprador no puede programar una cita el próximo periodo ($t + 1$) con el vendedor k que no puede ser atendido sin demora (es decir, $x_{i,k,t+1} = 0$). Es posible reducir la cantidad de restricciones de este tipo eliminando el periodo t que ocurre al final de un bloque de sesiones (por ejemplo, durante el receso para tomar café, la hora de la comida o el final del día).

Las restricciones adicionales aumentan considerablemente la dificultad de los cálculos del modelo. De hecho, es posible que el modelo no sea solucionable como un programa lineal entero, considerando las limitaciones de cálculo de los algoritmos de PE actuales, por lo que se necesita heurística para determinar una “buena” solución para el problema.

La heurística utilizada para resolver el nuevo modelo restringido se resume de la siguiente manera:

Para cada periodo t

1. Establezca $x_{ijt} = 0$ si la ubicación de la última reunión del comprador i en el periodo $t - 1$ no permite atender al vendedor j en el periodo t .
2. Establezca $x_{ijt} = 0$ si se ha programado una reunión entre i y j .
3. Resuelva el modelo de asignación bidimensional resultante.

Después de t

La calidad de la solución heurística puede medirse comparando su valor objetivo (medida de preferencia) con el del modelo de asignación original (sin restricciones de traslado). Los resultados reportados muestran que para

```

Optimal score = 50.87
Optimal assignments:

Session 1:
Assign buyer 1 to seller 1
Assign buyer 2 to seller 5
Assign buyer 3 to seller 4
Assign buyer 4 to seller 6
Assign buyer 5 to seller 2
Assign buyer 6 to seller 7

Session 2:
Assign buyer 1 to seller 3
Assign buyer 2 to seller 6
Assign buyer 3 to seller 5
Assign buyer 4 to seller 2
Assign buyer 5 to seller 1
Assign buyer 6 to seller 4

Session 3:
Assign buyer 1 to seller 2
Assign buyer 2 to seller 4
Assign buyer 3 to seller 6
Assign buyer 4 to seller 5
Assign buyer 5 to seller 3
Assign buyer 6 to seller 1

Session 4:
Assign buyer 1 to seller 5
Assign buyer 2 to seller 3
Assign buyer 3 to seller 1
Assign buyer 4 to seller 7
Assign buyer 5 to seller 4
Assign buyer 6 to seller 2

Session 5:
Assign buyer 2 to seller 2
Assign buyer 3 to seller 3
Assign buyer 4 to seller 4
Assign buyer 5 to seller 5
Assign buyer 6 to seller 6

Session 6:
Assign buyer 1 to seller 4
Assign buyer 2 to seller 7
Assign buyer 3 to seller 2
Assign buyer 4 to seller 1
Assign buyer 5 to seller 6
Assign buyer 6 to seller 5

Buyers satisfaction: Average = 92
Buyer:    1   2   3   4   5   6
Percent: 100   86  100   80   86  100

Sellers satisfaction: Average = 86
Seller:   1   2   3   4   5   6   7
Percent: 83  100   60  100  100  100   60

```

FIGURA 5.5

Salida de AMPL para el modelo de asignación

cinco eventos separados, la brecha entre las dos soluciones fue inferior a 10%, lo cual indica que la heurística ofrece soluciones confiables.

Desde luego, la solución ideada no garantiza que todas las preferencias se cumplan, debido al límite en el número disponible de períodos de tiempo. Curiosamente, los resultados recomendados por la heurística muestran que al menos 80% de las reuniones de mayor prioridad (con preferencia 1) son seleccionadas por la solución. Tal porcentaje disminuye casi linealmente con el aumento de las puntuaciones expresadas (una puntuación más alta indica una menor preferencia).

PROBLEMAS¹⁰

Sección	Problemas asignados
5.1	5-1 a 5-13
5.2	5-14 a 5-21
5.3.1	5-22 a 5-22
5.3.2	5-23 a 5-29
5.3.3	5-30 a 5-31
5.4.1	5-32 a 5-38

5-1. ¿Verdadero o falso?

- (a) Para balancear un modelo de transporte, es necesario agregar un origen y un destino ficticios.
- (b) Las cantidades enviadas a un destino ficticio representan un excedente en el origen que hace el envío.
- (c) Las cantidades enviadas desde un origen ficticio representan faltantes en los destinos que reciben el envío.

5-2. En cada uno de los siguientes casos, determine si debe agregarse un origen ficticio o un destino ficticio para balancear el modelo.

- (a) Oferta: $a_1 = 10, a_2 = 5, a_3 = 4, a_4 = 6$
Demanda: $b_1 = 10, b_2 = 5, b_3 = 7, b_4 = 9$
- (b) Oferta: $a_1 = 30, a_2 = 44$
Demanda: $b_1 = 25, b_2 = 30, b_3 = 10$
- 5-3.** En la tabla 5.4 del ejemplo 5.1-2, donde se agrega una planta ficticia, ¿qué significa una solución donde la planta ficticia “envía” 150 automóviles a Denver y 50 a Miami?
- *5-4.** En la tabla 5.5 del ejemplo 5.1-2, donde se agrega un destino ficticio, suponga que la planta de Detroit debe enviar *toda* su producción. ¿Cómo se implementa esta restricción en el modelo?
- 5-5.** En el ejemplo 5.1-2, suponga que en el caso donde la demanda excede la oferta (tabla 5.4), se aplica una penalización a razón de \$200 y \$300 por cada automóvil no entregado en Denver y Miami, respectivamente. Además, no se hacen envíos de la planta de Los Ángeles al centro de distribución de Miami. Elabore el modelo y determine el programa de envíos óptimo para el problema.
- *5-6.** Tres plantas de energía eléctrica con capacidades de 25, 40 y 30 millones de kWh abastecen electricidad a tres ciudades. Las demandas máximas en las tres ciudades se estiman en 30, 35 y 25 millones de kWh. El precio por millón de kWh en las tres ciudades se da en la tabla 5.25.

¹⁰ Usted puede utilizar TORA para encontrar la solución óptima. Los modelos con AMPL y Solver se presentan al final de la sección 5.3.2.

TABLA 5.25 Precio por millón de kWh para el problema 5-6

		Ciudad		
		1	2	3
Planta 2	1	\$600	\$700	\$400
	2	\$320	\$300	\$350
	3	\$500	\$480	\$450

Durante el mes de agosto, la demanda se incrementa 20% en cada una de las tres ciudades, la cual se puede satisfacer comprando electricidad de otra red a un precio más elevado de \$1000 por millón de kWh. Sin embargo, la red no está enlazada a la ciudad 3. La compañía eléctrica desea determinar el plan más económico para la distribución y compra de energía adicional.

- (a) Formule el problema como un modelo de transporte.
 - (b) Determine un plan de distribución óptimo para la compañía eléctrica.
 - (c) Determine el costo de la energía adicional comprada por cada una de las tres ciudades.
- 5-7.** Resuelva el problema 5-6, suponiendo que se pierde 10% de la energía que se transmite a través de la red.
- 5-8.** Tres refinerías con capacidades diarias de 6, 5 y 8 millones de galones, respectivamente, abastecen a tres áreas de distribución con demandas diarias de 4, 8 y 7 millones de galones, respectivamente. La gasolina se transporta a las tres áreas de distribución a través de una red de oleoductos. El costo de transporte es de 10 centavos por 1000 galones por milla de oleoducto. En la tabla 5.26 se presenta la distancia en millas entre las refinerías y las áreas de distribución. La refinería 1 no está conectada al área de distribución 3.
- (a) Construya el modelo de transporte asociado.
 - (b) Determine el programa de envíos óptimo en la red.
- *5-9.** En el problema 5.8, suponga que la capacidad de la refinería 3 es de sólo 6 millones de galones y que el área de distribución debe recibir toda su demanda. Adicionalmente, cualesquier cantidades faltantes en las áreas 2 y 3 incurrirán en una penalización de 5 centavos por galón.
- (a) Formule el problema como un modelo de transporte.
 - (b) Determine el programa de envíos óptimo.
- 5-10.** En el problema 5-8, suponga que la demanda diaria en el área 3 disminuye a 4 millones de galones. La producción excedente en las refinerías 1 y 2 se envía a otras áreas de distribución por medio de camiones. El costo de transporte por 100 galones es de \$1.50 desde la refinería 1 y de \$2.20 desde la refinería 2. La refinería 3 puede enviar su producción excedente a otros procesos químicos dentro de la planta.
- (a) Formule el problema como un modelo de transporte.
 - (b) Determine el programa de envíos óptimo.

TABLA 5.26 Gráfica de la distancia en millas para el problema 5-8

		Área de distribución		
		1	2	3
Refinería 1	1	120	180	—
	2	300	100	80
	3	200	250	120

5-11. Tres huertas abastecen a cuatro minoristas con cajas de naranjas. La demanda diaria de los cuatro minoristas es de 150, 150, 400 y 100 cajas, respectivamente. Las ofertas en las tres huertas dependen de la mano de obra regular disponible y se estiman en 150, 200 y 250 cajas diarias. Sin embargo, las huertas 1 y 2 indicaron que podrían abastecer más cajas, si es necesario, recurriendo a mano de obra extra. La huerta 3 no ofrece esta opción. Los costos de transporte por caja de las huertas a los minoristas se presentan en la tabla 5.27.

- (a) Formule el problema como un modelo de transporte.
 - (b) Resuelva el problema.
 - (c) ¿Cuántas cajas deberían abastecer las huertas 1 y 2 si utilizan tiempo extra de mano de obra?
- 5-12.** Tres centros de distribución envían automóviles a cinco concesionarias. El costo de envío depende de la distancia en millas entre los orígenes y los destinos, y es independiente de si el camión hace el viaje con cargas parciales o completas. En la tabla 5.28 se resume la distancia en millas entre los centros de distribución y las concesionarias, junto con las cifras de oferta y demanda mensuales dadas en *número* de automóviles. Una carga completa comprende 18 automóviles. El costo de transporte por milla de camión es de \$25.
- (a) Formule el modelo de transporte asociado.
 - (b) Determine el programa de envíos óptimo.
- 5-13.** MG Auto, del ejemplo 5.1-1, produce cuatro modelos de automóviles: *M1*, *M2*, *M3* y *M4*. La planta de Detroit produce los modelos *M1*, *M2* y *M4*. Los modelos *M1* y *M2* también se producen en Nueva Orleans. La planta de Los Ángeles fabrica los modelos *M3* y *M4*. En la tabla 5.29 se indican las capacidades de las distintas plantas y las demandas en los centros de distribución.

La gráfica de la distancia en millas es igual a la mostrada en el ejemplo 5.1-1, y la tarifa de transporte se mantiene en 8 centavos por milla de automóvil en todos los modelos. Además, es posible satisfacer un porcentaje de la demanda de algunos modelos con la oferta de otros de acuerdo con las especificaciones de la tabla 5.30.

- (a) Formule el modelo de transporte correspondiente.
- (b) Determine el programa de envíos óptimo (*sugerencia*: Agregue cuatro nuevos destinos correspondientes a las nuevas combinaciones [*M1*, *M2*], [*M3*, *M4*], [*M1*, *M3*] y [*M2*, *M4*]. Las demandas en los destinos nuevos se determinan a partir de los porcentajes dados).

TABLA 5.27 Costo de transporte/caja para el problema 5-11

	Minorista			
	1	2	3	4
Huerta 1	\$1	\$2	\$3	\$2
Huerta 2	\$2	\$4	\$1	\$2
Huerta 3	\$1	\$3	\$5	\$3

TABLA 5.28 Gráfica de la distancia en millas, y oferta y demanda para el problema 5-12

	Concesionaria					
	1	2	3	4	5	Oferta
Centro 1	100	150	200	140	35	400
Centro 2	50	70	60	65	80	200
Centro 3	40	90	100	150	130	150
Demandas	100	200	150	160	140	

TABLA 5.29 Capacidades y demandas para el problema 5-13

	Modelo				Totales
	M1	M2	M3	M4	
<i>Planta</i>					
Los Ángeles	—	—	700	300	1000
Detroit	500	600	—	400	1500
Nueva Orleáns	800	400	—	—	1200
<i>Centro de distribución</i>					
Denver	700	500	500	600	2300
Miami	600	500	200	100	1400

TABLA 5.30 Modelos intercambiables para el problema 5-13

Centro de distribución	Porcentaje de la demanda	Modelos intercambiables
Denver	10	M1, M2
	20	M3, M4
Miami	10	M1, M3
	5	M2, M4

- 5-14.** En el ejemplo 5.2-1, suponga que el costo de almacenaje por unidad depende del periodo y es de 40, 30 y 70 centavos en los periodos 1, 2 y 3, respectivamente. La penalización y los costos de producción son iguales a los dados en el ejemplo. Determine la solución óptima e interprete los resultados.
- *5-15.** En el ejemplo 5.2-2, suponga que el servicio de afilado es de 3 días a \$1 por hoja el lunes y el martes (días 1 y 2). Reformule el problema e interprete la solución óptima.
- 5-16.** En el ejemplo 5.2-2, si no se utiliza una hoja el día que se afiló, se incurre en un costo de almacenaje de 50 centavos por día. Reformule el modelo e interprete la solución óptima.
- 5-17.** JoShop quiere asignar cuatro categorías diferentes de máquinas a cinco tipos de actividades. La cantidad de máquinas disponibles en las cuatro categorías son 25, 30, 20 y 30. La cantidad de trabajos en las cinco actividades son 20, 20, 30, 10 y 25. A la categoría de la máquina 4 no se le puede asignar una actividad del tipo 4. En la tabla 5.31 se proporciona el costo unitario (en dólares) de asignar una categoría de máquina a un tipo de actividad. El objetivo del problema es determinar la cantidad óptima de máquinas en cada categoría que se debe asignar a cada tipo de actividad. Resuelva el problema e interprete la solución.

TABLA 5.31 Costos unitarios para el problema 5-17

	Tipo de actividad				
	1	2	3	4	5
Categoría de máquina	1	10	2	3	15
	2	5	10	15	2
	3	15	5	14	7
	4	20	15	13	—

- *5-18.** La demanda de un artículo perecedero durante los próximos cuatro meses es de 400, 300, 420 y 380 toneladas, respectivamente. La capacidad de suministro para los mismos meses es de 500, 600, 200 y 300 toneladas. El precio de compra por tonelada varía cada mes y se estima en \$100, \$140, \$120 y \$150, respectivamente. Como el artículo es perecedero, el suministro del mes en curso debe consumirse dentro de los 3 meses siguientes (a partir del mes en curso). El costo de almacenamiento por tonelada es de \$3 al mes. La naturaleza del artículo no permite aceptar pedidos en espera. Resuelva el problema como un modelo de transporte y determine el programa óptimo para el artículo durante los próximos 4 meses.
- 5-19.** La demanda de un pequeño motor especial durante los próximos cinco trimestres es de 200, 150, 300, 250 y 400 unidades, respectivamente. El fabricante que surte el motor tiene capacidades de producción diferentes estimadas en 180, 230, 430, 300 y 300 para los cinco trimestres. No se aceptan pedidos en espera pero, si es necesario, el fabricante puede utilizar tiempo extra para satisfacer la demanda inmediata. La capacidad de tiempo extra en cada periodo es la mitad de la capacidad regular. Los costos de producción por unidad en los cinco periodos son de \$100, \$96, \$116, \$102 y \$106, respectivamente. El costo de producción con tiempo extra por motor es 50% más alto que el costo de producción regular. Si un motor se produce ahora para su uso en períodos posteriores, se incurre en un costo de almacenamiento adicional de \$4 por motor por periodo. Formule el problema como un modelo de transporte. Determine la cantidad óptima de motores que se deben producir durante el tiempo regular y el tiempo extra de cada periodo.
- 5-20.** Ciertos motores de avión reciben un mantenimiento preventivo periódico, en el que se debe reemplazar un componente importante. La cantidad de aviones programados para tal mantenimiento durante los siguientes seis meses se estima en 200, 180, 300, 198, 230 y 290, respectivamente. Todo el trabajo de mantenimiento se realiza durante el primer día del mes, donde un componente usado se puede reemplazar por uno nuevo o uno reparado. La reparación de los componentes usados puede hacerse en un taller de reparación local, donde estarán listos para usarse al principio del siguiente mes, o bien, se envían a un taller de reparación central donde se espera una demora de 3 meses (incluido el mes en que ocurre el mantenimiento). El costo de reparación en el taller local es de \$120 por componente, y en el taller central es de sólo \$35 por componente. Un componente reparado utilizado en un mes posterior incurirá en un costo de almacenamiento adicional de \$1.50 por unidad por mes. Pueden adquirirse componentes nuevos a \$200 cada uno en el mes 1, con un incremento de 5% en el precio cada 2 meses. Formule el problema como un modelo de transporte, y determine el programa óptimo para satisfacer la demanda del componente durante los siguientes seis meses.
- 5-21.** El Servicio de Parques Nacionales recibe cuatro ofertas para talar tres bosques de pinos en Arkansas. Las tres ubicaciones incluyen 10,000, 20,000 y 30,000 acres. Un solo licitante puede hacer ofertas por un máximo de 50% del total de acres disponible. Las ofertas por acre en las tres ubicaciones se dan en la tabla 5.32. El licitante 2 no desea hacer ofertas en la ubicación 1, y el licitante 3 no puede ofertar en la ubicación 2.
- En la presente situación, se debe *maximizar* el ingreso por las ofertas totales para el Servicio de Parques. Muestre la forma como el problema se puede formular como un modelo de transporte.
 - Determine la superficie en acres que se asignará a cada uno de los cuatro licitantes.

TABLA 5.32 Ofertas por acre para el problema 5-21

		Ubicación		
		1	2	3
Licitante	1	\$520	\$210	\$570
	2	—	\$510	\$495
	3	\$650	—	\$240
	4	\$180	\$430	\$710

TABLA 5.33 Datos para el problema 5-22

*(a)			(b)			(c)		
0	2	1	6	1	2	6	7	5
2	1	5	7	0	4	2	12	2
2	4	3	7	3	1	5	11	3
5 5 10			10 10 10			9 10 11		

TABLA 5.34 Modelos de transporte para el problema 5-23

(i)			(ii)			(iii)		
\$0	\$2	\$1	6	\$10	\$4	\$2	8	—
\$2	\$1	\$5	9	\$2	\$3	\$4	5	\$7
\$2	\$4	\$3	5	\$1	\$2	\$0	6	\$1
5 5 10			7 6 6			5 6 19		

- 5-22.** Compare las soluciones iniciales obtenidas con los métodos de la esquina noroeste, del costo mínimo y de Vogel para cada uno de los modelos de la tabla 5.33.
- 5-23.** Considere los modelos de transporte que se muestran en la tabla 5.34.
- Use el método de la esquina noroeste para encontrar la solución inicial.
 - Desarrolle las iteraciones que conducen a la solución óptima.
 - Experimento con TORA.* Utilice el módulo de iteraciones de TORA para comparar el efecto de utilizar los métodos de la esquina noroeste, del costo mínimo y de Vogel en la cantidad de iteraciones que conducen a la solución óptima.
 - Experimento con Solver.* Resuelva el problema modificando el archivo *solverEx5.3-1.xls*.
 - Experimento con AMPL.* Resuelva el problema modificando el archivo *amplEx5.3-1b.txt*.
- 5-24.** En el problema de transporte de la tabla 5.35, la demanda total excede la oferta total. Suponga que los costos de penalización por unidad de la demanda no satisfecha son \$5, \$3 y \$2 para los destinos 1, 2 y 3, respectivamente. Aplique la solución inicial de costo mínimo, y calcule las iteraciones que conducen a la solución óptima.
- 5-25.** En el problema 5-24, suponga que no hay costos de penalización, pero que la demanda en el destino 3 se debe satisfacer por completo.
- Encuentre la solución óptima.
 - Experimento con Solver.* Resuelva el problema modificando el archivo *solverEx5.3-1.xls*.
 - Experimento con AMPL.* Resuelva el problema modificando el archivo *amplEx5.3-1b.txt*.
- 5-26.** En el problema de transporte desbalanceado de la tabla 5.36, si no se envía una unidad de un origen (a cualquiera de los destinos) se incurre en un costo de almacenamiento a razón de \$5, \$4 y \$3 por unidad

TABLA 5.35 Datos para el problema 5-24

\$5	\$1	\$7	10
\$6	\$4	\$6	80
\$3	\$2	\$5	15
75	20	50	

TABLA 5.36 Datos para el problema 5-26

\$1	\$2	\$1	20
\$3	\$4	\$5	40
\$2	\$3	\$3	30
30	20	20	

para los orígenes 1, 2 y 3, respectivamente. Además, toda la oferta del origen 2 se debe enviar en su totalidad para que haya espacio para un nuevo producto. Use la solución inicial de Vogel, y determine todas las iteraciones que conducen al programa de transporte óptimo.

- *5-27. En un problema de transporte de 3×3 , sea x_{ij} la cantidad transportada del origen i al destino j , y c_{ij} el correspondiente costo de transporte por unidad. Las cantidades de la oferta en los orígenes 1, 2 y 3, son 15, 30 y 85 unidades, respectivamente, y las demandas en los destinos 1, 2 y 3 son 20, 30 y 80 unidades, respectivamente. Suponga que la solución inicial de la esquina noroeste es óptima y que los valores asociados de los multiplicadores se dan como $u_1 = -2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$, $v_1 = 2$, $v_2 = 5$ y $v_3 = 10$.
- (a) Encuentre el costo óptimo asociado.
 - (b) Determine el menor valor de c_{ij} para cada variable no básica que mantendrá la optimalidad de la solución de la esquina noroeste.
- 5-28. El problema de transporte de la tabla 5.37 proporciona la solución básica degenerada indicada (es decir, al menos una de las variables básicas es cero). Suponga que los multiplicadores asociados con esta solución son $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 2$ y $v_3 = 5$ y que el costo unitario para todas las variables x_{ij} iguales a *cero* (básicas y no básicas) está dado por

$$c_{ij} = i + j\theta, -\infty < \theta < \infty$$

- (a) Si la solución dada es óptima, determine el valor óptimo asociado de la función objetivo.
- (b) Determine el valor de θ que garantizará la optimalidad de la solución dada (*sugerencia:* Localice la variable básica cero).

- 5-29. Considere el problema

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \geq a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ para toda } i \text{ y } j$$

TABLA 5.37 Datos para el problema 5-28

10			10
	20	20	40
10	20	20	

TABLA 5.38 Datos para el problema 5-29

\$1	\$1	\$2	5
\$6	\$5	\$1	6
2	7	1	

Quizá parezca lógico suponer que la solución óptima requerirá que el primer (segundo) conjunto de desigualdades sea reemplazado con ecuaciones si $\sum a_i \geq \sum b_j$ ($\sum a_i \leq \sum b_j$). El ejemplo contrario que se presenta en la tabla 5.38 muestra que este supuesto no es correcto.

Demuestre que la aplicación del procedimiento sugerido da la solución $x_{11} = 2, x_{12} = 3, x_{22} = 4$ y $x_{23} = 2$, con $z = \$27$, que es peor que la solución factible $x_{11} = 2, x_{12} = 7$ y $x_{23} = 6$, con $z = \$15$.

- 5-30.** Escriba el problema dual para la programación lineal del problema de transporte del ejemplo 5.3-5 (tabla 5.13). Calcule el valor objetivo *dual* óptimo asociado, utilizando los valores duales óptimos dados en la tabla 5.17, y demuestre que es igual al costo óptimo dado en el ejemplo.
- 5-31.** En el modelo de transporte, una de las variables duales asume un valor arbitrario. Esto significa que, para la misma solución básica, los valores de las variables duales asociadas no son únicos. El resultado parece contradecir la teoría de la programación lineal, donde los valores duales se determinan como el producto vectorial de los coeficientes objetivo de las variables básicas y la matriz básica inversa asociada (vea el método 2, sección 4.2.3). Demuestre que, aunque la base inversa es única para el modelo de transporte, el vector de los coeficientes objetivo *básicos* no tiene que ser así. Específicamente, demuestre que si c_{ij} se cambia a $c_{ij} + k$ para toda i y j , donde k es una constante, entonces los valores óptimos de x_{ij} seguirán siendo iguales. Por consiguiente, el uso de un valor arbitrario para una variable dual es implícitamente equivalente a suponer que se agrega una constante específica k a todas las c_{ij} .
- 5-32.** Considere los modelos de asignación de la tabla 5.39.
- (a) Resuélvalos usando el método húngaro.
 - (b) *Experimento con TORA.* Exprese el problema como una PL y resuélvalo con TORA.
 - (c) *Experimento con TORA.* Utilice TORA para resolver el problema como un modelo de transporte.
 - (d) *Experimento con Solver.* Modifique el archivo *solverEx5.3-1.xls* para resolver el problema.
 - (e) *Experimento con AMPL.* Modifique el archivo *AMPLEx5.3b-1.txt* para resolver el problema.
- 5-33.** JoShop necesita asignar cuatro puestos de trabajo a cuatro trabajadores. El costo de desempeñar un puesto es una función de las habilidades de los trabajadores. En la tabla 5.40 se resume el costo de las asignaciones. El trabajador 1 no puede tener el puesto 3, y el trabajador 3 no puede desempeñar el puesto 4. Determine la asignación óptima mediante el método húngaro.

TABLA 5.39 Datos para el problema 5-32

(i)					(ii)				
\$3	\$8	\$2	\$10	\$3	\$3	\$9	\$2	\$2	\$7
\$6	\$5	\$2	\$7	\$5	\$6	\$1	\$5	\$6	\$6
\$6	\$4	\$2	\$7	\$5	\$9	\$4	\$7	\$10	\$3
\$8	\$4	\$2	\$3	\$5	\$2	\$5	\$4	\$2	\$1
\$7	\$8	\$6	\$7	\$7	\$9	\$6	\$2	\$4	\$6

TABLA 5.40 Datos para el problema 5-33

		Puesto de trabajo			
		1	2	3	4
Trabajador	1	\$50	\$50	—	\$20
	2	\$70	\$40	\$20	\$30
	3	\$90	\$30	\$50	—
	4	\$70	\$20	\$60	\$70

- 5-34.** En el modelo de JoShop del problema 5-33, suponga que se dispone de un (quinto) trabajador más para desempeñar los cuatro puestos a los costos respectivos de \$60, \$45, \$30 y \$80. ¿Resulta económico reemplazar a uno de los cuatro trabajadores actuales con el nuevo?
- 5-35.** En el modelo del problema 5-33, suponga que JoShop acaba de recibir un quinto puesto de trabajo y que los costos respectivos de cubrirlo con los cuatro trabajadores actuales son \$20, \$10, \$20 y \$80. ¿Debería tener la prioridad el nuevo puesto de trabajo sobre cualquiera de los cuatro puestos que ya tiene JoShop?
- *5-36.** Un ejecutivo de negocios debe hacer los cuatro viajes redondos que se muestran en la tabla 5.41, entre la oficina matriz en Dallas y una sucursal en Atlanta.
- El precio del boleto de viaje redondo saliendo de Dallas es de \$400. Se ofrece un descuento de 25% si las fechas de llegada y salida de un boleto cubren una semana (sábado y domingo). Si la estancia en Atlanta dura más de 21 días, el descuento se incrementa a 30%. Un boleto sencillo entre Dallas y Atlanta (en cualquier dirección) cuesta \$250. ¿Cómo debería comprar los boletos el ejecutivo?
- *5-37.** En la figura 5.6 se muestra una distribución esquemática de un taller con sus centros de trabajo existentes designados por los cuadrados 1, 2, 3 y 4. Se deben agregar cuatro nuevos centros de trabajo, I, II, III y IV, al taller en las ubicaciones designadas por los círculos *a*, *b*, *c* y *d*. El objetivo es asignar los nuevos centros a las ubicaciones propuestas, para minimizar el tráfico total por el manejo de materiales entre los centros existentes y los propuestos. En la tabla 5.42 se resume la frecuencia de los viajes entre los centros nuevos y los anteriores. El equipo de manejo de materiales viaja a lo largo de los pasillos rectangulares que se intersecan en las ubicaciones de los centros. Por ejemplo, la distancia del viaje sencillo (en metros) entre el centro 1 y la ubicación *b* es $30 + 20 = 50$ m.
- 5-38.** En el Departamento de Ingeniería Industrial de la University of Arkansas, INEG 4904 es un curso de diseño para que equipos de estudiantes apliquen el conocimiento y las habilidades aprendidas en el plan de estudios de licenciatura a un problema práctico. Los miembros de cada equipo seleccionan a un director de proyecto, identifican el alcance apropiado de su proyecto, redactan y presentan una propuesta, realizan las actividades necesarias para satisfacer los objetivos del proyecto, y redactan y presentan un informe final. El profesor del curso identifica proyectos potenciales y proporciona hojas de información apropiadas a cada uno, incluyendo el contacto en la organización patrocinadora, el resumen del proyecto y las habilidades potenciales necesarias para terminarlo. Se requiere que cada equipo de diseño presente

TABLA 5.41 Datos para el problema 5-36

Fecha de salida desde Dallas	Fecha de regreso a Dallas
Lunes, 3 de junio	Viernes, 7 de junio
Lunes, 10 de junio	Miércoles, 12 de junio
Lunes, 17 de junio	Viernes, 21 de junio
Martes, 25 de junio	Viernes, 28 de junio

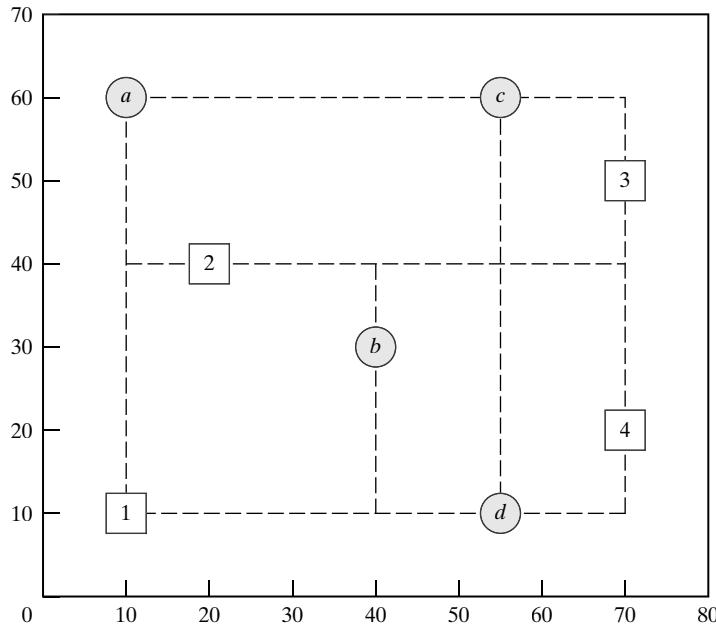


FIGURA 5.6

Distribución del taller para el problema 5-37

TABLA 5.42 Datos para el problema 5-37

		Centro nuevo			
		I	II	III	IV
Centro existente	1	10	2	4	3
	2	7	1	9	5
	3	0	8	6	2
	4	11	4	0	7

un informe que justifique la selección de los miembros y del director del equipo. El informe también proporciona una clasificación de cada proyecto en orden de preferencia, incluida una justificación respecto de la correspondencia adecuada entre las habilidades del equipo y los objetivos del proyecto. En un semestre específico se identificaron los siguientes proyectos: Boeing F-15, Boeing F-18, Boeing Simulation, Cargil, Cobb-Vantress, ConAgra, Cooper, DaySpring (diseño), DaySpring (manejo de materiales), J. B. Hunt, Raytheon, Tyson South, Tyson East, Walmart y Yellow Transportation. Los proyectos de Boeing y Raytheon requieren que todos los miembros del equipo sean ciudadanos estadounidenses. De los 11 equipos de diseño disponibles en este semestre, cuatro no cumplen con este requisito.

Diseñe un procedimiento para asignar los proyectos a los equipos y justifique los argumentos que proponga para tomar una decisión.

CAPÍTULO 6

Modelo de redes

Aplicación de la vida real: Ahorro de recursos federales para viajes

Las oficinas del gobierno federal de Estados Unidos se localizan en la mayoría de las ciudades en ese país, y se requiere que los empleados federales asistan a conferencias y cursos de capacitación sobre desarrollo que se ofrecen por toda la nación. La ubicación de la ciudad donde se efectuarán las conferencias y los eventos de capacitación puede impactar los gastos de viaje. El objetivo del estudio es determinar la ubicación óptima de la ciudad anfitriona de una conferencia o un evento de capacitación programado. Se estima que en el año fiscal de 1997, el modelo desarrollado ahorró al menos \$400,000. Al final de este capítulo se presentan los detalles del estudio.

6.1 ALCANCE Y DEFINICIÓN DE MODELOS DE REDES

Muchas situaciones de investigación de operaciones se pueden modelar y resolver como redes (nodos conectados por ramas):

1. El diseño de una red marítima de oleoductos para gas natural que conecta los cabezales de los pozos en el Golfo de México con un punto de distribución costero, con la finalidad de minimizar el costo de construcción de los oleoductos.
2. La determinación de la ruta más corta entre dos ciudades en una red de carreteras existente.
3. La determinación de la capacidad máxima (en toneladas por año) de una red de oleoductos para lodos de carbón que unen minas de carbón en Wyoming con plantas eléctricas en Houston (los oleoductos para lodos transportan carbón al bombear agua a través de tuberías especialmente diseñadas).
4. La determinación del cronograma (fechas de inicio y terminación) para las actividades de un proyecto de construcción.
5. La determinación del programa de flujo de costo mínimo desde campos petroleros hasta refinerías a través de una red de oleoductos.

La solución de esas situaciones se logra mediante varios algoritmos de optimización de redes. En este capítulo se presentan cuatro de los algoritmos.

1. Árbol de expansión mínima (situación 1)
2. Algoritmo de la ruta más corta (situación 2)
3. Algoritmo de flujo máximo (situación 3)
4. Algoritmo de la ruta crítica (CPM, por las siglas de *critical path method*) (situación 4)

Para la quinta situación, consulte el capítulo 22 en el sitio web.

Definiciones de red. Una red se compone de un conjunto de **nodos** unidos por **arcos** (o **ramas**). La notación para describir una red es (N, A) , donde N es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos. Como ilustración, la red de la figura 6.1 se describe como

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 5)\}$$

Con cada red hay un **flujo** asociado (por ejemplo, los productos de petróleo fluyen por un oleoducto y el tránsito de automóviles fluye por las carreteras). El flujo máximo en una red puede ser finito o infinito, de acuerdo con la capacidad de sus arcos.

Se dice que un arco está **dirigido u orientado** si permite el flujo positivo sólo en una dirección. En una **red dirigida** todos sus arcos están dirigidos.

Una **ruta** es un conjunto de arcos que unen dos nodos distintos y que pasan a través de otros nodos en la red. Por ejemplo, en la figura 6.1 los arcos $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ y $(4, 5)$ forman una ruta entre los nodos 1 y 5. Una ruta forma un **ciclo** o un **bucle** si conecta un nodo de regreso a sí mismo a través de otros nodos. En la figura 6.1, los arcos $(2, 3), (3, 4)$ y $(4, 2)$ forman un ciclo.

Se dice que una red está **conectada** si cada dos nodos distintos están conectados en al menos una ruta. La red de la figura 6.1 muestra este tipo de red. Un **árbol** es una red conectada *libre de ciclos* compuesta de un *subconjunto* de todos los nodos, y un **árbol de expansión** une *todos* los nodos de la red. En la figura 6.2 se proporcionan ejemplos de un árbol y un árbol de expansión a partir de la red de la figura 6.1.

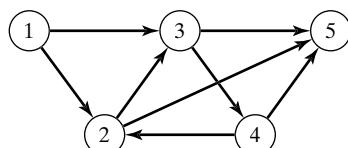
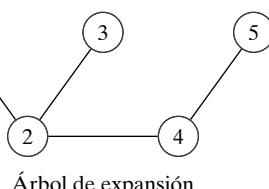
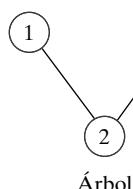


FIGURA 6.1
Ejemplo de una red (N, A)

FIGURA 6.2
Ejemplos de un árbol y un árbol de expansión



Ejemplo 6.1-1 (Puentes de Königsberg)

La ciudad prusiana de Königsberg (actualmente Kaliningrado en Rusia) se fundó en 1254 en las riberas del río Pregel con siete puentes que conectan sus cuatro secciones (designadas *A*, *B*, *C* y *D*) como se indica en la figura 6.3. Surgió una pregunta sobre si podría construirse un viaje *redondo* para visitar las cuatro secciones de la ciudad, cruzando cada puente exactamente una vez. Una sección podría visitarse varias veces, si fuera necesario.

A mediados del siglo XVIII, el afamado matemático Leonhard Euler desarrolló un argumento especial de “construcción de rutas” para probar que era imposible realizar ese viaje. Después, a principios del siglo XIX, se resolvió el mismo problema presentando de nuevo la situación como una red con nodos que representan las secciones y (diferentes) arcos que representan los puentes, como se muestra en la figura 6.4.

FIGURA 6.3

Puentes de Königsberg

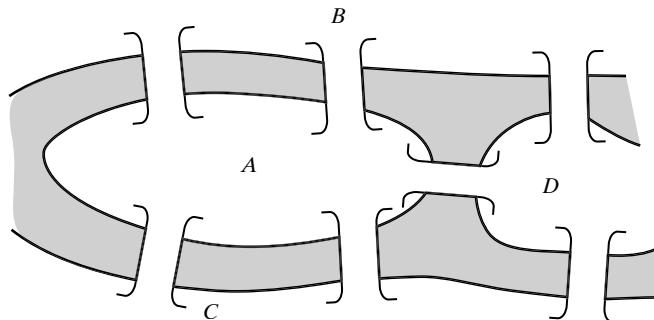
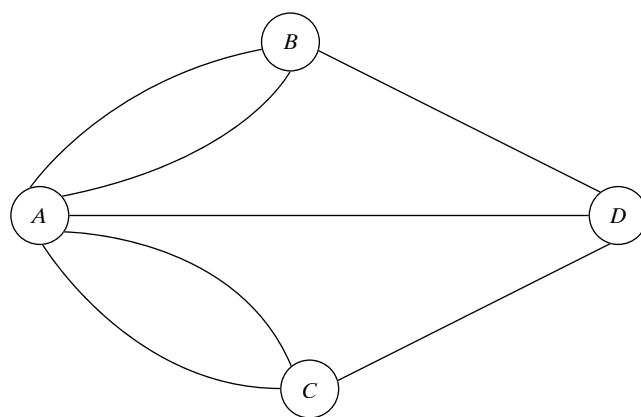


FIGURA 6.4

Representación en forma de red del problema de Königsberg



Momento, ¡ajá! ¡Se dice que una imagen vale más que mil palabras!

En la IO, esto no puede ser más cierto que en un modelo de red. La representación en forma de red proporciona, a primera vista, toda la información sobre un problema, una característica excepcional. Y todo esto sucede por la sencillez y versatilidad del conjunto de nodos y arcos en el modelado de muchas situaciones de la vida real. Sin duda, el problema de los Puentes de Königsberg fue resuelto por Leonard Euler en el siglo xviii utilizando largos argumentos lógicos. En el proceso, Euler sentó las bases para la representación en red de la situación (figura 6.4), lo cual hizo que la respuesta fuera casi intuitiva. El trabajo de Euler fue la semilla de lo que se conoce actualmente como la *teoría de grafos*, con su inmensa contribución actual para resolver intrincados problemas de la vida real.

La representación en red facilita enormemente el desarrollo de reglas algorítmicas casi intuitivas. Este punto de vista es apoyado por G. Dantzig, R. Fulkerson y S. Johnson en su trabajo seminal de 1954 (vea la bibliografía del capítulo 11) para resolver *manualmente* un problema de un vendedor itinerante en 49 ciudades, usando una representación en red sobrepuerta en un mapa de Estados Unidos. Afirman que "...esta [representación en red] acelera todo el proceso iterativo, facilita el seguimiento y, en ocasiones, facilita el desarrollo de nuevas restricciones que probablemente no se obtengan con métodos menos visuales".

6.2 ALGORITMO DEL ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA

El árbol de expansión mínima vincula los nodos de una red valiéndose de la menor longitud total de las ramas de conexión. Una aplicación típica se presenta en la pavimentación de carreteras que unen poblaciones, ya sea de forma directa o bien pasando por otras poblaciones. La solución del árbol de expansión mínima proporciona el diseño más económico del sistema de carreteras.

Sea $N = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de nodos de la red

C_k = Conjunto de nodos que han estado conectados de manera permanente en la iteración k

\bar{C}_k = Conjunto de nodos que se construirán permanentemente después de la iteración k

Los siguientes pasos describen al algoritmo del árbol de expansión mínima:

Paso 0. Establezca $C_0 = \emptyset$ y $\bar{C}_0 = N$.

Paso 1. Inicie con cualquier nodo i en el conjunto no conectado \bar{C}_0 y establezca $C_1 = \{i\}$, lo que produce $\bar{C}_1 = N - \{i\}$. Establezca $k = 2$.

Paso general k . Seleccione un nodo, j^* , en el conjunto no conectado \bar{C}_{k-1} que produzca el arco más corto a un nodo en el conjunto C_{k-1} conectado. Vincule j^* permanentemente a C_{k-1} y elimínelo de \bar{C}_{k-1} para obtener C_k y \bar{C}_k , respectivamente. Deténgase si \bar{C}_k está vacío; de lo contrario, establezca $k = k + 1$ y repita el paso.

Ejemplo 6.2-1

La compañía de cable Midwest TV ofrece servicio de cable a cinco desarrollos habitacionales nuevos. En la figura 6.5 se ilustran las posibles conexiones de TV a las cinco áreas, con las millas de cable adjuntas a cada arco. El objetivo es determinar la red de cable más económica.

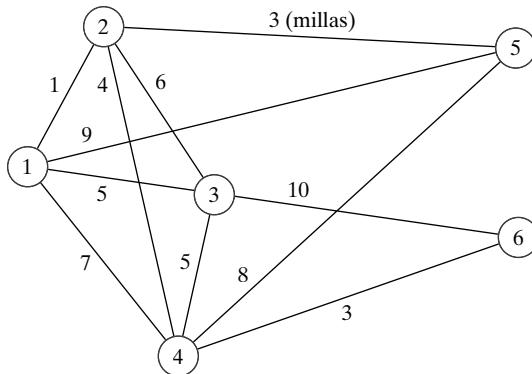


FIGURA 6.5

Conexiones de cable para la compañía Midwest TV

El algoritmo inicia en el nodo 1 (en realidad, cualquier otro nodo puede ser un punto inicial), el cual da como resultado $C_1 = \{1\}$ y $\bar{C}_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Las iteraciones del algoritmo se resumen en la figura 6.6. Los arcos delgados proporcionan todos los vínculos candidatos entre C y \bar{C} . Los arcos gruesos son los vínculos permanentes del conjunto conectado C , y el arco discontinuo es el nuevo vínculo (permanente) agregado en cada iteración. Por ejemplo, en la iteración 1, la rama (1, 2) es el vínculo más corto (= 1 milla) entre todas las ramas candidatas del nodo 1 a los nodos 2, 3, 4, y 5 en el conjunto no conectado \bar{C}_1 . Por consiguiente, el vínculo (1, 2) se hace permanente y $j^* = 2$, de donde resulta $C_2 = \{1, 2\}$, $\bar{C}_2 = \{3, 4, 5, 6\}$.

La solución está dada por el árbol de expansión mínima que se muestra en la iteración 6 de la figura 6.6. Las millas de cable mínimas necesarias para proporcionar el servicio de cable deseado son $1 + 3 + 4 + 4 + 3 + 5 = 16$ millas.

Comentarios. En teoría, un árbol de expansión mínima puede formularse y resolverse como un programa lineal. Sin embargo, la PL no es una opción práctica, ya que deben agregarse numerosas restricciones para excluir todos los ciclos y el resultado es una PL enorme, incluso para las redes pequeñas.

Momento de TORA

Usted puede utilizar TORA para generar las iteraciones del árbol de expansión mínima. En el `Main menu`, seleccione las opciones `Network models` \Rightarrow `Minimal spanning tree`. Luego, en el menú `SOLVE/MODIFY` elija las opciones `Solve problem` \Rightarrow `Go to output screen`. En la pantalla de resultados, seleccione `Starting node`, y luego utilice las opciones `Next iteration` o bien `All iterations` para generar las iteraciones sucesivas. Puede reiniciar las iteraciones seleccionando un nuevo `Starting Node`. El archivo `toraEx6.2-1.txt` proporciona los datos de TORA para el ejemplo 6.2-1.

6.3 PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

El problema de la ruta más corta determina la ruta más corta entre un origen y un destino en una red de transporte. Existen otras situaciones que pueden ser representadas por el mismo modelo, como se ilustra con los siguientes ejemplos.

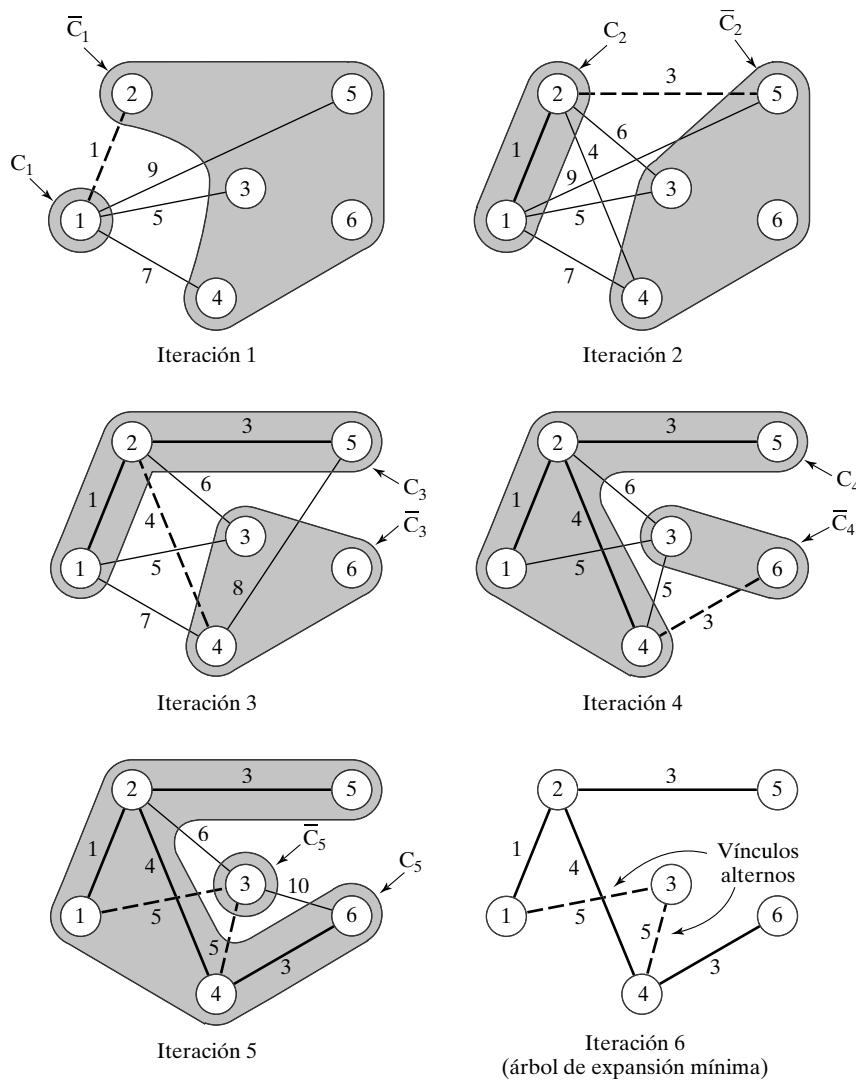


FIGURA 6.6

Iteraciones para resolver el problema de la compañía Midwest TV

6.3.1 Ejemplos de aplicaciones de la ruta más corta

Ejemplo 6.3-1 (Reemplazo de equipo)

RentCar está desarrollando una política de reemplazo para su flota de automóviles en un horizonte de planeación de 4 años. Al inicio de cada año, un automóvil se reemplaza o se conserva en operación durante un año más. Un automóvil debe estar en servicio de 1 a 3 años. La siguiente tabla proporciona el costo de reemplazo como una función del año en que se adquiere un automóvil y los años en operación.

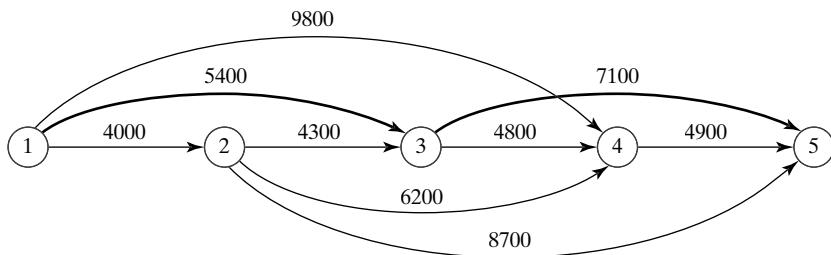


FIGURA 6.7

Problema de reemplazo de equipo como un modelo de la ruta más corta

Equipo adquirido al inicio del año	Costo de reemplazo (\$) para años dados en operación		
	1	2	3
1	4000	5400	9800
2	4300	6200	8700
3	4800	7100	—
4	4900	—	—

El problema puede formularse como una red donde los nodos 1 a 5 representan el inicio de los años 1 a 5. Los arcos a partir del nodo 1 (año 1) pueden llegar a los nodos 2, 3 y 4, porque un automóvil debe estar en operación de 1 a 3 años. Los arcos a partir de los demás nodos pueden interpretarse del mismo modo. La longitud de cada uno de los arcos es igual al costo de reemplazo. La solución del problema es equivalente a determinar la ruta más corta entre los nodos 1 y 5.

En la figura 6.7 se muestra la red resultante. Si se usa TORA,¹ la ruta más corta es 1 → 3 → 5. La solución indica que un automóvil adquirido al inicio del año 1 (nodo 1) debe reemplazarse después de 2 años al inicio del año 3 (nodo 3). Entonces, el automóvil de reemplazo se mantendrá en servicio hasta el final del año 4. El costo total de esta política de reemplazo es de \$12,500 (= \$5,400 + \$7,100).

Ejemplo 6.3-2 (Ruta más confiable)

I. Q. Smart va en automóvil diariamente al trabajo. Después de completar un curso de análisis de redes, Smart es capaz de determinar la ruta más corta al trabajo. Por desgracia, la ruta seleccionada está fuertemente patrullada por la policía, y con todas las multas pagadas por exceso de velocidad, la ruta más corta quizás no sea la mejor opción. Así, Smart ha decidido elegir una ruta que maximice la probabilidad de *no* ser multado por la policía.

En la red de la figura 6.8 se indican las posibles rutas de la casa al trabajo y las probabilidades asociadas de no ser detenido en cada segmento. La probabilidad de no ser multado en la ruta es el producto de las probabilidades de sus segmentos. Por ejemplo, la probabilidad de no ser multado en la ruta 1 → 3 → 5 → 7 es $.9 \times .3 \times .25 = .0675$. El objetivo de Smart es seleccionar la ruta que *maximice* la probabilidad de no ser multado.

¹ En el Main Menu, seleccione Network models ⇒ Shortest route. A partir del menú SOLVE/MODIFY seleccione Solve problem ⇒ Shortest routes.

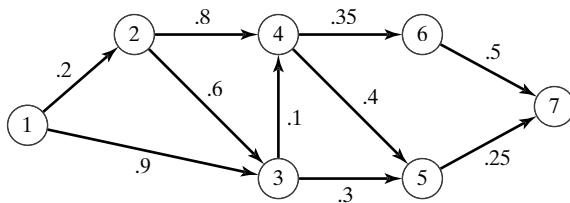


FIGURA 6.8
Modelo de red de la ruta más confiable

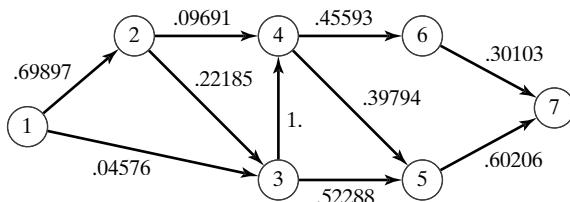


FIGURA 6.9
Representación de la ruta más confiable como un modelo de la ruta más corta

El problema puede formularse como un modelo de la ruta más corta por medio de una transformación logarítmica, para convertir el producto de las probabilidades en la suma de los logaritmos de las probabilidades, esto es, $p_{1k} = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k$ se transforma en $\log p_{1k} = \log p_1 + \log p_2 + \dots + \log p_k$.

Las dos funciones p_{1k} y $\log p_{1k}$ son monótonas y decrecen en k ; así, maximizar p_{1k} es equivalente a maximizar $\log p_{1k}$, lo que a su vez equivale a minimizar $-\log p_{1k}$. Por lo tanto, al reemplazar p_j con $-\log p_j$ para todas las j en la red, el problema se convierte en la red de la ruta más corta en la figura 6.9.

Si se usa TORA, la ruta más corta en la figura 6.9 pasa a través de los nodos 1, 3, 5 y 7 con una “longitud” correspondiente de 1.1707, o $\log p_{17} = -1.1707$. Entonces, la probabilidad máxima de no ser detenido es $p_{17} = 10^{-1.1707} = 0.0675$, ¡noticias no muy alentadoras para Smart!

Ejemplo 6.3-3 (Acertijo de las tres jarras)

Una jarra de 8 galones se llena con un fluido. Dadas dos jarras vacías de 5 y 3 galones, divida los 8 galones de fluido en dos partes iguales utilizando sólo las tres jarras. ¿Cuál es el mínimo de transferencias (decantaciones) necesarias para obtener este resultado?

Probablemente usted logre resolver este acertijo por inspección. Sin embargo, es interesante la representación del problema como un modelo de la ruta más corta.

Se define un nodo mediante un subíndice triple que representa las cantidades de fluidos en las jarras de 8, 5 y 3 galones, respectivamente, lo cual quiere decir que la red inicia con el nodo $(8, 0, 0)$ y termina con el nodo de la solución deseada $(4, 4, 0)$. Se genera un nuevo nodo desde el nodo actual decantando fluido de una jarra a otra.

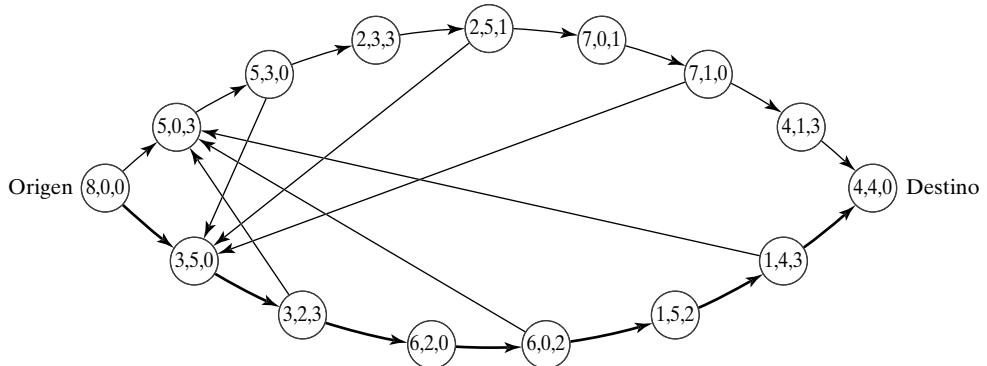


FIGURA 6.10

Representación del acertijo de las tres jarras como un modelo de la ruta más corta

En la figura 6.10 se muestran las diferentes rutas que llevan del nodo inicial $(8, 0, 0)$ al nodo final $(4, 4, 0)$. El arco entre dos nodos sucesivos representa una sola transferencia, por lo que puede suponerse una longitud de una unidad. El problema se reduce a determinar la ruta más corta entre el nodo $(8, 0, 0)$ y el nodo $(4, 4, 0)$.

La solución óptima dada por la ruta inferior de la figura 6.10 requiere 7 decantaciones.

6.3.2 Algoritmos de la ruta más corta

En esta sección se presentan dos algoritmos para resolver tanto redes cíclicas (es decir, que contienen bucles) como redes acíclicas:

1. El algoritmo de Dijkstra para determinar las rutas más cortas entre el nodo de origen y los demás nodos en la red.
2. El algoritmo de Floyd para determinar la ruta más corta entre dos nodos *cualesquiera* en la red.

En esencia, el algoritmo de Floyd incluye al de Dijkstra.

Algoritmo de Dijkstra. Sea u_i la distancia más corta desde el nodo de origen 1 hasta el nodo i , y se define d_{ij} (≥ 0) como la longitud del arco (i, j) . El algoritmo define la etiqueta para un nodo j siguiente inmediato como

$$[u_j, j] = [u_i + d_{ij}, i], d_{ij} \geq 0$$

La etiqueta para el nodo inicial es $[0, -]$, lo cual indica que el nodo no tiene predecesor.

Las etiquetas de nodo en el algoritmo de Dijkstra son de dos tipos: *temporales* y *permanentes*. Una etiqueta temporal en un nodo se modifica si es posible encontrar una ruta más corta hacia ese nodo. De lo contrario, el estado temporal cambia a permanente.

Paso 0. Etiquete el nodo de origen (nodo 1) con la etiqueta *permanente* $[0, -]$. Establezca $i = 1$.

Paso general i .

- (a) Calcule las etiquetas *temporales* $[u_i + d_{ij}, i]$ para cada nodo j con $d_{ij} > 0$, siempre que j no esté etiquetado permanentemente. Si el nodo j ya tiene una etiqueta temporal existente $[u_j, k]$ hasta otro nodo k , y si $u_i + d_{ij} < u_j$, reemplace $[u_j, k]$ con $[u_i + d_{ij}, i]$.

- (b)** Si *todos* los nodos tienen etiquetas *permanentes*, deténgase. De lo contrario, seleccione la etiqueta $[u_r, s]$ que tenga la distancia más corta ($= u_r$) de entre todas las etiquetas *temporales* (rompa los empates arbitrariamente). Establezca $i = r$ y repita el paso *i*.

Ejemplo 6.3-4

La red de la figura 6.11 proporciona las rutas permisibles y sus longitudes en millas entre la ciudad 1 (nodo 1) y las otras cuatro ciudades (nodos 2 a 5). Determine las rutas más cortas entre la ciudad 1 y cada una de las cuatro ciudades restantes.

Iteración 0. Asigne la etiqueta *permanente* $[0, -]$ al nodo 1.

Iteración 1. Se puede llegar a los nodos 2 y 3 desde el nodo 1 (el último etiquetado permanentemente). Así, la lista de nodos etiquetados (temporales y permanentes) se convierte en

Nodo	Etiqueta	Estado
1	$[0, -]$	Permanente
2	$[0 + 100, 1] = [100, 1]$	Temporal
3	$[0 + 30, 1] = [30, 1]$	Temporal

Para las dos etiquetas temporales $[100, 1]$ y $[30, 1]$, el nodo 3 produce la distancia mínima ($u_3 = 30$). De este modo, el estado del nodo 3 cambia a permanente.

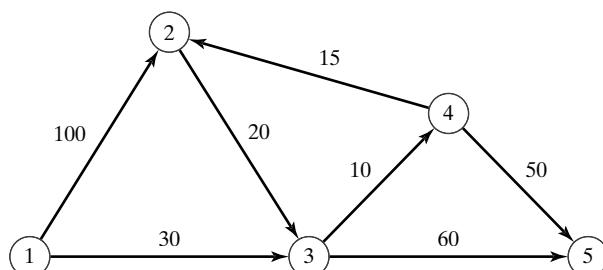
Iteración 2. Se puede llegar a los nodos 4 y 5 desde el nodo 3, y la lista de los nodos etiquetados se convierte en

Nodo	Etiqueta	Estado
1	$[0, -]$	Permanente
2	$[100, 1]$	Temporal
3	$[30, 1]$	Permanente
4	$[30 + 10, 3] = [40, 3]$	Temporal
5	$[30 + 60, 3] = [90, 3]$	Temporal

La etiqueta temporal $[40, 3]$ en el nodo 4 ahora es permanente ($u_4 = 40$).

FIGURA 6.11

Ejemplo de red para el algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra



Iteración 3. Es posible llegar a los nodos 2 y 5 desde el nodo 4. Así, la lista de los nodos etiquetados se actualiza como

Nodo	Etiqueta	Estado
1	[0, -]	Permanente
2	[40 + 15, 4] = [55, 4]	Temporal
3	[30, 1]	Permanente
4	[40, 3]	Permanente
5	[90, 3] o bien [40 + 50, 4] = [90, 4]	Temporal

En el nodo 2, la nueva etiqueta [55, 4] reemplaza a la etiqueta temporal [100, 1] de la iteración 1 porque ofrece una ruta más corta. Asimismo, en la iteración 3 el nodo 5 tiene dos etiquetas alternativas con la misma distancia ($u_5 = 90$). La etiqueta temporal [55, 4] en el nodo 2 ahora es permanente ($u_2 = 55$).

Iteración 4. Se puede llegar al nodo 3 etiquetado permanentemente sólo desde el nodo 2. Por consiguiente, el nodo 3 no se puede etiquetar de nuevo. La nueva lista de etiquetas permanece como estaba en la iteración 3, excepto que la etiqueta en el nodo 2 ahora es permanente. Esto deja al nodo 5 como la única etiqueta temporal. Como el nodo 5 no conduce a otros nodos, su etiqueta se hace permanente y el proceso termina.

Los cálculos del algoritmo pueden realizarse directamente en la red, como lo demuestra la figura 6.12.

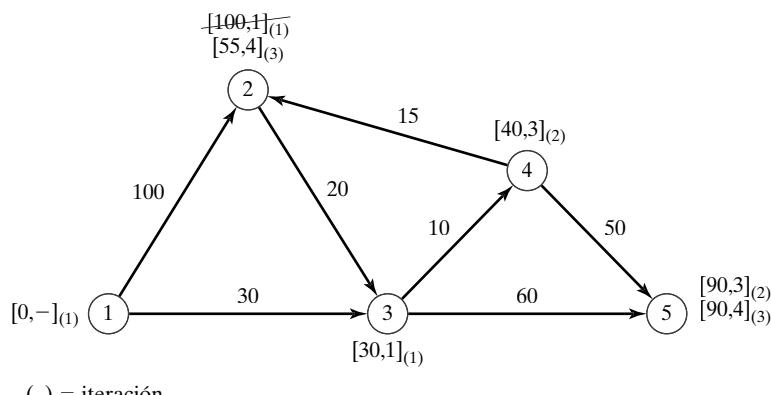
La ruta más corta entre el nodo 1 y cualquier otro nodo en la red se determina comenzando desde el nodo destino deseado y retrocediendo hasta el nodo inicial usando la información en las etiquetas permanentes. Por ejemplo, la siguiente secuencia determina la ruta más corta del nodo 1 al nodo 2:

$$(2) \rightarrow [55, 4] \rightarrow (4) \rightarrow [40, 3] \rightarrow (3) \rightarrow [30, 1] \rightarrow (1)$$

Por lo tanto, la ruta deseada es 1 → 3 → 4 → 2 con una longitud total de 55 millas.

FIGURA 6.12

Procedimiento de etiquetado de Dijkstra



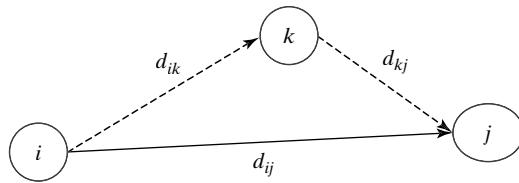


FIGURA 6.13
Operación triple de Floyd

Momento de TORA

Es posible usar TORA para generar las iteraciones de Dijkstra. Del menú **SOLVE/MODIFY**, seleccione **Solve problem** \Rightarrow **Iterations** \Rightarrow **Dijkstra algorithm**. El archivo *toraEx6.3-4.txt* proporciona los datos de TORA para el ejemplo 6.3-4.

Algoritmo de Floyd. El algoritmo de Floyd es más general que el de Dijkstra, porque determina la distancia más corta entre dos nodos *cualquier* en la red. El algoritmo representa una red de n nodos como una matriz cuadrada con n filas y n columnas. La entrada (i, j) de la matriz da la distancia d_{ij} del nodo i al nodo j , que es finita si i está vinculada directamente a j , e infinita en caso contrario.

La idea del algoritmo de Floyd es sencilla. Dados tres nodos, i , j y k en la figura 6.13 con las distancias de conexión que se muestran en los tres arcos, es más corto llegar de i a j pasando por k si

$$d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}$$

En este caso, resulta óptimo reemplazar la ruta directa de $i \rightarrow j$ por la ruta indirecta $i \rightarrow k \rightarrow j$. Este intercambio de **operación triple** se aplica a la matriz de distancias utilizando los siguientes pasos:

Paso 0. Defina la matriz de la distancia inicial D_0 y la matriz de secuencia de nodos S_0 (todos los elementos diagonales están bloqueados). Establezca $k = 1$.

	1	2	...	j	...	n
1	—	d_{12}	...	d_{1j}	...	d_{1n}
2	d_{21}	—	...	d_{2j}	...	d_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$D_0 = I$	d_{11}	d_{12}	...	d_{1j}	...	d_{1n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	d_{n1}	d_{n2}	...	d_{nj}	...	—

	1	2	...	j	...	n
1	—	2	...	j	...	n
2	1	—	...	j	...	n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$S_0 =$	1	2	...	j	...	n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	1	2	...	j	...	—

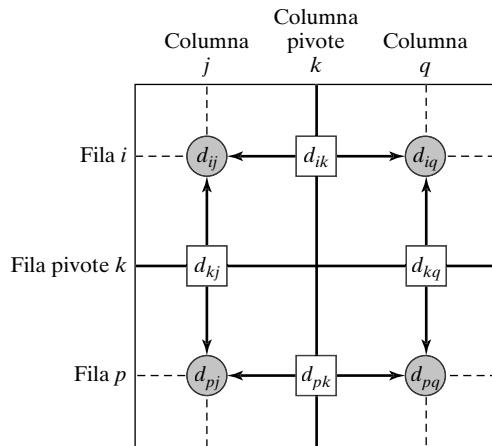


FIGURA 6.14
Implementación de la operación triple en forma matricial

Paso general k . Defina la fila k y la columna k como *fila pivot* y *columna pivot*. Aplique la operación triple a cada elemento d_{ij} en D_{k-1} , para toda i y j . Si la condición

$$d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}, \quad (i \neq k, j \neq k \text{ e } i \neq j)$$

se satisface, realice los siguientes cambios:

- (a) Cree D_k reemplazando d_{ij} en D_{k-1} por $d_{ik} + d_{kj}$.
- (b) Cree S_k reemplazando s_{ij} en S_{k-1} por k . Establezca $k = k + 1$. Si $k = n + 1$, deténgase; en caso contrario, repita el paso k .

El paso k del algoritmo puede explicarse representando D_{k-1} como se muestra en la figura 6.14. Aquí, la fila k y la columna k definen la fila y columna pivotes actuales. La fila i representa cualquiera de las filas 1, 2, ..., y $k - 1$, y la fila p representa cualquiera de las filas $k + 1, k + 2, \dots, y n$. De manera similar, la columna j representa cualquiera de las columnas 1, 2, ..., y $k - 1$, y la columna q representa cualquiera de las columnas $k + 1, k + 2, \dots, y n$. La operación triple puede aplicarse de la manera siguiente: Si la suma de los elementos en la fila pivot y la columna pivot (mostrados con cuadrados) es menor que el elemento de intersección asociado (mostrado con un círculo), entonces resulta óptimo reemplazar la distancia de intersección por la suma de las distancias pivot.

Después de n pasos, es posible determinar la ruta más corta entre los nodos i y j a partir de las matrices D_n y S_n mediante las siguientes reglas:

1. A partir de D_n , d_{ij} da la ruta más corta entre los nodos i y j .
2. A partir de S_n , determine el nodo intermedio $k = s_{ij}$ que resulta en la ruta $i \rightarrow k \rightarrow j$. Si $s_{ik} = k$ y $s_{kj} = j$, deténgase; se han encontrado todos los nodos intermedios de la ruta. En caso contrario, repita el procedimiento entre los nodos i y k y entre los nodos k y j .

Ejemplo 6.3-5

Para la red de la figura 6.15, encuentre las rutas más cortas entre cada dos nodos. Las distancias (en millas) se dan sobre los arcos. El arco (3, 5) está direccionado (no se permite tránsito del nodo 5 al nodo 3). Todos los demás arcos permiten tránsito en ambas direcciones.

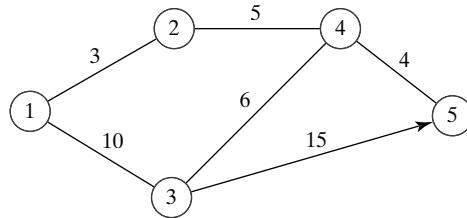


FIGURA 6.15
Red para el ejemplo 6.3-5

Iteración 0. Las matrices D_0 y S_0 proporcionan la representación inicial de la red. D_0 es simétrica, excepto que $d_{53} = \infty$ porque no se permite tránsito del nodo 5 al nodo 3.

	1	2	D_0 3	4	5
1	—	3	10	∞	∞
2	3	—	∞	5	∞
3	10	∞	—	6	15
4	∞	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

	1	2	S_0 3	4	5
1	—	2	3	4	5
2	1	—	$\textbf{3}$	4	5
3	1	$\textbf{2}$	—	4	5
4	1	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Iteración 1. Establezca $k = 1$. La fila y la columna pivotes se muestran mediante la primera fila y la primera columna ligeramente sombreadas en la matriz D_0 . Las celdas más oscuras, d_{23} y d_{32} , son las únicas que pueden mejorarse con la *operación triple*. Por lo tanto, D_1 y S_1 se obtienen a partir de D_0 y S_0 de la manera siguiente:

1. Reemplace d_{23} por $d_{21} + d_{13} = 3 + 10 = 13$ y establezca $s_{23} = 1$.
2. Reemplace d_{32} por $d_{31} + d_{12} = 10 + 3 = 13$ y establezca $s_{32} = 1$.

Estos cambios se muestran en negritas en las matrices D_1 y S_1 .

	1	2	D_1 3	4	5
1	—	3	10	∞	∞
2	3	—	13	5	∞
3	10	13	—	6	15
4	∞	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

	1	2	S_1 3	4	5
1	—	2	3	4	5
2	1	—	1	4	5
3	1	1	—	4	5
4	1	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Iteración 2. Establezca $k = 2$, como se muestra mediante la fila y la columna ligeramente sombreadas en D_1 . La *operación triple* se aplica a las celdas más oscuras en D_1 y S_1 . Los cambios resultantes se presentan en negritas en D_2 y S_2 .

	1	2	D_2 3	4	5
1	—	3	10	8	∞
2	3	—	13	5	∞
3	10	13	—	6	15
4	8	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

	1	2	S_2 3	4	5
1	—	2	3	2	5
2	1	—	1	4	5
3	1	1	—	4	5
4	2	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Iteración 3. Establezca $k = 3$, como se indica mediante la fila y la columna sombreadas en D_2 . Las nuevas matrices están dadas por D_3 y S_3 .

		D_3				
		1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	25	
	3	—	13	5	28	
2	10	13	—	6	15	
3	8	5	6	—	4	
4	∞	∞	∞	4	—	
5						

		S_3				
		1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	3	
	1	—	1	4	3	
2	1	1	—	4	5	
3	2	2	3	—	5	
4	1	2	3	4	—	
5						

Iteración 4. Establezca $k = 4$, como se muestra mediante la fila y la columna sombreadas en D_3 . Las nuevas matrices son D_4 y S_4 .

		D_4				
		1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	12	
	3	—	11	5	9	
2	10	11	—	6	10	
3	8	5	6	—	4	
4	12	9	10	4	—	
5						

		S_4				
		1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	4	
	1	—	4	4	4	
2	1	4	—	4	4	
3	2	2	3	—	5	
4	4	4	4	4	—	
5						

Iteración 5. Establezca $k = 5$, como se muestra con la fila y la columna sombreadas en D_4 . No son posibles mejoras adicionales en esta iteración.

Las matrices finales D_4 y S_4 contienen toda la información necesaria para determinar la ruta más corta entre dos nodos cualesquiera en la red. Por ejemplo, a partir de D_4 , la distancia más corta del nodo 1 al nodo 5 es $d_{15} = 12$ millas. Para determinar la ruta asociada, recuerde que un segmento (i, j) representa un vínculo directo tan sólo si $s_{ij} = j$. En caso contrario, i y j están vinculadas al menos por otro nodo intermedio. Como $s_{15} = 4 \neq 5$, la ruta inicialmente se da como $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$. Ahora, como $s_{14} = 2 \neq 4$, el segmento $(1, 4)$ no es un vínculo directo, y $1 \rightarrow 4$ se reemplaza por $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$, por lo que la ruta $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ ahora se vuelve $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$. Luego, como $s_{12} = 2$, $s_{24} = 4$ y $s_{45} = 5$, no se requieren más “disecciones”, y $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ define la ruta más corta.

Momento de TORA

Como en el algoritmo de Dijkstra, TORA puede usarse para generar las iteraciones de Floyd. En el menú SOLVE/MODIFY seleccione `Solve problem` \Rightarrow `Iterations` \Rightarrow `Floyd's algorithm`. El archivo *toraEx6.3-5.txt* proporciona los datos de Tora para el ejemplo 6.3-5.

6.3.3 Formulación de programación lineal del problema de la ruta más corta

En esta sección se proporciona un modelo de PL para el problema de la ruta más corta. El modelo es general en el sentido de que puede utilizarse para determinar la ruta más corta entre dos nodos cualesquiera en la red. En ese sentido, es equivalente al algoritmo de Floyd.

Deseamos determinar la ruta más corta entre cualesquiera dos nodos s y t en una red de n nodos. La PL supone que una unidad de flujo entra a la red por el nodo s y sale por el nodo t .

Defina

$$\begin{aligned}x_{ij} &= \text{cantidad de flujo en el arco } (i, j) \\&= \begin{cases} 1, & \text{si el arco } (i, j) \text{ está en la ruta más corta} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \\c_{ij} &= \text{longitud del arco } (i, j)\end{aligned}$$

Así, la función objetivo del programa lineal se convierte en

$$\text{Minimizar } z = \sum_{\substack{\text{todos los arcos} \\ \text{definidos } (i, j)}} c_{ij} x_{ij}$$

Las restricciones representan la **ecuación de conservación del flujo** en cada nodo:

$$\text{Flujo de entrada total} = \text{Flujo de salida total}$$

En forma matemática, esto se traduce para el nodo j como

$$\left(\begin{array}{l} \text{Entrada externa} \\ \text{al nodo } j \end{array} \right) + \sum_{\substack{i \\ \text{todos los arcos} \\ \text{definidos } (i, j)}} x_{ij} = \left(\begin{array}{l} \text{Salida externa} \\ \text{al nodo } j \end{array} \right) + \sum_{\substack{k \\ \text{todos los arcos} \\ \text{definidos } (j, k)}} x_{jk}$$

Ejemplo 6.3-6

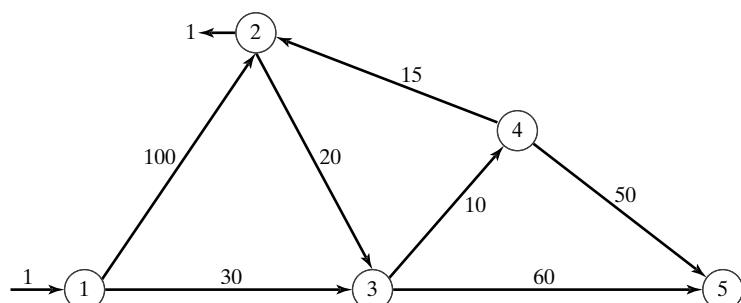
En la red del ejemplo 6.3-4, suponga que deseamos determinar la ruta más corta del nodo 1 al nodo 2, es decir, $s = 1$ y $t = 2$. En la figura 6.16 se muestra la forma en que la unidad de flujo entra en el nodo 1 y sale del nodo 2.

En la red se observa que la ecuación de conservación del flujo da como resultado

$$\begin{aligned}\text{Nodo 1: } 1 &= x_{12} + x_{13} \\ \text{Nodo 2: } x_{12} + x_{42} &= x_{23} + 1 \\ \text{Nodo 3: } x_{13} + x_{23} &= x_{34} + x_{35} \\ \text{Nodo 4: } x_{34} &= x_{42} + x_{45} \\ \text{Nodo 5: } x_{35} + x_{45} &= 0\end{aligned}$$

FIGURA 6.16

Inserción de un flujo unitario para determinar la ruta más corta entre el nodo $s = 1$ y el nodo $t = 2$



La PL completa se expresa como

	x_{12}	x_{13}	x_{23}	x_{34}	x_{35}	x_{42}	x_{45}	
Minimizar $z =$	100	30	20	10	60	15	50	
Nodo 1		1	1					= 1
Nodo 2		-1		1		-1		= -1
Nodo 3			-1	-1	1			= 0
Nodo 4					-1	1	1	= 0
Nodo 5						-1	-1	= 0

Observe que la columna x_{ij} tiene exactamente un “1” en la fila i y un “-1” en la fila j , una propiedad típica de una PL de red. Note también que al examinar la red, el nodo 5 y sus arcos de entrada pueden borrarse al mismo tiempo, lo cual significa que la restricción del nodo 5 y las variables x_{35} y x_{45} pueden retirarse de la PL. Por supuesto, la PL dada es suficientemente “inteligente” para dar como resultado $x_{35} = x_{45} = 0$ en la solución óptima.

La solución óptima (obtenida mediante TORA, archivo *toraEx6.3-6.txt*) es

$$z = 55, x_{13} = 1, x_{34} = 1, x_{42} = 1$$

Esta solución proporciona la ruta más corta del nodo 1 al nodo 2 como $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$, y la distancia asociada es $z = 55$ (millas).

Comentarios. La formulación de programación lineal es versátil, dado que el modelo puede modificarse para encontrar la ruta más corta entre dos nodos cualesquiera, simplemente al cambiar la ubicación de “1” y “-1” en el lado derecho, para que correspondan a los nodos inicial y final, respectivamente. Desde luego, la red de la figura 6.16 está *dirigida*, es decir, permite el flujo solamente en una dirección. Lo anterior puede resultar en una infacilidad para algunas selecciones de nodos inicial y final (por ejemplo, si se inicia en el nodo 5 y se termina en el nodo 1). La situación se rectifica agregando nuevas variables para representar las nuevas rutas.

Momento de Solver

En la figura 6.17 se presenta la hoja de cálculo de Excel Solver para encontrar la ruta más corta entre el nodo *initial* N1 y el nodo *final* N2 para el ejemplo 6.3-6 (archivo *solverEx6.3.xls*). Los datos de entrada del modelo son la matriz de distancias en las celdas B3:E6. El nodo N1 no tiene ninguna columna porque no tiene arcos de entrada, y el nodo 5 no tiene ninguna fila porque no tiene arcos de salida. Una celda en blanco representa un segmento de ruta no existente (es decir, un arco de longitud infinita). (En breve se verá la manera de reconocer la presencia de celdas en blanco en las fórmulas de la hoja de cálculo.) Los nodos N1 y N2 se designan como nodos *initial* y *final* al introducir un 1 en F3 y B7, respectivamente. Estas designaciones pueden cambiarse según se deseé. Por ejemplo, para encontrar la ruta más corta del nodo N2 al nodo N4, introduzca 1 en F4 y D7.

Como se explica en la PL del ejemplo 6.3-6, las restricciones del problema tienen la forma general:

$$(\text{Flujo de salida neto}) - (\text{Flujo de entrada neto}) = 0$$

Esta definición se adapta al diseño de la hoja de cálculo al incorporar el flujo unitario externo directamente al *flujo de salida neto* y al *flujo de entrada neto* de la ecuación, es decir,

$$\left[\begin{pmatrix} \text{Flujo de los arcos de} \\ \text{salida de Ni a todos} \\ \text{los demás nodos} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Flujo unitario de} \\ \text{entrada externo a Ni} \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} \text{Flujo de los arcos de} \\ \text{entrada a Ni desde todos} \\ \text{los demás nodos} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Flujo de salida} \\ \text{unitario externo} \end{pmatrix} \right] = 0$$

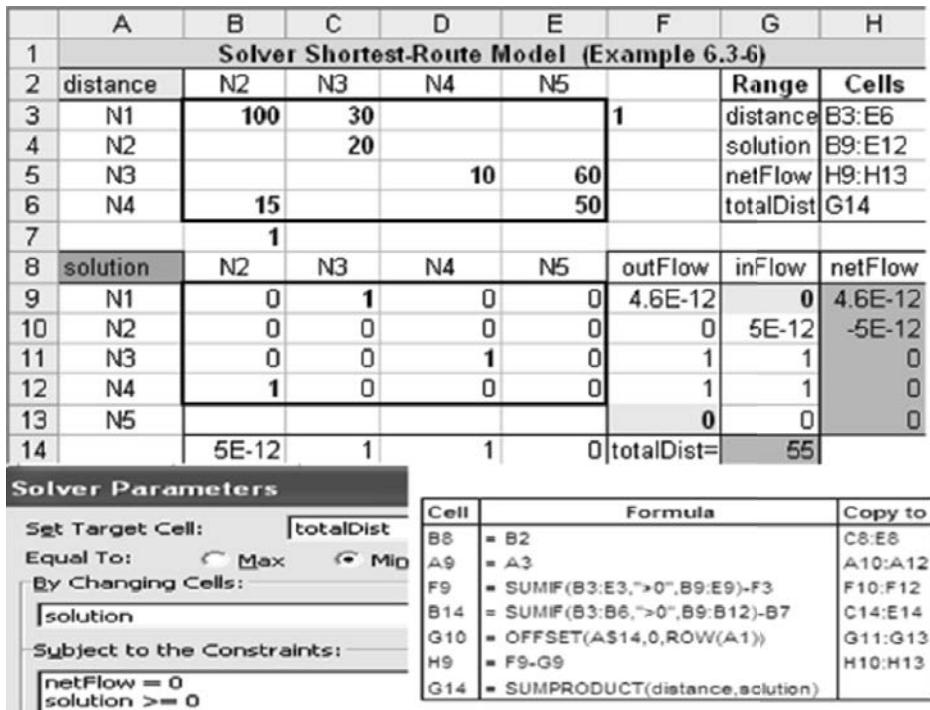


FIGURA 6.17

Solución de Excel Solver para la ruta más corta entre los nodos 1 y 2 del ejemplo 6.3-6 (archivo solverEx6.3-6.xls)

En la hoja de cálculo, B3:E6 designa la matriz de *distancias de entrada*; B9:E12, las celdas de *solución*; F3:F6, el flujo unitario de *salida* (externo); y B7:E7, el flujo unitario de *entrada* (externo). Por lo tanto,

- Ecuación del nodo N1: $[\text{SUM}(B9:E9) - F3] - [0 - 0] = 0$
- Ecuación del nodo N2: $[\text{SUM}(B10:E10) - F4] - [\text{SUM}(B9:B12) - B7] = 0$
- Ecuación del nodo N3: $[\text{SUM}(B11:E11) - F5] - [\text{SUM}(C9:C12) - C7] = 0$
- Ecuación del nodo N4: $[\text{SUM}(B12:E12) - F6] - [\text{SUM}(D9:D12) - D7] = 0$
- Ecuación del nodo N5: $[0 - 0] - [\text{SUM}(E9:E12) - E7] = 0$

El supuesto de esta hoja de cálculo es que las celdas en blanco en la matriz de distancias B3:E6 representan rutas bloqueadas. Es posible utilizar SUMIF en lugar de SUM, para tomar en cuenta automáticamente esta condición.² Las dos instrucciones siguientes muestran cómo se ingresan las fórmulas modificadas en la hoja de cálculo.

1. Introduzca =SUMIF(B3:E3,">0",B9:E9)-F3 en la celda F9 y cópiela en las celdas F10:F12.
2. Introduzca =SUMIF(B3:B6,">0",B9:B12)-B7 en la celda B14 y cópiela en las celdas C14:E14.

² La idea es que la hoja de cálculo trata una celda en blanco como un valor cero. Si sucede que un problema tiene una distancia cero entre dos nodos, la distancia cero puede reemplazarse con un valor positivo muy pequeño.

El resto de las fórmulas de la hoja de cálculo se introducen como sigue:

1. Introduzca =OFFSET (A\$14, 0, ROW(A1)) en la celda G10 y cópiela en las celdas G11:G13 para transponer el flujo de entrada a la columna G.
2. Introduzca 0 en G9 y en F13 para indicar que N1 no tiene arcos de *entrada* ni flujo unitario de *salida* externo, y que N5 no tiene arcos de *salida* o flujo unitario de *entrada* externo.
3. Introduzca =F9-G9 en la celda H9 y cópiela en las celdas H10:H13 para calcular el flujo neto.
4. Para la función objetivo, introduzca en la celda G14 =SUMPRODUCT (B3:E6, B9:E12) o, de manera equivalente, =SUMPRODUCT (distance, solution).

Ahora, la hoja de cálculo está lista para la aplicación de Solver como se muestra en la figura 6.17. Las celdas B9:E12 representan la solución del modelo. Si la celda $(N_i, N_j) = 1$, entonces la rama (N_i, N_j) está en la ruta más corta. La salida que se muestra en la figura 6.17 proporciona la solución $(N_1-N_3 = 1, N_3-N_4 = 1 \text{ y } N_4-N_2 = 1)$. La ruta óptima es $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$, con una distancia total de 55 millas.³

Comentarios. En la mayoría de los libros de texto, la red está definida por sus arcos explícitos (nodo i , nodo j , distancia) como un modelo difícil de manejar, sobre todo cuando la cantidad de arcos es grande. Nuestro modelo está controlado por la matriz de distancias compacta (B3:E6) y sus flujos externos (E3:E6 y B7:E7). Sin embargo, se argumentaría que nuestro modelo puede manejar una cantidad mucho más grande de variables. En el caso del ejemplo 6.3-6, se tienen 7 arcos y por consiguiente 7 variables, en contraste con las $4 \times 4 = 16$ variables en nuestra formulación. Tenga en mente que si se utiliza SUMIF, las restricciones de flujo son *exactamente las mismas* que en otras presentaciones, que quiere decir que las 9 variables adicionales aparecen sólo en la función objetivo y con coeficientes cero (entradas en blanco en B3:B6). Los presolucionadores en los paquetes de software comerciales detectarán esta “peculiaridad” y, de forma automática, excluirán las variables adicionales de la función objetivo antes de resolver el problema, con lo que generarán el *mismo modelo* como en otras presentaciones.

Momento de AMPL

El archivo *amplEx6.3-6a.txt* proporciona el modelo para resolver el ejemplo 6.3-6. El modelo es general en el sentido de que puede usarse para determinar la ruta más corta entre dos nodos cualesquiera en un problema de cualquier tamaño.

6.4 MODELO DE FLUJO MÁXIMO

Considere una red de oleoductos que transporta petróleo crudo desde los pozos hasta las refinerías. Se instalan estaciones intermedias de reforzamiento y bombeo a distancias adecuadas para llevar el crudo a la red. Cada segmento de tubería tiene una velocidad (o capacidad) de descarga finita del flujo de crudo. Un segmento de tubería puede ser unidireccional o bidireccional de acuerdo con su diseño. En la figura 6.18 se muestra una red de oleoductos típica. La meta es determinar la capacidad de flujo máxima de la red.

³ La solución del modelo presenta una curiosa ocurrencia. Si la restricción $netFlow = 0$ se reemplaza con $outFlow = inflow$ en el cuadro de diálogo **Solver Parameters**, Solver no determina una solución factible, incluso si se ajusta la *precisión* en el cuadro de diálogo **Solver Option**. (Para reproducir esta experiencia, las celdas de *solución* B9:E12 deben ser cero o estar en blanco). Aún más curioso, si las restricciones se reemplazan con $inFlow = outFlow$, se encuentra el óptimo. No resulta claro por qué ocurre esta peculiaridad, pero el problema puede estar relacionado con el error de redondeo. Con suerte, para el día de hoy las versiones más nuevas de Solver habrán tomado en cuenta esta “rareza”.

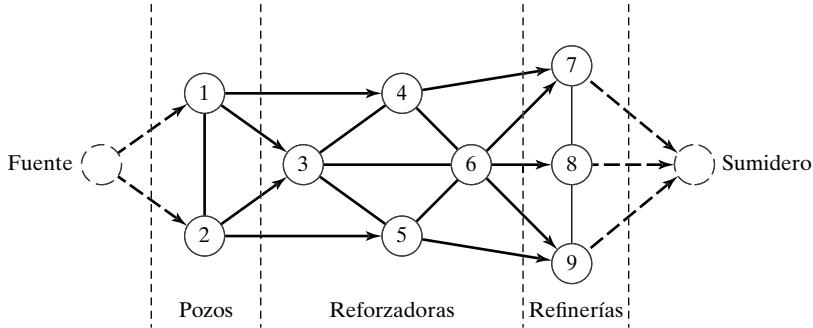


FIGURA 6.18

Red capacitada que conecta los pozos y las refinerías a través de estaciones reforzadoras



FIGURA 6.19

Flujos de arcos C_{ij} desde $i \rightarrow j$ y C_{ji} desde $j \rightarrow i$

La solución del problema propuesto requiere agregar una sola fuente y un solo sumidero, utilizando arcos de capacidad infinita unidireccionales, como lo muestran los arcos de discontinuos en la figura 6.18.

Para el arco (i, j) , la notación (C_{ij}, C_{ji}) proporciona las capacidades de flujo en las dos direcciones $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$. Para eliminar la ambigüedad, se coloca C_{ij} junto al nodo i y C_{ji} junto al nodo j , como se ilustra en la figura 6.19.

6.4.1 Enumeración de cortes

Un **corte** define un conjunto de arcos cuya eliminación de la red interrumpe el flujo entre los nodos fuente y sumidero. La **capacidad de corte** es igual a la suma de las capacidades de su conjunto de arcos. Entre *todos* los cortes posibles en la red, el corte con la *menor capacidad* es el cuello de botella que determina el flujo máximo en la red.

Ejemplo 6.4-1

Considere la red de la figura 6.20. Las capacidades bidireccionales se muestran en los arcos respectivos usando la notación de la figura 6.19. Por ejemplo, el límite de flujo para el arco $(3, 4)$ es de 10 unidades de 3 a 4, y de 5 unidades de 4 a 3.

En la figura 6.20 se ilustran tres cortes con las siguientes capacidades:

Corte	Arcos asociados	Capacidad
1	$(1, 2), (1, 3), (1, 4)$	$20 + 30 + 10 = 60$
2	$(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 5)$	$30 + 10 + 40 + 30 = 110$
3	$(2, 5), (3, 5), (4, 5)$	$30 + 20 + 20 = 70$

La única información de los tres cortes es que el flujo máximo en la red no puede exceder de 60 unidades. Para determinar el flujo máximo, es necesario enumerar *todos* los cortes, una tarea difícil para la red general. Por lo tanto, es imperativa la necesidad de un algoritmo eficiente.

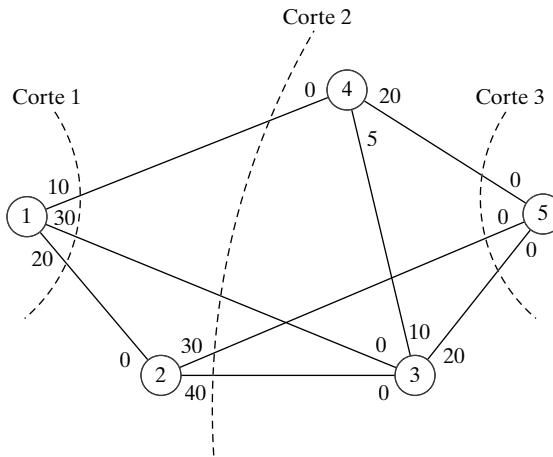


FIGURA 6.20
Ejemplos de cortes en redes de flujo

6.4.2 Algoritmo de flujo máximo

Este algoritmo se basa en la localización de **rutas de avance** con flujo *positivo* entre los nodos fuente y sumidero. Cada ruta destina total o parcialmente las capacidades de sus arcos al flujo total en la red.

Considere el arco (i, j) con las capacidades bidireccionales (de diseño) (C_{ij}, C_{ji}) . Como ciertas partes de estas capacidades se destinan al flujo en el arco, los **residuos** (o las capacidades no utilizadas) del arco se actualizan. Se usa la notación (c_{ij}, c_{ji}) para representar los residuos.

Para un nodo j que recibe flujo del nodo i , se anexa la etiqueta $[a_j, i]$ donde a_j es el flujo del nodo i al nodo j .

Paso 1. Para todos los arcos (i, j) , iguale la capacidad residual a la capacidad de diseño, esto es, $(c_{ij}, c_{ji}) = (C_{ij}, C_{ji})$. Sea $a_1 = \infty$ y etiquete el nodo fuente 1 con $[\infty, -]$. Establezca $i = 1$ y continúe con el paso 2.

Paso 2. Determine S_i , el conjunto de nodos no etiquetados j al que se puede llegar directamente desde i mediante arcos con residuos *positivos* (es decir, $c_{ij} > 0$ para todas las $j \in S_i$). Si $S_i \neq \emptyset$, continúe con el paso 3. En caso contrario, una ruta parcial termina en el nodo i . Continúe con el paso 4.

Paso 3. Determine $k \in S_i$ tal que

$$c_{ik} = \max_{j \in S_i} \{c_{ij}\}$$

Establezca $a_k = c_{ik}$ y etiquete el nodo k con $[a_k, i]$. Si $k = n$, se etiquetó el nodo sumidero y se encontró una *ruta de avance*, continúe con el paso 5. En caso contrario, establezca $i = k$ y continúe con el paso 2.

Paso 4. (Retroceso). Si $i = 1$, no es posible avanzar; continúe con el paso 6. En caso contrario, sea r el nodo (en la ruta parcial) que se etiquetó *inmediatamente* antes del nodo actual i , y elimine i del conjunto de nodos adyacentes a r . Establezca $i = r$ y vaya al paso 2.

Paso 5. (Determinación de residuos). Considere que $N_p = (1, k_1, k_2, \dots, n)$ define los nodos de la p -ésima ruta de avance del nodo 1 al nodo n . Entonces el flujo máximo a lo largo de la ruta se calcula como

$$f_p = \min \{a_1, a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_n\}$$

La capacidad residual de cada arco a lo largo de la ruta de avance se *reduce* en f_p en la dirección del flujo, y se *incrementa* en f_p en la dirección inversa, es decir, para los nodos i y j en la ruta, el flujo residual cambia del actual (c_{ij}, c_{ji}) a

- (a) $(c_{ij} - f_p, c_{ji} + f_p)$ si el flujo es de i a j
- (b) $(c_{ij} + f_p, c_{ji} - f_p)$ si el flujo es de j a i

Restablezca los nodos que se eliminaron en el paso 4. Designe $i = 1$, y regrese al paso 2.

Paso 6. (Solución).

- (a) Dado que se determinaron m rutas de avance, el flujo máximo en la red es

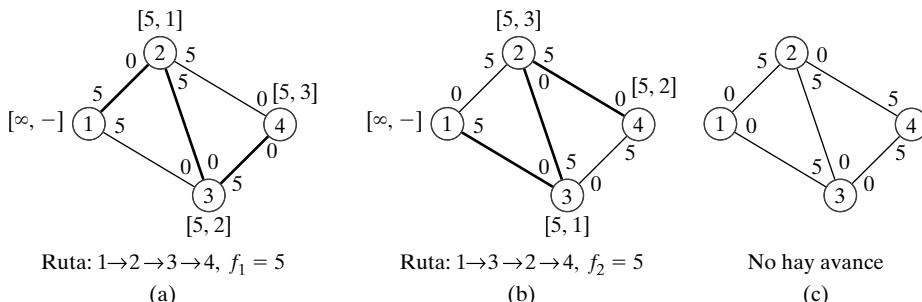
$$F = f_1 + f_2 + \dots + f_m$$

- (b) Si se usan las *capacidades de diseño* (iniciales) y los *residuos* finales del arco (i, j) , (C_{ij}, C_{ji}) y (c_{ij}, c_{ji}) , respectivamente, el flujo óptimo en el arco (i, j) se determina calculando $(\alpha, \beta) = (C_{ij} - c_{ij}, C_{ji} - c_{ji})$. Si $\alpha > 0$, el flujo óptimo de i a j es α . Por otro lado, si $\beta > 0$, el flujo óptimo de j a i es β (es imposible que tanto α como β sean positivos).

El proceso de retroceso del paso 4 se invoca cuando el algoritmo termina en un nodo intermedio. El ajuste de flujo en el paso 5 puede explicarse mediante la red de flujo simple de la figura 6.21.

FIGURA 6.21

Uso de los residuos para calcular el flujo máximo



La red (a) proporciona la primera ruta de avance $N_1 = [1, 2, 3, 4]$ con su flujo máximo $f_1 = 5$. Por lo tanto, los residuos de cada uno de los arcos $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, 4)$ cambian de $(5, 0)$ a $(0, 5)$, de acuerdo con el paso 5. La red (b) da ahora la segunda ruta de avance $N_2 = \{1, 3, 2, 4\}$ con $f_2 = 5$. Después de hacer los ajustes de flujo necesarios, se obtiene la red (c), donde ya no son posibles más rutas de avance. Lo que sucedió en la transición de (b) a (c) fue una cancelación del flujo previamente comprometido en la dirección $2 \rightarrow 3$, lo que en esencia permite el flujo sólo en las rutas $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ y $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ (flujo máximo = $5 + 5 = 10$). El algoritmo “recuerda” que un flujo de 2 a 3 se comprometió previamente debido a un ajuste anterior de la capacidad en la dirección inversa (de acuerdo con el paso 5).

Ejemplo 6.4-2

Determine el flujo máximo en la red del ejemplo 6.4-1 (figura 6.20). La figura 6.22 presenta un resumen gráfico de las iteraciones del algoritmo. Usted podrá ver que resulta útil comparar la descripción de las iteraciones con el resumen gráfico.

Iteración 1. Iguale los residuos iniciales (c_{ij}, c_{ji}) con las capacidades iniciales (C_{ij}, C_{ji}) .

Paso 1. Establezca $a_1 = \infty$ y etiquete el nodo 1 con $[\infty, -]$. Establezca $i = 1$.

Paso 2. $S_1 = \{2, 3, 4\} (\neq \emptyset)$.

Paso 3. $k = 3$ porque $c_{13} = \max\{c_{12}, c_{13}, c_{14}\} = \max\{20, 30, 10\} = 30$. Establezca $a_3 = c_{13} = 30$, y etiquete el nodo 3 con $[30, 1]$. Establezca $i = 3$ y repita el paso 2.

Paso 2. $S_3 = (4, 5)$.

Paso 3. $k = 5$ y $a_5 = c_{35} = \max\{10, 20\} = 20$. Etiquete el nodo 5 con $[20, 3]$. Se logra el avance. Continúe con el paso 5.

Paso 5. La ruta de avance se determina a partir de las etiquetas que inician en el nodo 5 y regresan al nodo 1, es decir, $(5) \rightarrow [20, 3] \rightarrow (3) \rightarrow [30, 1] \rightarrow (1)$. De este modo, $N_1 = \{1, 3, 5\}$ y $f_1 = \min\{a_1, a_3, a_5\} = [\infty, 30, 20] = 20$. Las capacidades residuales a lo largo de la ruta N_1 son

$$\begin{aligned}(c_{13}, c_{31}) &= (30 - 20, 0 + 20) = (10, 20) \\(c_{35}, c_{53}) &= (20 - 20, 0 + 20) = (0, 20)\end{aligned}$$

Iteración 2.

Paso 1. Establezca $a_1 = \infty$ y etiquete el nodo 1 con $[\infty, -]$. Establezca $i = 1$.

Paso 2. $S_1 = \{2, 3, 4\}$.

Paso 3. $k = 2$ y $a_2 = c_{12} = \max\{20, 10, 10\} = 20$. Establezca $i = 2$ y repita el paso 2.

Paso 2. $S_2 = \{3, 5\}$.

Paso 3. $k = 3$ y $a_3 = c_{23} = 40$. Etiquete el nodo 3 con $[40, 2]$. Establezca $i = 3$ y repita el paso 2.

Paso 2. $S_3 = \{4\}$ (observe que $c_{35} = 0$, entonces el nodo 5 no puede incluirse en S_3).

Paso 3. $k = 4$ y $a_4 = c_{34} = 10$. Etiquete el nodo 4 con $[10, 3]$. Establezca $i = 4$ y repita el paso 2.

Paso 2. $S_4 = \{5\}$ (observe que los nodos 1 y 3 ya están etiquetados, por lo tanto, no pueden incluirse en S_4).

Paso 3. $k = 5$ y $a_5 = c_{45} = 20$. Etiquete el nodo 5 con $[20, 4]$. Se logró una ruta de avance.

Vaya al paso 5.

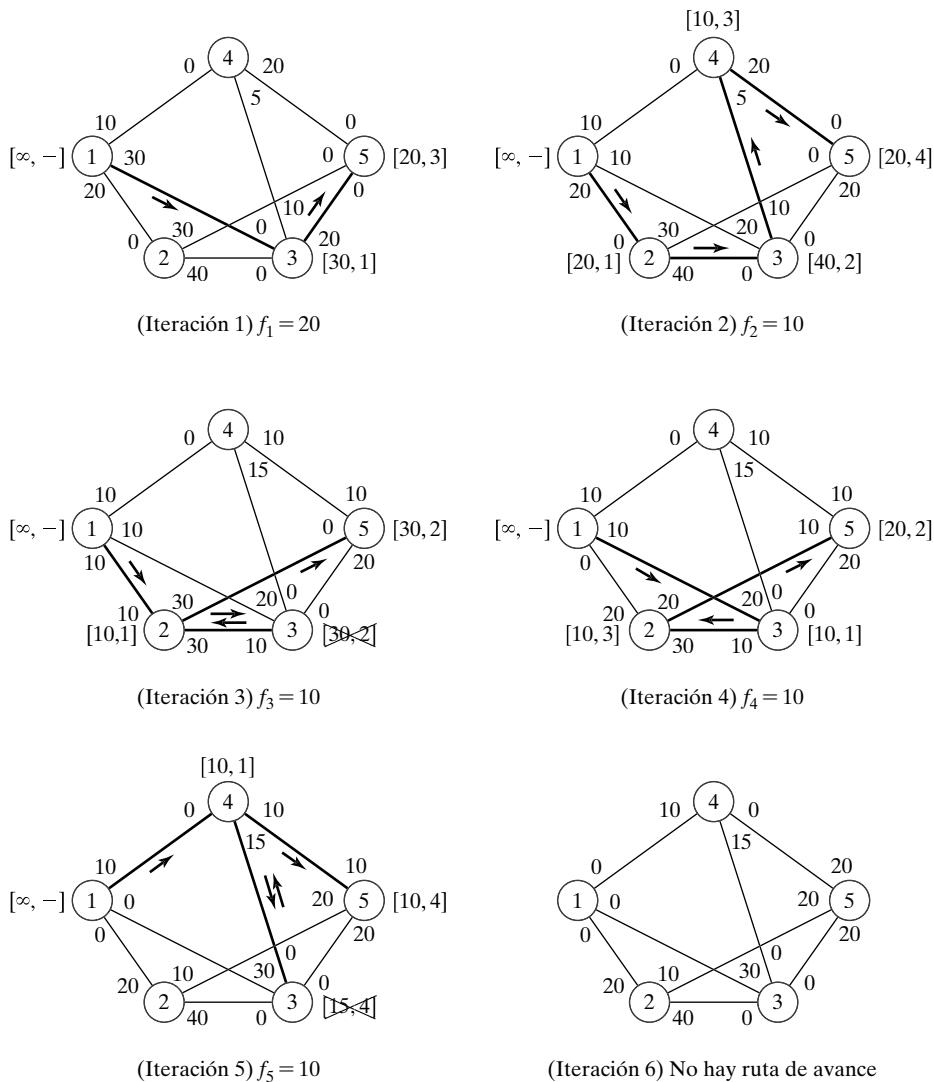


FIGURA 6.22
Iteraciones del algoritmo de flujo máximo para el ejemplo 6.4-2

Paso 5. $N_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $f_2 = \min \{\infty, 20, 40, 10, 20\} = 10$. Los residuos a lo largo de la ruta de N_2 son

$$(c_{12}, c_{21}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$$

$$(c_{23}, c_{32}) = (40 - 10, 0 + 10) = (30, 10)$$

$$(c_{34}, c_{43}) = (10 - 10, 5 + 10) = (0, 15)$$

$$(c_{45}, c_{54}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$$

Iteración 3.

Paso 1. Establezca $a_1 = \infty$, y etique el nodo 1 con $[\infty, -]$. Establezca $i = 1$.

Paso 2. $S_1 = \{2, 3, 4\}$.

Paso 3. $k = 2$ y $a_2 = c_{12} = \max\{10, 10, 10\} = 10$. (Aunque los empates se rompen arbitrariamente, TORA siempre selecciona el nodo empatado con el menor índice. Se usará esta convención a lo largo del ejemplo.) Etique el nodo 2 con $[10, 1]$. Establezca $i = 2$ y repita el paso 2.

Paso 2. $S_2 = \{3, 5\}$.

Paso 3. $k = 3$ y $a_3 = c_{23} = 30$. Etique el nodo 3 con $[30, 2]$. Establezca $i = 3$ y repita el paso 2.

Paso 2. $S_3 = \emptyset$ (porque $c_{34} = c_{35} = 0$). Vaya al paso 4 para retroceder.

Paso 4. *Retroceso.* La etiqueta $[30, 2]$ en el nodo 3 da el nodo inmediatamente anterior $r = 2$. Elimine el nodo 3 de cualquier consideración posterior en esta iteración; para ello, táchelo. Establezca $i = r = 2$ y repita el paso 2.

Paso 2. $S_2 = \{5\}$ (observe que el nodo 3 se eliminó en el paso de retroceso).

Paso 3. $k = 5$ y $a_5 = c_{25} = 30$. Etique el nodo 5 con $[30, 2]$. Se logró una ruta de avance. Vaya al paso 5.

Paso 5. $N_3 = \{1, 2, 5\}$ y $c_5 = \min\{\infty, 10, 30\} = 10$. Los residuos a lo largo de la ruta de N_3 son

$$(c_{12}, c_{21}) = (10 - 10, 10 + 10) = (0, 20)$$

$$(c_{25}, c_{52}) = (30 - 10, 0 + 10) = (20, 10)$$

Iteración 4.

Esta iteración resulta en $N_4 = \{1, 3, 2, 5\}$ con $f_4 = 10$ (*¡verifíquelo!*).

Iteración 5.

Esta iteración resulta en $N_5 = \{1, 4, 5\}$ con $f_5 = 10$ (*¡verifíquelo!*).

Iteración 6.

Todos los arcos que salen del nodo 1 tienen residuos cero. Por lo tanto, no son posibles más rutas de avance. Se procede al paso 6 para determinar la solución.

Paso 6. El flujo máximo en la red es $F = f_1 + f_2 + \dots + f_5 = 20 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60$ unidades. El flujo en los arcos individuales se calcula restando los últimos residuos $(c_{ij}, c_{ji})_6$ en la iteración 6 de las capacidades de diseño (C_{ij}, C_{ji}) , como se indica en la siguiente tabla.

Arco	$(C_{ij}, C_{ji}) - (c_{ij}, c_{ji})_6$	Cantidad de flujo	Dirección
$(1, 2)$	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	$1 \rightarrow 2$
$(1, 3)$	$(30, 0) - (0, 30) = (30, -30)$	30	$1 \rightarrow 3$
$(1, 4)$	$(10, 0) - (0, 10) = (10, -10)$	10	$1 \rightarrow 4$
$(2, 3)$	$(40, 0) - (40, 0) = (0, 0)$	0	—
$(2, 5)$	$(30, 0) - (10, 20) = (20, -20)$	20	$2 \rightarrow 5$
$(3, 4)$	$(10, 5) - (0, 15) = (10, -10)$	10	$3 \rightarrow 4$
$(3, 5)$	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	$3 \rightarrow 5$
$(4, 3)$	$(5, 10) - (15, 0) = (-10, 10)$	0	—
$(4, 5)$	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	$4 \rightarrow 5$

Momento de TORA

Es posible utilizar TORA para resolver el modelo de flujo máximo en modo automático o en modo de una iteración a la vez. Del menú **SOLVE/MODIFY**, seleccione **Solve Problem**. Despues de especificar el formato de salida, vaya a la pantalla de resultados y elija **Maximum Flows** o **Iterations**. El archivo *toraEx6.4-2.txt* proporciona los datos de TORA para el ejemplo 6.4-2.

6.4.3 Formulación de programación lineal en el modo de flujo máximo

Defina x_{ij} como la cantidad de flujo en el arco (i, j) con capacidad C_{ij} . El objetivo es determinar x_{ij} para toda i y j que maximice el flujo entre el nodo inicial s y el nodo final t sujeto a restricciones de flujo (flujo de entrada = flujo de salida) en todos los nodos excepto en s y t .

Ejemplo 6.4-3

En el modelo de flujo máximo de la figura 6.22 (ejemplo 6.4-2), $s = 1$ y $t = 5$. La siguiente tabla resume la PL asociada con dos funciones objetivo diferentes, pero equivalentes, dependiendo si se maximiza la salida desde el nodo inicial 1 ($= z_1$) o la entrada al nodo terminal 5 ($= z_2$).

	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{43}	x_{45}
Maximizar $z_1 =$	1	1	1						
Maximizar $z_2 =$					1		1		1
Nodo 2	1			-1	-1				= 0
Nodo 3		1		1		-1	-1	1	= 0
Nodo 4			1			1		-1	-1 = 0
Capacidad	20	30	10	40	30	10	20	5	20

La solución óptima con una u otra función objetivo es

$$x_{12} = 20, x_{13} = 30, x_{14} = 10, x_{25} = 20, x_{34} = 10, x_{35} = 20, x_{45} = 20$$

El flujo máximo asociado es $z_1 = z_2 = 60$.

Momento de Solver

En la figura 6.23 se proporciona el modelo de Solver Excel para el modelo de flujo máximo del ejemplo 6.4-2 (archivo *solverEx6.4-2.xls*). La idea general es parecida a la del modelo de la ruta más corta, que se detalla siguiendo el ejemplo 6.3-6. Entre las diferencias principales se incluyen: (1) no hay ecuaciones de flujo para el nodo inicial 1 y el nodo final 5, y (2) el objetivo es maximizar el flujo de salida total en el nodo inicial 1 (F9) o, de manera equivalente, el flujo de entrada total en el nodo terminal 5 (G13). El archivo *solverEx6.4-2.xls* utiliza G13 como la celda objetivo. Trate de ejecutar el modelo remplazando F9 por G13.

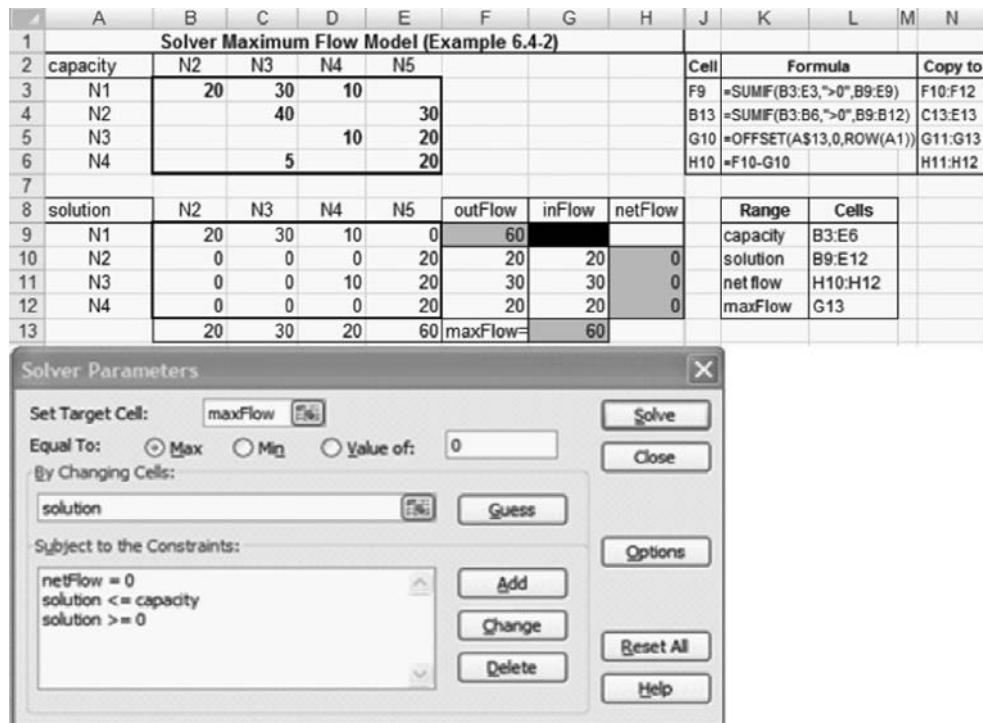


FIGURA 6.23

Solución de Excel Solver para el modelo de flujo máximo del ejemplo 6.4-2 (archivo *solverEx6.4-2.xls*)

Momento de AMPL

El archivo *amplEx6.4-2.txt* proporciona el modelo en AMPL para el problema de flujo máximo entre dos nodos cualesquiera en la red del ejemplo 6.4-2. El modelo es aplicable a cualquier cantidad de nodos.

6.5 CPM Y PERT

El método de la ruta crítica (CPM, por las siglas de *critical path method*) y la técnica de evaluación y revisión de programas (PERT, por las siglas de *program evaluation and review technique*) son métodos basados en redes que se diseñaron para ayudar a planear, programar y controlar proyectos. Un proyecto se define como un conjunto de actividades interrelacionadas donde cada actividad consume tiempo y recursos. El objetivo de CPM y PERT es diseñar herramientas analíticas para programar las actividades. En la figura 6.24 se resumen los pasos de las técnicas. Primero se definen las actividades del proyecto, sus relaciones de precedencia y sus requisitos de tiempo. Luego se modelan las relaciones de precedencia entre las actividades como una red. El tercer paso implica cálculos específicos para desarrollar el cronograma. Durante la fase de ejecución real, es posible que la ejecución de las actividades no proceda como se planeó, en el sentido de que algunas de las actividades pueden acelerarse o demorarse. Cuando así sucede, el programa se actualiza para reflejar las realidades en el campo. Ésta es la razón por la que se incluye un bucle de retroalimentación en la figura 6.24.

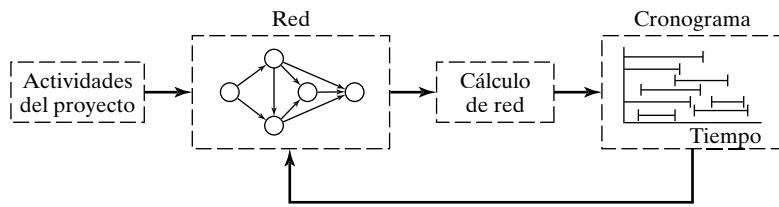


FIGURA 6.24

Fases para la planeación de un proyecto con CMP-PERT

Las dos técnicas, CPM y PERT, se desarrollaron de forma independiente. Difieren en que PERT supone duraciones de actividad probabilísticas y CPM supone duraciones determinísticas.

6.5.1 Representación en red

Cada actividad está representada por un arco que apunta en la dirección del avance del proyecto. Los nodos de la red establecen las relaciones de precedencia entre las diferentes actividades. Se dispone de tres reglas para construir la red.

Regla 1. *Cada actividad está representada por un arco y sólo uno.*

Regla 2. *Cada actividad debe identificarse mediante dos nodos finales distintos.*

En la figura 6.25 se muestra cómo se utiliza una **actividad ficticia** para representar de forma única dos actividades concurrentes, *A* y *B*. Por definición, una actividad ficticia (línea discontinua) no consume tiempo ni recursos. Al insertar una actividad ficticia de una de las cuatro formas mostradas en la figura 6.25 se mantiene la concurrencia de *A* y *B*, y se proporcionan nodos terminales únicos para las dos actividades (con la finalidad de satisfacer la regla 2).

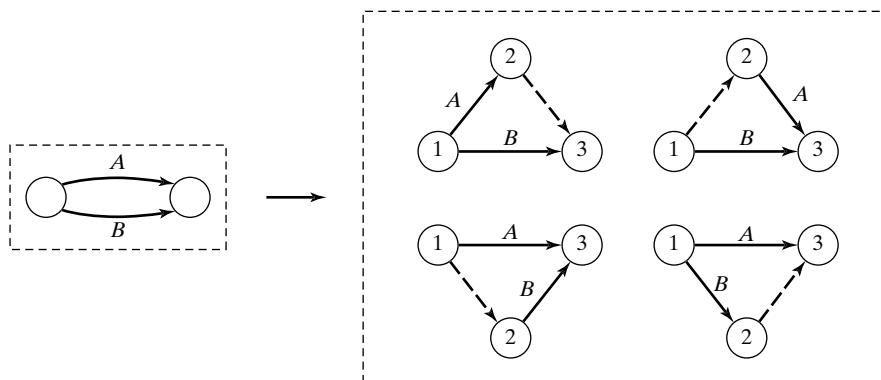


FIGURA 6.25

Uso de una actividad ficticia para producir una representación única de las actividades concurrentes

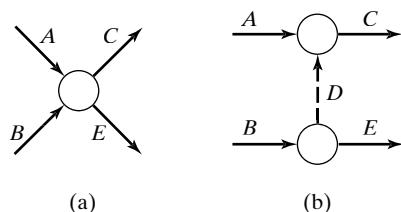


FIGURA 6.26

Uso de una actividad ficticia para asegurar la relación de precedencia correcta

Regla 3. Para mantener las relaciones de precedencia correctas, es necesario contestar las siguientes preguntas, a medida que se agrega cada actividad a la red.

- (a)** ¿Qué actividades preceden inmediatamente a la actividad actual?
 - (b)** ¿Qué actividades siguen inmediatamente a la actividad actual?
 - (c)** ¿Qué actividades son concurrentes con la actividad actual?

Las respuestas a estas preguntas pueden requerir el uso de actividades ficticias para garantizar la precedencia correcta entre las actividades. Por ejemplo, considere el siguiente segmento de un proyecto:

1. La actividad C inicia inmediatamente después de completar las actividades A y B .
 2. La actividad E puede iniciar después de completar la actividad B .

El inciso (a) de la figura 6.26 muestra la representación incorrecta de la relación de precedencia porque requiere que tanto A como B se completen antes de que inicie E . En el inciso (b), el uso de una actividad ficticia rectifica la situación.

Ejemplo 6.5-1

Un editor tiene un contrato con un autor para publicar un libro de texto. El autor le envía una copia impresa y un archivo digital del manuscrito. Las actividades (simplificadas) asociadas con la producción del libro de texto se resumen en la siguiente tabla.

Actividad	Predecesor(es)	Duración (semanas)
A: Corrección del manuscrito por parte del editor	—	3
B: Preparación de las páginas muestra	—	2
C: Diseño de la portada del libro	—	4
D: Preparación de las ilustraciones	—	3
E: Aprobación del manuscrito editado y de las páginas muestra por parte del autor	A, B	2
F: Formación del libro	E	4
G: Revisión de las páginas formadas por parte del autor	F	2
H: Revisión de las ilustraciones por parte del autor	D	1
I: Producción de las placas de impresión	G, H	2
J: Impresión y encuadernación del libro	C, I	4

En la figura 6.27 se proporciona la red del proyecto. Una actividad ficticia (2, 3) produce nodos terminales únicos para las actividades concurrentes A y B . Resulta conveniente numerar los nodos en orden ascendente en la dirección de avance del proyecto.

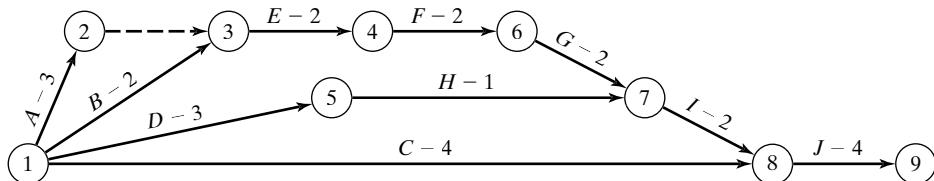


FIGURA 6.27

Red del proyecto para el ejemplo 6.5-1

6.5.2 Cálculos en el método de la ruta crítica (CPM)

El resultado final con el CPM es un cronograma para el proyecto (vea la figura 6.24). Para lograr ese objetivo se realizan cálculos especiales a fin de obtener la siguiente información:

1. Duración total necesaria para completar el proyecto.
2. Clasificación de las actividades del proyecto como *críticas* o *no críticas*.

Una actividad es **crítica** si sus tiempos inicial y final están predeterminados (son fijos). Una actividad es **no crítica** si puede programarse en un tiempo mayor que su duración, lo que permite tiempos inicial y terminal flexibles (dentro de los límites). Una demora en el tiempo inicial de una actividad crítica definitivamente retrasa la terminación de todo el proyecto, en tanto que una demora en una actividad no crítica tal vez no afecte la fecha de terminación del mismo.

Para realizar los cálculos necesarios, definimos un **evento** como un punto en el tiempo en el cual se completan las actividades y se inician las subsecuentes. En términos de la red, un evento corresponde a un nodo. Sean

\square_j = Tiempo de ocurrencia más temprano del evento j

Δ_j = Tiempo de ocurrencia más tardío del evento j

D_{ij} = Duración de la actividad (i, j)

Todos los tiempos de ocurrencia se miden a partir del inicio del proyecto. El lapso (\square_j, Δ_j) define el periodo de tiempo durante el cual se programa la actividad (i, j) de duración D_{ij} . Si la actividad (i, j) es crítica, entonces $D_{ij} = \Delta_j - \square_j$. En caso contrario, $D_{ij} < \Delta_j - \square_j$ para la actividad no crítica (i, j) .

Los cálculos de la ruta crítica implican dos pasos: El **paso adelante** determina los tiempos de ocurrencia más tempranos de los eventos y el **paso atrás** calcula sus tiempos de ocurrencia más tardíos.

Paso adelante (tiempos de ocurrencia más tempranos, \square_j). Los cálculos inician en el nodo 1 y avanzan de manera recursiva hacia el nodo n .

Paso inicial. Establezca $\square_1 = 0$ para indicar que el proyecto inicia en el tiempo 0.

Paso general j . Dado que los nodos $p, q, \dots, y v$ están vinculados directamente al nodo j por las actividades entrantes $(p, j), (q, j), \dots, y (v, j)$ y que los tiempos de ocurrencia más

tempranos de los eventos (nodos) $p, q, \dots, y v$ ya se calcularon, entonces el tiempo de ocurrencia más temprano del evento j se calcula como

$$\square_j = \max\{\square_p + D_{pj}, \square_q + D_{qj}, \dots, \square_v + D_{vj}\}$$

El paso adelante se completa al haber calculado \square_n en el nodo n . Por definición, \square_j es la ruta (duración) más larga hacia el nodo j .

Paso atrás (tiempos de ocurrencia más tardíos, Δ). Los cálculos del paso atrás inician en el nodo n y terminan en el nodo 1.

Paso inicial. Establezca $\Delta_n = \square_n$ para indicar que las ocurrencias más tardías del último nodo son iguales a la duración del proyecto.

Paso general j . Dado que los nodos $p, q, \dots, y v$ están vinculados *directamente* al nodo j por las actividades *salientes* $(j, p), (j, q), \dots, y (j, v)$ y que los tiempos de ocurrencia más tardíos de los nodos $p, q, \dots, y v$ ya se calcularon, el tiempo de ocurrencia más tardío del nodo j es c .

$$\Delta_j = \min\{\Delta_p - D_{jp}, \Delta_q - D_{jq}, \dots, \Delta_v - D_{jv}\}$$

El paso atrás termina con $\Delta_1 = 0$ en el nodo 1.

Con base en los cálculos anteriores, una actividad (i, j) será crítica si satisface tres condiciones.

1. $\Delta_i = \square_i$
2. $\Delta_j = \square_j$
3. $\Delta_j - \square_i = D_{ij}$

Las tres condiciones establecen que los tiempos de ocurrencia más tempranos y más tardíos de los nodos finales i y j son iguales y que la duración D_{ij} se ajusta “exactamente” en el lapso de tiempo especificado. Una condición que no satisface las tres condiciones es *no crítica*.

Por definición, las actividades críticas de una red constituyen la ruta más larga que abarca el proyecto desde su inicio hasta su terminación.

Ejemplo 6.5-2

Determine la ruta crítica para la red del proyecto que se muestra en la figura 6.28. Todas las duraciones se dan en días.

Paso adelante

Nodo 1. Establezca $\square_1 = 0$

Nodo 2. $\square_2 = \square_1 + D_{12} = 0 + 5 = 5$

Nodo 3. $\square_3 = \max\{\square_1 + D_{13}, \square_2 + D_{23}\} = \max\{0 + 6, 5 + 3\} = 8$

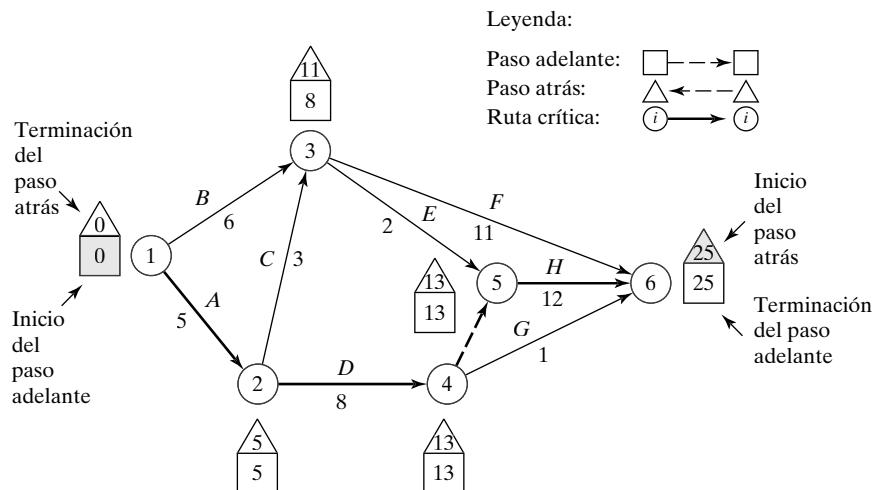


FIGURA 6.28

Cálculos de paso adelante y paso atrás para el proyecto del ejemplo 6.5-2

$$\text{Nodo 4. } \square_4 = \square_2 + D_{24} = 5 + 8 = 13$$

$$\text{Nodo 5. } \square_5 = \max\{\square_3 + D_{35}, \square_4 + D_{45}\} = \max\{8 + 2, 13 + 0\} = 13$$

$$\begin{aligned} \text{Nodo 6. } \square_6 &= \max\{\square_3 + D_{36}, \square_4 + D_{46}, \square_5 + D_{56}\} \\ &= \max\{8 + 11, 13 + 1, 13 + 12\} = 25 \end{aligned}$$

Los cálculos muestran que el proyecto puede completarse en 25 días.

Paso atrás

$$\text{Nodo 6. Establezca } \Delta_6 = \square_6 = 25$$

$$\text{Nodo 5. } \Delta_5 = \Delta_6 - D_{56} = 25 - 12 = 13$$

$$\text{Nodo 4. } \Delta_4 = \min\{\Delta_6 - D_{46}, \Delta_5 - D_{45}\} = \min\{25 - 1, 13 - 0\} = 13$$

$$\text{Nodo 3. } \Delta_3 = \min\{\Delta_6 - D_{36}, \Delta_5 - D_{35}\} = \min\{25 - 11, 13 - 2\} = 11$$

$$\text{Nodo 2. } \Delta_2 = \min\{\Delta_4 - D_{24}, \Delta_3 - D_{23}\} = \min\{13 - 8, 11 - 3\} = 5$$

$$\text{Nodo 1. } \Delta_1 = \min\{\Delta_3 - D_{13}, \Delta_2 - D_2\} = \min\{11 - 6, 5 - 5\} = 0$$

Los cálculos correctos siempre terminarán con $\Delta_1 = 0$. Los cálculos se pueden hacer directamente en la red como lo muestra la figura 6.28.

La ruta crítica es $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ que, como se esperaba, abarca la red desde el inicio (nodo 1) hasta la terminación (nodo 6). La suma de las duraciones de las actividades críticas [(1, 2), (2, 4), (4, 5) y (5, 6)] es igual a la duración del proyecto (= 25 días). Observe que la actividad (4, 6) satisface las dos primeras condiciones para una actividad crítica ($\Delta_4 = \square_4 = 13$ y $\Delta_6 = \square_6 = 25$) pero no la tercera ($\Delta_6 - \square_4 \neq D_{46}$). Por consiguiente, la actividad es no crítica.

6.5.3 Construcción del cronograma

En esta sección se muestra la manera como se utiliza la información obtenida a partir de los cálculos en la sección 6.5.2 para el desarrollo del cronograma. Se reconoce que para una actividad (i, j) , \square_i representa el *tiempo inicial más temprano*, y Δ_j representa el *tiempo de terminación más tardío*. Por lo tanto, el intervalo (\square_i, Δ_j) define el tiempo (máximo) durante el cual puede programarse la actividad (i, j) sin una demora en todo el proyecto.

Construcción de un programa preliminar. El método para construir un programa preliminar se ilustra mediante un ejemplo.

Ejemplo 6.5-3

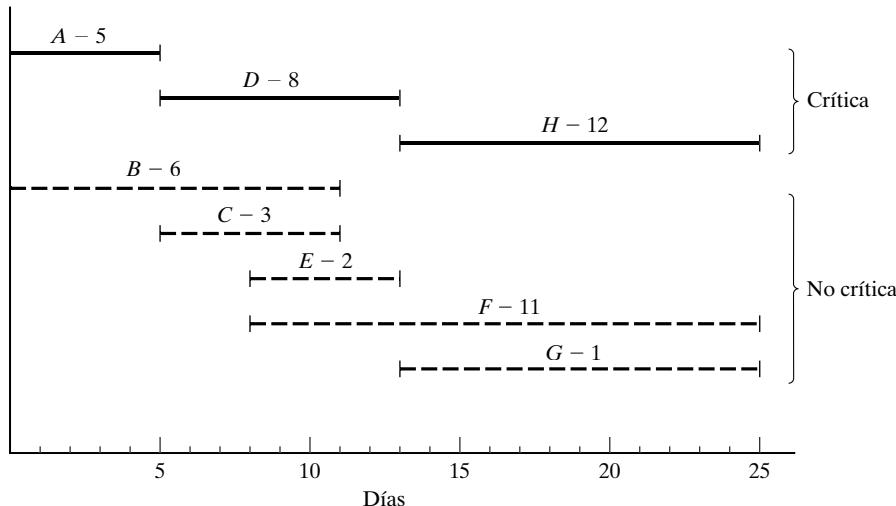
Determine el cronograma para el proyecto del ejemplo 6.5-2 (figura 6.28).

Es posible obtener un cronograma preliminar para las diferentes actividades del proyecto al definir sus respectivos tiempos, como se muestra en la figura 6.29.

1. Las actividades críticas (ilustradas con líneas continuas) están escalonadas una justo después de la otra, para garantizar que el proyecto se complete dentro de la duración especificada de 25 días.
2. Las actividades no críticas (mostradas mediante las líneas discontinuas) tienen lapsos de tiempo permisibles mayores que sus respectivas duraciones, lo cual permite una holgura (o “margen”) al programarlas dentro de sus intervalos de tiempo designados.

¿Cómo se programan las actividades no críticas dentro de sus respectivos tiempos? Por lo general, es preferible iniciar cada actividad no crítica lo más pronto posible. De esta manera, los períodos de holgura restantes pueden usarse para compensar las demoras inesperadas en la actividad. Sin embargo, puede ser necesario retrasar

FIGURA 6.29
Cronograma preliminar para el proyecto del ejemplo 6.5-2



el inicio de una actividad no crítica más allá de su tiempo inicial más temprano. Por ejemplo, en la figura 6.29, suponga que cada una de las actividades no críticas E y F requiere el uso de una excavadora y que sólo una está disponible. Programar tanto E como F , tan pronto como sea posible, requiere dos excavadoras entre los tiempos 8 y 10. El traslape se puede eliminar iniciando E en el tiempo 8 y empujando el tiempo inicial de F hacia algún punto entre los tiempos 10 y 14.

Si todas las actividades no críticas pueden programarse lo más pronto posible, el programa resultante siempre es factible. En caso contrario, pueden quebrantarse algunas relaciones de precedencia si las actividades no críticas se demoran más allá de su tiempo inicial más temprano. Considere, por ejemplo, las actividades C y E de la figura 6.29. En la red de proyecto (figura 6.28), aunque C debe completarse antes que E , los períodos de tiempo de C y E en la figura 6.29 permiten programar C entre los tiempos 6 y 9, y E entre los tiempos 8 y 10, lo cual quebra el requisito de que C preceda a E . Entonces, resulta evidente la necesidad de una “señal roja” que revele de manera automática el conflicto en el programa. Esta información se obtiene calculando los *flotantes* para las actividades no críticas.

Determinación de los flotantes. Los flotantes son los tiempos de **holgura** disponibles dentro del espacio designado de la actividad no crítica. Los tipos más comunes son el **flotante total** y el **flotante libre**.

En la figura 6.30 se da un resumen conveniente para calcular el flotante total (TF_{ij}) y el flotante libre (FF_{ij}) para una actividad (i, j) .

$$TF_{ij} = \Delta_j - \square_i - D_{ij}$$

$$FF_{ij} = \square_j - \square_i - D_{ij}$$

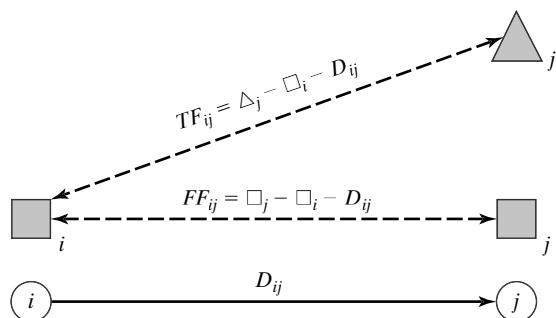
Por definición, $FF_{ij} \leq TF_{ij}$.

Regla de la bandera roja. Para una actividad no crítica (i, j) , si $FF_{ij} < TF_{ij}$, entonces su inicio puede demorarse cuando mucho en FF_{ij} respecto de su tiempo inicial más temprano \square_i , sin provocar un conflicto en el programa. Cualquier demora mayor que FF_{ij} (pero no mayor que TF_{ij}) debe acoplarse con una demora igual (respecto de \square_j) en el tiempo inicial de todas las actividades que salen del nodo j .

La implicación de la regla es que, si $FF_{ij} = TF_{ij}$, es posible programar una actividad no crítica (i, j) en cualquier punto del intervalo (\square_i, Δ_j) sin provocar conflictos en el programa. En caso contrario, si $FF_{ij} < TF_{ij}$, la actividad (i, j) recibe una bandera roja por la posibilidad de demorar el tiempo inicial de las actividades que salen del nodo j .

FIGURA 6.30

Cálculo de los flotantes total y libre



Ejemplo 6.5-4

Calcule los flotantes para las actividades no críticas en la red del ejemplo 6.5-2, y analice su uso para finalizar un programa del proyecto.

En la siguiente tabla se resumen los cálculos de los flotantes total y libre. Para realizar cálculos manuales, resulta más conveniente hacer los cálculos directamente en la red de acuerdo con el procedimiento mostrado en la figura 6.30.

Actividad no crítica	Duración	Flotante total (<i>TF</i>)	Flotante libre (<i>FF</i>)
<i>B</i> (1, 3)	6	11 – 0 – 6 = 5	8 – 0 – 6 = 2
<i>C</i> (2, 3)	3	11 – 5 – 3 = 3	8 – 5 – 3 = 0
<i>E</i> (3, 5)	2	13 – 8 – 2 = 3	13 – 8 – 2 = 3
<i>F</i> (3, 6)	11	25 – 8 – 11 = 6	25 – 8 – 11 = 6
<i>G</i> (4, 6)	1	25 – 13 – 1 = 11	25 – 13 – 1 = 11

Los cálculos indican una bandera roja en las actividades *B* y *C* porque su *FF* < *TF*. Las actividades restantes (*E*, *F* y *G*) tienen *FF* = *TF*, por lo que pueden programarse en cualquier punto entre sus tiempos inicial más temprano y de terminación más tardía.

Para investigar la importancia de las actividades marcadas con una bandera roja, considere la actividad *B* con *TF* = 5 días y *FF* = 2 días. Esta actividad puede iniciar en cualquier tiempo entre 0 y 2 (su *FF*). Por otro lado, si *B* inicia después del tiempo 2 hasta el tiempo 5 (su *TF*), los tiempos inicial de las actividades subsecuentes inmediatas *E* y *F* deben empujarse hacia adelante respecto de su tiempo inicial más temprano (= 8) por al menos un periodo de demora igual.

En cuanto a la actividad *C* marcada con una bandera roja, su *FF* cero significa que *cualquier* demora al iniciar *C* pasado su tiempo inicial más temprano (= 5) debe acoplarse con, al menos, una demora igual del tiempo inicial de sus actividades sucesoras *E* y *F*.

Momento de TORA

TORA proporciona herramientas tutoriales útiles para cálculos de CPM y para construir el cronograma. Para usar esas herramientas seleccione Project Planning ⇒ CPM – Critical Path Method del Main Menu. En la pantalla de resultados tiene la opción de elegir CPM Calculations para producir cálculos paso a paso del paso adelante, el paso atrás, y los flotantes o CPM Bar Chart para construir y experimentar con el cronograma.

En el archivo *toraEx6.5-2.txt* se proporcionan los datos para el ejemplo 6.5-2. Si elige generar la salida mediante la opción Next Step, TORA lo guiará a través de los detalles de los cálculos del paso adelante y el paso atrás.

En la figura 6.31 se proporciona el programa de TORA producido por la opción CPM Bar Chart para el proyecto del ejemplo 6.5-2. La gráfica de barras predeterminada programa de forma automática todas las actividades no críticas tan pronto como sea posible. Usted puede estudiar el impacto de demorar el tiempo inicial de una actividad no crítica por medio de listas desplegables en el lado izquierdo de la pantalla. El impacto de demorar una actividad no crítica se mostrará directamente en la gráfica de barras junto con una explicación. Por ejemplo, si usted demora el inicio de la actividad *B* en más de 2 unidades de tiempo, las actividades subsecuentes *E* y *F* se demorarán en una cantidad igual a la diferencia entre la demora y el flotante libre de la actividad *B*. En específico, dado que el flotante libre de *B* es de 2 unidades de tiempo, si *B* se demora en 3 unidades de tiempo, entonces el inicio de *E* y *F* se debe demorar en al menos $3 - 2 = 1$ unidad de tiempo. Esta situación se demuestra en la figura 6.31.



FIGURA 6.31

Gráfica de barras resultante en TORA para el ejemplo 6.5-2 (archivo *toraEx6.5-2.txt*)

Momento de AMPL

El archivo *amplEx6.5-2.txt* proporciona el modelo para la CPM. El modelo está guiado por los datos del ejemplo 6.5-2. Este modelo de AMPL es una aplicación única porque no es un problema de optimización.

6.5.4 Formulación de programación lineal de CPM

El modelo CPM busca la ruta *más larga* entre los nodos inicial y final de la red del proyecto. Por lo tanto, su formulación como una PL es semejante a la PL del modelo de la ruta más corta (sección 6.3.3). La única diferencia es que la función objetivo se maximiza en vez de minimizarse.

Defina

x_{ij} = Cantidad de flujo en la actividad (i, j) para toda i y j definidas

D_{ij} = Duración de la actividad (i, j) para toda i y j definidas

Así, la función objetivo del programa lineal se convierte en

$$\text{Maximizar } z = \sum_{\substack{\text{todas las actividades} \\ (i, j) \text{ definidas}}} D_{ij} x_{ij}$$

Para cada nodo hay una restricción que representa la conservación del flujo:

$$\text{Flujo de entrada total} = \text{Flujo de salida total}$$

Todas las variables, x_{ij} , son no negativas.

Ejemplo 6.5-5

A continuación se da la formulación de PL para el proyecto del ejemplo 6.5-2 (figura 6.28). Observe que los nodos 1 y 6 son los nodos inicial y final, respectivamente.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>Ficticia</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
	x_{12}	x_{13}	x_{23}	x_{24}	x_{35}	x_{36}	x_{45}	x_{46}	x_{56}
Maximizar $z =$	6	6	3	8	2	11	0	1	12
Nodo 1	-1	-1							= -1
Nodo 2	1		-1	-1					= 0
Nodo 3		1	1		-1	-1			= 0
Nodo 4				1			-1	-1	= 0
Nodo 5					1		1		-1 = 0
Nodo 6						1		1	= 1

La solución óptima es $z = 25$, $x_{12}(A) = 1$, $x_{24}(D) = 1$, x_{45} (ficticia) = 1, $x_{56}(H) = 1$, y todas las demás = 0. La solución define la ruta crítica como $A \rightarrow D \rightarrow$ ficticia $\rightarrow H$, y la duración del proyecto es de 25 días, pero no proporciona los datos necesarios para construir la gráfica de CPM.

6.5.5 Redes PERT

PERT difiere de CPM en que supone tiempos de duración probabilísticos basados en tres estimaciones:

1. **Tiempo optimista**, a , que ocurre cuando la ejecución transcurre extremadamente bien.
2. **Tiempo más probable**, m , que ocurre cuando la ejecución se realiza en condiciones normales.
3. **Tiempo pesimista**, b , que ocurre cuando la ejecución transcurre extremadamente mal.

El tiempo más probable, m , cae en el intervalo (a, b) .

Con base en las estimaciones, el tiempo de duración promedio, \bar{D} y varianza, v , se aproximan como

$$\bar{D} = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$v = \left(\frac{b - a}{6} \right)^2$$

Los cálculos de CPM dados en las secciones 6.5.2 y 6.5.3 se pueden aplicar directamente, y \bar{D} reemplaza a la estimación sencilla D .

Dada la variable aleatoria e_j que representa el tiempo de ocurrencia más temprano del nodo, la probabilidad de que j ocurra en un tiempo programado, S_j , puede estimarse de la siguiente manera: Suponga que todas las actividades en la red son estadísticamente independientes, y calcule primero la media $E\{e_j\}$ y la varianza, $\text{var}\{e_j\}$. Si sólo hay una ruta del nodo inicial al nodo j , entonces la media es la suma de las duraciones esperadas, \bar{D} , de todas las actividades a lo largo de esta ruta y la varianza es la suma de las varianzas, v , de las mismas actividades. Si hay más de una ruta que conduce al nodo j , entonces es necesario determinar la distribución estadística de la duración de la ruta más larga, un problema bastante difícil porque implica determinar la distribución del máximo de al menos dos variables aleatorias. Un supuesto simplificador requiere seleccionar la ruta al nodo j que tiene la duración *promedio* más larga. Si dos o más rutas tienen la misma media, se selecciona la de la mayor varianza porque refleja la incertidumbre máxima y, por consiguiente, conduce a una estimación más conservadora de las probabilidades.

Dadas la media y la varianza de la ruta al nodo j , $E\{e_j\}$ y $\text{var}\{e_j\}$, la probabilidad de que el nodo j ocurra en el tiempo S_j se aproxima mediante la distribución normal estándar, z (vea la sección 14.4.4), es decir,

$$P\{e_j \leq S_j\} = P\left\{\frac{e_j - E\{e_j\}}{\sqrt{\text{var}\{e_j\}}} \leq \frac{S_j - E\{e_j\}}{\sqrt{\text{var}\{e_j\}}}\right\} = P\{z \leq K_j\}$$

El uso de la distribución normal se justifica porque e_j es la suma de variables aleatorias independientes. De acuerdo con el *teorema del límite central* (vea la sección 14.4.4), e_j se distribuye en forma aproximadamente normal.

Ejemplo 6.5-6

Considere el proyecto del ejemplo 6.5-2. Para no repetir los cálculos de la ruta crítica, los valores de a , m y b que aparecen en la siguiente tabla se seleccionan de modo que produzcan $\bar{D}_{ij} = D_{ij}$ para toda i y j en el ejemplo 6.5-2.

Actividad	$i-j$	(a, m, b)	Actividad	$i-j$	(a, m, b)
A	1-2	(3, 5, 7)	E	3-5	(1, 2, 3)
B	1-3	(4, 6, 8)	F	3-6	(9, 11, 13)
C	2-3	(1, 3, 5)	G	4-6	(1, 1, 1)
D	2-4	(5, 8, 11)	H	5-6	(10, 12, 14)

La media \bar{D}_{ij} y la varianza v_{ij} de las diferentes actividades se dan en la siguiente tabla. Observe que una actividad ficticia con $(a, m, b) = (0, 0, 0)$ tiene media y varianza cero.

Actividad	$i-j$	\bar{D}_{ij}	v_{ij}	Actividad	$i-j$	\bar{D}_{ij}	v_{ij}
A	1-2	5	.444	E	3-5	2	.111
B	1-3	6	.444	F	3-6	11	.444
C	2-3	3	.444	G	4-6	1	.000
D	2-4	8	1.000	H	5-6	12	.444

En la siguiente tabla se presenta la ruta más larga del nodo 1 a los diferentes nodos, junto con su media y desviación estándar asociadas.

Nodo	Ruta más larga basada en las duraciones medias	Media de la ruta	Desviación estándar de la ruta
2	1–2	5.00	0.67
3	1–2–3	8.00	0.94
4	1–2–4	13.00	1.20
5	1–2–4–5	13.00	1.20
6	1–2–4–5–6	25.00	1.37

En la siguiente tabla se calcula la probabilidad de que cada nodo se realice en el tiempo S_j (especificado por el analista).

Nodo j	Ruta más larga	Media de la ruta	Desviación estándar de la ruta	S_j	K_j	$P\{z \leq K_j\}$
2	1–2	5.00	0.67	5.00	0	.5000
3	1–2–3	8.00	0.94	11.00	3.19	.9993
4	1–2–4	13.00	1.20	12.00	-.83	.2033
5	1–2–4–5	13.00	1.20	14.00	.83	.7967
6	1–2–4–5–6	25.00	1.37	26.00	.73	.7673

Momento de TORA

TORA proporciona un módulo para realizar cálculos PERT. Para usar este módulo, seleccione Project Planning \Rightarrow PERT-Program Evaluation and Review Technique del Main Menu. En la pantalla de resultados, tiene la opción de seleccionar Activity Mean/Var para calcular la media y la varianza de cada actividad, o PERT Calculations para calcular la media y la varianza de la ruta más larga a cada nodo en la red. El archivo *toraEx6.5-6.txt* proporciona los datos de TORA para el ejemplo 6.5-6.

BIBLIOGRAFÍA

- Ahuja, R., T. Magnati y J. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1993.
- Bazaraa, M., J. Jarvis y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flow*, 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.
- Chames, A. y W. Cooper, "Some Network Characterization for Mathematical Programming and Accounting Applications to Planning and Control," *The Accounting Review*, vol. 42, núm. 3, pp. 24-52, 1967.
- Evans, J. y E. Minieka, *Optimization Algorithms for Networks and Graphs*, 2a. ed., Marcel Dekker, Nueva York, 1992.
- Guéret, C., C. Prins y M. Sevaux, *Applications of Optimization with Xpress-MP*, traducido y revisado por Susanne Heipke, Dash Optimization Ltd., Londres, 2002.
- Glover, F., D. Klingman y N. Phillips, *Network Models and Their Applications in Practice*, Wiley, Nueva York, 1992.
- Robinson, E., L. Gao y S. Muggenborg, "Designing an Integrated Distribution System at DowBrands, Inc.," *Interfaces*, vol. 23, núm. 3, pp. 107-117, 1993.

Estudio de Caso: Ahorro de recursos federales para viajes⁴

Herramientas: Algoritmo de la ruta más corta

Área de aplicación: Viajes de negocios

Descripción de la situación:

Los empleados del gobierno federal de Estados Unidos están obligados a asistir a conferencias de desarrollo y cursos de capacitación. En la actualidad, la selección de la ciudad que recibe las conferencias y los eventos de capacitación se hace sin tomar en cuenta los costos de viaje en los que se incurre. Debido a que los empleados federales se ubican en oficinas diseminadas por todo el país, la localización de la ciudad anfitriona suele afectar los costos de viaje, dependiendo del número de participantes y de los lugares de donde provienen.

La Administración de Servicios Generales (GSA, por las siglas de *General Services Administration*) emite un programa anual de tarifas aéreas que el gobierno contrata con diferentes compañías aéreas estadounidenses. Este esquema ofrece tarifas para aproximadamente 5000 combinaciones de pares de ciudades en los 48 estados contiguos. También emite tarifas diarias para todas las ciudades importantes y una tarifa fija diaria para las ciudades que no están incluidas en la lista. Los participantes que usen vehículos personales para viajar reciben una tarifa fija por milla. Todas las tarifas se actualizan anualmente para reflejar el incremento inflacionario. El costo del viaje desde un sitio hasta la ciudad anfitriona está en función directa del número de participantes, el costo de viajar a la ciudad anfitriona y el gasto diario permitido para esta ciudad anfitriona.

El problema trata de la ubicación óptima de la ciudad anfitriona para un evento, dado un número específico de solicitantes de las ubicaciones participantes en todo el país.

Análisis

La idea de la solución es sencilla: La ciudad anfitriona debe resultar en el costo de viaje más bajo que incluye el transporte y los gastos diarios para la ciudad anfitriona. La determinación del costo del transporte requiere identificar las ubicaciones desde las cuales salen los participantes. Es razonable suponer que para las ubicaciones en un radio de 100 millas desde la ciudad anfitriona, los participantes usarán vehículos personales como el medio de transporte seleccionado. Los demás viajarán por vía aérea. La base de costos para los viajeros aéreos consiste en la suma de tarifas aéreas contratadas a lo largo de las ramas de la ruta *más barata* hacia la ciudad anfitriona. Para determinar esas rutas, es necesario identificar las ubicaciones en todo el país desde donde salen los participantes. Cada uno de estos lugares es un posible candidato de la ciudad anfitriona, siempre y cuando ofrezca un aeropuerto e instalaciones adecuados para realizar las conferencias. En este caso, se identifican 261 ubicaciones con 4640 enlaces de aeropuerto contratados.

La determinación de las rutas aéreas *más baratas* entre las 261 ubicaciones seleccionadas con 4640 enlaces aéreos no es una tarea sencilla, ya que un viaje puede involucrar múltiples ramas. El algoritmo de Floyd (sección 6.3.2) es ideal para determinar esas rutas. La “distancia” entre dos lugares está representada por la tarifa aérea contratada que proporciona el gobierno. Por contrato, el costo de un viaje redondo duplica el costo de un viaje sencillo.

Para simplificar el análisis, el estudio no permite el uso de automóviles de alquiler en los destinos. El supuesto plausible aquí es que el hotel anfitrión está en las inmediaciones del aeropuerto, normalmente con servicio de transporte gratuito desde y hacia ahí.

Los gastos diarios incluyen alojamiento, alimentos y gastos imprevistos. Los participantes llegan un día antes del comienzo del evento. Sin embargo, quienes vienen desde lugares en un radio de 100 millas llegan la mañana del primer día del evento. Todos los participantes saldrán del hotel el último día. Para los días de llegada y salida, las regulaciones gubernamentales para comidas y gastos imprevistos sólo permiten un reembolso de 75% de la tarifa diaria completa.

⁴ J. L. Huisingsh, H. M. Yamauchi y R. Zimmerman, “Saving Federal Travel Dollars,” *Interfaces*, vol. 31, núm. 5, pp. 13-23, 2001.

Ejemplo numérico

A modo de ilustración se supondrá una situación con 12 ciudades anfitrionas. En la tabla 6.1 se proporcionan las tarifas aéreas de viajes sencillos contratadas (finales de la década de 1990) para los enlaces permisibles entre las ciudades. Una entrada en blanco indica que el par de ciudades asociado no tiene un enlace aéreo directo.

En la tabla 6.2 se indican las asignaciones máximas de alojamiento y gastos diarios para las 12 ciudades, junto con el número de participantes asociados para un evento próximo. La duración del evento es de 4 días. La asignación de millaje estándar para vehículos personales es de \$.325 por milla (para el año 2000).

TABLA 6.1 Tarifa aérea de un viaje sencillo para el ejemplo de las 12 ciudades

	SF	ORD	STL	LAX	TUL	DEN	DC	ATL	DAL	NY	MIA	SPI
SF				\$70		\$120			\$220			
ORD			\$99			\$140	\$150					
STL		\$99			\$95	\$110						\$78 ^(a)
LAX	\$70					\$130						
TUL			\$95			\$105			\$100			
DEN	\$120	\$140	\$110	\$130	\$105							
DC		\$150						\$100	\$195	\$85		
ATL							\$100				\$125	
DAL	\$220				\$100		\$195					
NY							\$85				\$130	
MIA								\$125		\$130		
SPI			\$78 ^(a)									

^(a) Costo del viaje aéreo = \$78. Distancia < 100 millas (= 86 millas). Automóvil personal usado para viajar entre STL y SPI.

TABLA 6.2 Costo de alojamiento, gastos diarios y número de participantes en el ejemplo de las 12 ciudades

Ciudad	Alojamiento por noche (\$)	Gasto diario (\$)	Número de participantes
SF	115.00	50.00	15
ORD	115.00	50.00	10
STL	85.00	48.00	8
LAX	120.00	55.00	18
TUL	70.00	35.00	5
DEN	90.00	40.00	9
DC	150.00	60.00	10
ATL	90.00	50.00	12
DAL	90.00	50.00	11
NY	190.00	60.00	12
MIA	120.00	50.00	8
SPI	60.00	35.00	2

TABLA 6.3 Tarifa aérea más barata en el ejemplo de las 12 ciudades

	ORD	STL	LAX	TUL	DEN	DC	ATL	DAL	NY	MIA	SPI
SF	\$260	\$230	\$70	\$225	\$120	\$410	\$510	\$220	\$495	\$625	\$308
ORD		\$99	\$270	\$194	\$140	\$150	\$250	\$294	\$235	\$365	\$177
STL			\$240	\$95	\$110	\$249	\$349	\$195	\$334	\$464	\$28*
LAX				\$235	\$130	\$420	\$520	\$290	\$505	\$635	\$318
TUL					\$105	\$295	\$395	\$100	\$380	\$510	\$173
DEN						\$290	\$390	\$205	\$375	\$505	\$188
DC							\$100	\$195	\$85	\$215	\$327
ATL								\$295	\$185	\$125	\$427
DAL									\$280	\$410	\$273
NY										\$130	\$412
MIA											\$542

*Costo personal del vehículo con base en un recorrido de 86 millas (32.5 centavos por milla)

El primer paso para la solución consiste en determinar la tarifa aérea más barata entre todos los pares de ciudades. TORA realiza este paso (archivo de entrada *toraCase4.txt*) mediante el algoritmo de la ruta más corta de Floyd (sección 6.3.2). Los resultados se resumen en la tabla 6.3. Las entradas en blanco son simétricamente iguales a las de la diagonal principal. Recuerde que estos valores representan el costo de los boletos sencillos y que el costo de los boletos redondos es el doble de esa cantidad. El algoritmo de Floyd especifica automáticamente las ramas del viaje asociadas con cada par de ciudades.

El paso final en la solución es determinar el costo total del evento para todos los participantes, ya que el evento se realiza en una de las ciudades mencionadas. La ciudad que ofrece el menor costo total se selecciona como la ciudad anfitriona.

Para mostrar cómo se realizan los cálculos, suponga que STL es la ciudad anfitriona candidata. El costo total asociado se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \text{Costo de viaje} &= 2 \times (15 \times 230 + 10 \times 99 + 18 \times 240 + 5 \times 95 + 9 \times 110 + 10 \times 249 \\
 &\quad + 12 \times 349 + 11 \times 195 + 12 \times 334 + 8 \times 464) + 2 \times (2 \times 86) \times .325 \\
 &= \$53,647.80
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Costo de alojamiento} &= \$85 \times [(15 + 10 + 18 + 5 + 9 + 10 + 12 + 11 + 12 + 8) \times 4 + 2 \times 3] \\
 &= \$37,910
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Gastos diarios} &= \$48 \times [(15 + 10 + 18 + 5 + 9 + 10 + 12 + 11 + 12 + 8) \\
 &\quad \times 4.5 + (2 + 8) \times 3.5] \\
 &= \$25,440
 \end{aligned}$$

Observe que debido a que SPI se encuentra a 86 millas (<100 millas) de STL, sus participantes conducen vehículos personales y llegan a STL la mañana del primer día del evento. Por consiguiente, su gasto diario se basa en $3\frac{1}{2}$ días y su alojamiento implica únicamente 3 noches. Los participantes de STL reciben gastos diarios durante $3\frac{1}{2}$ días pero no gastan en alojamiento. Todos los demás participantes llegan a STL un día antes, y su gasto diario se basa en $4\frac{1}{2}$ días y 4 noches de alojamiento.

Los cálculos para todas las ciudades anfitrionas se pueden hacer convenientemente con una hoja de cálculo (archivo *excelCase4.xls*, todas las fórmulas se agregan como comentarios de celda). Los resultados muestran que TUL ofrece el menor costo total (\$108,365), seguida de DEN (\$111,332) y luego STL (\$115,750).

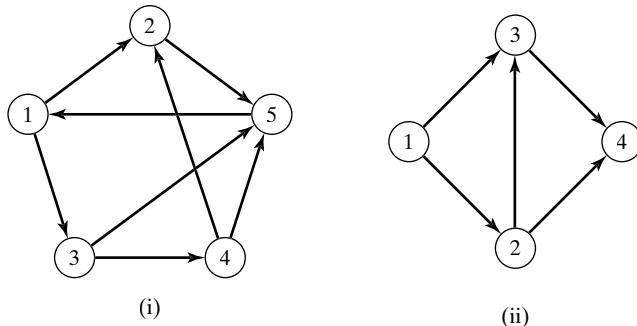
PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados	Sección	Problemas asignados
6.1	6-1 a 6-6	6.4.3	6-39 a 6-41
6.2	6-7 a 6-12	6.5.1	6-42 a 6-51
6.3.1	6-13 a 6-17	6.5.2	6-52 a 6-57
6.3.2	6-18 a 6-24	6.5.3	6-58 a 6-64
6.3.3	6-25 a 6-27	6.5.4	6-65 a 6-66
6.4.1	6-28 a 6-28	6.5.5	6-67 a 6-67
6.4.2	6-29 a 6-38		

- *6-1.** Para cada red de la figura 6.32, determine (a) una ruta, (b) un ciclo, (c) un árbol y (d) un árbol de expansión.
- 6-2.** Determine los conjuntos N y A para las redes de la figura 6.32.
- 6-3.** Trace la red definida por
- $$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
- $$A = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 6), (5, 2), (5, 6)\}$$
- 6-4.** En el ejemplo 6.1-1,
- (a) Especifique la cantidad mínima y las ubicaciones de los puentes adicionales que se requieren para construir (i) un viaje redondo iniciando en A , y (ii) un viaje que inicie en A y termine en C . Construya la red resultante y determine las ramas del viaje.
- (b) Durante la Segunda Guerra Mundial, dos de los puentes fueron destruidos. Con los cinco puentes restantes, se hizo posible hacer un viaje de A a C (cruzando cada puente sólo una vez). ¿Cuáles de los dos puentes fueron destruidos (¡no es válido consultar internet!)?
- *6-5.** Considere ocho cuadrados iguales dispuestos en tres filas, con dos cuadrados en la primera fila, cuatro en la segunda y dos en la tercera. Los cuadrados de cada fila están acomodados simétricamente alrededor del eje vertical. Etiquete los cuadros con números distintos de 1 a 8, de modo que dos cuadrados *adyacentes* verticales, horizontales o diagonales no tengan números consecutivos. Use una representación en red para encontrar la solución de una forma sistemática.
- 6-6.** Tres reclusos escoltados por tres guardias deben transportarse en una lancha desde tierra firme hasta una isla penitenciaria para que cumplan sus sentencias. La lancha no puede transportar a más de dos personas

FIGURA 6.32

Redes para los problemas 6-1 y 6-2

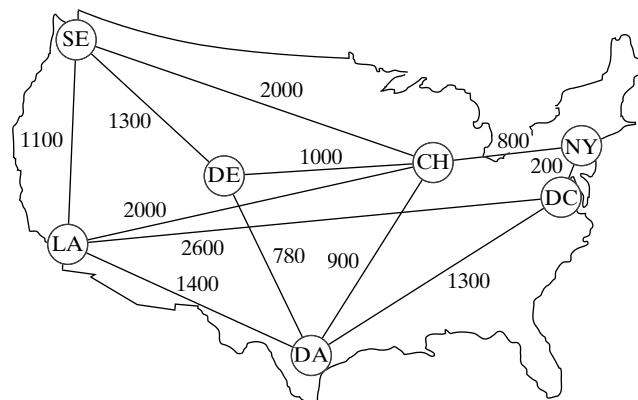


en ambas direcciones. Es seguro que los reclusos dobleguen a los guardias si los superan en número en cualquier parte y en cualquier momento. Desarrolle un modelo de red que diseñe los viajes de la lancha, de modo que se garantice el traslado seguro de los reclusos.

- 6-7.** Resuelva el ejemplo 6.2-1 iniciando en el nodo 5 (en vez de en el nodo 1), y demuestre que el algoritmo produce la misma solución.
- 6-8.** Determine el árbol de expansión mínima de la red del ejemplo 6.2-1 bajo cada una de las siguientes condiciones distintas:
- *(a) Los nodos 5 y 6 están unidos por un cable de 2 millas.
 - (b) Los nodos 2 y 5 no pueden unirse.
 - (c) Los nodos 2 y 6 están unidos por un cable de 4 millas.
 - (d) El cable entre los nodos 1 y 2 tiene 8 millas de largo.
 - (e) Los nodos 3 y 5 están unidos por un cable de 2 millas.
 - (f) El nodo 2 no puede unirse directamente a los nodos 3 y 5.
- 6-9.** En el transporte intermodal, los camiones de remolque cargados se transportan entre terminales ferroviarias sobre plataformas especiales. En la figura 6.33 se muestra la ubicación de las principales terminales ferroviarias en Estados Unidos y las vías de ferrocarril existentes. El objetivo es decidir qué vías deberían “rehabilitarse” para manejar el tránsito intermodal. En particular, la terminal de Los Ángeles (LA) debe vincularse directamente a Chicago (CH) para dar cabida al tránsito pesado que se espera. En el caso de todas las terminales restantes, éstas pueden vincularse directa o indirectamente, de modo que se minimice la longitud total (en millas) de las vías seleccionadas. Determine los segmentos de las vías ferroviarias que deben incluirse en el programa de rehabilitación.
- 6-10.** En la figura 6.34 se proporciona la distancia en millas de los vínculos factibles, que conectan nueve cabezales de pozos de gas natural localizados a cierta distancia de la costa con un punto de distribución costero. Como el cabezal del pozo 1 es el más cercano a la costa, dispone de suficientes capacidades de bombeo y almacenamiento para bombear la producción de los ocho pozos restantes al punto de distribución. Determine la red de oleoductos mínima que vincule los cabezales de los pozos con el punto de distribución.
- *6-11.** En la figura 6.34 del problema 6-10, suponga que los cabezales de los pozos pueden dividirse en dos grupos de acuerdo con la presión del gas: el grupo de alta presión incluye los pozos 2, 3, 4 y 6; y el grupo de baja presión, los pozos 5, 7, 8 y 9. Debido a la diferencia de presión, no es posible vincular los cabeza-

FIGURA 6.33

Red para el problema 6-9



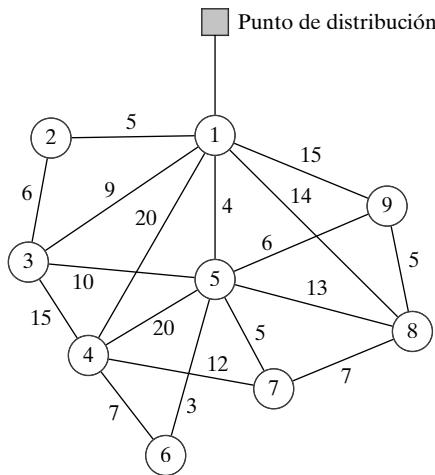


FIGURA 6.34
Red para los problemas 6-10 y 6-11

les de los pozos de los dos grupos. Al mismo tiempo, ambos grupos deben conectarse al punto de distribución a través del pozo 1. Determine la red de oleoductos mínima para esta situación.

- 6-12.** Electro produce 15 piezas electrónicas en 10 máquinas. La compañía desea agrupar las máquinas en células para minimizar las “disparidades” entre las piezas procesadas en cada célula. Una medida de “disparidad”, d_{ij} , entre las piezas procesadas con las máquinas i y j puede expresarse como

$$d_{ij} = 1 - \frac{n_{ij}}{n_{ij} + m_{ij}}$$

donde n_{ij} es la cantidad de piezas compartidas entre las máquinas i y j , y m_{ij} es la cantidad de piezas procesadas únicamente por la máquina i o sólo por la máquina j .

La siguiente tabla asigna las piezas a las máquinas:

Máquina	Piezas asignadas
1	1, 6
2	2, 3, 7, 8, 9, 12, 13, 15
3	3, 5, 10, 14
4	2, 7, 8, 11, 12, 13
5	3, 5, 10, 11, 14
6	1, 4, 5, 9, 10
7	2, 5, 7, 8, 9, 10
8	3, 4, 15
9	4, 10
10	3, 8, 10, 14, 15

- (a) Exprese el problema como un modelo de red.
- (b) Demuestre que la determinación de las células puede basarse en la solución del árbol de expansión mínima.
- (c) Para los datos dados en la tabla anterior, construya las soluciones de dos y tres células.

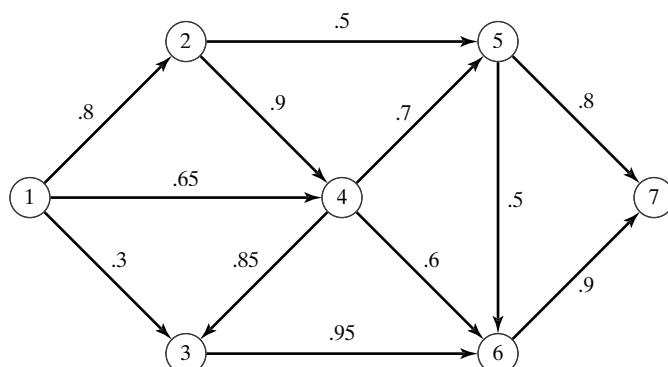
- *6-13.** Reconstruya el modelo de reemplazo del equipo del ejemplo 6.3-1, suponiendo que un automóvil debe mantenerse en servicio al menos durante 2 años, con una vida de servicio máxima de 4 años. El horizonte de planeación abarca desde el principio del año 1 hasta el final del año 5. En la siguiente tabla se presentan los datos necesarios.

Año de adquisición	Costo de reemplazo (\$) para los años dados en operación		
	2	3	4
1	3800	4100	6800
2	4000	4800	7000
3	4200	5300	7200
4	4800	5700	—
5	5300	—	—

- 6-14.** En la figura 6.35 se proporciona la red de comunicación entre dos estaciones, 1 y 7. La probabilidad de que un vínculo en la red opere sin fallas se muestra en cada arco. Se envían mensajes de la estación 1 a la estación 7, y el objetivo es determinar la ruta que maximice la probabilidad de una transmisión exitosa. Formule la situación como un modelo de la ruta más corta y determine la solución óptima.
- 6-15.** *Planeación de la producción.* DirectCo vende un artículo cuyas demandas a lo largo de los próximos 4 meses son 100, 140, 210 y 180 unidades, respectivamente. La compañía puede mantener existencias suficientes para satisfacer la demanda de cada mes, o bien, puede tener existencias excedentes para satisfacer la demanda de dos o más meses consecutivos. En el último caso, se carga un costo de almacenamiento de \$1.20 por cada unidad excedente por mes. DirectCo estima que los precios de compra unitarios durante los siguientes 4 meses deben ser de \$15, \$12, \$10 y \$14, respectivamente. Se incurre en un costo de preparación de \$200 cada vez que se coloca un pedido de compra. La compañía desea desarrollar un plan de compra que minimice los costos totales de colocar un pedido, comprar y almacenar el artículo. Formule el problema como un modelo de la ruta más corta, y use TORA para determinar la solución óptima.
- *6-16.** *Problema de Knapsack.* Un escalador utiliza una mochila de 5 ft³ y necesita decidir sobre los artículos más valiosos que debe llevar en un viaje. Hay tres artículos a elegir. Sus volúmenes son de 2, 3 y 4 ft³; el escalador estima que sus valores asociados en una escala de 0 a 100 son 30, 50 y 70, respectivamente. Exprese el problema como una red de la ruta más larga, y determine la solución óptima (*sugerencia:* Un

FIGURA 6.35

Red para el problema 6-14



nodo en la red puede definirse como $[i, v]$, donde i es el número del artículo considerado para empacarse y v es el volumen restante inmediatamente antes de decidir sobre i . Para resolverlo con TORA, convierta el problema de la ruta más larga en uno de la ruta más corta usando longitudes de arco negativas).

- 6-17.** Un tostador eléctrico antiguo tiene dos puertas de bisagra accionadas por resorte. Ambas puertas se abren hacia afuera en direcciones opuestas alejándose del elemento de calentamiento. Una rebanada de pan se tuesta por un lado a la vez, al empujar una de las puertas para que se abra y colocar la rebanada con la otra mano. Después de que se tuesta un lado, se gira la rebanada para tostar el otro lado. El objetivo es determinar la secuencia de operaciones (colocar, tostar, dar vuelta y sacar) necesarias para tostar tres rebanadas de pan en el menor tiempo posible. Formule el problema como un modelo de la ruta más corta, aplicando los siguientes tiempos elementales de las diferentes operaciones:

Operación	Tiempo (segundos)
Colocar una rebanada en cualquier lado	3
Tostar un lado	30
Girar la rebanada en el tostador	1
Sacar la rebanada de cualquier lado	3

- 6-18.** La red de la figura 6.36 da las distancias en millas entre pares de las ciudades 1, 2, ..., 8. Use el algoritmo de Dijkstra para determinar la ruta más corta entre las siguientes ciudades:

- (a) Ciudades 1 y 8
 - (b) Ciudades 1 y 6
 - *(c) Ciudades 4 y 8
 - (d) Ciudades 2 y 6
- 6-19.** Utilice el algoritmo de Dijkstra para encontrar la ruta más corta entre el nodo 1 y cualquier otro nodo en la red de la figura 6.37.

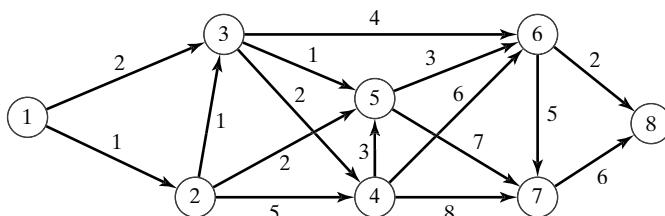


FIGURA 6.36
Red para el problema 6-18

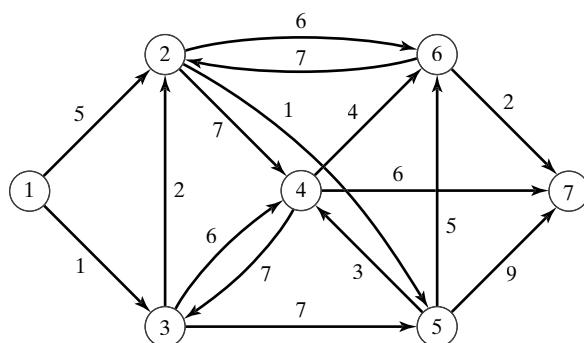


FIGURA 6.37
Red para el problema 6-19

6-20. Utilice el algoritmo de Dijkstra para determinar la solución óptima de cada uno de los siguientes problemas:

- (a) Problema 6-13.
- (b) Problema 6-14.
- (c) Problema 6-15.

6-21. En el ejemplo 6.3-5, use el algoritmo de Floyd para determinar las rutas más cortas entre cada uno de los siguientes pares de nodos:

- *(a) Del nodo 5 al nodo 1.
- (b) Del nodo 3 al nodo 5.
- (c) Del nodo 5 al nodo 3.
- (d) Del nodo 5 al nodo 2.

6-22. Aplique el algoritmo de Floyd a la red de la figura 6.38. Los arcos $(7, 6)$ y $(6, 4)$ son unidireccionales, y todas las distancias se dan en millas. Determine la ruta más corta entre los siguientes pares de nodos:

- (a) Del nodo 1 al nodo 7.
- (b) Del nodo 7 al nodo 1.
- (c) Del nodo 6 al nodo 7.

6-23. La compañía de telefonía celular Tell-All da servicio a seis áreas geográficas. Las distancias de satélite (en millas) entre las seis áreas se dan en la figura 6.39. Tell-All necesita determinar las rutas más eficientes para enviar mensajes, que deban establecerse entre cada dos áreas de la red.

***6-24.** Seis niños, Joe, Kay, Jim, Bob, Rae y Kim juegan una variación del juego infantil de las *escondidas*. Sólo algunos de los niños conocen el escondite de un niño. Luego un niño hace pareja con otro con el objetivo de encontrar el escondite del compañero. Esto puede lograrse mediante una cadena de otros niños que finalmente permitirá descubrir el escondite del niño designado. Por ejemplo, suponga que

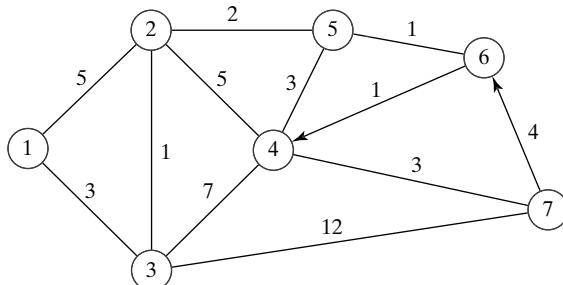


FIGURA 6.38
Red para el problema 6-22

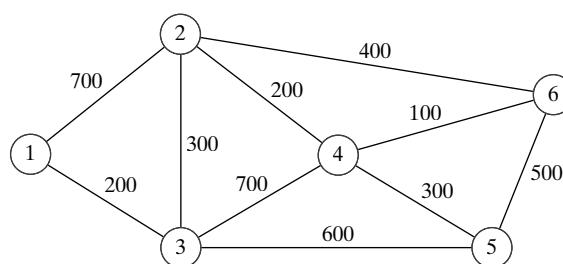


FIGURA 6.39
Red para el problema 6-23

Joe necesita encontrar a Kim y que Joe sabe dónde está escondido Jim, quien a su vez sabe dónde está escondido Kim. Por lo tanto, Joe puede encontrar a Kim si halla primero a Jim, quien a su vez conducirá a Joe al escondite de Kim. La siguiente lista proporciona los escondites conocidos por cada uno de los niños:

- Joe conoce los escondites de Bob y Kim.
- Kay conoce los escondites de Bob, Jim y Rae.
- Tanto Jim como Bob conocen el escondite de Kay.
- Rae conoce el escondite de Kim.
- Kim conoce los escondites de Joe y Bob.

Diseñe un plan para que cada niño encuentre a todos los demás niños utilizando el número mínimo de contactos. ¿Cuál es el número máximo de contactos hecho por cualquier niño?

- 6-25.** En el ejemplo 6.3-6, use PL para determinar la ruta más corta entre los siguientes pares de nodos:
- ***(a)** Del nodo 1 al nodo 5.
 - (b)** Del nodo 2 al nodo 5.
- 6-26.** Modifique el archivo *solverEx6.3-6.xls* para encontrar la ruta más corta entre los siguientes pares de nodos:
- (a)** Del nodo 1 al nodo 5.
 - (b)** Del nodo 4 al nodo 3.
- 6-27.** Adapte el archivo *AMPLEx6.3-6b.txt* para el problema 6-14, con la finalidad de encontrar la ruta más corta entre el nodo 1 y el nodo 7. Los datos de entrada deben ser las probabilidades puras. Use las funciones de programación de AMPL para imprimir y visualizar la ruta de transmisión óptima y su probabilidad de éxito.
- *6-28.** Para la red de la figura 6.20, determine dos cortes adicionales y encuentre sus capacidades.
- *6-29.** En el ejemplo 6.4-2,
- (a)** Determine las capacidades excedentes para todos los arcos.
 - (b)** Determine la cantidad de flujo a través de los nodos 2, 3 y 4.
 - (c)** ¿Puede incrementarse el flujo a través de la red si se aumentan las capacidades en las direcciones $3 \rightarrow 5$ y $4 \rightarrow 5$?
- 6-30.** Determine el flujo máximo y el flujo óptimo en cada arco para la red de la figura 6.40.

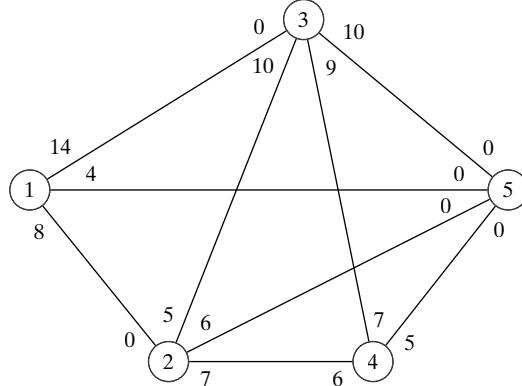


FIGURA 6.40
Red para el problema 6-30

6-31. Tres refinerías envían un producto de gasolina a dos terminales de distribución a través de una red de oleoductos. Cualquier demanda que no puede satisfacerse por medio de la red se adquiere de otras fuentes. Tres estaciones de bombeo le dan servicio a la red de oleoductos, como se muestra en la figura 6.41. El producto fluye en la red en la dirección indicada por las flechas. La capacidad de cada segmento de ducto (mostrada directamente sobre los arcos) está en millones de barriles por día. Determine lo siguiente:

- (a) La producción diaria en cada refinería que se ajusta a la capacidad máxima de la red.
 - (b) La demanda diaria en cada terminal que se ajusta a la capacidad máxima de la red.
 - (c) La capacidad diaria de cada bomba que se ajusta a la capacidad máxima de la red.
- 6-32.** Suponga que la capacidad diaria máxima de la bomba 6 en la red de la figura 6.41 se limita a 50 millones de barriles por día. Remodele la red para incluir esta restricción. Luego determine la capacidad máxima de la red.

- 6-33.** Se transporta alimento para gallinas con camiones desde tres silos hasta cuatro granjas. Algunos de los silos no pueden enviar directamente a algunas de las granjas. Las capacidades de las demás rutas están limitadas por la cantidad de camiones disponibles y el número de viajes realizados diariamente. La siguiente tabla muestra las cantidades diarias de abasto en los silos y la demanda en las granjas (en miles de libras). Las entradas en las celdas de la tabla especifican las capacidades diarias de las rutas asociadas.

		Granja				
		1	2	3	4	
Silo	1	30	5	0	40	20
	2	0	0	5	90	20
	3	100	40	30	40	200
		200	10	60	20	

- (a) Determine el programa que satisface la demanda máxima.
 - (b) ¿Satisfará el programa propuesto toda la demanda de las granjas?
- 6-34.** En el problema 6-33, suponga que se permite el transbordo entre los silos 1 y 2, y los silos 2 y 3. Suponga además que se permite el transbordo entre las granjas 1 y 2, 2 y 3, y 3 y 4. La capacidad diaria máxima en dos direcciones en las rutas de transbordo propuestas es de 50 (mil) lb. ¿Cuál es el efecto del transbordo en las demandas no satisfechas en las granjas?

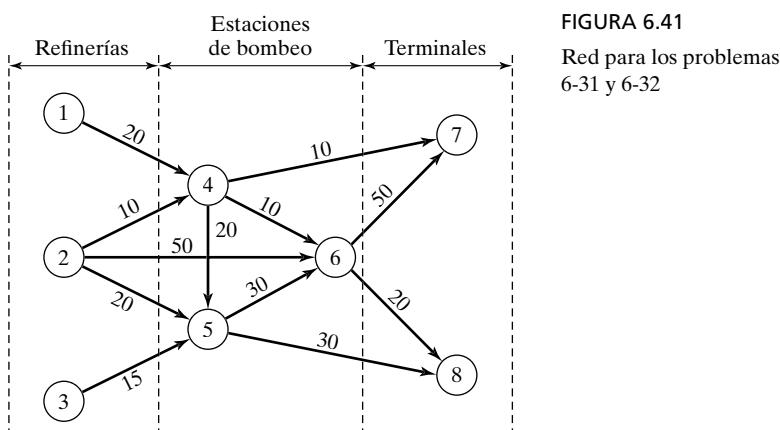


FIGURA 6.41

Red para los problemas
6-31 y 6-32

- *6-35.** Un padre tiene cinco hijos (adolescentes) y cinco actividades domésticas que encomendarles. La experiencia pasada ha demostrado que obligar a un hijo a que realice una actividad es contraproducente. Con esto en mente, el padre les pide a sus hijos que enumeren sus preferencias entre las cinco actividades, como lo muestra la tabla siguiente:

Hijo	Actividad preferida
Rif	3, 4 o 5
Mai	1
Ben	1 o 2
Kim	1, 2 o 5
Ken	2

La modesta meta del padre ahora es terminar la mayor cantidad posible de actividades, al tiempo que respeta las preferencias de sus hijos. Determine la máxima cantidad de actividades que se pueden realizar y la asignación de éstas a los hijos.

- 6-36.** Cuatro fábricas producen cuatro tipos de juguetes. La siguiente tabla da una lista de los juguetes que cada fábrica puede producir.

Fábrica	Mezcla de producciones de juguetes
1	1, 2, 3
2	2, 3
3	1, 4
4	3, 4

Todos los juguetes requieren aproximadamente la misma mano de obra y materiales por unidad. Las capacidades diarias de las cuatro fábricas son de 250, 180, 300 y 100 juguetes, respectivamente. Las demandas diarias de los cuatro juguetes son 200, 150, 350 y 100 unidades, respectivamente. Determine los programas de producción de las fábricas que más satisfarán las demandas de los cuatro juguetes.

- 6-37.** El consejo académico en la University of Arkansas está buscando representantes entre seis estudiantes que estén afiliados a sociedades honoríficas. La representación ante el consejo académico incluye tres áreas: matemáticas, arte e ingeniería. Cuando mucho dos estudiantes de cada área pueden estar en el consejo. La siguiente tabla muestra la membresía de los seis estudiantes en las cuatro sociedades honoríficas:

Sociedad	Estudiantes afiliados
1	1, 2, 3
2	1, 3, 5
3	3, 4, 5
4	1, 2, 4, 6

Los estudiantes habilidosos en las áreas de matemáticas, arte e ingeniería se muestran en la siguiente tabla:

Área	Estudiantes habilidosos
Matemáticas	1, 2, 4
Arte	3, 4
Ingeniería	4, 5, 6

Un estudiante habilidoso en más de un área debe asignarse exclusivamente a sólo un área. ¿Pueden estar representadas las cuatro sociedades honoríficas en el consejo?

- 6-38.** *Flujo máximo/mínimo en redes con límites inferiores.* El algoritmo del flujo máximo que se presentó en esta sección supone que todos los arcos tienen límites inferiores iguales a cero. En algunos modelos, los límites inferiores pueden ser estrictamente positivos, y podemos estar interesados en determinar el flujo máximo o mínimo en la red. La presencia del límite inferior plantea una dificultad porque es posible que la red no tenga un flujo factible en absoluto. El objetivo de este ejercicio es demostrar que cualquier modelo de flujo máximo o mínimo con límites inferiores positivos se resuelve siguiendo dos pasos.

Paso 1. Encontrar una solución factible para la red con límites inferiores positivos.

Paso 2. Utilizar la solución factible del paso 1 para encontrar el flujo máximo o mínimo en la red original.

- (a) Muestre que un arco (i, j) con flujo limitado por $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ puede representarse de manera equivalente mediante un sumidero con demanda mínima l_{ij} en el nodo i y una fuente con suministro l_{ij} en el nodo j con flujo limitado por $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} - l_{ij}$.
- (b) Muestre que la determinación de una solución factible para la red original equivale a encontrar el flujo máximo x'_{ij} en la red después de (1) modificar los límites en x_{ij} a $0 \leq x'_{ij} \leq u_{ij} - l_{ij}$ (2) “concentrar” todas las fuentes resultantes en una super fuente con capacidades de arco salientes l_{ij} ; (3) “concentrar” todos los sumideros resultantes en un super sumidero con capacidades de arco entrantes l_{ij} , y (4) conectar el nodo terminal t al nodo fuente s en la red original mediante un arco de retorno con capacidad infinita. Existe una solución factible si el flujo máximo en la nueva red es igual a la suma de los límites inferiores en la red original. Aplique el procedimiento a la siguiente red y encuentre una solución de flujo factible:

Arco (i, j)	(l_{ij}, u_{ij})
$(1, 2)$	$(5, 20)$
$(1, 3)$	$(0, 15)$
$(2, 3)$	$(4, 10)$
$(2, 4)$	$(3, 15)$
$(3, 4)$	$(0, 20)$

- (c) Use la solución factible para la red en (b) junto con el algoritmo del flujo máximo para determinar el flujo *mínimo* en la red original (*sugerencia:* Primero calcule la red residuo dada la solución factible inicial. En seguida determine el flujo máximo *del nodo final al nodo inicial*, lo cual equivale a determinar el flujo máximo que se debería cancelar del nodo inicial al nodo final. Ahora, al combinar las soluciones factible y de flujo máximo se obtiene el flujo mínimo en la red original).
 - (d) Use la solución factible para la red en (b) junto con el modelo de flujo *máximo* a fin de determinar el flujo máximo en la red original (*sugerencia:* Como en el inciso (c), inicie con la red residuo. Luego aplique el algoritmo de avance a la red residuo resultante, exactamente como en el modelo de flujo máximo regular).
- 6-39.** Modele cada uno de los siguientes problemas como un programa lineal, después resuélvalo con Solver o AMPL.
- (a) Problema 6-30.
 - (b) Problema 6-33.

6-40. Jim vive en Denver, Colorado, y le gusta pasar sus vacaciones anuales en el Parque Nacional de Yellowstone en Wyoming. Al ser un amante de la naturaleza, Jim toma una ruta escénica diferente cada año. Después de consultar los mapas adecuados, Jim representó sus rutas preferidas entre Denver (D) y Yellowstone (Y) por medio de la red de la figura 6.42. Los nodos 1 a 14 representan ciudades intermedias. Aunque la distancia de manejo no es un factor, la estipulación de Jim es que las rutas seleccionadas entre D y Y no incluyan ninguna ciudad común. Determine (usando AMPL o Solver) todas las rutas distintas disponibles para Jim (*sugerencia:* Modifique el modelo de programación lineal de flujo máximo para determinar el máximo de rutas únicas entre D y Y).

6-41. Guéret and Associate (2002), sección 12.1. En la figura 6.43 se presenta un sistema de telecomunicación militar que conecta 9 sitios. Los sitios 4 y 7 deben continuar comunicándose incluso si otros tres sitios son destruidos por acciones enemigas. ¿Satisface este requisito la red de comunicaciones actual? Utilice AMPL y Solver para resolver el problema.

FIGURA 6.42
Red para el problema 6-40

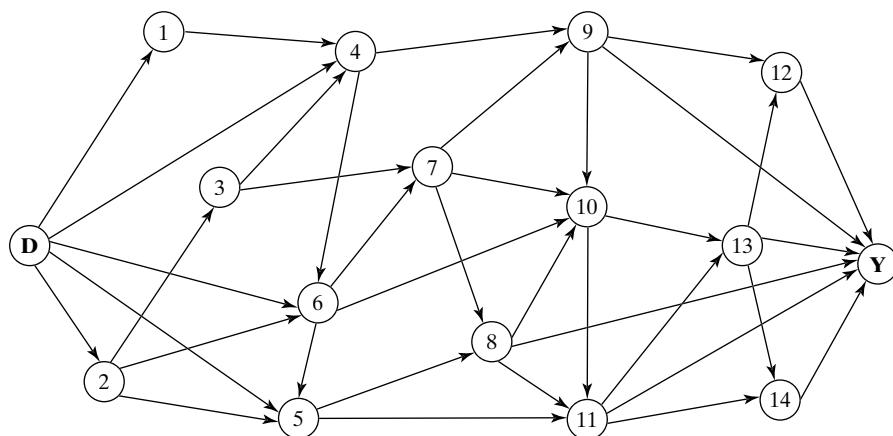
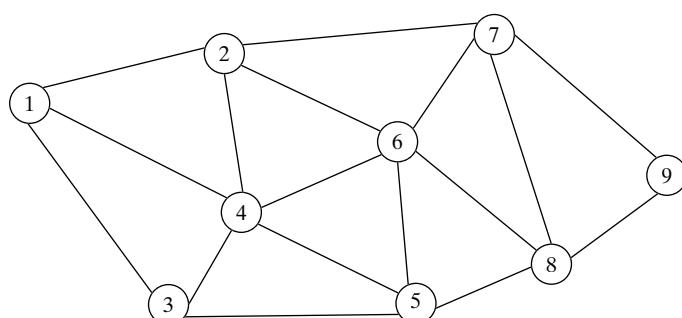


FIGURA 6.43
Red para el problema 6-41



6-42. Construya la red del proyecto compuesta de las actividades *A* a *L*, con las siguientes relaciones de precedencia:

- (a) *A, B* y *C*, las primeras actividades del proyecto, pueden ejecutarse de forma concurrente.
- (b) *A* y *B* preceden *D*.
- (c) *B* precede a *E, F* y *H*.
- (d) *F* y *C* preceden a *G*.
- (e) *E* y *H* preceden a *I* y *J*.
- (f) *C, D, F* y *J* preceden a *K*.
- (g) *K* precede a *L*.
- (h) *I, G* y *L* son las actividades terminales del proyecto.

6-43. Construya la red del proyecto compuesta de las actividades *A* a *P* que satisfaga las siguientes relaciones de precedencia:

- (a) *A, B* y *C*, las primeras actividades del proyecto, pueden ejecutarse de manera concurrente.
- (b) *D, E* y *F* siguen después de *A*.
- (c) *I* y *G* siguen después de *B* y *D*.
- (d) *H* sigue después de *C* y *G*.
- (e) *K* y *L* siguen después de *I*.
- (f) *J* sucede a *E* y *H*.
- (g) *M* y *N* suceden a *F*, pero no pueden iniciarse sino hasta que *E* y *H* se hayan completado.
- (h) *O* sucede a *M* e *I*.
- (i) *P* sucede a *J, L* y *O*.
- (j) *K, N* y *P* son las actividades terminales del proyecto.

***6-44.** Los cimientos de un edificio pueden completarse en cuatro secciones consecutivas. Las actividades para cada sección incluyen (1) excavar, (2) colocar el acero y (3) vaciar el concreto. La excavación de una sección no puede iniciarse sino hasta que se haya completado la de la sección precedente. La misma restricción se aplica al vaciado del concreto. Desarrolle la red del proyecto.

6-45. En el problema 6-44, suponga que 10% del trabajo de plomería puede iniciarse al mismo tiempo que la excavación de la primera sección, pero antes de vaciar el concreto. Después de completar cada una de las secciones de los cimientos, puede iniciarse un 5% adicional de la plomería, siempre que se termine el 5% precedente. La plomería restante puede completarse al final del proyecto. Construya la red del proyecto.

6-46. Una encuesta de opinión implica diseñar e imprimir cuestionarios, contratar y capacitar personal, seleccionar a los participantes, enviar los cuestionarios por correo y analizar los datos. Construya la red del proyecto; enumere todos los supuestos utilizados.

6-47. Las actividades en la siguiente tabla describen la construcción de una casa nueva. Construya la red del proyecto asociada.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
<i>A:</i>	Limpiar el terreno	—	1
<i>B:</i>	Llevar los servicios al terreno	—	2
<i>C:</i>	Excavar	<i>A</i>	1
<i>D:</i>	Vaciar los cimientos	<i>C</i>	2
<i>E:</i>	Plomería externa	<i>B, C</i>	6
<i>F:</i>	Estructura de la casa	<i>D</i>	10

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
G:	Instalar el cableado eléctrico	F	3
H:	Colocar el piso	G	1
I:	Colocar el techo	F	1
J:	Plomería interior	E, H	5
K:	Colocar tejas	I	2
L:	Recubrimiento aislante exterior	F, J	1
M:	Instalar ventanas y puertas externas	F	2
N:	Enladrillar	L, M	4
O:	Aislamiento de muros y cielo raso	G, J	2
P:	Cubrir muros y cielo raso	O	2
Q:	Aislamiento del techo	I, P	1
R:	Terminar interiores	P	7
S:	Terminar exteriores	I, N	7
T:	Jardinería	S	3

- 6-48.** Una compañía está preparando un presupuesto para lanzar un nuevo producto. La siguiente tabla presenta las actividades asociadas y su duración. Construya la red del proyecto.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
A:	Pronosticar volumen de ventas	—	10
B:	Estudiar el mercado de la competencia	—	7
C:	Diseñar artículo e instalaciones	A	5
D:	Preparar el programa de producción	C	3
E:	Estimar el costo de la producción	D	2
F:	Fijar el precio de venta	B, E	1
G:	Elaborar el presupuesto	E, F	14

- 6-49.** En la siguiente tabla se presentan las actividades que involucra un servicio de coro a la luz de las velas. Construya la red del proyecto.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
A:	Seleccionar la música	—	2
B:	Aprenderse la música	A	14
C:	Obtener imágenes y comprar libros	A	14
D:	Audiciones	B, C	3
E:	Ensayos	D	70
F:	Rental candelabros	D	14
G:	Decorar candelabros	F	1
H:	Instalar decoraciones	D	1
I:	Pedir atuendos del coro	D	7
J:	Verificar sistema de sonido	D	7
K:	Seleccionar pistas de música	J	14
L:	Instalar sistema de sonido	K	1
M:	Ensayo final	E, G, L	1
N:	Reunión del coro	H, L, M	1
O:	Programa final	I, N	1

- 6-50.** La ampliación de una sección de una carretera requiere reubicar (“reconducir”) 1700 ft de una línea de transmisión primaria elevada de 13.8 kV. La siguiente tabla resume las actividades del proyecto. Construya la red del proyecto asociada.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
A:	Revisar el trabajo	—	1
B:	Advertir a los clientes del corte temporal del servicio	A	$\frac{1}{2}$
C:	Tiendas de requisición	A	1
D:	Explorar el trabajo	A	$\frac{1}{2}$
E:	Asegurar los postes y materiales	C, D	3
F:	Distribuir los postes	E	$3\frac{1}{2}$
G:	Coordinar la ubicación de postes	D	$\frac{1}{2}$
H:	Clavar estacas	G	$\frac{1}{2}$
I:	Excavar agujeros	H	3
J:	Colocar estructuras y postes	F, I	4
K:	Cubrir los conductores viejos	F, I	1
L:	Jalar los conductores nuevos	J, K	2
M:	Instalar el material restante	L	2
N:	Deflexión de conductor	L	2
O:	Podar árboles	D	2
P:	Desconectar la energía y conmutar líneas	B, M, N, O	$\frac{1}{10}$
Q:	Energizar y conmutar la nueva línea	P	$\frac{1}{2}$
R:	Limpiar	Q	1
S:	Retirar el conductor viejo	Q	1
T:	Retirar los postes viejos	S	2
U:	Regresar el material a las tiendas	R, T	2

- 6-51.** La siguiente tabla presenta las actividades para comprar un automóvil nuevo. Construya la red del proyecto.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
A:	Realizar estudio de factibilidad	—	3
B:	Encontrar un comprador potencial para el automóvil actual	A	14
C:	Listar los posibles modelos	A	1
D:	Investigar todos los posibles modelos	C	3
E:	Entrevistarse con el mecánico	C	1
F:	Reunir publicidad del concesionario	C	2
G:	Compilar los datos pertinentes	D, E, F	1
H:	Elegir los tres mejores modelos	G	1
I:	Realizar prueba de manejo de las tres opciones	H	3
J:	Conseguir datos de garantía y financiamiento	H	2
K:	Seleccionar un automóvil	I, J	2
L:	Elegir un concesionario	K	2
M:	Buscar el color y las opciones deseados	L	4
N:	Realizar prueba de manejo del modelo una vez más	L	1
O:	Comprar el automóvil nuevo	B, M, N	3

- ***6-52.** Determine la ruta crítica para la red de proyecto de la figura 6.44.

- 6-53.** Determine la ruta crítica para las redes de proyecto de la figura 6.45.

- 6-54.** Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 6-47.

- 6-55.** Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 6-49.

- 6-56.** Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 6-50.

- 6-57.** Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 6-51.

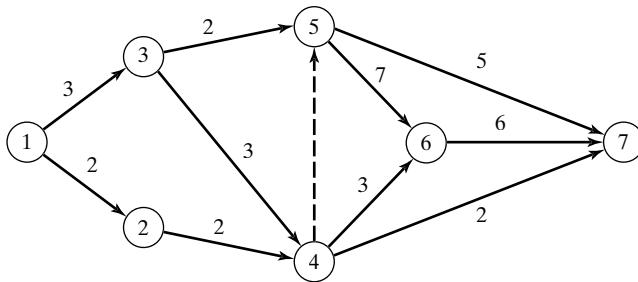
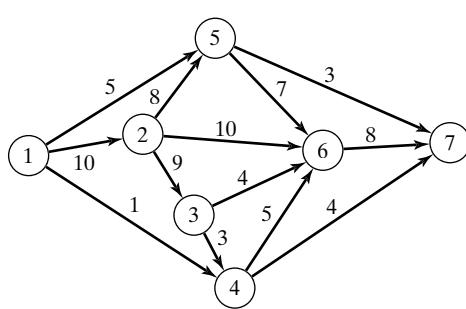
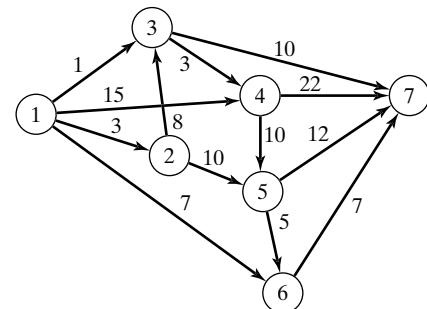


FIGURA 6.44

Red del proyecto para el problema 6-52



Proyecto (a)



Proyecto (b)

FIGURA 6.45

Redes del proyecto para el problema 6-53

- 6-58.** Dada una actividad (i, j) con duración D_{ij} y su tiempo inicial más temprano \square_i , así como su tiempo de terminación más tardío Δ_j , determine los tiempos de terminación más temprano e inicial más tardío de (i, j) .
- 6-59.** ¿Cuáles son los flotantes total y libre de una actividad crítica? Explique.
- *6-60.** Para cada una de las siguientes actividades, determine la demora máxima del tiempo inicial respecto de su tiempo inicial más temprano, que permitirá que todas las actividades subsecuentes inmediatas se programen en cualquier punto entre sus tiempos de terminación más temprano y más tardío.
- $TF = 10, FF = 10, D = 4$
 - $TF = 10, FF = 5, D = 4$
 - $TF = 10, FF = 0, D = 4$
- 6-61.** En el ejemplo 6.5-4 utilice los flotantes para responder lo siguiente:
- Si la actividad B inicia en el tiempo 1 y la actividad C en el tiempo 5, determine los tiempos iniciales más tempranos para E y F .
 - Si la actividad B inicia en el tiempo 3 y la actividad C inicia en el tiempo 7, determine los tiempos iniciales más tempranos para E y F .
 - ¿Qué impacto sufre la programación de otras actividades si la actividad B inicia en el tiempo 6?
- *6-62.** En el proyecto del ejemplo 6.5-2 (figura 6.28), suponga que la duración de las actividades B y F cambia de 6 y 11 días a 20 y 25 días, respectivamente.
- Determine la ruta crítica.
 - Determine los flotantes total y libre para la red, e identifique las actividades marcadas con una bandera roja.

- (c) Si la actividad A inicia en el tiempo 5, determine los tiempos iniciales más tempranos posibles para las actividades C, D, E y G .
- (d) Si las actividades F, G y H requieren el mismo equipamiento, determine la cantidad mínima de unidades necesarias de este equipo.
- 6-63.** Calcule los flotantes e identifique las actividades marcadas con una bandera roja para los proyectos (a) y (b) de la figura 6.30; después desarrolle los cronogramas en las siguientes condiciones:
- Proyecto (a)**
- (i) La actividad (1, 5) no puede iniciar antes del tiempo 14.
 - (ii) Las actividades (5, 6) y (5, 7) utilizan el mismo equipo, del cual sólo hay una unidad disponible.
 - (iii) Todas las demás actividades inician lo más pronto posible.
- Proyecto (b)**
- (i) La actividad (1, 3) debe programarse en su tiempo inicial más temprano, mientras se observa el requisito de que (1, 2), (1, 3) y (1, 6) utilizan una pieza de equipo especial, de la que sólo hay 1 unidad disponible.
 - (ii) Todas las demás actividades inician lo más pronto posible.
- 6-64.** (*Programación de trabajos en un taller*) Tres trabajos, J1, J2 y J3 se procesan en 3 máquinas, M1, M2 y M3, de acuerdo con las siguientes secuencias (los tiempos de procesamiento se muestran entre paréntesis):
- J1: M3(3) – M1(4) – M2(6)
J2: M2(1) – M3(5) – M1(9)
J3: M3(2) – M2(8) – M1(7)
- El orden en el que se procesan los trabajos en las diferentes máquinas está predeterminado como:
- M1: J1 – J2 – J3
M2: J2 – J3 – J1
M3: J3 – J1 – J2
- (a) Represente el problema como una red de CPM, donde la ruta crítica determina el espacio para los tres trabajos.
(b) Use los cálculos de ruta crítica para programar los trabajos (gráfica de Gantt), suponiendo que cada operación se programa en su tiempo inicial más temprano.
- 6-65.** Utilice PL a fin de determinar la ruta crítica para la red del proyecto de la figura 6.44.
- 6-66.** Utilice PL a fin de determinar la ruta crítica para las redes de proyecto de la figura 6.45.
- 6-67.** Considere el problema 6-53. En la siguiente tabla se listan las estimaciones (a, m, b) :

Proyecto (a)				Proyecto (b)			
Actividad	(a, m, b)	Actividad	(a, m, b)	Actividad	(a, m, b)	Actividad	(a, m, b)
1-2	(5, 6, 8)	3-6	(3, 4, 5)	1-2	(1, 3, 4)	3-7	(12, 13, 14)
1-4	(1, 3, 4)	4-6	(4, 8, 10)	1-3	(5, 7, 8)	4-5	(10, 12, 15)
1-5	(2, 4, 5)	4-7	(5, 6, 8)	1-4	(6, 7, 9)	4-7	(8, 10, 12)
2-3	(4, 5, 6)	5-6	(9, 10, 15)	1-6	(1, 2, 3)	5-6	(7, 8, 11)
2-5	(7, 8, 10)	5-7	(4, 6, 8)	2-3	(3, 4, 5)	5-7	(2, 4, 8)
2-6	(8, 9, 13)	6-7	(3, 4, 5)	2-5	(7, 8, 9)	6-7	(5, 6, 7)
3-4	(5, 9, 19)			3-4	(10, 15, 20)		

Determine las probabilidades de que los diferentes nodos del proyecto se ejecuten sin demora.

CAPÍTULO 7

Programación lineal avanzada

Aplicación de la vida real: Asignación óptima de rutas marítimas y personal para reclutamiento naval en Tailandia

La marina tailandesa realiza reclutamientos cuatro veces al año. Un recluta se reporta a uno de los 34 centros locales y luego es transportado por autobús hacia una de las cuatro bases navales filiales. Desde ahí, los reclutas son transportados a la base naval principal por barco. Las instalaciones portuarias en las bases filiales restringen el tipo de barco que puede atracar en cada base. Las bases filiales tienen capacidades limitadas pero, en conjunto, las cuatro poseen suficiente capacidad para dar cabida a todos los reclutas. Durante el verano de 1983, un total de 2929 reclutas fueron transportados desde los centros de reclutamiento hasta las cuatro bases filiales y finalmente a la base principal. El problema trata de la determinación del programa óptimo de transporte de los reclutas, primero de los centros de reclutamiento a las bases filiales, y luego desde éstas hasta la base principal. El estudio utiliza una combinación de las programaciones lineal y entera. (Los detalles se explican en el caso 5 del capítulo 26, disponible en inglés en el sitio web de este libro).

7.1 FUNDAMENTOS DEL MÉTODO SIMPLEX

En la programación lineal, el espacio de soluciones factibles forma un **conjunto convexo** si el segmento de línea que une dos puntos factibles *distintos* también cae en el conjunto. Un **punto extremo** del conjunto convexo es un punto factible que no puede quedar sobre un segmento de línea que une dos puntos factibles *distintos* en el conjunto. En realidad, los puntos extremos son lo mismo que los puntos de esquina (o vértices) utilizados en los capítulos 2, 3 y 4.

En la figura 7.1 se ilustran dos conjuntos. El conjunto (a) es convexo (con seis puntos extremos) y el conjunto (b) no lo es.

La solución de PL gráfica dada en la sección 2.3 demuestra que la solución óptima siempre está asociada con un punto factible extremo (de esquina o vértice) del espacio de soluciones. Este resultado tiene sentido de manera intuitiva, ya que cualquier punto factible en el espacio de soluciones

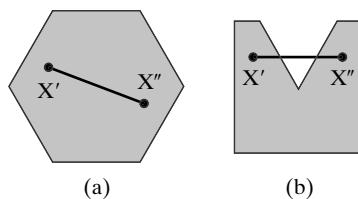


FIGURA 7.1
Ejemplos de un conjunto convexo
y un conjunto no convexo

de PL se puede determinar en función de sus puntos extremos factibles. Por ejemplo, en el conjunto convexo (a) de la figura 7.1, una **combinación convexa** de los puntos extremos $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5$ y \mathbf{X}_6 identifica cualquier punto factible \mathbf{X} como

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \alpha_1\mathbf{X}_1 + \alpha_2\mathbf{X}_2 + \alpha_3\mathbf{X}_3 + \alpha_4\mathbf{X}_4 + \alpha_5\mathbf{X}_5 + \alpha_6\mathbf{X}_6 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 &= 1 \\ \alpha_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, 6\end{aligned}$$

Esta observación muestra que un número finito de puntos extremos define por completo el número infinito de puntos en el espacio de soluciones. Este resultado es el punto crucial del método simplex.

Ejemplo 7.1-1

Demuestre que el siguiente conjunto es convexo:

$$C = \{(x_1, x_2) | x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

Sean $\mathbf{X}_1 = \{x'_1, x'_2\}$ y $\mathbf{X}_2 = \{x''_1, x''_2\}$ dos puntos distintos en C . Si C es convexo, entonces $\mathbf{X} = (x_1, x_2) = \alpha_1 \mathbf{X}_1 + \alpha_2 \mathbf{X}_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, también deben estar en C . Para comprobar que esto es cierto, es necesario demostrar que el segmento de línea \mathbf{X} satisface todas las restricciones de C , es decir,

$$\left. \begin{aligned}x_1 &= \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x''_1 \leq \alpha_1(2) + \alpha_2(2) = 2 \\ x_2 &= \alpha_1 x'_2 + \alpha_2 x''_2 \leq \alpha_1(3) + \alpha_2(3) = 3\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 \leq 2, x_2 \leq 3$$

Asimismo, las condiciones de no negatividad se satisfacen porque α_1 y α_2 son no negativos.

7.1.1 De puntos extremos a soluciones básicas

El problema general de PL se expresa convenientemente en forma de ecuación (vea la sección 3.1) utilizando notación matricial. Defina \mathbf{X} como un vector n que representa las variables, \mathbf{A} como una matriz $(m \times n)$ que denota los coeficientes de restricción, \mathbf{b} como un vector columna que representa el lado derecho y \mathbf{C} como un vector n que simboliza los coeficientes de la función objetivo. El PL se escribe entonces como

$$\text{Maximizar o minimizar } z = \mathbf{C}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Si se usa el formato del capítulo 3, los m elementos más a la derecha de \mathbf{X} representan las variables básicas iniciales. Por consiguiente, las m columnas más a la derecha de \mathbf{A} siempre forman una matriz identidad \mathbf{I} .

Una **solución básica** de $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ se determina igualando a cero las $n - m$ variables para después resolver las m ecuaciones resultantes en las m incógnitas restantes, *siempre que la solución resultante sea única*. Dada esta definición, la teoría de programación lineal establece el siguiente resultado entre la definición geométrica de los puntos extremos y la definición algebraica de las soluciones básicas:

$$\text{Puntos extremos de } \{\mathbf{X} \mid \mathbf{AX} = \mathbf{b}\} \Leftrightarrow \text{Soluciones básicas de } \mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

La relación significa que los puntos extremos del espacio de soluciones de la PL se definen mediante las soluciones básicas de $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ y viceversa. Entonces, las soluciones básicas de $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ ofrecen toda la información necesaria para determinar la solución óptima del problema de PL. Además, la restricción de no negatividad, $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, limita la búsqueda del óptimo solamente a las soluciones básicas *factibles*.

Para formalizar la definición de una solución básica, el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ se escribe en forma vectorial como

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b}$$

El vector \mathbf{P}_j es la j -ésima columna de \mathbf{A} . Un subconjunto de m vectores forma una **base**, \mathbf{B} , si, y sólo si, los m vectores seleccionados son **linealmente independientes**. En este caso, la matriz \mathbf{B} es **no singular**. Si se define \mathbf{X}_B como un vector m de las variables básicas, entonces

$$\mathbf{BX}_B = \mathbf{b}$$

Mediante el uso de la inversa \mathbf{B}^{-1} , la solución básica asociada es

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

Si $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \geq 0$, entonces \mathbf{X}_B es factible. Las $n - m$ variables restantes son **no básicas** en el nivel cero.

El resultado anterior muestra que, en un sistema de m ecuaciones y n incógnitas, la cantidad máxima de soluciones básicas (factibles y no factibles) es $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Ejemplo 7.1-2

Determine todas las soluciones básicas factibles y no factibles del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En la siguiente tabla se resumen los resultados utilizando la inversa de \mathbf{B} .

B	BX_B = b	Solución	Tipo
(P ₁ , P ₂)	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$	Factible
(P ₁ , P ₃)	(No es una base porque P ₁ y P ₃ son dependientes)		
(P ₂ , P ₃)	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$	No factible

También se puede investigar el problema expresándolo en forma vectorial como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}x_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Los vectores bidimensionales P₁, P₂, P₃ y b pueden representarse genéricamente como (a₁, a₂)^T. En la figura 7.2 se ilustran gráficas de estos vectores en el plano (a₁, a₂). Por ejemplo, para b = (4, 2)^T, a₁ = 4 y a₂ = 2.

Como se trata de dos ecuaciones ($m = 2$), una base incluye exactamente dos vectores seleccionados de entre P₁, P₂ y P₃. A partir de la figura 7.2, las matrices (P₁, P₂) y (P₂, P₃) forman bases porque sus vectores asociados son independientes. Por otro lado, los vectores de la matriz (P₁, P₃) son dependientes, por lo que la matriz no es una base.

De manera algebraica, una matriz (cuadrada) forma una base, si su determinante no es cero. Los siguientes cálculos muestran que las combinaciones (P₁, P₂) y (P₂, P₃) son bases, y que la combinación (P₁, P₃) no lo es.

$$\det(P_1, P_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (1 \times -2) - (3 \times 2) = -8 \neq 0$$

$$\det(P_2, P_3) = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = (3 \times -2) - (-1 \times -2) = -8 \neq 0$$

$$\det(P_1, P_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (1 \times -2) - (-1 \times 2) = 0$$

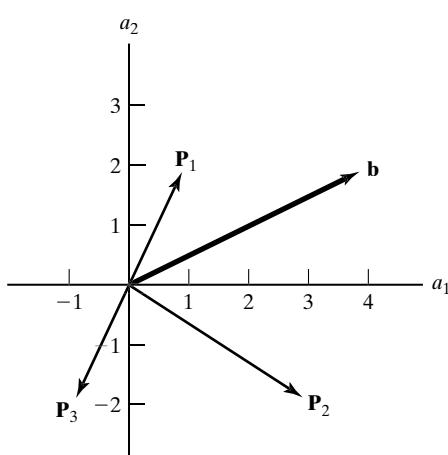


FIGURA 7.2
Representación vectorial del espacio de soluciones de PL

7.1.2 Tabla simplex generalizada en forma matricial

En la presente sección se desarrolla la tabla simplex general en forma matricial. Esta representación es la base para desarrollos subsecuentes en el capítulo.

Considere la PL en forma de ecuación:

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{C}\mathbf{X}, \text{ sujeto a } \mathbf{AX} = \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

En forma equivalente, el problema se escribe como

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Suponga que \mathbf{B} es una base factible del sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$, $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, y sea \mathbf{X}_B el vector correspondiente de variables básicas y \mathbf{C}_B su vector objetivo asociado. Como todas las variables no básicas son cero, entonces la solución se calcula como

$$\begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C}_B \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

La tabla simplex completa en forma matricial se obtiene a partir de la ecuación original como

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Después, se obtienen las siguientes ecuaciones mediante manipulaciones matriciales:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Dado el j -ésimo vector \mathbf{P}_j de \mathbf{A} , la columna de la tabla simplex asociada con la variable x_j puede escribirse como

Básicas	x_j	Solución
z	$\mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j - c_j$	$\mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
\mathbf{X}_B	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

De hecho, la tabla anterior es igual a la utilizada en el capítulo 3 (vea el problema 7.13). También incluye todas las relaciones primales-duales, desarrolladas en la sección 4.2.4.

Comentarios. Observe la forma matricial de la tabla simplex que se acaba de presentar. Notará que la inversa \mathbf{B}^{-1} es el único elemento que cambia de una iteración a la siguiente, en el sentido de que todos los otros elementos pueden obtenerse directamente de los datos originales. Esto significa que la tabla *entera* puede generarse a partir de los datos originales una vez que se conoce la

inversa \mathbf{B}^{-1} . Sin embargo, la tabla en formato matricial revela una raíz más profunda para determinar \mathbf{B}^{-1} , a saber,

$$\begin{pmatrix} \text{Solución básica} \\ \mathbf{X}_B \\ \text{en la iteración } i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{Columnas de} \\ \text{restricción originales} \\ \text{de } \mathbf{X}_B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{Base } \mathbf{B} \text{ para} \\ \text{la iteración } i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{Inversa } \mathbf{B}^{-1} \text{ para} \\ \text{la iteración } i \end{pmatrix}$$

lo cual significa que, una vez que se conoce \mathbf{X}_B , todos los elementos de la tabla pueden determinarse directamente a partir de los datos *originales* del modelo. A diferencia del método que utiliza tablas en el capítulo 3, donde el error de redondeo se propaga al generar la tabla siguiente a partir del error de redondeo inmediato anterior en una iteración, éste se puede mantener bajo control calculando \mathbf{B}^{-1} a partir de las columnas de restricción *originales*. El resultado es una de las razones principales para el desarrollo del *método simplex revisado* en la sección 7.2. Sin embargo, la regla de oro en el álgebra matricial es evitar la inversión de una matriz siempre que sea posible, ya que calcular nuevamente \mathbf{B}^{-1} a partir de los datos originales resulta muy costoso computacionalmente. Como se explicará en la sección 7.2.3, es esencial encontrar un equilibrio entre la exactitud y la velocidad computacional mediante la modulación de la frecuencia de cálculo de la inversa durante el curso de las iteraciones simplex.

Ejemplo 7.1-3

Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Genere la tabla simplex asociada con la base $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$.

Dada $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, entonces $\mathbf{X}_B = (x_1, x_2)^T$ y $\mathbf{C}_B = (1, 4)$. Por lo tanto,

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Se obtiene entonces

$$\mathbf{X}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Para calcular las columnas de restricción en el cuerpo de la tabla, se tiene

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

En seguida se calcula la fila objetivo como

$$\mathbf{C}_B(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)) - \mathbf{C} = (1, 4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - (1, 4, 7, 5) = (0, 0, 1, -3)$$

Por último, se calcula el valor de la función objetivo como

$$z = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{C}_B \mathbf{X}_B = (1, 4) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 19$$

Así, la tabla completa puede resumirse como sigue.

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	0	1	-3	19
x_1	1	0	0	2	3
x_2	0	1	2	0	4

7.2 MÉTODO SIMPLEX REVISADO

En la sección 7.1.1 se muestra que la solución óptima de un programa lineal siempre está asociada con una solución básica (factible). El método simplex busca pasar de una base factible, \mathbf{B} , a una base mejor (en realidad, a una que no sea peor), $\mathbf{B}_{\text{siguiente}}$, hasta que se alcance la base óptima.

Los pasos iterativos del método simplex *revisado* son *exactamente los mismos* que en el método de la tabla simplex presentado en el capítulo 3. La diferencia principal es que los cálculos en el método revisado se basan en manipulaciones matriciales y no en operaciones de filas. De este modo, la tabla simplex completa puede calcularse a partir de los datos *originales* y la inversa actual (vea la sección 7.1.2), con lo que se mejora la precisión del cálculo de \mathbf{B}^{-1} y se mitiga el error de redondeo de la máquina. En el método de la tabla simplex del capítulo 3, cuando se genera una nueva tabla a partir de la inmediata anterior, el error de redondeo se propaga rápidamente.

7.2.1 Desarrollo de las condiciones de optimalidad y factibilidad

El problema de PL puede escribirse como

$$\text{Maximizar o minimizar } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \text{ sujeto a } \sum_j \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b}, x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Dados el vector básico \mathbf{X}_B , su base \mathbf{B} y su vector objetivo \mathbf{C}_B , la tabla simplex general desarrollada en la sección 7.1.2 muestra que cualquier iteración simplex puede representarse mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} z + \sum_{j=1}^n (z_j - c_j) x_j &= \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ (\mathbf{X}_B)_i + \sum_{j=1}^n (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_i x_j &= (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_i \end{aligned}$$

El **costo reducido** de x_j , como se definió en la sección 4.3.2, se calcula como

$$z_j - c_j = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j - c_j$$

La notación $(\mathbf{V})_i$ representa el elemento i del vector \mathbf{V} .

Condición de optimalidad. La ecuación z muestra que, en el caso de maximización, un incremento de la variable x_j no básica por encima de su valor cero actual puede mejorar el valor de z (respecto de su valor actual, $\mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$) sólo si $z_j - c_j < 0$. Para la minimización, la condición es $z_j - c_j > 0$. Así, el **vector de entrada** se selecciona como el vector no básico con la condición $z_j - c_j$ más negativa (más positiva), en caso de la maximización (minimización).

Condición de factibilidad. Dado el vector de entrada \mathbf{P}_j determinado por la condición de optimalidad, las ecuaciones de restricción se reducen a

$$(\mathbf{X}_B)_i = (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_i - (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_i x_j$$

(Recuerde que las $n - 1$ variables no básicas restantes son cero.) La idea es (tratar de) incrementar x_j por encima del nivel cero, al reemplazar una de las variables básicas actuales. El requisito de que todas las $(\mathbf{X}_B)_i$ permanezcan no negativas rige el grado al cual se incrementa x_j :

$$(\mathbf{X}_B)_i = (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_i - (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_i x_j \geq 0$$

Si $(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_i > 0$ con al menos una i , la condición de no negatividad, $(\mathbf{X}_B)_i \geq 0$ para todas las i , establece el límite en el incremento máximo del valor de la variable de entrada x_j , es decir,

$$x_j = \min_i \left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_i} \mid (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_i > 0 \right\}$$

Suponga que $(\mathbf{X}_B)_k$ es la variable no básica que corresponde a la relación mínima. Se desprende entonces que \mathbf{P}_k debe ser el **vector de salida**, y su variable asociada (básica) tiene que volverse no básica (en el nivel cero) en la siguiente iteración simplex.

7.2.2 Algoritmo simplex revisado

Paso 0. Construya una solución factible básica inicial, y sean \mathbf{B} y \mathbf{C}_B su base asociada y el vector de coeficientes objetivo, respectivamente.

Paso 1. Calcule la inversa \mathbf{B}^{-1} de la base \mathbf{B} por medio de un método de inversión apropiado.¹

Paso 2. Para cada vector *no básico* \mathbf{P}_j calcule

$$z_j - c_j = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j - c_j$$

¹ En la mayoría de las presentaciones de PL, incluidas las primeras seis ediciones de este libro, el método de *forma del producto* para invertir una base se integra en el algoritmo simplex revisado, ya que la *forma del producto* se presta fácilmente para los cálculos simplex revisados; es decir, las bases sucesivas difieren en exactamente una columna. Este detalle se eliminó en la presentación porque hace que el algoritmo parezca más complejo de lo que realmente es. Asimismo, la *forma del producto* se usa muy pocas veces en el desarrollo de códigos de PL comerciales. En vez de eso, se utiliza algún método de análisis numérico avanzado, como el método de *descomposición LU*. Más adelante, en la sección 7.2.3, se estudiará con mayor profundidad el uso de la *forma del producto* y la *descomposición LU*; en específico, vea el apartado “Momento, ¡ajá!” al final de la sección 7.2.3 (a propósito, la inversión de matrices en TORA se basa en la descomposición LU).

Si $z_j - c_j \geq 0$ en maximización (≤ 0 en minimización) para todos los vectores no básicos, deténgase; la solución óptima es $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $z = \mathbf{C}_B\mathbf{X}_B$.

En caso contrario, determine el vector *de entrada* \mathbf{P}_j que tiene el valor $z_j - c_j$ más negativo (positivo) en caso de maximización (minimización) entre todos los vectores no básicos.

Paso 3. Calcule $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$. Si todos los elementos de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$ son negativos o cero, deténgase; la solución es no acotada. En caso contrario, use la prueba de relación (o razón) para determinar el vector *de salida* \mathbf{P}_i .

Paso 4. Forme la siguiente base reemplazando el vector de salida \mathbf{P}_i con el vector de entrada \mathbf{P}_j en la base actual \mathbf{B} . Vaya al paso 1 para iniciar una nueva iteración.

Ejemplo 7.2-1

El modelo de Reddy Mikks (sección 2.1) se resolvió con el algoritmo simplex revisado. El mismo modelo se resolvió con el método de la tabla simplex en la sección 3.3.2. Una comparación muestra que en realidad ambos métodos son uno mismo.

La forma de ecuación del modelo de Reddy Mikks se expresa en forma matricial como

$$\text{maximizar } z = (5, 4, 0, 0, 0, 0)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$$

sujeto a

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_6 \geq 0$$

La notación $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_6)$ representa los coeficientes de la función objetivo, y $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_6)$ representan los vectores columna de las ecuaciones de restricción. El lado derecho de las restricciones es el vector \mathbf{b} .

En los siguientes cálculos, se dará la fórmula algebraica para cada paso y su respuesta numérica final, sin detallar los cálculos. Usted encontrará esclarecedor llenar los espacios en cada paso.

Iteración 0

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_3, x_4, x_5, x_6), \mathbf{C}_{B_0} = (0, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{B}_0 = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6) = \mathbf{I}, \mathbf{B}_0^{-1} = \mathbf{I}$$

Entonces,

$$\mathbf{X}_{B_0} = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{b} = (24, 6, 1, 2)^T, z = \mathbf{C}_{B_0}\mathbf{X}_{B_0} = 0$$

Cálculos de optimalidad:

$$\mathbf{C}_{B_0}\mathbf{B}_0^{-1} = (0, 0, 0, 0)$$

$$\{z_j - c_j\}_{j=1,2} = \mathbf{C}_{B_0}\mathbf{B}_0^{-1}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) - (c_1, c_2) = (-5, -4)$$

Por lo tanto, \mathbf{P}_1 es el vector de entrada.

Cálculos de factibilidad:

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (24, 6, 1, 2)^T$$

$$\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{P}_1 = (6, 1, -1, 0)^T$$

Por consiguiente,

$$x_1 = \min\left\{\frac{24}{6}, \frac{6}{1}, -, -\right\} = \min\{4, 6, -, -\} = 4,$$

y \mathbf{P}_3 se convierte en el vector de salida.

Los resultados anteriores se resumen en el conocido formato de tabla simplex, lo cual en esencia demuestra que los dos métodos son lo mismo.

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	-5	-4	0	0	0	0	0
x_3	6						24
x_4	1						6
x_5	-1						1
x_6	0						2

Iteración 1

$$\mathbf{X}_{B_1} = (x_1, x_4, x_5, x_6), \mathbf{C}_{B_1} = (5, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6)$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si se utiliza un método de inversión adecuado, entonces

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{X}_{B_1} = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} = (4, 2, 5, 2)^T, z = \mathbf{C}_{B_1}\mathbf{X}_{B_1} = 20$$

Cálculos de optimalidad:

$$\mathbf{C}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1} = (\frac{5}{6}, 0, 0, 0)$$

$$\{z_j - c_j\}_{j=2,3} = \mathbf{C}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) - (c_2, c_3) = (-\frac{2}{3}, \frac{5}{6})$$

Así, \mathbf{P}_2 es el vector de entrada.

Cálculos de factibilidad:

$$\mathbf{X}_{B_1} = (x_1, x_4, x_5, x_6)^T = (4, 2, 5, 2)^T$$

$$\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{P}_2 = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 1)^T$$

Entonces,

$$x_2 = \min \left\{ \frac{4}{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\frac{4}{3}}, \frac{5}{\frac{5}{3}}, \frac{2}{\frac{1}{1}} \right\} = \min \left\{ 6, \frac{3}{2}, 3, 2 \right\} = \frac{3}{2}$$

El vector \mathbf{P}_4 sale de la base (usted encontrará útil resumir estos resultados en el formato de tabla simplex, como se hizo en la iteración 0).

Iteración 2

$$\mathbf{X}_{B_2} = (x_1, x_2, x_5, x_6)^T, \mathbf{C}_{B_2} = (5, 4, 0, 0)$$

$$\mathbf{B}_2 = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6)$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{B}_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{X}_{B_2} = \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b} = (3, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})^T, z = \mathbf{C}_{B_2}\mathbf{X}_{B_2} = 21$$

Cálculos de optimalidad:

$$\mathbf{C}_{B_2}\mathbf{B}_2^{-1} = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0)$$

$$\{z_j - c_j\}_{j=3,4} = \mathbf{C}_{B_2}\mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4) - (c_3, c_4) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$$

En consecuencia, \mathbf{X}_{B_2} es óptimo y terminan los cálculos.

Resumen de la solución óptima:

$$x_1 = 3, x_2 = 1.5, z = 21$$

7.2.3 Aspectos computacionales en el método simplex revisado

Hay dos aspectos primordiales en relación con el algoritmo simplex revisado: (1) precisión computacional (también conocida como *estabilidad numérica*) y (2) velocidad computacional. El cálculo de la inversa \mathbf{B}^{-1} a partir de los datos originales aumentará la precisión de los cálculos, pero hará más lenta la ejecución del algoritmo simplex revisado. De hecho, la regla de oro en el análisis numérico es nunca invertir una matriz a menos que sea absolutamente necesario. Los solucionadores de PL disponibles siguen esta regla.

La técnica simplex revisada utiliza dos métodos distintos para tratar con la inversa \mathbf{B}^{-1} :

1. La forma del producto
2. La descomposición LU²

La idea de la forma del producto es construir una matriz elemental, \mathbf{E} , utilizando la inversa actual, \mathbf{B}^{-1} , y la columna de restricción, \mathbf{P}_j , del vector entrante, j . Entonces, la nueva inversa se calcula como

$$\mathbf{B}_{\text{siguiente}}^{-1} = \mathbf{EB}_{\text{actual}}^{-1}$$

Puesto que la base inicial, \mathbf{B}_0 , es siempre una matriz identidad, la base inversa en la iteración k puede calcularse de manera efectiva como

$$\mathbf{B}_k^{-1} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k$$

La descomposición LU requiere la descomposición de la base, \mathbf{B} , en las matrices triangulares inferior y superior, \mathbf{L} y \mathbf{U} , respectivamente, de modo que,

$$\mathbf{B} = \mathbf{LU}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{L}^{-1}$$

Todos los elementos de la matriz \mathbf{L} por encima de la diagonal son cero, en tanto que todos los elementos de la matriz \mathbf{U} por debajo de la diagonal son cero. La matriz \mathbf{U} se determina aplicando operaciones de fila apropiadas a la base \mathbf{B} , y el mismo proceso produce automáticamente los elementos de \mathbf{L} por debajo de la diagonal. Como en el método de la forma del producto, $\mathbf{B}_{\text{siguiente}}^{-1}$ se determina modificando $\mathbf{L}_{\text{actual}}^{-1}$ y $\mathbf{U}_{\text{actual}}^{-1}$ usando adecuadamente la información del vector entrante actual \mathbf{P}_j .

Para evitar la inversión de \mathbf{B} nuevamente en cada iteración (lo que es muy costoso computacionalmente), la estrategia en ambos métodos es seguir generando $\mathbf{B}_{\text{siguiente}}^{-1}$ a partir de la inversa inmediata anterior, siempre y cuando la exactitud computacional no se vea afectada hasta el punto de distorsionar el modelo original. Cuando esto sucede, $\mathbf{B}_{\text{actual}}^{-1}$ pierde su precisión, y es hora de reemplazarla por una más exacta construyendo $\mathbf{B}_{\text{siguiente}}$ asociada con $\mathbf{X}_{B(\text{siguiente})}$ a partir de los vectores \mathbf{P}_j de la columna *original*. En seguida se invierte la base recién construida, $\mathbf{B}_{\text{siguiente}}$, y su inversa se usa como un inicio “fresco” en iteraciones simplex sucesivas hasta que pierde de nuevo su precisión. Y el proceso continúa de esta forma hasta que termina el método simplex.³

¿Cómo se sabe que $\mathbf{B}_{\text{actual}}^{-1}$ ya no es exacta durante el curso de las iteraciones simplex (señalando así la necesidad de iniciar un nuevo ciclo con una inversa “fresca”)? El error de redondeo se mani-

² Vea J. Bunch y J. Hopcroft, “Triangular Factorization and Inversion by Fast Matrix Multiplication”, *Mathematics of Computation*, vol. 28, pp. 231-236, 1974.

³ Vea E. Hellerman y D. Rarick, “Reinversion with the Preassigned Pivot Procedure”, *Mathematical Programming*, vol. 1, pp. 195-216, 1971.

fiesta adversamente en elementos de la tabla simplex que se sabe que son cero; es decir, en cualquier iteración, la teoría de la PL indica:

1. Los coeficientes objetivo para todas las variables básicas \mathbf{X}_B deben ser cero, es decir, $\|z_j - c_j\|_{\mathbf{x}_B} = \mathbf{0}$ (a propósito, $\|z_j - c_j\|_{\mathbf{x}_B} = 0$ representa las restricciones dobles asociadas con las variables básicas).
2. La diferencia entre los lados izquierdo y derecho de las restricciones de la PL (primal) tienen que ser cero, es decir, $\|\mathbf{AX} - \mathbf{b}\| = \mathbf{0}$.

Si estos valores superan un umbral especificado ε , el error de redondeo plantea problemas y la inversa debe actualizarse.

El hilo común entre la forma del producto y los métodos de descomposición LU es la necesidad cíclica de actualizar la base inversa. Con base en las experiencias computacionales informadas, se concluye que el método LU tiene un ciclo entre reinversiones que es aproximadamente cuatro veces más largo que en la forma del producto. Por esa razón, prácticamente todos los solucionadores de PL actuales usan el método LU (o una variante de él).

Momento, ¡Ajá! Primeras implementaciones del algoritmo simplex o cómo surgió el uso de la forma del producto de la inversa⁴

La primera aplicación no trivial reportada del método simplex de Dantzig fue una instancia de 21 restricciones por 74 variables del problema de la dieta (vea el ejemplo 2.2-2), y sólo tomó alrededor de 120 días-hombre calcular la solución óptima. No obstante, esa fue la época en que los cálculos manuales eran la norma. Más tarde, a principios de la década de 1950, los conglomerados de paneles cableados, tarjetas perforadas, cables “en forma de espagueti” y tubos de vacío inauguraron el nacimiento de las computadoras. Sin embargo, con computadoras en un estado tan “primitivo”, la ejecución del algoritmo simplex era extremadamente lenta, sobre todo porque cada iteración requería un cálculo explícito de la base inversa (muy costosa computacionalmente, incluso con las máquinas actuales). Desalentado por los resultados, Dantzig pensó que el futuro computacional de su algoritmo simplex estaba condenado. Entonces su colega W. Orchard-Hay sugirió la utilización del método de la forma del producto (en vez de las operaciones de fila de Gauss-Jordan) para generar los inversos sucesivos. El uso de la forma del producto condujo a una implementación más acertada del algoritmo simplex (¡tomó solamente cerca de 8 horas resolver la instancia de 26 restricciones con 74 variables del problema de la dieta —nada de qué presumir, pero era, por decir lo menos, una gran mejora sobre la solución manual del mismo ejemplo que requirió 120 días-hombre!). Y durante más de dos décadas, la forma del producto siguió siendo el motor impulsor para calcular la inversa en el algoritmo simplex, hasta que fue suplantado por el método más eficiente de descomposición LU.

7.3 ALGORITMO DE VARIABLES ACOTADAS

En los modelos de PL, las variables pueden tener cotas superiores e inferiores explícitas. En las instalaciones de producción, por ejemplo, las cotas inferior y superior pueden representar las demandas mínimas y máximas de determinados productos. Las variables acotadas también surgen de forma prominente al resolver programas enteros mediante el algoritmo de ramificación y acotamiento (vea la sección 9.3.1).

⁴ Robert E. Bixby, “A Brief History of Linear and Mixed-Integer Programming Computation”, *Documenta Mathematica*, vol. extra ISMP, pp. 107-121, 2012.

El algoritmo de acotamiento es computacionalmente eficiente porque toma en cuenta de manera *implícita* las cotas. Primero se consideran las cotas inferiores, ya que su tratamiento es sencillo. Dada $\mathbf{X} \geq \mathbf{L}$, sustituya $\mathbf{X} = \mathbf{L} + \mathbf{X}'$, $\mathbf{X}' \geq \mathbf{0}$ y resuelva el problema en función de \mathbf{X}' (cuya cota inferior ahora es igual a cero). La \mathbf{X} original se determina entonces mediante una sustitución inversa, $\mathbf{X} = \mathbf{X}' + \mathbf{L} \geq 0$.

En seguida considere las restricciones de acotamiento superior, $\mathbf{X} \leq \mathbf{U}$. La idea de sustitución directa (es decir, $\mathbf{X} = \mathbf{U} - \mathbf{X}''$, $\mathbf{X}'' \geq \mathbf{0}$) no es correcta porque la sustitución inversa $\mathbf{X} = \mathbf{U} - \mathbf{X}''$, no garantiza que \mathbf{X} permanecerá no negativa. Por lo tanto, se requiere un procedimiento diferente.

Defina el modelo de PL de acotamiento superior como

$$\text{Maximizar } z = \{\mathbf{C}\mathbf{X} \mid (\mathbf{A}, \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{b}, \mathbf{0} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{U}\}$$

El algoritmo de acotamiento utiliza sólo las restricciones principales $(\mathbf{A}, \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{b}$, $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$. Toma en cuenta las cotas superiores, $\mathbf{X} \leq \mathbf{U}$, implícitamente al modificar la condición de factibilidad.

Sea $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ una solución factible básica actual de $(\mathbf{A}, \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{b}$, $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, y suponga que \mathbf{P}_j es el vector de entrada (como lo determina la condición de optimalidad). Entonces, *dado que todas las variables no básicas son cero*, la ecuación de restricción de la i -ésima variable básica es

$$(\mathbf{X}_B)_i = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i x_j$$

Cuando la variable de entrada x_j se incrementa por encima del nivel cero, $(\mathbf{X}_B)_i$ se *incrementará o decrecerá* dependiendo de si $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i$ es negativa o positiva, respectivamente. Por lo tanto, al determinar el valor del vector de entrada \mathbf{P}_j , se deben satisfacer tres condiciones.

1. La variable básica permanece no negativa, es decir, $(\mathbf{X}_B)_i \geq 0$.
2. La variable básica $(\mathbf{X}_B)_i$ no excede su cota superior, esto es, $(\mathbf{X}_B)_i \leq (\mathbf{U}_B)_i$, donde \mathbf{U}_B comprende los elementos de \mathbf{U} correspondientes a \mathbf{X}_B .
3. La variable de entrada x_j no puede asumir un valor mayor que su cota superior, es decir, $x_j \leq u_j$, donde u_j es el j -ésimo elemento de \mathbf{U} .

La primera condición $(\mathbf{X}_B)_i \geq 0$ es igual que en el método simplex regular. Da como resultado

$$x_j \leq \theta_1 = \min_i \left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i} \mid (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i > 0 \right\}$$

La segunda condición $(\mathbf{X}_B)_i \leq (\mathbf{U}_B)_i$ especifica que

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i x_j \leq (\mathbf{U}_B)_i$$

Se satisface si

$$x_j \leq \theta_2 = \min_i \left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i - (\mathbf{U}_B)_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i} \mid (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i < 0 \right\}$$

Al combinar las tres restricciones, x_j entra a la solución en el nivel que satisface las tres condiciones:

$$x_j = \min\{\theta_1, \theta_2, u_j\}$$

El cambio de base para la siguiente iteración depende de si x_j introduce la solución en el nivel θ_1 , θ_2 o u_j . Si se supone que $(\mathbf{X}_B)_r$ es la variable de salida, entonces se tienen las siguientes reglas:

1. $x_j = \theta_1$: $(\mathbf{X}_B)_r$ sale de la solución básica (se vuelve no básica) en el nivel cero. La nueva iteración se genera con el método simplex regular con x_j y $(\mathbf{X}_B)_r$ como las variables de entrada y salida, respectivamente.
2. $x_j = \theta_2$: $(\mathbf{X}_B)_r$ se vuelve no básica *en su cota superior*. La nueva iteración se genera como en el caso de $x_j = \theta_1$, con una modificación que toma en cuenta el hecho de que $(\mathbf{X}_B)_r$ será no básica en la *cota superior*. Como los valores de θ_1 y θ_2 requieren que *todas las variables no básicas estén en el nivel cero* (¡convéñzase de que éste es el caso!), la nueva $(\mathbf{X}_B)_r$ no básica en la cota superior se convierte en una variable no básica en el nivel cero. Esto se logra mediante la sustitución de $(\mathbf{X}_B)_r = (\mathbf{U}_B)_r - (\mathbf{X}'_B)_r$, donde $(\mathbf{X}'_B)_r \geq 0$. Es intrascendente si la sustitución se hace antes o después de calcular la nueva base.
3. $x_j = u_j$: El vector básico \mathbf{X}_B no cambia porque $x_j = u_j$ se detiene antes de hacer que cualquiera de las variables básicas actuales alcance su cota inferior ($= 0$) o superior, lo cual significa que x_j permanecerá no básica *pero en la cota superior*. *El único cambio requerido en la tabla es utilizar la sustitución $x_j = u_j - x'_j$* para garantizar que todas las variables no básicas estén en el nivel cero.

Un empate entre θ_1 , θ_2 y u_j puede romperse arbitrariamente. Sin embargo, siempre que sea posible, se recomienda implementar la regla de $x_j = u_j$ porque implica menos cálculos.

La sustitución $x_j = u_j - x'_j$ cambiará las c_j , \mathbf{P}_j y \mathbf{b} originales a $c'_j = -c_j$, $\mathbf{P}'_j = -\mathbf{P}_j$, y $\mathbf{b} = \mathbf{b}' = \mathbf{b} - u_j \mathbf{P}_j$, que significa que si se utiliza el método simplex revisado, todos los cálculos (por ejemplo, \mathbf{B}^{-1} , \mathbf{X}_B y $z_j - c_j$) deberían basarse en los valores modificados de \mathbf{C} , \mathbf{A} y \mathbf{b} en cada iteración (para mayores detalles, vea el problema 7-36).

Ejemplo 7.3-1

Resuelva el siguiente modelo de PL con el algoritmo de acotamiento superior.⁵

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 5y + 2x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + y + 2x_3 &\leq 14 \\ 2x_1 + 4y + 3x_3 &\leq 43 \\ 0 \leq x_1 &\leq 4, 7 \leq y \leq 10, 0 \leq x_3 \leq 3 \end{aligned}$$

La cota inferior en y se toma en cuenta para la sustitución $y = x_2 + 7$, donde $0 \leq x_2 \leq 10 - 7 = 3$.

⁵ Es posible utilizar la secuencia de comandos Linear Programming \Rightarrow Solve problem \Rightarrow Algebraic \Rightarrow Iterations \Rightarrow Bounded simplex en TORA para producir las iteraciones simplex asociadas (archivo *toraEx73-1.txt*).

Para evitar la “distracción” de los detalles computacionales, no se utilizará el método simplex revisado para efectuar los cálculos. En su lugar se usará la forma de tabla compacta. Los problemas 7-36, 7-37 y 7-38 abordan la versión revisada del algoritmo.

Iteración 0

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	-3	-5	-2	0	0	35
x_4	1	1	2	1	0	7
x_5	2	4	3	0	1	15

Se tiene $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{X}_B = (x_4, x_5)^T = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = (7, 15)^T$. Dado que x_2 es la variable de entrada ($z_2 - c_2 = -5$), entonces $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_2 = (1, 4)^T$, de donde resulta

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{7}{1}, \frac{15}{4}\right\} = 3.75, \text{ correspondiente a } x_5$$

$$\theta_2 = \infty \text{ (porque todos los elementos de } \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_2 > \mathbf{0})$$

Luego, dada la cota superior en la variable de entrada, $x_2 \leq 3$, por lo que

$$x_2 = \min\{3.75, \infty, 3\} = 3$$

Como $x_2 = u_2$, \mathbf{X}_B no cambia y x_2 se vuelve no básica *en su cota superior*. La sustitución de $x_2 = 3 - x'_2$ da como resultado la siguiente tabla nueva:

Básicas	x_1	x'_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	-3	5	-2	0	0	50
x_4	1	-1	2	1	0	4
x_5	2	-4	3	0	1	3

La sustitución cambia el vector del lado derecho original de $\mathbf{b} = (7, 15)^T$ a $\mathbf{b}' = (4, 3)^T$. Por lo tanto, \mathbf{b}' reemplaza a \mathbf{b} en las iteraciones futuras.

Iteración 1

La variable de entrada es x_1 . El vector básico \mathbf{X}_B y \mathbf{B}^{-1} ($= \mathbf{I}$) son los mismos que en la iteración 0. En seguida, dado $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_1 = (1, 2)^T$,

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{4}{1}, \frac{3}{2}\right\} = 1.5, \text{ correspondiente a la } x_5 \text{ básica}$$

$$\theta_2 = \infty \text{ (porque } \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_1 > \mathbf{0})$$

Por lo tanto,

$$x_1 = \min\{1.5, \infty, 4\} = 1.5$$

Como $x_1 = \theta_1$, la variable de entrada x_1 se vuelve básica y la variable de salida x_5 se vuelve no básica en el nivel cero, lo que resulta en

Básicas	x_1	x'_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	-1	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{109}{2}$
x_4	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_1	1	-2	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

Iteración 2

La nueva inversa es

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora, $\mathbf{X}_B = (x_4, x_1)^T = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}' = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)^T$, donde $\mathbf{b}' = (4, 3)^T$ como se calculó al final de la iteración 0. Se selecciona x'_2 como la variable de entrada y, al observar que $\mathbf{P}'_2 = -\mathbf{P}_2$, se obtiene

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}'_2 = (1, -2)^T$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \min\left\{\frac{\frac{5}{2}}{1}, -\right\} = 2.5, \text{ correspondiente a la } x_4 \text{ básica} \\ \theta_2 &= \min\left\{-, \frac{\frac{3}{2} - 4}{-2}\right\} = 1.25, \text{ correspondiente a la } x_1 \text{ básica} \end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$x'_2 = \min\{2.5, 1.25, 3\} = 1.25$$

Como $x'_2 = \theta_1$, x_1 se vuelve no básica en la cota superior y el resultado es la sustitución $x_1 = 4 - x'_1$. La nueva tabla es

Básicas	x'_1	x'_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	-1	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{109}{2}$
x_4	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x'_1	-1	-2	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$

Luego, la variable de entrada x'_2 se vuelve básica y la variable de salida x'_1 se vuelve no básica, de donde resulta

Básicas	x'_1	x'_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{223}{4}$
x_4	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
x'_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$

La última tabla es factible y óptima. Observe que los últimos dos pasos podrían haberse invertido; es decir, primero x'_2 podría hacerse básica para después aplicar la sustitución $x_1 = 4 - x'_1$ (¡pruébelo!). Sin embargo, la secuencia aquí presentada implica menos cálculos.

Los valores óptimos de x_1, x_2 y x_3 se obtienen mediante sustitución inversa como $x_1 = u_1 - x'_1 = 4 - 0 = 4$, $x_2 = u_2 - x'_2 = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$ y $x_3 = 0$. Finalmente, se obtiene $y = l_2 + x_2 = 7 + \frac{7}{4} = \frac{35}{4}$. El valor óptimo asociado de la función objetivo es $\frac{223}{4}$.

7.4 DUALIDAD

En esta sección se presenta un tratamiento riguroso de la dualidad. La presentación también sienta las bases para el desarrollo de la programación paramétrica.

7.4.1 Definición matricial del problema dual

Suponga que el problema primal en forma de ecuación con m restricciones y n variables se define como

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{C}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Considere que el vector $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ define las variables duales. Las reglas dadas en la sección 4.1 (capítulo 4) definen el problema dual como:

$$\text{Minimizar } w = \mathbf{Y}\mathbf{b}$$

sujeto a

$$\mathbf{YA} \geq \mathbf{C}$$

\mathbf{Y} no restringida

Algunas de las restricciones en $\mathbf{YA} \geq \mathbf{C}$ pueden invalidar la \mathbf{Y} no restringida, como se explicó en los ejemplos de la sección 4.1, capítulo 4.

7.4.2 Solución dual óptima

En esta sección se establecen relaciones entre los problemas primales y duales, y se muestra cómo puede determinarse la solución dual óptima a partir de la solución primal óptima. Sea \mathbf{B} la base primal óptima actual, y defina a \mathbf{C}_B como los coeficientes de la función objetivo asociados con el vector óptimo \mathbf{X}_B .

Teorema 7.4-1 (Teoría de la dualidad débil). *Para cualquier par factible de soluciones primal y dual, (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) , el valor de la función objetivo en el problema de minimización establece una cota superior sobre el valor de la función objetivo en el problema de maximización. Para el par óptimo $(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$, son iguales los dos valores objetivo.*

Comprobación. El par factible (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) satisface todas las restricciones de los dos problemas. Al premultiplicar ambos lados de las restricciones del problema de maximización por \mathbf{Y} (no restringida), se obtiene

$$\mathbf{YAX} = \mathbf{Yb} = w \quad (1)$$

Además, para el problema de minimización, al postmultiplicar ambos lados de cada uno de los primeros dos conjuntos de restricciones por \mathbf{X} (≥ 0), se obtiene

$$\mathbf{YAX} \geq \mathbf{CX} = z \quad (2)$$

Por lo tanto, de acuerdo con (1) y (2), $z \leq w$ para cualquier par *factible* (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) .

Observe que el requisito de factibilidad de \mathbf{X} y \mathbf{Y} está implicado por $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ en (1), y $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{YA} \geq \mathbf{C}$ en (2). Asimismo, la designación de los problemas como primales o duales es irrelevante. Lo importante es el sentido de optimización en cada problema; es decir que, para cualquier par de soluciones factibles, el valor objetivo en el problema de maximización no excede el valor objetivo en el problema de minimización.

La implicación del teorema es que, dada $z \leq w$ para cualquier par de soluciones factibles, el máximo de z y el mínimo de w se alcanzan cuando los dos valores objetivo son iguales. Una consecuencia de este resultado es que la “bondad” de cualesquiera soluciones primal y dual respecto del óptimo se verifica comparando la diferencia $(w - z)$ con $\frac{z + w}{2}$. Cuanto menor sea la relación $\frac{2(w - z)}{z + w}$, más cercanas estarán las dos soluciones de ser óptimas. La *regla empírica* dada *no* indica que el valor objetivo óptimo sea $\frac{z + w}{2}$.

No acotamiento y no factibilidad. Si el valor objetivo de uno de los dos problemas no está acotado, entonces el otro problema debe ser no factible. Si no lo está, entonces ambos problemas tienen soluciones factibles, y tiene que mantenerse la relación $z \leq w$ —lo cual es un resultado imposible debido a que valor objetivo no acotado significa $z = +\infty$ o bien $w = -\infty$.

Si un problema es no factible, entonces el otro también puede ser no factible, como lo demuestra el siguiente ejemplo (¡verifíquelo gráficamente!):

Primal. Maximizar $z = \{x_1 + x_2 \mid x_1 - x_2 \leq -1, -x_1 + x_2 \leq -1, x_1, x_2 \geq 0\}$

Dual. Minimizar $w = \{-y_1 - y_2 \mid y_1 - y_2 \geq 1, -y_1 + y_2 \geq 1, y_1, y_2 \geq 0\}$

Teorema 7.4-2 *Dada la base primal óptima \mathbf{B} y su vector de coeficientes objetivos asociado \mathbf{C}_B , la solución óptima del problema dual es*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1}$$

Comprobación. La comprobación se basa en demostrar que $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1}$ es una solución dual factible y que, de acuerdo con el teorema 7.4-1, $z = w$.

La factibilidad de $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1}$ está garantizada por la optimalidad del primal, $z_j - c_j \geq 0$ para todas las j , es decir,

$$\mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{C} \geq \mathbf{0}$$

(Vea la sección 7.2.1.) Por lo tanto, $\mathbf{Y}\mathbf{A} - \mathbf{C} \geq \mathbf{0}$, lo que demuestra que $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1}$ satisface las restricciones duales $\mathbf{Y}\mathbf{A} \geq \mathbf{C}$.

En seguida se demuestra que $w = z$ al observar que

$$w = \mathbf{Y}\mathbf{b} = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (1)$$

De manera similar, dada la solución primal $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, se obtiene

$$z = \mathbf{C}_B \mathbf{X}_B = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (2)$$

Las variables duales $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1}$ se conocen por los nombres estándar **duales** o **precios sombra** (vea la sección 4.3.1).

Motivación para el algoritmo simplex dual. Dado que \mathbf{P}_j es la j -ésima columna de \mathbf{A} , de acuerdo con el teorema 7.4-2 se observa que $z_j - c_j = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j - c_j = \mathbf{Y} \mathbf{P}_j - c_j$ representa la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de las restricciones duales. El problema primal de maximización inicia con $z_j - c_j < 0$ al menos para una j , lo que significa que la restricción dual correspondiente, $\mathbf{Y} \mathbf{P}_j \geq c_j$, no se satisface. Cuando se alcanza la primal óptima, se tiene $z_j - c_j \geq 0$, para todas las j , lo que genera la solución dual $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1}$ factible. Así, mientras el problema primal busca la optimalidad, el problema dual busca la factibilidad. Este punto es la base para el desarrollo del método simplex dual (sección 4.4.1), donde las iteraciones inician (mejor que) óptimas y no factibles, y permanecen así hasta que se alcanza la factibilidad en la última iteración. Esto contrasta con el método simplex (primal) (capítulo 3), que permanece peor que óptimo pero factible hasta que se alcanza la iteración óptima.

Ejemplo 7.4-1

La base óptima para la siguiente PL es $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4)$. Escriba el dual y encuentre la solución óptima utilizando la base primal óptima.

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

El problema dual es

$$\text{Minimizar } w = 5y_1 + 2y_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &\geq 3 \\ 2y_1 + 3y_2 &\geq 5 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Se tiene $\mathbf{X}_B = (x_1, x_4)^T$ y $\mathbf{C}_B = (3, 0)$. La base óptima y su inversa son

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores primal y dual asociados son

$$(x_1, x_4)^T = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = (5, 7)^T$$

$$(y_1, y_2) = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} = (3, 0)$$

Ambas soluciones son factibles y $z = w = 15$ (¡verifíquelo!). Por consiguiente, las dos soluciones son óptimas.

7.5 PROGRAMACIÓN LINEAL PARAMÉTRICA

La programación lineal paramétrica es una extensión del análisis postóptimo presentado en la sección 4.5, e investiga el efecto de las variaciones continuas *predeterminadas* en los coeficientes de la función objetivo y el lado derecho de las restricciones en la solución óptima.

Sea $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y defina la PL como

$$\text{Maximizar } z = \left\{ \mathbf{C}\mathbf{X} \mid \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \right\}$$

En el análisis paramétrico, la función objetivo y los vectores del lado derecho, \mathbf{C} y \mathbf{b} , se reemplazan con las funciones parametrizadas $\mathbf{C}(t)$ y $\mathbf{b}(t)$, donde t es el parámetro de variación. Matemáticamente, t puede asumir cualquier valor positivo o negativo. En esta presentación se supondrá que $t \geq 0$.

La idea general del análisis paramétrico es iniciar con la solución óptima en $t = 0$. Luego, utilizando las condiciones de optimalidad y factibilidad del método simplex, se determinará el intervalo $0 \leq t \leq t_1$ donde la solución en $t = 0$ permanece óptima y factible. En este caso, t_1 se conoce como **valor crítico**. El proceso continúa determinando valores críticos sucesivos y sus soluciones factibles óptimas correspondientes. El análisis postóptimo termina cuando, sin importar el valor de t , la última solución no cambia o hay indicación de que no existe una solución factible.

7.5.1 Cambios paramétricos en \mathbf{C}

Sean \mathbf{X}_{B_i} , \mathbf{B}_i , $\mathbf{C}_{B_i}(t)$ los elementos que definen la solución óptima asociada con t_i crítica (los cálculos inician en $t_0 = 0$, con \mathbf{B}_0 como su base óptima). Luego se determinan el valor crítico t_{i+1} y su base óptima, si existe una. Como los cambios en \mathbf{C} pueden afectar sólo la optimalidad del problema, la solución actual $\mathbf{X}_{B_i} = \mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{b}$ permanecerá óptima para algunos $t \geq t_i$ en tanto el costo reducido, $z_j(t) - c_j(t)$, satisfaga la siguiente condición de optimalidad:

$$z_j(t) - c_j(t) = \mathbf{C}_{B_i}(t)\mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{P}_j - c_j(t) \geq 0 \text{ para todas las } j$$

El valor de t_{i+1} es igual al mayor $t > t_i$ que satisfaga todas las condiciones de optimalidad.

Observe que *nada* en las desigualdades requiere que $\mathbf{C}(t)$ sea lineal en t . Es aceptable cualquier función $\mathbf{C}(t)$, lineal o no lineal. Sin embargo, con la no linealidad, la manipulación numérica de las desigualdades resultantes suele ser tediosa (vea una ilustración del caso no lineal en el problema 7-53).

Ejemplo 7.5-1

$$\text{Maximizar } z = (3 - 6t)x_1 + (2 - 2t)x_2 + (5 + 5t)x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 60$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Se tiene

$$\mathbf{C}(t) = (3 - 6t, 2 - 2t, 5 + 5t), t \geq 0$$

Las variables x_4, x_5 y x_6 se utilizarán como variables de holgura asociadas con las tres restricciones.

Solución óptima en $t = t_0 = 0$

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	160
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	5
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	30
x_6	2	0	0	-2	1	1	10

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_2, x_3, x_6)^T = (5, 30, 10)^T$$

$$\mathbf{C}_{B_0}(t) = (2 - 2t, 5 + 5t, 0)$$

$$\mathbf{B}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las condiciones de optimalidad para los vectores no básicos actuales $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4$ y \mathbf{P}_5 , son

$$\{\mathbf{C}_{B_0}(t)\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{P}_j - c_j(t)\}_{j=1,4,5} = (4 + 14t, 1 - t, 2 + 3t) \geq 0$$

Por lo tanto, \mathbf{X}_{B_0} permanece óptima con $t \leq t_1$, donde t_1 se determina a partir de las condiciones de optimalidad como

$$\left. \begin{array}{l} 4 + 14t \geq 0 \\ 1 - t \geq 0 \\ 2 + 3t \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow t_1 = 1$$

El costo reducido $z_4(t) - c_4(t) = 1 - t$ es igual a cero en $t = 1$ y se vuelve negativo para $t > 1$. Así, \mathbf{P}_4 debe entrar a la base para $t > 1$. En este caso, \mathbf{P}_2 debe salir de la base (vea la tabla óptima en $t = 0$). La nueva solución básica \mathbf{X}_{B_1} es la solución alternativa obtenida en $t = 1$ al dejar que \mathbf{P}_4 entre a la base, es decir, $\mathbf{X}_{B_1} = (x_4, x_3, x_6)^T$ y $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_6)$.

Base óptima alternativa en $t = t_1 = 1$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{B_1} &= (x_4, x_3, x_6)^T = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} = (10, 30, 30)^T \\ \mathbf{C}_{B_1}(t) &= (0, 5 + 5t, 0)\end{aligned}$$

Los vectores no básicos asociados son \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 y \mathbf{P}_5 , y se tiene

$$\left\{ \mathbf{C}_{B_1}(t)\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{P}_j - c_j(t) \right\}_{j=1,2,5} = \left(\frac{9 + 27t}{2}, -2 + 2t, \frac{5 + 5t}{2} \right) \geq \mathbf{0}$$

De acuerdo con estas condiciones, la solución básica \mathbf{X}_{B_1} permanece óptima para todas las $t \geq 1$. Observe que la condición de optimalidad, $-2 + 2t \geq 0$, “recuerda” de manera automática que \mathbf{X}_{B_1} es óptima dentro de un intervalo de t que inicia a partir del último valor crítico $t_1 = 1$. Esto será siempre así en cálculos de programación paramétrica.

La solución óptima para todo el intervalo de t se resume en la siguiente tabla (el valor de z se calcula mediante sustitución directa):

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \leq t \leq 1$	0	5	30	$160 + 140t$
$t \geq 1$	0	0	30	$150 + 150t$

7.5.2 Cambios paramétricos en \mathbf{b}

El lado derecho parametrizado $\mathbf{b}(t)$ puede afectar sólo la factibilidad del problema. Por lo tanto, los valores críticos de t se determinan a partir de la condición

$$\mathbf{X}_B(t) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}(t) \geq \mathbf{0}$$

Ejemplo 7.5-2

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40 - t$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 60 + 2t$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 30 - 7t$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Suponga que $t \geq 0$.

En $t = t_0 = 0$, el problema es idéntico al del ejemplo 7.5-1. Por consiguiente, se tiene

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_2, x_3, x_6)^T = (5, 30, 10)^T$$

$$\mathbf{B}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para determinar el primer valor crítico t_1 , se aplican las condiciones de factibilidad $\mathbf{X}_{B_0}(t) = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{b}(t) \geq \mathbf{0}$, que resultan en

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - t \\ 30 + t \\ 10 - 3t \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{10}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{10}{3}$$

La base \mathbf{B}_0 permanece factible en el intervalo $0 \leq t \leq \frac{10}{3}$. Sin embargo, los valores de las variables básicas, x_2 , x_3 y x_6 cambian con t .

El valor de la variable básica x_6 ($= 10 - 3t$) es igual a cero en $t = t_1 = \frac{10}{3}$, y se volverá negativa para $t > \frac{10}{3}$. Así, en $t > \frac{10}{3}$ es posible determinar la base alternativa \mathbf{B}_1 aplicando el método simplex dual revisado (para mayores detalles vea el problema 7-31). La variable de salida es x_6 .

Base alternativa en $t = t_1 = \frac{10}{3}$

Dado que x_6 es la variable de salida, se determina la variable de entrada como sigue:

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_2, x_3, x_6)^T, \mathbf{C}_{B_0} = (2, 5, 0)$$

Por lo tanto,

$$\{z_j - c_j\}_{j=1,4,5} = \{\mathbf{C}_{B_0}\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{P}_j - c_j\}_{j=1,4,5} = (4, 1, 2)$$

En seguida, para x_j no básica, $j = 1, 4, 5$, se calcula

$$\begin{aligned} (\text{Fila de } \mathbf{B}_0^{-1} \text{ asociada con } x_6)(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) &= (\text{Tercera fila de } \mathbf{B}_0^{-1})(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) \\ &= (-2, 1, 1)(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) \\ &= (2, -2, 1) \end{aligned}$$

Entonces, la variable de entrada está asociada con

$$\theta = \min\left\{-, \left| \frac{1}{-2} \right|, -\right\} = \frac{1}{2}$$

Así que \mathbf{P}_4 es el vector de entrada. La solución básica alternativa y sus \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_1^{-1} son

$$\mathbf{X}_{B_1} = (x_2, x_3, x_4)^T$$

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

El siguiente valor crítico t_2 se determina a partir de las condiciones de factibilidad, $\mathbf{X}_{B_1}(t) = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}(t) \geq 0$, que resultan en

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30 - 7t}{4} \\ 30 + t \\ \frac{-10 + 3t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{10}{3} \leq t \leq \frac{30}{7} \Rightarrow t_2 = \frac{30}{7}$$

En $t = t_2 = \frac{30}{7}$, se obtiene una base alternativa mediante el método simplex dual revisado. La variable de salida es x_2 porque corresponde a la condición que resulta en el valor crítico t_2 .

Base alternativa en $t = t_2 = \frac{30}{7}$

Dado que x_2 es la variable de salida, la variable de entrada se determina como sigue:

$$\mathbf{X}_{B_1} = (x_2, x_3, x_4)^T, \mathbf{C}_{B_1} = (2, 5, 0)$$

Entonces,

$$\{z_j - c_j\}_{j=1,5,6} = \{\mathbf{C}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{P}_j - c_j\}_{j=1,5,6} = (5, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$$

En seguida, para x_j no básica, $j = 1, 5$ y 6 , se calcula

$$\begin{aligned} (\text{Fila de } \mathbf{B}_1^{-1} \text{ asociada con } x_2)(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6) &= (\text{Primera fila de } \mathbf{B}_1^{-1})(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6) \\ &= (0, 0, \frac{1}{4})(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6) \\ &= (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

Como todos los elementos del denominador, $(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4})$, son ≥ 0 , el problema no tiene una solución factible para $t > \frac{30}{7}$, y el análisis paramétrico termina en $t = t_2 = \frac{30}{7}$.

La solución óptima se resume como

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \leq t \leq \frac{10}{3}$	0	$5 - t$	$30 + t$	$160 + 3t$
$\frac{10}{3} \leq t \leq \frac{30}{7}$	0	$\frac{30 - 7t}{4}$	$30 + t$	$165 + \frac{3}{2}t$
$t > \frac{30}{7}$	(No existe solución factible)			

7.6 MÁS TEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

La siguiente lista proporciona más temas de PL (por lo general, desarrollados en cursos de IO especializados).

1. Problema de flujo capacitado de costo mínimo, incluida la formulación de PL y el modelo del algoritmo simplex de red capacitada.
2. Algoritmo de descomposición de Danzig-Wolfe.
3. Algoritmo de punto interior de Karmarkar.

BIBLIOGRAFÍA

- Bazaraa, M., J. Jarvis y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.
- Chvátal, V., *Linear Programming*, Freeman, San Francisco, 1983.
- Nering, E. y A. Tucker, *Linear Programming and Related Problems*, Academic Press, Boston, 1992.
- Saigal, R., *Linear Programming: A Modern Integrated Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1995.
- Vanderbei, R., *Linear Programming: Foundation and Extensions*, 3a. ed., Springer, Nueva York, 2008.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados	Sección	Problemas asignados
7.1.1	7-1 a 7-8	7.4.1	7-40 a 7-41
7.1.2	7-9 a 7-13	7.4.2	7-42 a 7-48
7.2.1	7-14 a 7-26	7.5.1	7-49 a 7-53
7.2.2	7-27 a 7-31	7.5.2	7-54 a 7-57
7.3	7-32 a 7-39		

- 7-1.** Compruebe que el conjunto $Q = \{x_1, x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ es convexo. ¿Es esencial la condición de no negatividad para la comprobación?
- ***7-2.** Muestre que el conjunto $Q = \{x_1, x_2 \mid x_1 \geq 1 \text{ o } x_2 \geq 2\}$ no es convexo.
- 7-3.** Determine gráficamente los puntos extremos (o vértices) del siguiente conjunto convexo:

$$Q = \{x_1, x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

Muestre que el espacio de soluciones factibles completo puede determinarse como una combinación convexa de sus puntos extremos. Por consiguiente, se concluye que cualquier espacio de soluciones convexo (acotado) está totalmente definido una vez que se conocen sus puntos extremos.

- 7-4.** En el espacio de soluciones de la figura 7.3 (trazada a escala), exprese el punto interior $(3, 1)$ como una combinación convexa de los puntos extremos A, B, C y D mediante la determinación de los pesos asociados con los puntos extremos.

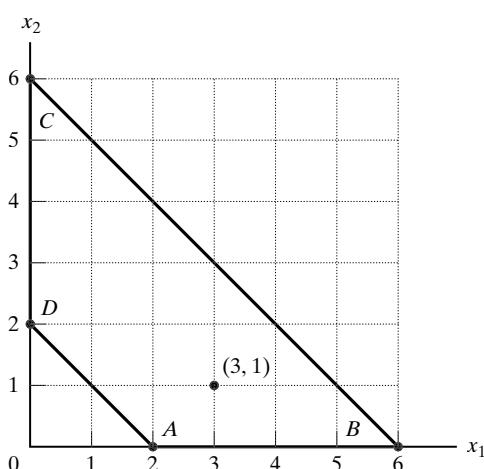


FIGURA 7.3
Espacio de soluciones para el problema 7-4

- 7-5.** En los siguientes conjuntos de ecuaciones, (a) y (b) tienen soluciones (básicas) únicas, (c) tiene una cantidad infinita de soluciones y (d) no tiene solución. Muestre que estos resultados pueden verificarse mediante una representación vectorial gráfica. A partir de este ejercicio, establezca las condiciones generales para la dependencia o independencia vectorial que

(a) $x_1 + 3x_2 = 2$
 $3x_1 + x_2 = 3$

(b) $2x_1 + 3x_2 = 1$
 $2x_1 - x_2 = 2$

(c) $2x_1 + 6x_2 = 4$
 $x_1 + 3x_2 = 2$

(d) $2x_1 - 4x_2 = 2$
 $-x_1 + 2x_2 = 1$

- 7-6.** Use vectores para determinar gráficamente el tipo de solución de cada uno de los siguientes conjuntos de ecuaciones: solución única, una cantidad infinita de soluciones o ninguna solución. Para los casos de soluciones únicas, indique a partir de la representación vectorial (y sin resolver algebraicamente las ecuaciones) si los valores de x_1 y x_2 son positivos, cero o negativos.

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

*(b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

*(d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

*(f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 7-7.** Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}x_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}x_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determine si cualquiera de las siguientes combinaciones forma una base.

- *(a) $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$
(b) $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4)$
(c) $(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$
*(d) $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$

- 7-8.** ¿Verdadero o falso?

- (a) El sistema $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única si \mathbf{B} es no singular.
(b) El sistema $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución, si \mathbf{B} es singular y \mathbf{b} es independiente de \mathbf{B} .
(c) El sistema $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una cantidad infinita de soluciones, si \mathbf{B} es singular y \mathbf{b} es dependiente.

- ***7-9.** En el ejemplo 7.1-3, considere $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$. Muestre que la solución básica correspondiente es factible y después genere la tabla simplex correspondiente.

- 7-10.** Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Verifique si cada una de las siguientes matrices forma una base (factible o no factible): $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, $(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$, $(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$.

7-11. En el siguiente PL, calcule la tabla simplex completa asociada con la solución básica $\mathbf{X}_B = (x_1, x_2, x_5)^T$:

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

***7-12.** La siguiente es una tabla de PL óptima:

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	0	0	3	2	?
x_3	0	0	1	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	0	6
x_1	1	0	0	-1	1	2

Las variables x_3, x_4 y x_5 son holguras en el problema original. Use manipulaciones matriciales para reconstruir el PL original y después calcule el valor objetivo óptimo.

7-13. En la tabla simplex matricial, suponga que $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_I, \mathbf{X}_{II})^T$, donde \mathbf{X}_{II} corresponde a una solución básica *inicial típica* (compuesta de variables de holgura y/o artificiales) con $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, y sean $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_I, \mathbf{C}_{II})$ y $\mathbf{A} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ las particiones correspondientes de \mathbf{C} y \mathbf{A} , respectivamente. Muestre que la tabla simplex matricial se reduce a la misma forma utilizada en el capítulo 3, a saber,

Básicas	\mathbf{X}_I	\mathbf{X}_{II}	Solución
z	$\mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} - \mathbf{C}_I$	$\mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{C}_{II}$	$\mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
\mathbf{X}_B	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}$	\mathbf{B}^{-1}	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

***7-14.** Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4$$

sujeto a

$$\mathbf{P}_1 x_1 + \mathbf{P}_2 x_2 + \mathbf{P}_3 x_3 + \mathbf{P}_4 x_4 = \mathbf{b}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Los vectores $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ y \mathbf{P}_4 se muestran en la figura 7.4. Suponga que la base \mathbf{B} de la iteración actual se compone de \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 .

(a) Si el vector \mathbf{P}_3 entra a la base, ¿cuál de los dos vectores básicos actuales debe salir para que la solución básica resultante sea factible?

(b) ¿Puede el vector \mathbf{P}_4 ser parte de una base factible?

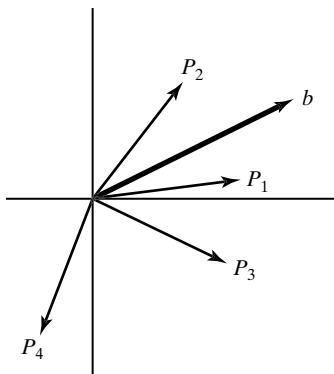


FIGURA 7.4
Representación vectorial del problema 7-14

- *7-15. Compruebe que, en cualquier iteración simplex, $z_j - c_j = 0$ para todas las variables *básicas* asociadas.
- 7-16. Compruebe que si $z_j - c_j > 0$ (< 0) para todas las variables no básicas x_j de un problema de PL de maximización (minimización), entonces la solución óptima es única. En caso contrario, si $z_j - c_j$ es igual a cero para una x_j no básica, entonces el problema tiene una solución óptima alternativa.
- 7-17. En una solución básica inicial con holguras (totales) demuestre, utilizando la forma matricial de la tabla, que el procedimiento mecánico usado en la sección 3.3, donde la ecuación objetivo se estableció como $z - \sum_{j=1}^n c_j x_j = 0$, calcula automáticamente la condición $z_j - c_j$ para todas las variables en la tabla inicial.
- 7-18. Use la forma matricial de la tabla simplex para demostrar que, en una solución básica inicial totalmente artificial, el procedimiento de la sección 3.4.1 que sustituye las variables artificiales en la función objetivo (por medio de ecuaciones de restricción), en realidad calcula la $z_j - c_j$ para todas las variables en la tabla inicial.
- 7-19. Considere un PL donde la variable x_k no tiene restricción de signo. Compruebe que al sustituir $x_k = x_k^- - x_k^+$, donde x_k^- y x_k^+ son no negativas, es imposible que las dos variables se reemplacen entre sí en una solución óptima alternativa.
- *7-20. Dado el problema lineal en forma de ecuación con m ecuaciones y n incógnitas, determine la cantidad máxima de puntos extremos *adyacentes* a los que se puede llegar desde un punto extremo no degenerado (todas las variables básicas son > 0) del espacio de soluciones.
- 7-21. Al aplicar la condición de factibilidad del método simplex, suponga que $x_r = 0$ es una variable básica y que x_j es la variable de entrada con $(B^{-1}P_j)_r \neq 0$. Demuestre que la solución básica resultante permanece factible aun cuando $(B^{-1}P_j)_r$ sea negativa.
- 7-22. En la implementación de la condición de factibilidad del método simplex, ¿se especifican las condiciones matemáticas para encontrar una solución degenerada (al menos una variable básica = 0) por primera vez? ¿Para seguir obteniendo una solución degenerada en la siguiente iteración? ¿Para eliminar la degeneración en la siguiente iteración?
- *7-23. ¿Cuáles son las relaciones entre los puntos extremos y las soluciones básicas en las situaciones de degeneración y no degeneración? ¿Cuál es la cantidad máxima de iteraciones que pueden realizarse en un punto extremo dado suponiendo que no hay ciclado?

*7-24. Considere el PL, maximizar $z = \mathbf{C}\mathbf{X}$ sujeto a $\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, donde $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Suponga que el vector de entrada \mathbf{P}_j es tal que por lo menos un elemento de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$ es positivo.

- (a) Si \mathbf{P}_j se reemplaza con $\alpha\mathbf{P}_j$, donde α es un escalar positivo, y siempre que x_j permanezca como la variable de entrada, encuentre la relación entre los valores de x_j correspondientes a \mathbf{P}_j y $\alpha\mathbf{P}_j$.
- (b) Responda el inciso (a) si, adicionalmente, \mathbf{b} se reemplaza con $\beta\mathbf{b}$, donde β es un escalar positivo.

7-25. Considere el PL

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{C}\mathbf{X} \text{ sujeto a } \mathbf{AX} \leq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \text{ donde } \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

Después de obtener la solución óptima, se sugiere que una variable no básica x_j puede hacerse básica (rentable) al reducir los requisitos de recursos por unidad de x_j a $\frac{1}{\alpha}$ desde sus valores originales, $\alpha > 1$. Como se reducen los requisitos por unidad, se espera que la utilidad por unidad de x_j también disminuya a $\frac{1}{\alpha}$ de su valor original. ¿Harán estos cambios que x_j se vuelva una variable rentable? Explíquelo matemáticamente.

7-26. Considere la PL

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{C}\mathbf{X} \text{ sujeto a } (\mathbf{A}, \mathbf{I}) \mathbf{X} = \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Defina \mathbf{X}_B como el vector básico actual con \mathbf{B} como su base asociada y \mathbf{C}_B como su vector de coeficientes objetivos. Demuestre que si \mathbf{C}_B se reemplaza con los nuevos coeficientes de \mathbf{D}_B , los valores de $z_j - c_j$ para el vector básico \mathbf{X}_B permanecerán iguales a cero. ¿Cuál es la importancia de este resultado?

7-27. En el ejemplo 7.2-1, resuma los datos de la iteración 1 en el formato de tabla de la sección 3.3.

7-28. Resuelva los siguientes PL con el método simplex revisado:

- (a) Maximizar $z = 6x_1 - 2x_2 + 3x_3$
sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 2 \\ x_1 &+ 4x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- *(b) Maximizar $z = 2x_1 + x_2 + 2x_3$
sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 &\leq 12 \\ 4x_1 + x_2 + 12x_3 &\leq 8 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (c) Minimizar $z = 2x_1 + x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (d) Minimizar $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 8x_4$
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 &\leq 46 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &\geq 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

- 7-29.** Resuelva el siguiente PL usando el método simplex revisado, a partir del vector factible básico inicial $\mathbf{X}_{B_0} = (x_2, x_4, x_5)^T$:

$$\text{Minimizar } z = 7x_2 + 11x_3 - 10x_4 + 26x_6$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 + x_5 + x_6 &= 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 + 3x_6 &= 8 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

- 7-30.** Resuelva lo siguiente utilizando el método simplex revisado de dos fases:

- (a) Problema 7-28(c).
- (b) Problema 7-28(d).
- (c) Problema 7-29 (no tome en cuenta la \mathbf{X}_{B_0} inicial dada).

- 7-31.** *Método simplex dual revisado.* Los pasos del método simplex dual revisado (utilizando manipulaciones matriciales) se resumen de la manera siguiente:

Paso 0. Sea $\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}$ la base inicial donde al menos uno de los elementos de \mathbf{X}_{B_0} es negativo (no factible).

Paso 1. Calcule $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, los valores actuales de las variables básicas. Seleccione la variable de salida x_r como la que tiene el valor más negativo. Si todos los elementos de \mathbf{X}_B son no negativos, deténgase; la solución actual es factible (y óptima).

Paso 2. (a) Calcule $z_j - c_j = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j - c_j$ para todas las variables no básicas x_j .
(b) Para todas las variables no básicas x_j , calcule los coeficientes de restricción $(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_r$ asociados con la fila de la variable de salida x_r .
(c) La variable de entrada está asociada con

$$\theta = \min_i \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_r} \right|, (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_r < 0 \right\}$$

Si todas las $(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_r \geq 0$, hay una solución no factible.

Paso 3. Obtenga la nueva base intercambiando los vectores de entrada y de salida (\mathbf{P}_j y \mathbf{P}_r). Calcule la nueva inversa y vaya al paso 1.

Aplique el método al siguiente problema:

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- 7-32.** Considere el siguiente programa lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2$$

- (a) Resuelva el problema gráficamente y trace la secuencia de puntos extremos que conduce a la solución óptima. (Puede utilizar TORA).
- (b) Resuelva el problema mediante el algoritmo de acotamiento superior y demuestre que el método produce la misma secuencia de puntos extremos que en la solución óptima gráfica (puede utilizar TORA para generar las iteraciones).
- (c) ¿Cómo el algoritmo de acotamiento superior reconoce los puntos extremos?

*7-33. Resuelva el siguiente problema mediante el algoritmo de acotamiento:

$$\text{Maximizar } z = 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 10x_6$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 &\leq 13 \\ 0 \leq x_j &\leq 1, j = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned}$$

7-34. Resuelva los siguientes problemas mediante el algoritmo de acotamiento:

- (a) Minimizar $z = 6x_1 - 2x_2 - 3x_3$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\leq 7 \\ 0 \leq x_1 &\leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 1 \end{aligned}$$

- (b) Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\leq 15 \\ 0 \leq x_1 &\leq 4, 0 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 3 \end{aligned}$$

7-35. En los siguientes problemas, algunas de las variables tienen cotas inferiores positivas. Use el algoritmo de acotamiento para resolver estos problemas.

- (a) Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 3 \\ 1 \leq x_1 &\leq 3, 0 \leq x_2 \leq 3, 2 \leq x_3 \end{aligned}$$

- (b) Maximizar $z = x_1 + 2x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\geq 0 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 1 \leq x_1 &\leq 3, 0 \leq x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

- (c)** Maximizar $z = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3$
sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &\leq 9 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 12 \\ 1 \leq x_1 &\leq 3, 0 \leq x_2 \leq 5, 0 \leq x_3 \leq 2 \end{aligned}$$

- 7-36.** Considere la definición de matriz del problema de variables acotadas. Suponga que el vector \mathbf{X} se partitiona en $(\mathbf{X}_z, \mathbf{X}_u)$, donde \mathbf{X}_u representa las variables básicas y no básicas que serán sustituidas en la cota superior durante el curso del algoritmo. El problema puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C}_z & -\mathbf{C}_u \\ 0 & \mathbf{D}_z & \mathbf{D}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X}_z \\ \mathbf{X}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Si se usa $\mathbf{X}_u = \mathbf{U}_u - \mathbf{X}'_u$, donde \mathbf{U}_u es un subconjunto de \mathbf{U} que representa las cotas superiores de \mathbf{X}_u , sea \mathbf{B} (y \mathbf{X}_B) la base de la iteración simplex actual después de haber sustituido \mathbf{X}_u . Muestre que la tabla simplex general asociada se da como

Básicas	\mathbf{X}_z^T	\mathbf{X}'_u^T	Solución
z	$\mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}_z - \mathbf{C}_z$	$-\mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}_u + \mathbf{C}_u$	$\mathbf{C}_u \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{D}_u \mathbf{U}_u) + \mathbf{C}_u \mathbf{U}_u$
\mathbf{X}_B	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}_z$	$-\mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}_u$	$\mathbf{B}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{D}_u \mathbf{U}_u)$

- 7-37.** En el ejemplo 7.3-1, haga lo siguiente:

- (a) En la iteración 1, verifique que $\mathbf{X}_B = (x_4, x_1)^T = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})^T$ mediante manipulaciones matriciales.
(b) En la iteración 2, muestre cómo puede calcularse \mathbf{B}^{-1} a partir de los datos originales del problema. Después verifique los valores dados de la x_4 básica y x'_2 mediante manipulaciones matriciales.
- 7-38.** Resuelva el inciso (a) del problema 7-34 mediante la versión (matricial) simplex revisada para variables con cotas superiores.
- 7-39.** *Algoritmo simplex dual de acotamiento.* El algoritmo simplex dual (sección 4.4.1) se puede modificar para que acepte las variables acotadas como sigue. Dada la restricción de cota superior $x_j \leq u_j$ para toda j (si u_j es infinita, reemplácela con una cota superior M suficientemente grande), el problema de PL se transforma en una forma factible dual (es decir, primal óptima) al utilizar la sustitución $x_j = u_j - x'_j$, donde sea necesario.
- Paso 1.** Si cualquiera de las variables básicas actuales $(\mathbf{X}_B)_i$ excede su cota superior, use la sustitución $(\mathbf{X}_B)_i = (\mathbf{U}_B)_i - (\mathbf{X}_B)'_i$. Vaya al paso 2.
- Paso 2.** Si todas las variables básicas son factibles, deténgase. En caso contrario, seleccione la variable de salida x_r como la variable básica que tiene el valor más negativo. Vaya al paso 3.
- Paso 3.** Seleccione la variable de entrada utilizando la condición de optimalidad del método simplex dual regular (sección 4.4.1). Vaya al paso 4.
- Paso 4.** Realice un cambio de base. Vaya al paso 1.

Aplique el algoritmo dado a los siguientes problemas:

- (a) Minimizar $z = -3x_1 - 2x_2 + 2x_3$
sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 8 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 13 \\ 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 1 \end{aligned}$$

- (b) Maximizar $z = x_1 + 5x_2 - 2x_3$
sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 26 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\geq 17 \\ 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 3, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

7-40. Demuestre que el dual del dual es el primal.

*7-41. Defina el problema dual dado que el primal es $\min z = \{\mathbf{C}\mathbf{X} \mid \mathbf{AX} \geq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}\}$.

7-42. Verifique que el problema dual del ejemplo numérico dado al final del teorema 7.4-1 es correcto. Después verifique gráficamente que tanto el problema primal como el dual no tienen una solución factible.

7-43. Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 50x_1 + 30x_2 + 10x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_2 &= -5 \\ 4x_1 + x_3 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Escriba el dual.
(b) Muestre por inspección que el primal es no factible.
(c) Muestre que el dual en (a) es no acotado.
(d) A partir de los problemas 7-42 y 7-43, desarrolle una conclusión general respecto de la relación entre no factibilidad y no acotamiento en los problemas primales y duales.

7-44. Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Escriba el dual.
(b) En cada uno de los siguientes casos, primero compruebe que la base dada \mathbf{B} es factible para el primal. Luego use $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1}$ para calcular los valores duales asociados y verifique si la solución primal es óptima o no.
(i) $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_3)$ (ii) $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ (iii) $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ (iv) $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4)$

7-45. Considere el siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(a) Escriba el problema dual.

(b) Verifique que $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ es óptima mediante el cálculo de $z_j - c_j$ para todas las \mathbf{P}_j no básicas.

(c) Encuentre la solución dual óptima asociada.

***7-46.** Un modelo de PL incluye dos variables x_1 y x_2 , y tres restricciones del tipo \leq . Las holguras asociadas son x_3, x_4 y x_5 . Suponga que la base óptima es $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$, y su inversa es

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Las soluciones primal y dual óptimas son

$$\mathbf{X}_B = (x_1, x_2, x_3)^T = (2, 6, 2)^T$$

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3) = (0, 3, 2)$$

Determine el valor óptimo de la función objetivo de dos maneras, por medio de los problemas primal y dual.

***7-47.** Escriba el dual de $\max z = \{\mathbf{C}\mathbf{X} \mid \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}, \mathbf{X} \text{ no restringida}\}$

7-48. Muestre que el dual de $\max z = \{\mathbf{C}\mathbf{X} \mid \mathbf{A}\mathbf{X} \leq \mathbf{b}, \mathbf{0} < \mathbf{L} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{U}\}$ siempre posee una solución factible.

***7-49.** En el ejemplo 7.5-1, suponga que t no está restringida en cuanto al signo. Determine el intervalo de t para el que \mathbf{X}_{B_0} permanece óptima.

7-50. Resuelva el ejemplo 7.5-1, suponiendo que la función objetivo se da como

(a) Maximizar $z = (3 + 3t)x_1 + 2x_2 + (5 - 6t)x_3$

(b) Maximizar $z = (3 - 2t)x_1 + (2 + t)x_2 + (5 + 2t)x_3$

(c) Maximizar $z = (3 + t)x_1 + (2 + 2t)x_2 + (5 - t)x_3$

7-51. Estudie la variación de la solución óptima del siguiente PL parametrizado, dado que $t \geq 0$.

$$\text{Minimizar } z = (4 - t)x_1 + (1 - 3t)x_2 + (2 - 2t)x_3$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

7-52. El análisis en esta sección supone que la solución óptima del PL en $t = 0$ se obtiene con el método simplex (primal). En algunos problemas quizás sea más conveniente obtener la solución óptima mediante el método simplex dual (sección 4.4.1). Muestre cómo puede realizarse el análisis paramétrico en este caso, luego analice la PL del ejemplo 4.4-1, suponiendo que la función objetivo se da como

$$\text{Minimizar } z = (3 + t)x_1 + (2 + 4t)x_2 + x_3, t \geq 0$$

*7-53. En el ejemplo 7.5-1, suponga que la función objetivo es no lineal en t ($t \geq 0$) y que se define como

$$\text{Maximizar } z = (3 + 2t^2)x_1 + (2 - 2t^2)x_2 + (5 - t)x_3$$

Determine el primer valor crítico t_1 .

7-54. En el ejemplo 7.5-2, encuentre el primer valor crítico, t_1 , y defina los vectores de \mathbf{B}_1 en cada uno de los siguientes casos:

(a) $\mathbf{b}(t) = (40 + 2t, 60 - 3t, 30 + 6t)^T$

(b) $\mathbf{b}(t) = (40 - t, 60 + 2t, 30 - 5t)^T$

*7-55. Estudie las variaciones en la solución óptima del siguiente PL parametrizado, dada $t \geq 0$.

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2 + 2x_3$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 + 3t$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 6 + 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 4 - t$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

7-56. El análisis en esta sección supone que la solución óptima de la PL en $t = 0$ se obtiene mediante el método simplex (primal). En algunos problemas, sería más conveniente obtener la solución óptima con el método simplex dual (sección 4.4.1). Muestre cómo puede realizarse el análisis paramétrico en este caso, y después analice la PL del ejemplo 4.4-1, suponiendo que $t \geq 0$ y que el vector del lado derecho es

$$\mathbf{b}(t) = (3 + 2t, 6 - t, 3 - 4t)^T$$

7-57. Resuelva el problema 7-55 suponiendo que el lado derecho cambia a

$$\mathbf{b}(t) = (3 + 3t^2, 6 + 2t^2, 4 - t^2)^T$$

Asimismo, suponga que t puede ser positiva, cero o negativa.

CAPÍTULO 8

Programación de metas

Aplicación de la vida real: Asignación de tiempo de quirófano en el hospital Monte Sinai

La situación ocurre en Canadá, donde el seguro de asistencia médica es obligatorio y universal. El financiamiento, basado en una combinación de primas e impuestos, lo controlan individualmente las provincias. De acuerdo con tal sistema, a los hospitales se les asigna un presupuesto anual fijo, y cada provincia paga retrospectivamente a los médicos usando un mecanismo de financiamiento de pago por servicio. Este arreglo de financiamiento limita la disponibilidad de instalaciones hospitalarias (por ejemplo, quirófanos), lo que a su vez frena la tendencia de los médicos a elevar sus ganancias personales por una atención excesiva a sus pacientes. El objetivo del estudio es determinar un programa diario equitativo para el uso de los quirófanos disponibles. El problema se modela aplicando una combinación de programación de metas y entera. El caso al final del capítulo ofrece los detalles del estudio.

8.1 FORMULACIÓN DE UNA PROGRAMACIÓN DE METAS

La idea de la programación de metas (PM) se ilustra con el ejemplo 8.1-1.

Ejemplo 8.1-1 (Planeación de impuestos)¹

Fairville es una pequeña ciudad con una población de aproximadamente 20,000 habitantes. La base tributaria anual por el impuesto predial es de \$550 millones. Las recaudaciones anuales por alimentos y medicinas, así como por ventas generales, son de \$35 y \$55 millones, respectivamente. El consumo local anual de gasolina se estima en 7.5 millones de galones. El concejo municipal desea desarrollar las tasas tributarias con base en cuatro metas principales:

1. Los ingresos fiscales deben ser al menos de \$16 millones para satisfacer los compromisos financieros de la ciudad.
2. Los impuestos sobre alimentos y medicinas no tienen que exceder el 10% de todos los impuestos recaudados.

¹ Este ejemplo se basa en Chissman y colaboradores, 1989.

3. Los impuestos sobre las ventas generales no deben exceder 20% de todos los impuestos recaudados.
4. El impuesto sobre la gasolina no tiene que exceder 2 centavos por galón.

Sean las variables x_p , x_f y x_s las tasas de impuestos (expresadas como proporciones de las bases tributarias) sobre la propiedad, los alimentos y medicinas, y las ventas generales; asimismo, defina la variable x_g como el impuesto sobre la gasolina en centavos por galón. Así, las metas del concejo municipal se expresan como

$$\begin{aligned}
 550x_p + 35x_f + 55x_s + .075x_g &\geq 16 && \text{(Ingreso gravable)} \\
 35x_f &\leq .1(550x_p + 35x_f + 55x_s + .075x_g) && \text{(Impuestos a alimentos/medicinas)} \\
 55x_s &\leq .2(550x_p + 35x_f + 55x_s + .075x_g) && \text{(Impuesto general)} \\
 x_g &\leq 2 && \text{(Impuesto sobre la gasolina)} \\
 x_p, x_f, x_s, x_g &\geq 0
 \end{aligned}$$

Estas restricciones se simplifican como

$$\begin{aligned}
 550x_p + 35x_f + 55x_s + .075x_g &\geq 16 \\
 55x_p - 31.5x_f + 5.5x_s + .0075x_g &\geq 0 \\
 110x_p + 7x_f - 44x_s + .015x_g &\geq 0 \\
 x_g &\leq 2 \\
 x_p, x_f, x_s, x_g &\geq 0
 \end{aligned}$$

Cada una de las desigualdades del modelo representa una meta que el concejo municipal aspira a satisfacer. Sin embargo, es muy probable que lo mejor que se pueda hacer sea una solución compromiso que implique esas metas conflictivas.

La forma como la PM determina una solución compromiso es convertir cada desigualdad en una meta flexible, en la cual pueda transgredirse la restricción correspondiente, si es necesario. En términos del modelo de Fairville, las metas flexibles se expresan como sigue:

$$\begin{aligned}
 550x_p + 35x_f + 55x_s + .075x_g + s_1^- - s_1^+ &= 16 \\
 55x_p - 31.5x_f + 5.5x_s + .0075x_g + s_2^- - s_2^+ &= 0 \\
 110x_p + 7x_f - 44x_s + .015x_g + s_3^- - s_3^+ &= 0 \\
 x_g + s_4^- - s_4^+ &= 2 \\
 x_p, x_f, x_s, x_g &\geq 0 \\
 s_i^-, s_i^+ &\geq 0, i = 1, 2, 3, 4
 \end{aligned}$$

Las variables no negativas s_i^- y s_i^+ , $i = 1, 2, 3, 4$ son **variables de desviación** que representan las desviaciones por debajo y por encima del lado derecho de la restricción i .

Las variables de desviación s_i^- y s_i^+ son dependientes por definición y, por consiguiente, no pueden ser variables básicas al mismo tiempo (según la teoría del método simplex). Esto significa que en cualquier iteración simplex, no más de *una* de las dos variables de desviación puede asumir un valor positivo. Si la i -ésima desigualdad original es del tipo \leq y su $s_i^- \geq 0$, entonces se satisface la i -ésima meta; en caso contrario, no se satisface la meta i . En esencia, la definición de s_i^- y s_i^+ permite satisfacer o transgredir la i -ésima meta a voluntad. Se trata del tipo de

flexibilidad que caracteriza la PM cuando se busca una solución compromiso. Lógicamente, una buena solución compromiso busca minimizar la cantidad por la que se infringe cada meta.

En el modelo de Fairville, dado que las tres primeras restricciones son del tipo \geq y la cuarta es del tipo \leq , las variables de desviación s_1^-, s_2^-, s_3^- y s_4^+ (que en el modelo se muestran en negritas) representan las cantidades por las cuales se transgreden las metas respectivas. Por lo tanto, la solución compromiso busca satisfacer tanto como sea posible los siguientes cuatro objetivos:

$$\text{Minimizar } G_1 = s_1^-$$

$$\text{Minimizar } G_2 = s_2^-$$

$$\text{Minimizar } G_3 = s_3^-$$

$$\text{Minimizar } G_4 = s_4^+$$

Estas funciones se minimizan sujetas a las ecuaciones de restricción del modelo.

¿Cómo se optimiza un modelo de objetivos múltiples con metas conflictivas? Se han desarrollado dos métodos con tal propósito: (1) el método de los pesos y (2) el método preventivo. Ambos se basan en la conversión de los objetivos múltiples en una sola función. En la sección 8.2 se presentan los detalles.

8.2 ALGORITMOS DE PROGRAMACIÓN DE METAS

En esta sección se presentan dos algoritmos para resolver la programación de metas. Ambos métodos se basan en la representación de metas múltiples mediante una sola función objetivo. En el **método de los pesos**, la función objetivo única es la suma ponderada de las funciones que representan las metas del problema. El **método preventivo** inicia priorizando las metas por orden de importancia. Luego, el modelo optimiza las metas de una en una en el orden de prioridad, de modo que no degrada una solución de mayor prioridad.

Por lo general, los dos métodos propuestos no producen la misma solución. Sin embargo, ninguno de los métodos es superior al otro porque las dos técnicas asumen preferencias distintas en la toma de decisiones.

8.2.1 Método de los pesos

Suponga que el modelo de PM tiene n metas y que la i -ésima meta está dada como

$$\text{Minimizar } G_i, i = 1, 2, \dots, n$$

Entonces, la función objetivo combinada que se utiliza en el método de los pesos se define como

$$\text{Minimizar } z = w_1G_1 + w_2G_2 + \dots + w_nG_n$$

Los parámetros w_i , $i = 1, 2, \dots, n$ son pesos positivos que reflejan las preferencias de la toma de decisiones respecto de la importancia relativa de cada meta. Por ejemplo, $w_i = 1$, para todas las i , significa que todas las metas tienen la misma importancia. La determinación de los valores específicos de estos pesos es subjetiva. De hecho, los procedimientos analíticos aparentemente complejos, desarrollados en la literatura (vea, por ejemplo, Cohon, 1978) aún están arraigados en las evaluaciones subjetivas.

Ejemplo 8.2-1

TopAd es una nueva agencia de publicidad con 10 empleados, que fue contratada para promover un nuevo producto. La agencia puede hacer publicidad por radio y televisión. La siguiente tabla presenta la cantidad de personas alcanzadas diariamente por cada tipo de anuncio publicitario, y los requisitos de costos y mano de obra.

	Radio	Televisión
Exposición (en millones de personas)/min	4	8
Costo (en miles de dólares)/min	8	24
Empleados asignados/min	1	2

El contrato prohíbe a TopAd utilizar más de 6 minutos de publicidad por radio. Además, los anuncios de radio y televisión deben llegar al menos a 45 millones de personas. TopAd tiene una meta presupuestaria de \$100,000 para el proyecto. ¿Cuántos minutos de anuncios de radio y televisión debería utilizar TopAd?

Sean x_1 y x_2 los minutos asignados a los anuncio de radio y televisión. La formulación de PM para el problema se da como

$$\text{Minimizar } G_1 = s_1^- \text{ (Satisfacer la meta de exposición)}$$

$$\text{Minimizar } G_2 = s_2^+ \text{ (Satisfacer la meta presupuestaria)}$$

sujeto a

$$4x_1 + 8x_2 + s_1^- - s_1^+ = 45 \text{ (Meta de exposición)}$$

$$8x_1 + 24x_2 + s_2^- - s_2^+ = 100 \text{ (Meta presupuestaria)}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10 \text{ (Límite de personal)}$$

$$x_1 \leq 6 \text{ (Límite de radio)}$$

$$x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+ \geq 0$$

La gerencia de TopAd estima que la meta de exposición es dos veces más importante que la meta presupuestaria. Por lo tanto, la función objetivo combinada se convierte en

$$\text{Minimizar } z = 2G_1 + G_2 = 2s_1^- + s_2^+$$

La solución óptima es $z = 10$, $x_1 = 5$ minutos, $x_2 = 2.5$ minutos, $s_1^- = 5$ millones de personas, $s_1^+ = 0$ y $s_2^- = 0$.

El hecho de que el valor óptimo de z no sea cero indica que no se cumple al menos una de las metas. En específico, $s_1^- = 5$ significa que la meta de exposición (de al menos 45 millones de personas) falla por 5 millones de personas. Por el contrario, la meta de presupuesto (de no exceder \$100,000) no se transgrede porque $s_2^+ = 0$.

Momento, ¡ajá! “Satisficiente” contra máximo o cuánto tiempo añesar el vino

En su libro *Science of the Artificial*, el Premio Nobel estadounidense Herbert A. Simon (1916-2001) acuñó el término “satisficiente” (una combinación de *satisfactorio* y *suficiente*) como una meta alternativa a la *maximización* en la toma de decisiones. La diferencia se explica por el dilema de un ser inmortal (quien supuestamente

espera una vida eterna) en posesión de una botella de vino fino. El vino obtiene un mejor sabor con la edad y el ser inmortal debe decidir cuándo beberla. Con la visión *satisficiente* elegiría un tiempo futuro razonable para abrir la botella, pero con una de *maximización* diría “¡nunca!”.

Aunque la PM se presenta en el contexto de programas lineales optimizados, su resultado final busca una solución *satisfactoria* en vez de óptima. Esta conclusión se demuestra en el ejemplo 8.2-1, donde la solución de PM “óptima” produce $x_1 = 5$ minutos y $x_2 = 2.5$ minutos con una exposición de 40 millones de personas y un costo de \$100,000. Por el contrario, la solución factible $x_1 = 6$ minutos y $x_2 = 2$ minutos produce la misma exposición ($4 \times 6 + 8 \times 2 = 40$ millones de personas), pero cuesta menos ($8 \times 6 + 24 \times 2 = \$96,000$). En esencia, lo que la PM hace es encontrar una solución *satisfactoria* en vez de una solución óptima. La falla de no hallar la solución óptima genera dudas sobre la viabilidad de la PM como una técnica de optimización (vea el ejemplo 8.2-3 para un análisis más amplio).

8.2.2 Método preventivo

En el método preventivo, quien toma las decisiones clasifica las metas del problema en orden de importancia. Dada una situación de n metas, los objetivos del problema se escriben como

$$\text{Minimizar } G_1 = \rho_1 \text{ (Prioridad más alta)}$$

⋮

$$\text{Minimizar } G_n = \rho_n \text{ (Prioridad más baja)}$$

La variable ρ_i es el componente de las variables de desviación, s_i^- o s_i^+ , que representan la meta i . Por ejemplo, en el modelo de TopAd (ejemplo 8.2-1), $\rho_1 = s_1^-$ y $\rho_2 = s_1^+$.

El procedimiento de solución inicia con la optimización de la prioridad más alta, G_1 , y termina con la optimización de la prioridad más baja, G_n . El método preventivo está diseñado de modo que una *solución de menor prioridad nunca degrade a una solución de mayor prioridad*.

La literatura sobre PM presenta un método simplex “especial” que garantiza la no degradación de soluciones de alta prioridad. El método utiliza la **regla de eliminación de columnas** que exige eliminar una variable x_j *no básica* con un costo reducido diferente de cero ($z_j - c_j \neq 0$) de la tabla óptima de la meta G_k antes de resolver el problema de la meta G_{k+1} . La regla reconoce que tales variables no básicas, si se elevan por encima del nivel cero en las optimizaciones de metas subsecuentes, pueden degradar (pero nunca mejorar) la calidad de una meta de mayor prioridad. El procedimiento requiere incluir las funciones objetivo de todas las metas en la tabla simplex del modelo.

La modificación propuesta de *eliminación de columnas* complica innecesariamente la programación de metas. En esta presentación se demuestra que es posible alcanzar los mismos resultados de una forma más sencilla mediante los siguientes pasos:

Paso 0. Identifique las metas del modelo y clasifíquelas en orden de prioridad:

$$G_1 = \rho_1 > G_2 = \rho_2 > \dots > G_n = \rho_n$$

Establezca $i = 1$.

Paso general. Resuelva la PL_i que minimice G_i y considere que $\rho_i = \rho_i^*$ define el valor óptimo correspondiente de la variable de desviación ρ_i . Si $i = n$, deténgase; la PL_n resuelve el

problema de n metas. En caso contrario, agregue la restricción $\rho_i = \rho_i^*$ a las restricciones del problema G_i para garantizar que el valor de ρ_i no se degrade en problemas futuros. Establezca $i = i + 1$ y repita el paso i .

En teoría, la adición sucesiva de las restricciones especiales $\rho_i = \rho_i^*$ quizá no sea tan “elegante” como la *regla de eliminación de columnas*. Sin embargo, se logra el mismo resultado. Pero lo más importante es que es más fácil de implementar y de entender.

Comentarios. Algunas personas pueden argumentar que la *regla de eliminación de columnas* ofrece una ventaja computacional porque hace el problema sucesivamente más pequeño al eliminar variables, en tanto que nuestro procedimiento lo hace más grande al agregar nuevas restricciones. Considerando la naturaleza de las restricciones adicionales ($\rho_i = \rho_i^*$), es posible modificar el algoritmo simplex para implementar la restricción adicional implícitamente sustituyendo $\rho_i = \rho_i^*$. La sustitución (que afecta sólo la restricción donde aparece ρ_i) reduce el número de variables a medida que el algoritmo se mueve de una meta a la siguiente. De manera alternativa, se puede utilizar el método simplex acotado de la sección 7.4.2, reemplazando $\rho_i = \rho_i^*$ por $\rho_i \leq \rho_i^*$, en cuyo caso las restricciones adicionales se toman en cuenta de manera implícita. En este sentido, aparte de su atractivo teórico, la *regla de eliminación de columnas* no parece ofrecer una ventaja computacional específica.

Con la finalidad de completar esta presentación, en el ejemplo 8.2-3 se ilustrará cómo funciona la *regla de eliminación de columnas*.

Ejemplo 8.2-2

El problema del ejemplo 8.2-1 se resuelve con el método preventivo. Suponga que la meta de exposición tiene la prioridad más alta.

Paso 0. $G_1 > G_2$

G_1 : Minimizar s_1^- (Satisfacer la meta de exposición)

G_2 : Minimizar s_2^+ (Satisfacer la meta presupuestaria)

Paso 1. Resuelva la PL₁.

$$\text{Minimizar } G_1 = s_1^-$$

sujeto a

$$4x_1 + 8x_2 + s_1^- - s_1^+ = 45 \text{ (Meta de exposición)}$$

$$8x_1 + 24x_2 + s_2^- - s_2^+ = 100 \text{ (Meta presupuestaria)}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10 \text{ (Límite de personal)}$$

$$x_1 \leq 6 \text{ (Límite de radio)}$$

$$x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+ \geq 0$$

La solución óptima (determinada por TORA) es $x_1 = 5$ minutos, $x_2 = 2.5$ minutos, $s_1^- = 5$ millones de personas, con las variables restantes iguales a cero. La solución muestra que 5 millones de personas

transgreden la meta de exposición, G_1 . La restricción adicional que se agrega al problema G_2 es $s_1^- = 5$ (o de manera equivalente $s_1^- \leq 5$).

Paso 2. La función objetivo de la PL₂ es

$$\text{Minimizar } G_2 = s_2^+$$

Las restricciones son las mismas que en el paso 1 *más* la restricción adicional $s_1^- = 5$ (es posible aplicar convenientemente la opción **MODIFY** de TORA para representar la nueva restricción asignando 5 tanto a la cota inferior como a la cota superior de s_1^-).

En general, la restricción adicional $s_1^- = 5$ también puede tomarse en cuenta al sustituir s_1^- en la primera restricción. El resultado es que el lado derecho de la restricción de la meta de exposición cambiará de 45 a 40, lo cual reduce la PL₂ a

$$\text{Minimizar } G_2 = s_2^+$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 - s_1^+ &= 40 \text{ (Meta de exposición)} \\ 8x_1 + 24x_2 + s_2^- - s_2^+ &= 100 \text{ (Meta presupuestaria)} \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \text{ (Límite de personal)} \\ x_1 &\leq 6 \text{ (Límite de radio)} \\ x_1, x_2, s_1^+, s_2^-, s_2^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

La nueva formulación tiene una variable menos que la PL₁, lo cual concuerda con la idea general anticipada por la *regla de eliminación de columnas*.

En realidad, la optimización de la PL₂ no es necesaria en este problema, ya que la solución óptima al problema G_1 ya da por resultado $s_2^+ = 0$; es decir, ya es óptima para la PL₂. Tales oportunidades de ahorro computacional deberían aprovecharse siempre que se presenten durante el curso de la implementación del método preventivo.

Ejemplo 8.2-3 (Regla de eliminación de columnas)

En este ejemplo se demuestra que es posible obtener una mejor solución para el problema de los ejemplos 8.2-1 y 8.2-2, si se utiliza el método preventivo para *optimizar* los objetivos en vez de *satisfacer* las metas. Más adelante se resuelve el mismo ejemplo aplicando la *regla de eliminación de columnas*.

Las metas del ejemplo 8.2-1 se pueden re establecer como

Prioridad 1: Maximizar la exposición (P_1)

Prioridad 2: Minimizar el costo (P_2)

En forma matemática, los dos objetivos se dan como

$$\text{Maximizar } P_1 = 4x_1 + 8x_2 \text{ (Exposición)}$$

$$\text{Minimizar } P_2 = 8x_1 + 24x_2 \text{ (Costo)}$$

Los límites específicos para las metas de exposición y de costo ($=45$ y 100) en los ejemplos 8.2-1 y 8.2-2 se eliminan, porque el método simplex determinará estos límites de manera óptima.

Así, el nuevo problema se formula como

$$\text{Maximizar } P_1 = 4x_1 + 8x_2$$

$$\text{Minimizar } P_2 = 8x_1 + 24x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Primero se resolverá el problema siguiendo el procedimiento presentado en el ejemplo 8.2-2.

Paso 1. Resuelva la PL₁.

$$\text{Maximizar } P_1 = 4x_1 + 8x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución óptima (obtenida por TORA) es $x_1 = 0, x_2 = 5$ con $P_1 = 40$, lo cual demuestra que la exposición máxima que se obtiene es de 40 millones de personas.

Paso 2. Agregue la restricción $4x_1 + 8x_2 \geq 40$ para garantizar que la meta G_1 no se degrade. Por lo tanto, se resuelve la PL₂ como

$$\text{Minimizar } P_2 = 8x_1 + 24x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 6$$

$$4x_1 + 8x_2 \geq 40 \text{ (restricción adicional)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución óptima de la PL₂ es $P_2 = \$96,000$, $x_1 = 6$ minutos y $x_2 = 2$ minutos. Esto resulta en la misma exposición ($P_1 = 40$ millones de personas) pero a un costo menor que el del ejemplo 8.2-2, donde se buscaba satisfacer en lugar de optimizar las metas.

El mismo problema se resuelve ahora con la *regla de eliminación de columnas*. La regla indica que se incluyan las filas objetivo asociadas con todas las metas en la tabla simplex, como se demostrará a continuación.

PL₁ (maximización de la exposición). La tabla simplex de la PL₁ incluye ambas filas objetivo P_1 y P_2 . La condición de optimalidad se aplica sólo a la fila objetivo P_1 . La fila P_2 tiene un papel pasivo en la PL₁, pero debe actualizarse (mediante las operaciones de filas de simplex) con el resto de la tabla simplex en preparación para la optimización de la PL₂.

La PL₁ se resuelve en dos iteraciones como sigue:

Iteración	Básicas	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución
1	P_1	-4	-8	0	0	0
	P_2	-8	-24	0	0	0
	s_1	1	2	1	0	10
	s_2	1	0	0	1	6
2	P_1	0	0	4	0	40
	P_2	4	0	12	0	120
	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	5
	s_2	1	0	0	1	6

La última tabla produce la solución óptima $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ y $P_1 = 40$.

La *regla de eliminación de columnas* pide que se elimine cualquier variable no básica x_j con $z_j - c_j \neq 0$ de la tabla óptima de la PL₁ antes de optimizar la PL₂. La razón es que si estas variables no se verifican, podrían volverse positivas en problemas de optimización de baja prioridad, lo que podría degradar la calidad de las soluciones de alta prioridad.

PL₂ (minimización de costos). La regla de eliminación de columnas elimina s_1 (con $z_j - c_j = 4$ en la PL₁). En la fila P_2 se observa que, si no se elimina s_1 , será la variable de entrada en el inicio de las iteraciones P_2 y el resultado será la solución óptima $x_1 = x_2 = 0$, lo cual degradaría el valor objetivo óptimo del problema P_1 desde $P_1 = 40$ hasta $P_1 = 0$ (*¡pruébelo!*).

El problema P_2 es del tipo de minimización. Después de la eliminación de s_1 , la variable x_1 con $z_j - c_j = 4 (> -0)$ puede mejorar el valor de P_2 . La siguiente tabla muestra las iteraciones la PL₂. La fila P_1 se eliminó porque no tiene ningún propósito en la optimización de la PL₂.

Iteración	Básicas	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución
1	P_1					40
	P_2	4	0		0	120
	x_2	$\frac{1}{2}$	1		0	5
	s_2	1	0		1	6
2	P_1					40
	P_2	0	0		-4	96
	x_2	0	1		$-\frac{1}{2}$	2
	x_1	1	0		1	6

La solución óptima ($x_1 = 6$, $x_2 = 2$) con una exposición total de $P_1 = 40$ y un costo total de $P_2 = 96$ es igual a la obtenida anteriormente.

Momento de AMPL

AMPL se presta fácilmente a la aplicación de la idea presentada en el ejemplo 8.2-2, donde se agregan restricciones sencillas para garantizar que no se degraden las soluciones de alta prioridad. En el archivo *ampEx.8.1-1.txt* se presenta un código de AMPL genérico que permite aplicar el método preventivo.

BIBLIOGRAFÍA

- Chissman, J.T. Fey, G. Reeves, H. Lewis y R. Weinstein, “A Multiobjective Linear Programming Methodology for Public Sector Tax Planning,” *Interfaces*, vol. 19, núm. 5, pp. 13-22, 1989.
- Cohon, T. L., *Multiobjective Programming and Planning*, Academic Press, Nueva York, 1978.
- Ignizio, J. P. y T. M. Cavalier, *Linear Programming*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1994.
- Steuer, R. E., *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computations, and Application*, Wiley, Nueva York, 1986.

Estudio de caso: Asignación de tiempo de quirófano en el Hospital Monte Sinaí²

Herramientas: PM, PLE

Área de aplicación: Atención médica

Descripción de la situación:

La situación sucede en Canadá, donde el seguro de salud es obligatorio y universal para todos los ciudadanos. El financiamiento, que se basa en una combinación de primas e impuestos, es controlado por las provincias individuales. Con este sistema, los hospitales reciben un presupuesto anual fijo y cada provincia paga a los médicos retroactivamente usando un mecanismo de financiamiento de pago por servicio. Los gobiernos locales controlan el tamaño del sistema de atención médica imponiendo límites al gasto hospitalario. El resultado es que el uso de los recursos de salud, sobre todo de los quirófanos, se controla de manera efectiva.

El Hospital Monte Sinaí tiene 10 quirófanos que atienden 5 departamentos: cirugía, ginecología, oftalmología, otorrinolaringología y cirugía bucal. Hay 8 quirófanos principales y 2 salas de cirugía ambulatoria electivas (SCAE). Una sala de operaciones es “corta” o “larga”, según el número diario de horas que el quirófano está en uso. Debido a la naturaleza socializada de la atención médica en Canadá, todas las cirugías se programan sólo durante los días laborales (de lunes a viernes). En la tabla 8.1 se resume la disponibilidad diaria de los diferentes tipos de quirófanos y la tabla 8.2 presenta la demanda semanal de horas de quirófano. El límite de las horas no asignadas en la tabla 8.2 es la mayor cantidad de horas que le puede ser negada a un departamento en relación con su solicitud semanal.

² J. T. Blake y J. Donald, “Mount Sinai Hospital Uses Integer Programming to Allocate Operating Room Time,” *Interfaces*, vol. 32, núm. 2, pp. 63-73, 2002.

TABLA 8.1 Disponibilidad de quirófanos en el Hospital Monte Sinaí

Día de la semana	Horas de disponibilidad			
	Principal “corto”	Principal “largo”	SCAE “corta”	SCAE “larga”
Lunes	08:00–15:30	08:00–17:00	08:00–15:30	08:00–16:00
Martes	08:00–15:30	08:00–17:00	08:00–15:30	08:00–16:00
Miércoles	08:00–15:30	08:00–17:00	08:00–15:30	08:00–16:00
Jueves	08:00–15:30	08:00–17:00	08:00–15:30	08:00–16:00
Viernes	09:00–15:30	09:00–17:00	09:00–15:30	09:00–16:00
Número de quirófanos	4	4	1	1

TABLA 8.2 Demanda semanal de horas de quirófano

Departamento	Horas semanales objetivo	Límite permisible de horas no asignadas
Cirugía	189.0	10.0
Ginecología	117.4	10.0
Oftalmología	39.4	10.0
Cirugía bucal	19.9	10.0
Otorrinolaringología	26.3	10.0
Emergencias	5.4	3.0

El objetivo del estudio es determinar un programa diario razonablemente equitativo para la utilización de los quirófanos disponibles.

Modelo matemático:

Lo mejor que se puede hacer en esta situación es diseñar un programa diario que satisfaga la mayor parte de las horas objetivo semanales para los diferentes departamentos. En otras palabras, se fijan las horas objetivo para cada departamento como un objetivo y se intenta satisfacerlo. El objetivo del modelo consiste en minimizar la desviación total respecto de las horas objetivo semanales.

Sean

x_{ijk} = Número de quirófanos del tipo i asignados al departamento j el día k

d_{ik} = Duración (disponibilidad en horas) del tipo de quirófano i el día k

a_{ik} = Número de quirófanos del tipo i disponibles el día k

h_j = Horas objetivo (ideales) requeridas por el departamento j

u_j^- = Cantidad máxima de horas no asignadas que se permite en el departamento

La situación dada involucra 6 departamentos y 4 tipos de quirófanos. Por lo tanto, $i = 1, 2, 3, 4$ y $j = 1, 2, \dots, 6$. Para una semana con 5 días hábiles, el índice k asume valores de 1 a 5.

El siguiente modelo de PM entera representa la situación del horario en el Hospital Monte Sinaí:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^6 \left(\frac{s_j^-}{h_j} \right)$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^5 d_{ik} x_{ijk} + s_j^- - s_j^+ = h_j, \text{ para toda } j \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^6 x_{ijk} \leq a_{ik}, \text{ para todas } i \text{ y } k \quad (2)$$

$$0 \leq s_j^- \leq u_j^-, \text{ para toda } j \quad (3)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \text{ y entero para todas } i, j \text{ y } k \quad (4)$$

$$s_j^-, s_j^+ \geq 0, \text{ para toda } j \quad (5)$$

La lógica del modelo es que puede resultar imposible satisfacer las horas objetivo h_j para el departamento j , $j = 1, 2, \dots, 6$. Así que el objetivo es determinar un programa que minimice la posible “subasignación” de quirófanos en los diferentes departamentos. Para ello, las variables no negativas s_j^- y s_j^+ en la restricción (1) representan la subasignación y sobreasignación de horas respecto de la meta h_j para el departamento j . La relación $\frac{s_j^-}{h_j}$ mide la cantidad relativa de subasignación al departamento j . La restricción (2) reconoce los límites de disponibilidad de quirófanos. La restricción (3) se utiliza para limitar la cantidad por la cual un departamento está subasignado. Los límites u_j^- son especificados por el usuario.

Resultados del modelo

El archivo *amplCase6.txt* proporciona el modelo AMPL del problema. En la figura 8.1 se presenta la solución para los datos dados en el planteamiento del problema. Se muestra que se satisficieron todos los objetivos ($z = 0$), y detalla la asignación de quirófanos (por tipo) a los diferentes departamentos durante una semana laboral (de lunes a viernes). De hecho, el resumen departamental que se presenta en la parte inferior de la figura muestra que las solicitudes en 5 (de 6) departamentos están sobresatisfechas. Sigue así porque hay abundancia de recursos para la semana y el modelo no intenta minimizar la sobreasignación de horas a los diferentes departamentos. En realidad, no tiene sentido en el modelo actual tratar de acabar con la sobreasignación de horas, ya que hay quirófanos disponibles y podrían repartirse entre los diferentes departamentos. En esencia, la principal preocupación es la subasignación cuando los recursos disponibles no satisfacen la demanda.

Experiencia de cálculo

En el modelo, la variable x_{ijk} representa el número de quirófanos asignados. Debe tomar valores enteros, y aquí reside un problema común que continúa plagando los cálculos de programación entera. El modelo AMPL se ejecutó rápidamente con el conjunto de datos que se dan en la descripción del problema. Sin embargo, cuando los datos que representan las horas objetivo, h_j , se ajustaron ligeramente (manteniendo todos los demás datos sin cambios), la experiencia de cálculo fue totalmente diferente. En primer lugar, el tiempo de ejecución duró más de 1 hora (en comparación con los pocos segundos con el conjunto de datos inicial) y después de explorar más de 45 millones de nodos ramificados y enlazados, no logró generar una solución factible, y mucho menos la óptima. Esta experiencia parece ocurrir cuando la oferta excede la demanda. En realidad, el comportamiento de esta PLE es impredecible, porque cuando se cambia la función objetivo para simplemente minimizar la suma *no ponderada* de s_j^- , todos los casos previamente insolubles se resuelven de manera instantánea. En el sitio web (disponible en inglés), las preguntas al final de este caso (caso 6) describen estas experiencias de cálculo.

¿Qué cursos de acción pueden utilizarse para superar este problema? En primera instancia puede existir la tentación de eliminar el requisito de que los resultados sean enteros y luego redondear la solución de programación lineal. Esta opción no funcionaría aquí porque, con toda probabilidad, no producirá una solución factible. Dado que hay un número específico de quirófanos disponibles, es altamente improbable que una solución

```

z = 0.00
Weekly Time Allocation:

Mon:
  Gynecology: 39.0 hrs
    4 room(s) type Main_L
    1 room(s) type Main_S
  Ophthalmology: 17.0 hrs
    1 room(s) type Main_S
    1 room(s) type EOPS_S
  Oral_surgery: 16.5 hrs
    1 room(s) type Main_S
    1 room(s) type EOPS_L
  Otolaryngology: 9.0 hrs
    1 room(s) type Main_S

Tue:
  Surgery: 17.0 hrs
    1 room(s) type Main_S
    1 room(s) type EOPS_S
  Gynecology: 39.0 hrs
    4 room(s) type Main_L
    1 room(s) type Main_S
  Oral_surgery: 7.5 hrs
    1 room(s) type EOPS_L
  Otolaryngology: 18.0 hrs
    2 room(s) type Main_S

Wed:
  Surgery: 66.5 hrs
    3 room(s) type Main_L
    4 room(s) type Main_S
    1 room(s) type EOPS_S
  Ophthalmology: 15.0 hrs
    1 room(s) type Main_L
    1 room(s) type EOPS_L

Thu:
  Surgery: 72.5 hrs
    4 room(s) type Main_L
    3 room(s) type Main_S
    1 room(s) type EOPS_L
    1 room(s) type EOPS_S
  Ophthalmology: 9.0 hrs
    1 room(s) type Main_S

Fri:
  Surgery: 34.0 hrs
    3 room(s) type Main_S
    1 room(s) type EOPS_S
  Gynecology: 39.0 hrs
    4 room(s) type Main_L
    1 room(s) type Main_S
  Emergency: 6.5 hrs
    1 room(s) type EOPS_L

Departmental summary:
  Surgery allocated 190.0 hrs (101%)
  Gynecology allocated 117.0 hrs (100%)
  Ophthalmology allocated 41.0 hrs (104%)
  Oral_surgery allocated 24.0 hrs (121%)
  Otolaryngology allocated 27.0 hrs (103%)
  Emergency allocated 6.5 hrs (120%)

```

FIGURA 8.1

Salida del modelo para el Hospital Monte Sinaí

redondeada de prueba y error cumpla con los límites de disponibilidad de salas de operación. Esto significa que no hay más opción que imponer la condición de resultados enteros.

Una forma de mejorar las posibilidades de ejecutar exitosamente el modelo entero es limitar los intervalos factibles para las variables x_{ijk} considerando la disponibilidad de otros recursos. Por ejemplo, si el hospital tiene solamente dos cirujanos dentales en un día dado, se pueden asignar no más de dos quirófanos (de cualquier tipo) a ese departamento en ese día. El establecimiento de límites más estrictos puede ser eficaz para asegurar una solución entera óptima. En caso de no cumplir con este requisito, la única opción restante es diseñar una heurística para el problema.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados
8.1	8-1 a 8-11
8.2.1	8-12 a 8-21
8.2.2	8-22 a 8-25

- *8-1. Formule el problema de impuestos en Fairville, suponiendo que el concejo municipal especifica una meta adicional, G_5 , que requiere que el impuesto sobre la gasolina sea al menos 10% de la factura total de impuestos.
- 8-2. El Centro Comercial NW realiza eventos especiales para atraer a clientes potenciales. Entre los eventos que parecen atraer a los adolescentes, al grupo de jóvenes de mediana edad y a los adultos mayores, los dos más populares son los conciertos de bandas y las exposiciones de arte. Sus costos por presentación son de \$1500 y \$3000, respectivamente. El presupuesto anual total (estricto) asignado a los dos eventos es de \$15,000. El gerente del centro comercial estima la asistencia como sigue:

Evento	Cantidad de personas que asisten por presentación		
	Adolescentes	Jóvenes de mediana edad	Adultos mayores
Concierto de bandas	200	100	0
Exposición de arte	0	400	250

El gerente ha fijado metas mínimas de 1000, 1200 y 800 para la asistencia de adolescentes, jóvenes de mediana edad y adultos mayores, respectivamente. Formule el problema como un modelo de PM.

- *8-3. La oficina de admisiones de la Ozark University está recibiendo solicitudes de estudiantes de primer año para el próximo periodo académico. Las solicitudes se ubican en tres categorías: estudiantes del estado, externos al estado e internacionales. Las relaciones hombres-mujeres para los solicitantes del estado y externos al estado son 1:1 y 3:2, respectivamente. Para los estudiantes internacionales, dicha relación es 8:1. La calificación en el Examen de Universidades Estadounidenses (ACT, por sus siglas de *American College Test*) es un factor importante en la aceptación de nuevos estudiantes. Las estadísticas recopiladas por la universidad indican que en el ACT las calificaciones promedio de los estudiantes del estado, externos al estado e internacionales son de 27, 26 y 23, respectivamente. El comité de admisiones ha establecido las siguientes metas deseables para la nueva generación de primer año:
- (a) Que la generación entrante sea por lo menos de 1200 estudiantes.
 - (b) Que la calificación promedio en el ACT para todos los solicitantes sea por lo menos de 25.
 - (c) Que los estudiantes internacionales constituyan por lo menos 10% de la generación entrante.

- (d) Que la relación mujeres-hombres sea por lo menos de 3:4.
- (e) Que los estudiantes externos al estado constituyan al menos 20% de la generación entrante.
- Formule el problema como un modelo de PM.
- 8-4.** Las granjas Circle K consumen 3 toneladas diarias de un alimento especial. El alimento —una mezcla de piedra caliza (carbonato de calcio), maíz y soya— debe satisfacer los siguientes requisitos nutricionales:
- Calcio.* Al menos 0.8% pero no más de 1.2%.
- Proteína.* Al menos 22%.
- Fibra.* Cuando mucho 5%.

La siguiente tabla muestra el contenido nutricional de los ingredientes del alimento.

Ingrediente	lb por lb de ingrediente		
	Calcio	Proteína	Fibra
Piedra caliza	.380	.00	.00
Maíz	.001	.09	.02
Soya	.002	.50	.08

Formule el problema como un modelo de PM y exprese su opinión en relación con la aplicabilidad de la PM a esta situación.

- *8-5.** Mantel produce una carreta de juguete, cuyo ensamble final debe incluir cuatro ruedas y dos asientos. La fábrica que produce las piezas trabaja tres turnos al día. La siguiente tabla presenta las cantidades producidas de cada pieza en los tres turnos.

Turno	Unidades producidas por corrida	
	Ruedas	Asientos
1	500	300
2	600	280
3	640	360

De manera ideal, la cantidad de ruedas producidas es el doble de la de asientos. Sin embargo, como las tasas de producción varían de un turno a otro, es probable que no haya un balance exacto en la producción. A Mantel le interesa determinar la cantidad de corridas de producción en cada turno, que minimice el desbalance en la producción de las piezas. Las limitaciones de la capacidad restringen las corridas entre 4 y 5 para el turno 1; 10 y 20 para el turno 2; y 3 y 5 para el turno 3. Formule el problema como un modelo de PM.

- 8-6.** Camyo Manufacturing produce cuatro piezas que requieren el uso de un torno y un taladro vertical. Las dos máquinas operan 10 horas al día. La siguiente tabla presenta el tiempo en minutos que se requiere por pieza:

Pieza	Tiempo de producción en min	
	Torno	Taladro vertical
1	5	3
2	6	2
3	4	6
4	7	4

Se desea balancear las dos máquinas limitando la diferencia entre sus tiempos de operación totales cuando mucho a 30 minutos. La demanda de mercado para cada pieza es al menos de 10 unidades. Además, la cantidad de unidades de la pieza 1 no puede exceder la de la pieza 2. Formule el problema como un modelo de PM.

- 8-7.** Se fabrican dos productos en dos máquinas secuenciales. En la siguiente tabla se dan los tiempos de maquinado en minutos por unidad para ambos productos.

Máquina	Tiempo de maquinado en min	
	Producto 1	Producto 2
1	5	3
2	6	2

Las cuotas de producción diarias para los dos productos son de 80 y 60 unidades, respectivamente. Cada máquina opera 8 horas al día y si es necesario —aunque no deseable— puede utilizarse tiempo extra para cumplir con las cuotas de producción. Formule el problema como un modelo de PM.

- 8-8.** El hospital Vista City planea la asignación de camas sobrantes (las que no estén ya ocupadas) para estancias cortas, con 4 días de anticipación. Durante el periodo de planeación de 4 días, alrededor de 30, 25 y 20 pacientes requerirán estancias de 1, 2 o 3 días, respectivamente. Las camas sobrantes durante el mismo periodo se estiman en 20, 30, 30 y 30, respectivamente. Utilice la PM para resolver el problema de sobreadmisión y subadmisión en el hospital.
- 8-9.** La familia Von Trapp está en el proceso de mudarse a una nueva ciudad donde ambos padres han aceptado nuevos trabajos. Al tratar de encontrar una ubicación ideal para su nuevo hogar, los Von Trapp listan las siguientes metas:
- (a) Debería estar lo más cerca posible al lugar de trabajo de la señora Von Trapp (cuando mucho a $\frac{1}{4}$ de milla).
 - (b) Debe estar lo más lejos posible del ruido del aeropuerto (cuando menos a 10 millas).
 - (c) Tiene que estar razonablemente cerca de un centro comercial (cuando mucho a 1 milla).
- El señor y la señora Von Trapp utilizan un sitio destacado en la ciudad como punto de referencia y ubican las coordenadas (x, y) del lugar de trabajo, el aeropuerto y el centro comercial en $(1, 1)$, $(20, 15)$ y $(4, 7)$, respectivamente (todas las distancias se dan en millas). Formule el problema como un modelo de PM (*nota:* Las restricciones resultantes son no lineales).
- 8-10.** *Análisis de regresión.* En un experimento de laboratorio, suponga que y_i es el i -ésimo resultado observado (independiente) asociado con las mediciones experimentales dependientes $x_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$. Se desea determinar una regresión lineal que se ajuste a estos datos. Sean $b_j, j = 0, 1, \dots, n$, los coeficientes de la regresión. Se desea determinar todas las b_j tales que la suma de las desviaciones absolutas entre los resultados observados y los estimados sea mínima. Formule el problema como un modelo de PM.
- 8-11.** *Problema de Chebyshev.* Una meta alternativa para el modelo de regresión del problema 8-10 es minimizar sobre b_j el máximo de las desviaciones absolutas. Formule el problema como un modelo de PM.
- *8-12.** Considere el problema 8-1 que se refiere a la situación de los impuestos en Fairville. Resuelva el problema suponiendo que las cinco metas tienen el mismo peso. ¿Satisface la solución todas las metas?
- 8-13.** En el problema 8-2, suponga que la meta de atraer jóvenes de mediana edad es dos veces más importante que la de las otras dos categorías (adolescentes y adultos mayores). Encuentre la solución asociada y verifique si se cumplieron todas las metas.

- 8-14.** En la situación de las admisiones a la Ozark University descrita en el problema 8-3, suponga que se debe cumplir con el límite en el tamaño de la generación de estudiantes de primer año, pero los requisitos restantes pueden tratarse como metas flexibles. Suponga además que la calificación del examen ACT es dos veces más importante que cualquiera de las metas restantes.
- Resuelva el problema y especifique si se cumplen todas las metas o no.
 - Si además el tamaño de la generación de estudiantes de primer año puede tratarse como una meta flexible, que es dos veces más importante que la meta del examen ACT, ¿cómo este cambio afectaría la solución?
- *8-15.** En el modelo de Circle K del problema 8-4, ¿es posible satisfacer todos los requisitos nutricionales?
- 8-16.** En el problema 8-5, determine la solución y especifique si la producción diaria de ruedas y asientos puede balancearse o no.
- 8-17.** En el problema 8-6, suponga que la meta de la demanda de mercado es dos veces más importante que balancear las dos máquinas, y que no se permite tiempo extra. Resuelva el problema y determine si se cumplen las metas.
- *8-18.** En el problema 8-7, suponga que la producción se esfuerza por satisfacer las cuotas de los dos productos, utilizando tiempo extra si es necesario. Encuentre una solución al problema y especifique la cantidad de tiempo extra, si se requiere, para cumplir con las cuotas de producción.
- 8-19.** En el hospital Vista City del problema 8-8, suponga que solamente los límites de camas representan metas flexibles y que todas las metas tienen el mismo peso. ¿Puede cumplirse con todas las metas?
- 8-20.** La compañía Malco ha compilado la siguiente tabla a partir de los archivos de cinco de sus empleados, para estudiar el impacto de tres factores en el ingreso: edad, educación (expresada en años de universidad terminados) y experiencia (expresada en años en el negocio).

Edad (años)	Educación (años)	Experiencia (años)	Ingreso anual (\$)
30	4	5	40,000
39	5	10	48,000
44	2	14	38,000
48	0	18	36,000
37	3	9	41,000

Use la formulación de PM del problema 8-10 para ajustar los datos en la ecuación lineal $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$.

- 8-21.** Resuelva el problema 8-20 siguiendo el método de Chebyshev propuesto en el problema 8-11.
- 8-22.** En el ejemplo 8.2-2, suponga que la meta de presupuesto se incrementa a \$110,000. La meta de exposición permanece en 45 millones de personas. Muestre cómo determinaría una solución el método preventivo.³
- *8-23.** Resuelva el problema 8-1 utilizando el siguiente orden de prioridad para las metas:

$$G_1 > G_2 > G_3 > G_4 > G_5.$$

³ Encontrará computacionalmente conveniente utilizar AMPL interactivo para resolver los problemas 8-22 a 8-25.

8-24. Considere el problema 8-2, que se refiere a la presentación de conciertos de bandas y exposiciones de arte en el centro comercial NW. Suponga que las metas establecidas para adolescentes, jóvenes de mediana edad y adultos mayores se designan como G_1 , G_2 y G_3 , respectivamente. Resuelva el problema para cada uno de los siguientes órdenes de prioridad.

(a) $G_1 > G_2 > G_3$

(b) $G_3 > G_2 > G_1$

Muestre que la satisfacción de las metas (o la ausencia de ella) puede estar en función del orden de las prioridades.

8-25. Resuelva el modelo de la Ozark University (problema 8-3) usando el método preventivo; para ello, suponga que las metas se priorizan en el mismo orden dado en el problema.

CAPÍTULO 9

Programación lineal entera

Aplicación de la vida real: Optimización de cargas de camiones en PFG Building Glass

PFG utiliza camiones especialmente equipados (con una quinta rueda) para entregar paquetes de hojas de vidrio plano a sus clientes. Los paquetes varían tanto en tamaño como en peso, y una carga puede incluir diferentes paquetes, de acuerdo con los pedidos recibidos. Los reglamentos gubernamentales limitan los pesos sobre los ejes y la colocación de los paquetes en el remolque es crucial para determinar esos pesos. El problema aborda la determinación de la carga óptima de los paquetes sobre la plataforma del camión para satisfacer los límites de peso sobre los ejes. El problema se resuelve como un programa entero. (Los detalles se explican en el caso 7 del capítulo 26, disponible en inglés en el sitio web de este libro).¹

9.1 APPLICACIONES ILUSTRATIVAS

Por lo general, las aplicaciones de programación lineal entera (PLE) pertenecen a dos categorías: *directa* y *transformada*. En la categoría *directa*, la naturaleza de la situación impide la asignación de valores fraccionarios a las variables del modelo. Por ejemplo, el problema puede implicar la determinación de si se emprende un proyecto o no (variable binaria), o la determinación del número óptimo de máquinas necesarias para realizar una tarea (variable general entera). En la categoría *transformada* se utilizan variables enteras auxiliares para convertir analíticamente situaciones insolubles en modelos que pueden resolverse mediante los algoritmos de optimización disponibles. Por ejemplo, en la secuencia de dos trabajos, *A* y *B*, en una sola máquina, el trabajo *A* puede preceder al trabajo *B* o viceversa. La naturaleza *o* de las restricciones es lo que hace que el problema sea analíticamente insoluble, porque todos los algoritmos de programación matemáticos tratan sólo con restricciones *y*. En la sección 9.1.4 se muestra cómo utilizar las variables binarias auxiliares para transformar las restricciones *o* en *y*, sin modificar la naturaleza del modelo.

¹ Los casos que se presentan al final de los capítulos 7 y 8 utilizan la PLE. Asimismo, el caso 7 del capítulo 26, disponible en inglés en el sitio web de este libro, combina la programación entera con la teoría de colas.

Por conveniencia, un problema se define como programa entero **puro** cuando *todas* las variables son enteras. En caso contrario, es un programa entero **combinado** que implica una mezcla de variables enteras y continuas.

9.1.1 Presupuesto de capital

Las decisiones acerca de emprender o no un proyecto suelen tomarse conforme a consideraciones de presupuesto limitado y prioridades preestablecidas. En el siguiente ejemplo se presenta una de estas situaciones.

Ejemplo 9.1-1 (Selección de un proyecto)

Se están evaluando cinco proyectos a lo largo de un horizonte de planeación de 3 años. La siguiente tabla presenta los rendimientos esperados para cada proyecto y los gastos anuales asociados.

Proyecto	Gastos (millones de dólares)/año			Rendimientos (millones de dólares)
	1	2	3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Fondos disponibles (millones de dólares)	25	25	25	

¿Cuáles proyectos se deberían seleccionar a lo largo del periodo de 3 años?

El problema se reduce a una decisión del tipo “sí-no” para cada proyecto. Defina la variable binaria x_j como

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{si se selecciona el proyecto } j \\ 0, & \text{si no se selecciona el proyecto } j \end{cases}$$

El modelo de PLE es

$$\text{Maximizar } z = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$$

sujeto a

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25$$

$$x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25$$

$$8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \leq 25$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = (0, 1)$$

La solución óptima entera (obtenida con AMPL, Solver o TORA)² es $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 0$, con $z = 95$ (millones de dólares). La solución excluye al proyecto 5 de la combinación de proyectos.

² Para utilizar TORA, seleccione **Integer Programming** del **Main Menu**. Después de introducir los datos del problema, vaya a la pantalla de salida, y elija **Automated B&B** para obtener la solución óptima. Solver se utiliza igual que en la PL, sólo que las variables objetivo deben declararse enteras. La opción entera (*int* o *bin*) está disponible en el cuadro de diálogo **Solver Parameters** cuando agrega una nueva restricción. La implementación de AMPL para programación entera es la misma que en la PL, excepto que algunas o todas las variables se declaran enteras agregando la palabra clave *integer* (o *binary*) en la instrucción de definición de esas variables. Por ejemplo, la instrucción `var x {J}>=0, integer;` declara a x_j como entera no negativa para todas las $j \in J$. Si x_j es binaria, la instrucción se cambia a `var x{J}>=0, binary;`. Para su ejecución, la instrucción `option solver cplex;` debe preceder a `solve;`.

Comentarios. Es interesante comparar la solución de PL continua con la solución de la PLE. La solución óptima de PL, obtenida al reemplazar $x_j = (0, 1)$ por $0 \leq x_j \leq 1$ para todas las j , da como resultado $x_1 = .5789$, $x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = .7368$ y $z = 108.68$ (millones de dólares). La solución no tiene sentido porque las x_1 y x_5 binarias asumen valores fraccionarios. Es posible *redondear* la solución al entero más cercano, de donde resulta $x_1 = x_5 = 1$. Sin embargo, la solución resultante infringe las restricciones. Además, en este caso el concepto de *redondeo* carece de sentido porque x_j representa una decisión del tipo “sí-no”.

9.1.2 Problema de cobertura de conjunto

En esta clase de problemas, varias plantas ofrecen servicios que se traslanan con algunas instalaciones. El objetivo es determinar la cantidad mínima de plantas que *cubren* (es decir, que satisfacen las necesidades de servicio de) cada instalación. Por ejemplo, se pueden construir plantas de tratamiento de agua en varias ubicaciones, y cada planta atiende a un grupo de comunidades. El traslape sucede cuando más de una planta da servicio a una comunidad específica.

Ejemplo 9.1-2 (Instalación de teléfonos de seguridad)

Para promover la seguridad en el campus, el Departamento de Seguridad Pública de la UA se encuentra en proceso de instalar teléfonos de emergencia en lugares seleccionados. El departamento desea instalar una cantidad mínima de aparatos que presten servicio a cada una las calles principales del campus. La figura 9.1 es un mapa de esas calles.

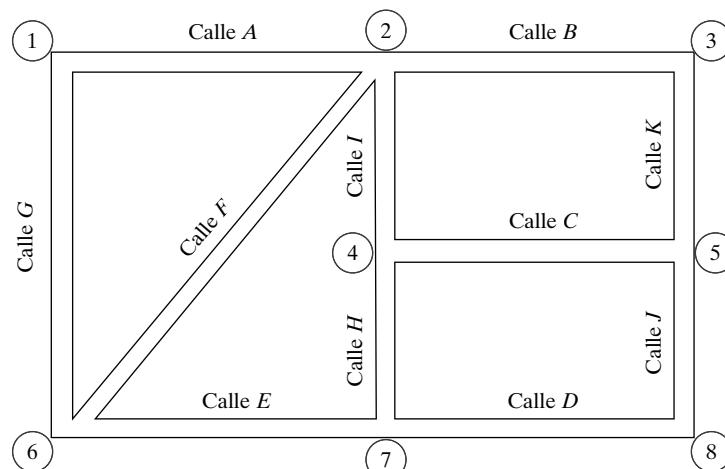
Es lógico maximizar la utilidad de los teléfonos si se les coloca en intersecciones de calles. De esta manera, una sola unidad daría servicio a dos calles.

Defina

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{se instala un teléfono en la intersección } j, j = 1, 2, \dots, 8 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

FIGURA 9.1

Mapa de las calles del campus de la UA



Las restricciones del problema exigen la instalación de, al menos, un teléfono en cada una de las 11 calles (*A* a *K*). Entonces, el modelo es

$$\text{Minimizar } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &\geq 1 \quad (\text{Calle } A) \\
 x_2 + x_3 &\geq 1 \quad (\text{Calle } B) \\
 x_4 + x_5 &\geq 1 \quad (\text{Calle } C) \\
 x_7 + x_8 &\geq 1 \quad (\text{Calle } D) \\
 x_6 + x_7 &\geq 1 \quad (\text{Calle } E) \\
 x_2 + x_6 &\geq 1 \quad (\text{Calle } F) \\
 x_1 + x_6 &\geq 1 \quad (\text{Calle } G) \\
 x_4 + x_7 &\geq 1 \quad (\text{Calle } H) \\
 x_2 + x_4 &\geq 1 \quad (\text{Calle } I) \\
 x_5 + x_8 &\geq 1 \quad (\text{Calle } J) \\
 x_3 + x_5 &\geq 1 \quad (\text{Calle } K) \\
 x_j &= (0, 1), j = 1, 2, \dots, 8
 \end{aligned}$$

La solución óptima del problema requiere que se instalen cuatro teléfonos en las intersecciones 1, 2, 5 y 7.

Comentarios. En un sentido estricto, los problemas de cobertura se caracterizan por los siguientes criterios: (1) las variables x_j , $j = 1, 2, \dots, n$ son binarias; (2) los coeficientes del lado izquierdo de las restricciones son 0 o 1; (3) el lado derecho de cada restricción tiene la forma (≥ 1), y (4) la función objetivo minimiza $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, donde $c_j > 0$ para toda $j = 1, 2, \dots, n$. En este ejemplo, $c_j = 1$ para todas las j . Si c_j representa el costo de instalación en la intersección j , entonces estos coeficientes pueden tomar valores diferentes de 1. Las variaciones del problema de cobertura incluyen condiciones colaterales adicionales, como lo describen algunas de las situaciones en los problemas 9-19 a 9-27.

Momento de AMPL

El archivo *amplEx9.1-2.txt* presenta un modelo general en AMPL para cualquier problema de cobertura.

9.1.3 Problema de cargo fijo

El problema de cargo fijo trata con situaciones donde la actividad económica incurre en dos tipos de costos: un costo fijo necesario para iniciar la actividad y un costo variable proporcional al nivel de la actividad. Por ejemplo, las herramientas iniciales de una máquina antes de comenzar la producción incurren en un costo de preparación fijo, independientemente de las unidades que se fabriquen. Una vez completa la preparación de la máquina, el costo de la mano de obra y del material es proporcional

a la cantidad producida. Dado que F es el cargo fijo, c es el costo unitario variable y x es el nivel de producción, la función de costo se expresa como

$$C(x) = \begin{cases} F + cx, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La función $C(x)$ es analíticamente insoluble, ya que implica una discontinuidad en $x = 0$. En el siguiente ejemplo se muestra cómo utilizar las variables binarias para que el modelo se vuelva analíticamente soluble.

Ejemplo 9.1-3 (Selección de una compañía telefónica)

Tres compañías telefónicas me han contactado para que me suscriba a su servicio de larga distancia en Estados Unidos. MaBell cobra una cuota fija de \$16 por mes más \$.25 por minuto. PaBell cobra \$25 por mes, pero reduce el costo por minuto a \$.21. En cuanto a BabyBell, la cuota fija mensual es de \$18, y el costo por minuto es de \$.22. Por lo general, utilizo un promedio de 200 minutos de llamadas de larga distancia al mes. Suponiendo que no tenga que pagar la cuota fija mensual a menos que realice llamadas y que pueda repartirlas entre las tres compañías como me plazca, ¿cómo debería utilizar las tres compañías para minimizar mi recibo telefónico mensual?

Este problema es fácil de resolver sin PLE. No obstante, resulta instructivo formularlo como un programa entero.

Defina

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{Minutos de larga distancia de MaBell por mes} \\ x_2 &= \text{Minutos de larga distancia de PaBell por mes} \\ x_3 &= \text{Minutos de larga distancia de BabyBell por mes} \\ y_1 &= 1 \text{ si } x_1 > 0 \text{ y } 0 \text{ si } x_1 = 0 \\ y_2 &= 1 \text{ si } x_2 > 0 \text{ y } 0 \text{ si } x_2 = 0 \\ y_3 &= 1 \text{ si } x_3 > 0 \text{ y } 0 \text{ si } x_3 = 0 \end{aligned}$$

Es posible asegurar que y_j es igual a 1 cuando x_j es positiva por medio de la restricción

$$x_j \leq My_j, j = 1, 2, 3$$

El valor de M debería seleccionarse suficientemente grande como para no restringir artificialmente la variable x_j . Debido a que uso aproximadamente 200 minutos de llamadas al mes, entonces $x_j \leq 200$ para todas las j , y resulta seguro seleccionar $M = 200$.

El modelo completo es

$$\text{Minimizar } z = .25x_1 + .21x_2 + .22x_3 + 16y_1 + 25y_2 + 18y_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 200 \\ x_1 &\leq 200y_1 \\ x_2 &\leq 200y_2 \\ x_3 &\leq 200y_3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 &= (0, 1) \end{aligned}$$

La formulación muestra que la j -ésima cuota mensual fija formará parte de la función objetivo z sólo si $y_j = 1$, lo cual puede suceder sólo si $x_j > 0$ (de acuerdo con las últimas tres restricciones del modelo). Si $x_j = 0$ en el óptimo, entonces la minimización de z , junto con el hecho de que el coeficiente objetivo de y_j sea positivo, hace que y_j sea igual a cero como se desea.³

La solución óptima resulta $x_3 = 200$, $y_3 = 1$, y todas las variables restantes iguales a cero, lo cual demuestra que debo seleccionar a BabyBell como mi proveedor de larga distancia. Recuerde que la información ofrecida por $y_3 = 1$ es redundante porque $x_3 > 0$ ($= 200$) implica el mismo resultado. En realidad, la razón principal para utilizar y_1 , y_2 y y_3 se explica por la cuota mensual fija. En efecto, las tres variables binarias transforman un modelo (no lineal) de mal comportamiento en una formulación analíticamente soluble. Esta conversión dio como resultado la introducción de las variables (binarias) enteras en un problema que de lo contrario sería continuo.

9.1.4 Restricciones uno-u-otro y si-entonces

En el problema de cargo fijo (sección 9.1.3), se utilizan variables binarias auxiliares para manejar la discontinuidad en la función de costo objetivo. Esta sección trata sobre modelos donde las restricciones no se satisfacen al mismo tiempo (uno-u-otro) o son dependientes (si-entonces), utilizando de nueva cuenta variables binarias auxiliares. La transformación utiliza un artilugio matemático para presentar la restricción especial como restricciones del tipo y .

Ejemplo 9.1-4 (Modelo de secuenciación de trabajos)

Jobco utiliza una sola máquina para procesar tres trabajos. En la siguiente tabla se indican el tiempo de procesamiento y la fecha límite (en días) de cada trabajo. Las fechas límite se miden a partir de cero, el tiempo de inicio supuesto del primer trabajo.

Trabajo	Tiempo de procesamiento (días)	Fecha límite (días)	Penalización por retraso (dólares/día)
1	5	25	19
2	20	22	12
3	15	35	34

El objetivo del problema consiste en determinar la secuencia de trabajos que minimice la penalización por retraso en el procesamiento de los tres trabajos.

Defina

x_j = Fecha de inicio en días para el trabajo j (medida a partir del tiempo cero)

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \text{ precede a } j \\ 0, & \text{si } j \text{ precede a } i \end{cases}$$

El problema tiene dos tipos de restricciones: las restricciones de no interferencia (que garantizan que no se procesen dos trabajos al mismo tiempo) y las restricciones de fecha límite. Considere primero las restricciones de no interferencia.

³ Por generalización, la condición $y_i = 0$ si $x_i = 0$ puede reemplazarse con la condición compuesta $y_i = 1$ si $x_i > 0$ y 0 si $x_i = 0$ para hacerla independiente del sentido de optimización (maximización o minimización). El resultado se logra reemplazando las restricciones $x_i \leq M y_i$ por $\frac{x_i}{M} \leq y_i \leq x_i$.

Dos trabajos i y j con tiempo de procesamiento p_i y p_j no se procesarán al mismo tiempo si (dependiendo de qué trabajo se procese primero)

$$x_i \geq x_j + p_j \text{ o } x_j \geq x_i + p_i$$

Para una M suficientemente grande, las restricciones o se transforman en restricciones y por medio de

$$My_{ij} + (x_i - x_j) \geq p_j \text{ y } M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \geq p_i$$

La conversión garantiza que tan sólo una de las dos restricciones puede estar activa en cualquier momento. Si $y_{ij} = 0$, la primera restricción está activa, y la segunda es redundante (porque su lado izquierdo incluye M , la cual es mucho mayor que p_i). Si $y_{ij} = 1$, la primera restricción es redundante, y la segunda está activa.

En seguida, dado que d_j es la fecha límite para el trabajo j , el trabajo se retrasa si $x_j + p_j > d_j$. Se pueden utilizar dos variables no negativas, s_j^- y s_j^+ , para determinar el estado de un trabajo j completado respecto de su fecha límite, es decir, la restricción de fecha límite se escribe como

$$x_j + p_j + s_j^- - s_j^+ = d_j$$

El trabajo j se adelanta si $s_j^- > 0$, y se retrasa si $s_j^+ > 0$. Por lo tanto, el costo de penalización por retraso es proporcional a s_j^+ .

El modelo del problema dado es

$$\text{Minimizar } z = 19s_1^+ + 12s_2^+ + 34s_3^+$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &+ My_{12} && \geq 20 \\
-x_1 + x_2 &- My_{12} && \geq 5 - M \\
x_1 &- x_3 &+ My_{13} &\geq 15 \\
-x_1 &+ x_3 &- My_{13} &\geq 5 - M \\
x_2 - x_3 &+ My_{23} && \geq 15 \\
-x_2 + x_3 &- My_{23} && \geq 20 - M \\
x_1 &+ s_1^- - s_1^+ && = 25 - 5 \\
x_2 &+ s_2^- - s_2^+ && = 22 - 20 \\
x_3 &+ s_3^- - s_3^+ && = 35 - 15 \\
x_1, x_2, x_3, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+ &\geq 0 \\
y_{12}, y_{13}, y_{23} &= (0, 1)
\end{aligned}$$

El modelo resultante es un PLE *combinado*.

Para resolver el modelo, se selecciona $M = 100$, un valor que es mayor que la suma de los tiempos de procesamiento de las tres actividades. La solución óptima es $x_1 = 20$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 25$, la cual indica que el trabajo 2 se inicia en el tiempo 0, que el trabajo 1 se inicia en el tiempo 20, y que el trabajo 3 se inicia en el tiempo 25 y, por lo tanto, se obtiene la secuencia de procesamiento 2 → 1 → 3. La solución requiere que el trabajo 2 se complete en $0 + 20 = 20$ días, el trabajo 1 en un tiempo de $20 + 5 = 25$ días, y el trabajo 3 en $25 + 15 = 40$ días. El trabajo 3 se retrasa $40 - 35 = 5$ días después de la fecha límite a un costo de $5 \times \$34 = \170 .

Momento de AMPL

El archivo *amplEx9.1-4.txt* proporciona el modelo de AMPL para el problema del ejemplo 9.1-4.

Ejemplo 9.1-5 (Modelo de secuenciación de trabajos revisitado)

En el ejemplo 9.1-4, suponga que se tiene la siguiente condición adicional: Si el trabajo i antecede al trabajo j , entonces el trabajo k debe anteceder al trabajo m . Matemáticamente, la condición **si-entonces** se escribe como

$$\text{si } x_i + p_i \leq x_j, \text{ entonces } x_k + p_k \leq x_m$$

Dado que $\epsilon (> 0)$ es infinitesimalmente pequeño y M es suficientemente grande, esta condición equivale a las siguientes dos restricciones simultáneas:

$$x_j - (x_i + p_i) \leq M(1 - w) - \epsilon$$

$$(x_k + p_k) - x_m \leq Mw$$

$$w = (0, 1)$$

Si $x_i + p_i \leq x_j$, entonces $x_j - (x_i + p_i) \geq 0$, que requiere $w = 0$, y la segunda restricción se vuelve $x_k + p_k \leq x_m$, como se deseaba. En caso contrario, w puede asumir el valor de 0 o 1, en cuyo caso la segunda restricción se puede satisfacer o no, dependiendo de las demás condiciones del modelo.

9.2 ALGORITMOS DE PROGRAMACIÓN ENTERA

Los algoritmos de PLE se basan en la explotación del enorme éxito computacional de la PL. La estrategia de estos algoritmos implica tres pasos.

- Paso 1.** Relaje el espacio de soluciones del PLE al eliminar la restricción entera en todas las variables enteras y reemplazar cualquier variable binaria y por el intervalo continuo $0 \leq y \leq 1$. El resultado del relajamiento es una PL regular.
- Paso 2.** Resuelva la PL e identifique su óptimo continuo.
- Paso 3.** A partir del punto óptimo continuo, agregue restricciones especiales que modifiquen iterativamente el espacio de soluciones de PL, de manera que finalmente se obtenga un punto extremo óptimo que satisfaga los requisitos enteros.

Se desarrollaron dos métodos generales para generar las restricciones especiales en el paso 3.

1. Método de ramificación y acotamiento (B&B, por *branch-and-bound*)
2. Método del plano cortante

Ninguno de los dos métodos es computacionalmente efectivo de manera consistente. Sin embargo, la experiencia indica que el método B&B es mucho más exitoso que el método del plano cortante.

9.2.1 Algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B)⁴

El primer algoritmo B&B fue desarrollado en 1960 por A. Land y G. Doig para el problema general de PLE combinada y pura. Después, en 1965, E. Balas desarrolló el **algoritmo aditivo** para resolver PLE con variables binarias puras (cero o uno).⁵ Los cálculos del algoritmo aditivo eran tan sencillos (principalmente sumas y restas), que en un inicio fueron aclamados como un posible parteaguas en la solución de las PLE generales. Por desgracia, no produjo las ventajas computacionales deseadas. Asimismo, se demostró que el algoritmo, que inicialmente no parecía estar relacionado con la técnica B&B, era simplemente un caso especial del algoritmo general de Land y Doig.

En esta sección se presenta solamente el algoritmo B&B de Land-Doig. Se utiliza un ejemplo numérico para presentar los detalles.

Ejemplo 9.2-1

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

x_1, x_2 enteras no negativas

Los puntos de cuadrícula en la figura 9.2 definen el espacio de soluciones de la PLE. El problema PL1 continuo asociado en el nodo 1 (área sombreada) se define a partir de la PLE eliminando las restricciones enteras. La solución óptima del PL1 es $x_1 = 3.75, x_2 = 1.25$ y $z = 23.75$.

Debido a que la solución óptima del PL1 no satisface las restricciones enteras, el espacio de soluciones se subdivide de una manera sistemática que a final de cuentas ubica el óptimo de la PLE. En primer lugar, el algoritmo B&B selecciona una variable entera cuyo valor óptimo en el PL1 no es entero. En este ejemplo, tanto x_1 como x_2 califican. Al seleccionar $x_1 (= 3.75)$ de manera arbitraria, la región $3 < x_1 < 4$ del espacio de soluciones del PL1 contiene valores no enteros de x_1 y, por consiguiente, puede eliminarse. Esto equivale a reemplazar el PL1 original con dos problemas de PL nuevos.

$$\text{Espacio del PL2} = \text{Espacio del PL1} + (x_1 \leq 3)$$

$$\text{Espacio del PL3} = \text{Espacio del PL1} + (x_1 \geq 4)$$

En la figura 9.3 se muestran los espacios de PL2 y PL3. Los dos espacios combinados contienen los mismos puntos enteros factibles que la PLE original, es decir, que no se pierde información cuando el PL1 se reemplaza por el PL2 y el PL3.

⁴ El módulo de programación entera de TORA está equipado con una función que genera interactivamente el árbol B&B. Para utilizarla, seleccione **User-guided B&B** en la pantalla de salida del módulo de programación entera. La pantalla resultante presenta toda la información necesaria para crear un árbol B&B.

⁵ Una PLE general puede expresarse en función de las variables binarias (0-1) de la manera siguiente. Dada una variable entera x con una cota superior finita u (es decir, $0 \leq x \leq u$), entonces,

$$x = 2^0y_0 + 2^1y_1 + 2^2y_2 + \dots + 2^ky_k$$

Las variables y_0, y_1, \dots, y_k son binarias, y el índice k es el entero más pequeño que satisface $2^{k+1} - 1 \geq u$.

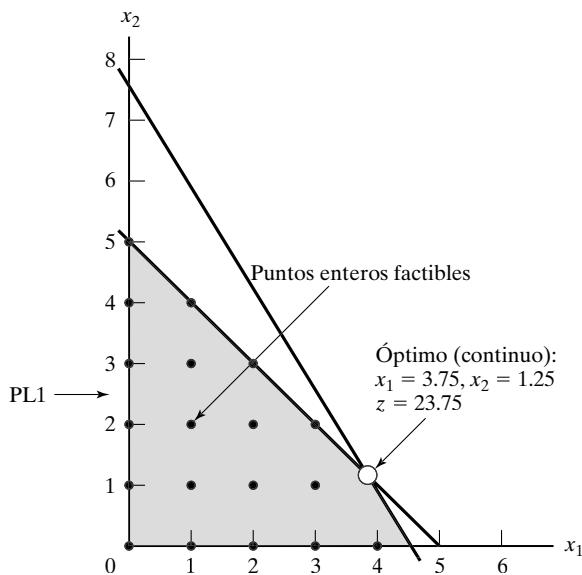


FIGURA 9.2

Espacio de soluciones de la PLE
(puntos de cuadrícula) y del PL1
(área sombreada) del ejemplo 9.2-1 (PL1)

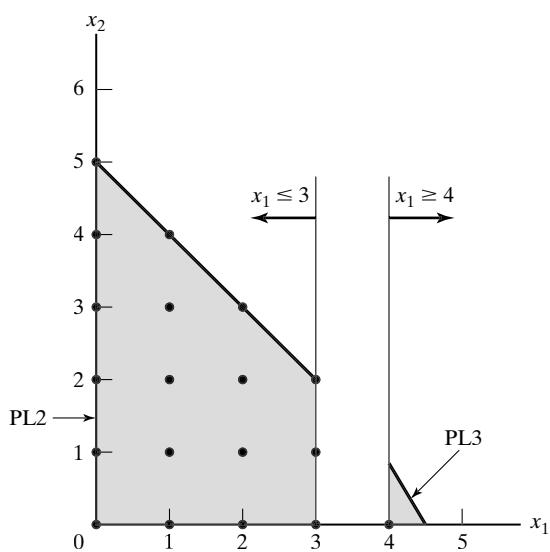


FIGURA 9.3

Espacios de soluciones del PL2 y el PL3
para el ejemplo 9.2-1

Si de manera inteligente se imponen restricciones secuenciales que excluyan las regiones libres de enteros (por ejemplo, $3 < x_1 < 4$ en el PL1), se reducirá el espacio de soluciones continuo del PL1 a varios subproblemas de programación lineal, cuyos puntos extremos óptimos satisfacen las restricciones enteras. El mejor de esos subproblemas es la solución óptima de PLE.

Las nuevas restricciones, $x_1 \leq 3$ y $x_1 \geq 4$, son mutuamente excluyentes, de modo que el PL2 y el PL3 en los nodos 2 y 3 deben tratarse como programaciones lineales distintas, como se muestra en la figura 9.4. Esta

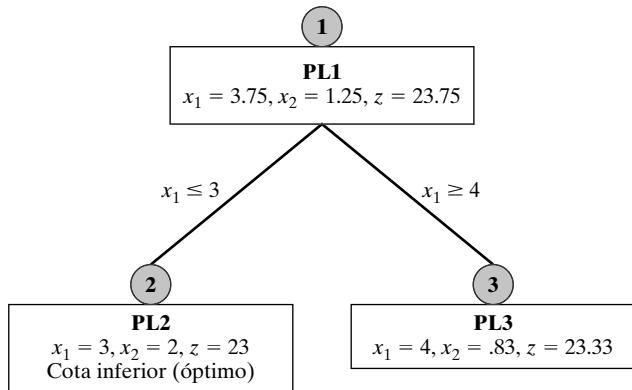


FIGURA 9.4

Uso de la variable de ramificación x_1 para crear el PL2 y el PL3 en el ejemplo 9.2-1

dicotomía da lugar al concepto de **ramificación** en el algoritmo B&B. En este caso, x_1 se llama **variable de ramificación**.

La PLE óptima cae *ya sea* en el PL2 o bien en el PL3. Por consiguiente, ambos subproblemas deben estudiarse. De manera arbitraria, se examina primero el PL2 (asociado con $x_1 \leq 3$):

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución del PL2 (que se puede obtener de manera eficiente con el algoritmo de acotamiento superior de la sección 7.3) es $x_1 = 3, x_2 = 2$ y $z = 23$. La solución del PL2 satisface los requisitos enteros para x_1 y x_2 . De ahí que se dice que el PL2 debe **sondearse a fondo**, lo cual significa que ya no puede dar una *mejor* solución de programación lineal entera ni se requiere ninguna otra ramificación que provenga del nodo 2.

En este punto no se puede decir que la solución entera obtenida con el PL2 sea óptima para el problema original, ya que el PL3 puede producir una mejor solución entera. Todo lo que se puede decir es que $z = 23$ es una **cota inferior** del valor objetivo óptimo (máximo) de la PLE original. Esto significa que cualquier subproblema no examinado, que no pueda producir un mejor valor objetivo que la cota inferior, debe desecharse como no promisorio. Si un subproblema no examinado produce una mejor solución entera, entonces el límite inferior debe actualizarse de la manera correspondiente.

Dada la cota inferior $z = 23$, se examina el PL3 (el único subproblema restante no examinado en este momento). Debido al óptimo $z = 23.75$ en el PL1 y a que todos los coeficientes de la función objetivo son enteros, es imposible que el PL3 genere una *mejor* solución entera (con $z > 23$). En consecuencia, se desecha el PL3 y se concluye que se *examinó a fondo*.

El algoritmo B&B ya está completo porque el PL2 y el PL3 se examinaron y sondearon a fondo: el primero para producir una solución entera y el segundo porque no produjo una *mejor* solución entera. Por lo tanto, se concluye que la solución de PLE óptima es la asociada con la cota inferior —a saber, $x_1 = 3, x_2 = 2$ y $z = 23$.

En relación con el algoritmo quedan dos preguntas sin responder:

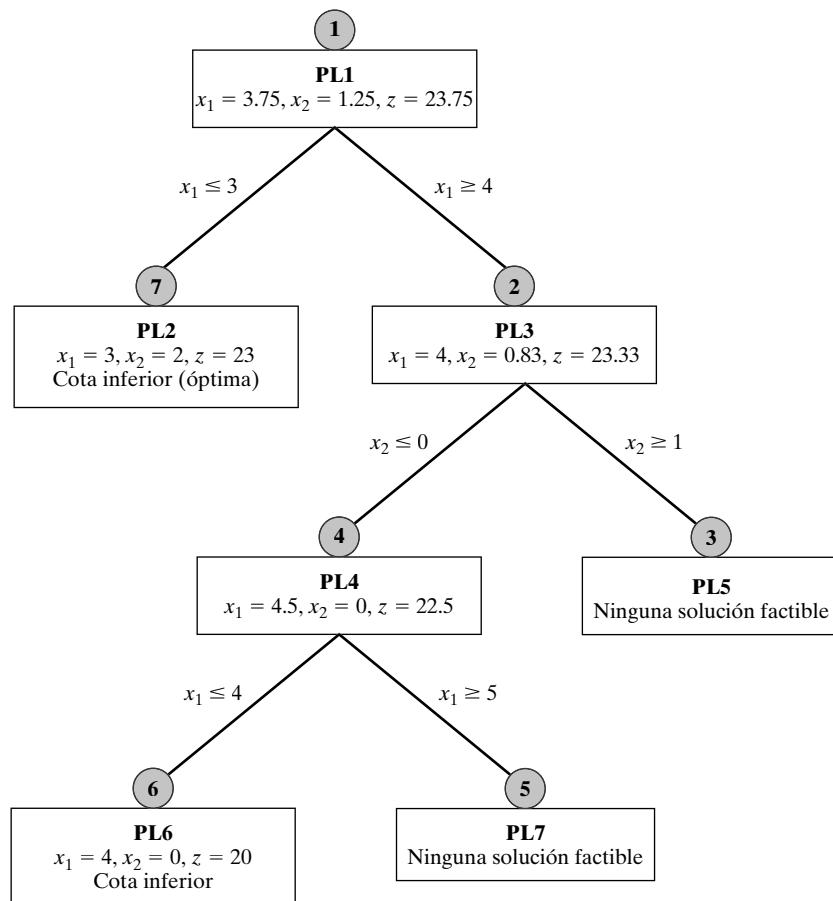
1. En el PL1, ¿se podría haber seleccionado x_2 como la *variable de ramificación* en vez de x_1 ?
2. Cuando se selecciona el siguiente subproblema a examinarse, ¿se podría haber solucionado primero el PL3 en vez del PL2?

La respuesta a ambas preguntas es “sí”, pero los cálculos subsiguientes pueden diferir drásticamente. En la figura 9.5 se demuestra este punto. Suponga que se examina primero el PL3 (en lugar del PL2 como se hizo en la figura 9.4). La solución es $x_1 = 4$, $x_2 = .83$ y $z = 23.33$ (¡verifíquelo!). Como $x_2 (= .83)$ no es entera, el PL3 se examina más a fondo creando los subproblemas PL4 y PL5 por medio de las ramas $x_2 \leq 0$ y $x_2 \geq 1$, respectivamente. Esto significa que

$$\begin{aligned}\text{Espacio del PL4} &= \text{Espacio del PL3} + (x_2 \leq 0) \\ &= \text{Espacio del PL1} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0) \\ \text{Espacio del PL5} &= \text{Espacio del PL3} + (x_2 \geq 1) \\ &= \text{Espacio del PL1} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \geq 1)\end{aligned}$$

FIGURA 9.5

Árbol B&B alternativo para el problema 9.2-1



Ahora se tienen tres subproblemas “desconectados” que se deben examinar: PL2, PL4 y PL5. Suponga que se examina arbitrariamente primero el PL5. No tiene ninguna solución factible y, por consiguiente, se sondeó a fondo. A continuación, se examina el PL4. La solución óptima es $x_1 = 4.5$, $x_2 = 0$ y $z = 22.5$. El valor no entero de x_1 conduce a las dos ramificaciones $x_1 \leq 4$ y $x_1 \geq 5$, y a la creación de los subproblemas PL6 y PL7 a partir del PL4.

$$\text{Espacio del PL6} = \text{Espacio del PL1} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0) + (x_1 \leq 4)$$

$$\text{Espacio del PL7} = \text{Espacio del PL1} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0) + (x_1 \geq 5)$$

Ahora, los subproblemas PL2, PL6 y PL7 permanecen sin ser examinados. Si se selecciona el PL7 para examinarlo, el problema está sondeado a fondo porque no tiene ninguna solución factible. A continuación, se selecciona el PL6. El problema da como resultado la primera solución entera ($x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $z = 20$) y, por lo tanto, proporciona la primera cota inferior (= 20) del valor objetivo óptimo de la PLE. Únicamente falta examinar el subproblema PL2, que genera una mejor solución entera ($x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $z = 23$). De este modo, la cota inferior se actualiza de $z = 20$ a $z = 23$. En este punto, se han sondeado (examinado) a fondo *todos* los subproblemas, y la solución óptima es la asociada con la cota inferior más actualizada, es decir, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ y $z = 23$.

La secuencia de solución en la figura 9.5 (PL1 → PL3 → PL5 → PL4 → PL7 → PL6 → PL2) se selecciona intencionalmente para representar un escenario del peor caso que, sin embargo, es probable que ocurra en la práctica. En la figura 9.4, se tuvo la suerte de “tropezar” con una buena cota inferior en el primer subproblema (PL2), que a su vez permitió examinar a fondo el PL3 sin examen adicional. En esencia, se completó el procedimiento resolviendo un total de dos subproblemas de PL. En la figura 9.5 la historia es diferente: se resolvieron siete subproblemas de PL para completar el algoritmo B&B.

Momento de AMPL

AMPL se utiliza interactivamente para generar el árbol de búsqueda B&B. En la siguiente tabla se muestra la secuencia de comandos necesarios para generar el árbol del ejemplo 9.2-1 (figura 9.5) a partir del PL1 continuo. El modelo de AMPL (archivo *amplEx9.2-1.txt*) tiene dos variables x_1 y x_2 y dos restricciones c_0 y c_1 . Encuentra útil sincronizar los comandos de AMPL con las ramas de la figura 9.5.

Comando de AMPL	Resultado
ampl: model amplEx9.2-1.txt; solve; display x1,x2;	PL1 ($x_1 = 3.75$, $x_2 = 1.25$)
ampl: c2:x1>=4;solve;display x1,x2;	PL3 ($x_1 = 4$, $x_2 = .83$)
ampl: c3:x2>=1;solve;display x1,x2;	PL5 (sin solución)
ampl: drop c3;c4:x2<=0;solve;display x1,x2;	PL4 ($x_1 = 4.5$, $x_2 = 0$)
ampl: c5:x1>=5;solve;display x1,x2;	PL7 (sin solución)
ampl: drop c5;c6:x1<=4;solve;display x1,x2;	PL6 ($x_1 = 4$, $x_2 = 0$)
ampl: drop c2;drop c4;drop c6;c7:x1<=3; solve; display x1,x2;	PL2 ($x_1 = 3$, $x_2 = 2$)

Momento de Solver

Solver puede utilizarse para obtener la solución de los diferentes subproblemas mediante el uso de las opciones add/change/delete en el cuadro de diálogo **Solver Parameters**.

Comentarios. El ejemplo 9.2-1 apunta hacia una debilidad importante en el algoritmo B&B. Dado que se tienen múltiples opciones, ¿cómo se selecciona el siguiente subproblema y su variable

de ramificación? Al responder a esta pregunta, sólo hay un objetivo en mente: *¡Encontrar una (buena) solución entera factible lo antes posible!* Este objetivo, aunque se afirma cualitativamente, es de suma importancia. La razón es simple: encontrar pronto una (buena) solución entera factible en el árbol de búsqueda evitaría tener que explorar subproblemas y, por lo tanto, aceleraría la terminación de la búsqueda. Pero ¿cómo se encuentra una (buena) solución factible? Hay tres posibilidades:

1. Usar una solución óptima de PL redondeada si se puede determinar la factibilidad.
2. Utilizar la programación heurística para encontrar una buena solución factible (vea el capítulo 10).
3. Emplear la heurística adecuada para seleccionar el siguiente subproblema y su variable de ramificación.

La primera posibilidad es dudosa en el mejor de los casos, sobre todo en modelos grandes con restricciones de igualdad. La segunda es plausible aunque costosa computacionalmente y la tercera es donde se ha concentrado la mayoría de la investigación.

La idea general de la tercera estrategia se basa en dos opciones amplias con marcadas concesiones: (1) Es más probable que un subproblema de escalón alto (más cercano al inicio del árbol de búsqueda) produzca una cota objetivo más estrecha (ya que está más cerca —es decir, a menos restricciones adicionales— del óptimo del PL continuo); pero es menos probable que produzca una solución entera factible (debido al menor número de restricciones de ramificación entera que conducen al subproblema). (2) Por el contrario, es más probable que un subproblema de escalón bajo produzca una solución entera factible, pero menos probable que genere una cota estrecha del valor objetivo. En esencia, la primera opción explora los subproblemas horizontalmente en un escalón antes de pasar al escalón siguiente, mientras que la segunda opción explora los (tipos de) subproblemas en forma vertical. Sin embargo, las dos opciones aún no se ocupan de cómo se selecciona una variable de ramificación en cada subproblema.

Aunque existen heurísticas para la selección del siguiente subproblema y de su variable de ramificación, la experiencia computacional muestra que la eficacia de estas heurísticas depende de los datos. En vista de esa dificultad, el software de PLE no suele ser suficientemente sofisticado para utilizarse como una caja negra de entrada-salida como en el software de PL, lo cual significa que hay casos donde la intervención manual es necesaria para “ajustar” la búsqueda B&B. Por ejemplo, la búsqueda puede alternarse periódicamente entre la selección horizontal y vertical del siguiente subproblema, con la esperanza de encontrar una buena cota del valor objetivo. De hecho, todos los paquetes de PLE comerciales permiten esa intervención manual. Los comandos utilizados en el *Momento de AMPL*, posterior al ejemplo 9.2-1, muestran un ejemplo típico.

El hecho recuerda que los algoritmos de programación enteros no son totalmente confiables. Pero tal vez su desempeño se mejore ajustando el propio modelo de PLE. Una posibilidad es buscar una formulación con el número más pequeño posible de variables enteras (es decir, aproximar algunas de las variables enteras con variables continuas). Otra consiste en ajustar los intervalos factibles sobre las variables enteras tanto como sea posible. Y una tercera es emplear un lugar de solución diferente en conjunto (por ejemplo, los problemas de mochila se pueden formular como un modelo de red con las rutas más cortas). Pero quizás la posibilidad más plausible sea conformarse con una solución casi óptima usando la heurística. El capítulo 10, que trata de la programación heurística, proporciona tres heurísticas de este tipo.

Resumen del algoritmo B&B. Suponga un problema de maximización. Establezca una cota inferior inicial $z = -\infty$ para el valor objetivo óptimo de la PLE y establezca $i = 0$.⁶

Paso 1. (*Sondeo/acotamiento*). Seleccione PL_i , el siguiente subproblema a examinarse. Resuelva PL_i e intente sondearlo utilizando una de las siguientes tres condiciones:

- (a) El valor de z óptimo de PL_i no puede ser un mejor valor objetivo que la cota inferior actual.
- (b) PL_i resulta en una mejor solución entera factible que la cota inferior actual.
- (c) PL_i no tiene ninguna solución factible.

Surgirán dos casos.

- (a) Si PL_i se examina a fondo y se determina una mejor solución, actualice la cota inferior. Si todos los subproblemas se han sondeado, deténgase; la cota inferior da la solución óptima (si no existe una cota inferior finita, el problema no tiene ninguna solución factible). En caso contrario, establezca $i = i + 1$, y repita el paso 1.
- (b) Si PL_i no se ha sondado, vaya al paso 2 para la ramificación.

Paso 2. (*Ramificación*). Seleccione una de las variables enteras x_j , cuyo valor óptimo x_j^* en la solución del PL_i no sea entero. Cree los dos subproblemas de PL correspondientes a

$$x_j \leq [x_j^*] \text{ y } x_j \geq [x_j^*] + 1$$

Establezca $i = i + 1$, y vaya al paso 1.

El algoritmo B&B puede ampliarse a problemas combinados (donde sólo algunas de las variables son enteras). Nunca se selecciona una variable continua como variable de ramificación. Un subproblema factible ofrece una nueva cota del valor objetivo si los valores de las variables discretas son enteros con un valor objetivo mejorado.

9.2.2 Algoritmo de plano cortante

Como en el algoritmo B&B, el algoritmo de plano cortante también inicia en la solución óptima continua de PL. Se agregan restricciones especiales (llamadas **cortes**) al espacio de soluciones para que produzcan un punto extremo óptimo entero. En el ejemplo 9.2-2, primero se muestra gráficamente la manera de utilizar los cortes para producir una solución entera, y después cómo se implementa la idea algebraicamente.

Ejemplo 9.2-2

Considere la siguiente PLE.

$$\text{Maximizar } z = 7x_1 + 10x_2$$

sujeto a

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$7x_1 + x_2 \leq 35$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y entera}$$

⁶ Para problemas de minimización, reemplace la cota inferior por una cota superior inicial $z = +\infty$.

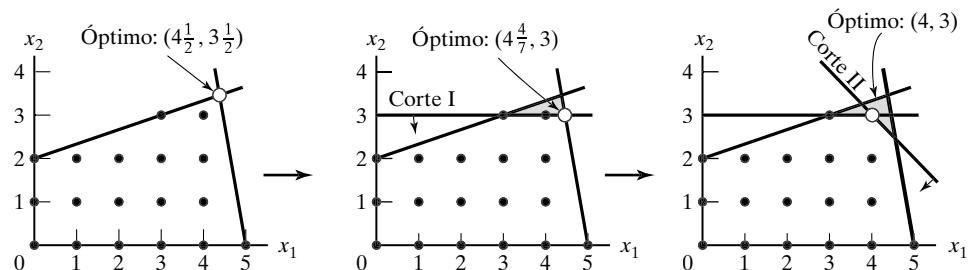


FIGURA 9.6

Ilustración del uso de cortes en una PLE

En la figura 9.6 se presenta un ejemplo de los dos cortes. Se inicia con la solución óptima continua de la PL $z = 66\frac{1}{2}$, $x_1 = 4\frac{1}{2}$, $x_2 = 3\frac{1}{2}$. Luego se agrega el corte 1, que produce la solución óptima (continua) de la PL $z = 62$, $x_1 = 4\frac{4}{7}$, $x_2 = 3$. Se agrega posteriormente el corte II, que (junto con el corte I y las restricciones originales) produce la solución óptima entera de la PL, $z = 58$, $x_1 = 4$, $x_2 = 3$.

Los cortes agregados no eliminan ninguno de los puntos enteros factibles originales, pero deben pasar al menos por un punto entero factible o no factible. Éstos son los requisitos básicos de cualquier corte.

Es meramente accidental que un problema de 2 variables requiera exactamente 2 cortes para llegar a la solución entera óptima. En general, el número de cortes, aun cuando sea finito, no puede determinarse con base en el tamaño del problema, en el sentido de que un problema pequeño quizás requiera más cortes que uno grande.

En seguida se utiliza el mismo ejemplo para mostrar cómo se construyen los cortes y se implementan algebraicamente. Dadas las holguras x_3 y x_4 para las restricciones 1 y 2, la tabla de PL óptima se da como

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
Z	0	0	$\frac{63}{22}$	$\frac{31}{22}$	$66\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$3\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$4\frac{1}{2}$

La solución óptima continua es $z = 66\frac{1}{2}$, $x_1 = 4\frac{1}{2}$, $x_2 = 3\frac{1}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. El corte se desarrolla de acuerdo con el supuesto de que *todas* las variables, *incluidas las holguras*, son enteras. Asimismo, observe que, como en este ejemplo todos los coeficientes objetivo originales son enteros, el valor de z también lo es.

La información en la tabla óptima puede escribirse explícitamente como

$$z + \frac{63}{22}x_3 + \frac{31}{22}x_4 = 66\frac{1}{2} \quad (\text{ecuación } z)$$

$$x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{1}{22}x_4 = 3\frac{1}{2} \quad (\text{ecuación } x_2)$$

$$x_1 - \frac{1}{22}x_3 + \frac{3}{22}x_4 = 4\frac{1}{2} \quad (\text{ecuación } x_1)$$

Se puede utilizar una ecuación de restricción como **fila origen** para generar un corte, siempre que su lado derecho sea fraccionario. Asimismo, en este ejemplo la ecuación z puede utilizarse como fila origen porque aquí z

es una expresión entera. Se demostrará cómo se genera un corte con cada una de esas filas origen, comenzando con la ecuación z .

Primero se factorizan todos los coeficientes no enteros de la ecuación en un valor entero y un componente fraccionario *positivo*. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\frac{5}{2} &= \left(2 + \frac{1}{2}\right) \\ -\frac{7}{3} &= \left(-3 + \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

La factorización de la ecuación z resulta en

$$z + \left(2 + \frac{19}{22}\right)x_3 + \left(1 + \frac{9}{22}\right)x_4 = \left(66 + \frac{1}{2}\right)$$

Si se mueven todos los componentes enteros al lado izquierdo y todos los componentes fraccionarios al lado derecho, se obtiene

$$z + 2x_3 + 1x_4 - 66 = -\frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4 + \frac{1}{2} \quad (1)$$

Dado que x_3 y x_4 son no negativas (y todas las fracciones son positivas por construcción), el lado derecho debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$-\frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \quad (2)$$

Ahora, como el lado izquierdo de la ecuación (1), $z + 2x_3 + 1x_4 - 66$, es un valor entero por construcción, el lado derecho, $-\frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4 + \frac{1}{2}$, también debe ser entero. Se deduce entonces que (2) puede reemplazarse con la desigualdad:

$$-\frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4 + \frac{1}{2} \leq 0$$

Este resultado se justifica porque un valor entero menor que una fracción positiva necesariamente debe ser ≤ 0 .

La última desigualdad es el corte deseado, y representa una condición *necesaria* (pero no suficiente) para obtener una solución entera. También se conoce como **corte fraccionario** porque todos sus coeficientes son fracciones.

Como $x_3 = x_4 = 0$ en la tabla de PL continua óptima dada anteriormente, la solución continua actual infringe el corte (porque resulta en $\frac{1}{2} \leq 0$). Por lo tanto, si se agrega este corte a la tabla óptima, el punto extremo óptimo resultante mueve la solución hacia la satisfacción de las restricciones enteras.

Antes de demostrar cómo se implementa un corte en la tabla óptima, se demostrará cómo también se pueden construir cortes a partir de las ecuaciones de restricción. Considere la fila x_1 :

$$x_1 - \frac{1}{22}x_3 + \frac{3}{22}x_4 = 4\frac{1}{2}$$

Al factorizar la ecuación, se obtiene

$$x_1 + \left(-1 + \frac{21}{22}\right)x_3 + \left(0 + \frac{3}{22}\right)x_4 = \left(4 + \frac{1}{2}\right)$$

El corte asociado es

$$-\frac{21}{22}x_3 - \frac{3}{22}x_4 + \frac{1}{2} \leq 0$$

De manera semejante, la ecuación x_2

$$x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{1}{22}x_4 = 3\frac{1}{2}$$

se factoriza como

$$x_2 + \left(0 + \frac{7}{22}\right)x_3 + \left(0 + \frac{1}{22}\right)x_4 = 3 + \frac{1}{2}$$

Por consiguiente, el corte asociado es

$$-\frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 + \frac{1}{2} \leq 0$$

Cualquiera de los tres cortes dados anteriormente puede usarse en la primera iteración del algoritmo de plano cortante. No es necesario generar los tres cortes antes de elegir uno.

Si se selecciona arbitrariamente el corte generado con la fila x_2 , se escribe en forma de ecuación como

$$-\frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 + s_1 = -\frac{1}{2}, s_1 \geq 0 \quad (\text{Corte I})$$

Esta restricción se agrega a la tabla óptima de PL como sigue:

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Solución
z	0	0	$\frac{63}{22}$	$\frac{31}{22}$	0	$66\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	0	$3\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	0	$4\frac{1}{2}$
s_1	0	0	$-\frac{7}{22}$	$-\frac{1}{22}$	1	$-\frac{1}{2}$

La tabla es óptima pero no factible. Se aplica el método simplex dual (sección 4.4.1) para recuperar la factibilidad, lo que resulta en

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Solución
z	0	0	0	1	9	62
x_2	0	1	0	0	1	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$4\frac{4}{7}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	$1\frac{4}{7}$

La última solución sigue siendo no entera en x_1 y x_3 (recuerde que *todas* las variables deben ser enteras, incluidas la de holgura y la de excedencia), y arbitrariamente se selecciona x_1 como la siguiente fila origen, es decir,

$$x_1 + (0 + \frac{1}{7})x_4 + (-1 + \frac{6}{7})s_1 = 4 + \frac{4}{7}$$

El corte asociado es

$$-\frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}s_1 + s_2 = -\frac{4}{7}, s_2 \geq 0 \quad (\text{Corte II})$$

Si se agrega el corte II a la tabla óptima previa, se obtiene

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Solución
z	0	0	0	1	9	0	62
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$4\frac{4}{7}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	0	$1\frac{4}{7}$
s_2	0	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{6}{7}$	1	$-\frac{4}{7}$

El método simplex dual genera la siguiente tabla:

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Solución
z	0	0	0	0	3	7	58
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	0	-1	1	4
x_3	0	0	1	0	-4	1	1
x_4	0	0	0	1	6	-7	4

La solución óptima ($x_1 = 4, x_2 = 3, z = 58$) es totalmente entera. No es accidental que todos los coeficientes de la última tabla sean también enteros, una consecuencia de utilizar cortes fraccionarios.

Comentarios. Es importante señalar que el corte fraccionario supone que *todas* las variables, *incluidas las de holgura y excedencia* son enteras, lo cual significa que el corte trata sólo con problemas enteros puros. La importancia de este supuesto se ilustra con un ejemplo.

Consideré la restricción

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq \frac{13}{2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y entera}$$

Desde el punto de vista de la resolución de la PLE asociada, la restricción se trata como una ecuación utilizando la holgura no negativa s_1 , es decir,

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 + s_1 = \frac{13}{2}$$

La aplicación del corte fraccionario supone que la restricción tiene una solución *entera* factible en x_1, x_2 y s_1 . Sin embargo, la ecuación dada tendrá una solución entera factible en x_1 y x_2 sólo si s_1 es no entera. Lo anterior significa que el algoritmo de plano cortante concluirá, a través de las aplicaciones del simplex dual, que el problema no tiene una solución factible (entera), aunque las variables de interés, x_1 y x_2 , pueden asumir valores enteros factibles.

Hay dos formas de “remediar” esa situación.

1. Multiplique la restricción entera por una constante apropiada para eliminar todas las fracciones. Por ejemplo, al multiplicar la restricción anterior por 6, se obtiene

$$6x_1 + 2x_2 \leq 39$$

Cualquier solución entera de x_1 y x_2 automáticamente produce una holgura entera. No obstante, en algunos casos este tipo de conversión puede producir coeficientes enteros excesivamente grandes, lo cual a su vez conduciría a errores de redondeo de cálculo en la computadora.

2. Use un corte especial llamado **corte mixto**, el cual permite que sólo un subconjunto de variables asuma valores enteros, y que todas las demás variables (incluidas las de holgura y excedencia) permanezcan continuas. Los detalles de este corte no se presentarán en este capítulo (vea Taha, 1975, pp. 198-202).

Un error inevitable de la aritmética de punto flotante en la computadora es el error de redondeo. Las fracciones como $1/3$ se aproximan como .33333, y sin importar cuántos números 3 se agreguen, la representación seguirá siendo una aproximación. Esto implica uno de los desafíos más serios en el uso del corte fraccionario, cuya construcción, irónicamente, descansa directamente en el uso de fracciones. Aunque se hicieron intentos para evitar el uso de fracciones mediante el uso de los denominados cortes *enteros*, que requieren una tabla inicial completamente entera (¡una condición de ini-

cio irracional!), el algoritmo resultante es extremadamente lento porque al buscar la precisión evita la velocidad. Otra desventaja de los algoritmos del plano cortante es su doble inviabilidad, es decir, no hay solución factible disponible antes de la terminación natural del algoritmo. Por consiguiente, a diferencia del algoritmo B&B, no habrá solución para demostrar si los cálculos se detienen prematuramente. La conclusión es que, desde el punto de vista práctico, no se recomienda un algoritmo de PLE con raíces tan sólo en el uso de cortes, por lo que el algoritmo de ramificación y acotamiento es el elegido en todos los solucionadores (de hecho, Ralph Gomory, el mismo desarrollador del corte fraccionario, era escéptico sobre la practicidad de un algoritmo de PLE basado en un corte fraccionario, debido a la inestabilidad numérica resultante).

Sin embargo, los cortes suelen desempeñar un papel en el incremento de la eficiencia y la eficacia del algoritmo de ramificación y acotamiento, al aplicarlos periódicamente a la tabla óptima de un subproblema donde la degeneración masiva en su punto extremo óptimo puede dificultar la determinación de las ramas asociadas (del tipo $x \leq a$ y $x \geq a + 1$).⁷

Momento, ¡ajá! Desarrollo seminal del corte de Dantzig-Fulkerson-Johnson⁸

El algoritmo de ramificación y corte desarrollado en 1954 por Dantzig, Fulkerson y Johnson para resolver el problema del agente viajero (vea el capítulo 11) es seminal en el sentido de que dio comienzo a la idea de imponer restricciones secundarias (cortes) sobre el óptimo (continuo) de PL, con la finalidad de producir una solución óptima entera. Su trabajo sentó las bases para el desarrollo del algoritmo de ramificación y corte para la PLE mixta general. Además, la idea de los autores de usar cortes motivó el desarrollo del corte fraccionario de Gomory en 1958 (vea la sección 9.2.2).

BIBLIOGRAFÍA

- Barnett, A., “Misapplication Review: High Road to Glory”, *Interfaces*, vol. 17, núm. 5, pp. 51-54, 1987.
- Chen, D. S., R. Batson y Y. Dang, *Applied Integer Programming: Modeling and Solutions*, Wiley, Nueva York, 2010.
- Eiselt, H. y C. Sandblom, *Integer Programming and Network Models*, Springer, Nueva York, 2000.
- Gavirneni, S., C. Clark y G. Pataki, “Schlumberger Optimizes Receiver Location for Automated Meter Reading”, *Interfaces*, vol. 34, núm. 3, pp. 208-214, 2004.
- Graves, R., L. Schrage y J. Sankaran, “An Auction Method for Course Registration”, *Interfaces*, vol. 23, núm. 5, pp. 81-97, 1993.
- Guéret, C., C. Prins y M. Sevaux, *Applications of Optimization with Xpress-MP*, Dash Optimization, Londres, 2002.
- Lee, J., *A First Course in Combinatorial Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- Nemhauser, G y L. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, Nueva York, 1988.
- Pochet, Y. y L. Wolsey, *Production Planning by Mixed Integer Programming*, Springer, Nueva York, 2010.
- Schrijver, A., *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley, Nueva York, 1998.

⁷ Cornuejols, G. “Revival of the Gomory Cuts in the 1990s”, *Annals of Operations Research*, vol. 149, pp. 63-66, 2007.

⁸ Dantzig, G. B., D. R. Fulkerson y S. Johnson, “Solution of a Large Scale Traveling Salesman Problem”, *Operations Research*, vol. 2, pp. 393-410, 1954.

Taha, H., *Integer Programming: Theory, Applications, and Computations*, Academic Press, Orlando, FL, 1975.

Weber, G., "Puzzle contests in MS/OR Education," *Interfaces*, vol. 20, núm. 2, pp. 72-76, 1990.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados
9.1.1	9-1 a 9-18
9.1.2	9-19 a 9-27
9.1.3	9-28 a 9-37
9.1.4	9-38 a 9-54
9.2.1	9-55 a 9-64
9.2.2	9-65 a 9-70

- 9-1.** Modifique y resuelva el modelo de presupuesto de capital del ejemplo 9.1-1, de modo que tome en cuenta las siguientes restricciones adicionales:
- (a) Si se selecciona el proyecto 1 o el proyecto 3, debe seleccionarse el proyecto 5.
 - (b) Los proyectos 2 y 3 son mutuamente excluyentes.
- 9-2.** Se van a cargar cinco artículos en un contenedor. A continuación se tabulan el peso w_i , el volumen v_i y el valor r_i del artículo i .

Artículo i	Peso unitario, w_i (toneladas)	Volumen unitario, v_i (yd^3)	Valor unitario, r_i (\$100)
1	5	1	4
2	8	8	7
3	3	6	6
4	2	5	5
5	7	4	4

El peso y el volumen máximos permisibles para la carga son 112 toneladas y 109 yd^3 , respectivamente. Formule el modelo de PLE, y determine la carga más valiosa.

- *9-3.** Suponga que tiene 7 botellas de vino llenas, 7 a la mitad y 7 vacías. Le gustaría dividir las 21 botellas entre tres individuos, de modo que cada uno reciba exactamente 7. Además, cada individuo debe recibir la misma cantidad de vino. Exprese el problema como restricciones de PLE, y encuentre una solución (*sugerencia:* Use una función objetivo ficticia en la que todos los coeficientes objetivo sean cero).⁹
- 9-4.** Un excéntrico jeque dejó testamento para distribuir un rebaño de camellos entre sus tres hijos: Tarek recibe al menos la mitad del rebaño, Sharif obtiene al menos una tercera parte y Maisa recibe al menos un noveno. El resto se destina a la caridad. El testamento no especifica el tamaño del rebaño, pues sólo señala que es un número impar de camellos y que la institución de caridad nombrada recibe exactamente un camello. Use la PLE para determinar cuántos camellos dejó el jeque en el testamento y cuántos obtiene cada hijo.
- 9-5.** Una pareja de granjeros envía a sus tres hijos al mercado para que vendan 90 manzanas; Karen, la mayor, lleva 50 manzanas; Bill, el de en medio, lleva 30; y John, el más joven, lleva sólo 10. Los padres han estipulado

⁹ Los problemas 9-3 a 9-6 son adaptaciones de Malba Tahan, *El hombre que calculaba*, Editorial Limusa, Ciudad de México, pp. 39-182, 1994.

lado cinco reglas: (a) el precio de venta es de \$1 por 7 manzanas o \$3 por 1 manzana; o una combinación de ambos precios. (b) Cada hijo puede ejercer una o ambas opciones del precio de venta. (c) Cada uno debe regresar con exactamente la misma cantidad de dinero. (d) El ingreso de cada hijo debe ser en dólares enteros (no se permiten centavos). (e) La cantidad recibida por cada hijo debe ser la máxima posible según las condiciones estipuladas. Dado que los tres hijos son capaces de vender todo lo que llevan, use la PLE para demostrar cómo se satisfacen las condiciones de los padres.

- *9-6.** Había una vez un capitán de un barco mercante que deseaba recompensar a tres miembros de la tripulación por su valiente esfuerzo al salvar la carga del barco durante una inesperada tormenta en alta mar. El capitán apartó una suma de dinero en la oficina del sobrecargo e instruyó al primer oficial para que la distribuyera en partes iguales entre los tres marineros después de que el barco atracara. Una noche, uno de los marineros, sin que los otros supieran, se dirigió a la oficina del sobrecargo y decidió reclamar un tercio (equitativo) del dinero de forma anticipada. Después de que dividió el dinero en tres partes iguales sobró una moneda, la que el marinero decidió conservar (además de un tercio del dinero). La noche siguiente, el segundo marinero tuvo la misma idea y repitió la misma división en tres partes con lo que quedó, y terminó quedándose con una moneda extra. La tercera noche el tercer marinero también tomó una tercera parte de lo que quedaba, más una moneda extra que no podía dividirse. Cuando el barco arribó, el primer oficial dividió lo que restaba del dinero en partes iguales entre los tres marineros, quedando de nuevo una moneda extra. Para simplificar las cosas, el primer oficial apartó la moneda extra y les dio a los marineros sus partes iguales asignadas. ¿Cuánto dinero había en la caja fuerte al inicio? Formule el problema como una PLE, y encuentre la solución (*sugerencia:* El problema tiene una infinidad de soluciones enteras. Por conveniencia, suponga que se desea determinar la suma mínima de dinero que satisfaga las condiciones del problema. Luego, aumente uno a la suma resultante, y agréguelo como cota inferior para obtener la siguiente suma mínima. Continuando de esta manera, surgirá un patrón de la solución general).
- 9-7.** *Weber (1990).* Se tienen las siguientes palabras de tres letras: AFT, FAR, TVA, ADV, JOE, FIN, OSF y KEN. Suponga que se le asignan valores numéricos al alfabeto comenzando con $A = 1$ y terminando con $Z = 26$. A cada palabra se le asigna una puntuación sumando los códigos numéricos de sus tres letras. Por ejemplo, AFT tiene una puntuación de $1 + 6 + 20 = 27$. Debe seleccionar cinco de las ocho palabras dadas que den la puntuación máxima total. Al mismo tiempo, las cinco palabras deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\left(\begin{array}{c} \text{suma de las puntuaciones} \\ \text{de la letra 1} \end{array} \right) < \left(\begin{array}{c} \text{suma de las puntuaciones} \\ \text{de la letra 2} \end{array} \right) < \left(\begin{array}{c} \text{suma de las puntuaciones} \\ \text{de la letra 3} \end{array} \right)$$

Formule el problema como una PLE y encuentre la solución óptima.

- 9-8.** Resuelva el problema 9-7 dado que, además de que la suma total es máxima, la suma de la columna 1 y la suma de la columna 2 también serán máximas. Encuentre la solución óptima.
- 9-9.** *Weber (1990).* Considere los siguientes dos grupos de palabras:

Grupo 1	Grupo 2
AREA	ERST
FORT	FOOT
HOPE	HEAT
SPAR	PAST
THAT	PROF
TREE	STOP

Todas las palabras en los grupos 1 y 2 se pueden formar con las nueve letras A, E, F, H, O, P, R, S y T. Desarrolle un modelo para asignar un valor numérico único de 1 a 9 a estas letras, de modo que la

diferencia entre las puntuaciones totales de los dos grupos sea lo más pequeña posible.
 (nota: La puntuación para una palabra es la suma de los valores numéricos asignados a sus letras individuales).

- *9-10.** La compañía Record-a-Song contrató a una estrella en ascenso para que grabe ocho canciones. Los tamaños de las diferentes canciones son de 8, 3, 5, 5, 9, 6, 7 y 12 MB, respectivamente. Record-a-Song utiliza dos CD para la grabación. La capacidad de cada CD es de 30 MB. A la compañía le gustaría distribuir las canciones en los dos CD, de modo que el espacio utilizado en cada uno sea aproximadamente el mismo. Formule el problema como una programación lineal entera y encuentre la solución óptima.
- 9-11.** En el problema 9-10, suponga que la naturaleza de las melodías dicta que las canciones 3 y 4 no pueden grabarse en el mismo CD. Formule el problema como una PLE. ¿Sería posible utilizar un CD de 25 MB para grabar las ocho canciones? Si no, utilice la PLE para determinar la capacidad mínima del CD para realizar la grabación.
- *9-12.** *Graves y colaboradores (1993).* La Ulern University utiliza un modelo matemático que optimiza las preferencias de los estudiantes tomando en cuenta la limitación de los salones de clases y el profesorado. Para demostrar la aplicación del modelo, considere el caso simplificado de 10 estudiantes a quienes se les pidió que seleccionaran dos cursos de entre seis ofrecidos. La tabla siguiente muestra las puntuaciones que representan la preferencia de cada estudiante por los cursos individuales, con 100 como la calificación más alta. Por sencillez, se supone que la puntuación de la preferencia de una selección de dos cursos es la suma de las puntuaciones individuales. La capacidad del curso es el número máximo de estudiantes que pueden tomar la clase.

Estudiante	Puntuación de preferencia por curso					
	1	2	3	4	5	6
1	20	40	50	30	90	100
2	90	100	80	70	10	40
3	25	40	30	80	95	90
4	80	50	60	80	30	40
5	75	60	90	100	50	40
6	60	40	90	10	80	80
7	45	40	70	60	55	60
8	30	100	40	70	90	55
9	80	60	100	70	65	80
10	40	60	80	100	90	10
Capacidad del curso	6	8	5	5	6	5

Formule el problema como una PLE y encuentre la solución óptima.

- 9-13.** Usted tiene tres denominaciones de moneda con 11 monedas de cada una. El valor *total* (de las 11 monedas) es de 15 bits para la denominación 1, 16 para la denominación 2 y 17 bits para la 3. Usted necesita comprar un artículo de 11 bits. Use la PLE para determinar la cantidad mínima de monedas de las tres denominaciones que se requieren para realizar la compra.¹⁰
- 9-14.** Usted tiene una cuadrícula de 4×4 casillas y un total de 10 fichas. Use la PLE para colocar las fichas en la cuadrícula, de modo que cada fila y cada columna tengan un número par de fichas.
- 9-15.** A un vendedor itinerante que vende aparatos electrónicos le robaron toda su mercancía. Cuando denunció el hecho a la policía, el vendedor no supo decir cuántos aparatos tenía, pero declaró que cuando dividía

¹⁰ Los problemas 9-13 a 9-16 son una adaptación de acertijos recopilados en <http://www.chlond.demon.co.uk/puzzles/puzzles1.html>.

el total en lotes de 2, 3, 4, 5 o 6, siempre sobraba un aparato. Por otro lado, no sobraba ninguno cuando el total se dividía en lotes de 7. Use la PLE para determinar el total de aparatos que tenía el vendedor.

- 9-16.** Dada $i = 1, 2, \dots, n$, formule un modelo general de PLE (para cualquier n) que determine el número mínimo y que, cuando se divide entre la cantidad entera $2 + i$, siempre produzca un remanente igual a i ; es decir, $y \text{ mod } (2 + i) = i$.
- 9-17.** Un acertijo muy conocido requiere que se asigne un solo dígito *distinto* (de 0 a 9) a cada letra de la ecuación SEND + MORE = MONEY. Formule el problema como un programa entero y encuentre la solución (*sugerencia*: Éste es un modelo de asignación con condiciones laterales).
- 9-18.** El acertijo lógico japonés mundialmente conocido, Sudoku, se compone de una cuadrícula de 9×9 subdividida en 9 subcuadrículas de 3×3 que no se traslapan. El acertijo consiste en asignar los dígitos numéricos de 1 a 9 a las celdas de la cuadrícula, de modo que cada fila, cada columna y cada subcuadrícula, contenga dígitos distintos. Algunas de las celdas pueden fijarse con anticipación.

Formule el problema como un programa entero, y encuentre la solución para el caso dado a continuación.

	6		1		4		5	
		8	3		5	6		
2						7		
8			4		7			6
		6				3		
7			9		1			4
5								2
		7	2		6	9		
	4		5		8		7	

[*Sugerencia*: Sea $x_{ijk} = 1$ si se coloca el dígito k en la celda (i, j) , $i, j, k = 1, 2, \dots, n, n = 9$. Si utiliza AMPL, tenga en cuenta que con $n = 9$, la cantidad de variables que resulte excederá la capacidad de la versión estudiantil de AMPL. Si no tiene acceso a la versión completa de AMPL, puede desarrollar un modelo general para $n = 4$ o 9, y luego resolverlo para el caso más sencillo (casi trivial) de una cuadrícula de 4×4 con una subcuadrícula de 2×2 .

- *9-19.** ABC es una compañía de transporte (de menos de una carga de camión) que entrega cargas a diario a cinco clientes. La siguiente lista presenta los clientes asociados con cada ruta:

Ruta	Clientes atendidos en la ruta
1	1, 2, 3, 4
2	4, 3, 5
3	1, 2, 5
4	2, 3, 5
5	1, 4, 2
6	1, 3, 5

Los segmentos de cada ruta están determinados por la capacidad del camión que entrega las cargas. Por ejemplo, en la ruta 1, la capacidad del camión sólo es suficiente para entregar las cargas a los

clientes 1, 2, 3 y 4. En la siguiente tabla se indican las distancias (en millas) entre la terminal de camiones (ABC) y los clientes.

		Millas de i a j						
		j	ABC	1	2	3	4	5
i	j							
	ABC	0	10	12	16	9	8	
1		10	0	32	8	17	10	
2		12	32	0	14	21	20	
3		16	8	14	0	15	18	
4		9	17	21	15	0	11	
5		8	10	20	18	11	0	

El objetivo es determinar la distancia mínima necesaria para realizar las entregas diarias a los cinco clientes. Aun cuando la solución puede resultar en un cliente atendido por más de una ruta, la fase de implementación utilizará sólo una de esas rutas. Formule el problema como una PLE y encuentre la solución óptima.

- *9-20. La UA está en el proceso de formar un comité para atender las quejas de los estudiantes. La administración desea que el comité incluya al menos una mujer, un hombre, un estudiante, un administrador y un profesor. Se nominó a diez personas (identificadas, por sencillez, con las letras a a la j). La mezcla de los individuos en las distintas categorías se da como sigue:

Categoría	Personas
Mujeres	a, b, c, d, e
Hombres	f, g, h, i, j
Estudiantes	a, b, c, j
Administradores	e, f
Profesores	d, g, h, i

La UA desea formar el menor comité con la representación de cada una de las cinco categorías. Formule el problema como una PLE y encuentre la solución óptima.

- 9-21. El condado de Washington incluye seis poblaciones que necesitan el servicio de ambulancias de emergencia. Debido a la proximidad de algunas poblaciones, una sola estación puede atender a más de una comunidad. La estipulación es que la estación debe estar como máximo a 15 minutos manejando desde la población que atiende. La siguiente tabla muestra los tiempos de manejo en minutos entre las seis poblaciones.

		Tiempos en minutos de i a j						
		j	1	2	3	4	5	6
i	j							
1		0	23	14	18	10	32	
2		23	0	24	13	22	11	
3		14	24	0	60	19	20	
4		18	13	60	0	55	17	
5		10	22	19	55	0	12	
6		32	11	20	17	12	0	

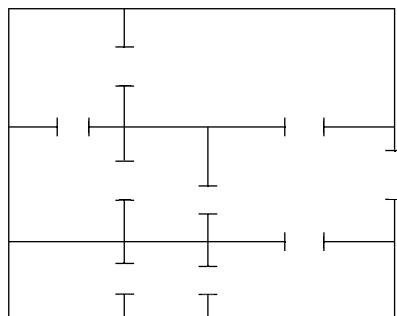


FIGURA 9.7

Distribución del museo del problema 9-22

Formule una PLE cuya solución produzca el número mínimo de estaciones y sus ubicaciones. Determine la solución óptima.

- 9-22.** Los inmensos tesoros del Rey Tut se exhiben en el Museo de Giza en El Cairo. La distribución del museo se muestra en la figura 9.7 con las diferentes salas comunicadas por puertas abiertas. Un guardia de pie en una puerta puede vigilar dos salas adyacentes. La política de seguridad del museo exige la presencia de un guardia en cada sala. Formule el problema como una PLE para determinar la cantidad mínima de guardias.
- 9-23.** Bill acaba de terminar sus exámenes del año académico y desea celebrar viendo todas las películas que se están exhibiendo en cines de su ciudad y otras seis ciudades vecinas. Si viaja a otra ciudad, se quedará ahí hasta que vea todas las películas que desea. La siguiente tabla informa sobre las ofertas de películas y las distancias de viaje redondo a las ciudades vecinas.

Ubicación del cine	Películas exhibidas	Millas de viaje redondo	Costo por película (\$)
En su ciudad	1, 3	0	7.95
Ciudad A	1, 6, 8	25	5.50
Ciudad B	2, 5, 7	30	5.00
Ciudad C	1, 8, 9	28	7.00
Ciudad D	2, 4, 7	40	4.95
Ciudad E	1, 3, 5, 10	35	5.25
Ciudad F	4, 5, 6, 9	32	6.75

El costo de manejar en automóvil es de 75 centavos por milla. Bill desea determinar las ciudades que necesita visitar para ver todas las películas, al mismo tiempo que minimiza su costo total.

- 9-24.** Las tiendas Walmark están en proceso de expandirse en el oeste de Estados Unidos. Walmark planea construir durante el próximo año nuevas tiendas que prestarán servicio a 10 comunidades geográficamente dispersas. La experiencia pasada indica que una comunidad debe estar a una distancia máxima de 25 millas de una tienda para atraer a los clientes. Además, la población de una comunidad tiene un papel importante en la ubicación de una tienda, en el sentido de que las comunidades grandes generan más clientes participantes. La siguiente tabla muestra las poblaciones y también las distancias (en millas) entre las comunidades.

		Millas de la comunidad i a la comunidad j										Población
i	j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1		20	40	35	17	24	50	58	33	12	10,000	
2	20		23	68	40	30	20	19	70	40	15,000	
3	40	23		36	70	22	45	30	21	80	28,000	
4	35	68	36		70	80	24	20	40	10	30,000	
5	17	40	70	70		23	70	40	13	40	40,000	
6	24	30	22	80	23		12	14	50	50	30,000	
7	50	20	45	24	70	12		26	40	30	20,000	
8	58	19	30	20	40	14	26		20	50	15,000	
9	33	70	21	40	13	50	40	20		22	60,000	
10	12	40	80	10	40	50	30	50	22		12,000	

La idea es construir el menor número de tiendas, considerando la restricción de la distancia y la concentración de las poblaciones.

Especifique las comunidades donde deberían ubicarse las tiendas.

- *9-25. *Guéret y colaboradores (2002), sección 12.6.* El presupuesto de MobileCo para construir 7 transmisores, que cubran la mayor población posible en 15 comunidades geográficas contiguas, es de \$15 millones. A continuación se presentan las comunidades cubiertas por cada transmisor y los costos de construcción presupuestados.

Transmisor	Comunidades cubiertas	Costo (millones de dólares)
1	1, 2	3.60
2	2, 3, 5	2.30
3	1, 7, 9, 10	4.10
4	4, 6, 8, 9	3.15
5	6, 7, 9, 11	2.80
6	5, 7, 10, 12, 14	2.65
7	12, 13, 14, 15	3.10

En la siguiente tabla se presentan las poblaciones de las diferentes comunidades:

Comunidad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Población (en miles)	10	15	28	30	40	30	20	15	60	12

¿Cuáles de los transmisores propuestos deben construirse?

- 9-26. *Gavernini y colaboradores (2004).* Las redes eléctricas modernas utilizan medidores eléctricos automáticos en vez de los más costosos medidores manuales. En el sistema automático, los medidores de varios clientes se enlazan inalámbricamente a un solo receptor. El medidor envía señales cada mes a un receptor designado para reportar el consumo de electricidad del cliente. Luego los datos se canalizan hacia una computadora central que genera los recibos. El objetivo es determinar la cantidad mínima de receptores necesarios para atender a un número dado de medidores. En la vida real, el

problema comprende miles de medidores y receptores. Este problema utiliza 10 medidores y 8 posibles localizaciones para los receptores, con las siguientes configuraciones:

Receptor	1	2	3	4	5	6	7	8
Medidores	1, 2, 3	2, 3, 9	5, 6, 7	7, 9, 10	3, 6, 8	1, 4, 7, 9	4, 5, 9	1, 4, 8

- 9-27.** Resuelva el problema 9-26 si, además, cada receptor puede manejar cuando mucho 3 medidores.
- 9-28.** Leatherco firmó un contrato para fabricar lotes de pantalones, chalecos y chamarras. Cada producto requiere una preparación especial de las máquinas necesarias en los procesos de fabricación. La siguiente tabla muestra los datos pertinentes respecto del uso de la materia prima (piel) y el tiempo de mano de obra junto con estimaciones de costos e ingresos. Se estima que la oferta actual de piel es de 3000 ft^2 , y el tiempo de mano de obra disponible está limitado a 2500 horas.

	Pantalones	Chalecos	Chamarras
Piel por unidad (ft^2)	5	3	8
Tiempo de mano de obra por unidad (h)	4	3	5
Costo de producción por unidad (\$)	30	20	80
Costo de preparación del equipo por lote (\$)	100	80	150
Precio por unidad (\$)	60	40	120
Cantidad mínima de unidades necesarias	100	150	200

Determine la cantidad óptima de unidades que Leatherco debe fabricar de cada producto.

- *9-29.** Jobco planea producir al menos 2000 artefactos con tres máquinas. El tamaño mínimo del lote para cualquier máquina es de 500 artefactos. La siguiente tabla ofrece los datos correspondientes de la situación.

Máquina	Costo de preparación (\$)	Costo de producción/unidad (\$)	Capacidad (unidades)
1	300	2	600
2	100	10	800
3	200	5	1200

Formule el problema como una PLE y encuentre la solución óptima.

- *9-30.** Oilco está considerando dos sitios de perforación potenciales para llegar a cuatro destinos (posibles pozos petroleros). En la siguiente tabla se presentan los costos de preparación en cada uno de los dos sitios, y el costo de perforación del sitio i al destino j ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4$).

Sitio	Costo de perforación (millones de dólares) hasta el destino				Costo de preparación (millones de dólares)
	1	2	3	4	
1	2	1	8	5	5
2	4	6	3	1	6

Formule el problema como una PLE y encuentre la solución óptima.

- 9-31.** Se consideran tres sitios industriales para instalar plantas de manufactura. Las plantas envían sus suministros a tres clientes. El suministro en las plantas, la demanda de los clientes y el costo unitario de transporte de las plantas a los clientes se dan en la siguiente tabla:

		Costo de transporte unitario (dólares)				
		Cliente	1	2	3	Suministro
Planta	1	10	15	12	1800	
	2	17	14	20	1400	
3	3	15	10	11	1300	
	Demanda	1200	1700	1600		

Además de los costos de transporte, las plantas 1, 2 y 3 incurren en costos fijos a razón de \$12,000, \$11,000 y \$12,000, respectivamente. Formule el problema como una PLE y encuentre la solución óptima.

- 9-32.** Repita el problema 9-31 suponiendo que las demandas de los clientes 2 y 3 cambian a 800 cada una.
- 9-33.** *Liberatore and Miller (1985).* Una planta manufacturera utiliza dos líneas de producción para fabricar tres productos durante los próximos 6 meses. No se permiten demandas atrasadas. Sin embargo, se pueden tener existencias en exceso de un producto para satisfacer la demanda en meses posteriores. La siguiente tabla presenta los datos asociados con la demanda, la producción y el almacenamiento de los tres productos.

Producto	Demanda en el periodo						Costo de almacenamiento unitario (dólares)/mes	Inventario inicial
	1	2	3	4	5	6		
1	50	30	40	60	20	45	.50	55
2	40	60	50	30	30	55	.35	75
3	30	40	20	70	40	30	.45	60

Hay un costo fijo por el cambio de una línea de un producto a otro. En las siguientes tablas se da el costo del cambio, las tasas de producción y el costo de producción unitario por cada línea:

	Costo del cambio de línea (\$)		
	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Línea 1	200	180	300
Línea 2	250	200	174

	Tasa de producción (unidades/mes)			Costo de producción unitario (\$)		
	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Línea 1	40	60	80	10	8	15
Línea 2	90	70	60	12	6	10

Desarrolle un modelo para determinar el programa de producción óptimo.

- 9-34.** *Jarvis y colaboradores (1978).* Se están considerando siete ciudades como sitios potenciales para la construcción de un máximo de cuatro plantas de tratamiento de aguas residuales. La tabla siguiente presenta los datos de la situación. Los vínculos faltantes indican que no se puede construir un oleoducto.

De \ A	Costo (\$) de construcción del oleoducto entre ciudades por cada 1000 gal/h de capacidad						
	1	2	3	4	5	6	7
1		100		200		50	
2				120		150	
3		400			120		90
4			120		120		
5		200				100	200
6			110	180			70
7	200			150			
Costo (millones de dólares) de la construcción de la planta	1.00	1.20	2.00	1.60	1.80	.90	1.40
Población (miles)	50	100	45	90	75	60	30

La capacidad de un oleoducto (en galones por hora) es una función directa de la cantidad de aguas residuales generadas, la cual es una función de las poblaciones. Por cada 1000 residentes se descargan aproximadamente 500 galones al sistema de drenaje por hora. La capacidad máxima de la planta es de 100,000 gal/h. Determine la ubicación y capacidad óptimas de las plantas.

- 9.35.** Una compañía utiliza cuatro camiones cisterna especiales para entregar a clientes cuatro productos de gasolina diferentes. Cada camión tiene cinco compartimientos de diferentes capacidades: 500, 750, 1200, 1500 y 1750 galones. Las demandas diarias de los cuatro productos se estiman en 10, 15, 12 y 8 mil galones. Cualquier cantidad que no pueda ser entregada por los cuatro camiones de la compañía debe subcontratarse a los costos adicionales de 5, 12, 8 y 10 centavos por galón de los productos 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Desarrolle el programa de carga diaria óptimo para los cuatro camiones que minimizará el costo adicional de subcontratación.
- 9.36.** Una familia utiliza mensualmente al menos 3000 minutos de llamadas telefónicas de larga distancia y puede elegir el uso de los servicios de cualquiera de las compañías A, B y C. La compañía A cobra una cuota mensual fija de \$10 y 5 centavos por minuto por los primeros 1000 minutos, y 4 centavos por minuto por los minutos adicionales. La cuota mensual de la compañía B es de \$20 con un cobro invariable de 4 centavos por minuto. El cobro mensual de la compañía C es de \$25 con 5 centavos por minuto por los primeros 1000 minutos, y 3.5 por minuto centavos después de ese límite. ¿Cuál compañía debería seleccionarse para minimizar el cobro mensual total?
- *9.37.** *Barnett (1987).* El profesor Yataha necesita programar seis viajes redondos entre Boston y Washington, D. C. Tres aerolíneas cubren la ruta —Eastern, US Air y Continental— y no hay penalización por la compra de un boleto de viaje sencillo. Cada aerolínea ofrece millas de gratificación para viajeros frecuentes. Eastern otorga 1000 millas por boleto (de viaje sencillo) y 5000 millas más si la cantidad de boletos en un mes es de 2, y otras 5000 millas si excede 5 boletos. US Air ofrece 1500 millas por viaje más 10,000 extra por cada 6 boletos. Continental ofrece 1800 millas, más 7000 extra por cada 5 boletos. El profesor Yataha desea repartir los 12 boletos de viaje sencillo entre las tres aerolíneas para maximizar el total de millas ganadas.
- *9.38.** Un tablero de juego se compone de 3×3 casillas. Se requiere que coloque un número entre 1 y 9 en cada casilla, de modo que la suma de los números en cada fila, cada columna y cada diagonal sea igual a 15. Además, los números en todas las casillas deben ser distintos. Use la PLE para determinar la asignación de números a las casillas.
- 9.39.** Se utiliza una máquina para producir dos productos intercambiables. La capacidad diaria de la máquina permite producir cuando mucho 20 unidades del producto 1 y 10 unidades del producto 2.

Como alternativa, se puede ajustar la máquina para que produzca diariamente a lo sumo 12 unidades del producto 1 y 25 unidades del producto 2. El análisis del mercado muestra que la demanda diaria máxima de los dos productos combinados es de 35 unidades. Dado que las utilidades unitarias de los dos productos respectivos son de \$10 y \$12, ¿cuál de ambos ajustes de la máquina debe seleccionarse? Formule el problema como una PLE para encontrar la solución óptima (*nota:* Este problema bidimensional puede resolverse inspeccionando el espacio de soluciones gráficas. No se trata de un caso para problemas de n dimensiones).

- *9-40.** Gapco fabrica tres productos cuyos requerimientos diarios de mano de obra y materia prima se muestran en la siguiente tabla.

Producto	Mano de obra diaria requerida (h/unidad)	Materia prima diaria requerida (lb/unidad)
1	3	4
2	4	3
3	5	6

Las utilidades por unidad de los tres productos son \$25, \$30 y \$22, respectivamente. Gapco tiene dos opciones para ubicar su planta. Los dos sitios difieren sobre todo en la disponibilidad de mano de obra y materia prima, como se indica en la siguiente tabla:

Ubicación	Mano de obra diaria disponible (h)	Materia prima diaria disponible (lb)
1	100	100
2	90	120

Formule el problema como una PLE y determine la ubicación óptima de la planta.

- 9-41.** Jabco Shop tiene 10 trabajos excepcionales que procesar en una sola máquina. En la siguiente tabla se muestran los tiempos de procesamiento y las fechas límites. Todos los tiempos están en días, y los tiempos límite se miden a partir del tiempo 0:

Trabajo	Tiempo de procesamiento (días)	Tiempo límite (días)
1	10	20
2	3	98
3	13	100
4	15	34
5	9	50
6	22	44
7	17	32
8	30	60
9	12	80
10	16	150

Si el trabajo 4 precede al trabajo 3, entonces el trabajo 9 debe preceder al trabajo 7. El objetivo consiste en procesar los 10 trabajos en el menor tiempo posible. Formule el modelo como una PLE y determine la solución óptima modificando el archivo *amplEx9.1-4.txt*.

- 9-42.** En el problema 9-41, suponga que el trabajo 4 no puede procesarse antes de que el trabajo 3 se haya completado. Además, los ajustes de la máquina para los trabajos 7 y 8 requieren que se procesen de inmediato uno después del otro (es decir, el trabajo 7 sucede o precede inmediatamente al 8). El objetivo de Jobco es procesar los diez trabajos con la menor cantidad de transgresiones al tiempo límite. Formule el modelo matemáticamente y determine la solución óptima.

- 9-43.** Jobco posee una planta donde se fabrican tres productos. Los requerimientos de mano de obra y materia prima para los tres productos se muestran en la siguiente tabla.

Producto	Mano de obra diaria requerida (h/unidad)	Materia prima diaria requerida (lb/unidad)
1	3	4
2	4	3
3	5	6
Disponibilidad diaria	100	100

La utilidad unitaria de los tres productos es \$25, \$30 y \$45, respectivamente. Si se va a fabricar el total de las unidades requeridas diarias del producto 3, entonces su nivel de producción debe ser de al menos 5 unidades diarias. Formule el problema como un PLE combinado y encuentre la mezcla óptima.

- 9-44.** UPak es una subsidiaria de la compañía de transporte LTL. Los clientes llevan sus envíos a la terminal de UPak para que los carguen en el camión de remolque y pueden rentar espacio hasta de 36 pies. El cliente paga por el espacio lineal exacto (en incrementos de 1 pie) que ocupa el envío. No se permiten envíos parciales, en el sentido de que un envío que no requiera más de 36 pies debe cargarse en un camión. Para separar los envíos se instala una barrera móvil, llamada mampara. La tarifa por pie que UPak cobra depende del destino de envío. La siguiente tabla indica los pedidos pendientes que UPak tiene que procesar.

Pedido	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tamaño (ft)	5	11	22	15	7	9	18	14	10	12
Tarifa (\$)	120	93	70	85	125	104	98	130	140	65

En la actualidad la terminal tiene dos camiones listos para cargarse. Determine las órdenes de prioridad que maximizarán el ingreso total de los dos camiones [sugerencia: Una formulación que utiliza x_{ij} binaria para representar la carga i en el camión j es sencilla. Sin embargo, se le plantea el reto de definir x_{ij} como los pies asignados a la carga i en el camión j . Luego utilice una restricción *si-entonces* para evitar el envío de cargas parciales.

- 9-45.** *Problema de las N reinas.* En el juego de ajedrez, las reinas atacan moviéndose horizontal, vertical o diagonalmente. Se desea colocar N reinas en un tablero (de $N \times N$), de modo que ninguna reina pueda “comerse” a cualquier otra reina. Formule el problema como un programa entero y resuévalo con AMPL (o cualquier otro software) con $N = 4, 5, 6$ y 8 [sugerencia: Formulación 1: Sea $x_{ij} = 1$ si se coloca una reina en la casilla (i, j) y cero en caso contrario. Las restricciones del problema son del tipo “si $x_{ij} > 0$, entonces ninguna otra reina puede colocarse en la fila i , columna j o en la(s) diagonal(es) que parta(n) de la casilla (i, j) ”. Formulación 2: Sea R_i = fila asociada con la columna i donde se coloca la reina i en el tablero. Las restricciones impiden que se coloquen reinas en las diagonales].
- 9-46.** Un proceso de manufactura utiliza cuatro materias primas intercambiables. Las propiedades de las materias primas difieren, lo que conduce a diferentes unidades producidas por unidad de materia prima. También difieren en costo y tamaños de lote. La siguiente tabla resume los datos de la situación:

	Materia prima 1	Materia prima 2	Materia prima 3	Materia prima 4	Materia prima 5
Tamaño de lote (unidades)	100	160	80	310	50
Unidades de producto por unidad de materia prima	3	2	5	1	4
Costo por unidad de materia prima (\$)	30	80	200	10	120

Una materia prima utilizada debe estar sólo en los lotes indicados (por ejemplo, la materia prima 1 puede adquirirse en lotes de 100 unidades o no se compra). Las unidades producidas deben ser por lo menos 950. Formule un modelo para determinar las materias primas que deben usarse a costo mínimo.

- 9-47.** Muestre cómo pueden representarse los espacios de soluciones sombreados no convexos que se muestran en la figura 9.8, mediante un conjunto de restricciones simultáneas. Encuentre la solución óptima que maximiza $z = 2x_1 + 3x_2$ sujeto al espacio de soluciones dado en (a).
- 9-48.** Dadas las variables binarias x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 , si $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$, entonces $x_3 = 1, x_4 = 1$ y $x_5 = 1$. Formule la condición como restricciones simultáneas.
- *9-49.** Suponga que el producto zw aparece en una restricción, donde z y w son variables binarias. Muestre cómo puede linealizarse este término.
- 9-50.** Considere la variable binaria $y_i, i = 1, 2, \dots, n$. Exprese la siguiente condición como un conjunto de restricciones simultáneas de PLE: Si $i = k$, entonces $y_k = 1$, y todas las variables restantes son iguales a cero.
- 9-51.** Suponga que se requiere que *cualquier* k de entre las siguientes m restricciones debe estar activa:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Muestre cómo puede representarse esta condición.

- 9-52.** En la siguiente restricción, el lado derecho puede asumir uno de los valores b_1, b_2, \dots , y b_m .

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (b_1, b_2, \dots, \text{o } b_m)$$

Muestre cómo puede representarse esta condición.

- 9-53.** Considere la siguiente función objetivo.

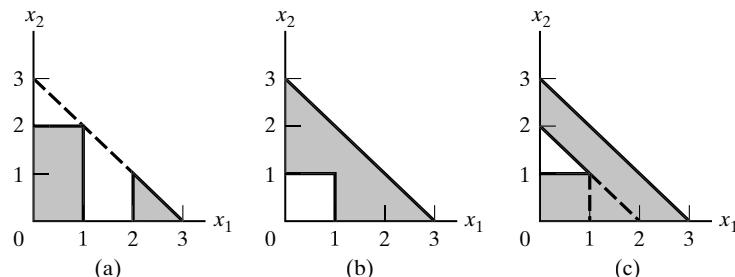
$$\text{Minimizar } z = \min\{2x_1 + x_2, 4x_1 - 3x_2 \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 0\}$$

Use variables binarias auxiliares para convertir la función objetivo z a un formato analíticamente manejable que elimine la función mín.

- 9-54.** Dé las variables binarias y_1, y_2, \dots, y_n , tales que si $x_i = 1$, entonces $x_{i-1} \text{ o } x_{i+1}$ deben ser iguales a 1, $i = 1, 2, \dots, n$, donde y_0 y y_{n+1} definen la variable y_n .
- 9-55.** Resuelva la PLE del ejemplo 9.2-1 por medio del algoritmo B&B con x_2 como variable de ramificación. Inicie el procedimiento resolviendo el subproblema asociado con $x_2 \leq [x_2]^*$.¹¹

FIGURA 9.8

Espacios de soluciones para el problema 9-47



¹¹ En los problemas 9-55 a 9-64, los subproblemas pueden resolverse interactivamente con AMPL o Solver, o bien, por medio de la opción MODIFY de TORA para las cotas superior e inferior.

9-56. Desarrolle el árbol B&B para cada uno de los siguientes problemas. Por conveniencia, seleccione siempre x_1 como la variable de ramificación en el nodo 0.

- ***(a)** Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leq 9 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y entera} \end{aligned}$$

- (b)** Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 &\leq 35 \\ 4x_1 + 9x_2 &\leq 36 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y entera} \end{aligned}$$

- (c)** Maximizar $z = x_1 + x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leq 16 \\ 6x_1 + 5x_2 &\leq 27 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y entera} \end{aligned}$$

- ***(d)** Minimizar $z = 5x_1 + 4x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y entera} \end{aligned}$$

- (e)** Maximizar $z = 5x_1 + 7x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 13 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 41 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y entera} \end{aligned}$$

***9-57.** Repita el problema 9-56, suponiendo que x_1 es continua.

9-58. Demuestre gráficamente que la siguiente PLE no tiene una solución factible, y luego verifique el resultado utilizando el algoritmo B&B.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} \\ 10x_1 + 10x_2 &\leq 9 \\ 10x_1 + 5x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y entera} \end{aligned}$$

9-59. Resuelva el siguiente problema mediante B&B.

$$\text{Maximizar } z = 18x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 4x_4$$

sujeto a

$$15x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 37$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = (0, 1)$$

9-60. Convierta el siguiente problema en una PLE mixta y encuentre la solución óptima:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$| -x_1 + 10x_2 - 3x_3 | \geq 15$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

9-61. *Experimento con TORA/Solver/AMPL.* El siguiente problema está diseñado para demostrar el extraño comportamiento del algoritmo B&B, incluso en problemas pequeños. En particular, observe cuántos subproblemas se examinan antes de que se halle la solución óptima y cuánto se requiere para verificar la optimalidad.

Minimizar y

sujeto a

$$2(x_1 + x_2 + \dots + x_{15}) + y = 15$$

Todas las variables son (0, 1)

- (a) Use la opción automática de TORA para mostrar que, aunque la solución óptima se determina después de sólo 9 subproblemas, se examinan más de 25,000 subproblemas antes de confirmar la optimalidad.
- (b) Muestre que Solver exhibe un comportamiento similar al de TORA [nota: En Solver usted puede observar el cambio del número de ramas generadas (subproblemas) al pie de la hoja de cálculo].
- (c) Resuelva el problema con AMPL y muestre que la solución se obtiene al instante con 0 iteraciones simplex del programa entero combinado y 0 nodos B&B. La razón de este desempeño superior sólo puede atribuirse a los pasos de presolución realizados por AMPL y/o el solucionador CPLEX.

9-62. *Experimento con TORA.* Considere la siguiente PLE:

$$\text{Maximizar } z = 18x_1 + 14x_2 + 8x_3$$

sujeto a

$$15x_1 + 12x_2 + 7x_3 \leq 43$$

x_1, x_2, x_3 enteras no negativas

Use la opción B&B de TORA guiada por el usuario para generar el árbol de búsqueda y no active la cota del valor objetivo. ¿Cuál es el impacto de activar la cota del valor objetivo en el número de subproblemas generados? Por consistencia, seleccione siempre la variable de ramificación como la del índice menor e

investigue todos los subproblemas en una fila existente de izquierda a derecha, antes de proseguir con la siguiente fila.

- ***9-63.** *Experimento con TORA.* Reconsidere el problema 9-62. Conviértalo en una PLE 0-1 equivalente, y después resuélvalo con la opción automática de TORA. Compare el tamaño de los árboles de búsqueda en los dos problemas.
- 9-64.** *Experimento con AMPL.* En la siguiente PLE 0-1, use AMPL interactivamente para generar el árbol de búsqueda asociado. En cada caso, muestre cómo se utiliza la cota z para sondar los subproblemas.

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 3x_5$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 4$$

$$7x_1 + 3x_3 - 4x_4 + 3x_5 \leq 8$$

$$11x_1 - 6x_2 + 3x_4 - 3x_5 \geq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = (0, 1)$$

- 9-65.** En el ejemplo 9.2-2, muestre gráficamente si cada una de las restricciones siguientes puede formar un corte legítimo:
- ***(a)** $x_1 + 2x_2 \leq 10$
 - (b)** $2x_1 + x_2 \leq 10$
 - (c)** $3x_2 \leq 10$
 - (d)** $3x_1 + x_2 \leq 15$
- 9-66.** En el ejemplo 9.2-2, muestre gráficamente cómo los dos siguientes cortes (legítimos) pueden conducir a la solución entera óptima:

$$x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad (\text{Corte I})$$

$$3x_1 + x_2 \leq 15 \quad (\text{Corte II})$$

- 9-67.** Exprese los cortes I y II del ejemplo 9.2-2 en función de x_1 y x_2 , y muestre que son los mismos que se utilizaron gráficamente en la figura 9.6.
- 9-68.** En el ejemplo 9.2-2, derive el corte II a partir de la fila x_3 . Use el nuevo corte para completar la solución del ejemplo.
- 9-69.** Demuestre que, aun cuando el siguiente problema tiene una solución entera factible en x_1 y x_2 , el corte fraccionario no dará una solución factible a menos que se eliminen todas las fracciones que hay en la restricción.

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2$$

sujeto a

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq \frac{13}{4}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y entera}$$

9-70. Resuelva los siguientes problemas por medio del corte fraccionario, y compare la solución entera óptima verdadera con la solución obtenida redondeando la solución óptima continua.

***(a)** Maximizar $z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$

sujeto a

$$4x_1 - 4x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + 6x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ y entera

(b) Maximizar $z = 3x_1 + x_2 + 3x_3$

sujeto a

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$$

$$4x_2 - 3x_3 \leq 2$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ y entera

CAPÍTULO 10

Programación heurística

Aplicación de la vida real: FedEx genera líneas de oferta mediante recocido simulado

FedEx entrega diariamente millones de artículos alrededor del mundo utilizando una flota de más de 500 aviones y más de 3000 pilotos. Las líneas de oferta (viajes redondos), que inician y terminan en uno de nueve domicilios de las tripulaciones (o centros de distribución), deben satisfacer numerosas regulaciones de la Administración Federal de Aviación y de FedEx y, en la medida de lo posible, las preferencias personales basadas en la antigüedad de los pilotos. El objetivo principal es minimizar la cantidad requerida de líneas de oferta (es decir, la dotación necesaria de personal). La complejidad de las restricciones impide implementar un modelo de programación entera. En cambio, se utiliza una heurística de recocido simulado para resolver el problema.¹

10.1 INTRODUCCIÓN

La heurística está diseñada para encontrar buenas soluciones aproximadas a los problemas combinatorios difíciles, que de lo contrario no pueden resolverse mediante los algoritmos de optimización disponibles. Una heurística es una técnica de búsqueda directa que utiliza reglas prácticas favorables para encontrar soluciones mejoradas. La ventaja de la heurística es que generalmente determina (buenas) soluciones con rapidez. Su desventaja es que, por lo general, se desconoce la calidad de la solución (en relación con la óptima).

Las primeras generaciones heurísticas se basan en la regla de *búsqueda codiciosa* que exige mejorar el valor de la función objetivo con cada movimiento de búsqueda. La búsqueda termina en un óptimo local donde ya no son posibles más mejoras.

En la década de 1980, una nueva generación de metaheurísticas buscaba mejorar la calidad de las soluciones heurísticas permitiendo que la búsqueda escapara de los óptimos locales. La ventaja obtenida se logra a expensas de una mayor cantidad de cálculos.

¹ Los detalles del estudio se pueden encontrar en Camplell, K., B. Durfee y G. Hines, "FedEx Bid Lines Using Simulated Annealing," *Interfaces*, vol. 27, núm. 2, pp. 1-16, 1997.

En la sección 10.2 se estudia la heurística codiciosa. La sección 10.3 presenta tres metaheurísticas prominentes: tabú, recocido simulado y genética. En la sección 10.4 se aplica la metaheurística al problema de programación entera general. El capítulo concluye con la sección 10.5, donde se hace un breve análisis de la búsqueda basada en restricciones relacionadas, conocida como programación de restricción.

Momento ¡ajá! Heurística para la toma de decisiones temprana: La regla de Franklin

Algunas personas sostienen que Benjamin Franklin (1705-1790) fue el primer investigador de operaciones, y bien lo habría sido, al menos en el continente americano. Era una persona con muchos talentos especiales, pero su asociación con la IO (informal en el mejor de los casos) se origina en una carta² que escribió en 1772 al famoso filósofo y científico naturalista inglés Joseph Priestley (descubridor del oxígeno), donde bosquejó la primera descripción publicada de una heurística para la toma de decisiones, usando una **lista de pros y contras**. Describió la heurística, que ahora se denomina *regla de Franklin*, de la siguiente manera:

En el asunto de tanta importancia para ti, donde pides mi consejo, no puedo por falta de suficientes premisas, aconsejarte qué determinar pero si me lo permites te diré cómo.

Cuando ocurren estos casos, son difíciles de resolver principalmente porque mientras los tenemos bajo consideración, no todas las razones a favor y en contra están presentes en la mente al mismo tiempo; a veces se presenta una serie de ellas, y en otras ocasiones otra, cuando hemos perdido de vista la primera. De ahí los diversos fines o preferencias que sobresalen alternativamente, y la incertidumbre que nos perturba.

Para superar esto, mi camino es: divido a la mitad una hoja de papel con una línea formando dos columnas, y escribo en un lado los pros y en el otro los contras. Luego, durante tres o cuatro días de consideración, coloco bajo los diferentes encabezados indicaciones breves de los distintos motivos que en momentos diferentes se me ocurren a favor o en contra de la medida. Cuando los he reunido en una sola visión, intento estimar sus respectivos pesos; y cuando encuentro dos, uno a cada lado, que parecen iguales, tacho a ambos. Si encuentro una razón a favor igual a dos razones en contra, tacho las tres. Si juzgo dos razones en contra igual a tres razones a favor, tacho las cinco. Sigo de esta manera, y encuentro dónde está el equilibrio; si después de un día o dos de más consideración, nada nuevo ocurre que sea de importancia en cualquiera de los lados, llego a una determinación en consecuencia.

Y aunque el peso de las razones quizás no se tome con la precisión de las cantidades algebraicas, aun cuando cada una se considere por separado y comparativamente, como el conjunto se encuentra ante mí, creo que puedo juzgar mejor y soy menos proclive a dar un paso precipitado. De hecho, he encontrado gran ventaja en este tipo de ecuación, en lo que puede llamarse álgebra moral o cautelar.

10.2 HEURÍSTICA CODICIOSA (BÚSQUEDA LOCAL)

Las ideas principales de la heurística codiciosa se explican con un problema de una sola variable. Esas ideas se amplían más adelante para tratar varias variables.

Defina el problema de optimización con espacio de soluciones S como

$$\text{Minimizar } z = F(x), x \in S$$

² W. Bell Jr., ed. "Benjamin Franklin's 1772 letter to Joseph Priestley", *Mr. Franklin: A Selection from His Personal Letters*. New Haven, CT: Yale University Press, 1956.

El proceso iterativo de una heurística codiciosa inicia en un punto factible (aleatorio) y después intenta moverse a un mejor punto solución en la **vecindad** del punto solución actual. Específicamente, en la iteración k , dado el punto solución x_k , la heurística examina todos los puntos factibles en la vecindad $N(x_k)$ en busca de una mejor solución. La búsqueda finaliza cuando ya no son posibles más mejoras.

La definición de $N(x_k)$ es importante en el diseño de la heurística. Por ejemplo, para x entera, $N(x_k) = \{x_k - 1, x_k + 1\}$ define la vecindad *inmediata* de x_k . De manera alternativa, *una vecindad expandida* puede incluir puntos solución cercanos adicionales. La primera definición implica menos cálculos de búsqueda local, pero podría dañar la calidad de la solución final. La segunda definición (vecindad expandida) requiere más cálculos de búsqueda local, aunque mejoraría la calidad de la solución.

En las secciones 10.2.1 y 10.2.2 se aplica la heurística codiciosa a variables únicas discretas y continuas. La extensión de la heurística a múltiples variables se analiza al final de la sección 10.2.2.

10.2.1 Heurística de variable discreta

En esta sección se presentan dos ejemplos que utilizan la heurística codiciosa para estimar el óptimo de una función de una sola variable discreta. El primer ejemplo utiliza la vecindad inmediata y el segundo expande el dominio para incluir más puntos solución.

Ejemplo 10.2-1

Considere la función $F(x)$ dada en la figura 10.1 y defina el problema de optimización como

$$\text{Minimizar } F(x), x \in S = \{1, 2, \dots, 8\}$$

La función tiene un mínimo local en $x = 3(B)$ y un mínimo global en $x = 7(D)$.

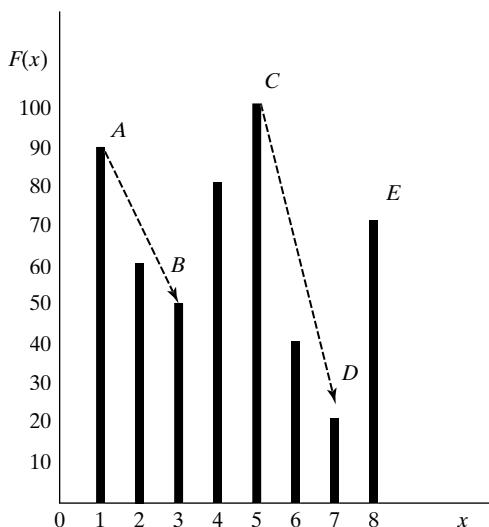


FIGURA 10.1

Función $F(x)$, $x \in S = \{1, 2, \dots, 8\}$, con un mínimo local en $x = 3$ y el mínimo global en $x = 7$

TABLA 10.1 Heurística codiciosa aplicada a $F(x)$ de la figura 10.1. Comenzando en $x_0 = 1$ con $N(x_k) = \{x_k - 1, x_k + 1\}$

Iteración k	x_k	$N(x_k)$	$F(x_k - 1)$	$F(x_k + 1)$	Acción
(Inicio) 0	1				Establecer $x^* = 1, F(x^*) = 90$, y $x_{k+1} = 1$
1	1	{−, 2}	—	60	$F(x_k + 1) < F(x^*)$
2	2	{1, 3}	90	50	Establecer $x^* = 2, F(x^*) = 60, x_{k+1} = 2$ $F(x_k + 1) < F(x^*)$
(Final) 3	3	{2, 4}	60	80	Establecer $x^* = 3, F(x^*) = 50, x_{k+1} = 3$ $F(x_k - 1)$ y $F(x_k + 1) > F(x^*)$: Mínimo local alcanzado, detenerse

Resultado de búsqueda: $x^* = 3, F(x^*) = 50$, ocurre en la iteración 2.

La tabla 10.1 presenta las iteraciones de la heurística con una vecindad inmediata, $N(x_k) = \{x_k - 1, x_k + 1\}$. El número aleatorio $R = 0.1002$ selecciona el punto inicial $x = 1$ de entre todos los puntos factibles $x = 1, 2, \dots, y 8$. En la iteración 1, $N(1) = \{2\}$ porque $x = 0$ es no factible. La búsqueda termina en la iteración 3 porque $F(x) > F(x^* = 3)$ para todas las $x \in N(3)$. Esto significa que la búsqueda se detiene en el *mínimo local* $x^* = 3$ con $F(x^*) = 50$.

La tabla 10.1 muestra que la búsqueda codiciosa se detiene en un mínimo local ($x = 3$ en la figura 10.1). La calidad de la solución puede mejorarse de dos maneras:

1. Repetir la heurística con puntos iniciales aleatorios.
2. Expandir el tamaño de la vecindad para alcanzar más puntos solución factibles.

La aplicación de la primera idea es directa y no necesita mayor explicación.

La búsqueda de vecindad expandida puede basarse en la evaluación de *todos* los puntos cercanos, una estrategia que incrementa la carga computacional. De manera alternativa, se puede determinar el siguiente movimiento de búsqueda mediante la selección aleatoria de la vecindad. Específicamente, en la iteración k , el siguiente movimiento, x_{k+1} , se selecciona de $N(x_k)$ con probabilidad de $1/m$, donde m es el número de elementos en el conjunto de vecindades. El muestreo de la misma vecindad se repite, si es necesario, hasta que se determina una solución mejorada, o hasta llegar a un número especificado de iteraciones. La regla de selección aleatoria describe lo que se conoce como *heurística de paso aleatorio*.

Ejemplo 10.2-2 (Heurística de paso aleatorio)

Este ejemplo se aplica una vez más a $F(x)$ en la figura 10.1. Se define arbitrariamente el conjunto de vecindades expandidas $N(x_k)$ como $\{1, 2, \dots, x_k - 1, x_k + 1, \dots, 8\}$. La búsqueda comienza en $x_0 = 1$ y puede continuar durante cualquier número de iteraciones (cuanto más sean, mayor será la probabilidad de encontrar una mejor solución). En este ejemplo, la búsqueda se limita a 5 iteraciones para conservar espacio. Denote x'_k [seleccionada de entre $N(x_k)$] como un *posible* siguiente movimiento. Se acepta como el nuevo movimiento de búsqueda sólo si mejora la solución. Si no lo hace, se intenta una nueva selección aleatoria de $N(x_k)$.

En la tabla 10.2 se detalla la aplicación de la heurística de paso aleatorio. En contraste con la heurística de vecindad inmediata del ejemplo 10.2-1, la heurística de paso aleatorio produce la solución $x = 7$ y $F(x) = 40$ en la iteración 4, que accidentalmente resulta ser mejor que la obtenida en el ejemplo 10.2-1.

TABLA 10.2 Heurística de paso aleatorio aplicada a $F(x)$ en la figura 10.1 comenzando en $x_0 = 1$

Iteración k	x_k	$F(x_k)$	$N(x_k)$	R_k	x'_k	$F(x'_k)$	Acción
(Inicio) 0	1	90					$x^* = 1, F(x^*) = 90$
1	1	90	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	.4128	4	80	$F(x'_k) < F(x^*)$: Establecer $x^* = 4, F(x^*) = 80, x_{k+1} = 4$
2	4	80	{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8}	.2039	2	60	$F(x'_k) < F(x^*)$: Establecer $x^* = 2, F(x^*) = 60, x_{k+1} = 2$
3	2	60	{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	.0861	1	100	$F(x'_k) > F(x^*)$: Volver a muestrear en $N(x_k)$
4	2	60	{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	.5839	6	40	$F(x'_k) < F(x^*)$: Establecer $x^* = 6, F(x^*) = 40, x_{k+1} = 6$
(Final) 5	6	40	{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8}	.5712	4	80	$F(x'_k) > F(x^*)$: Volver a muestrear en $N(x_k)$

Mejor solución: $x = 6, F(x) = 40$, ocurre en la iteración.

Observe el comportamiento de la heurística. En la iteración 3, el posible movimiento aleatorio $x'_k = 1$ desde $N(x_3 = 2) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ no mejora la solución. Por consiguiente, en la iteración 4 se intenta otro movimiento aleatorio en la misma vecindad. En esta ocasión, el movimiento produce la solución superior $x^* = 6$.

10.2.2 Heurística de variable continua

El problema de optimización se define como

$$\text{Minimizar } F(x), L \leq x \leq U$$

La heurística de paso aleatorio continuo difiere de la del caso discreto (ejemplo 10.2-2) en la definición de la vecindad (continua) y la selección del siguiente movimiento en la vecindad. El dominio $L \leq x \leq U$ define la vecindad continua de x_k en cualquier iteración k (un subconjunto de este dominio también es aceptable).

El siguiente movimiento, x_{k+1} , se calcula como un desplazamiento aleatorio (positivo o negativo) por encima o por debajo de x_k . Hay dos formas de lograr este resultado:

1. El desplazamiento se basa en una distribución uniforme en el intervalo $(-\frac{U-L}{2}, \frac{U-L}{2})$. Dado que R es un número aleatorio $(0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \left(-\left(\frac{U-L}{2}\right) + R(U-L) \right) \\ &= x_k + (R - .5)(U - L) \end{aligned}$$

2. El desplazamiento se basa en una distribución normal con una media de x_k y una desviación estándar $\frac{U-L}{6}$ (la estimación de la desviación estándar se basa en el supuesto de que $U-L$ representa de forma aproximada la dispersión 6 sigma de la distribución normal). Por lo tanto,

$$x_{k+1} = x_k + \left(\frac{U-L}{6} \right) N(0, 1)$$

La desviación estándar $N(0, 1)$ se determina a partir de las tablas normales del apéndice A, o utilizando el archivo *ExcelStatTables.xls*. También se puede usar la función NORMSINV(R) de Excel.

En las dos fórmulas dadas anteriormente quizá sea necesario volver a calcular x_{k+1} más de una vez, utilizando la misma x_k , hasta que x_{k+1} caiga dentro del intervalo factible (L, U). Aún más, si $F(x_{k+1})$ no es una solución mejorada respecto de $F(x^*)$, la selección aleatoria se repite durante una cantidad específica de iteraciones o hasta que se logre una mejora, lo que ocurra primero.

Ejemplo 10.2-3

Considere el siguiente problema

$$\text{Minimizar } F(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x, 0 \leq x \leq 4$$

Al iniciar con $x = 0.5$, el ejemplo detalla cómo se usa la heurística del paso aleatorio para aproximar la solución mínima.

Las tablas 10.3 y 10.4 muestran 5 iteraciones cada una utilizando muestreo uniforme y normal. Un incremento en el número de iteraciones por lo general produce soluciones de mejor calidad (respecto del óptimo verdadero). Aunque el muestreo normal produce una solución de mejor calidad en este ejemplo, en general el resultado puede no ser cierto.

Los dos procedimientos de muestreo pueden combinarse en una heurística híbrida: Primero, se implementa la heurística de muestreo uniforme. Luego se utiliza la solución resultante para iniciar la heurística de muestreo normal. La idea es que la heurística de muestreo normal pueda “afinar” la solución obtenida por la heurística de muestreo uniforme (vea a continuación el momento de Excel). Esta idea se implementa utilizando Excel.

TABLA 10.3 Minimización de $F(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x, 0 \leq x \leq 4$ mediante la heurística de paso aleatorio uniforme con $x_0 = 0.5$ y $x'_k = x_k + 4(R - 0.5)$

Iteración k	x_k	$F(x_k)$	R_k	x'_k	$F(x'_k)$	Acción
(Inicio) 0	.5	3.281				Establecer $x^* = .5, F(x^*) = 3.281, x_{k+1} = .5$
1	.5	3.281	.4128	.151	2.602	$F(x'_k) < F(x^*): x^* = .1512, F(x^*) = 2.602, x_{k+1} = .151$
2	.1512	2.602	.2039	-1.033		Fuera de rango: Volver a muestrear usando $x_{k+1} = x_k$
3	.1512	2.602	.9124	1.801	-.757	$F(x'_k) < F(x^*): x^* = 1.801, F(x^*) = -.757, x_{k+1} = 1.801$
4	1.801	-.757	.5712	2.086	.339	$F(x'_k) > F(x^*):$ Volver a muestrear usando $x_{k+1} = x_k$
(Final) 5	1.801	-.757	.8718	3.288	-1.987	$F(x'_k) < F(x^*): x^* = 3.288, F(x^*) = -1.987, x_{k+1} = 3.288$

Resultado de la búsqueda: $x = 1.801, F(x) = -0.757$ ocurre en la iteración 3 [mínimo global exacto:

$x^* = 3.64438, F(x^*) = -3.631]$.

TABLA 10.4 Minimización de $F(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x, 0 \leq x \leq 4$ utilizando la heurística de paso aleatorio normal con $x_0 = 0.5$ y $x'_k = x_k + (4/6)N(0, 1)$

Iteración k	x_k	$F(x_k)$	R_k	$N(0,1)$	x'_k	$F(x'_k)$	Acción
(Inicio) 0	.5	3.281					Establecer $x^* = .5, F(x^*) = 3.281, x_{k+1} = .5$
1	.5	3.281	.4128	-.2203	.353	3.631	$F(x'_k) > F(x^*)$
2	.5	3.281	.2039	-.8278	-.0519		Fuera de rango: Volver a muestrear usando $x_{k+1} = x_k$
3	.5	3.281	.9124	1.3557	1.404	-1.401	$F(x'_k) < F(x^*): x^* = 1.404, F(x^*) = -1.401, x_{k+1} = 1.404$
4	1.404	-1.401	.5712	.1794	1.523	-1.390	$F(x'_k) > F(x^*):$ Volver a muestrear usando $x_{k+1} = x_k$
(Final) 5	1.404	-1.401	.8718	1.1349	2.160	.6219	$F(x'_k) > F(x^*):$ Volver a muestrear usando $x_{k+1} = x_k$

Resultado de la búsqueda: $x = 1.404, F(x) = -1.401$, ocurre en la iteración 3 [mínimo global exacto:

$x^* = 3.64438, F(x^*) = -3.631]$.

Extensión de la búsqueda codiciosa al caso de múltiples variables. Dada $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y un espacio de soluciones S , el problema de optimización se define como

$$\text{Minimizar } z = F(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in S$$

El algoritmo de búsqueda codiciosa se extiende al caso de múltiples variables al enfocarse en *una* de las variables en cada iteración, donde una variable enfocada se selecciona al azar del conjunto (x_1, x_2, \dots, x_n) . Despues se aplican las heurísticas continua y discreta de variable única dadas en las secciones 10.2.1 y 10.2.2 a la variable seleccionada.

Momento de Excel

La figura 10.2 es una captura de la aplicación de la hoja de cálculo de Excel de la heurística de paso aleatorio continuo (archivo *excelContSingleVarHeuristic.xls*). Utilizando la sintaxis de Excel, la función $F(x)$ se introduce en la celda D2, y la celda D5 asume el papel de la variable x . El sentido de la optimización (máx o mín) se especifica en la celda C2. El intervalo de búsqueda se introduce en las celdas D3 y D4. El menú desplegable en la celda D5 permite utilizar el muestreo uniforme o aleatorio.

Es posible realizar una heurística híbrida por medio de muestreo *uniforme* y *normal* en conjunto, como se indica a continuación:

1. Asigne un punto de inicio en la celda H3 y el número de iteraciones en la celda H4.
2. Seleccione muestreo uniforme en la celda D5 y ejecute la heurística oprimiendo el botón de comando en el paso 6.
3. Use la solución obtenida con el muestreo uniforme (celda D6) como un nuevo punto inicial en la celda H3.
4. Elija el muestreo normal en la celda D5 y vuelva a ejecutar la heurística.

FIGURA 10.2

Heurística de paso aleatorio realizada con Excel para hallar el óptimo (máximo o mínimo) de una función continua con una sola variable (archivo *excelContSingleVarHeuristic.xls*)

D2	f _x	=D5^5-10*D5^4+35*D5^3-50*D5^2+24*D5
Random-Walk Heuristic for Continuous Single Variable functions		
2	Step 1: Enter $F(D5)$ <input type="radio"/> Max <input checked="" type="radio"/> Min	2.325007
3	Step 2a: Enter lower bound	0
4	Step 2b: Enter upper bound	4
5	Step 3: Select sampling method	Uniform <input type="button" value="▼"/>
6	Solution summary: Best solution: $x^* = 1.455886$	<input type="button" value="Execute Heuristic"/>
7	Iteration, k	x _k
8	start	0.5
9	1	3.28125
10	2	1.32219005
11	3	1.45588613
12	4	1.45588613
13	5	1.45588613
	R	Uniform
	x'	F(x')
	x*	F(x*)

10.3 METAHEURÍSTICA

La heurística codiciosa presentada en la sección 10.2 comparte una estrategia común: En la iteración k la búsqueda se mueve a un nuevo punto $\mathbf{X}_{k+1} \in N(\mathbf{X}_k)$ sólo si el nuevo punto mejora el valor de la función objetivo $F(\mathbf{X})$. Si no se puede hallar una \mathbf{X}_{k+1} mejor en $N(\mathbf{X}_k)$ o si se llega a una cantidad de iteraciones especificada por el usuario, la solución queda atrapada en un *óptimo local* y termina la búsqueda.

La metaheurística está diseñada principalmente para escapar del entrampamiento en el óptimo local permitiendo movimientos inferiores, si es necesario. Se espera que la flexibilidad agregada a la búsqueda conduzca a una mejor solución.

A diferencia de la heurística codiciosa, que siempre termina cuando se llega a un óptimo local, la terminación de una búsqueda metaheurística se puede basar en alguno de los siguientes puntos de referencia:

1. La cantidad de iteraciones de búsqueda excede una cantidad especificada.
2. La cantidad de iteraciones desde la última mejor solución excede una cantidad especificada.
3. La vecindad asociada con el punto de búsqueda actual, o está vacía o no puede conducir a un nuevo movimiento de búsqueda viable.
4. La calidad de la mejor solución actual es aceptable.

En esta sección se presentan tres búsquedas prominentes metaheurísticas: tabú, recocido simulado y genética. Estos algoritmos difieren principalmente en la forma como la búsqueda escapa de un óptimo local. Cada metaheurística se ilustra mediante dos ejemplos. El primero, que trata con una función $F(x)$ de una sola variable, está diseñado para explicar los fundamentos de la metaheurística. El segundo, que se ocupa de un problema más complejo sobre la secuenciación de trabajos en un taller, revela complejidades adicionales en la implementación de la metaheurística. En el capítulo 11, las tres metaheurísticas se aplican al problema del agente viajero.

10.3.1 Algoritmo de búsqueda tabú

Cuando la búsqueda está atrapada en un óptimo local, la búsqueda tabú (BT) selecciona el siguiente movimiento de búsqueda (posiblemente inferior), de una manera que prohíbe *temporalmente* volver a examinar las soluciones anteriores. El instrumento principal para lograr tal resultado es la **lista tabú**, que “recuerda” los movimientos de búsqueda anteriores y los deshabilita durante un **periodo de permanencia** especificada. Cuando un movimiento tabú completa su permanencia, se elimina de la lista tabú y se pone disponible para movimientos futuros.

Ejemplo 10.3-1 (Minimización de una función de una sola variable)

En este ejemplo se detalla la aplicación de la BT a la minimización de la función $F(x)$ en la figura 10.1. Para la iteración k sean

x_k = Solución de prueba actual

$N(x_k)$ = Vecindad de x_k

L_k = Lista tabú de valores inadmisibles de x en la iteración k

τ = Periodo de permanencia tabú expresado en la cantidad de iteraciones sucesivas

x^* = Mejor solución encontrada durante la búsqueda

TABLA 10.5 Minimización de $F(x)$ en la figura 10.1 con BT y un periodo de permanencia tabú $\tau = 3$ y $N(x_k) = \{x_k - 4, \dots, x_k - 1, x_k + 1, \dots, x_k + 4\} - L_k$

Iteración k	R_k	x_k	$F(x_k)$	L_k	$N(x_k)$
(Inicio) 0	.0935	1	90		{2, 3, 4, 5}
1	.4128	3	50	{1}	{2, 4, 5, 6, 7}
2	.2039	4	80	{1, 3}	{2, 5, 6, 7, 8}
3	.0861	2	60	{1, 3, 4}	{5, 6}
4	.5839	5	100	{3, 4, 2}	{1, 6, 7, 8}
(Final) 5	.5712	7	20	{4, 2, 5}	{3, 6, 8}

Mejor solución heurística: $x = 7, F(x) = 20$, en la iteración 5 (también resulta ser óptima).

En términos de la función $F(x)$ de la figura 10.1, los valores factibles de x son 1, 2, ..., 8. En la iteración k , el conjunto de vecindades de x_k puede definirse como $N(x_k) = \{x_k - q, \dots, x_k - 1, x_k + 1, \dots, x_k + q\} - L_k$, donde q es una constante entera. La definición excluye implícitamente los puntos solución no factibles.³ Por ejemplo, en el caso en que $x_k = 3, q = 4$ y $L_k = \{6\}, N(x_k) = \{-\mathbb{X}, \mathbb{A}, 1, 2, 4, 5, 6, 7\} - \{6\} = \{1, 2, 4, 5, 7\}$. Los elementos tachados son no factibles.

Como se explicó en la sección 10.2, el siguiente movimiento de búsqueda x_{k+1} puede elegirse como el mejor entre todas las soluciones en $N(x_k)$, o como un elemento aleatorio de $N(x_k)$ (selección de paso aleatorio). Este ejemplo utiliza una selección aleatoria.

La tabla 10.5 presenta 5 iteraciones del algoritmo de BT. La búsqueda inicia en $x_0 = 1$ (seleccionado aleatoriamente de {1, 2, ..., 8} utilizando $R = 0.0935$). Defina la vecindad con $q = 4$ y suponga un periodo de permanencia fijo $\tau = 3$ iteraciones (el periodo de permanencia puede ser aleatorio como lo demuestra el problema 10-11).

Para ilustrar los cálculos, $N(x_0 = 1) = \{2, 3, 4, 5\}$. En la iteración 1, $L_1 = \{1\}$ y $R_1 = 0.4128$ seleccione $x_1 = 3$ a partir de $N(x_0)$, que resulta en $N(x_1) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\} - \{1\} = \{2, 4, 5, 6, 7\}$ y actualiza la lista tabú en la iteración 2 para $L_2 = \{1, 3\}$.

Se elimina un elemento de la lista tabú, de modo que el primero en entrar es el primero en salir después de un periodo de permanencia de $\tau = 3$ iteraciones sucesivas. Por ejemplo, el elemento {1} permanece en la lista tabú durante las iteraciones 1, 2 y 3 hasta que se elimina en la iteración 4.

Ejemplo 10.3-2 (Secuenciación de trabajos)

Considere el caso de secuenciar n trabajos en una sola máquina. El tiempo de procesamiento del trabajo j es t_j y su fecha límite es d_j (medida a partir de cero). Si el trabajo j se completa con anticipación a su fecha límite se incurre en un costo de almacenamiento (retención) h_j por unidad de tiempo. Un trabajo j retrasado origina un costo de penalización p_j por unidad de tiempo. La tabla 10.6 muestra los datos para un problema de 4 trabajos.

Defina

j_{ik} = El trabajo j ocupa la posición i en la secuencia durante la iteración k

s_k = Secuencia de trabajos utilizada en la iteración k

$N(s_k)$ = Secuencias de las vecindades de s_k

³ En realidad, un elemento tabú puede definir un siguiente movimiento de búsqueda, si satisface el llamado *criterio de nivel de aspiración*, como se explica en el ejemplo 10.3-2.

TABLA 10.6 Datos del problema de secuenciación de trabajos para el ejemplo 10.3-2

Trabajo, <i>j</i>	Tiempo de procesamiento en días, <i>T_j</i>	Fecha límite, <i>d_j</i>	Costo de almacenamiento, <i>h_j</i> (dólares/día)	Costo de penalización, <i>p_j</i> (dólares/día)
1	10	15	3	10
2	8	20	2	22
3	6	10	5	10
4	7	30	4	8

L_k = Lista tabú en la iteración *k*

τ = Período de permanencia expresado en cantidad de iteraciones sucesivas

z_k = Costo total (almacenamiento + penalización) de la secuencia *s_k*

*s** = Mejor secuencia disponible durante la búsqueda

*z** = Costo total asociado con *s**

Entre las posibles opciones para determinar la vecindad, *N(s_k)*, a partir de *s_k* están:

1. Intercambiar las posiciones de pares sucesivos de trabajos.
2. Intercambiar las posiciones de pares comprendidos con cada uno de los demás trabajos.
3. Intercambiar la posición de un trabajo con otro seleccionado al azar de entre los trabajos restantes.

En este ejemplo se utiliza la primera definición. Para demostrar su uso, considere *s₀* = (1-2-3-4). El conjunto de vecindades es *N(s₀)* = {(2-1-3-4), (1-3-2-4), (1-2-4-3)}, que corresponde a intercambiar las posiciones (en *s₀*) de los trabajos 1 y 2, 2 y 3, y 3 y 4, respectivamente. La selección del siguiente movimiento *s₁* a partir de *N(s₀)* puede hacerse al azar o con base en el criterio de costo mínimo. En este ejemplo se emplea la selección aleatoria.

En la tabla 10.7 se resumen 5 iteraciones suponiendo un período de permanencia *τ* = 2 iteraciones. La secuencia (3-1-2-4) en la iteración 2 proporciona la mejor solución con *z** = 126. Para demostrar los cálculos de los costos en la tabla, el valor de *z* para la secuencia *s₂* = (3-1-2-4) de la iteración 2 se determina en el siguiente orden:⁴

Trabajo	3	1	2	4
Tiempo de procesamiento	6	10	8	7
Fecha límite	10	15	20	30
Fecha de terminación	6	16	24	31
Tiempo de almacenamiento	4	0	0	0
Tiempo de retraso	0	1	4	1
Costo de almacenamiento	20	0	0	0
Costo de penalización por retraso	0	10	88	8

Así, *z* = Costo de almacenamiento + Costo de penalización = 20 + (10 + 88 + 8) = \$126.

La heurística funciona de la siguiente manera: En la iteración 1, *R* = 0.5124 selecciona la secuencia *s₁* = (1-3-2-4) al azar de *N(s₀)*. La lista tabú asociada es *L₁* = {3 - 2}, lo cual significa que las posiciones de

⁴ Por conveniencia, los cálculos de los costos se automatizan con la hoja de cálculo *excelJobSequencing.xls* en situaciones que implican cuatro y cinco trabajos. Usted puede modificarla para tomar en cuenta otras situaciones.

TABLA 10.7 BT aplicada al problema de secuenciación de trabajos con periodo de permanencia $\tau = 2$ iteraciones

Iteración, k	Secuencia, s_k	Costo total (almacenamiento) + (penalización)	z^*	Lista tabú, $L(s_k)$	R	Vecindad, $N(s_k)^*$
(Inicio) 0	(1-2-3-4)	$(5 \times 3 + 2 \times 2) + (14 \times 10 + 1 \times 8) = 167$	167		.5124	(2-1-3-4) (1-3-2-4)✓ (1-2-4-3)
1	(1-3-2-4)	$(5 \times 3) + (6 \times 10 + 4 \times 2 + 1 \times 8) = 171$		{3-2}	.3241	(3-1-2-4)✓ (1-2-3-4) (1-3-4-2)
2	(3-1-2-4)	$(4 \times 5) + (1 \times 10 + 4 \times 2 + 1 \times 8) = 126$	126	{3-2, 3-1}	.2952	(1-3-2-4) (3-2-1-4)✓ (3-1-4-2)
3	(3-2-1-4)	$(4 \times 5 + 6 \times 2) + (9 \times 10 + 1 \times 8) = 130$		{3-1, 2-1}	.4241	(2-3-1-4)✓ (2-1-2-4) (3-2-4-1)
4	(2-3-1-4)	$(12 \times 2) + (4 \times 10 + 9 \times 10 + 1 \times 8) = 162$		{2-1, 2-3}	.8912	(3-2-1-4) (2-1-3-4) (2-3-4-1)✓
(Final) 5	(2-3-4-1)	$(12 \times 2 + 9 \times 4) + (4 \times 10 + 16 \times 10) = 260$		{2-3, 4-1}	.0992	(3-2-4-1)✓ (2-4-3-1) (2-3-1-4)

Mejor secuencia de búsqueda: (3-1-2-4) con costo = 126 en la iteración 2.

* La marca ✓ designa el elemento no tabú seleccionado al azar a partir de $N(s_k)$ utilizando R .

los trabajos 2 y 3 no pueden cambiarse durante el periodo de permanencia (es decir, durante dos iteraciones sucesivas). Ésta es la razón por la que se excluye la secuencia (1-2-3-4) en $N(s_1)$. El mismo razonamiento se aplica a las secuencias tachadas en iteraciones subsecuentes. Observe que los cálculos en la tabla 10.7 aplican R sólo a elementos cercanos permisibles (no tachados).

“Reajuste” de la BT. Los siguientes refinamientos suelen ser efectivos para mejorar la calidad de la solución final:

- 1. Criterio de aspiración.** El diseño de la BT impide los movimientos que aparecen en la lista tabú. Sin embargo, ocurre una excepción cuando un movimiento impedido conduce a una solución mejorada. Por ejemplo, en la tabla 10.7 (ejemplo 10.3-2), las secuencias tabú tachadas en las iteraciones 1, 2, 3 y 4 deberían examinarse en cuanto a la posibilidad de producir mejores movimientos de búsqueda. Si lo hacen, tienen que aceptarse como movimientos de búsqueda.
- 2. Intensificación y diversificación.** Por lo general, se aplican dos estrategias adicionales, llamadas intensificación y diversificación, cuando una cadena de iteraciones sucesivas no produce mejoras. La intensificación exige un examen más completo de los puntos solución cercanos, mientras que la diversificación intenta desplazar la búsqueda a regiones de solución no exploradas. Una forma de implementar estas estrategias es controlando el tamaño de la lista tabú. Una lista tabú más corta aumenta el tamaño permisible del conjunto de vecindades y, por consiguiente, intensifica la búsqueda a puntos que se encuentran cerca de la mejor solución. Una lista tabú más larga hace lo contrario, ya que permite el escape de un punto óptimo local al permitir la exploración de regiones “remotas”.

Resumen del algoritmo de búsqueda tabú

- Paso 0:** Seleccione una solución inicial $s_0 \in S$. Comience la lista tabú $L_0 = \emptyset$, y elija un programa para especificar el tamaño de la lista tabú. Establezca $k = 0$.
- Paso 1:** Determine la vecindad factible $N(s_k)$ que excluya los miembros (inferiores) de la lista tabú L_k .
- Paso 2:** Seleccione el siguiente movimiento s_{k+1} a partir de $N(s_k)$ (o de L_k , si proporciona una mejor solución), y actualice la lista tabú L_{k+1} .
- Paso 3:** Si se alcanza una condición de terminación, deténgase. En caso contrario, establezca $k = k + 1$ y vaya al paso 1.

10.3.2 Algoritmo de recocido simulado

El recocido simulado (RS) escapa del entrampamiento en un óptimo local utilizando una condición de probabilidad que acepta o rechaza un movimiento inferior (siempre se acepta un mejor movimiento). La idea de determinar la probabilidad de aceptación del siguiente movimiento de búsqueda se explica de la siguiente manera: Suponga que el problema de optimización se da como

$$\text{Maximizar o minimizar } z = F(s), s \in S$$

Conforme aumenta la cantidad de iteraciones, el RS busca una determinación más selectiva de estrategias de solución utilizando un parámetro ajustable T , llamado **temperatura**, es decir, se hace progresivamente más pequeño de acuerdo con un **programa de temperatura**.⁵ Por lo general, un programa de I elementos para T suele definirse como $\{T = T_i, i = 0, 1, \dots, I\}$. Cada T_i se aplica en un número específico de iteraciones de *aceptación* consecutivas, t .⁶ Dado que s_0 es la estrategia de inicio de la búsqueda, T_i suele calcularse como

$$T_0 = r_0 F(s_0), 0 < r_0 < 1,$$

$$T_i = r_i T_{i-1}, 0 < r_i < 1, i = 1, 2, \dots, I$$

Defina s_a como la última estrategia de solución *aceptada*. En la iteración k , la probabilidad de aceptar una estrategia cercana como el siguiente movimiento de búsqueda, s_{k+1} , se calcula como

$$P\{\text{aceptar } s_{k+1} | s_{k+1} \in N(s_k)\} = \begin{cases} 1, & \text{si } F(s_{k+1}) \text{ no es peor que } F(s_a) \\ e^{\frac{-|F(s_a) - F(s_{k+1})|}{T}}, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La fórmula indica que el siguiente movimiento de búsqueda, s_{k+1} , se acepta si $F(s_{k+1})$ no es peor que $F(s_a)$. En caso contrario, $F(s_{k+1})$ es una solución inferior y s_{k+1} se acepta sólo si $R_k \leq e^{\frac{-|F(s_a) - F(s_{k+1})|}{T}}$, donde R_k es un número aleatorio (0, 1). Si se rechaza s_{k+1} , se intenta una estrategia de solución diferente, eligiendo $N(s_a)$. Observe que el programa de temperatura reduce la probabilidad de aceptación a medida que la cantidad de iteraciones aumenta haciendo a T_i cada vez más pequeña.

⁵ El RS está inspirado en el proceso de recocido en la metalurgia, el cual implica el calentamiento y el enfriamiento controlado de un material, y de ahí el empleo del término *temperatura*. El uso de la jerga metalúrgica en la descripción del RS es puramente tradicional, sin ninguna relación técnica con el desarrollo de la heurística, y guarda la idea general detrás del proceso de recocido.

⁶ El cambio de temperatura que se basa en la cantidad de iteraciones de *aceptación* es una regla arbitraria y puede sustituirse con otras; por ejemplo, se puede basar el cambio en el total de iteraciones (de aceptación o rechazo) que intervienen.

TABLA 10.8 Minimización de $F(x)$ en la figura 10.1 utilizando la heurística de RS con programa $T_0 = 0.5F(x_0)$, $T_i = 0.5T_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, y $t = 3$ iteraciones de aceptación

Iteración k	R_{1k}	x_k	$F(x_k)$	a	T	$\Delta = F(x_k) - F(x_{k-1}) $	$e^{-\Delta/T}$	R_{2k}	Decisión	$N(x_k)$
(Inicio) 0		1	90	0	45.0					{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
1	0.4128	4	80	1	45.0				Aceptar: $F(x_1) < F(x_0)$	{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8}
2	0.2039	2	60	2	45.0				Aceptar: $F(x_2) < F(x_1)$	{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
3	0.0861	1	90	2	45.0	$ 60 - 90 = 30$.5134	.5462	Rechazar: $R_{2k} > e^{-\Delta/T}$	Igual que $N(x_2)$
4	0.5839	6	40	4	45.0				Aceptar: $F(x_4) < F(x_2)$	{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8}
(Final) 5	0.5712	5	100	5	22.5	$ 40 - 100 = 60$.0695	.0197	Aceptar: $R_{2k} < e^{-\Delta/T}$	{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8}

Buscar la mejor solución: $x = 6$ con $F(6) = 40$.

Ejemplo 10.3-3 (Minimización de una función de una sola variable)

En este ejemplo se aplica el RS para encontrar el mínimo de la función de una sola variable de la figura 10.1.

En la tabla 10.8 se presentan cinco iteraciones. La solución define arbitrariamente la vecindad en cualquier iteración k como $N(x_k) = \{1, 2, \dots, 8\} - \{x_a\}$, donde x_a es la solución asociada con la iteración de aceptación más reciente.

Para ilustrar los cálculos, la búsqueda selecciona arbitrariamente $x_0 = 1$ con $t = 3$ iteraciones de aceptación y establece $r_i = 0.5$ para toda $i \geq 0$. Por lo tanto, $N(x_0) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $F(1) = 90$, y $T_0 = 0.5 F(1) = 45$. Para $k = 1$, el número aleatorio $R_{11} = 0.4128$ selecciona el siguiente punto solución (posible) $x_1 = 4$ desde $N(x_0)$ con $F(4) = 80$. Como $F(x_1)$ es mejor que $F(x_0)$, se acepta el movimiento. En la iteración 2 se establece $a = 1$, con $F(x_a) = 80$. El siguiente movimiento $x_2 = 2$ se selecciona a partir de $N(x_1) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ utilizando $R_{12} = 0.2039$. De nuevo se acepta el movimiento porque mejora la solución de $F(x_1) = 80$ a $F(x_2) = 60$. Esto establece $a = 2$ con $F(x_a) = 60$. En la iteración 3, $R_{13} = 0.0861$ selecciona $x_3 = 1$ a partir de $N(x_2) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ con $F(x_3) = 90$. La nueva solución es inferior a $F(x_a) = 60$. Por lo tanto, $\Delta = |60 - 90| = 30$, y $e^{-\Delta/T} = 0.5134$. Dado $R_{23} = 0.5462$, se rechaza la solución $x_3 = 1$, lo cual requiere que se vuelva a muestrear desde la última vecindad aceptada $N(x_2)$. En la iteración 4, se acepta $x_4 = 6$ porque resulta en una solución mejorada (respecto de la de la iteración 2). En este momento se satisface la condición $t = 3$, lo que cambia la temperatura a $T_1 = 0.5$, $T_0 = 22.5$ en la siguiente iteración. En la iteración 5, dada $x_5 = 5$, $R_{25} (= 0.0197) < e^{-\Delta/T} (= 0.0695)$ acepta el movimiento, aunque se trata de una solución inferior [$F(5) = 100$].

Ejemplo 10.3-4 (Secuenciación de trabajos)

Este problema se resuelve en el ejemplo 10.3-2 utilizando la BT. Por conveniencia, en este caso se repite el enunciado del problema. Los trabajos se secuencian en una sola máquina. Cada trabajo j tiene un tiempo de procesamiento t_j y una fecha límite d_j . Si se completa j antes de la fecha límite, se incurre en costo de almacenamiento h_j por unidad de tiempo. Un trabajo retrasado j resulta en un costo de penalización p_j por unidad de tiempo. La tabla 10.9 muestra los datos para un problema de secuenciación de 4 trabajos.

Defina

s_k = Secuencia de trabajos utilizada en la iteración k

$N(s_k)$ = Secuencias de vecindades de s_k

T_i = Programa de temperatura, $i = 1, 2, \dots, I$

c_k = Costo total (almacenamiento + penalización) de la secuencia s_k

TABLA 10.9 Datos del problema de secuenciación de trabajos para el ejemplo 10.3-4

Trabajo, <i>j</i>	Tiempo de procesamiento en días, <i>D_j</i>	Fecha límite, <i>d_j</i>	Costo de almacenamiento, <i>h_j</i> (dólares/día)	Costo de penalización, <i>p_j</i> (dólares/día)
1	10	15	3	10
2	8	20	2	22
3	6	10	5	10
4	7	30	4	8

La tabla 10.10 proporciona cinco iteraciones de RS. La iteración 3 produce la mejor secuencia. Observe que cuando una secuencia se rechaza en la iteración *k*, se utiliza de nuevo la vecindad de la última iteración de aceptación para seleccionar aleatoriamente la secuencia para la iteración *k* + 1. Esto ocurre en la iteración 2, donde la vecindad es igual que en la iteración 1. Vea también que *t* = 3 se satisface en la iteración 4, lo que ocasiona un cambio en la temperatura de 83.5 a 41.75 en la iteración 5.

Resumen del algoritmo de recocido simulado

Paso 0: Elija una solución inicial *s₀* ε *S*. Establezca *k* = 0, *p* = 0 e *i* = 0.

Paso 1: Genere la vecindad *N(s_k)* y establezca la temperatura *T* = *T_i*.

Paso 2: Determine la solución *s_{k+1}* al azar a partir de *N(s_k)*. Si *s_{k+1}* no es peor que la *última solución aceptada* o si *R* < *P* {aceptar *s_{k+1}*}, después acepte *s_{k+1}*, establezca *p* = *p* + 1 y vaya al paso 3. En caso contrario, rechace *s_{k+1}* y haga *N(s_{k+1})* = *N(s_k)*. Establezca *k* = *k* + 1, y vaya al paso 1.

Paso 3: Si se llega a una condición de terminación, deténgase. De lo contrario, establezca *k* = *k* + 1. Si *p* = *t*, entonces establezca *i* = *i* + 1. Vaya al paso 1.

TABLA 10.10 RS aplicado al problema de secuenciación de trabajos con programa $T_0 = 0.5c_0$, $T_i = 0.5T_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ y $t = 3$ iteraciones de aceptación

Iteración <i>k</i>	Secuencia <i>s_k</i>	Costo total <i>c_k</i> = (almacenamiento) + (penalización)	<i>T_k</i>	<i>z</i> = $\frac{ \text{Cambio en el costo} }{T_k}$	<i>e^{-z}</i>	<i>R_{1k}</i>	Decisión	<i>R_{2k}</i>	Vecindad, <i>N(s_k)</i> *
(Inicio) 0	(1-2-3-4)	$(5 \times 3 + 2 \times 2) + (14 \times 10 + 1 \times 8) = 167$.5462	(2-1-3-4) (1-3-2-4)✓ (1-2-4-3)
1	(1-3-2-4)	$(5 \times 3) + (6 \times 10 + 4 \times 22 + 1 \times 8) = 171$	83.5	.0479	.9532 .5683	Aceptar: <i>R₁₁</i> < <i>e^{-z}</i>	.7431	(3-1-2-4) (1-2-3-4) (1-3-4-2)✓	
2	(1-3-4-2)	$(5 \times 3 + 7 \times 4) + (6 \times 10 + 11 \times 22) = 345$	83.5	2.083	.1244 .3459	Rechazar: <i>R₁₂</i> > <i>e^{-z}</i>	.1932	(3-1-2-4)✓ (1-2-3-4) (1-3-4-2)	
3	(3-1-2-4)	$(4 \times 5) + (1 \times 10 + 4 \times 22 + 1 \times 8) = 126$	83.5			Aceptar: <i>c₃</i> < <i>c₁</i>	.6125	(1-3-2-4) (3-2-1-4)✓ (3-1-4-2)	
4	(3-2-1-4)	$(4 \times 5 + 6 \times 3) + (9 \times 10 + 1 \times 8) = 130$	83.5	.0479	.9532 .6412	Aceptar: <i>R₁₄</i> < <i>e^{-z}</i>	.2234	(2-3-1-4)✓ (3-1-2-4) (3-2-4-1)	
(Final) 5	(2-3-1-4)	$(12 \times 2) + (4 \times 10 + 9 \times 10 + 1 \times 8) = 162$	41.75	.766	.4647 .5347	Rechazar: <i>R₁₅</i> > <i>e^{-z}</i>	.8127	(2-3-1-4) (3-1-2-4) (3-2-4-1)✓	

Búsqueda de la mejor solución: (3-1-2-4) con costo de 126 en la iteración 3.

La marca ✓ indica la secuencia seleccionada utilizando el número aleatorio *R_{2k}*.

10.3.3 Algoritmo genético

El algoritmo genético (AG) imita el proceso de evolución biológica de “sobrevivencia del más apto”. Cada solución factible de un problema se considera como un **cromosoma** codificado por un conjunto de **genes**. Los **códigos genéticos** más comunes son el **binario** (0, 1) y el **numérico** (0, 1, 2, ...). Por ejemplo, los cromosomas de una sola variable cuyos valores factibles son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 pueden representarse mediante los códigos binarios (0000, 1000, 0100, 1100, 0010, 1010, 0110, 1110 y 0001). Los cromosomas para un problema de dos variables (x_1, x_2) con $x_1 = \{0, 1\}$ y $x_2 = \{0, 1, 2, 3\}$ pueden representarse mediante los códigos numéricos (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2) y (1, 3). Los códigos numéricos de variables múltiples también pueden representarse como códigos binarios. Por ejemplo, el código binario de $(x_1, x_2) = (0, 3)$ es (000, 110). Existen otros esquemas de codificación, incluido el **código de nodo** para modelos de red (vea Beasley y colaboradores, 1993, parte 2).

Un conjunto de N soluciones factibles se refiere como una **población** con N cromosomas. La **aptitud** de un cromosoma se mide en términos de una función objetivo adecuada. Un cromosoma más apto produce un mejor valor para la función objetivo.

La idea general del AG consiste en seleccionar dos **padres** a partir de una población. En seguida, los genes de los dos padres **se cruzan** y (posiblemente) **mutan** (como se explicará en el ejemplo 10.3-5) para producir dos **hijos**. La descendencia reemplaza los dos cromosomas más débiles (menos aptos) en la población, y se repite el proceso de seleccionar nuevos padres.

La implementación real del AG requiere detalles adicionales que son específicos del problema. Asimismo, las reglas para seleccionar padres y crear hijos pueden variar. Por ejemplo, los padres se pueden seleccionar totalmente al azar de una población, o pueden consistir en los dos cromosomas más aptos. Algunos de estos detalles se proporcionarán más adelante.

Ejemplo 10.3-5 (Minimización de una función de una sola variable)

El AG se aplica al problema discreto de una sola variable de la figura 10.1 con el dominio factible $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Se especificará arbitrariamente una población de tamaño $N = 4$ padres, cuyos cromosomas se determinan a partir de X mediante muestreo aleatorio uniforme.

El número aleatorio R se aplica a la distribución uniforme en la tabla 10.11 para generar los cuatro miembros ($N = 4$) de la población inicial y su aptitud, como se muestra en la tabla 10.12. La solución para $i = 4$ es una repetición de la solución para $i = 3$ ($x_3 = x_4$); por consiguiente, se descarta la solución para $i = 4$. La población inicial es $X_0 = \{8, 3, 5, 1\}$, y la mejor solución asociada es $x^* = 3$ con $F(x^*) = 50$.

Es posible seleccionar dos padres de la población inicial $X_0 = \{8, 3, 5, 1\}$ de varias maneras: (1) Elija los dos miembros más aptos. (2) Seleccione el miembro más apto y luego uno al azar de entre los miembros restantes. (3) Elija dos padres aleatoriamente a partir de X_0 . En esta presentación se utiliza la tercera opción. Específicamente, los dos números aleatorios $R_1 = 0.2869$ y $R_2 = 0.0281$ que dan como resultado $x = 3$ con $F(3) = 50$ y $x = 8$ con $F(8) = 70$.

Los dos hijos se crean con los dos padres seleccionados por medio de un **cruce** genético. Existen varios métodos para implementar el cruce.

TABLA 10.11 Muestreo aleatorio uniforme a partir del dominio $X = \{x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

x	1	2	3	4	5	6	7	8
Probabilidad acumulada, $P(x)$.125	.250	.375	.500	.625	.750	.875	1.

TABLA 10.12 Generación de la población inicial con $N = 4$

i	R_i	x_i	Código binario de x_i	$F(x_i)$
1	.3025	3	1100	50
2	.9842	8	0001	70
3	.5839	5	1010	100
4	.5712	5	Descartar	
5	.0926	1	1000	90

- Cruce uniforme.** En esta regla, los genes comunes de los padres se aplican a ambos hijos. Los genes restantes de un hijo se determinan aleatoriamente, mientras que el otro hijo obtiene el gen complemento.
- Cruce de un punto.** Los genes de los padres P_1 y P_2 se dividen aleatoriamente *en el mismo punto* y después se intercambian; es decir, $P_1 = (P_{11}, \underline{P_{12}})$ y $P_2 = (P_{21}, \underline{P_{22}})$ producen los cromosomas hijos como $C_1 = \{P_{11}, \underline{P_{22}}\}$ y $C_2 = \{P_{21}, \underline{P_{12}}\}$.
- Cruce de múltiples puntos.** Esta regla extiende el cruce de un punto a múltiples puntos aleatorios. Por ejemplo, en un cruce de dos puntos, $P_1 = (P_{11}, \underline{P_{12}}, P_{13})$ y $P_2 = (P_{21}, \underline{P_{22}}, P_{23})$ producen $C_1 = (P_{11}, \underline{P_{22}}, P_{13})$ y $C_2 = (P_{21}, \underline{P_{12}}, P_{23})$.

Este ejemplo utiliza la regla de cruce uniforme. En el ejemplo 10.3-6 se usará la regla de cruce de un punto.

Para los dos padres ($x_1 = 3, x_2 = 8$) generados en la tabla 10.12, se tiene

$$\begin{aligned} P_1 &= (1 \ 1 \underline{0} \ 0) \\ P_2 &= (0 \ 0 \underline{0} \ 1) \end{aligned}$$

En el cruce uniforme, el tercer gen común (subrayado) en P_1 y P_2 se transmite a ambos hijos. Los tres genes restantes se determinan aleatoriamente como sigue: Para el hijo 1, el gen es 1 si $0 \leq R < 0.5$ y 0 si $0.5 \leq R \leq 1$. Los genes correspondientes para el hijo 2 son los complementos de los asignados al hijo 1. Por ejemplo, los tres números aleatorios 0.2307, 0.7346 y 0.6220 muestran que los genes 1, 2 y 4 para el hijo 1 son 1, 0 y 0, respectivamente, lo que automáticamente asigna los genes complemento 0, 1 y 1 al hijo 2. Entonces,

$$\begin{aligned} C_1 &= (1 \ 0 \underline{0} \ 0) \text{ (o } x = 1) \\ C_2 &= (0 \ 1 \underline{0} \ 1) \text{ (o } x = 10) \end{aligned}$$

El hijo 2 corresponde a una solución no factible (recuerde que el intervalo factible es $x = (1, 2, \dots, 8)$). Sin embargo, antes de descartar una solución de hijo no factible, primero se aplica la **mutación** aleatoria (reemplazo de un gen con otro) y luego se verifica la descendencia mutada en cuanto a su factibilidad. Si persiste la no factibilidad, se debe crear una descendencia totalmente nueva (a partir de los mismos padres). El proceso puede repetirse cuantas veces se requiera hasta lograr la factibilidad.

La probabilidad de mutación suele ser de aproximadamente 0.1; es decir, un gen muta si $0 \leq R < 0.1$. Para el hijo 1, la secuencia de números aleatorios 0.6901, 0.7698, 0.0871, 0.9534 muestra que el tercer gen muta sólo de 0 a 1, lo que produce $C_1 = (1 \ 0 \ 1 \ 0)$ [o $x = 5$ con $F(5) = 100$]. Para el hijo 2, la secuencia 0.5954, 0.2632, 0.6731, 0.0983 muta al gen 4 y produce $C_2 = (0 \ 1 \ 0 \ 0)$ [o $x = 2$ con $F(2) = 60$]. Los cromosomas de ambos hijos son factibles, pero ninguno produce una mejor solución. Por consiguiente, la solución $x^* = 3$ para la población inicial sigue siendo la mejor hasta ahora.

Los padres menos aptos en X_0 ($x = 5$ y $x = 1$) ahora son reemplazados con las dos soluciones descendientes ($x = 5$ y $x = 2$). En realidad, esto indica que la siguiente población es $X_1 = (8, 3, 5, 2)$. Ahora se utiliza X_1 para iniciar una nueva iteración.

Tratamiento de las variables continuas. La codificación genética en el ejemplo 10.3-5 supone que la variable x es entera. La codificación puede modificarse para incluir variables continuas de la siguiente manera. Especifique un intervalo factible finito (de preferencia estrecho) de la forma $l \leq x \leq u$, donde l y u son constantes. Sea v el valor numérico de una cadena binaria s de n bits de longitud. Después, la cadena s se transforma en un valor real (continuo) por medio de

$$x = l + (u - l) \left(\frac{v}{2^n - 1} \right)$$

La lógica de la fórmula es que el valor máximo de una cadena binaria de n bits es $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ y $\left(\frac{v}{2^n - 1} \right)$ es la proporción de la cantidad $(u - l)$, que cuando se agrega al límite inferior l produce el valor correspondiente de x en el intervalo (l, u) . Por ejemplo, dado $-1 \leq x \leq 3$ y al elegir arbitrariamente $n = 5$, la cadena binaria $(0\ 0\ 1\ 0\ 1)$ tiene $v = 2^2 + 2^4 = 20$, y el valor asociado de x es

$$x = -1 + [3 - (-1)] \left(\frac{20}{2^5 - 1} \right) = 1.580645$$

El diseño del código indica que cuanto más grandes sean los valores de n , producirán una mayor exactitud.

Las cadenas de n bits que representan v se utilizan de la misma manera que en el ejemplo 10.3-5, lo cual significa que los hijos se crean por medio del cruce y la mutación de los genes de los padres. En realidad, una situación de múltiples variables se maneja de una forma similar con cada variable representada por una cadena independiente de n bits.

Ejemplo 10.3-6 (Secuenciación de trabajos)

Este problema se resolvió en el ejemplo 10.3-2 por medio de una BT y en el ejemplo 10.3-4 mediante un RS. Por conveniencia, aquí se repite el enunciado (se agrega un quinto trabajo para producir un ejemplo más viable). Los trabajos se secueñan en una sola máquina. Cada trabajo j tiene un tiempo de procesamiento t_j y una fecha límite d_j . Si el trabajo j se completa antes de la fecha límite, se incurre en un costo de almacenamiento h_j por unidad de tiempo. Un trabajo j retrasado produce un costo de penalización p_j por unidad de tiempo. En la tabla 10.13 se proporcionan los datos para un problema de programación de 5 trabajos.

Defina

s_k = Secuencia de trabajos utilizada en la iteración k

$N(s_k)$ = Secuencias de vecindades de s_k

z_k = Costo total (almacenamiento + penalización) de la secuencia s_k

TABLA 10.13 Datos para el problema de secuenciación de 5 trabajos en una sola máquina

Trabajo, j	Tiempo de procesamiento en días, T_j	Fecha límite, d_j	Costo de almacenamiento, h_j (dólares/día)	Costo de penalización, p_j (dólares/día)
1	10	15	3	10
2	8	20	2	22
3	6	10	5	10
4	7	30	4	8
5	4	12	6	15

s^* = Mejor secuencia disponible durante la búsqueda

z^* = Costo total asociado con s^*

La primera tarea es desarrollar el código genético de los cromosomas. Aunque en el problema de secuenciación de trabajos se puede usar la codificación binaria (por ejemplo, vea Yamada y Nakano, 1997), el algoritmo resultante es complejo porque las operaciones de cruce y mutación pueden resultar en programas no factibles que necesitan “repararse”. Por consiguiente, en vez de utilizar un código binario, la naturaleza del problema permite representar un cromosoma como una secuencia de tareas (como 1-2-5-3-4).

Para demostrar cómo se crean los hijos, considere los cromosomas padres $P1 = 1-3-5-2-4$ y $P2 = 5-4-2-3-1$. Suponga que ocurre un cruce de un punto aleatorio en el tercer gen. Los dos primeros genes de $C1(C2)$ se construyen intercambiando los dos primeros genes de $P1(P2)$. Los últimos tres genes son los restantes de $P1(P2)$ después de excluir a los primeros dos genes, es decir,

$$\text{Primeros 2 genes de } C1 = \{5, 4\}$$

$$\text{Primeros 2 genes de } C2 = \{1, 3\}$$

$$\text{Últimos 3 genes de } C1 = \{1, 3, 5, 2, 4\} - \{5, 4\} = \{1, 3, 2\}$$

$$\text{Últimos 3 genes de } C2 = \{5, 4, 2, 3, 1\} - \{1, 3\} = \{5, 4, 2\}$$

Por lo tanto, $C1 = 5-4-1-3-2$ y $C2 = 1-3-5-4-2$.

En seguida, las mutaciones de $C1$ y $C2$ se transmiten de la siguiente manera. Si el número aleatorio $R < 0.1$, un cromosoma hijo se somete a mutación. La mutación se implementa entonces para el hijo intercambiando dos genes (trabajos) seleccionados aleatoriamente. Por ejemplo, los números aleatorios $R = 0.8452 (> 0.1)$ y $R = 0.0342 (< 0.1)$ aplicados a $C1$ y $C2$, respectivamente, indican que sólo muta $C2$. Si se utiliza $R = 0.1924$ y $R = 0.8299$ para determinar los genes intercambiados en $C2$, el primer número aleatorio selecciona la posición 1 (trabajo 1), y el segundo número aleatorio elige la posición 5 (trabajo 2). Por lo tanto, $C2$ muta de 1-3-5-4-2 a 2-3-5-4-1.

En la tabla 10.14 se resumen los cálculos de las iteraciones 0 a 3. Por conveniencia, los cálculos de los costos (valores de z) se automatizan por medio de la hoja de cálculo *excelJobSequencing.xls*. La mejor secuencia está asociada con $P4$ en la iteración 3.

Resumen del algoritmo genético

Paso 0:

- (a) Genere una población aleatoria X de N cromosomas factibles.
- (b) Para cada cromosoma s en la población seleccionada, evalúe su aptitud asociada. Registre s^* como la mejor solución disponible hasta ahora.
- (c) Codifique cada cromosoma mediante una representación binaria o numérica.

Paso 1:

- (a) Seleccione dos cromosomas padres de la población X .
- (b) Cruce los genes padre para crear dos hijos.
- (c) Mute los genes hijo aleatoriamente.
- (d) Si las soluciones resultantes son no factibles, repita el paso 1 hasta lograr la factibilidad. Si no es así, reemplace los dos padres más débiles con los nuevos hijos para formar una nueva población X y actualice s^* . Vaya al paso 2.

Paso 2:

Si se alcanza una condición de terminación, deténgase; s^* es la mejor solución disponible. En caso contrario, repita el paso 1.

TABLA 10.14 Iteraciones del AG aplicadas al problema de secuenciación de trabajos del ejemplo 10.3-6

Iteración		Secuencia, s	z	Explicación
0	P1	1-2-3-4-5	512	Población inicial aleatoria (P1, P2, P3, P4).
	P2	2-3-4-1-5	605	Los padres seleccionados son P4 (mejor z) y P3 (aleatorio)..
	P3	<u>4-1-5-2-3</u>	695	El cruce de P3 y P4 inicia en la posición 3.
	P4	3-2-1-4-5	475	
	C1	3-2-4-1-5	573	C1 muta al intercambiar las posiciones 2 y 5.
	C2	4-1-3-2-5	829	C2 muta al intercambiar las posiciones 1 y 5.
	mC1	3-5-4-1-2	534	
	mC2	5-1-3-2-4	367	
1	P1	<u>1-2-3-4-5</u>	512	Los peores padres P2 y P3 en la iteración 0 son reemplazados por sus mC1 y mC2.
	P2	3-5-4-1-2	534	
	P3	<u>5-1-3-2-4</u>	367	Los padres seleccionados son P3 (mejor z) y P1 (aleatorio).
	P4	3-2-1-4-5	475	El cruce de P1 y P3 inicia en la posición 4.
	C1	5-1-3-2-4	367	C1 muta al intercambiar las posiciones 2 y 3.
	C2	1-2-3-5-4	439	C2 muta al intercambiar las posiciones 2 y 4.
	mC1	5-3-1-2-4	314	
	mC2	1-5-3-2-4	361	
2	P1	<u>5-3-1-2-4</u>	314	Los peores padres P1 y P2 en la iteración 1 son reemplazados por sus mC1 y mC2.
	P2	1-5-3-2-4	361	
	P3	5-1-3-2-4	367	Los padres seleccionados son P1 (mejor z) y P4 (aleatorio).
	P4	<u>3-2-1-4-5</u>	475	El cruce de P1 y P4 inicia en la posición 3.
	C1	3-2-5-1-4	292	C1 muta al intercambiar las posiciones 1 y 2.
	C2	5-3-2-1-4	222	No hay mutación en C2.
	mC1	2-3-5-1-4	324	
	mC2	5-3-2-1-4	222	
3	P1	5-3-1-2-4	314	Los peores padres P3 y P4 en la iteración 2 son reemplazados por su mC1 y mC2.
	P2	<u>1-5-3-2-4</u>	361	
	P3	2-3-5-1-4	324	Los padres seleccionados son P4 (mejor z) y P2 (aleatorio).
	P4	<u>5-3-2-1-4</u>	222	El cruce de P2 y P4 inicia en la posición 3.
	C1	5-3-1-2-4	314	No hay mutación.
	C2	1-5-3-2-4	361	No hay mutación.

10.4 APLICACIÓN DE METAHEURÍSTICA A PROGRAMAS LINEALES ENTEROS

Esta sección muestra la forma como la metaheurística desarrollada en la sección 10.3 se aplica a los siguientes programas lineales enteros (PLE) generales.

$$\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, \geq, o =) b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$L_j \leq x_j \leq U_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j \text{ entera}, j = 1, 2, \dots, n$$

Los elementos básicos de una metaheurística de PLE incluyen la selección de la solución inicial, la definición de la vecindad y la determinación del siguiente movimiento de búsqueda.

- 1. Selección de la solución inicial.** La metaheurística utiliza la solución óptima continua *redondeada* como solución inicial. En este capítulo, la regla (arbitraria) para redondear es: Redondee hacia arriba si el valor fraccionario es mayor o igual que 0.5; en caso contrario, redondee hacia abajo.
- 2. Definición de la vecindad.** Es más manejable computacionalmente buscar las variables una a la vez definiendo las vecindades para la variable x_j como

$$N(x_j) = \{(x_1, \dots, x_j - 1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_n)\}$$

Por ejemplo, suponga que la solución actual en un problema de 5 variables es $(8, 6, 4, 0, 2)$, y suponga que x_3 se designa para que cambie. Entonces,

$$N(x_3) = \{(8, 6, 3, 0, 2), (8, 6, 5, 0, 2)\}$$

Las soluciones no factibles que transgreden las cotas superior e inferior se excluyen de la vecindad. Por ejemplo, si se designa x_4 para que cambie y $0 \leq x_4 \leq \infty$, entonces $N(x_4) = \{(8, 6, 4, -1, 2), (8, 6, 4, 1, 2)\} = \{(8, 6, 4, 1, 2)\}$ ya que $x_4 = -1$ es no factible.

- 3. Determinación del siguiente movimiento de búsqueda.** El siguiente movimiento de búsqueda se determina a partir de una vecindad como la solución $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con la no factibilidad mínima.⁷ La medida de no factibilidad se calcula como

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{X}} = & \sum_{(\leq)} \max \{0, \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i\} + \sum_{(\geq)} \max \{0, b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\} \\ & + \sum_{(=)} \max \{0, |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i|\} + \sum_{j=1}^n (\max \{0, L_j - x_j\} + \max \{0, x_j - U_j\}) \end{aligned}$$

Si $I_{\mathbf{X}} = 0$, entonces el siguiente movimiento de búsqueda es factible.

El resto de la sección detalla el desarrollo de la BT, el RS y el AG para un PLE.⁸ Las ideas se aplican a cualquier PLE y, de hecho, pueden extenderse a programas no lineales.

10.4.1 Algoritmo tabú aplicado a un PLE

El algoritmo de BT aplicado a un PLE de n variables utiliza las siguientes definiciones:

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

L_j = Cota inferior en x_j (preestablecida = 0)

U_j = Cota superior en x_j (preestablecida = ∞)

⁷ Las metaheurísticas más sofisticadas incluyen técnicas para restaurar la factibilidad o utilizar funciones lagrangianas para penalizar las infracciones de la factibilidad (por ejemplo, vea Abramson y Randall, 1999).

⁸ Se recomienda repasar la sección 10.3 antes de continuar con este material.

$$N(x_j) = \{(x_1, \dots, x_j - 1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_n)\}$$

$\mathbf{X}_j^t(k)$ = Solución \mathbf{X} en la cual x_j se reemplaza con $x_j + k$ ($k = \pm 1$) en la iteración t

$I_j^t(k)$ = Medida de no factibilidad de la solución $\mathbf{X}_j^t(k)$

$z_j^t(k)$ = Valor objetivo asociado con $\mathbf{X}_j^t(k)$

\mathbf{X}^* = Mejor solución factible encontrada durante la búsqueda

z^* = Valor objetivo asociado con \mathbf{X}^*

$I^* = \min\{I_j^t(k), j = 1, 2, \dots, n; k = -1, 1\}$ encontrada en la iteración t

j^* = Índice j asociado con I^*

k^* = Valor de k ($= \pm 1$) asociado con I^*

τ = Periodo de permanencia tabú, expresado en número de iteraciones.

La lista tabú se compone de los *índices* de variables tabú.

El algoritmo inicia haciendo \mathbf{X} igual a la solución de PL óptima redondeada. En la iteración t , se permite que una variable tabú defina (de acuerdo con el criterio de aspiración, sección 10.3.1) el siguiente movimiento de búsqueda, si resulta en una solución factible mejorada. En caso contrario, se excluye una variable tabú.

En la iteración t , la búsqueda calcula la medida de no factibilidad asociada $I_j^t(k)$ y el valor objetivo $z_j^t(k)$ para todas las j y k . El algoritmo sigue la pista del candidato para el siguiente movimiento al actualizar los índices j^* y k^* . Una mejor solución factible define automáticamente el siguiente movimiento. En caso contrario, se selecciona el movimiento no tabú con la mínima medida de no factibilidad. Si $j^* = 0$, todas las soluciones vecinas son tabú y esta lista se vacía para que la búsqueda continúe.

Ejemplo 10.4-1

Se aplica la BT al siguiente PLE:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

Sujeto a

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 \leq 10$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 14$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 9$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

x_1, x_2, x_3, x_4 enteras no negativas

La solución continua óptima es $x_1 = 4.625$, $x_2 = 0$, $x_3 = 14.625$, $x_4 = 14.5$ con $z = 82.125$. Su solución entera óptima (obtenida con TORA) es $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 14$, $x_4 = 13$ con $z = 79$. La solución redondeada es $\mathbf{X} = (5, 0, 15, 15)$. Las medidas de no factibilidad asociadas son $I_{\mathbf{X}} = 2$ con $z_{\mathbf{X}} = 85$ (verifíquelo!).

La tabla 10.15 proporciona cinco iteraciones utilizando un periodo de permanencia tabú $\tau = 4$ iteraciones. Un índice subrayado identifica una variable tabú. Por ejemplo, $x_1 (= 4)$ entra a la lista tabú en la iteración 1 y, por consiguiente, está subrayada. En la iteración 5, el subrayado se retira porque el periodo de permanencia

TABLA 10.15 Búsqueda tabú del ejemplo de PLE con periodo de permanencia $\tau = 4$

Iteración		x_1	x_2	x_3	x_4	I^*	z	j^*	k^*
Óptimo de PL		4.625	0	14.625	14.5		82.125		
Inicio de la búsqueda		5	0	15	15	2	85		
	1	4	0	15	15	1	83	1	-1
	2	4	0	15	<u>14</u>	1	81	4	-1
(Mejores) 3		4	0	<u>14</u>	<u>14</u>	0	78	3	-1
(Todos tabú) 4		4	1	<u>14</u>	<u>14</u>	1	79	2	1
(Lista tabú vacía) 4a		4	1	14	14				
(Repetición de la iteración 3) 5		4	<u>0</u>	14	14	0	78	2	-1
(Reinicio, iteración 4) 5a		4	1	14	14				

tabú es $\tau = 4$. La búsqueda encuentra la primera solución factible en la iteración 3 (que resulta ser la mejor solución en las 5 iteraciones). En la iteración 4, *todas* las variables son tabú, y ninguna solución vecina conduce a una mejor solución. Por lo tanto, la lista tabú se vacía y se liberan las cuatro variables para producir la solución (4, 1, 14, 14) como el inicio de la futura búsqueda. En la iteración 5 la vecindad $x_2 = 0$ produce $I = 0$; por consiguiente, se selecciona (y se subraya). Sin embargo, la solución resultante (4, 0, 14, 14) es una repetición de la solución de la iteración 3. Entonces, la siguiente iteración reiniciará con la solución 4 (4, 1, 14, 14) con x_2 como tabú para permitir un movimiento de búsqueda distinto. En este caso, la iteración 6 producirá la nueva solución de mínima no factibilidad (4, 1, 14, 13) con $z = 77$ (¡verifíquelo!).

Momento de Excel

El archivo *excelTabu-IP-Heuristic.xls* permite experimentar con problemas de tamaño pequeño (hasta de 10 variables). La presentación de la hoja de cálculo es básicamente una herramienta de aprendizaje diseñada para reforzar su comprensión de los detalles de la BT. Los algoritmos de BT comerciales incluyen reglas adicionales para resolver problemas muy grandes.

10.4.2 Algoritmo de recocido simulado aplicado a una PLE

En la sección 10.4.1 que aborda la BT, se examinan todas las variables antes de seleccionar el siguiente movimiento de búsqueda. La misma estrategia puede usarse con el RS. No obstante, a manera de variación, se adoptará una nueva estrategia que requiere examinar una variable *seleccionada aleatoriamente* en cada iteración.

Se utilizan las siguientes definiciones al detallar los pasos del algoritmo de RS:

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

$$L_j = \text{Cota inferior en } x_j \text{ (preestablecida} = 0\text{)}$$

$$U_j = \text{Cota superior en } x_j \text{ (preestablecida} = \infty\text{)}$$

$$N(x_j) = \{(x_1, \dots, x_j - 1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_n)\}$$

$$\mathbf{X}_j^t(k) = \text{Solución } \mathbf{X} \text{ en la cual } x_j \text{ se reemplaza con } x_j + k \text{ (} k = \pm 1 \text{) en la iteración } t$$

$$I_j^t(k) = \text{Medida de no factibilidad de la solución } \mathbf{X}_j^t(k)$$

$z_j^t(k)$ = Valor objetivo asociado con $\mathbf{X}_j^t(k)$

\mathbf{X}^* = Mejor solución factible encontrada durante la búsqueda

z^* = Valor objetivo asociado con \mathbf{X}^*

$I^* = \min\{I_j^t(k), k = -1, 1; j = 1, 2, \dots, n\}$ encontrada en la iteración t

j^* = Índice j asociado con I^*

k^* = Índice k asociado con I^*

T_0 = Temperatura inicial

r = Relación de reducción de la temperatura aplicada a todas las t iteraciones de aceptación

T_i = Temperatura en el nivel i

$$= rT_{i-1}, 0 < r < 1$$

a = Contador de la cantidad de iteraciones de aceptación desde la última reducción de temperatura

a^* = Cantidad de iteraciones de aceptación necesarias para activar la reducción de la temperatura

$z_{última}$ = Valor objetivo de la última solución *aceptada*

$R = (0, 1)$ número aleatorio

Al inicio del algoritmo, \mathbf{X} se hace igual a la solución de la PL redondeada. En cada iteración se selecciona aleatoriamente un índice $j = j^*$ de entre el conjunto de variables $\{1, 2, \dots, n\}$ y la medida de factibilidad $I_j^t(k)$ se determina para las soluciones de la vecindad. La factibilidad incluye la verificación de las cotas superior e inferior U_j y L_j .

1. Si la solución $\mathbf{X}_{j^*}^t(k^*)$ ya se encontró anteriormente (es decir, es redundante), rechácela e inicie una nueva iteración.
2. Si $\mathbf{X}_{j^*}^t(k^*)$ es no factible, acéptela como el siguiente movimiento.
3. Si $\mathbf{X}_{j^*}^t(k^*)$ no es una peor solución factible, acéptela como el siguiente movimiento.
4. Si $\mathbf{X}_{j^*}^t(k^*)$ es una solución factible inferior, acéptela como el siguiente movimiento si $R \leq \exp\left(\frac{-|z_{última} - z_{j^*}^t(k^*)|}{T}\right)$. En caso contrario, rechácela.

Antes de iniciar una nueva iteración, la temperatura T se reduce si $a = a^*$.

Ejemplo 10.4-2

Se utiliza la PLE definida en el ejemplo 10.4-1 iniciando con la solución redondeada ($x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 15, x_4 = 15$) y la temperatura inicial $T_0 = 0.75 \times$ (valor objetivo óptimo de PL) = $0.75(82.125) \approx 62$. La reducción de temperatura se activa cada $a^* = 2$ iteraciones de aceptación utilizando una relación de reducción $r = 0.5$. La tabla 10.16 resume 10 iteraciones. En cada iteración se subraya la variable seleccionada aleatoriamente. Por ejemplo, x_1 es la selección aleatoria en la iteración 1 y x_4 en la iteración 2. De acuerdo con las reglas del algoritmo, una solución no factible no redundante se acepta como un movimiento hacia la consecución de la factibilidad. Esto ocurre en las iteraciones 1, 2 y 4. Además, siempre se genera un movimiento a partir del movimiento aceptado o permitido más reciente. Por ejemplo, el movimiento en la iteración 6 se genera a partir del movimiento permitido en la iteración 4, porque se rechaza el movimiento en la iteración 5.

TABLA 10.16 Recocido simulado aplicado a la PLE del ejemplo 10.4-1 con $T_0 = 0.75$ (valor objetivo de la PL), $r = 0.5$ y $a^* = 2$

Iteración t	x_1	x_2	x_3	x_4	I^*	$z_{j^*}^t(k^*)$	$z_{\text{último}}$	Temp T	$\exp\left(\frac{- z_{\text{último}} - z_{j^*}^t(k^*) }{T}\right)$	R	Explicación
Inicio de la búsqueda	5	0	15	15	2	85	$-\infty$	62			Primera solución de prueba no factible
1	4	0	15	15	3	83	$-\infty$	62			Movimiento no factible: Permitir
	2	4	0	15	14	1	81	$-\infty$	62		Movimiento no factible: Permitir
(Mejores)	3	4	0	14	14	0	78	$-\infty$	62		Primer movimiento factible: Aceptar
	4	4	0	13	14	1	75	78	62		Movimiento no factible: Permitir
	5	4	0	14	14	0	78	78	62		Redundante: Rechazar
	6	4	0	13	13	0	73	78	62	0.11	$R < P\{\text{aceptar}\}$: Aceptar
	7	4	1	13	13	0	74	73	31		$z_{j^*}^t(k^*) > z_{\text{último}}$: Aceptar
	8	4	1	13	12	0	72	74	31	0.94	$R < P\{\text{aceptar}\}$: Aceptar
	9	4	1	12	12	0	69	72	15.5	0.82	$R > P\{\text{aceptar}\}$: Rechazar
	10	4	0	13	12	0	71	72	15.5	0.94	0.38 $R < P\{\text{aceptar}\}$: Aceptar

La mejor solución ocurre en la iteración 3.

El movimiento en la iteración 3 se acepta porque es la primera solución factible encontrada en la búsqueda. Lo anterior establece $z^* = 78$ y $\mathbf{X}^* = (4, 0, 14, 14)$. En la iteración 6, la solución factible inferior se acepta porque satisface la condición $R < P\{\text{aceptar}\}$. En la iteración 7, el movimiento factible se acepta porque es una mejora sobre la última solución *aceptada* ($z_{\text{última}}$) en la iteración 6. Observe que la temperatura T se ajusta cada 2 iteraciones de aceptación en las iteraciones 7 y 9.

Momento de Excel

Como en la BT, el archivo *excelSA-IP-Heuristic.xls* permite experimentar con problemas de tamaño pequeño (número de variables ≤ 10). El usuario puede estudiar el impacto de cambiar los datos en los pasos 2 y 3 en la eficacia del algoritmo. Una de las observaciones inmediatas acerca del comportamiento del algoritmo es que la “frecuencia” de rechazo de las soluciones factibles se incrementa con la cantidad de iteraciones, un comportamiento típico del RS.

10.4.3 Algoritmo genético aplicado a la PLE

En la sección 10.2.3, se utiliza codificación binaria en el desarrollo del AG. La misma idea se puede aplicar a la PLE. Por ejemplo, en un problema de 3 variables, la solución $(x_1, x_2, x_3) = (100, 24, 60)$ se representa mediante el código binario de la tabla 10.17. Por lo general, el número de bits binarios se ajusta para representar el valor máximo de cualquiera de las variables.

Una forma conveniente de representar las variables de la PLE es utilizar una codificación numérica. En ese caso, la solución de la PL redondeada en un problema de n variables se representa

TABLA 10.17 Codificación binaria de $(x_1, x_2, x_3) = (100, 24, 60)$

$x_1 = 100$	$x_2 = 24$	$x_3 = 60$
0010011	0001100	0011110

como $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$. Los cromosomas de la población inicial pueden generarse aleatoriamente a partir del intervalo $(\bar{x}_j - q\bar{x}_j, \bar{x}_j + q\bar{x}_j)$, $0 < q < 1$. Los límites resultantes del intervalo se ajustan, si las cotas $L_j \leq x_j \leq U_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ son más estrechas. Una forma conveniente de determinar los genes es muestrear desde el intervalo de búsqueda *continuo* y luego aproximar el resultado a un valor entero.

En la tabla 10.18 se demuestra la idea de generar una población de tres cromosomas padre comenzando con la solución $(x_1, x_2, x_3) = (100, 1, 60)$ con cotas $0 \leq x_1 \leq 99$, $0 \leq x_2 \leq \infty$, $50 \leq x_3 \leq \infty$ y utilizando $q = 0.2$. Los genes de cada padre se determinan aleatoriamente a partir de los intervalos respectivos (ajustados).

Suponga que se seleccionan los padres 1 y 2 en la tabla 10.18 para crear los dos hijos basados en un cruce de un punto en x_3 , lo cual significa que el gen 3 se intercambia entre los padres 1 y 2 para proporcionar los cromosomas hijos como

Hijo 1: (92, 7, 70)

Hijo 2: (81, 9, 58)

(Es irrelevante cuál cromosoma se designa como hijo 1 o hijo 2).

La mutación se aplica según una probabilidad (pequeña) especificada. Suponga que el gen 1 del hijo 1 muta a partir del valor original de 92, al nuevo valor aleatorio de 89 seleccionado del intervalo de búsqueda (80, 99). Por lo tanto, el cromosoma mutado del hijo 1 se transforma en (89, 7, 70).

El AG utiliza las siguientes definiciones:

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

q = Relación de búsqueda en la vecindad (<1)

\mathbf{X}^* = Mejor solución factible encontrada durante la búsqueda

z^* = Valor objetivo asociado con \mathbf{X}^*

I_i = No factibilidad asociada con el cromosoma i

I^* = Menor no factibilidad asociada con la población actual

i^* = Cromosoma con el mejor valor objetivo o la mínima no factibilidad en la población actual

i^{**} = Cromosoma con la peor no factibilidad en la población actual

TABLA 10.18 Generación aleatoria de la población inicial de 3 padres comenzando con la solución $(x_1, x_2, x_3) = (100, 1, 60)$

	x_1	x_2	x_3
Valor inicial	100	8	60
$L_j \leq x_j \leq U_j$	$0 \leq x_1 \leq 99$	$0 \leq x_2 \leq \infty$	$50 \leq x_3 \leq \infty$
$(x_j - qx_j, x_j + qx_j), q = .2$	(80, 120)	(6.4, 9.6)	(48, 72)
Intervalos de búsqueda ajustados	(80, 99)	(6, 10)	(50, 72)
Padre 1	92	7	58
Padre 2	81	9	70
Padre 3	90	8	62

i^{***} = Cromosoma con la siguiente peor no factibilidad relativa a i^{**}

P = Tamaño de la población

c = Cantidad de cruces

p = Probabilidad de mutación

La metaheurística del AG inicia con una población de P cromosomas. Luego se examina la población en busca de la mejor solución factible. Si esa solución existe, identifica al padre 1. Si no hay ninguna solución factible, se utiliza el cromosoma con la no factibilidad mínima en lugar de identificar al padre 1. Luego se determina el padre 2 aleatoriamente entre los cromosomas restantes (después de excluir el del padre 1). El padre 1 y el padre 2 crean al hijo 1 y al hijo 2 (utilizando cruces o algún otro método) con mutación aleatoria. En seguida, el hijo 1 y el hijo 2 reemplazan a los cromosomas i^{**} e i^{***} que tienen las dos *peores* no factibilidades.

Ejemplo 10.4-3

Para la PLE en el ejemplo 10.4-1, la tabla 10.19 proporciona una población inicial de 10 cromosomas generados aleatoriamente con la solución de programación lineal redondeada (5, 0, 15, 15).

Los intervalos de búsqueda, basados en $q = 0.2$ se dan en la parte inferior de la tabla. Los diez cromosomas resultan ser no factibles. Se elige el cromosoma 5 como padre 1 porque tiene la menor no factibilidad. El cromosoma 2 se selecciona aleatoriamente entre los cromosomas restantes para representar el padre 2. Así,

Padre 1: (4, 0, 15, 16)

Padre 2: (5, 0, 15, 17)

Con sólo un cruce ($c = 1$), la partición (seleccionada aleatoriamente) ocurre en la variable 4. Por lo tanto, los hijos se crean intercambiando el gen 4 (mostrado en negritas) como:

Hijo 1: (4, 0, 15, **17**)

Hijo 2: (5, 0, 15, **16**)

TABLA 10.19 Población inicial de tamaño $p = 10$ generada a partir de la solución redondeada de PL (5, 0, 15, 15) con $q = 0.2$, cruce $c = 1$ y probabilidad de mutación de 0.1

Cromosoma	x_1	x_2	x_3	x_4	I	z
1	4	1	16	15	3	87
(Padre 2) 2	5	0	15	17	5	89
3	6	1	17	12	9	88
4	4	0	12	14	3	72
(Padre 1) 5	4	0	15	16	2	85
6	5	1	12	13	4	73
7	6	0	14	13	6	80
8	6	1	15	12	5	82
9	6	0	15	15	7	87
10	4	0	12	16	7	76
Hijo 1	4	0	15	<u>14</u>	1	81
Hijo 2	5	0	15	16	3	87
Intervalos de búsqueda	(4, 6)	(0, 1)	(12, 18)	(12, 18)		

A continuación se aplica mutación a cada hijo. La probabilidad de mutación de 0.1 exige mutar un gen (a un nuevo valor en el intervalo de búsqueda) si $R < 0.1$. Como se muestra en la tabla, sólo el gen 4 (subrayado) del hijo 1 muta de 17 a 14.

En la siguiente iteración, el hijo 1 y el hijo 2 reemplazan a dos padres en la población actual. El padre 3 tiene la mayor no factibilidad ($= 9$); por consiguiente, $i^{**} = 3$. Hay un empate entre los padres 9 y 10 por la siguiente peor no factibilidad. El empate se rompe a favor del cromosoma con el peor valor objetivo (87 para el padre 9 contra 76 para el padre 10), de donde se obtiene $i^{**} = 10$. Entonces, el padre 3 y el padre 10 son reemplazados por el hijo 1 y el hijo 2, respectivamente. La nueva población ya está lista para una nueva iteración.

Momento de Excel

Con la implementación en Excel del AG, archivo *excelGA-IP-Heuristic.xls*, usted puede ejecutar las iteraciones una a la vez, o bien, ejecutarlas todas de manera automática. En el caso anterior, el botón *FIRST Iteration* iniciaiza los cálculos. Cada clic adicional del botón *NEXT Iteration* genera una nueva iteración. Este diseño iterativo utiliza códigos de colores para demostrar cómo un cromosoma hijo reemplaza a un cromosoma padre en la siguiente iteración.

Si la cantidad de cruces, c , en la celda H4 se hace igual a cero, los genes de los dos hijos están dados por las medias aritmética y geométrica de los padres.

10.5 INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN DE RESTRICCIONES (PR)

Suponga que se desea determinar los valores de las variables x , y y z que satisfagan los siguientes requerimientos:

$$x \in \{1, 2, \dots, 8\}$$

$$y \in \{1, 2, \dots, 10\}$$

$$z \in \{1, 2, \dots, 10\}$$

$$x \neq 7, y \neq 2, x - y = 3z$$

Una forma de resolver el problema consiste en enumerar las 800 combinaciones, algo que es computacionalmente ineficiente. La programación de restricciones resuelve el problema produciendo dominios más estrechos para las variables y, luego, aplicando un árbol de búsqueda “inteligente” para encontrar las soluciones factibles.

Las restricciones $x \neq 7$ y $y \neq 2$ reducen los dominios x y y a

$$\text{Dominio de } x: x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

$$\text{Dominio de } y: y \in \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

A continuación, la restricción $x - y = 3z$ requiere que el valor mínimo de x sea 4, lo cual sucede cuando $y = z = 1$. El valor máximo de y es 5, que ocurre cuando $x = 8$ y $z = 1$. En seguida,

$\max(x - y) = 7$, lo cual sucede cuando $x = 8$ y $y = 1$, y produce $\max(z) = 2$. Esta llamada **propagación de la restricción** produce los siguientes dominios factibles, pero estrechos:

$$x \in \{4, 5, 6, 8\}$$

$$y \in \{1, 3, 4, 5\}$$

$$z \in \{1, 2\}$$

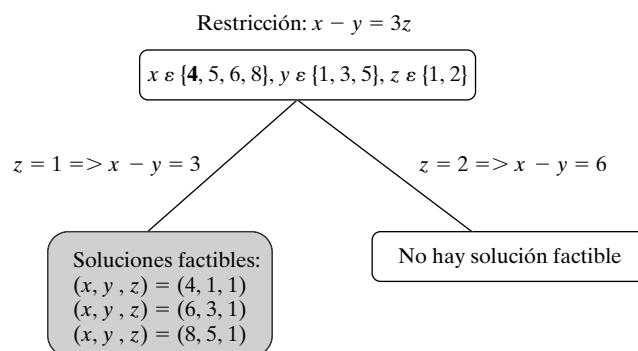
El uso de la propagación de la restricción reduce la cantidad de combinaciones de 800 a 32. Aun cuando el nuevo problema es computacionalmente más manejable, es posible hacerlo mejor con el árbol de búsqueda que se muestra en la figura 10.3. Se seleccionará z para iniciar la búsqueda pues tiene el dominio más pequeño, lo que da lugar a tan sólo dos ramas: $z = 1$ y $z = 2$. La rama $z = 1$ implica que $x - y = 3$, que se satisface para $(x = 4, y = 1)$, $(x = 6, y = 3)$, y $(x = 8, y = 5)$, y el resultado son las tres soluciones que aparecen en la figura 10.3. Para $z = 2$, la condición resultante $x - y = 6$ es imposible para satisfacer los dominios dados. Esto completa el árbol de búsqueda. La ventaja computacional en este caso es que únicamente se deben investigar 4 de las 32 posibles combinaciones.

El ejemplo anterior ilustra la esencia de lo que hace la PR. Básicamente es un proceso de búsqueda eficiente que se basa en la descripción del problema en función de los dominios de las variables y un conjunto de restricciones. Para facilitar la búsqueda, se han desarrollado lenguajes de computadora especiales que permiten restringir los valores de las variables dentro de sus dominios para satisfacer las restricciones. A manera de ilustración, la figura 10.4 codifica el problema en ILOG OPL. El código describe de manera directa el problema en función de los dominios de las variables y las restricciones. Todas las reducciones de los dominios las realiza de forma automática el procesador de lenguaje utilizando procedimientos inteligentes.

Como el ejemplo lo demuestra, la PR no es una técnica de optimización en el sentido usado en la programación matemática. Sin embargo, el hecho de que la PR se utilice para determinar soluciones factibles puede mejorar la eficiencia de algoritmos de programación matemática. En particular, la PR puede insertarse dentro del algoritmo B&B para el problema MIP.

FIGURA 10.3

Construcción del árbol de búsqueda para el ejemplo de PR



```

1 var int x in 1..8;
2 var int y in 1..10;
3 var int z in 1..10;
4 solve{
5   x<>7;
6   y<>2;
7   x-y=3*z;
8 };

```

FIGURA 10.4

Código ILOG OPL para el ejemplo de PR

BIBLIOGRAFÍA

- Abramson, D. y M. Randall, "A Simulated Annealing Code for General Integer Linear Program," *Annals of Operations Research*, vol. 86, pp. 3-21, 1999.
- Glover, F., "Tabu Search—Part I," *ORSA Journal on Computing*, vol. 1, pp. 190-206, 1989.
- _____, "Tabu Search—Part II," *ORSA Journal on Computing*, vol. 2, pp. 4-32, 1990.
- Hertz, A. y D. de Werra, "The Tabu Search Metaheuristic: How We Used It," *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, vol. 1, pp. 111-121, 1991.
- Kirkpatrick, S., C. D. Gelatt Jr. y M. P. Vecchi, "Optimization by Simulated Annealing," *Science*, vol. 220, pp. 671-680, 1983.
- Michalewicz, Z. y D. B. Fogel, *How to Solve It: Modern Heuristics*, Springer-Verlag, 2000.
- Yamada, T. y R. Nakano, "Genetic Algorithm for Job-Shop Scheduling Problems," *Proceeding of Modern Heuristic for Decision Support, UNICOM Seminar (18-19 de marzo)*, Londres, pp. 67-81, 1997.
- Yamamoto, M., G. Câmara y L. Lorena, "Tabu Search Heuristic for Point-Feature Cartographic Label Placement," *GeoInformatica*, vol. 6, núm. 1, pp. 77-90, 2002.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados	Sección	Problemas asignados
10.2	10-1 a 10-8	10.4.1	10-32 a 10-34
10.3.1	10-9 a 10-16	10.4.2	10-35 a 10-37
10.3.2	10-17 a 10-23	10.4.3	10-38 a 10-40
10.3.3	10-24 a 10-31	10.5	10-41 a 10-42

- 10-1.** Resuelva de nuevo el problema del ejemplo 10.2-1 para estimar el valor máximo de $F(x)$. Repita los cálculos con $x = 3$ como una solución inicial.
- 10-2.** Resuelva de nuevo el problema del ejemplo 10.2-2 para estimar el valor máximo de $F(x)$.
- 10-3.** Resuelva de nuevo el problema del ejemplo 10.2-3 para estimar el valor máximo de $F(x)$ utilizando el muestreo uniforme. En seguida use la solución obtenida con el muestreo uniforme como solución inicial para la aplicación del muestreo normal.
- 10-4.** *Experimento con Excel.* Considere la siguiente función:

$$f(x) = .01172x^6 - .3185x^5 + 3.2044x^4 - 14.6906x^3 + 29.75625x^2 - 19.10625x$$

La función tiene múltiples máximos y mínimos en el intervalo $0 \leq x \leq 10$. Use el archivo *excelContVarHeuristic.xls* para estimar el máximo y el mínimo de la función mediante el muestreo uniforme que inicie en $x_0 = 5$ para, después, refinar la solución mediante un muestreo normal donde el punto de inicio es la solución obtenida a partir del muestreo uniforme.

10-5. Considere el problema de formar un rectángulo de área máxima con una pieza de alambre de 40 pulgadas de longitud.

- (a) *Experimento con Excel.* Utilice el archivo *excelContVarHeuristic.xls* con muestreo uniforme para generar 10 iteraciones de la heurística de la variable continua para estimar las dimensiones del rectángulo. Comience con una base del rectángulo igual a 1 pulgada.
- (b) *Experimento con Excel.* Utilice el archivo *excelContVarHeuristic.xls* con muestreo normal para refinar la solución obtenida en (a). Realice 5 iteraciones.

***10-6.** El establecimiento de impuestos puede usarse como instrumento para frenar la demanda de cigarrillos. Suponga que, para una tasa tributaria t , el consumo diario promedio por fumador sigue la función lineal $53 - 100(t/100)$, $10 \leq t \leq 60$. Si la tasa tributaria se eleva, la demanda se reducirá, y la recaudación fiscal también lo hará. El objetivo es determinar la tasa tributaria que maximice la recaudación fiscal. Para el propósito de fijación de impuestos, el precio base por cigarrillo es de 15 centavos. Formule el problema como un modelo matemático y utilice una heurística para determinar la tasa tributaria.

10-7. Aplique la heurística de muestreo uniforme para estimar la solución mínima de la siguiente función de dos variables:

$$f(x) = 3x^2 + 2y^2 - 4xy - 2x - 3y, \quad 0 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y \leq 5.$$

10-8. La altura de un tanque de agua cilíndrico debe ser al menos dos veces el diámetro de su base. Ni el diámetro ni la altura pueden exceder de 10 pies. El volumen del tanque tiene que ser al menos de 300 ft^3 . El costo de la estructura elevada sobre la que se instala el tanque es proporcional al área de la base. El costo de la lámina metálica es de $\$8/\text{ft}^2$ y el costo de la estructura de soporte es de $\$15/\text{ft}^2$. Formule el problema como un modelo matemático y desarrolle una heurística de paso aleatorio para estimar el diámetro y la altura del tanque.

10-9. Resuelva el ejemplo 10.2-1 para estimar el punto solución máxima. Use $x_0 = 8$ y $\tau = 2$.

10-10. Considere la siguiente función:

$$f(x) = .01172x^6 - .3185x^5 + 3.2044x^4 - 14.6906x^3 + 29.75625x^2 - 19.10625x$$

La función tiene múltiples máximos y mínimos en el intervalo $x = 1, 2, \dots, 10$. Aplique 10 iteraciones de BT para estimar el máximo y el mínimo. Use $x_0 = 5$ y un periodo de permanencia tabú $\tau = 2$ iteraciones.

10-11. Aplique la BT con $\tau = 3$ iteraciones para resolver el problema de secuenciación de 5 trabajos aplicando los datos de la tabla 10.20 (*sugerencia:* Quizá le sea conveniente utilizar el archivo *excelJobSequencing.xls* para calcular las funciones de costo).

TABLA 10.20 Datos para el problema 10-11

Trabajo, j	Tiempo de procesamiento en días, T_j	Fecha límite, d_j	Costo de almacenamiento, h_j (dólares/día)	Costo de penalización, p_j (dólares/día)
1	10	12	3	10
2	12	30	1	20
3	5	9	5	12
4	7	25	2	8
5	9	40	4	15

10-12. Considere 10 variables booleanas, $B_i, i = 1, 2, \dots, 10$. Cada variable asume el valor V (verdadero) o F (falso). Luego considere las siguientes seis expresiones (la notación $\underline{B}i$ no define a Bi):

$$(B1 \text{ y } B3 \text{ y } B8) \text{ o } (B4 \text{ y } B10) \text{ y } B6$$

$$\underline{B}2 \text{ y } \underline{B}7$$

$$(B2 \text{ o } B5) \text{ y } (B1 \text{ o } B4 \text{ o } B6)$$

$$(B1 \text{ y } B3 \text{ o } B4) \text{ o } (B5)$$

$$(B4 \text{ y } B6) \text{ o } B9$$

$$B2 \text{ o } B5 \text{ o } B6 \text{ o } (B1 \text{ y } B3)$$

Use la BT para asignar una solución a cada variable booleana que maximice la cantidad de expresiones lógicas verdaderas. Realice cinco iteraciones de BT empezando con la solución $S_0 = (V, F, V, F, V, F, V, F, V, F)$ y un periodo de permanencia tabú de dos iteraciones (*sugerencia:* Por conveniencia, el archivo *excelSAT.xls* automatiza la evaluación de las expresiones booleanas).

10-13. Repita el problema 10-12 para las siguientes expresiones booleanas:

$$(B1 \text{ y } B5) \text{ o } (B3 \text{ y } B9) \text{ y } (B2 \text{ o } B10)$$

$$B3 \text{ o } B6 \text{ y } (B7 \text{ o } B9 \text{ y } B10)$$

$$\underline{B}4 \text{ y } \underline{B}7 \text{ y } \underline{B}8$$

$$B2 \text{ o } B3 \text{ y } B4 \text{ y } B5 \text{ o } B8 \text{ y } (B1 \text{ o } B6)$$

$$(B3 \text{ y } B4 \text{ y } B10) \text{ o } (B5 \text{ y } B7) \text{ o } (B9 \text{ y } B10)$$

$$B1 \text{ o } (B4 \text{ y } B7) \text{ o } B8$$

$$(B3 \text{ y } B5 \text{ o } B6) \text{ o } (B1 \text{ o } B8 \text{ y } B9 \text{ o } B10)$$

10-14. Asignación de almacenes. Considere el caso de 4 almacenes y 5 tiendas. El costo fijo de abrir un almacén es de 20 (miles de dólares). El costo de transporte, c_{ij} , de los envíos entre los almacenes y las tiendas se resume en la tabla 10.21.

- (a) Formule el problema como una PLE y determine la solución óptima (con AMPL o Solver).
- (b) Resuelva el problema mediante la BT y un periodo de permanencia tabú de dos iteraciones.

TABLA 10.21 Datos para el problema 10-14

		c_{ij}				
		1	2	3	4	5
i	j	1	2	3	4	5
	1	10	15	20	9	40
2	2	12	17	15	20	10
3	3	18	14	10	35	16
4	4	9	12	33	28	19

10-15. Árbol de expansión mínima restringida, Glover (1990). En la sección 6.2 se presentó un algoritmo óptimo para determinar el árbol de expansión mínima que vincula todos los nodos de una red (por definición, un árbol no contiene ciclos). En una situación práctica, puede ser necesario imponer restricciones de interdependencia en los arcos (ramas) del árbol de expansión mínima (es decir, sólo uno de un subconjunto de arcos puede estar en el árbol de expansión). Es posible utilizar la BT para tomar en cuenta todas las restricciones adicionales.

Considere la red de 6 arcos (a, b, c, d, e, f, g, h) de la figura 10.5 con las siguientes restricciones adicionales:

1. Sólo uno de los dos arcos, a y c , puede estar en el árbol.
2. Si el arco b está en el árbol, entonces el arco d también debe estarlo.

La aplicación de la BT para determinar el árbol de expansión mínima restringida se realiza como sigue: El árbol de expansión mínima no restringida (b, c, f, g, h) de longitud $(2 + 3 + 1 + 6 + 4) = 16$ se utiliza como una solución inicial. Los arcos restantes a, d y e , se designan como *libres*. Es posible generar un árbol de expansión de vecindad (solución) agregando un arco libre al árbol de expansión actual y eliminando uno existente para evitar los ciclos. Por ejemplo, el arco b o c deben eliminarse si se admite al arco libre a en el árbol de expansión (b, c, f, g, h) para evitar que se forme el ciclo a, b, c . El intercambio produce dos alternativas: agregar a y borrar b , o agregar a y borrar c . Se pueden generar alternativas similares cuando se consideran las variables libres restantes, d y e . La colección de todas estas alternativas define la vecindad.

La *aptitud* de una alternativa incluye la longitud del árbol de expansión más una penalización por la transgresión de las restricciones adicionales dadas antes. Por ejemplo, dado el árbol (b, c, f, g, h), la alternativa “agregar a y eliminar b ” produce el árbol (a, c, f, g, h), cuya aptitud es $[(5 + 3 + 1 + 6 + 4) + (\text{penalización por transgredir la primera restricción})]$. De manera similar, la alternativa “agregar el arco a y eliminar el arco c ” produce el árbol (a, b, f, g, h) cuya aptitud es $[5 + 2 + 1 + 6 + 4] + (\text{penalización por transgredir la segunda restricción})$. La penalización debe ser suficientemente grande (es decir, un múltiplo de la suma de las longitudes de todos los arcos en la red). En la presente situación, la longitud total de la red es 37, y una penalización de 2000 resulta adecuada. La alternativa con la menor aptitud proporciona la siguiente solución de prueba. La variable libre correspondiente se agrega entonces a la lista tabú, para que no abandone el árbol durante su periodo de permanencia.

Aplique cinco iteraciones a la red de la figura 10.5.

10-16. Colocación de etiquetas cartográficas, Yamamoto y colaboradores (2002). La colocación inequívoca de los nombres de ciudades, calles, lagos y ríos en mapas impresos siempre ha sido un proceso manual que requiere mucho tiempo. Con la llegada de la generación de mapas en línea (como en Google y MapQuest), el proceso manual no es una opción viable. Se puede utilizar una heurística tabú para automatizar la colocación de etiquetas en mapas. Este problema abordará el caso de etiquetación de ciudades. El objetivo general es evitar que se traslapen las etiquetas, al mismo tiempo que se toman en cuenta las preferencias para la colocación de las etiquetas respecto de la ubicación de la ciudad nombrada en el mapa.

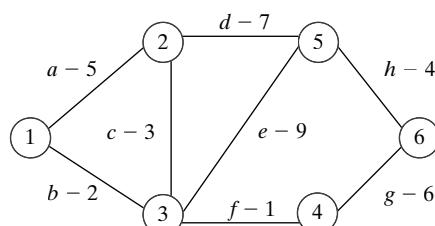


FIGURA 10.5
Red para el problema 10-15

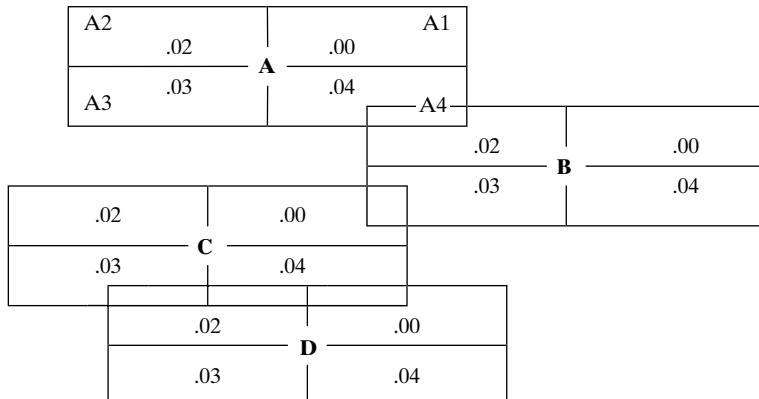


FIGURA 10.6

Opciones de etiquetación para el problema 10-16

En la figura 10.6 se proporciona un ejemplo de colocación de los nombres de cuatro ciudades, A, B, C y D, en un mapa. Cada ciudad tiene cuatro opciones de colocación representadas por cuatro rectángulos. La prioridad para la colocación de las etiquetas entre los cuatro rectángulos puede estar en cualquier orden. En la figura 10.6, se supone un orden de preferencia de la mejor a la peor en sentido antihorario para los rectángulos de cada ciudad. Por ejemplo, para la ciudad A, el orden de las preferencias de etiquetación es A1-A2-A3-A4. Una solución típica elige un rectángulo específico para cada ciudad. Por ejemplo, (A1, B2, C3, D2) es una solución para las cuatro ciudades de la figura 10.6.

El “costo” de seleccionar un rectángulo específico en una solución es la suma de dos componentes: una calificación de preferencia numérica en el intervalo (0, 1) donde cero es la mejor, y la cantidad de traslapos con otros rectángulos. La figura 10.6 presenta las calificaciones de las preferencias para la ciudad A ($A_1 = 0$, $A_2 = 0.02$, $A_3 = 0.03$ y $A_4 = 0.04$). Las mismas calificaciones se aplican a los rectángulos correspondientes en las ciudades B, C y D. Para determinar los traslapos considere la solución (A1, B2, C3, D2). Sólo se traslanan C3 y D2.

La siguiente matriz resume las calificaciones asociadas con la solución (A1, B2, C3, D2).

	A1	B2	C3	D2
A1	.00	.00	.00	.00
B2	.00	.02	.00	.00
C3	.00	.00	.03	1.00
D2	.00	.00	1.00	.02

Todas las entradas diagonales son las calificaciones de las preferencias del rectángulo asociado. Un elemento afuera de la diagonal es igual a 1 si se traslanan los elementos correspondientes. Si no, es cero. El costo asociado con la solución (A1, B2, C3, D2) es la suma de todas las entradas en la matriz [$= (0.02 + 0.03 + 0.02) + (1 + 1) = 2.7$]. El objetivo del modelo es encontrar la solución que minimice el costo total.

- (a) Construya la tabla de aptitud (16×16) que tome en cuenta todas las colocaciones posibles de las etiquetas.
- (b) Encuentre una solución al problema utilizando tres iteraciones de BT con un periodo de permanencia tabú de dos iteraciones [sugerencia: La solución óptima de este problema trivial

es evidente: (A1, B1, B2, B3 y B4) con aptitud total cero. Sin embargo, para demostrar iteraciones de BT significativas, se requiere que inicie con la solución A1, B2, C3, D2. Una solución de vecindad se compone del reemplazo de uno de los rectángulos de una ciudad con otro: por ejemplo, al reemplazar C3 con C1. En este caso, la ciudad C se coloca en la lista tabú durante el periodo de permanencia].

10-17. Realice cinco iteraciones adicionales en el ejemplo 10.3-3.

10-18. Resuelva el ejemplo 10.3-3 para estimar el punto solución máximo. Use $x_0 = 8$ y $t = 3$.

10-19. Realice cuatro iteraciones adicionales del problema de secuenciación de trabajos en el ejemplo 10.3-4.

10-20. *Programación de horarios.* Considere el caso del desarrollo de un horario de 5 clases (C) impartidas por 5 profesores (T). Los profesores proporcionan las siguientes preferencias para impartir las clases (la parte superior de la lista es la más deseada):

T1: C1 - C2 - C3 - C5

T2: C2 - C1 - C4 - C5

T3: C1 - C5 - C4 - C3

T4: C4 - C2 - C5 - C3

T5: C2 - C5 - C3 - C1

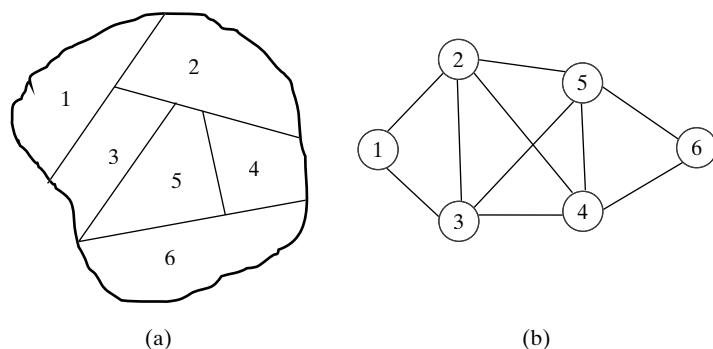
La situación se simplifica al desarrollar un horario de cinco períodos de un día que minimiza la insatisfacción entre los profesores. Una medida de insatisfacción está representada por qué tan bajo se asigna a un profesor en la lista de preferencias de un curso. Por ejemplo, la medida de insatisfacción es cero, si C1 se asigna a T1 y 3 si C5 se asigna a T1. Un horario se evalúa por la suma de sus medidas individuales.

Desarrolle una heurística RS de 5 iteraciones para el problema.

10-21. *Problema del coloreado de mapas.* El problema de colorear tiene que ver con la determinación del mínimo de colores para pintar las regiones de un mapa, de modo que dos regiones adyacentes no tengan el mismo color. La figura 10.7(a) ilustra un ejemplo de un mapa de 6 regiones. El problema se puede modelar como una red donde los nodos representan las regiones como se muestra en la figura 10.7(b). Un arco entre dos nodos significa que las dos regiones correspondientes son adyacentes (comparten una frontera común). El problema de colorear el mapa puede representar otras situaciones prácticas, como lo demuestra el problema 10-22.

FIGURA 10.7

(a) Mapa de seis regiones, (b) representación de red para el problema 10-21



Es posible aplicar una heurística de RS al problema de colorear. La solución inicial, x_0 , se determina de dos maneras:

1. Asignar un color único a cada nodo de la red. Por lo tanto, $x_0 = (1, 2, \dots, 6)$ para la red de la figura 10.7(b).
2. Usar un algoritmo codicioso que inicie asignando el color 1 al nodo 1. En seguida, dado que los nodos $1, 2, \dots, i-1$ utilizan los colores $1, 2, \dots, c$, $c \leq i-1$, asignar el color de número menor en el conjunto $(1, 2, \dots, c)$ al nodo i sin crear arcos malos (aquellos cuyos dos nodos extremos utilizan el mismo color). Si no se puede encontrar ninguno, aplicar un nuevo color $c+1$. Para la red de la figura 10.7(b), los pasos sucesivos para construir x_0 son

$$\begin{aligned}x_0^1 &= (1) \\x_0^2 &= (1, 2) \\x_0^3 &= (1, 2, 3) \\x_0^4 &= (1, 2, 3, 1) \\x_0^5 &= (1, 2, 3, 1, 4) \\x_0 &= x_0^6 = (1, 2, 3, 1, 4, 2)\end{aligned}$$

El algoritmo codicioso utiliza 4 clases de colores: $C_1 = (1, 1)$, $C_2 = (2, 2)$, $C_3 = (3)$, $C_4 = (4)$ que se aplican a los nodos 1 y 4, los nodos 2 y 6, el nodo 3, y el nodo 5, respectivamente.

Una solución vecina, x_{i+1} se determina cambiando el color de un nodo aleatorio en x_i a un color aleatorio en el mismo conjunto. Por ejemplo, dado $x_0 = (1, 2, 3, 1, 4, 2)$ y su conjunto de colores asociado $c_0 = (1, 2, 3, 4)$, las selecciones aleatorias del color 1 a partir de c_0 y nodo (posición) 5 a partir de x_0 dan

$$x_1 = (1, 2, 3, 1, 1, 2)$$

Las nuevas clases de colores de x_1 son $C_1 = (1, 1, 1)$, $C_2 = (2, 2)$ y $C_3 = (3)$ correspondientes a los nodos $(1, 4, 5)$, $(2, 6)$ y (3) , respectivamente. Para generar x_2 a partir de x_1 , seleccione aleatoriamente un color de $c_1 = (1, 2, 3)$ para reemplazar el color de un nodo seleccionado al azar en x_1 . Si es necesario, repita el intercambio aleatorio hasta que x_2 se vuelva distinta de x_1 .

A continuación se desarrolla una medida de desempeño para la solución. Una medida simple requiere minimizar la cantidad de arcos malos (aquellos cuyos dos nodos extremos tienen el mismo color). Es posible desarrollar una medida más compleja de la manera siguiente: La solución x_1 es mejor que x_0 desde el punto de vista de reducir la cantidad de clases de colores (es decir, use menos colores al aumentar el tamaño de al menos una clase de color) pero, al mismo tiempo, aumenta la posibilidad de crear arcos malos. Específicamente, x_0 del algoritmo codicioso no tiene arcos malos, y x_1 tiene un arco malo, 4-5. Por consiguiente, una medida empírica del desempeño que equilibra las dos situaciones conflictivas [incrementando los tamaños (cardinalidades) de las clases de colores y reduciendo simultáneamente el número de arcos malos] requiere *maximizar*

$$f(x) = \sum_{j=1}^k (|C_j|)^2 - 2 \sum_{k=1}^k |C_j| \cdot |A_j|$$

donde

k = Cantidad de clases de colores

A_j = Conjunto de arcos malos asociado con la clase de colores j

[La notación $|S|$ representa la cantidad de elementos (cardinalidad) del conjunto S . En términos de x_0 y x_1 del algoritmo codicioso, se tiene

$$f(x_0) = (2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2) - 2(2 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0) = 10$$

$$f(x_1) = (3^2 + 2^2 + 1^2) - 2(3 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times 0) = 8$$

Los dos valores muestran que x_1 es peor que x_0 [recuerde que se pretende maximizar $f(x)$]. Por consiguiente, de acuerdo con la heurística para RS, se acepta x_1 si $R < e^{-[f(x_0) - f(x_1)]/T}$.

Observe que la generación de x_{i+1} a partir de x_i puede resultar en una asignación de colores no factible. (Este punto no surge en los ejemplos 10.3-3 y 10.3-4 debido a la naturaleza de los problemas asociados). En estos casos, puede aceptarse un movimiento no factible utilizando la condición de probabilidad del RS, pero la mejor solución se actualiza sólo si se encuentra una mejor solución factible.

Aplique tres iteraciones de RS adicionales a la red para colorear de la figura 10.7(b) utilizando el algoritmo codicioso, para determinar la solución inicial y la medida de desempeño $f(x)$, como se explicó anteriormente.

10-22. Programación de cursos académicos conflictivos. Una versión simplificada de la programación de cursos requiere que se asigne ocho cursos (1, 2, ..., 8) en la menor cantidad posible de períodos. La tabla 10.22 asigna una “x” a los cursos conflictivos (aquellos que no pueden programarse en el mismo periodo).

- (a) Exprese el problema como una red para colorear mapas (problema 10-21).
- (b) Determine una solución inicial mediante el algoritmo codicioso.
- (c) Aplique tres iteraciones de RS para estimar la cantidad mínima de períodos.

10-23. Considere la conocida función del camello de seis jorobas:

$$f(x, y) = 4x^2 - 2.1x^4 + x^6/3 + xy - 4y^2 + 4y^4, -3 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 2$$

Los mínimos globales exactos son $(-0.08984, 0.71266)$ y $(0.08984, -0.71266)$ con $f^* = -1.0316$. Aplique cinco iteraciones de RS para estimar los mínimos de $f(x, y)$. Inicie con $(x_0, y_0) = (2, 1)$, $T_0 = 0.5f(x_0, y_0)$, $T_i = 0.5T_{i-1}$ y $t = 3$ iteraciones de aceptación.

10-24. Suponga que se utiliza el AG para determinar el máximo de $F(x)$, $x = 0, 1, \dots, 300$. Sean $x = 171$ y $x = 220$ los padres P1 y P2.

- (a) Represente P1 y P2 como códigos binarios.
- (b) Utilice el cruce uniforme para crear C1 y C2.
- (c) Cree C1 y C2 mediante un cruce de un punto.

TABLA 10.22 Conflictos en la programación de cursos para el problema 10-22

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		x	x	x		x		
2	x				x		x	x
3	x			x		x		
4	x		x		x		x	
5		x		x		x		x
6	x		x		x		x	x
7		x		x		x		x
8	x			x	x	x		

- (d) Cree C1 y C2 utilizando un cruce de dos puntos.
 (e) En el inciso (b), use números aleatorios para mutar C1 y C2.
- 10-25.** Realice dos iteraciones adicionales del ejemplo 10.3-5.
- 10-26.** Realice una iteración adicional del ejemplo 10.3-6.
- ***10-27.** Usted tiene un mazo de diez cartas numeradas de 1 a 10. Debe dividir las diez cartas en dos pilas, de modo que la *suma* de las cartas de la pila 1 sea 36 y el *producto* de las cartas de la pila 2 sea 36. Desarrolle un AG para el problema utilizando una población inicial de 4 padres, un cruce de 1 punto y una tasa de mutación de 1%. Realice 5 iteraciones.
- 10-28.** Usted tiene un pedazo de alambre cuya longitud es $L = 107.1$ pulgadas y le gustaría darle una forma de marco rectangular. Use el AG para determinar el ancho y la altura que dará como resultado el área máxima del rectángulo.
- 10-29.** Repita el problema 10-28 suponiendo que el alambre se utiliza para formar una caja de volumen máximo.
- 10-30.** Considere el siguiente problema:
- Maximizar $f(x, y) = x \operatorname{sen}(4x) + 1.1 \operatorname{sen}(2y)$, $x = 0, 1, 2, \dots, 10$, $y = 0, 1, 2, \dots, 10$
- Realice cinco iteraciones de AG para estimar la solución óptima.
- 10-31.** En el juego de ajedrez, las reinas se mueven horizontalmente, verticalmente o a lo largo de una trayectoria diagonal (45°). Se deben colocar N reinas en un tablero (de $N \times N$), de modo que ninguna reina pueda “comerse” a otra reina. Diseñe un AG para el problema iniciando con una población aleatoria de 4 padres y utilizando un cruce de un punto. Una medida razonable de la efectividad es el número de reinas en conflicto. Realice tres iteraciones.
- 10-32.** Verifique las entradas en las iteraciones 1, 2 y 3 en la tabla 10.15.
- 10-33.** Realice 10 iteraciones de BT en cada uno de los siguientes problemas.
- (a) Maximizar $z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$
 sujeto a
- $$\begin{aligned} 4x_1 - 4x_2 &\leq 5 \\ -x_1 + 6x_2 &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \text{ y entera} \end{aligned}$$
- (b) Maximizar $z = 3x_1 + x_2 + 3x_3$
 sujeto a
- $$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ 4x_2 - 3x_3 &\leq 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \text{ y entera} \end{aligned}$$
- 10-34.** *Experimento con Excel.* Use el archivo *excelTabu-IP-heuristic.xls* para encontrar una solución a los siguientes problemas:
- (a) Problema de selección de un proyecto del ejemplo 9.1-1.
 (b) Problema de cobertura del ejemplo 9.1-2.
 Compare las soluciones heurísticas y exactas.

10-35. Realice 5 iteraciones del ejemplo 10.4-2 suponiendo que $c_j = 1$ para toda j .

10-36. Realice 5 iteraciones de RS para el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z = & 99x_1 + 90x_2 + 58x_3 + 40x_4 + 79x_5 \\ & + 92x_6 + 102x_7 + 74x_8 + 67x_9 + 80x_{10} \end{aligned}$$

sujeto a

$$30x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 20x_5 + 12x_6 + 25x_7 + 24x_8 + 32x_9 + 29x_{10} \leq 100$$

Todas las variables son binarias

10-37. *Experimento con Excel.* Utilice el archivo *excels-IP-Heuristic.xls* para encontrar una solución a la siguiente PLE:

$$\text{Minimizar } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

sujeto a

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 20$$

$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 17$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 18$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 19$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 14$$

Todas las variables son binarias

10-38. Realice la iteración que sigue de la iteración dada en la tabla 10.19.

10-39. Realice dos iteraciones del problema 10-36.

10-40. *Experimento con Excel.* Aplique el archivo *excelIPHeuristicGA.xls* al problema 10-37.

10-41. Construya el árbol de búsqueda de la figura 10.3 utilizando la variable x para iniciar la búsqueda. Compare la cantidad resultante de los cálculos con la de la figura 10.3.

10-42. Repita el problema 10-41 utilizando la variable y .

CAPÍTULO 11

Problema del agente viajero (TSP)

Aplicación de la vida real

La Organización de Ciencias y Tecnología del Departamento de Defensa de Australia emplea un radar de apertura sintética montado en un avión para obtener imágenes de alta resolución de hasta 20 franjas rectangulares de terreno. En sus orígenes, la trayectoria de vuelo para cubrir una secuencia de franjas de terreno se realizaba visualmente, mediante un software de trazado de mapas que usaba mucho tiempo y en general era subóptimo. Posteriormente se desarrolló un software basado en el TSP (por las siglas de *traveling salesperson problem*) para planear misiones hasta de 20 franjas de terreno. El nuevo software puede planear una misión en menos de 20 segundos, comparados con la hora que requería el proceso visual. Asimismo, la duración promedio de la misión es 15 por ciento menor que la obtenida en forma manual.¹

11.1 ALCANCES DEL TSP

En un sentido clásico, el problema del TSP trata de encontrar el recorrido más corto (cerrado) en una situación de n ciudades, donde cada ciudad es visitada exactamente una vez antes de regresar al punto de partida. El modelo del TSP asociado se define mediante dos datos:

1. El número de ciudades, n .
2. Las distancias d_{ij} entre las ciudades i y j ($d_{ij} = \infty$ si las ciudades i y j no están vinculadas).

La máxima cantidad de recorridos en una situación de n ciudades es $(n - 1)!$ si la red está dirigida (es decir, si $d_{ij} \neq d_{ji}$), y la mitad de ello si no lo está.

En realidad, las aplicaciones del TSP van más allá de la definición clásica de visitas a ciudades. La *aplicación de la vida real* que se presenta al inicio de este capítulo describe la planeación de misio-

¹ Es posible encontrar más detalles de este estudio en D. Panton y A. Elbers, "Misión Planning for Synthetic Aperture Radar Surveillance", *Interfaces*, vol. 29, núm. 2, pp. 73-88, 1999.

nes de vigilancia por medio de radar de apertura sintética. La sección *Momento, ¡ajá!* que se presenta a continuación describe una notable aplicación del TSP a finales del siglo XIX, que acompañó al primer uso conocido del modelado matemático en arqueología (un campo básicamente dominado por historiadores del arte y lingüistas). En el problema 11.1 se da una lista breve de otras aplicaciones del TSP. Asimismo, en los problemas 11-2 a 11-14 se presentan aplicaciones adicionales.

Momento, ¡ajá! El primer modelo matemático en arqueología, o cómo “seriar” tumbas egipcias antiguas usando el TSP²

En 1894 el eminent egiptólogo británico Flinders Petrie (1853-1942) excavó un vasto sitio de tumbas predinásticas al oeste del Nilo en Naqada, Egipto. Un método estándar, llamado *seriación*, se utilizó para establecer el orden cronológico (o secuencia de tiempo) de las fechas relativas en que se construyeron esas tumbas. El método emplea clasificaciones basadas en el tiempo de los cambios ocurridos en artefactos como herramientas de piedra y fragmentos de cerámica.

El sitio de tumbas en Naqada era abundante en alfarería que se usaba para almacenar las provisiones que los antiguos egipcios consideraban necesarias para la vida después de la muerte. Petrie mantuvo registros meticulosos de las cerámicas en cada tumba, pero necesitaba un proceso sistemático para traducir los datos en un orden cronológico del tiempo en que se construyeron las tumbas. Comenzó con unas 900 tumbas prometedoras, clasificando sus cerámicas en 9 estilos principales. Después diseñó hojas de papel (delgadas), cada una compuesta de 10 columnas. La primera columna contenía el código de la tumba y las nueve columnas restantes representaban los nueve estilos de alfarería. Los códigos de los estilos encontrados en una tumba se introducían en las columnas adecuadas. Una columna se dejaba en blanco si su estilo no se encontraba en la tumba. Al final, una entrada de columna en una hoja se veía de una manera 0-1 (binaria), que representa la *ausencia* o la *presencia* de un estilo de cerámica en la tumba.

Las hojas de datos permitieron la determinación de una puntuación numérica que representa la cercanía (en el tiempo) de dos tumbas: un conteo de las entradas que difieren entre sí en los nueve estilos de cerámica. Por ejemplo, los dos siguientes resúmenes indican una puntuación de 4 como se muestra en las palabras subrayadas:

Tumba 1: ausente, presente, presente, presente, ausente, presente, presente, ausente, presente

Tumba 2: ausente, ausente, ausente, presente, presente, presente, presente, presente, presente

Una puntuación de cero o pequeña indica que las dos tumbas probablemente se construyeron en la misma época; por otro lado, las puntuaciones grandes sugieren que las tumbas se originaron en épocas distintas. Con base en esa línea de razonamiento, Petrie ordenó las hojas verticalmente, de modo que las tumbas con puntuaciones similares se colocaran cercanas entre sí (vea la heurística del vecino más cercano, sección 11.4.1) y así fue capaz de inferir un orden cronológico de los tiempos relativos en que se construyeron las tumbas. Petrie observó que su problema de *seriación* podría resolverse encontrando el arreglo de todas las tumbas que minimizara la suma de sus puntuaciones asociadas.

En la terminología actual, el problema de seriación de Petrie es una aplicación clásica del TSP, donde las tumbas representan las ciudades y las puntuaciones representan los lapsos (“distancias”) entre los tiempos de construcción de dos tumbas. Aunque Petrie describió su modelo en términos arqueológicos (y no matemáticos), resulta claro que tenía una mente matemática excepcional. De forma notable, usó el código binario desarrollado a finales del siglo XIX para representar (la ausencia-presencia de) un estilo de cerámica en el sitio

² Thomas L. Gertzen y Martin Grötschel, Flinders Petrie (1853-1942), the Travelling Salesman Problem, and the Beginning of Mathematical Modeling in Archaeology, *Documenta Mathematica*, vol. extra. ISMP, pp. 199-210, 2012.

de una tumba, tal que la puntuación numérica de Petrie es la misma que se conoce ahora como *distancia de Hamming*, ideada en 1950 por Richard Hamming, y que actualmente se utiliza en telecomunicaciones y ciencias de la información.

Debido a la similitud entre el problema de seriación y el TSP, se le atribuye a Petrie el uso del primer modelo “matemático” en la arqueología.

Como nota histórica, Petrie no tenía ninguna educación formal y su conocimiento en matemáticas incluía dos cursos autodidactas en álgebra y trigonometría a la edad de 24 años. No obstante, sus descubrimientos como arqueólogo resultaron en una prestigiosa cátedra de egiptología en la University College de Londres. Entre los estudiantes de Petrie estaba Howard Carter, quien más tarde descubrió la tumba del “rey niño” Tutankamón en 1922. Petrie siguió comprometido con el descubrimiento científico incluso después de su propia muerte, al donar su cráneo (y cerebro) al Real Colegio de Cirujanos de Inglaterra para permitir el estudio de sus propias capacidades intelectuales excepcionales. El Museo Petrie de Arqueología Egipcia en Londres alberga más de 80,000 piezas y ocupa el cuarto lugar en artefactos egipcios después del Museo de El Cairo, el Museo Británico y el Museo Ägyptisches de Berlín.

11.2 MODELO DEL TSP MATEMÁTICO

Como se expuso en la sección 11.1, un modelo TSP está definido por el número de ciudades n y la matriz de distancias $\|d_{ij}\|$. La definición de un recorrido impide conectar una ciudad a sí misma al asignar una penalización muy alta a los elementos diagonales de la matriz de distancias. Un modelo del TSP es **simétrico** si $d_{ij} = d_{ji}$ para todas las i y j . De lo contrario, el modelo del TSP es **asimétrico**.

Defina

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si se llega a la ciudad } j \text{ desde la ciudad } i \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

El modelo del TSP se da como

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}, \quad d_{ii} = \infty \text{ para toda } i = j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{2}$$

$$x_{ij} = 0, 1 \tag{3}$$

$$\text{La solución forma un recorrido por las } n \text{ ciudades} \tag{4}$$

Las restricciones (1), (2) y (3) definen un modelo de asignación regular (sección 5.4) donde $x_{ij} = 1$ si el nodo (ciudad) i está conectado a un nodo (ciudad) j , y cero en caso contrario. Si la solución del modelo de asignación resulta ser un recorrido [es decir, satisface la restricción (4)], entonces automáticamente es óptimo para el TSP. Sin embargo, esto ocurre en pocas ocasiones y es probable que el modelo de asignación se componga de **subrecorridos**. En ese caso, se requieren cálculos adicionales

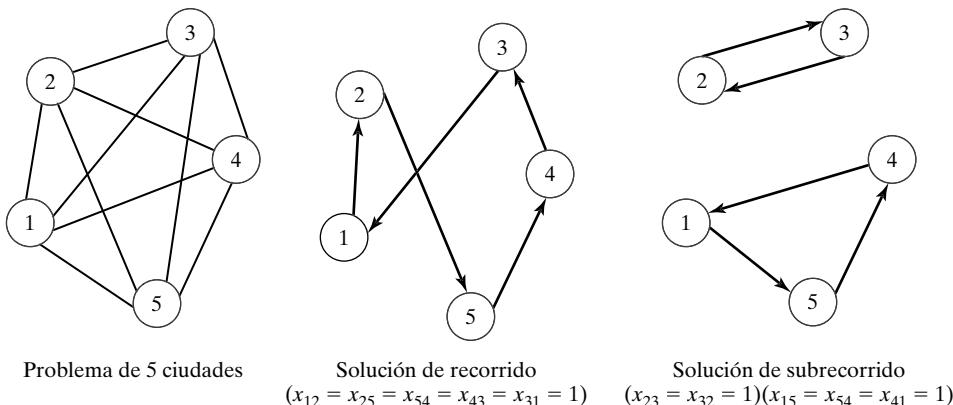


FIGURA 11.1

Un ejemplo de modelo del TSP de 5 ciudades con una solución de recorrido o subrecorrido del modelo de asignación asociado, según la instancia de matriz de distancias específica

para determinar la solución del recorrido óptimo. En la figura 11.1 se demuestra un modelo del TSP de 5 ciudades con la solución de un recorrido y un subrecorrido. Los nodos representan ciudades; y los arcos, rutas en dos sentidos —que pueden ser distintas si el modelo es asimétrico.

Ejemplo 11.2-1

El programa de producción diaria en la compañía Rainbow incluye lotes de pintura blanca (*W*), amarilla (*Y*), roja (*R*) y negra (*B*). Las instalaciones de producción se deben limpiar entre uno y otro lotes. En la tabla 11.1 se resumen los tiempos de limpieza en minutos. El objetivo es determinar la secuencia de los colores que minimice el tiempo de limpieza total.

En el modelo del TSP, cada color representa una “ciudad” y el tiempo de limpieza entre dos colores sucesivos representa la “distancia”. Sea *M* una penalización suficientemente grande y defina

$$x_{ij} = 1 \text{ si la pintura } j \text{ sucede a la pintura } i \text{ y cero en caso contrario}$$

El modelo del TSP se da como

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z = & 10x_{WY} + 17x_{WB} + 15x_{WR} + 20x_{YW} + 19x_{YB} + 18x_{YR} + 50x_{BW} + 44x_{BY} \\ & + 22x_{BR} + 45x_{RW} + 40x_{RY} + 20x_{RB} + M(x_{WW} + x_{yy} + x_{BB} + x_{RR}) \end{aligned}$$

TABLA 11.1 Tiempos de limpieza entre lotes (en minutos) para el problema de producción de pintura

Pintura	Tiempo de limpieza entre lotes (minutos)			
	Blanca	Amarilla	Negra	Roja
Blanca	∞	10	17	15
Amarilla	20	∞	19	18
Negra	50	44	∞	22
Roja	45	40	20	∞

sujeto a

$$x_{WW} + x_{WY} + x_{WB} + x_{WR} = 1$$

$$x_{YW} + x_{YY} + x_{YB} + x_{YR} = 1$$

$$x_{BW} + x_{BY} + x_{BB} + x_{BR} = 1$$

$$x_{RW} + x_{RY} + x_{RB} + x_{RR} = 1$$

$$x_{WW} + x_{YW} + x_{BW} + x_{RW} = 1$$

$$x_{WY} + x_{YY} + x_{BY} + x_{RY} = 1$$

$$x_{WB} + x_{YB} + x_{BB} + x_{RB} = 1$$

$$x_{WR} + x_{YR} + x_{BR} + x_{RR} = 1$$

$$x_{ij} = 0, 1 \text{ para toda } i \text{ y } j$$

La solución es un recorrido (lazo)

El uso de la penalización M en la función objetivo equivale a eliminar x_{WW} , x_{YY} , x_{BB} y x_{RR} del modelo. La estructura del modelo de asignación subyacente es la base para el desarrollo de los algoritmos del TSP.

Solución del modelo del TSP. Una forma directa de resolver el modelo del TSP es una enumeración exhaustiva. La cantidad máxima de recorridos en un problema de n ciudades es $(n - 1)!$. En este ejemplo, la enumeración exhaustiva es factible porque el número de recorridos posibles es pequeño ($= 6$). La tabla 11.2 muestra y evalúa los seis recorridos e indica que el recorrido $W \rightarrow Y \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow W$ es óptimo.

Por lo general, la enumeración exhaustiva no es práctica para el modelo del TSP. Por ello, en la sección 11.3 se presentan dos algoritmos de programación entera exactos: el de ramificación y acotamiento (B&B) y el de plano cortante. Ambos algoritmos tienen su raíz en la solución del modelo de asignación, con restricciones agregadas para garantizar una solución de recorrido. Por desgracia, como es típico con la mayoría de los algoritmos de programación entera, los métodos propuestos no son computacionalmente confiables. Por esa razón se utilizan heurísticas para obtener soluciones buenas (aunque no necesariamente óptimas) del problema. Tres de estas heurísticas se presentan en la sección 11.5.

Interpretación de la solución óptima. La secuencia de producción óptima $W \rightarrow Y \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow W$ en la tabla 11.2 inicia con el color blanco seguido por el amarillo, luego el negro y al final el rojo. Es realmente irrelevante qué color se utilice para iniciar el ciclo de producción, ya que la solución es un *recorrido cerrado*. Por ejemplo, las secuencias $B \rightarrow R \rightarrow W \rightarrow Y \rightarrow B$ y $Y \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow W \rightarrow Y$ también son óptimas.

TABLA 11.2 Solución del problema de secuenciación de pinturas mediante enumeración exhaustiva

Lazo de producción	Tiempo de limpieza total (minutos)
$W \rightarrow Y \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow W$	$10 + 19 + 22 + 45 = 96$
$W \rightarrow Y \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow W$	$10 + 18 + 20 + 50 = 98$
$W \rightarrow B \rightarrow Y \rightarrow R \rightarrow W$	$17 + 44 + 18 + 45 = 124$
$W \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow Y \rightarrow W$	$17 + 22 + 40 + 20 = 99$
$W \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow Y \rightarrow W$	$15 + 20 + 44 + 20 = 99$
$W \rightarrow R \rightarrow Y \rightarrow B \rightarrow W$	$15 + 40 + 19 + 50 = 124$

TSP de recorrido abierto. Los recorridos abiertos ocurren cuando no es necesario regresar a la ciudad de inicio. Este caso se demuestra en el problema de las pinturas cuando la producción se limita a exactamente un lote de cada color. Por ejemplo, en la secuencia de recorrido abierto, $B \rightarrow W \rightarrow Y \rightarrow R$, la última “ciudad” (R) no se conecta de regreso con la “ciudad” inicial (B).

Esta condición se toma en cuenta en una situación de n ciudades agregando una ciudad ficticia, $n + 1$, con distancias cero hasta y desde todas las ciudades reales; es decir, $d_{i,n+1} = 0, i = 1, 2, \dots, n$ y $d_{n+1,j} = 0, j = 1, 2, \dots, n$. Para el ejemplo de las pinturas, la nueva matriz de distancias es

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 17 & 15 & 0 \\ 20 & \infty & 19 & 18 & 0 \\ 50 & 44 & \infty & 22 & 0 \\ 45 & 40 & 20 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

La fila 5 y la columna 5 representan el color ficticio.

El recorrido óptimo es

$$W \rightarrow Y \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow \text{Ficticio} \rightarrow W, \text{ longitud} = 48 \text{ minutos}$$

La solución puede leerse reacomodando los puntos de inicio y terminación del recorrido con el color ficticio:

$$\text{Ficticio} \rightarrow W \rightarrow Y \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow \text{Ficticio}$$

Si se elimina el color ficticio, resulta la siguiente solución de recorrido abierto:

$$W \rightarrow Y \rightarrow R \rightarrow B$$

Es importante observar que la solución óptima de recorrido abierto no puede obtenerse en forma directa, a partir de la solución óptima de recorrido cerrado ($W \rightarrow Y \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow W$).

Cota inferior en la longitud de recorrido óptima. Una cota inferior en la longitud del recorrido óptima puede ser útil al resolver el modelo del TSP con los algoritmos exactos o con los algoritmos heurísticos. En el caso de los algoritmos exactos, una cota inferior estrecha restringe el espacio factible y, por consiguiente, hace más eficiente el algoritmo (sobre todo en el caso B&B). Para las heurísticas puede usarse una cota inferior con la finalidad de evaluar la calidad de la solución heurística.

Hay varios métodos para estimar una cota inferior. Dos de ellos son los siguientes:

1. **Modelo de asignación.** El modelo de asignación es una simplificación del modelo del TSP, y su solución óptima proporciona una cota inferior en la longitud de recorrido óptima. En realidad, si la solución óptima del modelo de asignación es factible (es decir, un recorrido), también es óptima para el modelo del TSP.

La solución del modelo de asignación (recorrido cerrado) para el problema de las pinturas produce una cota inferior de 72 minutos.

2. **Programación lineal.** Una cota inferior en una situación de n ciudades puede determinarse inscribiendo los círculos más grandes no traslapados alrededor de todas las ciudades. Sea $r_j, j = 1, 2, \dots, n$ el mayor radio de un círculo inscrito alrededor de la ciudad j . El valor óptimo del siguiente PL proporciona una cota inferior:

$$\text{Maximizar } z = 2(r_1 + r_2 + \dots + r_n)$$

sujeto a

$$r_i + r_j \leq \min(d_{ij}, d_{ji}) \quad i, j = 1, 2, \dots, n, i < j$$

La función objetivo reconoce que un agente viajero que entra al círculo alrededor de la ciudad i debe cubrir una distancia de, al menos, $2r_i$ antes de entrar al dominio del círculo de cualquier otra ciudad en la red. Las restricciones garantizan que ninguno de los círculos se traslape.

Para el ejemplo de las pinturas, se tiene

$$\text{Maximizar } z = 2(r_W + r_Y + r_B + r_R)$$

sujeto a

$$r_W + r_Y \leq \min(10, 20)$$

$$r_W + r_B \leq \min(17, 50)$$

$$r_W + r_R \leq \min(15, 45)$$

$$r_Y + r_B \leq \min(19, 44)$$

$$r_Y + r_R \leq \min(18, 40)$$

$$r_B + r_R \leq \min(22, 20)$$

$$r_W, r_Y, r_B, r_R, \geq 0$$

La solución produce una cota inferior de 60 minutos, que no es tan estrecha como la obtenida con el modelo de asignación (= 72 minutos). En realidad, la experimentación con ambos métodos sugiere que el modelo de asignación produce de manera consistente cotas inferiores más estrechas, en especial cuando el modelo del TSP es asimétrico. Observe que la programación lineal siempre ofrece una cota inferior de valor cero trivial para un TSP de recorrido abierto, debido a que las distancias “de entrada y salida” cero de la ciudad ficticia limitan todos los radios a cero.

Momento de AMPL

Los modelos de asignación y PL que se presentaron anteriormente para estimar la cota inferior pueden resolverse con los archivos de AMPL disponibles en el sitio web:

```
model amplAssign.txt; data amplInputData.txt; commands solutionAssign.txt;
model amplLP.txt; data amplInputData.txt; commands solutionLP.txt;
```

El archivo *amplInputData.txt* incluye los datos del TSP del problema de las pinturas.

11.3 ALGORITMOS DEL TSP EXACTOS

En esta sección se presentan dos algoritmos de PE exactos: B&B y plano cortante. En teoría, ambos algoritmos garantizan la optimalidad. El tema computacional es una historia diferente; esto significa que los algoritmos quizás no produzcan la solución óptima en una cantidad razonable de tiempo, lo que impulsa el desarrollo de las heurísticas de las secciones 11.4 y 11.5.

11.3.1 Algoritmo B&B

La idea del algoritmo B&B consiste en iniciar con la solución óptima del problema de asignación asociado. Si la solución es un recorrido, el proceso termina. De lo contrario, se imponen restricciones en la solución resultante para imposibilitar los subrecorridos. La idea es crear ramas que asignen un valor cero a cada una de las variables de uno de los subrecorridos. Por lo general, se selecciona el subrecorrido con la menor cantidad de ciudades para la ramificación, pues es el que crea la menor cantidad de ramas.

Si la solución del problema de asignación en cualquier nodo es un recorrido, su valor objetivo proporciona una cota superior para la longitud óptima del recorrido. Si no, se requiere más ramificación en el nodo. Un subproblema se *sondea* si produce una cota superior más pequeña, o si hay evidencia de que no puede conducir a una mejor cota superior. El recorrido óptimo se da en el nodo con la menor cota superior.

El siguiente ejemplo presenta los detalles de los algoritmos B&B y del TSP.

Ejemplo 11.3-1

Considere la siguiente matriz de distancias del TSP de 5 ciudades:

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 3 & 6 & 9 \\ 5 & \infty & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & \infty & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 3 & \infty & 4 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

La asignación asociada se resuelve utilizando AMPL, TORA o Excel. La solución es

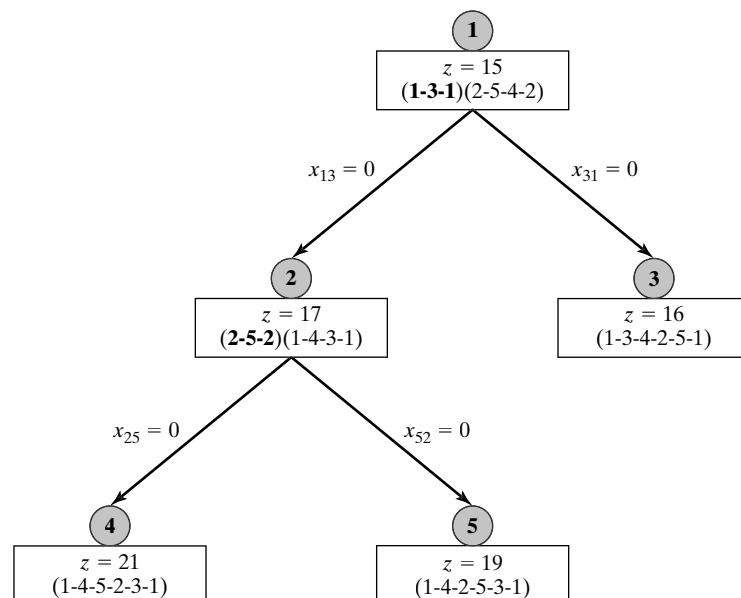
$$z = 15, (x_{13} = x_{31} = 1), (x_{25} = x_{54} = x_{42} = 1), \text{ todas las demás} = 0$$

Se compone de dos subrecorridos, 1-3-1 y 2-5-4-2, además constituye el nodo de inicio del árbol de búsqueda B&B, como se muestra en el nodo 1 de la figura 11.2.

En este ejemplo se utilizará un recorrido arbitrario, 1-2-3-4-5-1, para determinar la cota superior de inicio; es decir, $10 + 5 + 7 + 4 + 3 = 29$ unidades. Como alternativa, se pueden utilizar las heurísticas de las secciones 11.4 y 11.5 para producir cotas superiores (más pequeñas) mejoradas. La cota superior estimada significa que la lon-

FIGURA 11.2

Solución B&B del problema del TSP del ejemplo 11.3-1



gitud del recorrido *óptima* no puede exceder de 29. Los futuros nodos B&B buscan cotas superiores más pequeñas, si acaso existe alguna.

En el nodo 1 del árbol B&B, el subrecorrido más corto 1-3-1 crea la rama $x_{13} = 0$ que conduce al nodo 2 y $x_{31} = 0$ que conduce al nodo 3. Los problemas de asignación asociados en los nodos 2 y 3 se crean a partir del problema en el nodo 1 estableciendo $d_{13} = \infty$ y $d_{31} = \infty$, respectivamente.

En este momento, es posible examinar el nodo 2 o el nodo 3, y elegir arbitrariamente la exploración del nodo 2. Su solución de asignación es 2-5-2 y 1-4-3-1 con $z = 17$. Como la solución no es un recorrido, se selecciona el subrecorrido más corto 2-5-2 para ramificación: la rama $x_{25} = 0$ conduce al nodo 4, y la rama $x_{52} = 0$ conduce al nodo 5.

Ahora se tienen tres subproblemas sin explorar: los nodos 3, 4, y 5. Se examina arbitrariamente el subproblema en el nodo 4, haciendo $d_{25} = \infty$ en la matriz de distancias en el nodo 2. La solución resultante, el recorrido 1-4-5-2-3-1, produce la cota superior más pequeña $z = 21$.

Los dos subproblemas en los nodos 3 y 5 permanecen sin explorar. Si se selecciona arbitrariamente el subproblema 5, resulta $d_{52} = \infty$ en la matriz de distancias en el nodo 2. El resultado es el recorrido 1-4-2-5-3-1 con la cota superior más pequeña $z = 19$. El subproblema 3 es el único que permanece sin explorar. Al sustituir $d_{31} = \infty$ en la matriz de distancias en el nodo 1, se obtiene una mejor solución de recorrido: 1-3-4-2-5-1 con la cota superior más pequeña $z = 16$.

Se han examinado todos los nodos del árbol y, por consiguiente, se completa la búsqueda B&B. El recorrido óptimo es el asociado con la cota superior más pequeña: 1-3-4-2-5-1 con longitud de 16 unidades.

Comentarios. La solución del ejemplo 11.3-1 revela dos puntos:

1. La secuencia de búsqueda $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ se seleccionó deliberadamente para demostrar un escenario del peor caso en el algoritmo B&B, en el sentido de que requiere explorar 5 nodos. Si se hubiera explorado el nodo 3 ($x_{31} = 0$) antes que el nodo 2 ($x_{13} = 0$), se habría encontrado la cota superior $z = 16$ unidades, y concluido que la ramificación en el nodo 2, con $z = 17$, no puede conducir a una mejor solución; por lo tanto, se eliminaría la necesidad de explorar los nodos 4 y 5.

Por lo general, no hay reglas exactas para seleccionar la mejor secuencia de búsqueda, excepto algunas reglas prácticas. Por ejemplo, en un nodo dado se puede iniciar con una rama que tenga la d_{ij} más larga entre todas las ramas creadas. La esperanza es que la eliminación del segmento que tenga el recorrido más largo conduzca a un recorrido de menor longitud. En el ejemplo 11.3-1, esta regla habría priorizado al nodo 3 sobre el nodo 2, ya que $d_{31} (= 4)$ es mayor que $d_{13} (= 3)$, como se desea. Otra regla indica secuenciar la exploración de los nodos horizontalmente (en lugar de verticalmente), es decir, el ancho antes que la profundidad. La idea es que es más probable que los nodos más cercanos al nodo de inicio produzcan cotas superiores más estrechas, debido a que el número de restricciones adicionales (del tipo $x_{ij} = 0$) es menor. Esta regla también habría producido la búsqueda computacionalmente eficiente $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$.

2. Las heurísticas de las secciones 11.4 y 11.5 pueden mejorar la eficiencia computacional del algoritmo B&B al proporcionar una cota superior “estrecha”. Por ejemplo, la heurística vecina más cercana en la sección 11.4.1 produce el recorrido 1-3-4-2-5-1 con longitud $z = 16$. Esta cota superior estrecha habría eliminado de inmediato la necesidad de explorar el nodo 2 (la matriz de distancias es totalmente entera, por lo que no se puede encontrar una mejor solución en el nodo 2).

Momento de AMPL

Los comandos interactivos de AMPL son ideales para implementar el algoritmo B&B del TSP por medio del archivo para el modelo de asignación general *amplAssign.txt*. Los datos del problema se proporcionan en el archivo *Ex11.3-1.txt*. El archivo *solutionAssign.txt* resuelve y despliega la solución. En la siguiente tabla se resumen

los comandos de AMPL necesarios para crear el árbol B&B mostrado en la figura 11.2 (ejemplo 11.3-1) de manera interactiva:

Comandos AMPL	Resultado
ampl: model amplAssign.txt;data Ex11.3-1.txt; commands solutionAssign.txt;	Solución del nodo 1
ampl: fix x[1,3]:=0;commands solutionAssign.txt;	Solución del nodo 2
ampl: fix x[2,5]:=0;commands solutionAssign.txt;	Solución del nodo 4
ampl: unfix x[2,5];fix x[5,2]:=0; commands solutionAssign.txt;	Solución del nodo 5
ampl: unfix x[5,2];unfix x[1,3];fix x[3,1]:=0; commands solutionAssign.txt;	Solución del nodo 3

Momento de TORA

También se utiliza TORA para la generación del árbol B&B. Inicie con el modelo de asignación en el nodo 1. La condición de rama $x_{ij}=0$ se efectúa al utilizar **Solve/Modify Input Data** con la finalidad de cambiar a cero la cota superior en x_{ij} .

11.3.2 Algoritmo del plano cortante

En este algoritmo se agrega un conjunto de restricciones al problema de asignación para excluir las soluciones de subrecorrido. Defina una variable continua u_j (≥ 0) para la ciudad $j = 2, 3, \dots, n$. Las restricciones adicionales deseadas (planos cortantes) son

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, i = 2, 3, \dots, n; j = 2, 3, \dots, n; i \neq j$$

La adición de estos cortes al modelo de asignación produce un programa lineal entero mixto con x_{ij} binaria y u_j continua.

Ejemplo 11.3-2

Considere la siguiente matriz de distancias para un problema del TSP de 4 ciudades.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} - & 13 & 21 & 26 \\ 10 & - & 29 & 20 \\ 30 & 20 & - & 5 \\ 12 & 30 & 7 & - \end{pmatrix}$$

El problema entero mixto completo se compone del modelo de asignación y las restricciones adicionales, como se muestra en la tabla 11.3. Todas las $x_{ij} = (0, 1)$ y todas la $u_j \geq 0$.

La solución óptima es $u_2 = 0, u_3 = 2, u_4 = 3, x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{41} = 1$. El recorrido correspondiente es 1-2-3-4-1 con longitud de 59. La solución satisface todas las restricciones adicionales (¡verifíquelo!).

Para demostrar que la solución óptima dada no puede satisfacer una solución de subrecorrido, considere el subrecorrido (1-2-1, 3-4-3), o $x_{12} = x_{21} = 1, x_{34} = x_{43} = 1$. Los valores óptimos $u_2 = 0, u_3 = 2$ y $u_4 = 3$ junto con

TABLA 11.3 Cortes para excluir los subrecorridos en el modelo de asignación del ejemplo 11.3-2

Núm.	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	u_2	u_3	u_4	
1							4										1	-1		≤ 3
2								4									1		-1	≤ 3
3										4							-1	1		≤ 3
4												4						1	-1	≤ 3
5														4			-1		1	≤ 3
6															4			-1	1	≤ 3

$x_{43} = 1$ no satisfacen la restricción $6, 4x_{43} + u_4 - u_3 \leq 3$, en la tabla 11.3 [convéñzase de que la misma conclusión es cierta para otras soluciones de subrecorrido, como (3-2-3, 1-4-1)].

La desventaja del modelo de plano cortante es que el tamaño del programa lineal entero mixto resultante crece exponencialmente con el número de ciudades, lo cual hace que el modelo sea intratable desde el punto de vista computacional. Cuando sucede así, el único recurso es utilizar ya sea el algoritmo B&B o una de las heurísticas de las secciones 11.4 y 11.5.

Momento de AMPL

En el archivo *amplCut.txt* se proporciona un modelo general de AMPL del algoritmo de plano cortante. El modelo del TSP de 4 ciudades del ejemplo 11.3-2 utiliza los siguientes comandos de AMPL:

```
model amplCut.txt; data Ex11.3-2.txt; commands SolutionCut.txt;
```

Los resultados se muestran en el siguiente formato conveniente:

```
Optimal tour length = 59.00
Optimal tour: 1- 2- 3- 4- 1
```

11.4 HEURÍSTICAS DE BÚSQUEDA LOCAL

En esta sección se presentan dos heurísticas de búsqueda local para el modelo del TSP: del *vecino más cercano* y de *inversión*. Las heurísticas de búsqueda local terminan en un óptimo local. Una forma de mejorar la calidad de la solución es repetir la búsqueda mediante recorridos de inicio generados al azar. Otra opción consiste en utilizar metaheurísticas, cuya idea básica es escapar del entrampamiento en un óptimo local. Las metaheurísticas se abordarán en la sección 11.5.

11.4.1 Heurística del vecino más cercano

Como su nombre lo sugiere, una solución del TSP puede hallarse comenzando con una ciudad (un nodo), para después conectarla con la ciudad no conectada más cercana (los empates se rompen arbitrariamente). En seguida, la ciudad que se acaba de agregar se conecta con su ciudad no conectada más cercana. El proceso continúa hasta que se forma un recorrido.

Ejemplo 11.4-1

La siguiente matriz resume las distancias en millas en un modelo del TSP de 5 ciudades.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 120 & 220 & 150 & 210 \\ 120 & \infty & 100 & 110 & 130 \\ 220 & 80 & \infty & 160 & 185 \\ 150 & \infty & 160 & \infty & 190 \\ 210 & 130 & 185 & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

La heurística puede iniciar desde cualquiera de las cinco ciudades. Cada ciudad de inicio puede conducir a un recorrido diferente. En la tabla 11.4 se presentan los pasos de la heurística que inicia en la ciudad 3 (las distancias previamente seleccionadas se reemplazan con —).

El recorrido resultante, 3-2-4-1-5-3, tiene una longitud total de $80 + 110 + 150 + 210 + 185 = 735$ millas. Observe que la calidad de la solución depende de la selección de la ciudad de inicio. Por ejemplo, si se inicia en la ciudad 1, el recorrido resultante es 1-2-3-4-5-1 con una longitud de 780 millas (¡verifíquelo!). Por lo tanto, es posible determinar una mejor solución repitiendo la heurística con inicio en diferentes ciudades.

11.4.2 Heurística de inversión

En un modelo del TSP de n ciudades, la heurística de inversión intenta mejorar un recorrido actual invirtiendo el orden de los nodos de un subrecorrido *abierto* (un subrecorrido es abierto si le falta exactamente un segmento). Por ejemplo, considere el recorrido 1-3-5-2-4-1 en la figura 11.3. La inversión de un subrecorrido abierto 3-5-2 produce el nuevo recorrido 1-2-5-3-4-1 al eliminar los segmentos 1-3 y 2-4, y al agregar los segmentos 1-2 y 3-4, como se ilustra en la figura 11.3. El número mínimo del subrecorrido invertido es 2 (por ejemplo, 3-5 o 5-2). El número máximo es $n - 2$ si la matriz de distancias es simétrica, y $n - 1$ si es asimétrica.³ La heurística examina todas las inversiones en busca de un mejor recorrido.

La longitud del recorrido de inicio en la heurística de inversión no necesita ser finita (es decir, podría tener algunos segmentos faltantes). De hecho, iniciar con un recorrido de longitud finita no parece ofrecer una ventaja específica respecto de la calidad de la solución final (a manera de ilustración, vea el problema 11-24).

TABLA 11.4 Pasos de la heurística del vecino más cercano para resolver el modelo del TSP del ejemplo 11.4-1

Paso	Acción	Construcción de recorrido
1	Inicio en la ciudad 3	3
2	La ciudad 2 está más cercana a la ciudad 3 ($d_{32} = \min\{220, \mathbf{80}, \infty, 160, 185\}$)	3-2
3	La ciudad 4 está más cercana a la ciudad 2 ($d_{24} = \min\{120, \infty, —, \mathbf{110}, 130\}$)	3-2-4
4	La ciudad 1 está más cercana a la ciudad 4 ($d_{41} = \min\{\mathbf{150}, \infty, —, —, 190\}$)	3-2-4-1
5	La ciudad 5 está más cercana a la ciudad 1 ($d_{15} = \min\{\infty, —, —, —, \mathbf{210}\}$)	3-2-4-1-5
6	Agregue la ciudad 3 para completar el recorrido	3-2-4-1-5-3

³ En una matriz de distancias simétrica, la inversión de subrecorridos de $(n - 1)$ ciudades no produce un recorrido diferente. Por ejemplo, la inversión 2-4-5-3 en el recorrido 1-2-4-5-3-1 produce el recorrido idéntico 1-3-5-4-2-1 cuando la matriz de distancias es simétrica ($d_{ij} = d_{ji}$, para todas las i y j). Esto quizás no sea cierto en el caso asimétrico porque los segmentos $i-j$ y $j-i$ pueden no ser iguales.

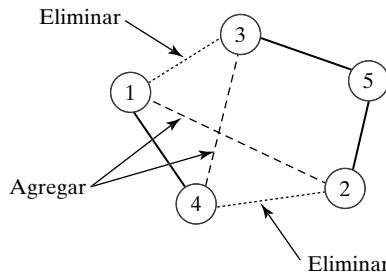


FIGURA 11.3

La inversión del subrecorrido 3-5-2 en el recorrido 1-3-5-2-4-1 produce el recorrido 1-2-5-3-4-1 al eliminar los segmentos 1-3 y 2-4, y al agregar los segmentos 1-2 y 3-4

Ejemplo 11.4-2

Considere el modelo del TSP del ejemplo 11.4-1. Los pasos de inversión (autoexplicativos) se realizan en la tabla 11.5 comenzando con el recorrido arbitrario 1-4-3-5-2-1 de 745 millas de longitud.

La inversión de cuatro a la vez se investiga porque la matriz de distancias es asimétrica. Además, ninguna de las inversiones puede incluir la ciudad de origen del recorrido de inicio (=1 en este ejemplo), ya que esto no producirá un recorrido factible. Por ejemplo, la inversión 1-4 conduce a 4-1-3-5-2-1, que no es un recorrido.

La solución determinada por la heurística de inversión es una función del recorrido de inicio. Por ejemplo, si se inicia con 2-3-4-1-5-2 de 750 millas de longitud, la heurística produce un recorrido diferente: 2-5-1-4-3-2 de 730 millas de longitud (¡verifíquelo!). Por esa razón, la calidad de la solución puede mejorarse si la heurística se repite con diferentes recorridos de inicio.

Momento de Excel

En la figura 11.4 se muestra una hoja de cálculo general en Excel (archivo *excelReversalTSP.xls*) utilizando las reglas dadas anteriormente (un subconjunto del modelo proporciona la solución del vecino más cercano; vea las opciones 1 y 4 dadas a continuación). La matriz de distancias puede introducirse manualmente, o bien, llenarse al azar (simétrica o asimétrica) con una densidad especificada. La heurística verifica automáticamente la matriz en cuanto a simetría y ajusta el nivel de inversión máximo según corresponda. También automatiza cuatro opciones para el recorrido de inicio:

1. La opción *all* aplica la heurística del vecino más cercano utilizando cada una de las ciudades como punto de inicio. Se utiliza entonces el mejor entre los recorridos resultantes para iniciar la heurística de inversión.
2. La opción *tour* permite utilizar un recorrido de inicio específico.
3. La opción *random* genera un recorrido de inicio aleatorio.
4. La opción *specific city number* se aplica a la heurística del vecino más cercano iniciando en la ciudad designada.

TABLA 11.5 Aplicación de la heurística de inversión al modelo del TSP del ejemplo 11.4-1

Tipo	Inversión	Recorrido	Longitud
Inicio	—	(1-4-3-5-2-1)	745
Inversión de dos a la vez	4-3	1-3-4-5-2-1	820
	3-5	(1-4-5-3-2-1)	725
	5-2	1-4-3-2-5-1	730
Inversión de tres a la vez	4-3-5	1-5-3-4-2-1	∞
	3-5-2	1-4-2-5-3-1	∞
Inversión de cuatro a la vez	4-3-5-2	1-2-5-3-4-1	745

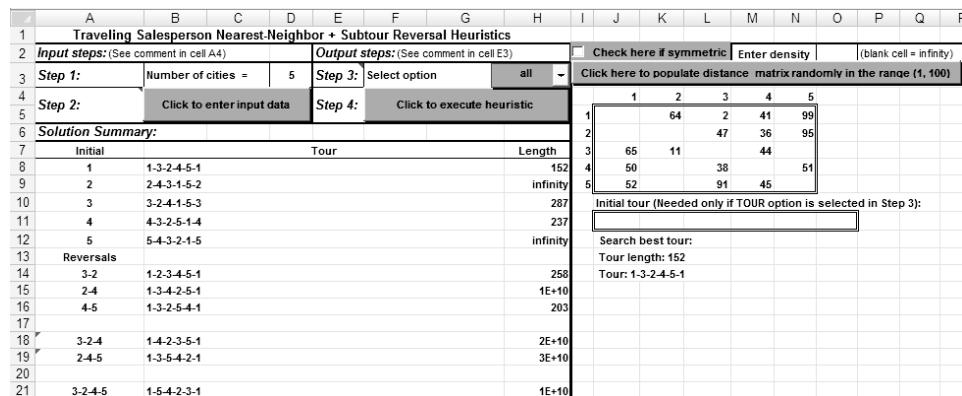


FIGURA 11.4

Ejecución de la heurística del TSP mediante el uso de una hoja de cálculo de Excel (archivo *excelReversalTSP.xls*)

Momento, ¡ajá! Experiencia computacional del TSP o ¡cómo reproducir la Mona Lisa de Leonardo da Vinci!⁴

El TSP ha estado en circulación desde el siglo xix. Pero el interés en resolver el problema no comenzó en serio sino hasta que G. Dantzig, R. Fulkerson y S. Johnson (1954) desarrollaron un algoritmo basado en PL, para determinar el recorrido (más corto) óptimo al visitar 49 ciudades en el territorio continental de Estados Unidos. Pero como no había computadoras, el problema se resolvía manualmente (tomaba sólo unas cuantas *semanas*, ¡qué barbaridad!).⁵ Desde entonces, y con el advenimiento de la informática moderna, se resolvieron casos mucho mayores que culminaron en 2004 con el recorrido óptimo de 24,978 ciudades en Suecia.

En un entorno de aplicación diferente, el TSP se utilizó a mediados de la década de 1980 en Bell Labs para fabricar un chip de computadora que requería la vaporización con láser de 85,900 interconexiones de puertas lógicas simples. El objetivo era mover el láser en el chip de un lugar a otro, trazando así el recorrido más corto (la menor distancia de recorrido total). Los intentos por encontrar la solución comenzaron en 1991 y culminaron en 2006 con el recorrido óptimo. Sorprendentemente, esta “cruzada” de 15 años ha dado como resultado una reducción de menos de 1% (0.0923%, para ser exactos) en la duración del recorrido encontrado en 1991. En un sentido práctico, parecería que la solución de 1991 es tan buena como la de 2006. Por otro lado, ¡la postura académica no exige *sino lo mejor*!

Otra aplicación del mundo del arte es la reproducción de la Mona Lisa de Leonardo da Vinci usando un dibujo en línea continua entre los puntos que caracterizan la pintura original (donde los matices de la oscuridad se imitan por lo cerca o lejos que están los puntos). Una instancia de n puntos que representan las ubicaciones relativas de esos puntos define totalmente el TSP asociado. En 2009 se creó un desafío para resolver el problema de la Mona Lisa usando $n = 100,000$ puntos. Desde entonces, la brecha relativa a una cota inferior en la longitud más corta del recorrido (calculada mediante una relajación de PL del TSP) se redujo de 2212 unidades de distancia a 107 a partir de 2012. Cuando el óptimo del TSP de la Mona Lisa se encuentre finalmente, el problema será el más grande jamás intentado. ¡Y la carrera continúa!

⁴ <http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/index.html>, consultado el 05-10-2015, 2:33 P.M.

⁵ Para fines de comparación, una instancia de 49 ciudades ahora se resuelve en una fracción de segundo utilizando Concorde TSP Solver. Para mayor información sobre Concorde, consulte el sitio web de la University of Waterloo, op. cit.

11.5 METAHEURÍSTICAS

La desventaja de las heurísticas de búsqueda local de la sección 11.4 es el posible entrampamiento en un óptimo local. Las metaheurísticas, como se explica en el capítulo 10, están diseñadas para aliviar ese problema. En la presente sección se detalla la aplicación al modelo del TSP de la búsqueda tabú, el recocido simulado y el algoritmo genético. Se recomienda que repase el material del capítulo 10 antes de continuar con el resto del presente capítulo.

11.5.1 Algoritmo tabú aplicado al modelo del TSP

Como se explica en la sección 10.3.1, la búsqueda tabú se escapa del entrampamiento en óptimos locales al permitir movimientos de búsqueda inferiores. Una **lista tabú** impide que se repitan las soluciones encontradas anteriormente durante un número específico de iteraciones sucesivas, llamado **periodo de permanencia**. Un movimiento tabú puede aceptarse si conduce a una solución mejorada. Para el modelo del TSP, los elementos de la búsqueda tabú se definen como sigue:

- 1. Recorrido de inicio.** Hay cuatro opciones disponibles: (a) un recorrido específico; (b) una ciudad de inicio específica para un recorrido construido mediante la heurística del vecino más cercano (sección 11.4.1); (c) el mejor entre todos los recorridos construidos por la heurística del vecino más cercano, utilizando cada una de las ciudades 1, 2, ..., y n como punto de inicio; y (d) un recorrido aleatorio.
- 2. Inversión de un subrecorrido.** Dos segmentos de recorrido agregados reemplazan a dos eliminados para producir un nuevo recorrido (para mayores detalles, vea la sección 11.4.2).
- 3. Vecindad en la iteración i .** Todos los recorridos (incluidos los no factibles con longitud infinita) generados por la aplicación de inversiones de subrecorrido hasta el recorrido i .
- 4. Movimiento tabú.** Un recorrido invertido es tabú si sus *dos* segmentos eliminados están en la lista tabú.
- 5. Siguiente movimiento en la iteración i .** Identifique el recorrido más corto en la vecindad i , y selecciónelo como el siguiente movimiento si no es tabú, o si es tabú pero produce una mejor solución. De lo contrario, excluya el recorrido más corto (tabú) y repita la prueba con el siguiente recorrido más corto de la vecindad.
- 6. Periodo de permanencia tabú τ en la iteración i .** El periodo de permanencia es el número (aleatorio o determinístico) de iteraciones sucesivas que un elemento tabú permanece en la lista tabú.
- 7. Cambios en la lista tabú en la iteración i .** Los segmentos invertidos que definen el recorrido i a partir del recorrido $i - 1$ se agregan a la lista. Los segmentos del recorrido que completan la permanencia (aquellos que entraron en la lista en la iteración $i - \tau + 1$) se eliminan de la lista.

Ejemplo 11.5-1

Se utilizará la matriz de distancias del ejemplo 11.4-1 para demostrar la aplicación de la metaheurística tabú.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 120 & 220 & 150 & 210 \\ 120 & \infty & 100 & 110 & 130 \\ 220 & 80 & \infty & 160 & 185 \\ 150 & \infty & 160 & \infty & 190 \\ 210 & 130 & 185 & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Suponga un periodo de permanencia tabú $\tau = 2$ iteraciones y utilice un recorrido 1-2-3-4-5-1 con longitud de 780 como recorrido de inicio.

En la tabla 11.6 se incluyen cinco iteraciones. En las iteraciones 1, 2 y 3, los recorridos más cortos no son tabú. En la iteración 4, el recorrido más corto, 1-4-3-5-2-1 con longitud de 745 es tabú porque la inversión requiere eliminar los segmentos 4-5 y 3-2, y ambos están en la lista tabú. Como el recorrido (tabú) no es mejor que la mejor solución registrada (recorrido 1-4-5-3-2-1 de 725 de longitud en la iteración 3), el siguiente recorrido más corto 1-4-5-2-3-1 de 790 de longitud, el cual resulta ser no tabú, define el siguiente movimiento.

En la iteración 5, los dos recorridos 1-4-5-3-2-1 (longitud = 725) y 1-4-3-2-5-1 (longitud = 730) son tabú (y ninguno proporciona un mejor recorrido). El siguiente mejor recorrido en la vecindad, 1-4-2-5-3-1 (de longitud infinita), no es tabú y por consiguiente representa el siguiente movimiento. Observe que sólo un segmento eliminado (4-5) en el recorrido seleccionado 1-4-2-5-3-1 aparece en la lista tabú, lo cual no es suficiente para declararlo tabú porque *ambos* segmentos eliminados deben estar en la lista. Observe también que el recorrido superior 1-5-4-2-3-1 (de longitud infinita) no se selecciona porque le faltan dos segmentos, en comparación con el faltante en el recorrido seleccionado, 1-4-2-5-3-1.

TABLA 11.6 Solución heurística tabú del ejemplo 11.5-1 con periodo de permanencia $\tau = 2$ iteraciones

Iteración	Inversión	Recorrido	Longitud (millas)	Eliminar	Agregar	Lista tabú ($\tau = 2$)
0	—	1-2-3-4-5-1	780			—
1	2-3	1-3-2-4-5-1	810			
	3-4	1-2-4-3-5-1	785			
	4-5	1-2-3-5-4-1	∞			
	2-3-4	1-4-3-2-5-1	730	1-2, 5-4	1-4, 2-5	1-4, 2-5
	3-4-5	1-2-5-4-3-1	∞			
	2-3-4-5	1-5-4-3-2-1	∞			
2	4-3	1-3-4-2-5-1	∞			
	3-2	1-4-2-3-5-1	∞			
	2-5	1-4-3-5-2-1	745	3-2, 5-1	3-5, 2-1	1-4, 2-5, 3-5, 2-1
	4-3-2	1-2-3-4-5-1	780			
	3-2-5	1-4-5-2-3-1	790			
	4-3-2-5	1-5-2-3-4-1	750			
3	4-3	1-3-4-5-2-1	820			
	3-5	1-4-5-3-2-1	725	4-3, 5-2	4-5, 3-2	3-5, 2-1, 4-5, 3-2
	5-2	1-4-3-2-5-1	730			
	4-3-5	1-5-3-4-2-1	∞			
	3-5-2	1-4-2-5-3-1	∞			
	4-3-5-2	1-2-5-3-4-1	745			
4	4-5	1-5-4-3-2-1	∞			
	5-3	1-4-3-5-2-1	745	4-5, 3-2	—	Tabú
	3-2	1-4-5-2-3-1	790	5-3, 2-1	5-2, 3-1	4-5, 3-2, 5-2, 3-1
	4-5-3	1-3-5-4-2-1	∞			
	5-3-2	1-4-2-3-5-1	∞			
	4-5-3-2	1-2-3-5-4-1	∞			
5	4-5	1-5-4-2-3-1	∞			
	5-2	1-4-2-5-3-1	∞	4-5, 2-3	4-2, 5-3	5-2, 3-1, 4-2, 5-3
	2-3	1-4-5-3-2-1	725	5-2, 3-1	—	Tabú
	4-5-2	1-2-5-4-3-1	∞			
	5-2-3	1-4-3-2-5-1	730	4-5, 3-1	—	Tabú
	4-5-2-3	1-3-2-5-4-1	∞			

Momento de Excel

En la figura 11.5 se presenta la hoja de cálculo en Excel (archivo *excelTabuTSP.xls*) para aplicar la búsqueda tabú al modelo del TSP. Para facilitar la experimentación, los modelos del TSP simétricos y asimétricos pueden generarse al azar. Incluso, el recorrido de inicio puede especificarse de manera determinística o aleatoria. Los botones on/off (fila 6 de la hoja de cálculo) suprimen o revelan los detalles de las iteraciones, incluyendo los cambios en la lista tabú.

FIGURA 11.5

Metaheurística tabú aplicada al modelo del TSP utilizando una hoja de cálculo en Excel (archivo *excelTabuTSP.xls*)

11.5.2 Algoritmo de recocido simulado aplicado al modelo del TSP

En la sección 10.3.2 se explicó que, en cualquier iteración del recocido simulado, una solución de la vecindad que *no sea la peor* siempre se acepta como el siguiente movimiento. Si no existe esa solución, la búsqueda puede moverse a una solución de vecindad inferior condicionalmente si

$$R < e^{\left(\frac{L_{\text{actual}} - L_{\text{siguiente}}}{T}\right)}$$

donde

R = Número aleatorio (0, 1)

L_{actual} = Longitud de recorrido en la iteración actual

$L_{\text{siguiente}}$ = Longitud de recorrido (inferior) en la siguiente iteración ($> L_{\text{actual}}$)

T = Temperatura

La temperatura T supone menores valores a medida que se incrementa la cantidad de iteraciones de búsqueda, por lo que se reduce el valor de $e^{\left(\frac{L_{\text{actual}} - L_{\text{siguiente}}}{T}\right)}$, y se produce una búsqueda más selectiva. Incluso, la medida de aceptación favorece los movimientos cuyo valor objetivo, $L_{\text{siguiente}}$ se acerca más al valor objetivo actual, L_{actual} , porque incrementa el valor de $e^{\left(\frac{L_{\text{actual}} - L_{\text{siguiente}}}{T}\right)}$.

Los componentes principales del recocido simulado son los siguientes:

- 1. Recorrido de inicio.** Hay cuatro opciones disponibles: (a) Un recorrido específico; (b) una ciudad de inicio específica para un recorrido construido por la heurística del vecino más cercano (sección 11.4.1); (c) el mejor entre todos los recorridos construidos por la heurística del vecino más cercano, utilizando cada una de las ciudades 1, 2, ..., y n como punto de inicio, y (d) un recorrido aleatorio.
- 2. Inversión de subrecorrido.** Dos segmentos agregados reemplazan a dos segmentos eliminados para producir un nuevo recorrido (para mayores detalles, vea la sección 11.4.2).
- 3. Programa de temperatura.** $\{T_k, k = 0, 1, \dots\}$, T_0 = temperatura de inicio, $T_k = r_k T_{k-1}, 0 < r_k < 1$, $k = 1, 2, \dots$, con el cambio de una temperatura a la siguiente que sucede cada t iteraciones de aceptación.
- 4. Vecindad en la iteración i .** Todos los recorridos (incluidos los no factibles de longitud infinita) generados a partir de la aplicación de inversiones de subrecorrido (sección 11.4.2) al recorrido i .
- 5. Siguiente movimiento en la iteración i .** Seleccione la inversión de subrecorrido que no sea peor que el mejor recorrido actual; de lo contrario, examine los recorridos en la vecindad i en orden ascendente de la longitud de recorrido hasta que se acepte un movimiento (utilizando la medida de probabilidad).

Ejemplo 11.5-2

Se utilizará la matriz de distancias del ejemplo 11.4-1 para demostrar la aplicación de la metaheurística de recocido simulado.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 120 & 220 & 150 & 210 \\ 120 & \infty & 100 & 110 & 130 \\ 220 & 100 & \infty & 160 & 185 \\ 150 & 110 & 160 & \infty & 190 \\ 210 & 130 & 185 & 190 & \infty \end{pmatrix}$$

TABLA 11.7 Solución de recocido simulado para el ejemplo 11.5-2 con $T_k = .5T_{k-1}$, $T_0 = 50$, y cambio de T_{k-1} a T_k que ocurre cada dos iteraciones de aceptación

Iteración	Inversión	Recorrido	Longitud (millas)	L_{actual}	$L_{\text{siguiente}}$	T	$p = e^{\left(\frac{L_{\text{actual}} - L_{\text{siguiente}}}{T}\right)}$	R	Decisión
0	—	3-2-5-4-1-3	∞	∞		50	—	—	—
1	2-5	3-5-2-4-1-3	795			50			
	5-4	3-2-4-5-1-3	810			50			
	4-1	3-2-5-1-4-3	730			50			
	2-5-4	3-4-5-2-1-3	820			50			
	5-4-1	3-2-1-4-5-3	725	∞	725	50	—		Aceptar el movimiento, $L_{\text{siguiente}} < L_{\text{actual}}$
	2-5-4-1	3-1-4-5-2-3	790			50			
						50			
2	2-1	3-1-2-4-5-3	825			50			
	1-4	3-2-4-1-5-3	735	725	735	50	.8187	.8536	Rechazar el movimiento, $R \geq p$
	4-5	3-2-1-5-4-3	∞			50			
	2-1-4	3-4-1-2-5-3	745	725	745	50	.6703	.3701	Aceptar el movimiento, $R < p$
	1-4-5	3-2-5-4-1-3	∞			50			
	2-1-4-5	3-5-4-1-2-3	∞			50			
			∞						
3	4-1	3-1-4-2-5-3	∞			25			
	1-2	3-4-2-1-5-3	∞			25			
	2-5	3-4-1-5-2-3	750			25			
	4-1-2	3-2-1-4-5-3	725	745	725	25			Aceptar el movimiento, $L_{\text{siguiente}} < L_{\text{actual}}$
	1-2-5	3-4-5-2-1-3	820			25			
	4-1-2-5	3-5-2-1-4-3	745			25			

Suponga el programa de temperatura $T_k = .5T_{k-1}$ con $T_0 = 50$. Un cambio de T_{k-1} a T_k tiene lugar cada dos iteraciones de aceptación. El ejemplo se inicia con el recorrido (de longitud infinita) no factible 3-2-5-4-1-3.

La tabla 11.7 detalla los cálculos para tres iteraciones. El mejor movimiento de inversión 5-4-1 en la iteración 1 se acepta porque resulta en una mejor longitud de recorrido ($L_{\text{siguiente}} = 725$ contra $L_{\text{actual}} = \infty$). Esto significa que el recorrido 3-2-1-4-5-3 es la mejor solución disponible hasta ahora. La iteración 2 produce movimientos inferiores, lo cual significa que el movimiento anterior, 5-4-1 en la iteración 1, es un mínimo local. Por consiguiente, se examinan todos los recorridos en la iteración 2 en orden ascendente de longitudes de recorrido, hasta que se acepta un recorrido (si se rechazan todos los recorridos, se repite el examen con una nueva ronda de números aleatorios o bien la búsqueda termina). El movimiento 1-4 con una longitud de recorrido de 735 se rechaza porque $R = .8536$ es mayor que $p = e^{\left(\frac{725-735}{50}\right)} = .8187$. El siguiente movimiento, 2-1-4, con longitud de recorrido de 745 se acepta porque $R = .3701$ es menor que $p = e^{\left(\frac{725-745}{50}\right)} = .6703$.

En la iteración 3 se obtuvieron dos iteraciones de aceptación en las iteraciones 1 y 2. Por consiguiente, la temperatura cambia de 50 a $.5(50) = 25$. Después, el proceso iterativo continúa hasta que ocurre una condición de terminación.

Momento de Excel

En la figura 11.6 se presenta una captura de pantalla de la aplicación del recocido simulado al modelo del TSP (archivo *excelSimulatedAnnealingTSP.xls*). La hoja de cálculo sigue el diseño general de la hoja de cálculo tabú de la figura 11.5.

A	B	C	D	E	F	G	H
Input steps: (See comment in cell A5)			Output steps: (See comments in cells D4, D5, and D6)				
Step 1:		Nbr of cities=	5	Steps 3a&b:	Nbr of iters=	50	TempAcceptiters= 4
				Steps 4a&b:	Initial temp=	50	Reduction ratio= 0.5
Step 2:		Format input area		Steps 5a&b:	Start option:	tour	Execute heuristic
Iteration calculations: <input checked="" type="radio"/> ON <input type="radio"/> OFF			Next move:	Best reversal	GREEN = Accept, RED = Reject		
Start city		Tour				Length	
initial		3-2-5-4-1-3				1E+10	
Iter 1 reversals							
11	2-5	3-5-2-4-1-3				795	
12	5-4	3-2-4-5-1-3				810	
13	4-1	3-2-5-1-4-3				730	
14	2-5-4	3-4-5-2-1-3				820	
15	5-4-1	3-2-1-4-5-3				725	
16	2-5-4-1	3-1-4-5-2-3				790	
1	I	J	K	L	M	N	O P Q
2	<input type="checkbox"/> Check here if symmetric	Enter density:		0.9	(blank cell = ∞)		
3	Click to populate DISTANCE matrix randomly in the range (1, 100)						
4	1	2	3	4	5		
5	1	120	220	150	210		
6	2	120	100	110	130		
7	3	220	80	160	185		
8	4	150	160	190			
9	5	210	130	185			
10	Step 4c: Enter initial tour (if TOUR option is selected in Step 5a):						
11	3	2	5	4	1	3	
12	Search best tour found at iteration 1						
13	Tour length: 725						
14	Tour: 3-2-1-4-5-3						

FIGURA 11.6

Metaheurística de recocido simulado aplicada al modelo del TSP utilizando una hoja de cálculo en Excel (archivo *excelSimulatedAnnealingTSP.xls*)

11.5.3 Algoritmo genético del TSP

En la metaheurística genética presentada en la sección 10.3.3, se seleccionan dos padres de una población para crear dos hijos. Después, los hijos se convierten en padres y reemplazan a los dos padres menos aptos (en términos de la longitud de recorrido) en la población. El proceso de crear hijos y retirar a los padres se repite hasta que se llega a una condición de terminación.

La siguiente es una descripción de los principales elementos de la metaheurística genética como se aplica al TSP.

- Codificación de genes.** La codificación puede ser binaria o numérica. La literatura presenta heurísticas basadas en ambos tipos de codificación. Esta presentación adopta el código de recorrido numérico directo (por ejemplo, 1-2-5-4-3-1).
- Población inicial.** El primer paso es identificar los conjuntos de código que salen de cada nodo en la red a lo que se puede llegar por medio de un segmento de recorrido *finito*. Comenzando desde un nodo (origen) específico, se construye un recorrido agregando en la posición más a la derecha un nodo único *no redundante*, seleccionado de entre todos los nodos que salen del

TABLA 11.8 Pasos para crear los hijos C1 y C2 a partir de los padres P1 y P2 utilizando un cruce ordenado

Paso	Acción	Ejemplo (suponga $n = 7$ nodos)
0	Seleccionar P1 y P2 de la población.	$P1 = 1-2-\underline{\mathbf{5}}-\mathbf{4}-\mathbf{3}-7-6$ (enlace de regreso al nodo 1) $P2 = 5-4-\underline{\mathbf{2}}-\mathbf{6}-\mathbf{3}-1-7$ (enlace de regreso al recorrido 5)
1	Seleccionar al azar dos puntos de cruce, c_1 y c_2 con $c_1 < c_2$	$R = .4425$ produce $c_1 = \text{int}(7 \times .3425) + 1 = 3$ $R = .7123$ produce $c_2 = \text{int}(7 \times .7123) + 1 = 5$
2	Intercambiar posiciones ($c_1, c_1 + 1, \dots, c_2$) en P1 y P2 para formar parcialmente C2 y C1, respectivamente.	$C1 = ?-\underline{\mathbf{2}}-\mathbf{6}-\mathbf{3}-?-?$ $C2 = ?-\underline{\mathbf{5}}-\mathbf{4}-\mathbf{3}-?-?$
3	Crear la lista L1 (L2) reacomodando los elementos de P1(P2) en el sentido horario	$L1 = (7, 6, 1, 2, 5, 4, 3)$ $L2 = (1, 7, 5, 4, 2, 6, 3)$
4	A partir de L1 (L2), cree L1' (L2') eliminando los nodos ya asignados a C1(C2) en el paso 2 al mismo tiempo que se conserva el orden en L1 y L2.	$L1' = L1 - (2, 6, 3) = (\underline{7}, \underline{1}, \mathbf{5}, \mathbf{4})$ $L2' = L2 - (5, 4, 3) = (\underline{1}, \underline{7}, \mathbf{2}, \mathbf{6})$
5	Asignar los elementos de L1' (L2') a los elementos faltantes en C1(C2) en el orden $c_2 + 1, c_2 + 2, \dots, n, 1, 2, \dots, c_1 - 1$	$C1 = \mathbf{5}-\mathbf{4}-2-\mathbf{6}-3-\underline{7}-1$ (enlace de regreso al nodo 5) $C2 = \mathbf{2}-\mathbf{6}-\mathbf{5}-\mathbf{4}-3-\underline{1}-7$ (enlace de regreso al nodo 2)

último nodo agregado. Si se llega a un punto donde no existe ningún nodo de salida único, todo el proceso se repite hasta que se encuentre un recorrido de longitud finita.

El requerimiento que estipula que se llegue a los nodos de salida por medio de enlaces finitos garantiza que el recorrido construido sea factible (tenga una longitud finita). A diferencia del algoritmo tabú y del recocido simulado donde una nueva búsqueda quizás no sea factible, es posible que los recorridos padre no factibles nunca conduzcan a la creación de recorridos hijos factibles. Este resultado es particularmente cierto cuando la matriz de distancias es dispersa.

3. Creación de un hijo. El proceso inicia seleccionando dos padres, P1 y P2, cuyos genes se intercambian para crear dos hijos, C1 y C2. Se supondrá que P1 representa el mejor parente (en función de la longitud de recorrido) y P2 el siguiente mejor. Hay varias formas de intercambio de genes [vea Larrañaga *et al.* (1999) para una lista de 25 de esos procedimientos]. En esta presentación se utilizará el procedimiento de cruce ordenado, cuyos pasos se explican en la tabla 11.8.

El procedimiento propuesto para la creación de hijos puede conducir a recorridos no factibles (con segmentos faltantes). Si sucede lo anterior, el procedimiento debería repetirse cuantas veces sea necesario, hasta que se presente la factibilidad de la descendencia.

4. Mutación. La mutación en los genes del hijo ocurre con una pequeña probabilidad de aproximadamente .1, al intercambiarse los nodos de dos posiciones seleccionadas al azar en el recorrido (excluidas las del nodo de inicio). La selección al azar puede repetirse para asegurar dos posiciones distintas.

Ejemplo 11.5-3

Se utilizará el modelo del TSP del ejemplo 11.4-1 para demostrar la aplicación de la heurística genética.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 120 & 220 & 150 & 210 \\ 120 & \infty & 100 & 110 & 130 \\ 220 & 80 & \infty & 160 & 185 \\ 150 & \infty & 160 & \infty & 190 \\ 210 & 130 & 185 & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

La lista de nodos de salida se determina a partir de la matriz de distancias como

Nodo i	Nodos de salida
1	{2, 3, 4, 5}
2	{1, 3, 4, 5}
3	{1, 2, 4, 5}
4	{1, 3, 5}
5	{1, 2, 3}

En la tabla 11.9 se muestran los detalles de las iteraciones 1, 2 y 11. La iteración 11 ofrece la mejor solución (que también resulta ser óptima). Las iteraciones que intervienen se omitieron para conservar espacio.

Se demuestra la determinación de la población inicial (6 padres) en la iteración 1 considerando al padre 1. Comenzando con el nodo de inicio 1, se selecciona el nodo 4 aleatoriamente de entre el conjunto de nodos de salida {2, 3, 4, 5}. Luego, los nodos de salida del nodo 4 son {1, 3, 5} – {1} porque {1} ya está en el recorrido parcial. Seleccionando el nodo 5 al azar se produce el recorrido parcial 1-4-5. El proceso se repite hasta que se construye el recorrido completo 1-4-5-2-3-1. Tenga en cuenta que si la construcción del recorrido se detiene (no pueden agregarse nodos nuevos), entonces todo el proceso debe repetirse de nuevo. Por ejemplo, la construcción del recorrido no puede continuar más allá del recorrido parcial 1-2-3-5, ya que no hay ninguna conexión del nodo 5 al nodo de salida 4 (el único restante).

TABLA 11.9 Algoritmo genético aplicado al modelo del TSP del ejemplo 11.4-3

Iteración	Miembro	Recorrido	Cruces	Longitud (millas)
1	1	1-4-5-2-3-1		790
	2	3-2-4-5-1-3		810
	3	1-2-4-5-3-1		825
	(Padre 2) 4	<u>2-5-3-4-1-2</u>		745
	5	3-4-5-1-2-3		780
	(Padre 1) 6	<u>1-5-3-2-4-1</u>		735
	Hijo 1	<u>5-2-3-4-1-5</u>	3 y 5	750
2	Hijo 2	<u>5-1-3-2-4-5</u>		810
	1	1-4-5-2-3-1		790
	2	5-1-3-2-4-5		810
	3	5-2-3-4-1-5		750
	(Padre 2) 4	<u>2-5-3-4-1-2</u>		745
	5	3-4-5-1-2-3		780
	(Padre 1) 6	<u>1-5-3-2-4-1</u>		735
11	Hijo 1	<u>5-3-2-4-1-5</u>	4 y 5	735
	Hijo 2	<u>5-3-1-2-4-5</u>		825

	(Padre 2) 1	<u>1-5-3-2-4-1</u>		735
	2	5-3-2-4-1-5		735
	3	5-3-2-4-1-5		735
	4	5-3-2-4-1-5		735
(Padre 1) 5	(Padre 1) 5	<u>4-5-3-2-1-4</u>		725
	6	5-3-2-4-1-5		735
	Hijo 1	<u>4-5-3-2-1-4</u>	3 y 4	725
	Hijo 2	<u>1-5-3-2-4-1</u>		735

En la iteración 1, P1 = 1-5-3-2-4 y P2 = 2-5-3-4-1 porque son los dos padres más aptos (observe que las definiciones de P1 y P2 no incluyen los últimos elementos 1 y 2, respectivamente). Si se utilizan los puntos de cruce (generados aleatoriamente) $c_1 = 3$ y $c_2 = 5$, se obtienen C1 = ?-?-3-4-1 y C2 = ?-?-3-2-4 parciales. Luego, $L1' = \{1, 5, 3, 2, 4\} - \{3, 4, 1\} = \{5, 2\}$, lo cual produce C1 = 5-2-3-4-1. Asimismo, $L2' = \{2, 5, 3, 4, 1\} - \{3, 2, 4\} = \{5, 1\}$, lo cual produce C2 = 5-1-3-2-4. Ahora los hijos C1 y C2 reemplazan a los padres menos aptos 2 y 3 que corresponden a las longitudes de los peores (más largos) recorridos (810 and 825) para producir la nueva población que se utilizará en la iteración 2 (es irrelevante cuál hijo reemplace a cuál de los dos peores padres).

Para problemas pequeños, las iteraciones pueden “saturarse” en una forma un tanto rápida, en el sentido de que los hijos no pueden distinguirse de los padres que reemplazan, como lo demuestra la iteración 11. El único recurso en este caso es iniciar un nuevo ciclo de ejecución que permita utilizar una nueva condición de inicio (aleatoriedad).

Momento de Excel

En la figura 11.7 se muestra un modelo general basado en Excel para experimentar con la metaheurística genética (archivo *excelGeneticTSP.xls*). El modelo puede ejecutarse iteración por iteración o de forma automática hasta que se llega a una condición de terminación. La aleatoriedad de las condiciones de inicio proporciona condiciones diferentes cada vez que se pulsa el botón de ejecución.

FIGURA 11.7

Metaheurística genética del TSP utilizando una hoja de cálculo en Excel (archivo *excelGeneticTSP.xls*)

BIBLIOGRAFÍA

- Applegate, D., R. Bixby, V. Chvatal y W. J. Cook, *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study*, Princeton University Press, 2006.
- Bosch, R. y A. Herman, "Continuous Line Drawings via the Traveling Salesman Problem," *Operations Research Letters*, vol. 32, pp. 302-303, 2004.
- Dantzig, G., D. Fulkerson y S. Johnson, "Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem," *Operations Research*, vol. 2, pp. 393-410, 1954.
- Garfinkel, R., "Minimizing Wallpaper Waste. Part I: A Class of Travelling Salesman Problems," *Operations Research*, vol. 25, pp. 741-751, 1977.
- Gilmore, P. y R. Gomory, "Sequencing a One State-Variable Machine: A Solvable Case of the Travelling Salesman Problem," *Operations Research*, vol. 12, pp. 655-679, 1964.
- Larrañaga, P., C. Kuijpers, R. Murga, I. Inza y S. Dizdarevich, "Genetic Algorithms for the Travelling Salesman Problem: A Review of Representations and Operators," *Artificial Intelligence Review*, vol. 13, núm. 2, pp. 129-170, 1999.
- Laporte, G., "The Traveling Salesman Problem: An Overview of Exact and Approximate Algorithms," *European Journal of Operational Research*, vol. 59, núm. 2, pp. 231-247, 1992.
- Lenstra, J. y A. Rinnooy Kan, "Some Simple Applications of the Traveling Salesman Problem," *Operational Research Quarterly*, vol. 26, núm. 4, pp. 717-733, 1975.
- Ratliff, H. y A. Rosenthal, "Order-Picking in a Rectangular Warehouse: A Solvable Case of the Traveling Salesman Problem," *Operations Research*, vol. 31, pp. 507-521, 1983.
- Yamada, Y. y R. Nakano, "Genetic Algorithms for Job-Shop Scheduling Problems," *Proceedings of Modern Heuristic for Decision Support*, UNICOM Seminar, Londres, 18-19 de marzo de 1997, pp. 67-81.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados	Sección	Problemas asignados
11.1	11-1 a 11-1	11.4	11-23 a 11-26
11.2	11-2 a 11-14	11.5.1	11-27 a 11-29
11.3.1	11-15 a 11-19	11.5.2	11-30 a 11-32
11.3.2	11-20 a 11-22	11.5.3	11-33 a 11-35

- 11-1.** En cada una de las siguientes instancias, describa los datos (ciudades y distancias) necesarios para modelar el problema como un TSP.
- (a) Seers Service Center programa sus visitas diarias de mantenimiento a los clientes. Los trabajos se clasifican y agrupan, y cada grupo se asigna a un técnico en mantenimiento. Al final de la asignación el técnico se reporta al centro de servicio.
 - (b) A un aficionado del béisbol le gustaría visitar ocho parques de ligas mayores en (1) Seattle, (2) San Francisco, (3) Los Ángeles, (4) Phoenix, (5) Denver, (6) Dallas, (7) Chicago y (8) Tampa antes de regresar a su casa en Seattle. Cada visita dura aproximadamente una semana. El objetivo es gastar lo menos posible en pasajes aéreos.
 - *(c) Un turista en la ciudad de Nueva York desea visitar 8 sitios turísticos utilizando el transporte local. El recorrido inicia y termina en un hotel ubicado en el centro. El turista desea gastar la menor cantidad posible de dinero en transporte.
 - (d) Un gerente tiene m empleados que trabajan en n proyectos. Un empleado puede trabajar en más de un proyecto, lo que traslapa las asignaciones. En la actualidad, el gerente se entrevista con cada

empleado una vez por semana. Para reducir el tiempo total de entrevista con todos los empleados, el gerente desea realizar entrevistas en grupo que impliquen proyectos compartidos. El objetivo es reducir el tráfico (cantidad de empleados) que entren y salgan de la sala de juntas.

- (e) Meals-on-Wheels es un servicio de caridad que prepara comidas en su cocina central para personas que califican para el servicio. Idealmente, todas las comidas deberían entregarse en un máximo de 20 minutos después de que salen de la cocina, lo cual significa que el tiempo de regreso desde la última ubicación hasta la cocina no es un factor para determinar la secuencia de las entregas.
 - (f) *Secuenciación del DNA.* En ingeniería genética, un conjunto de cadenas de DNA, cada una de una longitud específica, se concatena para formar una cadena universal. Los genes de cadenas de DNA individuales pueden traslaparse. La cantidad de traslapes entre dos cadenas sucesivas es medible en unidades de longitud. La longitud de la cadena universal es la suma de las longitudes de las cadenas individuales menos los traslapes. El objetivo es concatenar las cadenas individuales, de modo que se minimice la longitud de la cadena universal.
 - (g) *Vehículo de guía automática.* Un vehículo de guía automática (VGA) realiza un viaje redondo que inicia y termina en el cuarto de correo, para entregar correspondencia a departamentos en el piso de una fábrica. El VGA se desplaza a lo largo de pasillos horizontales y verticales. El objetivo consiste en minimizar la longitud del viaje redondo.
 - (h) *Tarjeta de circuitos integrados.* Se perforan orificios en tarjetas de circuitos idénticas para montar componentes electrónicos. Las placas se alimentan secuencialmente bajo un taladro en movimiento. El objetivo es determinar la secuencia que completa la perforación de todos los orificios en un tablero en el menor tiempo posible.
 - (i) *Agrupamiento de proteínas.* Las proteínas se agrupan utilizando una medida numérica de similitud basada en la interacción entre proteínas. La información de agrupación se utiliza para predecir funciones de proteínas desconocidas. El mejor agrupamiento es el que maximiza (minimiza) la suma de las medidas de similitud (disimilitud) entre proteínas adyacentes.
 - (j) *Imágenes de objetos celestes.* La agencia espacial estadounidense NASA utiliza satélites para obtener imágenes de objetos celestes. La cantidad de combustible necesaria para reposicionar los satélites depende de la secuencia en la que se forman imágenes de los objetos. El objetivo es determinar la secuencia de imágenes óptima que minimice el consumo de combustible.
 - (k) *Arte del TSP de Mona Lisa.* Esta intrigante aplicación recrea la Mona Lisa de Leonardo da Vinci usando un dibujo lineal continuo. La idea general es aproximar la pintura original mediante gráficos computarizados para agrupar puntos en un gráfico. Después, los puntos se conectan secuencialmente utilizando segmentos lineales por piezas.
- *11-2. Un vendedor de libros que vive en Basin debe visitar una vez al mes a cuatro clientes localizados en Wald, Bon, Mena y Kiln antes de regresar a su casa en Basin. En la siguiente tabla se muestran las distancias en millas entre las diferentes ciudades.

	Millas entre ciudades				
	Basin	Wald	Bon	Mena	Kiln
Basin	0	120	220	150	210
Wald	120	0	80	110	130
Bon	220	80	0	160	185
Mena	150	110	160	0	190
Kiln	210	130	185	190	0

El objetivo es minimizar la distancia total recorrida por el vendedor.

- (a) Escriba una PL para calcular una cota inferior en la longitud de recorrido óptima.
- (b) Compare las cotas inferiores en la longitud de recorrido óptima tanto con un modelo de asignación como con una programación lineal. ¿Es óptima la solución del modelo de asignación para el TSP?

- 11-3.** Seers Service Center programa sus visitas diarias de mantenimiento a sus clientes. La siguiente matriz $\|T_{ij}\|$ presenta el tiempo de recorrido (en minutos) entre el centro de servicio (fila 1 y columna 1) y las siete órdenes de mantenimiento. Las órdenes se asignan a uno de los técnicos en mantenimiento durante un turno de 8 horas. Al final del día, el técnico regresa al centro de servicio para completar la documentación.

$$\|T_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 19 & 24 & 14 & 21 & 11 \\ 20 & 0 & 18 & 22 & 23 & 22 & 9 & 10 \\ 15 & 18 & 0 & 11 & 21 & 14 & 32 & 12 \\ 19 & 22 & 11 & 0 & 20 & 27 & 18 & 15 \\ 24 & 23 & 21 & 20 & 0 & 14 & 25 & 20 \\ 14 & 22 & 14 & 27 & 14 & 0 & 26 & 17 \\ 21 & 9 & 32 & 18 & 25 & 26 & 0 & 20 \\ 11 & 10 & 12 & 15 & 20 & 17 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Compare las cotas inferiores en la longitud de recorrido óptima utilizando tanto el modelo de asignación como la programación lineal. ¿Es óptima la solución del modelo de asignación para el TSP?
- (b) Dado que el desplazamiento entre clientes no es productivo, y suponiendo una pausa de una hora para el almuerzo, determine la productividad máxima del técnico durante el día.

- 11-4.** Un aficionado del béisbol desea visitar ocho parques de ligas mayores en (1) Seattle, (2) San Francisco, (3) Los Ángeles, (4) Phoenix, (5) Denver, (6) Dallas, (7) Chicago y (8) Tampa antes de regresar a su casa en Seattle. El aficionado utilizará transportación aérea entre las diferentes ciudades. La siguiente matriz $\|p_{ij}\|$ indica el precio en dólares de un boleto de viaje sencillo entre las 8 ciudades.

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 250 & 300 & 290 & 240 & 320 & 380 & 450 \\ 250 & 0 & 190 & 220 & 230 & 300 & 310 & 390 \\ 300 & 190 & 0 & 140 & 310 & 295 & 390 & 410 \\ 290 & 220 & 140 & 0 & 200 & 275 & 285 & 350 \\ 240 & 230 & 310 & 200 & 0 & 240 & 255 & 400 \\ 320 & 300 & 295 & 275 & 240 & 0 & 260 & 370 \\ 380 & 310 & 390 & 285 & 255 & 260 & 0 & 420 \\ 450 & 390 & 410 & 350 & 400 & 370 & 420 & 0 \end{pmatrix}$$

El aficionado ha presupuestado \$2000 para los viajes aéreos. ¿Es realista su presupuesto de viaje?

- 11-5.** *Agrupamiento de proteínas.* Las proteínas se agrupan utilizando una medida total de similitud basada en la información de interacción entre las proteínas. La información de agrupamiento se utiliza para predecir las funciones de proteínas desconocidas. Por definición, el mejor agrupamiento maximiza la

suma de las medidas de similitud entre proteínas adyacentes. La matriz $\|s_{ij}\|$ siguiente muestra las medidas de las similitudes (expresadas como un porcentaje) entre las 8 proteínas.

$$\|s_{ij}\| = \begin{pmatrix} 100 & 20 & 30 & 29 & 24 & 22 & 38 & 45 \\ 20 & 100 & 10 & 22 & 0 & 15 & 31 & 0 \\ 30 & 10 & 100 & 14 & 11 & 95 & 30 & 41 \\ 29 & 22 & 14 & 100 & 20 & 27 & 28 & 50 \\ 24 & 0 & 11 & 20 & 100 & 24 & 55 & 0 \\ 22 & 15 & 95 & 27 & 24 & 100 & 26 & 37 \\ 38 & 31 & 30 & 28 & 55 & 26 & 100 & 40 \\ 45 & 0 & 41 & 50 & 0 & 37 & 40 & 100 \end{pmatrix}$$

- (a)** Defina la matriz de distancias del TSP.
(b) Determine una cota superior en la medida de similitud del agrupamiento de proteínas óptimo.

- 11-6.** Un turista en la ciudad de Nueva York utiliza el transporte local para visitar 8 sitios. El inicio y la terminación, así como el orden en el cual se visitan los sitios, no son importantes. Lo que es importante es gastar la cantidad mínima de dinero en transporte. La siguiente matriz $\|c_{ij}\|$ presenta los pasajes en dólares entre los diferentes lugares.

$$\|c_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 30 & 25 & 12 & 33 & 44 & 57 \\ 22 & 0 & 19 & 20 & 20 & 29 & 43 & 45 \\ 28 & 19 & 0 & 17 & 38 & 48 & 55 & 60 \\ 25 & 20 & 19 & 0 & 28 & 35 & 40 & 55 \\ 12 & 18 & 34 & 25 & 0 & 21 & 30 & 40 \\ 35 & 25 & 45 & 30 & 20 & 0 & 25 & 39 \\ 47 & 39 & 50 & 35 & 28 & 20 & 0 & 28 \\ 60 & 38 & 54 & 50 & 33 & 40 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

El turista está presupuestando \$120 para el costo del taxi a los ocho sitios. ¿Es realista su expectativa? (Sugerencia: Éste es un modelo del TSP de recorrido abierto).

- *11-7.** Un gerente tiene en total 10 empleados que trabajan en seis proyectos. Los proyectos se revisan semanalmente con cada empleado. Un proyecto puede necesitar más de un empleado, por lo que las asignaciones se traslanan, como se muestra en la siguiente tabla.

	Proyecto					
	1	2	3	4	5	6
1		x		x	x	
2	x		x		x	
3		x	x	x		x
4			x	x	x	
Empleado 5	x	x	x			
6	x	x	x	x		x
7	x	x			x	x
8	x		x	x		
9					x	x
10	x	x		x	x	x

En la actualidad, el gerente se reúne con cada empleado una vez a la semana. Cada reunión dura aproximadamente 20 minutos para un total de 3 horas y 20 minutos entre los 10 empleados. Para reducir el tiempo total, el gerente desea realizar reuniones grupales dependiendo de los proyectos compartidos. El objetivo es programar las reuniones de modo que se reduzca el tráfico (cantidad de empleados) que entra y sale de la sala de juntas.

- (a) Defina las ciudades y la matriz de distancias del modelo del TSP.
 - (b) Determine una cota inferior en la longitud de recorrido óptima utilizando el modelo de asignación. ¿Es óptima la solución del modelo de asignación para el TSP?
- 11-8.** Meals-on-Wheels es un servicio de caridad que prepara comidas en su cocina central para personas que califican para el servicio. Idealmente, todas las comidas deberían entregarse en un máximo de 20 minutos después de que salen de la cocina, lo cual significa que el tiempo de regreso desde la última ubicación hasta la cocina no es un factor al determinar la secuencia de las entregas. El servicio de caridad se encuentra en el proceso de determinar la ruta de entrega. El primer itinerario piloto incluye siete recipientes con los siguientes tiempos de recorrido $\|t_{ij}\|$ (la fila 1 y la columna 1 representan la cocina).

$$\|t_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 12 & 5 & 17 & 9 & 13 & 7 \\ 10 & 0 & 9 & 20 & 8 & 11 & 3 & 5 \\ 12 & 9 & 0 & 14 & 4 & 10 & 1 & 16 \\ 5 & 20 & 14 & 0 & 20 & 5 & 28 & 10 \\ 17 & 8 & 4 & 20 & 0 & 21 & 4 & 9 \\ 9 & 11 & 10 & 5 & 21 & 0 & 2 & 3 \\ 13 & 3 & 1 & 28 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 16 & 10 & 9 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Compare las cotas inferiores en la longitud de recorrido óptima utilizando tanto el modelo de asignación como la programación lineal. ¿Es óptima la solución del modelo de asignación para el TSP?
 - (b) Con base en la información en el inciso (a), ¿es posible entregar las ocho comidas dentro de la ventana de tiempo de 20 minutos?
- 11-9.** *Tarjetas de circuitos integrados.* A las tarjetas de circuitos integrados (como las que se utilizan en las computadoras personales) se les perforan orificios para montar los diferentes componentes electrónicos. Las tarjetas son alimentadas de una en una bajo un taladro móvil. La siguiente matriz $\|d_{ij}\|$ presenta las distancias (en milímetros) entre pares de 6 orificios de una tarjeta específica.
- $$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} - & 1.2 & .5 & 2.6 & 4.1 & 3.2 \\ 1.2 & - & 3.4 & 4.6 & 2.9 & 5.2 \\ .5 & 3.4 & - & 3.5 & 4.6 & 6.2 \\ 2.6 & 4.6 & 3.5 & - & 3.8 & .9 \\ 4.1 & 2.9 & 4.6 & 3.8 & - & 1.9 \\ 3.2 & 5.2 & 6.2 & .9 & 1.9 & - \end{pmatrix}$$
- Suponga que el taladro se mueve a una velocidad lineal de 7 milímetros por segundo y que le lleva medio segundo taladrar un orificio. Determine una cota superior en la tasa de producción (tarjetas por hora).
- 11-10.** *Secuenciación del DNA.* En ingeniería genética, un conjunto de cadenas de DNA, cada una de 10 pies de longitud, se concatena para formar una cadena universal. Los genes de cadenas de DNA individuales pueden traslaparse, lo que produce una cadena universal de longitud menor que la suma de las longitudes

individuales. La siguiente matriz $\|O_{ij}\|$ proporciona la longitud en pies de los traslapes para un caso hipotético de seis cadenas de DNA.

$$\|O_{ij}\| = \begin{pmatrix} - & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & - & 4 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & - & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & - & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & - & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 2 & - \end{pmatrix}$$

Compare las cotas inferiores en la longitud de recorrido óptima utilizando tanto el modelo de asignación como la programación lineal. ¿Es óptima la solución obtenida con el modelo de asignación para el TSP?

- 11-11.** La agencia espacial estadounidense, NASA, utiliza satélites para formar imágenes de objetos celestes. La cantidad de combustible necesaria para reposicionar los satélites es una función de la secuencia en la cual se forman las imágenes de los objetos. La siguiente matriz $\|c_{ij}\|$ presenta las unidades de combustible utilizadas para realinear los satélites con los objetos.

$$\|c_{ij}\| = \begin{pmatrix} - & 1.5 & 2.6 & 3.1 & 4.4 & 3.8 \\ 1.9 & - & 4.7 & 5.3 & 3.9 & 2.7 \\ 2.9 & 4.3 & - & 3.5 & 5.4 & 6.2 \\ 3.4 & 5.1 & 3.6 & - & 2.2 & 1.9 \\ 4.4 & 3.4 & 5.9 & 2.4 & - & 2.6 \\ 3.1 & 2.7 & 6.5 & 1.1 & 2.9 & - \end{pmatrix}$$

Suponga que el costo por unidad de combustible es de \$12. Estime una cota inferior en el costo de formar las imágenes de los seis objetos.

- 11-12.** *Vehículo de guía automática.* Un VGA realiza un viaje redondo (que empieza y termina en el cuarto de correo) para entregar correspondencia a 5 departamentos de una fábrica. Utilizando el cuarto de correo como el origen $(0, 0)$, las ubicaciones (x, y) de los puntos de entrega son $(10, 30)$, $(10, 50)$, $(30, 10)$, $(40, 40)$ y $(50, 60)$ para los cinco departamentos. Todas las distancias están en metros. El VGA se mueve sólo a lo largo de pasillos horizontales y verticales. El objetivo es minimizar la longitud del viaje redondo.
- (a) Defina las ciudades y la matriz de distancias del modelo del TSP.
 - (b) Suponiendo que el vehículo se mueve a una velocidad de 35 metros por minuto, ¿puede hacerse el viaje redondo en menos de 5 minutos?

- 11-13.** *Corte de papel tapiz, Garfinkel (1977).* Usualmente, tapizar los muros de una habitación requiere cortar hojas de diferentes longitudes considerando las puertas y ventanas, y similares. Las hojas se cortan de un solo rollo, y sus puntos de inicio deben alinearse para que coincidan con el dibujo repetitivo del rollo. Por lo tanto, la cantidad de desperdicio depende de la secuencia en que se cortan las hojas. Con el objetivo de determinar el desperdicio, se puede considerar un solo dibujo como una unidad de longitud (independientemente de su medida real) y, luego, expresar la longitud de una hoja en función de esta unidad. Por ejemplo, una hoja de dibujos de 9.50 de longitud requiere diez dibujos consecutivos. Si la correspondencia de los dibujos en el muro requiere iniciar la hoja a un cuarto hacia abajo del primer dibujo, entonces la hoja (de 9.5 dibujos de longitud) debe terminar a tres cuartos hacia abajo del décimo dibujo. Por lo tanto, el desperdicio en una hoja puede presentarse en el primero y último dibujos únicamente, y su cantidad siempre es menor que la longitud de un dibujo completo.

Sea $0 \leq s_i \leq 1$ y $0 \leq e_i \leq 1$ como las ubicaciones de los cortes debajo del primero y el último dibujos. Luego, para la hoja i con dibujo de longitud L_i , se tiene

$$e_i = (s_i + L_i) \bmod(1)$$

Para el ejemplo que se acaba de citar, $s = .25$ y $e = (.25 + 9.5) \bmod(1) = .75$.

El desperdicio entre dos hojas secuenciales, i y j , donde la hoja j sucede de inmediato a la hoja i , puede calcularse como sigue: Si $s_j \geq e_i$, el desperdicio es $s_j - e_i$. Por el contrario, si $s_j < e_i$, entonces se traslanan el corte final de i y el corte de inicio de j . El resultado es que el corte de inicio s_j de la hoja j debe hacerse en el dibujo que sigue inmediatamente del dibujo donde se hizo del corte final e_i de la hoja i . En este caso, el desperdicio resultante es $1 - e_i + s_j$.

En realidad, las dos cantidades de desperdicio ($s_j - e_i$ y $1 - e_i + s_j$) se expresan como

$$w_{ij} = (s_j - e_i) \bmod(1)$$

Por ejemplo, dados $e_1 = .8$ y $s_2 = .35$, se utiliza la fórmula para $s_2 < e_1$ con la finalidad de obtener $w_{12} = 1 - .8 + .35 = .55$. Se obtiene el mismo resultado al utilizar $w_{12} = (.35 - .8) \bmod(1) = (-.45) \bmod(1) = (-1 + .55) \bmod(1) = .55$.

Para tener en cuenta el desperdicio resultante del corte en el primer dibujo de la primera hoja (nodo 1) y el último dibujo de la última hoja (nodo n), se agrega una hoja ficticia (nodo $n + 1$) con su $s_{n+1} = e_{n+1} = 0$. La longitud de un recorrido que pasa por todos los $n + 1$ nodos proporciona el desperdicio total que resulta de una secuencia específica. Ahora el problema puede modelarse como modelo del TSP de $(n + 1)$ nodos con distancia w_{ij} .

- (a)** Calcule la matriz w_{ij} con el siguiente conjunto de datos sin procesar (por conveniencia, la hoja de cálculo *excelWallPaper.xls* realiza los cálculos de w_{ij} de manera automática):

Hoja, i	Corte de inicio en el dibujo, s_i	Longitud de la hoja, L_i
1	0	10.47
2	.342	3.82
3	.825	5.93
4	.585	8.14
5	.126	1.91
6	.435	6.32

- (b)** Demuestre que la solución óptima de la asignación asociada produce el recorrido óptimo.

- (c)** Cuantifique el desperdicio total como un porcentaje de la longitud de todas las hojas.

- 11-14. Recolección de pedidos en un almacén**, Ratliff y Rosenthal (1983). En un almacén rectangular se utiliza una grúa elevada para recolectar y entregar pedidos entre lugares específicos en el almacén. Las tareas de la grúa implican lo siguiente: (1) recolectar una carga en un lugar; (2) entregarla en otro lugar, y (3) moverse descargada para llegar a un lugar de recolección. Suponga que hay n pedidos que se deben recolectar y entregar. El objetivo sería completar todos los pedidos al mismo tiempo que se minimiza el tiempo no productivo de la grúa [elemento (3)]. Los tiempos no productivos pueden calcularse con base en los lugares de recolección y entrega de los pedidos, y las velocidades lateral y transversal de la

grúa, entre otros factores. Para el propósito de esta situación, la grúa inicia con los pedidos desde un estado inactivo y también termina en un estado inactivo después de completar todos los pedidos.

Para un grupo específico de ocho pedidos, los tiempos (en minutos) para llegar a los lugares de los pedidos 1, 2, ..., y 8 desde un estado inactivo son .1, .4, 1.1, 2.3, 1.4, 2.1, 1.9 y 1.3, respectivamente. La siguiente tabla proporciona los tiempos no productivos (en minutos) asociados con la secuenciación de los pedidos.

$$\|t_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 1.0 & 1.2 & .5 & 1.7 & .9 & 1.3 & .7 \\ 1.1 & 0 & .9 & 2.0 & .8 & 1.1 & .3 & .5 \\ 1.2 & 1.9 & 0 & 1.4 & .4 & 1.0 & 1. & 1.6 \\ 1.5 & 2.3 & .4 & 0 & 2.0 & 1.5 & 2.8 & 1. \\ 1.2 & 1.8 & 1.4 & 2.5 & 0 & 2.1 & .4 & .9 \\ .9 & 1.1 & 1.0 & .5 & 2.1 & 0 & .2 & .3 \\ 1.3 & .8 & 1.1 & 2.2 & 1.4 & .6 & 0 & 1.2 \\ 1.7 & 1.5 & 1.6 & 1.0 & 1.9 & .9 & 2.0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Defina las ciudades y la matriz de distancias para el modelo del TSP.
- (b) Determine una cota inferior en el tiempo no productivo durante la finalización de todos los pedidos.

- 11-15.** Resuelva el ejemplo 11.3-1 con un subrecorrido 2-5-4-2 para iniciar el proceso de ramificación en el nodo 1, utilizando las siguientes secuencias para explorar los nodos.
- (a) Explore todos los subproblemas horizontalmente de izquierda a derecha en cada hilera, antes de proseguir con la siguiente.
 - (b) Siga cada ruta verticalmente a partir del nodo 1, seleccionando siempre la rama más a la izquierda, hasta que la ruta termine en un nodo sondeado a fondo.

- 11-16.** Resuelva el problema 11-2, por el algoritmo B&B.

- ***11-17.** Resuelva el problema 11-7, por el algoritmo B&B.

- 11-18.** Resuelva el problema 11-9, por el algoritmo B&B.

- 11-19.** *Experimento con AMPL.* Use los archivos de AMPL *AMPLAssign.txt* y *solutionsAssign.txt* para resolver el problema 11-6, por el algoritmo B&B.

- 11-20.** Escriba a continuación los cortes asociados con el siguiente modelo del TSP:

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 43 & 21 & 20 & 10 \\ 12 & \infty & 9 & 22 & 30 \\ 20 & 10 & \infty & 5 & 13 \\ 14 & 30 & 42 & \infty & 20 \\ 44 & 7 & 9 & 10 & \infty \end{pmatrix}$$

- 11-21.** *Experimento con AMPL.* Use AMPL para resolver el siguiente problema del TSP por el algoritmo de plano cortante.
- (a) Problema 11-3.
 - (b) Problema 11-4.
 - (c) Problema 11-12.

- 11-22.** *Experimento con AMPL.* En el modelo de tarjeta de circuito del problema 11-9, los datos de entrada se suelen dar en función de las coordenadas (x, y) de los orificios, en vez de la distancia entre los respectivos orificios. Específicamente, considere las siguientes coordenadas (x, y) para una tarjeta de 9 orificios:

Orificio	(x, y) en mm
1	(1, 2)
2	(4, 2)
3	(3, 7)
4	(5, 3)
5	(8, 4)
6	(7, 5)
7	(3, 4)
8	(6, 1)
9	(5, 6)

El taladro siempre recorre la distancia más corta entre dos orificios sucesivos.

- (a) Modifique el archivo de datos para determinar el recorrido de perforación óptimo utilizando las coordenadas (x, y) .
 - (b) Determine la tasa de producción en tarjetas por hora, dado que la velocidad de desplazamiento del taladro es de 5 mm/s y el tiempo de perforación por orificio es de .5 s. Use los archivos *amplCut.txt* y *solutionCut.txt*.
- 11-23.** En la tabla 11.5 del ejemplo 11.4-2, especifique los segmentos eliminados y agregados con cada una de las inversiones de dos en dos.
- 11-24.** En la tabla 11.5 del ejemplo 11.4-2, use el recorrido desconectado de longitud infinita 3-2-5-4-1-3 (es decir, un recorrido al que le falta al menos un segmento) como recorrido de inicio, para demostrar que la heurística de inversión de subrecorrido puede seguir conduciendo a una solución que es tan buena como cuando la heurística se inicia con un recorrido conectado.
- 11-25.** Aplique la heurística de inversión a los siguientes problemas iniciando con el mejor recorrido del vecino más cercano:
- (a) El problema de secuenciación de las pinturas del ejemplo 11.1-1.
 - (b) Problema 11-2.
 - (c) Problema 11-5.
 - (d) Problema 11-6.
- 11-26.** *Experimento con Excel-AMPL.* La siguiente matriz proporciona las distancias entre 10 ciudades (todas las entradas faltantes en la diagonal $= \infty$) (por conveniencia, el archivo *Prob11-26.txt* da la matriz de distancias en formato AMPL).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		100	2	11	80	5	39	95		28
2	17		42	33	21	59	46		79	29
3		63		57	92		55		68	52
4	36	27		25		40	49	48	63	16
5	51	11	46		60		22	11	13	54
6		20	46	15		93		76	47	21
7	17		45	88	28	26		33	30	49
8	35	49		87	76		55	64		93
9	35	48	100		3	55		41		73
10		50	70	43	82	43	23	49	89	

Use el archivo *excelReversalTSP.xls* para implementar las siguientes situaciones:

- (a) Use la heurística del vecino más cercano para determinar el recorrido asociado que se inicia en el nodo 1.
- (b) Determine el recorrido por medio de la heurística de inversión iniciando con el recorrido 5-3-2-6-7-8-10-9-1-4-5.
- (c) Determine el recorrido utilizando la heurística de inversión iniciando con el mejor recorrido del vecino más cercano.

Compare la calidad de las soluciones en los incisos (a), (b) y (c) con la solución exacta óptima obtenida por AMPL.

11-27. Realice tres iteraciones más del ejemplo 11.5-1.

11-28. Aplique el algoritmo tabú a los siguientes problemas iniciando con el mejor recorrido del vecino más cercano:

- (a) El problema de secuenciación de las pinturas del ejemplo 11.1-1.
- (b) Problema 11-2.
- (c) Problema 11-5.
- (d) Problema 11-6.

11-29. *Experimento con Excel y AMPL.* La siguiente matriz indica las distancias entre 10 ciudades (todas las entradas faltantes en la diagonal = 8) por conveniencia, el archivo *prob11-29.txt* proporciona los datos de las distancias en un formato AMPL).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		100	2	11	80	5	39	95		28
2	17		42	33	21	59	46		79	29
3		63		57	92		55		68	52
4	36	27	25		40	49	48	63	16	
5	51	11	46	60		22	11	13	54	55
6		20	46	15	93		76	47	21	10
7	17		45	88	28	26		33	30	49
8	35	49	87	76		55	64			93
9	35	48	100	3	55		41			73
10		50	70	43	82	43	23	49	89	

Utilice el archivo *ExcelTabuTSP.xls* iniciando con lo siguiente:

- (a) Un recorrido aleatorio.
- (b) El recorrido 4-5-3-2-6-7-8-10-9-1-4.
- (c) El mejor recorrido del vecino más cercano.

Compare la calidad de las soluciones en los incisos (a), (b) y (c) con la solución óptima exacta obtenida por AMPL, utilizando el archivo *AMPLCut.txt*.

11-30. Realice tres iteraciones más del ejemplo 11.5-2.

11-31. Aplique el recocido simulado a los siguientes problemas iniciando con el mejor recorrido del vecino más cercano:

- (a) El problema de secuenciación de pinturas del ejemplo 11.1-1.
- (b) Problema 11-2.
- (c) Problema 11-5.
- (d) Problema 11-6.

11-32. *Experimento con Excel y AMPL.* La siguiente matriz proporciona las distancias entre 10 ciudades (todas las entradas faltantes en la diagonal = ∞) (por conveniencia, el archivo *prob11-32.txt* presenta las distancias en formato AMPL).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		100	2	11	80	5	39	95		28
2	17		42	33	21	59	46		79	29
3		63		57	92		55		68	52
4	36	27	25		40	49	48	63	16	
5	51	11	46	60		22	11	13	54	55
6		20	46	15	93		76	47	21	10
7	17		45	88	28	26		33	30	49
8	35	49	87	76		55	64			93
9	35	48	100	3	55		41			73
10		50	70	43	82	43	23	49	89	

Use el archivo *excelSimulatedAnnealingTSP.xls* iniciando con lo siguiente:

- (a) Un recorrido aleatorio.
- (b) El recorrido 4-5-3-2-6-7-8-10-9-1-4.
- (c) El mejor recorrido del vecino más cercano.

Compare la calidad de la solución en los incisos (a), (b) y (c) con la solución óptima exacta obtenida por AMPL.

11-33. Realice las iteraciones 3 y 4 en el ejemplo 11.5-3.

11-34. Aplique la metaheurística genética a los siguientes problemas iniciando con el mejor recorrido del vecino más cercano.

- (a) El problema de secuenciación de pinturas del ejemplo 11.1-1.
- (b) Problema 11-2.
- (c) Problema 11-5.
- (d) Problema 11-6.

11-35. *Experimento con Excel y AMPL.* La siguiente matriz proporciona las distancias entre 10 ciudades (todas las entradas faltantes en la diagonal = ∞) (por conveniencia, el archivo *prob11-35.txt* da las distancias en formato AMPL).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		100	2	11	80	5	39	95		28
2	17		42	33	21	59	46		79	29
3		63		57	92		55		68	52
4	36	27	25		40	49	48	63	16	
5	51	11	46	60		22	11	13	54	55
6		20	46	15	93		76	47	21	10
7	17		45	88	28	26		33	30	49
8	35	49	87	76		55	64			93
9	35	48	100	3	55		41			73
10		50	70	43	82	43	23	49	89	

Utilice el archivo *excelGeneticTSP.xls* comenzando con lo siguiente:

- (a) Un recorrido aleatorio.
- (b) El recorrido 4-5-3-2-6-7-8-10-9-1-4-5.
- (c) El mejor recorrido del vecino más cercano.

Compare la calidad de las soluciones en los incisos (a), (b) y (c) con la solución óptima exacta obtenida por AMPL.

CAPÍTULO 12

Programación dinámica determinística

Aplicación de la vida real: Optimización del corte de árboles y asignación de troncos en Weyerhaeuser

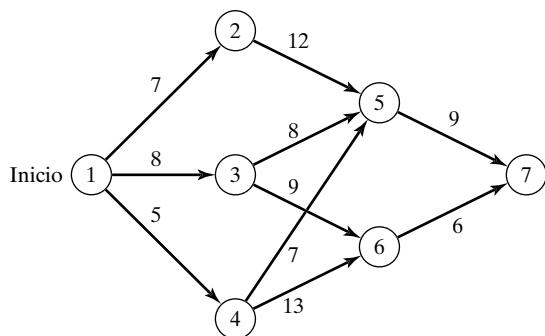
Los árboles maduros se talan y cortan en troncos para fabricar diferentes productos finales (madera para construcción, madera contrachapada, tablones o papel). Las especificaciones de los troncos (por ejemplo, longitud y diámetro finales) difieren según el aserradero donde aquéllos se procesan. Con árboles talados de hasta 100 pies de altura, la cantidad de combinaciones de cortes que satisfacen los requerimientos del aserradero puede ser grande, y la forma de cortar el árbol en troncos suele afectar los ingresos. El objetivo es determinar las combinaciones de cortes que maximicen el ingreso total. El estudio utiliza programación dinámica para optimizar el proceso. El sistema propuesto se implementó por primera vez en 1978 con un incremento anual en la utilidad de al menos \$7 millones (los detalles del caso se presentan al final del capítulo).

12.1 NATURALEZA RECURSIVA DE LOS CÁLCULOS DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA (PD)

La idea principal de la PD consiste en descomponer el problema en subproblemas (más sencillos). Los cálculos se realizan entonces recursivamente, donde la solución óptima de un subproblema se utiliza como dato de entrada para el siguiente problema. La solución óptima para todo el problema está disponible cuando se soluciona el último subproblema. La forma como se realizan los cálculos recursivos depende de la manera en que se descomponga el problema original. En particular, normalmente los subproblemas están vinculados por restricciones comunes. La factibilidad de esas restricciones comunes se mantiene en todas las iteraciones.

Ejemplo 12.1-1 (Problema de la ruta más corta)

Suponga que se desea seleccionar la ruta por carretera más corta entre dos ciudades. La red de la figura 12.1 ofrece las posibles rutas entre la ciudad de inicio en el nodo 1 y la ciudad destino en el nodo 7. Las rutas pasan por ciudades intermedias designadas por los nodos 2 a 6.



Este problema se resuelve mediante la enumeración de todas las rutas entre los nodos 1 y 7 (hay cinco rutas). Sin embargo, la enumeración exhaustiva es computacionalmente insoluble en redes grandes.

Para resolver el problema mediante PD, primero descompóngalo en **etapas** como indican las líneas discontinuas verticales de la figura 12.2. En seguida, realice por separado los cálculos en cada etapa.

La idea general para determinar la ruta más corta es calcular las distancias (acumulativas) más cortas a todos los nodos terminales de una etapa, y luego utilizarlas como datos de entrada para la etapa inmediatamente subsiguiente. Partiendo del nodo 1, la etapa 1 llega a tres nodos terminales (2, 3 y 4) y sus cálculos son fáciles.

Resumen de la etapa 1.

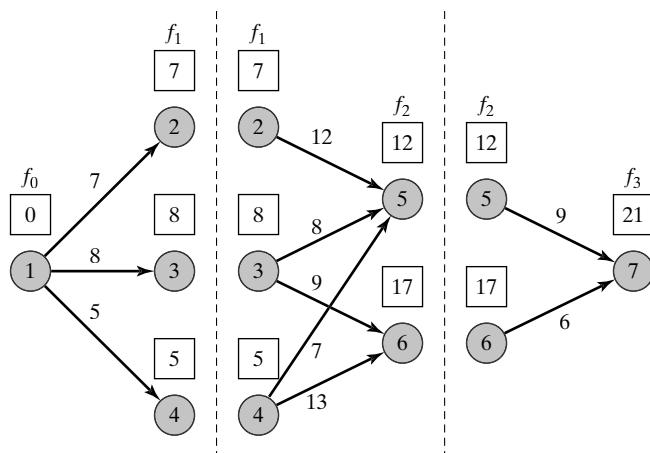
Distancia más corta del nodo 1 al nodo 2 = 7 millas (*desde el nodo 1*)

Distancia más corta del nodo 1 al nodo 3 = 8 millas (*desde el nodo 1*)

Distancia más corta del nodo 1 al nodo 4 = 5 millas (*desde el nodo 1*)

FIGURA 12.2

Descomposición del problema de la ruta más corta en etapas



Entonces, la etapa 2 tiene dos nodos terminales, 5 y 6. La figura 12.2 muestra que se puede llegar al nodo 5 desde los nodos 2, 3 y 4 por las rutas (2, 5), (3, 5) y (4, 5). Esta información, junto con los resultados resumidos (distancias más cortas) en la etapa 1, determina la distancia (acumulada) más corta hasta el nodo 5 como

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{Distancia más} \\ \text{corta al nodo 5} \end{array} \right) &= \min_{i=2,3,4} \left\{ \left(\begin{array}{l} \text{Distancia más} \\ \text{corta al nodo } i \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Distancia del} \\ \text{nodo } i \text{ al nodo 5} \end{array} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ \begin{array}{l} 7 + 12 = 19 \\ 8 + 8 = 16 \\ 5 + 7 = 12 \end{array} \right\} = 12 \text{ (desde el nodo 4)} \end{aligned}$$

Se puede llegar al nodo 6 sólo desde los nodos 3 y 4. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{Distancia más} \\ \text{corta al nodo 6} \end{array} \right) &= \min_{i=3,4} \left\{ \left(\begin{array}{l} \text{Distancia más} \\ \text{corta al nodo } i \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Distancia del} \\ \text{nodo } i \text{ al nodo 6} \end{array} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ \begin{array}{l} 8 + 9 = 17 \\ 5 + 13 = 18 \end{array} \right\} = 17 \text{ (desde el nodo 3)} \end{aligned}$$

Resumen de la etapa 2.

Distancia más corta del nodo 1 al nodo 5 = 12 millas (*desde el nodo 4*)

Distancia más corta del nodo 1 al nodo 6 = 17 millas (*desde el nodo 3*)

El último paso es considerar la etapa 3. Se puede llegar al nodo destino 7 desde el nodo 5 o desde el nodo 6. Mediante el uso de los resultados resumidos *de la etapa 2* y las distancias de los nodos 5 y 6 al nodo 7, se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{Distancia más} \\ \text{corta al nodo 7} \end{array} \right) &= \min_{i=5,6} \left\{ \left(\begin{array}{l} \text{Distancia más} \\ \text{corta al nodo } i \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Distancia del} \\ \text{nodo } i \text{ al nodo 7} \end{array} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ \begin{array}{l} 12 + 9 = 21 \\ 17 + 6 = 23 \end{array} \right\} = 21 \text{ (desde el nodo 5)} \end{aligned}$$

Resumen de la etapa 3.

Distancia más corta del nodo 1 al nodo 7 = 21 millas (*desde el nodo 5*)

El resumen de la etapa 3 muestra que la distancia más corta entre los nodos 1 y 7 es de 21 millas. Para determinar la ruta óptima, se inicia con el resumen de la etapa 3, donde el nodo 7 se conecta al nodo 5; en el resumen de la etapa 2 el nodo 4 se conecta al nodo 5; y en el resumen de la etapa 1 el nodo 4 se conecta al nodo 1. Por lo tanto, la ruta más corta es 1 → 4 → 5 → 7.

El ejemplo revela las propiedades básicas de los cálculos de la PD.

1. Los cálculos en cada etapa son una función de las rutas factibles de dicha etapa, y sólo de esa etapa.
2. Una etapa actual está conectada sólo a la etapa *inmediatamente precedente* (sin tomar en cuenta las etapas anteriores) con base en el resumen de distancias más cortas de la etapa *inmediatamente precedente*.

Ecuación recursiva. En esta sección se muestra cómo se expresan matemáticamente los cálculos recursivos del ejemplo 12.1-1. Sea $f_i(x_i)$ la distancia más corta al nodo x_i en la etapa i , y defina $d(x_{i-1}, x_i)$ como la distancia del nodo x_{i-1} al nodo x_i . La ecuación recursiva de PD se define como

$$f_0(x_0 = 1) = 0$$

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{todas las rutas} \\ \text{factibles } (x_{i-1}, x_i)}} \{d(x_{i-1}, x_i) + f_{i-1}(x_{i-1})\}, i = 1, 2, 3$$

Todas las distancias se miden desde 0 al establecer $f_0(x_0 = 1) = 0$. La ecuación recursiva principal expresa la distancia más corta $f_i(x_i)$ en la etapa i como una función del siguiente nodo, x_i . En terminología de la PD, x_i se refiere como el **estado** en la etapa i . El *estado* conecta las *etapas* sucesivas de una manera que permite tomar decisiones factibles óptimas en una etapa futura, independientemente de las decisiones que se hayan tomado en todas las etapas precedentes.

La definición del *estado* conduce al siguiente marco de referencia unificador para la PD.

Principio de optimalidad. Las decisiones futuras para todas las etapas *futuras* constituyen una política óptima, independientemente de la política adoptada en todas las etapas *precedentes*.

La implementación del principio de optimalidad es evidente en los cálculos del ejemplo 12.1-1. En la etapa 3, los cálculos recursivos en el nodo 7 utilizan la distancia más corta a los nodos 5 y 6 (es decir, los estados de la etapa 2) sin preocuparse por cómo se llega a los nodos 5 y 6 desde el nodo de inicio 1.

El principio de optimalidad no aborda los detalles de cómo se optimiza un subproblema. La razón es la naturaleza genérica del subproblema. Puede ser lineal o no lineal; y la cantidad de alternativas, finita o infinita. Todo lo que hace el principio de optimalidad es “descomponer” el problema original en subproblemas más sencillos computacionalmente.

Momento, ¡ajá! Solución al problema del matrimonio... ¡con programación dinámica!

El matemático alemán Johannes Kepler (1571-1630), posiblemente uno de los más grandes astrónomos, se enfrentó a un problema personal: buscaba una cónyuge compatible y una madrastra para sus hijos pequeños después de que su esposa muriera. Un casamentero lo presentó con 11 candidatas, y durante un lapso de dos años las entrevistó una a la vez. Rechazó algunas por falta de compatibilidad, pero no pudo tomar una decisión respecto de las restantes quienes, a su vez, retiraron su oferta cansadas de esperar. Después de una vacilación agónica, retomó a la quinta mujer que entrevistó y su unión resultó ser muy feliz.

El problema de Kepler, inicialmente llamado el **problema del matrimonio** y más tarde como el **problema** (de la selección) de la secretaria, generó un considerable interés a partir de 1960. La versión resuelta planteó restricciones adicionales que no fueron consideradas por el mismo Kepler: Dado un grupo de n solicitantes que buscan ocupar una sola posición, las candidatas son entrevistadas una a la vez en orden aleatorio. Despues de cada entrevista, se toma una decisión irrevocable para aceptarla o rechazarla. La aceptación de una candidata termina el proceso; en caso contrario, si hay una siguiente candidata, ésta es entrevistada. Si se rechazó a las primeras $n - 1$ candidatas (o si $n = 1$), entonces debe aceptarse la candidata n .

Encontrar la mejor candidata del grupo se complica por la decisión irrevocable de aceptar/rechazar *inmediatamente* después de cada entrevista. A falta de entrevistar a todas las n candidatas (en cuyo caso se podría determinar la *mejor candidata absoluta*), una propuesta de estrategia de juego pide rechazar a las primeras $r - 1$

candidatas (r está aún por determinarse a partir de la solución) y luego continuar el proceso de entrevista, *detenéndose en la primera solicitante que sea mejor que todas las rechazadas*. Esta estrategia utiliza las experiencias de entrevistas anteriores con la esperanza de encontrar una mejor candidata futura (posiblemente la mejor), y es más eficiente porque evitaría entrevistar a todas las n candidatas. Una forma de optimizar el problema de decisión es determinar el punto de corte r que *maximiza* la probabilidad de que una futura solicitante i sea mejor que las primeras ($r - 1$) candidatas rechazadas.

El problema descrito (y sus variantes) se resolvió mediante programación dinámica.¹ Otros modelos de solución incluyen la teoría de probabilidad, la programación lineal y las cadenas de Markov.² Las soluciones muestran que la probabilidad deseada, definida como $P(r|n)$, es cóncava en r y que

$$P(r|n) \geq \max \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} P(r|n) \right\} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2.718} \approx .37, \text{ para toda } n > 1$$

Este resultado notablemente sencillo indica que para $r \approx 0.37n + 1$, hay *por lo menos* 37% de probabilidad de que una candidata futura $i \geq r$ sea mejor que las primeras $r - 1$ candidatas, sin importar cuán grande sea n .

La solución propuesta se efectuó en realidad en el caso de Kepler cuando se casó con la candidata número 5 (observe que $0.37 \times 11 = 4.07$). Sin embargo, es muy probable que el resultado sea mera coincidencia porque Kepler no siguió exactamente las reglas del problema propuesto. Sin mencionar que, según lo que se cuenta, Kepler trató de cortejar a la candidata número 4 pero no tuvo éxito. Sin embargo, ¡la conjeta es una historia que vale la pena contar!

12.2 RECURSIVIDAD DE AVANCE Y DE RETROCESO

El ejemplo 12.1-1 utiliza una **recursividad de avance** donde los cálculos proceden de la etapa 1 a la etapa 3. El mismo ejemplo puede resolverse mediante una **recursividad de retroceso**, comenzando en la etapa 3 y terminando en la etapa 1.

Naturalmente, la recursividad tanto de avance como de retroceso dan la misma solución óptima. Aun cuando el procedimiento de avance parece más lógico, la mayor parte de la literatura de PD utiliza la recursividad de retroceso. La razón de la preferencia es que, por lo general, la recursividad de retroceso suele ser más eficiente desde el punto de vista computacional.

Se demostrará el uso de la recursividad de retroceso aplicándola al ejemplo 12.1-1. La demostración también brindará la oportunidad de presentar los cálculos de PD en una forma tabular compacta.

Ejemplo 12.2-1

La ecuación recursiva de retroceso para el ejemplo 12.2-1 es

$$f_4(x_4 = 7) = 0$$

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{todas las rutas} \\ \text{factibles } (x_{i-1}, x_i)}} \{d(x_{i-1}, x_i) + f_{i-1}(x_{i-1})\}, i = 1, 2, 3$$

El orden de los cálculos es $f_3 \rightarrow f_2 \rightarrow f_1$.

¹ Beckmann, M., "Dynamic Programming and the Secretary Problem," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 19, núm. 11, pp. 25-28, 1990.

² Thomas S. Ferguson, "Who Solved the Secretary Problem?", *Statistical Science*, vol. 4, núm. 3, pp. 282-289, 1989. Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/2245639> consultado el 29-07-2015, 9:10 P.M.

Etapa 3. El nodo 7 ($x_4 = 7$) está conectado a los nodos 5 y 6 ($x_3 = 5$ y 6) exactamente con una ruta cada uno. La siguiente tabla resume los cálculos de la etapa 3:

x_3	$x_4 = 7$	d(x_3, x_4)		Solución óptima	
		$f_3(x_3)$	x_4^*	$f_3(x_3)$	x_4^*
5	9	9	7		
6	6	6	7		

Etapa 2. La ruta (2, 6) no existe. Dada $f_3(x_3)$ a partir de la etapa 3, es posible comparar las alternativas factibles como se muestra en la siguiente tabla:

x_2	d(x_2, x_3) + $f_3(x_3)$		Solución óptima	
	$x_3 = 5$	$x_3 = 6$	$f_2(x_2)$	x_3^*
2	12 + 9 = 21	—	21	5
3	8 + 9 = 17	9 + 6 = 15	15	6
4	7 + 9 = 16	13 + 6 = 19	16	5

La solución óptima de la etapa 2 se lee de la manera siguiente: Para las ciudades 2 y 4, la ruta más corta pasa por la ciudad 5; y para la ciudad 3, la ruta más corta pasa por la ciudad 6.

Etapa 1. A partir del nodo 1, se tienen tres rutas alternativas: (1, 2), (1, 3) y (1, 4). Si se utiliza $f_2(x_2)$ a partir de la etapa 2, se obtiene

x_1	d(x_1, x_2) + $f_2(x_2)$			Solución óptima	
	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$f_1(x_1)$	x_2^*
1	7 + 21 = 28	8 + 15 = 23	5 + 16 = 21	21	4

La solución de la etapa 1 conecta la ciudad 1 a la ciudad 4. Después, la solución de la etapa 2 conecta la ciudad 4 a la ciudad 5. Por último, la solución de la etapa 3 conecta la ciudad 5 a la ciudad 7. La ruta óptima es 1 → 4 → 5 → 7, y la distancia asociada es de 21 millas.

12.3 APPLICACIONES DE PD SELECCIONADAS

En esta sección se presentan cuatro aplicaciones, cada una con una nueva idea en la implementación de la PD. Todos los ejemplos utilizan la ecuación recursiva *de retroceso* debido a su prevalencia en la literatura.

Conforme estudie cada aplicación, preste atención especial a los tres elementos básicos del modelo de PD:

1. Definición de las *etapas*
2. Definición de las *alternativas* en cada etapa
3. Definición de los *estados* para cada etapa

De los tres elementos, la definición del *estado* suele ser la más sutil. Las aplicaciones que se presentan aquí muestran que la definición del estado varía según la situación que se debe modelar. No obstante, a medida que investigue cada aplicación, encontrará que es útil considerar las siguientes preguntas:

1. ¿Qué relaciones vinculan a las etapas entre sí?
2. ¿Qué información se requiere para tomar decisiones factibles en la etapa actual independientemente de cómo se hayan tomado las decisiones en las etapas precedentes?

Usted puede mejorar su comprensión del concepto de *estado*, si cuestiona la validez de la forma como se definió aquí. Pruebe otra definición que le parezca “más lógica” y utilícela en los cálculos recursivos. Pronto descubrirá que las definiciones presentadas aquí son correctas. Entre tanto, el proceso mental asociado le permitirá entender mejor el papel de los *estados* en el desarrollo de la ecuación recursiva de PD.

12.3.1 Modelo de la mochila/equipo de vuelo/carga de contenedor

En un sentido clásico, el modelo de la mochila trata con el hecho de determinar los artículos más valiosos que un combatiente carga en una mochila. El problema representa un modelo general de asignación de recursos, en el cual varias actividades económicas utilizan recursos limitados. El objetivo consiste en maximizar el rendimiento total.³

Se desarrolla la ecuación recursiva (de retroceso) para el problema general de asignar n artículos a una mochila con capacidad de cargar un peso W . Sea m_i la cantidad de unidades del artículo i en la mochila, y defina r_i y w_i como el ingreso unitario y el peso del artículo i . El problema general se representa como

$$\text{Maximizar } z = r_1m_1 + r_2m_2 + \dots + r_nm_n$$

sujeto a

$$w_1m_1 + w_2m_2 + \dots + w_nm_n \leq W$$

m_1, m_2, \dots, m_n son enteros no negativos

Los tres elementos del modelo son

1. La *etapa i* está representada por el artículo i , $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Las *alternativas* en la etapa i son la cantidad de unidades del artículo i , $m_i = 0, 1, \dots, [\frac{W}{w_i}]$, donde $[\frac{W}{w_i}]$ es el mayor entero que es menor o igual a $\frac{W}{w_i}$. Esta definición permite que la solución distribuya algunos, ninguno o todos los recursos W a cualquiera de los m artículos. El rendimiento para m_i es $r_i m_i$.

³ El problema de la mochila también se conoce en la literatura como el problema del equipo de vuelo (determinación de los artículos más valiosos que un piloto de aviación lleva a bordo) y el problema de carga de un contenedor (determinación de los artículos más valiosos que se cargarán en un buque de la armada). Parece que los tres nombres fueron acuñados para garantizar una representación igualitaria de las tres ramas de las fuerzas armadas: ejército, fuerza aérea y marina!

- 3.** El *estado* en la etapa i está representado por x_i , el peso total asignado a las etapas (artículos) i , $i+1, \dots$, y n . Esta definición reconoce que el límite de peso es la única restricción que vincula todas las n etapas.⁴

Defina

$$f_i(x_i) = \text{rendimiento máximo para las etapas } i, i+1 \text{ y } n, \text{ que dan el estado } x_i$$

La manera más conveniente de construir la ecuación recursiva es un procedimiento de dos pasos:

Paso 1. Exprese $f_i(x_i)$ en función de $f_i(x_{i+1})$ como sigue:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_{n+1}) &\equiv 0 \\ f_i(x_i) &= \min_{\substack{m_i=0, 1, \dots, \lfloor \frac{W}{w_i} \rfloor \\ x_i \leq W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Paso 2. Exprese x_{i+1} como una función de x_i para asegurar la consistencia con el lado izquierdo de la ecuación recursiva. Por definición, $x_i - x_{i+1} = w_i m_i$ representa el peso utilizado en la etapa i . Por consiguiente, $x_{i+1} = x_i - w_i m_i$, y la ecuación recursiva apropiada se da como

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i=0, 1, \dots, \lfloor \frac{W}{w_i} \rfloor \\ x_i \leq W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ejemplo 12.3-1

Un barco de 4 toneladas puede cargarse con uno o más de tres artículos. La siguiente tabla presenta el peso unitario, w_i , en toneladas y el ingreso unitario, r_i , en miles de dólares para el artículo i . El objetivo es determinar la cantidad de unidades de cada artículo que maximizará el rendimiento total.

Artículo i	w_i	r_i
1	2	31
2	3	47
3	1	14

Como el peso unitario w_i y el peso máximo W son enteros, el estado x_i supone únicamente valores enteros.

Etapa 3. El peso exacto a ser asignado a la etapa 3 (artículo 3) no se conoce con anticipación, pero puede suponer uno de los valores $0, 1, \dots$, y 4 (porque $W = 4$ toneladas y $w_3 = 1$ tonelada). Un valor de m_3 es factible sólo si $w_3 m_3 \leq x_3$. Por lo tanto, se excluyen todos los valores no factibles (con $w_3 m_3 > x_3$). El ingreso para el artículo 3 es $14m_3$. En consecuencia, la ecuación recursiva para la etapa 3 es

$$f_3(x_3) = \min_{m_3=0, 1, \dots, 4} \{14m_3\}$$

⁴ La definición del estado puede ser multidimensional. Por ejemplo, el volumen de la mochila quizás imponga otra restricción. En general, un estado multidimensional implica cálculos de etapa más complejos. Vea la sección 12.4.

La siguiente tabla resume los cálculos para la etapa 3.

x_3	14m ₃					Solución óptima	
	$m_3 = 0$	$m_3 = 1$	$m_3 = 2$	$m_3 = 3$	$m_3 = 4$	$f_3(x_3)$	m_3^*
0	0	—	—	—	—	0	0
1	0	14	—	—	—	14	1
2	0	14	28	—	—	28	2
3	0	14	28	42	—	42	3
4	0	14	28	42	56	56	4

Etapa 2. $\max \{m_2\} = \left[\frac{4}{3} \right] = 1$ o $m_2 = 0, 1$ $f_2(x_2) = \max_{m=0,1} \{47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)\}$

x_2	47m ₂ + f ₃ (x ₂ - 3m ₂)		Solución óptima	
	$m_2 = 0$	$m_2 = 1$	$f_2(x_2)$	m_2^*
0	0 + 0 = 0	—	0	0
1	0 + 14 = 14	—	14	0
2	0 + 28 = 28	—	28	0
3	0 + 42 = 42	47 + 0 = 47	47	1
4	0 + 56 = 56	47 + 14 = 61	61	1

Etapa 1. $\max \{m_1\} = \left[\frac{4}{2} \right] = 2$ o $m_1 = 0, 1, 2$ $f_1(x_1) = \max_{m_3=0,1,2} \{31m_2 + f_2(x_1 - 2m_1)\}$

x_1	31m ₁ + f ₂ (x ₁ - 2m ₁)			Solución óptima	
	$m_1 = 0$	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$	$f_1(x_1)$	m_1^*
0	0 + 0 = 0	—	—	0	0
1	0 + 14 = 14	—	—	14	0
2	0 + 28 = 28	31 + 0 = 31	—	31	1
3	0 + 47 = 47	31 + 14 = 45	—	47	0
4	0 + 61 = 61	31 + 28 = 59	62 + 0 = 62	62	2

La solución óptima se determina de la siguiente manera: Dado que $W = 4$ toneladas, a partir de la etapa 1, $x_1 = 4$ da la alternativa óptima $m_1^* = 2$; es decir, que en el barco se cargarán 2 unidades del artículo 1. Esta asignación deja $x_2 = x_1 - 2m_1^* = 4 - 2 \times 2 = 0$, para las etapas 2 y 3. A partir de la etapa 2, $x_2 = 0$ da como resultado $m_2^* = 0$, lo cual deja $x_3 = x_2 - 3m_2^* = 0 - 3 \times 0 = 0$ unidades para la etapa 3. Luego, a partir de la etapa 3, $x_3 = 0$ da $m_3^* = 0$. Por lo tanto, la solución óptima completa es $m_1^* = 2$, $m_2^* = 0$ y $m_3^* = 0$. El rendimiento asociado es $f_1(4) = \$62,000$.

En la tabla para la etapa 1, en realidad se debe calcular la fila sólo para $x_1 = 4$, ya que ésta es la última etapa que se considerará. Sin embargo, se incluyen los cálculos para $x_1 = 0, 1, 2$ y 3 con la finalidad de realizar el análisis de sensibilidad. Por ejemplo, ¿qué sucede si la capacidad del barco es de 3 toneladas en vez de 4? La nueva solución óptima se determina como

$$(x_1 = 3) \rightarrow (m_1^* = 0) \rightarrow (x_2 = 3) \rightarrow (m_2^* = 1) \rightarrow (x_3 = 0) \rightarrow (m_3^* = 0)$$

Por consiguiente, la solución óptima es (m_1^*, m_2^*, m_3^*) , y el ingreso óptimo es $f_1(3) = \$47,000$.

Momento de Excel

La naturaleza de los cálculos de PD hace imposible desarrollar un código de computadora general que pueda manejar todos los problemas de PD. Tal vez esto explique la persistente ausencia de software comercial de PD.

En esta sección se presenta un algoritmo basado en Excel para manejar una subclase de problemas de PD: El problema de la mochila de una sola restricción (archivo *excelKnapsack.xls*). El algoritmo no es específico de datos y puede manejar problemas en los cuales una alternativa puede suponer valores en el intervalo de 0 a 10.

En la figura 12.3 se muestra la pantalla de inicio del modelo de PD (de retroceso) de la mochila. La pantalla está dividida en dos secciones: La sección de la derecha (columnas Q:V) resume la solución de salida. En la sección de la izquierda (columnas A:P), los datos de entrada para la etapa actual aparecen en las filas 3, 4, y 6. Los cálculos de las etapas se iniciaron en la fila 7 (Las columnas H:N están ocultas para conservar espacio). Los símbolos de los datos de entrada son autoexplicativos. Para ajustar la hoja de cálculo de manera conveniente en una pantalla, el valor factible máximo de la alternativa m , en la etapa i es 10 (celdas D6:N6).

La figura 12.4 muestra los cálculos de etapa generados por el algoritmo para el ejemplo 12.3-1. Los cálculos se realizan etapa por etapa, y el usuario proporciona los datos básicos que controlan cada etapa.

Si se inicia con la etapa 3 y se usan la notación y los datos del ejemplo 12.3-1, las celdas de entrada se actualizan como se muestra en la lista siguiente:

Celda(s)	Datos
D3	Número de etapas, $N = 3$
G3	Límite de los recursos, $W = 4$
C4	Etapa actual = 3
E4	$w_3 = 1$
G4	$r_3 = 14$
D6:H6	$m_3 = (0, 1, 2, 3, 4)$

Observe que los valores factibles de m_3 son 0, 1, ..., y 4 ($= \left[\frac{W}{w_3} \right] = \left[\frac{4}{1} \right]$), como en el ejemplo 12.3-1. La hoja de cálculo valida de forma automática los valores que el usuario ingresa y emite mensajes autoexplicativos en la fila 5: "sí", "no" y "eliminar".

A medida que se ingresan y verifican los datos de la etapa 3, la hoja de cálculo “cobra vida” y genera automáticamente todos los cálculos necesarios de la etapa (columnas B a P). Se utiliza el valor -1111111 para indicar que el ingreso correspondiente no es factible. La solución óptima (f_3, m_3) para la etapa se da en las columnas O y P. La columna A presenta los valores de f_4 , los cuales son iguales a cero para todas las x_3 porque los cálculos se inician en la etapa 3 (incluso puede dejar las celdas A9:A13 en blanco o ingresar ceros).

FIGURA 12.3

Pantalla de inicio en Excel del modelo general de PD para el problema de la mochila (archivo *excelKnapsack.xls*)

Etapa 3:

	A	B	C	D	E	F	G	H	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Dynamic Programming (Backward) Knapsack Model															
2	Input Data and Stage Calculations													Ouput Solution Summary		
3	Number of stages,N=	3		Res. limit, W=	4											
4	Current stage=	3	w3=	1		r3=	14									
5	Are m3 values correct?	yes	yes	yes	yes	yes	yes									
6	m3=	0	1	2	3	4										
7	Stage4	r3*m3=	0	14	28	42	56									
8	f4	w3*m3=	0	1	2	3	4									
9	x3=	0	0	111111	111111	111111	111111	0	0							
10	x3=	1	0	14	111111	111111	111111	14	1							
11	x3=	2	0	14	28	111111	111111	28	2							
12	x3=	3	0	14	28	42	111111	42	3							
13	x3=	4	0	14	28	42	56	56	4							

Etapa 2:

	A	B	C	D	E	F	G	H	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Dynamic Programming (Backward) Knapsack Model															
2	Input Data and Stage Calculations													Ouput Solution Summary		
3	Number of stages,N=	3		Res. limit, W=	4											
4	Current stage=	2	w2=	3		r2=	47									
5	Are m2 values correct?	yes	yes	delete	delete	delete										
6	m2=	0	1	2	3	4										
7	Stage3	r2*m2=	0	47												
8	f3	w2*m2=	0	3												
9	0	x2=	0	0	111111				0	0						
10	14	x2=	1	14	111111				14	0						
11	28	x2=	2	28	111111				28	0						
12	42	x2=	3	42	47				47	1						
13	56	x2=	4	56	61				61	1						

Etapa 1:

	A	B	C	D	E	F	G	H	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Dynamic Programming (Backward) Knapsack Model															
2	Input Data and Stage Calculations													Ouput Solution Summary		
3	Number of stages,N=	3		Res. limit, W=	4											
4	Current stage=	1	w1=	2		r1=	31									
5	Are m1 values correct?	yes	yes	yes	delete	delete										
6	m1=	0	1	2	3	4										
7	Stage2	r1*m1=	0	31	62											
8	f2	w1*m1=	0	2	4											
9	0	x1=	0	0	111111	111111			0	0						
10	14	x1=	1	14	111111	111111			14	0						
11	28	x1=	2	28	31	111111			31	1						
12	47	x1=	3	47	45	111111			47	0						
13	61	x1=	4	61	59	62			62	2						
14																
15																

FIGURA 12.4

Modelo de PD en Excel para el problema de la mochila del ejemplo 12.3-1 (archivo excelKnapsack.xls)

Ahora que los cálculos de la etapa 3 están completos, realice los pasos siguientes para crear un registro permanente de la solución óptima de la etapa actual y preparar la hoja de cálculo de la siguiente etapa:

- Paso 1.** Copie los valores x_3 , C9:C13, y péguelos en Q5:Q9 en la sección de resumen de la solución óptima. Luego copie los valores (f_3, m_3) O9:P13, y péguelos en R5:S9. Recuerde que debe pegar sólo valores, lo que requiere seleccionar la opción *Pegado especial* del menú Edición y *Valores* en el cuadro de diálogo.

Paso 2. Copie los valores f_3 en R5:R9, y péguelos en A9:A13 (*no* necesita la opción *Pegado especial* en este paso).

Paso 3. Cambie la celda C4 a 2, e ingrese los nuevos valores de w_2, r_2 y m_2 para la etapa 2.

El paso 2 coloca $f_{i+1}(x_i - w_i m_i)$ en la columna A como preparación para calcular $f_i(x_i)$ en la etapa i (vea la fórmula recursiva para el problema de la mochila del ejemplo 12.3-1). Un procedimiento semejante se repite para la etapa 1. Cuando la etapa 1 está completa, el resumen de la solución puede usarse para leer la solución óptima, como se explicó en el ejemplo 12.3-1. Observe que la organización del área de resumen de la solución de salida (columnas Q:V) aparece sin formato, y que usted puede organizar su contenido como desee.

12.3.2 Modelo de tamaño de la fuerza laboral

Las necesidades de mano de obra en proyectos de construcción pueden satisfacerse contratando y despidiendo a trabajadores. Ambas actividades incurren en un costo. El objetivo es minimizar el costo total de la mano de obra requerida para el proyecto.

Suponga que la duración del proyecto es de n semanas y que la mano de obra mínima requerida en la semana i es de b_i trabajadores. El modelo supone que se incurre en un costo adicional, si la fuerza laboral de una semana excede el requerimiento mínimo o si en una semana se realiza una contratación adicional. Por sencillez, no se incurre en ningún costo cuando hay un despido.

El costo de mantener una fuerza laboral x_i mayor que la mínima b_i en la semana i incurre en costo excedente $C_1(x_i - b_i)$. Si $x_i > x_{i-1}$, ocurre la contratación a un costo adicional de $C_2(x_i - x_{i-1})$.

Los elementos del modelo de PD se definen como sigue:

1. La *etapa* i está representada por la semana $i, i = 1, 2, \dots, n$.
2. Las *alternativas* en la etapa i son x_i , la cantidad de trabajadores en la semana i .
3. El *estado* en la etapa i es x_{i-1} , la cantidad de trabajadores disponible en la semana $i-1$.

La ecuación recursiva de PD está dada como

$$f_{n+1}(x_n) \equiv 0$$

$$f_i(x_{i-1}) = \min_{x_i \geq b_i} \{C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\}, i = 1, 2, \dots, n$$

Los cálculos se inician en la etapa n y concluyen en la etapa 1.

Ejemplo 12.3-2

Un contratista estima que el tamaño de la fuerza laboral necesaria durante las siguientes 5 semanas es de 5, 7, 8, 4 y 6 trabajadores, respectivamente. La mano de obra excedente conservada en la fuerza laboral costará \$300 por trabajador por semana, y una nueva contratación en cualquier semana implica un costo fijo de \$400 más \$200 por trabajador por semana.

Los datos del problema son

$$b_1 = 5, b_2 = 7, b_3 = 8, b_4 = 4, b_5 = 6$$

$$C_1(x_i - b_i) = 3(x_i - b_i), x_i > b_i, i = 1, 2, \dots, 5$$

$$C_2(x_i - x_{i-1}) = 4 + 2(x_i - x_{i-1}), x_i > x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, 5$$

Las funciones de costo C_1 y C_2 están en cientos de dólares.

Etapa 5. ($b_5 = 6$)

x_4	$C_1(x_5 - 6) + C_2(x_5 - x_4)$	Solución óptima	
	$x_5 = 6$	$f_5(x_4)$	x_5^*
4	$3(0) + 4 + 2(2) = 8$	8	6
5	$3(0) + 4 + 2(1) = 6$	6	6
6	$3(0) + 0 = 0$	0	6

Etapa 4. ($b_4 = 4$)

x_3	$C_1(x_4 - 4) + C_2(x_4 - x_3) + f_5(x_4)$			Solución óptima	
	$x_4 = 4$	$x_4 = 5$	$x_4 = 6$	$f_4(x_3)$	x_4^*
8	$3(0) + 0 + 8 = 8$	$3(1) + 0 + 6 = 9$	$3(2) + 0 + 0 = 6$	6	6

Etapa 3. ($b_3 = 8$)

x_2	$C_1(x_3 - 8) + C_2(x_3 - x_2) + f_4(x_3)$		Solución óptima	
	$x_3 = 8$	$f_3(x_2)$	x_6^*	
7	$3(0) + 4 + 2(1) + 6 = 12$	12	8	
8	$3(0) + 0 + 6 = 6$	6	8	

Etapa 2. ($b_2 = 7$)

x_1	$C_1(x_2 - 7) + C_2(x_3 - x_2) + f_3(x_2)$		Solución óptima	
	$x_2 = 7$	$x_2 = 8$	$f_2(x_1)$	x_2^*
5	$3(0) + 4 + 2(2) + 12 = 20$	$3(1) + 4 + 2(3) + 6 = 19$	19	8
6	$3(0) + 4 + 2(1) + 12 = 18$	$3(1) + 4 + 2(2) + 6 = 17$	17	8
7	$3(0) + 0 + 12 = 12$	$3(1) + 4 + 2(1) + 6 = 15$	12	7
8	$3(0) + 0 + 12 = 12$	$3(1) + 0 + 6 = 9$	9	8

Etapa 1. ($b_1 = 5$)

x_0	$C_1(x_1 - 5) + C_2(x_1 - x_0) + f_2(x_1)$				Solución óptima	
	$x_1 = 5$	$x_1 = 6$	$x_1 = 7$	$x_1 = 8$	$f_1(x_0)$	x_1^*
0	$3(0) + 4 + 2(5) + 19 = 33$	$3(1) + 4 + 2(6) + 17 = 36$	$3(2) + 4 + 2(7) + 12 = 36$	$3(2) + 4 + 2(8) + 9 = 35$	33	5

La solución óptima se determina como

$$x_0 = 0 \rightarrow x_1^* = 5 \rightarrow x_2^* = 8 \rightarrow x_3^* = 8 \rightarrow x_4^* = 6 \rightarrow x_5^* = 6$$

La solución puede traducirse como el siguiente plan:

Semana i	Fuerza laboral mínima (b_i)	Fuerza laboral real (x_i)	Decisión	Costo
1	5	5	Contratar a 5 trabajadores	$4 + 2 \times 5 = 14$
2	7	8	Contratar a 3 trabajadores	$4 + 2 \times 3 + 1 \times 3 = 13$
3	8	8	Ningún cambio	0
4	4	6	Despedir a 2 trabajadores	$3 \times 2 = 6$
5	6	6	Ningún cambio	0

El costo total es $f_1(0) = \$3300$.

12.3.3 Modelo de reemplazo de equipo

Las máquinas que permanecen mucho tiempo en servicio incurren en un alto costo de mantenimiento y pueden reemplazarse después de cierta cantidad de años en operación. La situación trata de determinar la antigüedad más económica de una máquina.

Suponga que el problema del reemplazo de una máquina abarca n años. Al *inicio* de cada año, una máquina se mantiene en servicio un año más, o bien se reemplaza por una nueva. Sean $r(t)$, $c(t)$ y $s(t)$ el ingreso anual, el costo de operación y el valor de rescate, respectivamente, de una máquina de t años. El costo de adquisición de una máquina nueva en cualquier año es I .

Los elementos del modelo de PD son los siguientes:

1. La *etapa* i está representada por el año i , $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Las *alternativas* en la etapa (el año) i son conservar (K) o reemplazar (R) la máquina al *inicio* del año i .
3. El *estado* en la etapa i es la antigüedad de la máquina al *inicio* del año i .

Dado que la máquina tiene t años al *inicio* del año i , defina

$$f_i(t) = \text{ingreso neto máximo en los años } i, i+1, \dots, y n$$

La ecuación recursiva es

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \max \begin{cases} r(t) - c(t) + s(t+1), & \text{si SE CONSERVA} \\ r(0) + s(t) + s(1) - I - c(0), & \text{si SE REEMPLAZA} \end{cases} \\ f_i(t) &= \max \begin{cases} r(t) - c(t) + f_{i+1}(t+1), & \text{si SE CONSERVA} \\ r(0) + s(t) - I - c(0) + f_{i+1}(1), & \text{si SE REEMPLAZA} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Ejemplo 12.3-3

Una compañía necesita determinar la política de reemplazo para una máquina que a la fecha tiene 3 años de antigüedad, durante los siguientes 4 años ($n = 4$). Una máquina de 6 años de antigüedad debe reemplazarse. El costo de una máquina nueva es de \$100,000. En la siguiente tabla se proporcionan los datos del problema:

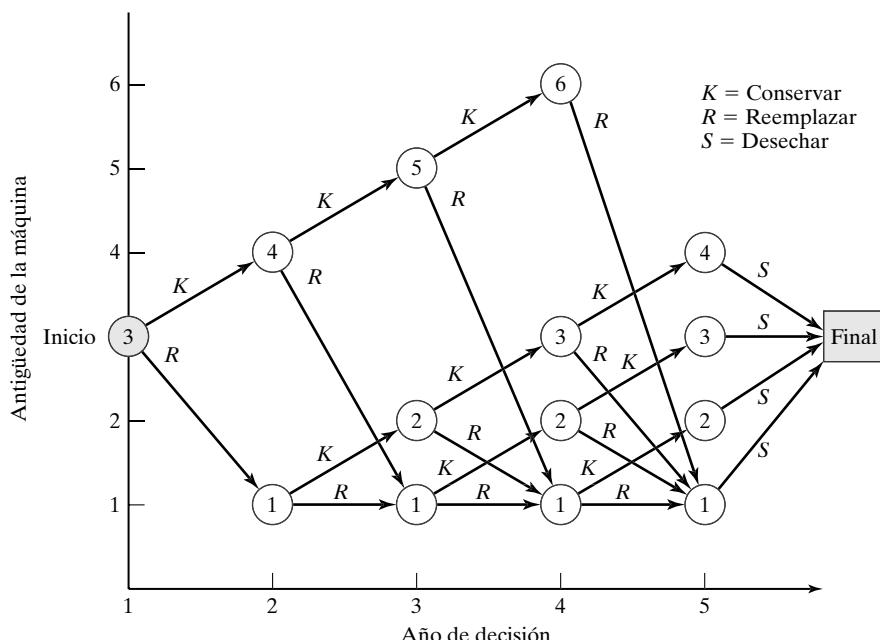
Antigüedad, t (años)	Ingreso, $r(t)$ (\$)	Costo de operación, $c(t)$ (\$)	Valor de rescate, $s(t)$ (\$)
0	20,000	200	—
1	19,000	600	80,000
2	18,500	1200	60,000
3	17,200	1500	50,000
4	15,500	1700	30,000
5	14,000	1800	10,000
6	12,200	2200	5000

La determinación de los valores factibles para la antigüedad de la máquina en cada etapa es algo complicada. En la figura 12.5 se resume la red que representa el problema. Al *inicio* del año 1 se tiene una máquina de 3 años de antigüedad. Es posible reemplazarla (R), o bien, conservarla (K) durante otro año. Si ocurre el reemplazo, la nueva máquina tendrá un año de antigüedad al inicio del año 2; de lo contrario, la máquina conservada tendrá 4 años de antigüedad. La misma lógica se aplica al inicio de los años 2 a 4. Si una máquina de un año de antigüedad se reemplaza al inicio de los años 2, 3 y 4, su reemplazo tendrá un año de antigüedad al inicio del año siguiente. Asimismo, al inicio del año 4, una máquina de 6 años de antigüedad debe reemplazarse, y al final del año 4 (final del horizonte de planeación), se desechará (S) la máquina.

La red muestra que al inicio del año 2 las posibles antigüedades de la máquina son 1 y 4 años. Al inicio del año 3 las posibles antigüedades son 1, 2 y 5 años, y al inicio del año 4 las posibles antigüedades son 1, 2, 3 y 6 años. La red también supone que la máquina se desechará al inicio del año 5 independientemente de la antigüedad.

FIGURA 12.5

Representación de la antigüedad de una máquina como una función del año de decisión en el ejemplo 12.3-3



La solución de la red mostrada en la figura 12.5 equivale a encontrar la ruta más larga (es decir, el ingreso máximo) desde el inicio del año 1 hasta el final del año 4. Se utilizará la forma tabular para resolver el problema. Todos los valores están en miles de dólares. Observe que si una máquina se reemplaza en el año 4 (es decir, al final del horizonte de planeación), su ingreso incluirá el valor de rescate, $s(t)$, de la máquina *reemplazada* y el valor de rescate, $s(1)$, de la máquina *reemplazante*. Además, si en el año 4 se conserva una máquina de t años de antigüedad, su valor de rescate será $s(t+1)$.

Etapa 4.

t	K	R	Solución óptima	
	$r(t) + s(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + s(1) - c(0) - I$	$f_4(t)$	Decisión
1	$19.0 + 60 - .6 = 78.4$	$20 + 80 + 80 - .2 - 100 = 79.8$	79.8	R
2	$18.5 + 50 - 1.2 = 67.3$	$20 + 60 + 80 - .2 - 100 = 59.8$	67.3	K
3	$17.2 + 30 - 1.5 = 45.7$	$20 + 50 + 80 - .2 - 100 = 49.8$	49.8	R
6	(Debe reemplazarse)	$20 + 5 + 80 - .2 - 100 = 4.8$	4.8	R

Etapa 3.

t	K	R	Solución óptima	
	$r(t) - c(t) + f_4(t+1)$	$r(0) + s(t) - c(0) - I + f_4(1)$	$f_3(t)$	Decisión
1	$19.0 - .6 + 67.3 = 85.7$	$20 + 80 - .2 - 100 + 79.8 = 79.6$	85.7	K
2	$18.5 - 1.2 + 49.8 = 67.1$	$20 + 60 - .2 - 100 + 79.8 = 59.6$	67.1	K
5	$14.0 - 1.8 + 4.8 = 17.0$	$20 + 10 - .2 - 100 + 79.8 = 9.6$	17.0	R

Etapa 2.

t	K	R	Solución óptima	
	$r(t) - c(t) + f_3(t+1)$	$R(0) + s(t) - c(0) - I + f_3(1)$	$f_2(t)$	Decisión
1	$19.0 - .6 + 67.1 = 85.5$	$20 + 80 - .2 - 100 + 85.7 = 85.5$	85.5	K o R
4	$15.5 - 1.7 + 17.0 = 30.8$	$20 + 30 - .2 - 100 + 85.7 = 35.5$	35.5	R

Etapa 1.

t	K	R	Solución óptima	
	$r(t) - c(t) + f_2(t+1)$	$R(0) + s(t) - c(0) - I + f_2(1)$	$f_1(t)$	Decisión
3	$17.2 - 1.5 + 35.5 = 51.2$	$20 + 50 - .2 - 100 + 85.5 = 55.3$	55.3	R

En la figura 12.6 se resume la solución óptima. Al inicio del año 1, dada $t = 3$, la decisión óptima es reemplazar la máquina. Por lo tanto, la máquina nueva tendrá 1 año de antigüedad al inicio del año 2, y $t = 1$ al inicio del año 2 exige conservar o reemplazar la máquina. Si se reemplaza, la nueva máquina tendrá 1 año de antigüedad al inicio del año 3; en caso contrario, la máquina conservada tendrá 2 años de antigüedad. El proceso continúa de esta manera hasta llegar al año 4.

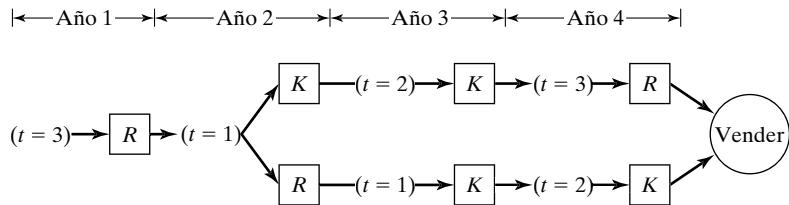


FIGURA 12.6

Solución del ejemplo 12.3-3

Las políticas óptimas alternativas al inicio del año 1 son (R, K, K, R) y (R, R, K, K) . El costo total es de \$55,300.

12.3.4 Modelo de inversión

Suponga que desea invertir las cantidades P_1, P_2, \dots, P_n , al inicio de cada uno de los siguientes n años. Tiene dos oportunidades de inversión en dos bancos. First Bank paga una tasa de interés r_1 y Second Bank paga r_2 , ambos compuestos anualmente. Para fomentar los depósitos, ambos bancos pagan bonos sobre nuevas inversiones en la forma de un porcentaje de la cantidad invertida. Los porcentajes de los bonos respectivos para First Bank y Second Bank son q_{i1} y q_{i2} para el año i . Los bonos se pagan al final del año en que se hizo la inversión y pueden reinvertirse en cualquiera de los bancos en el año inmediatamente subsecuente. Esto significa que sólo pueden invertirse bonos y dinero nuevo en cualquiera de los bancos. Sin embargo, una vez que se deposita una inversión, debe permanecer en ese banco hasta el final del año n .

Los elementos del modelo de PD son los siguientes:

1. La etapa i está representada por el año i , $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Las alternativas en la etapa i son I_i e \bar{I}_i , las cantidades invertidas en First Bank y en Second Bank, respectivamente.
3. El estado, x_i , en la etapa i es la cantidad de capital disponible para inversión al inicio del año i .

Observamos que $\bar{I}_i = x_i - I_i$ por definición. Entonces,

$$\begin{aligned} x_1 &= P_1 \\ x_i &= P_i + q_{i-1,1}I_{i-1} + q_{i-1,2}(x_{i-1} - I_{i-1}) \\ &= P_i + (q_{i-1,1} - q_{i-1,2})I_{i-1} + q_{i-1,2}x_{i-1}, i = 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

La cantidad reinvertida x_i incluye sólo dinero nuevo más cualesquier bonos de inversiones realizadas en el año $i-1$.

Defina

$$f_i(x_i) = \text{valor óptimo de las inversiones en los años } i, i+1, \dots, n, \text{ dada } x_i.$$

En seguida, defina s_i como la suma acumulada al final del año n , dado que I_i y $(x_i - I_i)$ son las inversiones hechas en el año i en First Bank y en Second Bank, respectivamente. Si $\alpha_k = (1 + r_k)$, $k = 1, 2$, el problema se establece como

$$\text{Maximizar } z = s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

donde

$$\begin{aligned} s_i &= I_i \alpha_1^{n+1-i} + (x_i - I_i) \alpha_2^{n+1-i} \\ &= (\alpha_1^{n+1-i} - \alpha_2^{n+1-i}) I_i + \alpha_2^{n+1-i} x_i, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ s_n &= (\alpha_1 + q_{n1} - \alpha_2 - q_{n2}) I_n + (\alpha_2 + q_{n2}) x_n \end{aligned}$$

Los términos q_{n1} y q_{n2} en s_n se agregan porque los bonos para el año n forman parte de la suma de dinero acumulado final a partir de la inversión.

Por lo tanto, la ecuación recursiva de PD en retroceso está dada como

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_{n+1}) &\equiv 0 \\ f_i(x_i) &= \max_{0 \leq I_i \leq x_i} \{s_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}, i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Como se hizo antes, x_{i+1} se define en términos de x_i .

Ejemplo 12.3-4

Suponga que desea invertir \$4000 ahora y \$2000 al inicio de los años 2 a 4. La tasa de interés ofrecida por First Bank es 8% compuesto anualmente, y los bonos a lo largo de los 4 años siguientes son 1.8%, 1.7%, 2.1% y 2.5%, respectivamente. La tasa de interés anual ofrecida por Second Bank es 0.2% más baja que la de First Bank, pero sus bonos son 0.5% más altos. El objetivo es maximizar el capital acumulado al final de 4 años.

Utilizando la notación presentada anteriormente, se tiene

$$\begin{aligned} P_1 &= \$4000, P_2 = P_3 = P_4 = \$2000 \\ \alpha_1 &= (1 + .08) = 1.08 \\ \alpha_2 &= (1 + .078) = 1.078 \\ q_{11} &= .018, q_{21} = .017, q_{31} = .021, q_{41} = .025 \\ q_{12} &= .023, q_{22} = .022, q_{32} = .026, q_{42} = .030 \end{aligned}$$

Etapa 4.

$$f_4(x_4) = \max_{0 \leq I_4 \leq x_4} \{s_4\}$$

donde

$$s_4 = (\alpha_1 + q_{41} - \alpha_2 - q_{42}) I_4 + (\alpha_2 + q_{42}) x_4 = -.003 I_4 + 1.108 x_4$$

La función s_4 es lineal en I_4 en el intervalo $0 \leq I_4 \leq x_4$, y su valor máximo ocurre en $I_4 = 0$ debido al coeficiente negativo de I_4 . Por lo tanto, la solución óptima para la etapa 5 puede resumirse como

Estado	Solución óptima	
	$f_4(x_4)$	I_4^*
x_4	1.108 x_4	0

Etapa 3.

$$f_3(x_3) = \max_{0 \leq I_3 \leq x_3} \{ s_3 + f_4(x_4) \}$$

donde

$$s_3 = (1.08^2 - 1.078^2)I_3 + 1.078^2x_3 = .00432I_3 + 1.1621x_3$$

$$x_4 = 2000 - .005I_3 + .026x_3$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f_3(x_3) &= \max_{0 \leq I_3 \leq x_3} \{ .00432I_3 + 1.1621x_3 + 1.108(2000 - .005I_3 + .026x_3) \} \\ &= \max_{0 \leq I_3 \leq x_3} \{ 2216 - .00122I_3 + 1.1909x_3 \} \end{aligned}$$

Estado	Solución óptima	
	$f_3(x_3)$	I_3^*
x_3	2216 + 1.1909 x_3	0

Etapa 2.

$$f_2(x_2) = \max_{0 \leq I_2 \leq x_2} \{ s_2 + f_3(x_3) \}$$

donde

$$s_2 = (1.08^3 - 1.078^3)I_2 + 1.078^3x_2 = .006985I_2 + 1.25273x_2$$

$$x_3 = 2000 - .005I_2 + .022x_2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f_2(x_2) &= \max_{0 \leq I_2 \leq x_2} \{ .006985I_2 + 1.25273x_2 + 2216 + 1.1909(2000 - .005I_2 + .022x_2) \} \\ &= \max_{0 \leq I_2 \leq x_2} \{ 4597.8 + .0010305I_2 + 1.27893x_2 \} \end{aligned}$$

Estado	Solución óptima	
	$f_2(x_2)$	I_2^*
x_2	4597.8 + 1.27893 x_2	x_2

Etapa 1.

$$f_1(x_1) = \max_{0 \leq I_1 \leq x_1} \{ s_1 + f_2(x_2) \}$$

donde

$$\begin{aligned}s_1 &= (1.08^4 - 1.078^4)I_1 + 1.078^4x_1 = .01005I_1 + 1.3504x_1 \\x_2 &= 2000 - .005I_1 + .023x_1\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}f_1(x_1) &= \max_{0 \leq I_1 \leq x_1} \{ .01005I_1 + 1.3504x_1 + 4597.8 + 1.27996(2000 - .005I_1 + .023x_1)\} \\&= \max_{0 \leq I_1 \leq x_1} \{ 7157.7 + .00365I_1 + 1.37984x_1\}\end{aligned}$$

Estado	Solución óptima	
	$f_1(x_1)$	I_1^*
$x_1 = \$4000$	$7157.7 + 1.38349x_1$	\$4000

Si se trabaja en retroceso y se observa que $I_1^* = 4000, I_2^* = x_2, I_3^* = I_4^* = 0$, resulta

$$\begin{aligned}x_1 &= 4000 \\x_2 &= 2000 - .005 \times 4000 + .023 \times 4000 = \$2072 \\x_3 &= 2000 - .005 \times 2072 + .022 \times 2072 = \$2035.22 \\x_4 &= 2000 - .005 \times 0 + .026 \times \$2035.22 = \$2052.92\end{aligned}$$

Así, la solución óptima se resume como

Año	Solución óptima	Decisión	Acumulación
1	$I_1^* = x_1$	Invertir $x_1 = \$4000$ en First Bank	$s_1 = \$5441.80$
2	$I_2^* = x_2$	Invertir $x_2 = \$2072$ en First Bank	$s_2 = \$2610.13$
3	$I_3^* = 0$	Invertir $x_3 = \$2035.22$ en Second Bank	$s_3 = \$2365.13$
4	$I_4^* = 0$	Invertir $x_4 = \$2052.92$ en Second Bank	$s_4 = \$2274.64$
Acumulación total = $f_1(x_1) = 7157.7 + 1.38349(4000) = \$12,691.66 (= s_1 + s_2 + s_3 + s_4)$			

12.3.5 Modelos de inventario

La PD tiene aplicaciones importantes en el área de control de inventarios. Los capítulos 13 y 16 presentan algunas de esas aplicaciones. Los modelos del capítulo 13 son determinísticos, y los del capítulo 16 son probabilísticos.

12.4 PROBLEMA DE DIMENSIONALIDAD

En todos los modelos de PD presentados en este capítulo, el *estado* en cualquier etapa se representa mediante un solo elemento. Por ejemplo, en el modelo de la mochila (sección 12.3.1), la única restricción es el peso del artículo. Aquí, de manera más realista, el volumen de la mochila también puede

ser una restricción viable, en cuyo caso se dice que el *estado* en cualquier etapa es bidimensional: peso y volumen.

El aumento en la cantidad de variables de estado incrementa los cálculos en cada etapa. Esto es particularmente evidente en cálculos tabulares de PD debido a que el número de filas en cada tabla corresponde a todas las posibles combinaciones de las variables de estado. Esta dificultad computacional en ocasiones se conoce en la literatura como la **maldición de la dimensionalidad**.

El siguiente ejemplo se eligió para demostrar el *problema de dimensionalidad*. También sirve para demostrar la relación entre la programación lineal y la programación dinámica.

Ejemplo 12.4-1

Acme Manufacturing fabrica dos productos. La capacidad diaria del proceso de manufactura es de 430 minutos. El producto 1 requiere 2 minutos por unidad, y el producto 2 requiere 1 minuto por unidad. No hay límite en la cantidad producida del producto 1, pero la demanda diaria máxima del producto 2 es de 230 unidades. La utilidad unitaria del producto 1 es de \$2 y la del producto 2 es de \$.5. Determine la solución óptima por medio de PD.

El problema se representa con el siguiente programa lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 430$$

$$x_2 \leq 230$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Los elementos del modelo de PD son los siguientes:

1. La *etapa i* corresponde al producto i , $i = 1, 2$.
2. La *alternativa* x_i es la cantidad del producto i , $i = 1, 2$.
3. El *estado* (v_2, w_2) representa las cantidades de los recursos 1 y 2 (tiempo de producción y límites de demanda) utilizados en la etapa 2.
4. El *estado* (v_1, w_1) representa las cantidades de los recursos 1 y 2 (tiempo de producción y límites de demanda) utilizados en las etapas 1 y 2.

Etapa 2.

Defina $f_2(v_2, w_2)$ como la utilidad máxima en la etapa 2 (producto 2), dado el estado (v_2, w_2) . Entonces,

$$f_2(v_2, w_2) = \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq v_2 \\ 0 \leq x_2 \leq w_2}} \{5x_2\}$$

Por lo tanto, $\max \{5x_2\}$ ocurre en $x_2 = \min \{v_2, w_2\}$, y la solución para la etapa 2 es

Estado	Solución óptima	
	$f_2(v_2, w_2)$	x_2
(v_2, w_2)	$5 \min \{v_2, w_2\}$	$\min \{v_2, w_2\}$

Etapa 1.

$$\begin{aligned}f_1(v_1, w_1) &= \max_{0 \leq 2x_1 \leq v_1} \{ 2x_1 + f_2(v_1 - 2x_1, w_1) \} \\&= \max_{0 \leq x_1 \leq v_1/2} \{ 2x_1 + 5 \min(v_1 - 2x_1, w_1) \}\end{aligned}$$

La optimización de la etapa 1 implica la solución de un problema minimax (generalmente más difícil). Para este problema se establece $v_1 = 430$ y $w_1 = 230$, de donde resulta $0 \leq x_1 \leq 215$. Como $\min(430 - 2x_1, 230)$ es la envolvente menor de dos líneas que se cortan (¡verifíquelo!), se deduce que

$$\min(430 - 2x_1, 230) = \begin{cases} 230, & 0 \leq x_1 \leq 100 \\ 430 - 2x_1, & 100 \leq x_1 \leq 215 \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned}f_1(430, 230) &= \max_{0 \leq x_1 \leq 215} \{ 2x_1 + 5 \min(430 - 2x_1, 230) \} \\&= \max_{x_1} \begin{cases} 2x_1 + 1150, & 0 \leq x_1 \leq 100 \\ -8x_1 + 2150, & 100 \leq x_1 \leq 215 \end{cases}\end{aligned}$$

Es posible verificar gráficamente que el valor óptimo de $f_1(430, 230)$ ocurre en $x_1 = 100$. Por consiguiente, se obtiene

Estado	Solución óptima	
	$f_1(v_1, w_1)$	x_1
(430, 230)	1350	100

Para determinar el valor óptimo de x_2 , se observa que

$$v_2 = v_1 - 2x_1 = 430 - 200 = 230$$

$$w_2 = w_1 - 0 = 230$$

En consecuencia,

$$x_2 = \min(v_2, w_2) = 230$$

Entonces, la solución óptima completa se resume como

$$x_1 = 100 \text{ unidades}, x_2 = 230 \text{ unidades}, z = \$1350$$

BIBLIOGRAFÍA

Bertsekas, D., *Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1987.

Denardo, E., *Dynamic Programming Theory and Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1982.

Dreyfus, S. y A. Law, *The Art and Theory of Dynamic Programming*, Academic Press, Nueva York, 1977.

Snedovich, M., *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, Nueva York, 1991.

Estudio de caso: Optimización del corte de árboles y asignación de troncos en Weyerhaeuser⁵**Herramienta:** PD**Área de aplicación:** Operación de un aserradero de troncos**Descripción de la situación:**

Los árboles maduros se cosechan y se cortan como troncos en diferentes aserraderos para fabricar distintos productos finales (por ejemplo, madera de construcción, madera contrachapada, tablones y papel). Las especificaciones del tronco (por ejemplo, su longitud y diámetro finales) para cada aserradero dependen del producto final que se produce. Debido a que se cosechan árboles con hasta 100 pies de altura, el número de combinaciones de corte que cumplen con los requisitos del aserradero puede ser grande. Se obtienen ingresos muy distintos según la manera como los troncos se hayan cortado. El objetivo es determinar la combinación de corte que maximice el ingreso total.

Modelo matemático:

La base del modelo es que no resulta práctico desarrollar una solución óptima que se aplique a un árbol “promedio” porque, en general, los árboles cosechados tienen diferentes longitudes y diámetros finales. Por lo tanto, la asignación óptima de cortes y troncos debe aplicarse a los árboles de manera individual.

Un supuesto simplificador del modelo es que la longitud utilizable L (pies) de un árbol cosechado es un múltiplo de una longitud mínima K (pies). Además, la longitud de un tronco cortado también es un múltiplo de K . Lo anterior significa que los troncos sólo pueden ser tan pequeños como K pies y tan grandes como NK pies; donde, por definición, $N \leq \frac{L}{K}$.

Defina

 M = Número de aserraderos que piden troncos

$$I = \frac{L}{K}$$

$R_m(i, j)$ = Ingresos en el aserradero m a partir de un tronco de longitud jK cortado del brazo más grande (o tallo) de longitud iK , $m = 1, 2, \dots, M$; $i = 1, 2, \dots, I$; $j = 1, 2, \dots, N$; $j \leq i$

c = Costo de hacer un corte transversal en el punto i del árbol, $i = 1, 2, \dots, I - 1$

$$c_{ij} = \begin{cases} c, & \text{si } j < i \\ 0, & \text{si } j = i \end{cases}$$

La definición de c_{ij} reconoce que si la longitud iK del tallo es igual a la longitud de tronco deseada jK , entonces no se realizan cortes.

Para entender el significado de la notación $R_m(i, j)$, la figura 12.7 ilustra una representación de un árbol con $I = 8$ y $L = 8K$. Los cortes en los puntos A y B dan como resultado un tronco para el aserradero 1 y dos para el aserradero 2. El corte comienza en el tallo del árbol y produce el tronco 1 para el aserradero 2 haciendo un corte transversal en el punto A . El corte corresponde a $(i = 8, j = 3)$ y produce el ingreso $R_2(8, 3)$. El tallo restante tiene ahora una longitud de $5K$. El siguiente corte transversal en el punto B produce el tronco 2 para el aserradero 1 con la longitud $2K$. Este tronco corresponde a $(i = 5, j = 2)$ y genera el ingreso $R_1(5, 2)$. El tallo restante de longitud $3K$ es exactamente igual a la longitud del tronco 3 para el aserradero 2. Por lo tanto, no se necesitan más cortes. Los ingresos asociados son $R_1(3, 3)$. El costo de corte asociado con la solución es $c_{83} = c$, $c_{52} = c$ y $c_{33} = 0$.

El problema se puede formular y resolver como un modelo de PD.

⁵ Lembersky, M. R. y U. H. Chi, “Decision Simulators Speed Implementation and Improve Operations”, *Interfaces*, vol. 14, núm. 4, pp. 1-15, 1984.

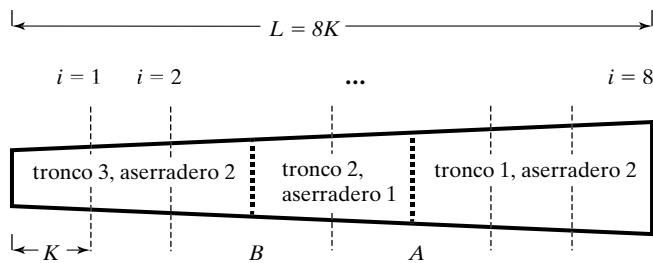


FIGURA 12.7

Solución típica en una situación de dos aserraderos

Sea

$$f(i) = \text{Ingreso máximo cuando la longitud del tallo restante es } iK, i = 1, 2, \dots, I$$

Entonces, la ecuación recursiva de PD se da como

$$f(0) = 0$$

$$f(i) = \max_{\substack{j=1, 2, \dots, \min(i, N) \\ m=1, 2, \dots, M}} \{R_m(i, j) - c_{ij} + f(i-j)\}, i = 1, 2, \dots, I$$

La idea es que dado un tallo de longitud iK , $f(i)$ está en función del ingreso por cortar un tronco de longitud $j \leq i$ menos el costo de hacer un corte más el mejor ingreso acumulado del tallo restante con longitud $(i-j)K$.

Ejemplos de cálculos:

La ecuación recursiva se calcula en el orden $f(1), f(2), \dots, f(I)$. La situación se refiere a dos aserraderos ($M = 2$), un árbol de longitud $L = 12$ pies, y una longitud mínima de tronco $K = 2$ pies, de donde resulta $I = 6$. El costo de un corte es $c = \$1.15$. Cualquier aserradero aceptará troncos de longitud 2, 4, 6, 8 o 10 pies, lo cual significa que $N = 5$. En la figura 12.8 se proporciona la solución para el ejemplo en una hoja de cálculo (archivo *excelCase8.xls*). Los cálculos básicos de PD (filas 15 a 20) están parcialmente automatizados y cambian automáticamente cuando se altera $R_m(i, j)$ en las filas 6 a 11. Todos los elementos en negrita y cursiva se introducen en forma manual.⁶ La hoja de cálculo está limitada a problemas con $I = 6$, $N = 5$ y $M = 2$, y esencialmente sólo permite cambios en las entradas de $R_m(i, j)$.⁷ Los valores de $R_m(i, j), j \leq i$, se dan en las filas 5 a 11 de la hoja de cálculo. Observe que para una $j = j^*$ específica, el valor de $R_m(i, j^*)$ aumenta con i para reflejar aumentos en los diámetros finales del tronco.

Para ilustrar los cálculos de PD en las filas 15 a 20, tenga en cuenta que cada etapa consta de una fila porque el estado del sistema en la etapa i consiste en un solo valor, a saber, la longitud parcial del tallo. En la etapa $i = 1$, la longitud del tallo (restante) es $1K$, por lo que resulta sólo en un tronco de longitud $1K$ (es decir, $j = 1$). Asimismo, $c_{11} = 0$ porque no se produce ningún corte. Así,

$$\begin{aligned} f(1) &= \max\{R_1(1, 1) - c_{11} + f(0), R_2(1, 1) - c_{11} + f(0)\} \\ &= \max\{1 - 0 + 0, 1.1 - 0 + 0\} \\ &= 1.1 \end{aligned}$$

⁶ Es un ejercicio fácil en Excel para automatizar las columnas M y N. Elegí no hacerlo para que el lector se comprometiera a participar en la determinación de la solución óptima.

⁷ Las fórmulas en las hojas de cálculo deberían proporcionar suficiente información para extender la hoja de cálculo a otros datos de entrada. Además, es posible desarrollar una solución general en hoja de cálculo utilizando macros VBA (más complicados), para especificar el tamaño de las matrices $R_m(i, j)$ y automatizar todos los cálculos.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Input data:													
2	Note: All italicized data are supplied manually													
3	$m = 2$	$K = 2$	$N = 5$	$L = 12$	$I = 6$	$c = 0.15$								
4	$R_m(i,j)$:	mill $m=1$					mill $m=2$							
5	$j \rightarrow >$	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5			
6	1	1.00					1	1.10						
7	2	1.10	1.15				2	1.10	2.30					
8	3	1.40	1.60	2.80			3	1.33	2.40	3.40				
9	4	1.90	1.90	3.90	4.10		4	2.10	3.30	4.20	4.10			
10	5	2.10	2.90	4.40	4.80	7.20	5	2.20	3.60	4.30	4.60	6.00		
11	6	2.10	3.50	4.70	6.10	8.30	6	2.20	4.50	4.40	5.00	6.30		
12														
13	Calculations:													
14	i	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$f(i)$	(j^*, m^*)	
15	1	1.00					1.10					\$0.00		
16	2	2.05	1.15				2.05	2.30				\$ 1.10	(1,2)	
17	3	3.55	2.55	2.80			3.48	3.35	3.40			\$ 2.30	(2,2)	
18	4	5.30	4.05	4.85	4.10		5.50	5.45	5.15	4.10		\$ 3.55	(1,1)	
19	5	7.45	6.30	6.55	5.75	7.20	7.55	7.00	6.45	5.55	6.00	\$ 5.50	(1,2)	
20	6	9.50	8.85	8.10	8.25	9.25	9.60	9.85	7.80	7.15	7.25	\$ 7.55	(2,2)	
21												Value =	\$ 9.85	
22														
23		m_2	m_1	m_2	m_2									
24		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$								
25														
26														
27														
28		$f(0) = 0$, $f(i) = \max_{\substack{j=1,2,\dots,\min(I,N) \\ m=1,2,\dots,M}} \{R_m(i,j) - c_j + f(i-j)\}, i=1,2,\dots,I$												
29														
30														

FIGURA 12.8

Solución en hoja de cálculo para el problema del aserradero.

La decisión óptima asociada en $i = 1$ requiere un tronco de longitud $1K$ ($j^* = 1$) para el aserradero 2 ($m^* = 2$), o $(j^*, m^*) = (1, 2)$.

Para la etapa 2 ($i = 2$), los troncos pueden asumir una longitud de $1K$ o $2K$ (es decir, $j = 1$ o 2) para ambos aserraderos ($m = 1$ o 2). Así,

$$\begin{aligned}
 f(2) &= \max \{R_1(2, 1) - c_{21} + f(1), R_1(2, 2) - c_{22} + f(0), R_2(2, 1) - c_{21} + f(1) \\
 &\quad R_2(2, 2) - c_{22} + f(0)\} \\
 &= \max \{1.1 - .15 + 1.1, 1.15 - 0 + 0, 1.1 - .15 + 1.1, 2.3 - 0 + 0\} \\
 &= \max \{2.05, 1.15, 2.05, 2.3\} = 2.3
 \end{aligned}$$

La decisión óptima asociada es $(j^*, m^*) = (2, 2)$, que requiere cortar un tronco de longitud $2K$ para el aserradero 2.

Los cálculos restantes se llevan a cabo de una manera similar a la mostrada en la figura 12.8, filas 15 a 20. Observe que las entradas B15:F20, H15:L20 y M15:M20 están automatizadas en la hoja de cálculo. Las entradas

(j^*, m^*) en N15:N20 se crean manualmente después de completar los cálculos automatizados en las filas 15 a 20. Las celdas resaltadas manualmente en las filas 15 a 20 definen $f(i), i = 1, 2, \dots, 6$.

La solución óptima se lee en las celdas N15:N20 como sigue:

$$(i = 6) \rightarrow (j^*, m^*) = (2, 2) \rightarrow (i = 4) \rightarrow (j^*, m^*) = (1, 2) \rightarrow \\ (i = 3) \rightarrow (j^*, m^*) = (1, 1) \rightarrow (i = 2) \rightarrow (j^*, m^*) = (2, 2)$$

La solución implica hacer cortes en $i = 2, 3$ y 4 , y produce un valor total de \$9.85 para el árbol.

Consideraciones prácticas:

Los resultados del modelo de optimización de PD son utilizados por los operadores de campo en la operación diaria del aserradero. Por consiguiente, la implementación del modelo debe ser fácil de usar, lo cual significa que los cálculos de PD (intimidantes) son transparentes para el usuario. Esto es precisamente lo que Lemberskey y Chi [1] hicieron cuando desarrollaron el sistema computacional VISION (por sus siglas de *Video Interactive Stem Inspection and OptimizatioN*). El sistema está equipado con una base de datos de grandes muestras representativas de tallos de árboles de las regiones donde se cosechan. Los datos incluyen la geometría del tallo, así como su calidad (por ejemplo, la ubicación de los nudos) y el valor (monetario) de tallos con diferentes longitudes y diámetros. Además, se proporcionan características de calidad para los diferentes aserraderos.

Una sesión típica con VISION incluye los siguientes pasos:

Paso 1: El operador puede seleccionar un tallo de muestra de la base de datos, o bien, crear uno utilizando las capacidades gráficas de VISION. Esto resultará en una representación realista del tallo en la pantalla de la computadora. Los aserraderos que solicitan los troncos también se seleccionan de la base de datos.

Paso 2: Despues de inspeccionar el tallo en pantalla, el operador “corta” el tallo en troncos con base en su experiencia. A continuación, solicita una solución óptima de PD. En ambos casos, se proyectan en la pantalla las pantallas gráficas de los troncos creados junto con sus valores asociados. El usuario tiene entonces la oportunidad de comparar las dos soluciones. En particular, examina la solución de PD para asegurarse de que los troncos creados cumplan con las especificaciones de calidad. Si no es así, el usuario puede elegir modificar los cortes. En cada caso, el valor asociado del tallo se muestra con fines comparativos.

En VISION, la optimización de PD es totalmente transparente para el usuario. Asimismo, la naturaleza gráfica interactiva de los resultados hace que el sistema sea ideal para entrenar a los operadores y mejorar sus habilidades en la toma de decisiones. El diseño del sistema muestra cómo los modelos matemáticos complejos pueden incrustarse dentro de un sistema computacional fácil de usar.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados	Sección	Problemas asignados
12.1	12-1 a 12-2	12.3.3	12-23 a 12-27
12.2	12-3 a 12-5	12.3.4	12-28 a 12-30
12.3.1	12-6 a 12-18	12.4	12-31 a 12-32
12.3.2	12-19 a 12-22		

***12-1.** Resuelva el problema 12.1-1, suponiendo que se utilizan las siguientes rutas:

$$d(1, 2) = 5, d(1, 3) = 9, d(1, 4) = 8$$

$$d(2, 5) = 10, d(2, 6) = 17$$

$$d(3, 5) = 4, d(3, 6) = 10$$

$$d(4, 5) = 9, d(4, 6) = 9$$

$$d(5, 7) = 8$$

$$d(6, 7) = 9$$

- 12-2.** Soy un ávido excursionista. El verano pasado, mi amigo G. Don y yo fuimos de campamento durante 5 días a las hermosas White Mountains en New Hampshire. Decidimos limitar nuestra excursión a tres picos muy conocidos: Los montes Washington, Jefferson y Adams. El monte Washington tiene un sendero de 6 millas de la base a la cumbre. Los senderos correspondientes de los montes Jefferson y Adams son de 4 y 5 millas, respectivamente. Los senderos que conectan (en dos sentidos) las bases de las tres montañas son de 3 millas entre los montes Washington y Jefferson; de 2 millas entre los montes Jefferson y Adams; y de 5 millas entre los montes Adams y Washington. Comenzamos el primer día en la base del monte Washington y regresamos al mismo lugar al final de los 5 días. Nuestro objetivo era recorrer a pie tantas millas como pudiéramos. También decidimos escalar una montaña exactamente cada día y acampar en la base de la montaña que escalaríamos el siguiente día. Además, decidimos que no debíamos visitar la misma montaña en dos días consecutivos. Utilice la PD para programar la caminata de 5 días.
- 12-3.** Para el problema 12-1, desarrolle la ecuación recursiva de retroceso y utilícela para encontrar la solución óptima.
- 12-4.** Para el problema 12-2, desarrolle la ecuación recursiva de retroceso y utilícela para encontrar la solución óptima.
- ***12-5.** Para la red de la figura 12.9 se desea determinar la ruta más corta entre las ciudades 1 y 7. Defina las etapas y los estados por medio de la recursividad de retroceso, y luego resuelva el problema.

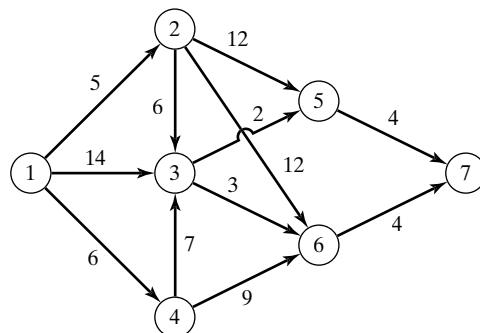


FIGURA 12.9
Red para el problema 12.5

- 12-6.** En el ejemplo 12.3-1, determine la solución óptima suponiendo que la capacidad de peso máxima del barco es de 2 toneladas. Repita el ejemplo para una capacidad de peso de 5 toneladas.⁸
- 12-7.** Resuelva el problema de carga de un contenedor del ejemplo 12.3-1 para cada uno de los siguientes conjuntos de datos:
- $w_1 = 4, r_1 = 70, w_2 = 1, r_2 = 20, w_3 = 2, r_3 = 40, W = 6$
 - $w_1 = 1, r_1 = 30, w_2 = 2, r_2 = 60, w_3 = 3, r_3 = 80, W = 4$
- 12-8.** En el modelo de carga de un contenedor del ejemplo 12.3-1, suponga que el ingreso por artículo incluye una cantidad constante que se obtiene sólo si se elige el artículo, como se indica en la tabla siguiente:

Artículo	Ingreso
1	$\begin{cases} -5 + 31m_1, & \text{si } m_1 > 0 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
2	$\begin{cases} -15 + 47m_2, & \text{si } m_2 > 0 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
3	$\begin{cases} -4 + 14m_3, & \text{si } m_3 > 0 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Encuentre la solución óptima usando PD (*sugerencia:* Puede utilizar el archivo en Excel *excelSetupKnapsack.xls* para verificar sus cálculos).

- 12-9.** Un excursionista debe empacar tres tipos de artículos: alimentos, botiquín de primeros auxilios y ropa. La mochila tiene una capacidad de 3 ft^3 . Cada unidad de alimentos ocupa 1 ft^3 ; el artículo de primeros auxilios, $\frac{1}{4} \text{ ft}^3$; y cada pieza de ropa, aproximadamente $\frac{1}{2} \text{ ft}^3$. El excursionista asigna pesos de prioridad de 3, 4 y 5 a los alimentos, el botiquín y la ropa, respectivamente, lo cual significa que la ropa es el más valioso de los tres tipos de artículos. Con base en su experiencia, el excursionista debe llevar al menos una unidad de cada artículo y no más de dos artículos de primeros auxilios. ¿Cuántas unidades de cada artículo debería llevar el excursionista?
- *12-10.** Un estudiante tiene que elegir 10 cursos optativos de cuatro departamentos diferentes, con por lo menos un curso de cada departamento. Los 10 cursos se asignan a los cuatro departamentos de una manera que maximice el “conocimiento”. El estudiante mide su conocimiento en una escala de 100 puntos y elabora la siguiente tabla:

Departamento	Cantidad de cursos						
	1	2	3	4	5	6	≥ 7
I	25	50	60	80	100	100	100
II	20	70	90	100	100	100	100
III	40	60	80	100	100	100	100
IV	10	20	30	40	50	60	70

¿Cómo debería seleccionar el estudiante los cursos?

⁸ En los problemas 12-6 a 12-18, se le exhorta a verificar los cálculos manuales en los casos en que sea posible, utilizando la plantilla *excelKnapsack.xls*.

- 12-11.** Tengo un pequeño jardín que mide 10×20 pies. Esta primavera pienso plantar tres tipos de hortalizas: tomates, chícharos y maíz. El jardín está organizado en filas de 10 pies. Las filas del maíz y de los tomates son de 2 pies de ancho, y las de los chícharos son de 3 pies de ancho. Me gustan más los tomates y menos los chícharos, y en una escala del 1 al 10 asignaría un 10 a los tomates, un 7 al maíz y un 3 a los chícharos. A pesar de mis preferencias, mi esposa insiste en que plante al menos una fila de chícharos y no más de dos filas de tomates. ¿Cuántas filas de cada vegetal debo plantar?
- *12-12.** Habitat for Humanity es una maravillosa organización de caridad internacional que construye casas para familias necesitadas por medio de mano de obra voluntaria y donaciones de materiales para construcción. Una familia elegible puede escoger de entre tres tamaños de casa: 1000, 1100 y 1200 ft^2 . Cada tamaño requiere determinada cantidad de voluntarios de mano de obra. La sucursal de Fayetteville, Arkansas, ha recibido cinco solicitudes para los próximos 6 meses. El comité a cargo asigna una calificación a cada solicitud con base en varios factores. Una alta calificación significa una alta necesidad. Durante los 6 meses siguientes, la sucursal puede contar con un máximo de 23 voluntarios. Los siguientes datos resumen las calificaciones de las solicitudes y la cantidad requerida de voluntarios. ¿Cuáles solicitudes debería aprobar el comité?

Solicitud	Tamaño de la casa (ft^2)	Calificación	Número de voluntarios
1	1200	78	7
2	1000	64	4
3	1100	68	6
4	1000	62	5
5	1200	85	8

- 12-13.** El alguacil Bassam busca reelegirse en el condado de Washington. Los fondos disponibles para la campaña son aproximadamente de \$10,000. Aunque al comité de reelección le gustaría lanzar la campaña en los cinco distritos del condado, los fondos limitados lo obligan a hacer algo distinto. La tabla siguiente incluye listas de la población votante y el monto de los fondos necesarios para lanzar una campaña efectiva en cada distrito. Un distrito puede recibir todos sus fondos asignados, o ninguno. ¿Cómo deberán asignarse los fondos?

Distrito	Población	Fondos requeridos (dólares)
1	3100	3500
2	2600	2500
3	3500	4000
4	2800	3000
5	2400	2000

- 12-14.** Un dispositivo electrónico consta de tres componentes, los cuales están en serie, de modo que la falla de uno hace que falle todo el dispositivo. La confiabilidad (probabilidad de que no falle) del dispositivo se puede mejorar instalando una o dos unidades suplentes en cada componente. La tabla siguiente incluye la confiabilidad, r , y el costo, c . El capital total disponible para la construcción del dispositivo es de \$10,000. ¿Cómo deberá construirse el dispositivo? (Sugerencia: El objetivo es maximizar la confiabilidad, $r_1 r_2 r_3$, del dispositivo. Esto significa que la descomposición de la función objetivo es multiplicativa más que aditiva).

Cantidad de unidades en paralelo	Componente 1		Componente 2		Componente 3	
	r_1	c_1 (dólares)	r_2	c_2 (dólares)	r_3	c_3 (dólares)
1	.6	1000	.7	3000	.5	2000
2	.8	2000	.8	5000	.7	4000
3	.9	3000	.9	6000	.9	5000

12-15. Resuelva el siguiente modelo mediante PD:

$$\text{Maximizar } z = \prod_{i=1}^n y_i$$

sujeto a

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = c$$

$$y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

(Sugerencia: Este problema es similar al problema 12-14, excepto que la variable y_j es continua).

12-16. Resuelva el siguiente problema mediante PD:

$$\text{Minimizar } z = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$$

sujeto a

$$\prod_{i=1}^n y_i = c$$

$$y_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

12-17. Resuelva el siguiente problema mediante PD:

$$\text{Maximizar } z = (y_1 + 2)^2 + y_2 y_3 + (y_4 - 5)^2$$

sujeto a

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 5$$

$$y_i \geq 0 \text{ y entera, } i = 1, 2, 3, 4$$

12-18. Resuelva el siguiente problema mediante PD:

$$\text{Minimizar } z = \max \{f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_n)\}$$

sujeto a

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = c$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Proporcione la solución para el caso especial de $n = 3, c = 10$, y $f(y_1) = y_1 + 5, f(y_2) = 5y_2 + 3$ y $f(y_3) = y_3 - 2$.

12-19. Resuelva el ejemplo 12.3-2 para cada uno de los siguientes requisitos mínimos de mano de obra:

***(a)** $b_1 = 6, b_2 = 5, b_3 = 3, b_4 = 6, b_5 = 8$

(b) $b_1 = 8, b_2 = 4, b_3 = 7, b_4 = 8, b_5 = 2$

- 12-20.** En el ejemplo 12.3-2, si se incurre en un pago de indemnización de \$100 por cada trabajador despedido, determine la solución óptima.
- *12-21.** Luxor Travel organiza viajes turísticos de una semana al sur de Egipto. La agencia ofrece 7, 4, 7 y 8 automóviles en renta durante las siguientes 4 semanas. Luxor Travel subcontrata a un concesionario automotriz local para que atienda las necesidades de renta de automóviles. El concesionario cobra una cuota de renta semanal de \$220 por automóvil, más una cuota fija de \$500 por cualquier transacción de renta. Sin embargo, Luxor puede elegir si los conserva en renta durante una semana más y simplemente sigue pagando la renta. ¿Cuál es la mejor forma para que Luxor Travel maneje la situación de renta?
- 12-22.** GECO fue contratado por los siguientes 4 años para surtir motores de avión a razón de cuatro motores al año. La capacidad de producción disponible y los costos de producción varían de un año a otro. GECO puede producir cinco motores en el año 1, seis en el año 2, tres en el año 3 y cinco en el año 4. Los costos de producción correspondientes por motor a lo largo de los siguientes 4 años son de \$300,000, \$330,000, \$350,000 y \$420,000, respectivamente. GECO puede elegir si produce más de lo que necesita en un cierto año, en cuyo caso el motor se debe almacenar apropiadamente hasta la fecha de envío. El costo de almacenamiento por motor también varía de un año a otro, y se estima que sea de \$20,000 en el año 1, \$30,000 en el año 2, \$40,000 en el año 3 y \$50,000 en el año 4. Actualmente, al inicio del año 1 GECO tiene un motor listo para ser enviado. Desarrolle un plan de producción óptimo para GECO.
- 12-23.** En cada uno de los siguientes casos, desarrolle la red y encuentre la solución óptima para el modelo del ejemplo 12.3-3:
- La máquina tiene 2 años de antigüedad al inicio del año 1.
 - La máquina tiene 1 año de antigüedad al inicio del año 1.
 - La máquina se compró nueva al inicio del año 1.
- *12-24.** Mi hijo de 13 años maneja un negocio de corte de césped con 10 clientes. A cada cliente le corta el césped 3 veces al año, y cobra \$50 por cada corte. Acaba de pagar \$200 por una podadora nueva. El costo de operación y mantenimiento de la podadora es de \$120 para el primer año de servicio y de ahí en adelante se incrementa 20% al año. Una podadora de 1 año de antigüedad tiene un valor de reventa de \$150, el cual se reduce de ahí en adelante un 10% al año. Mi hijo, quien planea conservar su negocio hasta que tenga 16 años, piensa que es más económico comprar una podadora nueva cada 2 años. Basa su decisión en el hecho de que el precio de una podadora nueva se incrementa sólo 10% cada año. ¿Su decisión está justificada?
- 12-25.** Circle Farms busca desarrollar una política de reemplazo para su tractor de 2 años de antigüedad durante los siguientes 5 años. Un tractor debe mantenerse en servicio durante al menos 3 años, pero debe desecharse después de 5 años. El precio actual de compra de un tractor es de \$40,000 y se incrementa 10% al año. El valor de rescate de un tractor de un año de antigüedad es de \$30,000 y se reduce 10% al año. El costo actual de operación anual del tractor es de \$1300 pero se espera que se incremente 10% al año.
- Formule el problema como un problema de la ruta más corta.
 - Desarrolle la ecuación recursiva asociada.
 - Determine la política de reemplazo óptima del tractor durante los próximos 5 años.
- 12-26.** Considere el problema de reemplazo de equipo durante un periodo de n años. Un equipo nuevo cuesta c dólares y su valor de reventa después de t años de operación es $s(t) = n - t$ para $n > t$ y cero en caso contrario. El ingreso anual es una función de la antigüedad t y está dada por $r(t) = n^2 - t^2$ para $n > t$ y cero en caso contrario.
- Formule el problema como un modelo de PD.
 - Encuentre la política de reemplazo óptima dado que $c = \$10,000$, $n = 5$ y el equipo tiene 2 años de antigüedad.

12-27. Resuelva el problema 12-26, suponiendo que el equipo tiene 1 año de antigüedad y que $n = 4$, $c = \$6000$ y $r(t) = \frac{n}{1+t}$.

12-28. Resuelva el ejemplo 12.3-4, suponiendo que $r_1 = 0.085$ y $r_2 = 0.08$. Suponga también que $P_1 = \$5000$, $P_2 = \$4000$, $P_3 = \$3000$ y $P_4 = \$2000$.

12-29. Un inversionista con un capital inicial de \$10,000 debe decidir al final de cada año cuánto gastar y cuánto invertir en una cuenta de ahorros. Cada dólar invertido reditúa $\alpha = \$1.09$ al final del año. La satisfacción derivada de gastar y en cualquier año se cuantifica monetariamente como $\$ \sqrt{y}$. Resuelva el problema mediante PD para un lapso de 5 años.

12-30. Un granjero posee k ovejas. Al final de cada año, decide sobre cuántas vender o conservar. La utilidad de vender una oveja en el año i es p_i . Las ovejas conservadas en el año i duplicarán su número en el año $i + 1$. El granjero planea vender todas las ovejas al cabo de n años.

(a) Deduzca la ecuación recursiva general para el problema.

(b) Resuelva el problema para $n = 3$ años, $k = 2$ ovejas, $p_1 = \$100$, $p_2 = \$130$ y $p_3 = \$120$.

12-31. Resuelva los siguientes problemas mediante PD.

(a) Maximizar $z = 4x_1 + 14x_2$
sujeto a

$$2x_1 + 7x_2 \leq 21$$

$$7x_1 + 2x_2 \leq 21$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(b) Maximizar $z = 8x_1 + 7x_2$
sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

(c) Maximizar $z = 7x_1^2 + 6x_1 + 5x_2^2$
sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

12-32. En el problema de la mochila con n artículos del ejemplo 12.3-1, suponga que las limitaciones de peso y volumen son W y V , respectivamente. Dado que w_i , v_i , y r_i son el peso, el valor y el ingreso por unidad, respectivamente, del artículo i , escriba la ecuación recursiva de retroceso de PD para el problema.

CAPÍTULO 13

Modelos de inventario (con introducción a las cadenas de suministro)

Aplicación de la vida real: Kroger mejora la gestión de inventarios de farmacia

La compañía Kroger opera aproximadamente 2500 farmacias en sus tiendas por todo Estados Unidos. La escasez de medicamentos y el inventario excesivo se mantuvieron bajo control gracias a un modelo de optimización de simulación en hoja de cálculo. El uso de la hoja de cálculo facilitó una amplia aceptación del personal tanto administrativo como de la farmacia. Kroger informa un aumento en los ingresos por \$80 millones y una reducción en el inventario de más de \$120 millones, de noviembre de 2011 a marzo de 2013. El estudio de caso completo se presenta al final del capítulo.

13.1 PROBLEMA DE INVENTARIO: UNA PERSPECTIVA DE LA CADENA DE SUMINISTRO¹

La cadena de suministro es una conceptualización reciente del modelado del flujo de bienes, fondos e información de extremo a extremo entre cuatro entidades principales: proveedor, fabricante, minorista y consumidor. Las direcciones del flujo se pueden resumir como

Flujo de bienes: Proveedor → Fabricante → Minorista → Consumidor

Flujo de fondos: Proveedor ← Fabricante ← Minorista ← Consumidor

Flujo de información: Proveedor ↔ Fabricante ↔ Minorista ↔ Consumidor

El **flujo de bienes** inicia en el proveedor y termina en el consumidor. El **flujo de fondos** comienza en el consumidor, la principal fuente de ingresos para toda la cadena, y se mueve hacia

¹ Esta breve presentación de las cadenas de suministro no pretende competir con las distintas fuentes sobre el tema ya disponibles en la literatura. La intención es introducir el problema del inventario en el contexto pertinente de la visión de modelado que abarca las cadenas de suministro.

arriba, asignando porciones de los ingresos al minorista, fabricante y proveedor. El **flujo de información** requiere una estrecha colaboración entre todas las entidades de la cadena. Entre el intercambio de la información más crucial se encuentran los datos de ventas a nivel de consumidor, los cuales se utilizan para predecir la naturaleza de la distribución de la demanda, que posteriormente se utiliza para determinar los niveles óptimos y los movimientos de bienes en/hacia todos los puntos de la cadena de suministro. Desde ese punto de vista, es importante reconocer que ningún miembro de la cadena de suministro debería intentar obtener ventajas económicas a expensas de otro miembro. Al final, tal política resultará en un costo más alto para el producto final y, por ende, en menores ingresos para todos los miembros de la cadena de suministro.

Las flechas en la representación de la cadena de suministro ilustradas anteriormente simbolizan las separaciones de *distancia* y de *intervalos de tiempo*, entre las ubicaciones físicas de las cuatro entidades de la cadena. La implicación importante aquí es que cada ubicación debe mantener un nivel de inventario para garantizar un grado razonable de *respuesta operativa* (a las necesidades del cliente). Al mismo tiempo, la cadena de suministro tiene que ser *eficiente*, en el sentido de que hay que mantener bajo control el costo del inventario por almacenar, transportar, manejar y agotar existencias. Por consiguiente, al decidir el nivel de inventario se requiere mantener un equilibrio entre la capacidad de respuesta y el grado de *eficiencia*.

13.1.1 Una métrica de inventario en las cadenas de suministro

Las empresas utilizan relaciones y fórmulas sencillas para evaluar el impacto de los inventarios en la salud financiera de la compañía. Una métrica común es la siguiente **rotación de inventarios**:

$$\text{Rotación de inventarios} = \frac{\text{Costo de los bienes vendidos en un periodo}}{\text{Costo del inventario promedio en el mismo periodo}}$$

Mide el *número de veces* que un negocio ha vendido su inventario durante un periodo especificado (generalmente un año) para alcanzar las ventas dadas. Observe que el numerador es el *costo* y no el *ingreso* de los bienes vendidos.

Como regla general, una rotación inferior a 1 es un fuerte indicador de que una empresa conserva demasiado inventario para su volumen de ventas alcanzado. Por otro lado, es deseable una alta rotación de inventarios, ya que indica un menor inventario y un volumen de ventas alto. Sin embargo, una rotación de inventarios excesivamente elevada sería una indicación de que la empresa conserva un inventario bajo, dando lugar a pérdidas de ventas causadas por desabasto.

Todos los datos para calcular esta relación se toman generalmente del balance (de final de año) de la empresa. Por tal razón, la rotación de inventarios se calcula en un periodo de un año y el inventario promedio es el promedio simple de los costos de inventario inicial y final del año. Este promedio simple supone que el inventario se agota uniformemente durante el año, lo que quizás no sea cierto. Por ejemplo, ocurrirá una distorsión en el caso extremo de que el inventario se mantenga constante durante los primeros 10 meses del año, y luego se reduzca bruscamente durante los meses de compras navideñas de noviembre y diciembre. El sesgo puede mitigarse con el seguimiento del inventario real sobre una base mensual o trimestral. Sin embargo, la recopilación de la información para esta tarea suele ser costosa (en contraposición a simplemente usar los datos de la hoja de balance).

Una métrica complementaria de la rotación de inventarios es el número de días en que el inventario se mantiene en el sistema antes de su vencimiento, calculado como:

$$\text{Días en inventario} = \frac{360}{\text{Rotación de inventarios}}$$

Ejemplo 13.1-1

En la siguiente tabla se resume la información financiera extraída de las hojas del balance de una compañía hipotética.

	(Millones de dólares)		
	31 de diciembre de 2014	31 de diciembre de 2013	31 de diciembre de 2012
Costo de los bienes vendidos	3989.1	3872.1	3562.7
Inventarios:			
Suministros	310.2	210.4	156.2
Materias primas	189.7	199.4	172.6
Trabajo en proceso	339.1	310.5	342.3
Productos terminados	200.1	196.4	150.7

Evalúe qué tan bien la compañía está manejando su inventario.

En la tabla siguiente se resume el cálculo de las tasas de rotación:

(Millones de dólares)	2014	2013	2012
Costo de los bienes vendidos	3989.1	3872.1	3562.7
Inventario total	1039.1	916.7	821.8
Inventario promedio	$(1039.1 + 916.7)/2 = 977.9$	$(916.7 + 821.8)/2 = 869.25$	
Rotación de inventarios	$(3989.1/977.9) = 4.08$	$(3872.1/869.25) = 4.45$	
Días en inventario	$(365/4.08) = 89.46$	$(365/4.45) = 82.02$	

Los cálculos muestran una situación de inventario desfavorable: Baja rotación de inventarios (aproximadamente 4 veces al año) en 2013 y 2014, y días promedio en inventario altos (más de 80 días). Asimismo, en 2014 ocurre un empeoramiento de la situación del inventario en comparación con 2013.

Los resultados anteriores se ocupan de la evaluación de la situación del inventario basada en la información del balance (final del año). Proporciona métricas genéricas que simplemente determinan si el inventario que un negocio mantuvo durante el año pasado estuvo en línea o no con las expectativas. En este sentido, las métricas no sugieren soluciones para reducir inventarios excesivos, como encender luces rojas respecto de la situación del inventario.

Para atender el problema, es necesario idear herramientas adecuadas para determinar los niveles óptimos de existencias en todos los niveles operativos de la cadena de suministro, desde la materia prima hasta los productos terminados. Esas herramientas pueden utilizarse para orientar un único elemento o un grupo de elementos (homogéneos).

La naturaleza de la demanda de un artículo puede clasificarse en forma amplia como determinística o probabilística. Esta categorización es un factor clave en el desarrollo de herramientas de

optimización del inventario. El resto de este capítulo trata del caso determinístico (más susceptible en el sentido analítico). El caso probabilístico se presentará en el capítulo 16, después de un repaso de probabilidad y estadística en el capítulo 14.

13.1.2 Elementos del modelo de optimización del inventario

La mayoría de las empresas debe mantener inventario disponible para enfrentar las incertidumbres en la demanda. Demasiado inventario aumenta el *costo de mantenimiento* del inventario en existencia (capital, almacenamiento, mantenimiento y manejo), y muy poco inventario incrementa el *costo por desabasto* (pérdida de ventas, interrupción de la producción y pérdida de la lealtad del cliente). Conforme se retiran unidades en existencia, el inventario se repone periódicamente iniciando nuevos pedidos a los proveedores, y con cada nuevo pedido se incurre en un *costo de preparación* (fijo) independiente del tamaño del pedido. En la mayoría de los casos, el *precio de compra* se descuenta del proveedor para pedidos de gran tamaño. Lo que todo esto significa es que el costo del inventario total asociado puede expresarse como

$$\left(\begin{array}{c} \text{Costo del} \\ \text{inventario} \\ \text{total} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Costo de} \\ \text{compra} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Costo de} \\ \text{preparación} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Costo de} \\ \text{retención} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Costo por} \\ \text{desabasto} \end{array} \right)$$

Los costos descritos son conflictivos en el sentido de que los pedidos de tamaño pequeño reducirán los costos de retención (por unidad de tiempo); mientras que, al mismo tiempo, se incrementan los demás costos, y viceversa. En tal situación, lo mejor que se puede hacer es buscar un arreglo entre estos costos, decidiendo un nivel de inventario que minimice el costo del inventario total.

El problema del inventario se reduce a diseñar una **política de inventario** que responda dos preguntas:

1. ¿Cuánto pedir?
2. ¿Cuándo pedir?

La base del modelo de inventario es la siguiente función de costo genérica:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Costo del} \\ \text{inventario} \\ \text{total} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Costo de} \\ \text{compra} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Costo de} \\ \text{preparación} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Costo de} \\ \text{retención} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Costo por} \\ \text{desabasto} \end{array} \right)$$

A continuación se da una descripción de los componentes de la función de costo:

1. El *costo de compra* es el precio por unidad de un artículo del inventario. En ocasiones, el artículo se ofrece con un descuento, si el tamaño del pedido excede una cantidad determinada, lo cual es un factor al momento de tomar la decisión de *cuánto pedir*.
2. El *costo de preparación* representa el cargo fijo en que se incurre cuando se coloca un pedido. También puede incluir el costo asociado con recibir un envío. El costo es fijo a pesar del tamaño del pedido solicitado o del envío recibido.
3. El *costo de retención* representa el costo de mantener existencias de algo. Incluye el interés sobre el capital y el costo de almacenamiento, mantenimiento, manejo, obsolescencia, y merma debido a fraude o robo.

4. El *costo por desabasto* es la penalización en que se incurre cuando se agotan las existencias. Incluye la pérdida potencial de ingresos, la interrupción de la producción, el costo adicional de solicitar envíos de emergencia (por lo general, de un día para otro) y el costo subjetivo (difícil de estimar) de la pérdida de lealtad del cliente.

Los costos descritos son conflictivos en el sentido de que el incremento de uno puede causar la reducción de otro (por ejemplo, pedir con más frecuencia eleva el costo de preparación, pero reduce el costo de retención del inventario). El propósito de la minimización de la función de costo del inventario total es equilibrar esos costos conflictivos.

Cuánto ordenar simplemente se traduce en determinar el tamaño del pedido en un tiempo de reposición. *Cuándo ordenar* tiene mayores implicaciones. Un sistema de inventario puede requerir **revisiones periódicas** (por ejemplo, pedir al inicio de cada semana o cada mes); o bien, el sistema puede basarse en **revisiones continuas**, colocando un nuevo pedido cada vez que el nivel del inventario se reduzca a un **punto de reorden** específico. Un ejemplo de los dos tipos se presenta en las tiendas al menudeo. La revisión es *periódica* si el artículo se repone cada semana o cada mes. Es *continua* si la reposición ocurre siempre que el nivel del inventario cae por debajo de un nivel determinado.

La presentación anterior ofrece un marco unificador para decidir la política de inventario óptima. Además, los modelos específicos para determinar estas políticas son tan diversos como las diferentes situaciones que pueden manejarse. En general, la complejidad de los modelos resultantes depende en gran medida del grado de incertidumbre en la demanda del artículo en inventario.

13.2 EL PAPEL DE LA DEMANDA EN EL DESARROLLO DE MODELOS DE INVENTARIO

En general, la complejidad analítica de los modelos de inventario depende de si la demanda es determinística o probabilística. Dentro de ambas categorías, la demanda puede variar con el tiempo o no hacerlo. Por ejemplo, el consumo de gas natural que se utiliza en la calefacción doméstica es estacional. Aun cuando dicho patrón se repite anualmente, el consumo en un mismo mes puede variar de un año a otro, dependiendo, por ejemplo, de la severidad del clima.

En situaciones prácticas, el patrón de la demanda en un modelo de inventario asume uno de cuatro tipos:

1. Determinístico y constante (estático) a través del tiempo.
2. Determinístico y variable (dinámico) a través del tiempo.
3. Probabilístico y estacionario a través del tiempo.
4. Probabilístico y no estacionario a través del tiempo.

Esta clasificación supone la disponibilidad de datos confiables para pronosticar la demanda futura.

En términos del desarrollo de modelos de inventario, la primera categoría es analíticamente la más sencilla, y la cuarta es la más compleja. Por otro lado, la primera categoría es la que tiene menor posibilidad de ocurrir en la práctica y la cuarta es la más prevalente. En la práctica, el objetivo es equilibrar tanto la sencillez como la exactitud del modelo.

¿Cómo se puede decidir si una determinada aproximación a la demanda es aceptable? Una “estimación aproximada” inicial se basa en el cálculo de la media y la desviación estándar del consumo

durante un periodo específico (por ejemplo, mensualmente). Entonces puede usarse el coeficiente de variación, $V = \frac{\text{Desviación estándar}}{\text{Media}} \times 100$, para valorar la naturaleza de la demanda utilizando las siguientes directrices:²

1. Si la demanda mensual promedio (registrada a lo largo de varios años) es constante “de manera aproximada” y V es razonablemente pequeño ($< 20\%$), entonces la demanda puede considerarse determinística y constante.
2. Si la demanda mensual promedio varía de manera apreciable entre los diferentes meses, pero V permanece razonablemente pequeño en todos los meses, entonces la demanda puede considerarse determinística pero variable.
3. Si en el caso 1 V es alto ($> 20\%$) pero aproximadamente constante, entonces la demanda es probabilística y estacionaria.
4. El caso restante es la demanda probabilística no estacionaria, la cual ocurre cuando los promedios y los coeficientes de variación cambian significativamente mes con mes.

Ejemplo 13.2-1

Los datos que aparecen en la tabla 13.1 presentan el consumo mensual (enero a diciembre) de gas natural en una residencia rural a lo largo de 10 años (1990-1999). El proveedor envía un camión para llenar el tanque a petición del propietario de la casa.

Desde el punto de vista del modelado de inventarios, es razonable suponer que cada mes representa un periodo de decisión para la colocación de un pedido. El propósito de este ejemplo es analizar la naturaleza de la demanda.

TABLA 13.1 Consumo mensual de gas natural (enero a diciembre)

Año	Consumo de gas natural en pies cúbicos											
	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1990	100	110	90	70	65	50	40	42	56	68	88	95
1991	110	125	98	80	60	53	44	45	63	77	92	99
1992	90	100	88	79	56	57	38	39	60	70	82	90
1993	121	130	95	90	70	58	41	44	70	80	95	100
1994	109	119	99	75	68	55	43	41	65	79	88	94
1995	130	122	100	85	73	58	42	43	64	75	80	101
1996	115	100	103	90	76	55	45	40	67	78	98	97
1997	130	115	100	95	80	60	49	48	64	85	96	105
1998	125	100	94	86	79	59	46	39	69	90	100	110
1999	87	80	78	75	69	48	39	41	50	70	88	93
Media	111.7	110	95	82.5	69.6	55	42.7	42	62.8	77	91	98
Desv. est.	15.54	15.2	7.5	7.99	7.82	3.9	3.4	2.9	6.09	6.9	6.7	6
$V (%)$	13.91	13.8	7.9	9.68	11.2	7.1	7.96	6.8	9.69	8.9	7.4	6.1

² El coeficiente de variación, V , mide la variación relativa o dispersión de los datos alrededor de la media. Por lo general, los valores más altos de V indican una incertidumbre más alta en el uso de la media, como una aproximación del consumo mensual. Para la demanda determinística, $V = 0$, dado que la desviación estándar asociada es cero.

Un examen de la media y el coeficiente de variación, V , en la tabla 13.1, revela dos resultados:

1. El consumo promedio es dinámico (no constante) debido al alto consumo promedio durante los meses invernales.
2. El coeficiente de variación V es razonablemente pequeño ($< 15\%$) de modo que, como primera evaluación, la demanda mensual puede considerarse aproximadamente determinística.

La conclusión es que la demanda mensual es (aproximadamente) determinística pero variable.

13.3 MODELOS ESTÁTICOS DE LA CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO (EOQ)

En esta sección se presentan tres variaciones del modelo de la cantidad económica de pedido (EOQ, por las siglas de *economic order quantity*) con demanda estática (constante). Estos modelos son analíticamente sencillos.

13.3.1 Modelo EOQ clásico

El más sencillo de los modelos de inventario implica una demanda de tasa constante con reposición de pedidos instantánea y sin desabasto. Defina

y = Cantidad de pedido (número de unidades)

D = Tasa de demanda (unidades por unidad de tiempo)

t_0 = Duración del ciclo de pedido (unidades de tiempo)

El nivel de inventario sigue el patrón ilustrado en la figura 13.1. Cuando el inventario llega al nivel cero, se recibe al instante un pedido con un tamaño de y unidades. Las existencias se agotan uniformemente a una tasa de demanda constante, D . El ciclo de pedido de este patrón es

$$t_0 = \frac{y}{D} \text{ unidades de tiempo}$$

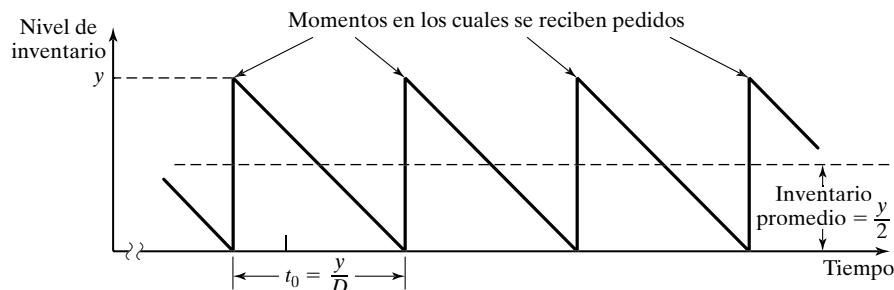
El modelo de costo requiere dos parámetros de costo:

K = Costo de preparación asociado con la colocación de un pedido (dólares por pedido)

h = Costo de retención (dólares por unidad de inventario por unidad de tiempo)

FIGURA 13.1

Patrón de inventario en el modelo EOQ clásico



Dado que el nivel de inventario promedio es $\frac{y}{2}$, el costo total por unidad de tiempo (TCU, por las siglas de *total cost per unit time*) es

$$\begin{aligned} \text{TCU}(y) &= \frac{\text{Costo de preparación}}{\text{por unidad de tiempo}} + \frac{\text{Costo de retención}}{\text{por unidad de tiempo}} \\ &= \frac{\text{Costo de preparación} + \text{Costo de retención por el ciclo } t_0}{t_0} \\ &= \frac{K + h\left(\frac{y}{2}\right)t_0}{t_0} \\ &= \frac{K}{\left(\frac{y}{D}\right)} + h\left(\frac{y}{2}\right) \end{aligned}$$

El valor óptimo de la cantidad de pedido y se determina minimizando el $\text{TCU}(y)$. Suponiendo que y sea continua, una condición necesaria para la optimalidad es

$$\frac{d \text{TCU}(y)}{dy} = -\frac{KD}{y^2} + \frac{h}{2} = 0$$

La condición también es suficiente porque $\text{TCU}(y)$ es convexa.

La solución de la ecuación da como resultado la EOQ y^* como

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Así, la política de inventario óptima para el modelo propuesto es

$$\text{Pedir } y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \text{ unidades cada } t_0^* = \frac{y^*}{D} \text{ unidades de tiempo}$$

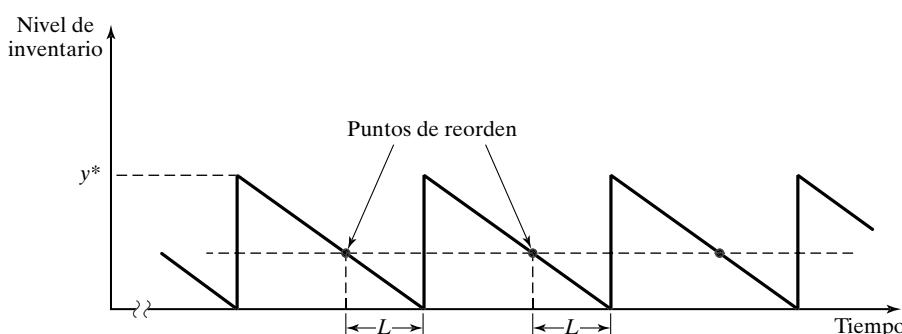
En realidad, un nuevo pedido no tiene que recibirse en el instante que se solicita. En vez de ello, puede presentarse un **tiempo de espera** positivo L , entre la colocación y la recepción de un pedido, ya que el **punto de reorden** ocurre cuando el nivel del inventario se reduce a LD unidades.

En la figura 13.2 se supone que el tiempo de espera L es menor que la duración del ciclo t_0^* , lo que generalmente no es así. En tales casos, el tiempo de espera efectivo se define como

$$L_e = L - nt_0^*$$

FIGURA 13.2

Punto reorden en el modelo EOQ clásico



El parámetro n es el valor entero más grande no mayor que $\frac{L}{t_0^*}$. La fórmula reconoce que después de n ciclos el intervalo real entre la colocación y la recepción de dos pedidos sucesivos es L_e . Por lo tanto, el punto de reorden ocurre cuando el inventario llega a $L_e D$ unidades, y la política de inventario puede volverse a formular como

Pedir la cantidad y^* siempre que el nivel del inventario se reduzca a $L_e D$ unidades.

Ejemplo 13.3-1

Las luces de neón en el campus de la U de A se reemplazan a razón de 100 unidades por día. La planta física pide las luces de neón de forma periódica. Iniciar un pedido de compra cuesta \$100. Se estima que el costo de una luz de neón almacenada es de aproximadamente \$.02 por día. El tiempo de espera entre la colocación y la recepción de un pedido son 12 días. Determine la política de inventario óptima para pedir las luces de neón.

Con base en los datos del problema, se tiene

$$D = 100 \text{ unidades por día}$$

$$K = \$100 \text{ por pedido}$$

$$h = \$.02 \text{ por unidad por día}$$

$$L = 12 \text{ días}$$

Por lo tanto,

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times \$100 \times 100}{.02}} = 1000 \text{ luces de neón}$$

La duración del ciclo asociado es

$$t_0^* = \frac{y^*}{D} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ días}$$

Como el tiempo de espera L ($= 12$ días) excede la duración del ciclo t_0^* ($= 10$ días), se debe calcular L_e . El número de ciclos enteros incluidos en L es

$$n = (\text{entero más grande } \leq \frac{L}{t_0^*}) = (\text{entero más grande } \leq \frac{12}{10}) = 1$$

Entonces,

$$L_e = L - nt_0^* = 12 - 1 \times 10 = 2 \text{ días}$$

Por consiguiente, el punto de reorden ocurre cuando el nivel del inventario se reduce a

$$L_e D = 2 \times 100 = 200 \text{ luces de neón}$$

La política de inventario es

Pedir 1000 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 200 unidades.

El costo de inventario diario asociado con la política propuesta es

$$\begin{aligned} \text{TCU}(y) &= \frac{K}{\left(\frac{y}{D}\right)} + h\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{\$100}{\left(\frac{1000}{100}\right)} + \$.02 \left(\frac{1000}{2}\right) = \$20 \text{ por día} \end{aligned}$$

	B	C	D
General Economic Order Quantity (EOQ)			
2	Input data: (Enter -1 in column C if data element does not apply)		
3	Item cost, c_1 =	-1	
4	Qty discount limit, q =	-1	
5	Item cost, c_2 =	-1	
6	Setup cost, K =	100	
7	Demand rate, D =	100	
8	Production rate, a =	-1	
9	Unit holding cost, h =	0.02	
10	Unit penalty cost, p =	-1	
11	Lead time, L =	12	
12	Model output results:		
13	Order qty, y^* =	1000.00	
14	Shortage qty, w^* =	0.00	
15	Reorder point, R =	200.00	
16	TCU(y^*) =	20.00	
17	Purchase/prod. Cost =	0.00	
18	Setup cost/unit time =	10.00	
19	Holding cost /unit time =	10.00	
20	Shortage cost/unit time =	0.00	
21	<i>Optimal inventory policy: Order 1000.00 units when level drops to 200.00 units</i>		
22	Model intermediate calculations:		
23	ym =	1000.00	
24	TCU1(ym)=	Not applicable	
25	Q-equation:	Not applicable	
26	Q =	Not applicable	
27	cycle length, t_0 =	10.00	
28	Optimization zone =	Not applicable	
29	Effective lead time, L_e =	2.00	

FIGURA 13.3

Solución del ejemplo 13.3-1 en Excel (archivo *excelEOQ.xls*)

Momento de Excel

El archivo *excelEOQ.xls* está diseñado para realizar los cálculos del EOQ general con desabasto y operación simultánea de producción y consumo (vea el problema 13-12). También resuelve la situación de reducción de precios presentada en la sección 13.3.2. Para utilizar la plantilla con el caso especial del ejemplo 13.3-1, ingrese -1 en las celdas C3:C5, C8 y C10 para indicar que los datos correspondientes no son aplicables, como se muestra en la figura 13.3.

Momento, ¡ajá! Historia de la EOQ o ¡dando crédito a quien lo merece!

Prácticamente toda la literatura de control de inventarios (incluyendo las ediciones 3a. a 9a. de este libro) ha identificado la EOQ clásica como la “fórmula de Wilson”, en reconocimiento a R.H. Wilson, quien, como consultor de negocios y la industria, contribuyó a promover el uso de la fórmula. Pero en realidad la fórmula fue desarrollada por Ford W. Harris en 1913,³ unos 15 años antes de que Wilson comenzara a publicar reportes sobre

³ Harris, Ford W. [Reimpresión de 1913] “How Many Parts to Make at Once”, *Operations Research*, vol. 38, núm. 6, pp. 947-950, 1990.

su uso en trabajos de consultoría. Sin embargo, la contribución de Harris fue obscurecida y extraviada, ya sea accidentalmente o por diseño, durante casi 75 años hasta que Donald Erlenkotter de la Universidad de California en Los Ángeles puso las cosas en claro y publicó una serie de artículos a partir de 1989, donde detallaba las circunstancias que llevaron a ese lamentable lapso en la historia de la EOQ.⁴

Tal vez una de las razones para no dar a Harris su debido crédito es que no era académico y, por lo tanto, le faltaba la exposición que se goza en los círculos académicos. De hecho, Harris no tenía ninguna educación formal más allá de un diploma de bachillerato. Sin embargo, a través de tutoría y autoestudio, fue contratado como ingeniero en Westinghouse, donde patentó numerosas invenciones. Más tarde, una vez más basándose en el autoaprendizaje, decidió cambiar de carrera y se convirtió en un exitoso abogado de patentes.

13.3.2 EOQ con reducciones de precios

Este modelo es igual al de la sección 13.3.1, excepto que el artículo en inventario puede adquirirse con un descuento, si el tamaño del pedido, y , excede un límite dado, q . Matemáticamente, el precio de compra unitario, c , está dado como

$$c = \begin{cases} c_1, & \text{si } y \leq q \\ c_2, & \text{si } y > q \end{cases}, \quad c_1 > c_2$$

Por consiguiente,

$$\text{Costo de compra por unidad de tiempo} = \begin{cases} \frac{c_1 y}{t_0} = \frac{c_1 y}{\left(\frac{y}{D}\right)} = Dc_1, & y \leq q \\ \frac{c_2 y}{t_0} = \frac{c_2 y}{\left(\frac{y}{D}\right)} = Dc_2, & y > q \end{cases}$$

Si se utiliza la notación de la sección 13.3.1, el costo total por unidad de tiempo es

$$\text{TCU}(y) = \begin{cases} \text{TCU}_1(y) = Dc_1 + \frac{KD}{y} + \frac{h}{2}y, & y \leq q \\ \text{TCU}_2(y) = Dc_2 + \frac{KD}{y} + \frac{h}{2}y, & y > q \end{cases}$$

Las funciones TCU_1 y TCU_2 se grafican en la figura 13.4. Debido a que las dos funciones difieren sólo por una cantidad constante, sus mínimos deben coincidir en

$$y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

⁴ Erlenkotter, D., "Ford Whitman Harris's Economical Lot Size Model," *International Journal of Production Economics*, vol. 155, pp. 12-15, 2014.

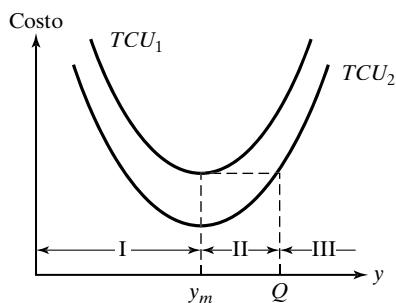


FIGURA 13.4

Función de costo de inventario con reducciones de precio

La determinación de la cantidad de pedido óptima y^* depende de dónde queda el punto de reducción de precios, q , respecto de las zonas I, II y III, delineadas en la figura 13.4 por los intervalos $(0, y_m]$, $(y_m, Q]$ y (Q, ∞) , respectivamente. El valor de $Q (> y_m)$ se determina a partir de la ecuación

$$TCU_2(Q) = TCU_1(y_m)$$

o bien,

$$c_2 D + \frac{KD}{Q} + \frac{hQ}{2} = TCU_1(y_m)$$

la cual se simplifica a

$$Q^2 + \left(\frac{2(c_2 D - TCU_1(y_m))}{h} \right) Q + \frac{2KD}{h} = 0$$

En la figura 13.5 se muestra que la cantidad óptima deseada y^* es

$$y^* = \begin{cases} y_m, & \text{si } q \text{ está en las zonas I o III} \\ q, & \text{si } q \text{ está en la zona II} \end{cases}$$

Los pasos para determinar y^* son como sigue:

Paso 1. Determine $y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$. Si q está en la zona I, entonces $y^* = y_m$. De lo contrario, vaya al paso 2.

Paso 2. Determine $Q (> y_m)$ a partir de la ecuación Q

$$Q^2 + \left(\frac{2(c_2 D - TCU_1(y_m))}{h} \right) Q + \frac{2KD}{h} = 0$$

Defina las zonas II y III. Si q está en la zona II, $y^* = q$. De lo contrario, q está en la zona III, y $y^* = y_m$.

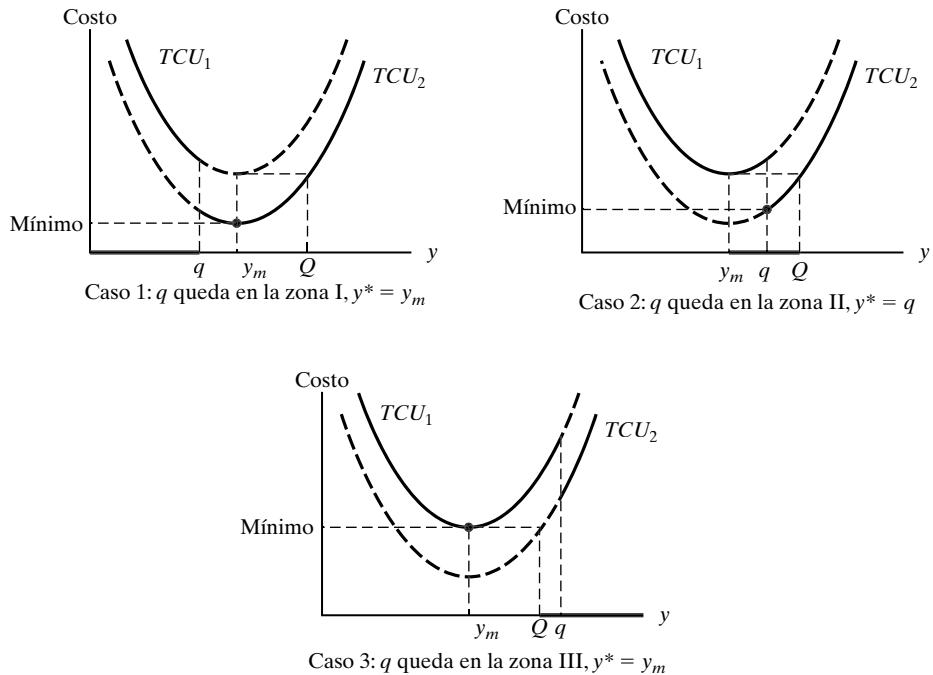


FIGURA 13.5

Solución óptima de los problemas de inventario con reducciones de precio

Ejemplo 13.3-2

LubeCar se especializa en cambios rápidos de aceite automotriz. El taller compra el aceite a granel a \$3 por galón descontado a \$2.50 por galón, si la cantidad de pedido es de más de 1000 galones. El taller atiende aproximadamente 150 automóviles por día, y cada cambio de aceite requiere 1.25 galones. LubeCar almacena el aceite a granel a un costo de \$.02 por galón al día. Asimismo, el costo de colocar un pedido es de \$20. El tiempo de espera es de 2 días para la entrega. Determine la política de inventario óptima.

El consumo de aceite por día es

$$D = 150 \text{ autos por día} \times 1.25 \text{ galones por auto} = 187.5 \text{ galones por día}$$

También se tiene

$$h = \$0.02 \text{ por galón por día}$$

$$K = \$20 \text{ por pedido}$$

$$L = 2 \text{ días}$$

$$c_1 = \$3 \text{ por galón}$$

$$c_2 = \$2.50 \text{ por galón}$$

$$q = 1000 \text{ galones}$$

Paso 1. Calcule

$$y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 20 \times 187.5}{.02}} = 612.37 \text{ galones}$$

Como $q = 1000$ es mayor que $y_m = 612.37$, es necesario ir al paso 2.

Paso 2. Determine Q .

$$\begin{aligned} \text{TCU}_1(y_m) &= c_1 D + \frac{KD}{y_m} + \frac{hy_m}{2} \\ &= 3 \times 187.5 + \frac{20 \times 187.5}{612.37} + \frac{.02 \times 612.37}{2} \\ &= 574.75 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la ecuación Q se calcula como

$$Q^2 + \left(\frac{2 \times (2.5 \times 187.5 - 574.75)}{.02} \right) Q + \frac{2 \times 20 \times 187.5}{.02} = 0$$

o bien,

$$Q^2 - 10,599.74 Q + 375,000 = 0$$

La solución $Q = 10,564.25 (> y_m)$ define las zonas como

$$\text{Zona I} = (0, 612.37)$$

$$\text{Zona II} = (612.37, 10,564.25)$$

$$\text{Zona III} = (10,564.25, \infty)$$

Ahora, $q (= 1000)$ queda en la zona II, lo que produce la cantidad de pedido óptima $y^* = q = 1000$ galones.

Dado un tiempo de espera de 2 días, el punto de reorden es $2D = 2 \times 187.5 = 375$ galones. Por lo tanto, la política de inventario óptima es

Pedir 1000 galones cuando el nivel de inventario se reduzca a 375 galones.

Momento de Excel

El archivo *excelEOQ.xls* resuelve la situación de precio descontado como un caso especial de la plantilla en la figura 13.3. Introduzca los datos aplicables en la sección de datos de entrada C3:C11. El resultado presenta la política de inventario óptima, así como los cálculos intermedios del modelo.

13.3.3 EOQ de varios artículos con limitación de almacenamiento

Este modelo se ocupa de varios artículos, cuyas fluctuaciones de inventario individuales siguen el patrón mostrado en la figura 13.1 (no se permite desabasto). La diferencia es que los artículos compiten por un espacio de almacenamiento limitado.

Defina para el artículo $i, i = 1, 2, \dots, n$,

D_i = Tasa de demanda

K_i = Costo de preparación

h_i = Costo de retención unitario por unidad de tiempo

y_i = Cantidad de pedido

a_i = Requerimiento de área de almacenamiento por unidad de inventario

A = Área de almacenamiento máxima disponible para todos los n artículos

Conforme al supuesto de que no se permite desabasto, el modelo matemático que representa la situación del inventario se da como

$$\text{Minimizar } \text{TCU}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{K_i D_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2} \right)$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^n a_i y_i \leq A$$

$$y_i > 0, i = 1, 2, \dots$$

Para resolver el problema, primero se aborda la situación no restringida:

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i}}, i = 1, 2, \dots, n$$

Si la solución satisface la restricción, entonces termina el proceso. De lo contrario, la restricción es vinculante y debe tomarse en cuenta.

En ediciones anteriores de este libro se utiliza el algoritmo lagrangeano (un tanto complicado) y cálculos de prueba y error para determinar la solución óptima restringida. Con la disponibilidad de poderosos programas de cómputo (AMPL y Solver), el problema se resuelve de forma directa como un programa no lineal; esto se demostrará en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13.3-3

Los datos siguientes describen tres artículos de inventario.

Artículo i	K_i (\$)	D_i (unidades por día)	h_i (\$)	a_1 (ft^2)
1	10	2	.30	1
2	5	4	.10	1
3	15	4	.20	1
Área de almacenamiento disponible total = 25 ft^2				

Los valores óptimos no restringidos, $y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i}}$, $i = 1, 2, 3$ son 11.55, 20.00 y 24.49 unidades, respectivamente, los cuales infringen la restricción de almacenamiento $y_1 + y_2 + y_3 \leq 25$. El problema restringido puede resolverse como un programa lineal utilizando Solver o AMPL, según se explica a continuación.

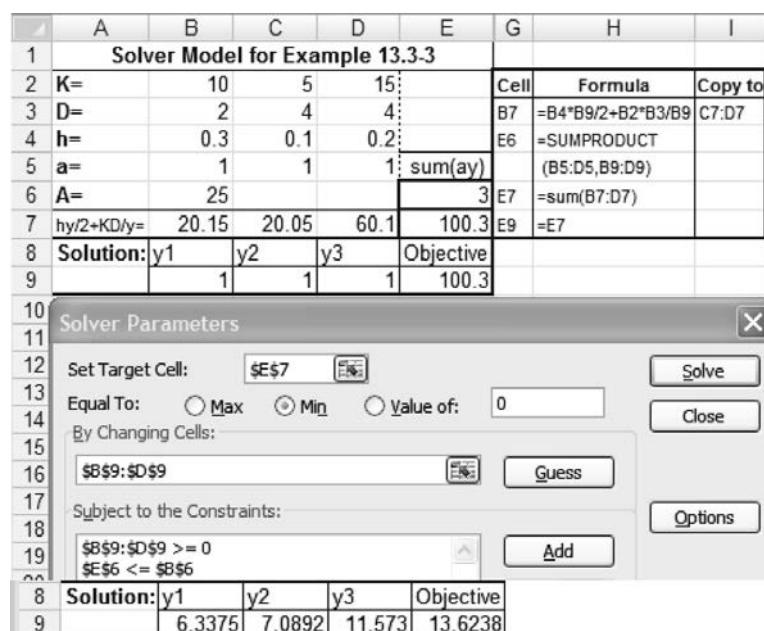
La solución óptima es $y_1^* = 6.34$ unidades, $y_2^* = 7.09$ unidades, $y_3^* = 11.57$ unidades, y el costo = \$13.62/día.

Momento de Solver

La figura 13.6 muestra la forma como se utiliza Solver para resolver el ejemplo 13.3-3 como un programa no lineal (archivo *solverConstrEOQ.xls*). Los detalles de las fórmulas usadas en la plantilla y de los parámetros de Solver se muestran en la figura. Como con la mayoría de los programas no lineales, deben darse los valores iniciales de la solución (en esta plantilla, $y_1 = y_2 = y_3 = 1$ en la fila 9). Un valor inicial *distinto de cero* es obligatorio porque la función objetivo incluye la división entre y_i . De hecho, sería una buena idea reemplazar $K_i D_i / y_i$ con $K_i D_i / (y_i + \Delta)$, donde Δ es un valor positivo muy pequeño, para evitar la división entre cero durante las iteraciones. Por lo general, quizás se requieran valores iniciales diferentes antes de que se determine una solución (óptima local). En este ejemplo, la solución resultante es el óptimo global porque la función objetivo y las restricciones tienen buen comportamiento (función objetivo convexa y espacio de soluciones convexo).

FIGURA 13.6

Plantilla de Solver para el ejemplo 13.3-3 (archivo *solverConstrEOQ.xls*)



13.4 MODELOS DINÁMICOS DE LA EOQ

Estos modelos difieren de los modelos de la sección 13.3 en dos aspectos:

1. El nivel del inventario se revisa periódicamente a lo largo de un número finito de períodos iguales.
2. La demanda por periodo, aun cuando es determinística, es dinámica, ya que varía de un periodo al siguiente.

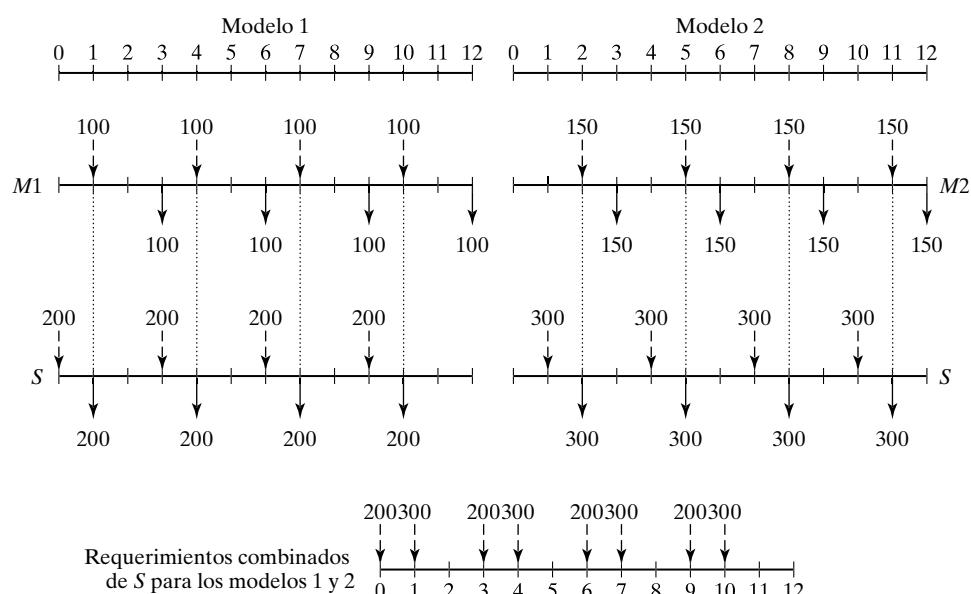
Una situación en la que ocurre la demanda determinística dinámica es la **planeación de requerimientos de materiales** (MRP, por las siglas de *materials requirements planning*). La idea de la MRP se describe con un ejemplo. Suponga que las demandas trimestrales durante el año siguiente para dos modelos finales, $M1$ y $M2$, de un producto dado son 100 y 150 unidades, respectivamente. Al final de cada trimestre se entregan los lotes trimestrales. El tiempo de espera de producción es de 2 meses para $M1$ y de 1 mes para $M2$. Cada unidad de $M1$ y $M2$ utiliza 2 unidades de un subensamblaje S . El tiempo de espera para la producción de S es de 1 mes.

La figura 13.7 muestra los programas de producción para $M1$ y $M2$. Los programas se iniciaron con la demanda trimestral de los dos modelos (mostrada por flechas continuas) que ocurre al final de los meses 3, 6, 9 y 12. Dados los tiempos de espera para $M1$ y $M2$, las flechas discontinuas indican los inicios planeados de cada lote de producción.

Para iniciar a tiempo la producción de los dos modelos, la entrega del subensamblaje S debe coincidir con la ocurrencia de las flechas discontinuas $M1$ y $M2$. Esta información se muestra por medio de las flechas continuas en la gráfica S , donde la demanda S resultante es de 2 unidades por unidad de $M1$ y $M2$. Si se emplea un tiempo de espera de 1 mes, las flechas discontinuas en la gráfica S indican los programas de producción de S . De acuerdo con los dos programas, la demanda

FIGURA 13.7

Ejemplo de la demanda dinámica generada por MRP



da combinada de S correspondiente a $M1$ y $M2$ puede determinarse entonces como se muestra en la parte inferior de la figura 13.7. La demanda *variable pero conocida* que resulta de S es típica de la situación donde se aplica la EOQ dinámica.

En esta sección se presentan dos modelos. El primero supone que no hay costo de preparación (de pedido), y el segundo asume que sí lo hay. Esa variación aparentemente “pequeña” hace una diferencia en la complejidad del modelo.

13.4.1 Modelo de EOQ sin costo de preparación

Este modelo implica un horizonte de planeación de n períodos iguales. Cada período tiene una capacidad de producción limitada con uno o más niveles de producción (por ejemplo, el tiempo regular y el tiempo extra representan dos niveles de producción). Un período actual puede producir más que su demanda inmediata para satisfacer la necesidad de períodos posteriores, en cuyo caso ocurre un costo de retención.

Los supuestos generales del modelo son:

1. No se incurre en costo de preparación en ningún período.
2. No se permite que haya desabasto.
3. La función de costo de producción unitario en cualquier período es constante o tiene costos marginales crecientes (convexos).
4. El costo de retención unitario en cualquier período es constante.

La ausencia de desabasto significa que la producción demorada en períodos futuros no puede satisfacer la demanda en un período actual. Este supuesto requiere que la capacidad de producción acumulada para los períodos 1, 2, ..., e i sea igual al menos a la demanda acumulada durante los mismos períodos.

En la figura 13.8 se ilustra la función de costo de producción unitario con márgenes crecientes. Por ejemplo, la producción durante el tiempo regular y el tiempo extra corresponde a dos niveles donde el costo de producción unitario durante el tiempo extra excede al del tiempo regular.

El problema de n períodos puede formularse como un modelo de transporte (vea el capítulo 5) con kn orígenes y n destinos, donde k es el número de niveles de producción por período (por ejemplo, $k = 2$ si cada período utiliza tiempo regular y tiempo extra). La capacidad de producción de cada uno de los kn orígenes de niveles de producción es igual a las cantidades de oferta. Las cantidades

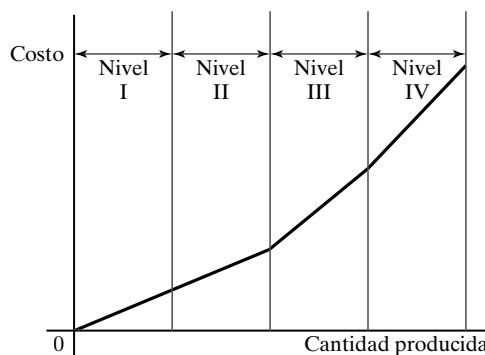


FIGURA 13.8
Función convexa del costo de producción unitario

demandadas se especifican por la demanda de cada periodo. El costo de “transporte” unitario desde un origen hasta un destino es la suma de los costos de producción y retención aplicables por unidad. La solución del problema como un modelo de transporte determina las cantidades de producción a un costo mínimo en cada nivel de producción.

El modelo de transporte resultante puede resolverse sin utilizar la conocida técnica de transporte presentada en el capítulo 5. La validez del nuevo algoritmo de solución se fundamenta en los supuestos especiales de que no hay desabasto y en una función convexa del costo de producción.

Ejemplo 13.4-1

Metalco produce deflectores de chiflones que se utilizan en chimeneas domésticas durante los meses de diciembre a marzo. Al inicio, la demanda es lenta, alcanza su máximo a mediados de la temporada, y baja hacia el final. Debido a la popularidad del producto, Metalco puede utilizar tiempo extra para satisfacer la demanda. La siguiente tabla proporciona las capacidades de producción y las demandas durante los cuatro meses de invierno.

Mes	Capacidad		
	Tiempo regular (unidades)	Tiempo extra (unidades)	Demanda (unidades)
1	90	50	100
2	100	60	190
3	120	80	210
4	110	70	160

El costo de producción unitario en cualquier periodo es de \$6 durante el tiempo regular y de \$9 durante el tiempo extra. El costo de retención por unidad por mes es de \$.10.

Para asegurarse de que el modelo tenga una solución factible cuando no se permite desabasto, la oferta acumulada de cada mes no puede ser menor que su demanda acumulada, como se muestra en la tabla siguiente:

Mes	Oferta acumulada	Demanda acumulada
1	90 + 50 = 140	100
2	140 + 100 + 60 = 300	100 + 190 = 290
3	300 + 120 + 80 = 500	290 + 210 = 500
4	500 + 110 + 70 = 680	500 + 160 = 660

En la tabla 13.2 se resumen el modelo y su solución. Los símbolos R_i y O_i representan niveles de producción durante el tiempo regular y el tiempo extra en el periodo i , $i = 1, 2, 3, 4$. Debido a que la oferta acumulada en el periodo 4 excede la demanda acumulada, se agrega un destino excedente ficticio para equilibrar el modelo como se muestra en la tabla 13.2. Todas las rutas de “transporte” desde un periodo anterior a uno actual están bloqueadas porque no se permite desabasto.

El costo de “transporte” unitario es la suma de los costos de producción y retención aplicables. Por ejemplo, el costo unitario de R_1 al periodo 1 es igual al costo de producción unitario únicamente (= \$6), en tanto que el costo unitario de O_1 al periodo 4 es igual al costo de producción unitario en O_1 más el costo de retención unitario desde el periodo 1 hasta el periodo 4; es decir, $\$9 + (\$.1 + \$.1 + \$.1) = \$9.30$. El costo unitario para cualquier destino *excedente* es cero.

El modelo se resuelve iniciando en la columna 1 y terminando en la columna *excedente*. Para cada columna, la demanda se satisface dando prioridad a sus rutas más económicas.⁵ Para la columna 1, la ruta ($R_1, 1$)

⁵ Para una comprobación de la optimalidad de este procedimiento, vea S. M. Johnson, “Sequential Production Planning over Time at Minimum Cost”, *Management Science*, vol. 3, pp. 435-437, 1957.

TABLA 13.2 Solución del ejemplo 13.4-1

	1	2	3	4	Excedente	
R_1	6	6.1	6.2	6.3	0	90
O_1	9	9.1	9.2	9.3	0	$50 \rightarrow 40 \rightarrow 10$
R_2	100	6	6.1	6.2	0	100
O_2	30	9	9.1	9.2	0	60
R_3	10	6	6.1	6.2	0	120
O_3	100	9	9.1	9.2	0	80
R_4	10	6	6.1	6.2	0	110
O_4	30	10	9	9.1	0	70 \rightarrow 20
	100	190	210	160	20	
	↓	↓	↓	↓		
	10	90	90	50		
	↓	↓				
	30	10				

es la más económica y, por lo tanto, se le asigna la cantidad factible máxima = $\min\{90, 100\} = 90$ unidades. Esta asignación deja 10 unidades no satisfechas en la columna 1. La siguiente ruta más económica en la columna 1 es ($O_1, 1$), a la cual se le asigna 10 (= $\min\{50, 10\}$). Ahora está satisfecha la demanda durante el periodo 1.

Luego es necesario ir a la columna 2. Las asignaciones en esta columna ocurren en el orden siguiente: 100 unidades a ($R_2, 2$), 60 unidades a ($O_2, 2$) y 30 unidades a ($O_1, 2$). Los costos unitarios de estas asignaciones son \$6, \$9 y \$9.10, respectivamente. No se utiliza la ruta ($R_1, 2$), cuyo costo unitario es de \$6.10, porque toda la oferta de R_1 ya se asignó al periodo 1.

Al continuar de la misma manera, se satisfacen las demandas de la columna 3 y luego de la columna 4. La solución óptima (mostrada en negritas en la tabla 13.2) se resume como sigue:

Periodo	Programa de producción
Tiempo regular 1	Producir 90 unidades durante el periodo 1.
Tiempo extra 1	Producir 50 unidades: 10 unidades durante el periodo 1, 30 durante el 2, y 10 durante el 3.
Tiempo regular 2	Producir 100 unidades durante el periodo 2.
Tiempo extra 2	Producir 60 unidades durante el periodo 2.
Tiempo regular 3	Producir 120 unidades durante el periodo 3.
Tiempo extra 3	Producir 80 unidades durante el periodo 3.
Tiempo regular 4	Producir 110 unidades durante el periodo 4.
Tiempo extra 4	Producir 50 unidades durante el periodo 4, con 20 unidades de capacidad ociosa.

El costo total asociado es $90 \times \$6 + 10 \times \$9 + 30 \times \$9.10 + 100 \times \$6 + 60 \times \$9 + 10 \times \$9.20 + 120 \times \$6 + 80 \times \$9 + 110 \times \$6 + 50 \times \$9 = \$4685$.

13.4.2 Modelo de EOQ con costo de preparación

En esta situación no se permite desabasto, y se incurre en un costo de preparación cada vez que se inicia un nuevo lote de producción. Se presentarán dos métodos de solución: un algoritmo de programación dinámica exacto y una heurística.

En la figura 13.9 se resume esquemáticamente la situación del inventario. Los símbolos mostrados en la figura se definen para el periodo i , $i = 1, 2, \dots, n$, como

z_i = Cantidad pedida

D_i = Demanda durante el periodo i

x_i = Inventario al inicio del periodo i

Los elementos de costo de la situación se definen como

K_i = Costo de preparación en el periodo i

h_i = Costo de retención de una unidad de inventario del periodo i a $i + 1$

La función de costo de producción asociado para el periodo i es

$$C_i(z_i) = \begin{cases} 0, & z_i = 0 \\ K_i + c_i(z_i), & z_i > 0 \end{cases}$$

La función $c_i(z_i)$ es la función de costo de producción marginal, dada z_i .

Algoritmo de programación dinámica general. En la ausencia de desabasto, el modelo de inventario se basa en minimizar la suma de los costos de producción y retención en todos los n períodos. Con fines de simplificación, se supondrá que el costo de retención en el periodo i se basa en el inventario al final del periodo, definido como

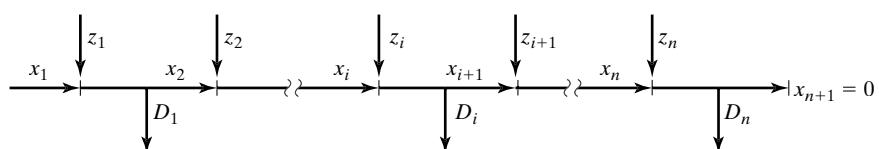
$$x_{i+1} = x_i + z_i - D_i$$

Para la ecuación recursiva de avance, el estado en la etapa (periodo) i se define como x_{i+1} , el nivel del inventario al final del periodo. En el caso extremo, el inventario restante, x_{i+1} , puede satisfacer la demanda en todos los períodos restantes, es decir,

$$0 \leq x_{i+1} \leq D_{i+1} + \dots + D_n$$

FIGURA 13.9

Elementos del modelo de inventario dinámico con costo de preparación



Sea $f_i(x_{i+1})$ el costo mínimo del inventario para los períodos 1, 2, ..., e i dado el inventario al final del período x_{i+1} . La ecuación recursiva de avance es

$$f_1(x_2) = \min_{z_1=D_1+x_2-x_1} \{C_1(z_1) + h_1 x_2\}$$

$$f_i(x_{i+1}) = \min_{0 \leq z_i \leq D_i+x_{i+1}} \{C_i(z_i) + h_i x_{i+1} + f_{i-1}(x_{i+1} + D_i - z_i)\}, i = 2, 3, \dots, n$$

Observe que durante el período 1, z_1 es exactamente igual a $D_1 + x_2 - x_1$. Para $i > 1$, z_i puede ser cero porque D_i se puede satisfacer a partir de la producción en períodos precedentes.

Ejemplo 13.4-2

La siguiente tabla presenta los datos de una situación de inventario de 3 períodos.

Período i	Demanda D_i (unidades)	Costo de preparación K_i (\$)	Costo de retención h_i (\$)
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

La demanda ocurre en unidades discretas, y el inventario de inicio es $x_1 = 1$ unidad. El costo de producción unitario, $c_i(z_i)$, es de \$10 para las primeras 3 unidades y de \$20 para cada unidad adicional, es decir,

$$c_i(z_i) = \begin{cases} 10z_i, & 0 \leq z_i \leq 3 \\ 30 + 20(z_i - 3), & z_i \geq 4 \end{cases}$$

Determine la política de inventario óptima.

Período 1: $D_1 = 3, 0 \leq x_2 \leq 2 + 4 = 6, z_1 = x_2 + D_1 - x_1 = x_2 + 2$

$C_1(z_1) + h_1 x_2$								Solución óptima			
x_2	$h_1 x_2$	$C_1(z_1) = 23$	2	3	4	5	6	7	8	$f_1(x_2)$	z_1^*
0	0	23								23	2
1	1		34							34	3
2	2			55						55	4
3	3				76					76	5
4	4					97				97	6
5	5						118			118	7
6	6							139		139	8

Observe que debido a que $x_1 = 1$, el valor mínimo de z_1 es $D_1 - x_1 = 3 - 1 = 2$.

Periodo 2: $D_2 = 2$, $0 \leq x_3 \leq 4$, $0 \leq z_2 \leq D_2 + x_3 = x_3 + 2$

x_3	$h_2 x_3$	$C_2(z_2) + h_2 x_3 + f_1(x_3 + D_2 - z_2)$							Solución óptima
		$z_2 = 0$	1	2	3	4	5	6	
$C_2(z_2) = 0$		17	27	37	57	77	97	$f_2(x_3)$	z_2^*
0	0	0 + 55 = 55	17 + 34 = 51	27 + 23 = 50					50 2
1	3	3 + 76 = 79	20 + 55 = 75	30 + 34 = 64	40 + 23 = 63				63 3
2	6	6 + 97 = 103	23 + 76 = 99	33 + 55 = 88	43 + 34 = 77	63 + 23 = 86			77 3
3	9	9 + 118 = 127	26 + 97 = 123	36 + 76 = 112	46 + 55 = 101	66 + 34 = 100	86 + 23 = 109		100 4
4	12	12 + 139 = 151	29 + 118 = 147	39 + 97 = 136	49 + 76 = 125	69 + 55 = 124	89 + 34 = 123	109 + 23 = 132	123 5

Periodo 3: $D_3 = 4$, $x_4 = 0$, $0 \leq z_3 \leq D_3 + x_4 = 4$

x_4	$h_3 x_4$	$C_3(z_3) + h_3 x_4 + f_2(x_4 + D_3 - z_3)$					Solución óptima
		$z_3 = 0$	1	2	3	4	
$C_3(z_3) = 0$		16	26	36	56	$f_3(x_4)$	z_3^*
0	0	0 + 123 = 123	16 + 100 = 116	26 + 77 = 103	36 + 63 = 99	56 + 50 = 106	99 3

La solución óptima se lee como sigue:

$$(x_4 = 0) \rightarrow [z_3 = 3] \rightarrow (x_3 = 0 + 4 - 3 = 1) \rightarrow [z_2 = 3] \\ \rightarrow (x_2 = 1 + 2 - 3 = 0) \rightarrow [z_1 = 2]$$

Por lo tanto, la solución óptima es $z_1^* = 2$, $z_2^* = 3$ y $z_3^* = 3$, con un costo total de \$99.

Momento de Excel

La plantilla *excelDPInv.xls* está diseñada para resolver el problema general de inventario de PD con hasta 10 períodos. El diseño de la hoja de cálculo es parecido al de *excelKnapsack.xls* de la sección 12.3.1, donde los cálculos se realizan etapa por etapa y se requiere que el usuario ingrese los datos para vincular las etapas sucesivas.

En la figura 13.10 se muestra la aplicación de *excelDPInv.xls* al ejemplo 13.4-2. Los datos de entrada se ingresan para cada etapa. Los cálculos se iniciaron con el periodo 1. Observe cómo se ingresa la función de costo $c_i(z_i)$ en la fila 3: (G3 = 10, H3 = 20, I3 = 3) significa que el costo unitario es de \$10 para los primeros tres artículos y de \$20 para los artículos adicionales. Observe también que la cantidad ingresada para D_1 debe ser la cantidad neta una vez que se haya amortizado el inventario inicial ($= 3 - x_1 = 3 - 1 = 2$). Asimismo, tiene que crear los valores factibles de la variable z_1 . La hoja de cálculo verifica de forma automática si los valores ingresados son correctos, y envía mensajes autoexplicativos en la fila 6 (sí, no, o borrar).

Periodo 1:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	S	T	U	V	W	X	Y	Z
General (Forward) Dynamic Programming Inventory Model																		
1	I	Number of periods, N=	3	Current period=	1													
2	N	K1=	3	h1=	1	c1(z1)=	10	20	3									
3	P	Period	1	2	3													
4	U	D(1 to 3)=	2	2	4													
5	T	Are z1 values correct?	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes									
6		Period 0	z1=	2	3	4	5	6	7	8								
7		f0	C1(z1)=	23	33	53	73	93	113	133	f1	z1						
8	S	x2=	0	23	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	23	2	3	76	5			
9	T	x2=	1	1111111	34	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	34	3	4	97	6			
10	A	x2=	2	1111111	1111111	55	1111111	1111111	1111111	1111111	55	4	5	118	7			
11	G	x2=	3	1111111	1111111	1111111	76	1111111	1111111	1111111	76	5	6	139	8			
12	E	x2=	4	1111111	1111111	1111111	1111111	97	1111111	1111111	97	6						
13		x2=	5	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	118	1111111	118	7					
14		x2=	6	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	139	139	8						

Periodo 2:

Periodo 3:

FIGURA 13.10

Solución de PD en Excel para el ejemplo 13.4-2 (archivo *excelDPIInv.xls*)

Una vez que se introdujeron todos los datos, los valores óptimos de f_i y z_i para la etapa se dan en las columnas S y T. Luego se crea un registro permanente de la solución para el periodo 1 (x_1, f_1, z_1), en la sección de resumen de la solución óptima de la hoja de cálculo, como se muestra en la figura 13.10. Esto requiere copiar D9:D15 y S9:T15 y luego pegarlas mediante la opción *Pegado especial + valores* (quizá tenga que revisar el procedimiento para crear el registro permanente que se da junto con *excelKnapsack.xls* en la sección 12.3.1).

Después, en preparación para la etapa 2, copie f_1 del registro permanente y péguela en la columna A, como se indica en la figura 13.10. Todo lo que se requiere ahora es actualizar los datos de entrada para el periodo 2. El proceso se repite para el periodo 3.

Algoritmo de programación dinámica con costos marginales constantes o decrecientes. La PD general dada anteriormente es aplicable con cualquier función de costo. Esta generalización indica que el estado x_i y las alternativas z_i en la etapa i asumen valores en incrementos de 1, lo cual podría dar lugar a tablas grandes cuando las cantidades demandadas son grandes.

Un caso especial del modelo de PD general promete reducir el volumen de los cálculos. En esta situación especial, tanto el costo de producción unitario como el costo de retención unitario

son funciones *no crecientes* (cónicas) de la cantidad de producción y el nivel del inventario, respectivamente. Esta situación suele ocurrir cuando la función de costo unitario es constante o si se permite el descuento por cantidad.

En las condiciones dadas, se puede demostrar que⁶

1. Dado que un inventario inicial cero ($x_1 = 0$) es óptimo para satisfacer la demanda en cualquier periodo i , ya sea con una nueva producción o con un inventario entrante, pero nunca con ambos; es decir, $z_i x_i = 0$ (en el caso de inventario inicial positivo, $x_1 > 0$, la cantidad puede amortizarse con las demandas de los períodos sucesivos hasta que se agote).
2. La cantidad de producción óptima, z_i , durante el periodo i debe ser cero o satisfacer la demanda exacta de uno o más períodos subsiguientes contiguos.

Ejemplo 13.4-3

Un modelo de inventario de 4 períodos opera con los siguientes datos:

Periodo i	Demanda D_i (unidades)	Costo de preparación K_i (\$)
1	76	98
2	26	114
3	90	185
4	67	70

El inventario inicial x_1 es de 15 unidades, el costo de producción unitario es de \$2, y el costo de retención unitario por periodo es de \$1 durante todos los períodos (por sencillez, los costos de producción y retención unitarios son iguales durante todos los períodos).

La solución se determina mediante el algoritmo de avance dado anteriormente, excepto que los valores de x_{i+1} y z_i ahora suponen sumas “concentradas” en vez de sumas con incrementos de uno. Debido a que $x_1 = 15$, la demanda del primer periodo se ajusta a $76 - 15 = 61$ unidades.

Periodo 1. $D_1 = 61$

x_2	$h_1 x_2$	$C_1(z_1) + h_1 x_2$				Solución óptima
		$z_1 = 61$	87	177	244	
0	0	220				220 61
26	26		298			298 87
116	116			568		568 177
183	183				769	769 244
Pedir en 1 para		1	1, 2	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	

⁶ Vea H. Wagner y T. Whitin, “Dynamic Version of the Economic Lot Size Model”, *Management Science*, vol. 5, pp. 89-96, 1958. La comprobación de optimalidad impone el supuesto restrictivo de funciones de costo constantes e idénticas durante todos los períodos. Después, A. Veinott Jr. relajó el supuesto para permitir funciones de costo cónicas y diferentes.

Periodo 2. $D_2 = 26$

		$C_2(z_2) + h_2x_3 + f_1(x_3 + D_2 - z_2)$				Solución optima	
		$z_2 = 0$	26	116	183		
x_3	h_2x_3	$C_2(z_2) = 0$	166	346	480	$f_2(x_3)$	z_2^*
0	0	0 + 298 = 298	166 + 220 = 386			298	0
90	90	90 + 568 = 658		436 + 220 = 656		656	116
157	157	157 + 769 = 926			637 + 220 = 857	857	183
Pedir en 2 para		—	2	2, 3	2, 3, 4		

Periodo 3. $D_3 = 90$

		$C_3(z_3) + h_3x_4 + f_2(x_4 + D_3 - z_3)$			Solución optima	
		$z_3 = 0$	90	157		
x_4	h_3x_4	$C_3(z_3) = 0$	365	499	$f_3(x_4)$	z_3^*
0	0	0 + 656 = 656	365 + 298 = 663		656	0
67	67	67 + 857 = 924		566 + 298 = 864	864	157
Pedir en 3 para		—	3	3, 4		

Periodo 4. $D_4 = 67$

		$C_4(z_4) + h_4x_5 + f_3(x_5 + D_4 - z_4)$			Solución optima	
		$z_4 = 0$	67			
x_5	h_4x_5	$C_4(z_4) = 0$	204		$f_4(x_5)$	z_4^*
0	0	0 + 864 = 864	204 + 656 = 860		860	67
Pedir en 4 para		—	4			

La política óptima se determina a partir de las tablas como sigue:

$$(x_5 = 0) \rightarrow [z_4 = 67] \rightarrow (x_4 = 0) \rightarrow [z_3 = 0] \\ \rightarrow (x_3 = 90) \rightarrow [z_2 = 116] \rightarrow (x_2 = 0) \rightarrow [z_1 = 61]$$

De aquí se obtiene $z_1^* = 61$, $z_2^* = 116$, $z_3^* = 0$ y $z_4^* = 67$, a un costo total de \$860.

Momento de Excel

La plantilla *excelWagnerWhitin.xls* es similar a la del modelo general *excelDPlnv.xls*. La única diferencia es que las sumas concentradas se utilizan para el estado x y la alternativa z . Además, por sencillez, la nueva hoja de cálculo no permite el descuento por cantidad. La plantilla está limitada a un máximo de 10 períodos. Recuerde utilizar la opción *Pegado especial + valores* cuando cree el resumen de la solución (columnas Q:V).

Heurística Silver Meal. Esta heurística es válida sólo cuando el costo de producción unitario es constante e idéntico para todos los períodos. Por tal razón sólo equilibra los costos de preparación y retención.

La heurística identifica los períodos futuros sucesivos cuya demanda puede satisfacerse a partir de la producción del periodo actual. El objetivo es minimizar los costos de preparación y retención asociados por periodo.

Suponga que se produce en el periodo i para los períodos $i, i+1, \dots, t, i < t$, y se define $TC(i, t)$ como los costos de preparación y retención asociados para los mismos períodos. Al emplear la misma notación que en los modelos de PD, se tiene

$$TC(i, t) = \begin{cases} K_i & t = i \\ K_i + h_i D_{i+1} + (h_i + h_{i+1}) D_{i+2} + \dots + \left(\sum_{k=i}^{t-1} h_k \right) D_t, & t > i \end{cases}$$

En seguida se define $TCU(i, t)$ como el costo por periodo asociado, es decir,

$$TCU(i, t) = \frac{TC(i, t)}{t - i + 1}$$

Dado un periodo actual i , la heurística determina i^* que minimiza el $TCU(i, t)$.

La función $TC(i, t)$ se calcula en forma recursiva como

$$\begin{aligned} TC(i, i) &= K_i \\ TC(i, t) &= TC(i, t-1) + \left(\sum_{k=i}^{t-1} h_k \right) D_t, t = i+1, i+2, \dots, n \end{aligned}$$

Paso 0. Establezca $i = 1$.

Paso 1. Determine el mínimo local t^* que satisfaga las dos condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} TCU(i, t^* - 1) &\geq TCU(i, t^*) \\ TCU(i, t^* + 1) &\geq TCU(i, t^*) \end{aligned}$$

La heurística indica que se pida la cantidad ($D_i + D_{i+1} + \dots + D_{t^*}$) en el periodo i para los períodos $i, i+1, \dots, y t^*$.

Paso 2. Establezca $i = t^* + 1$. Si $i > n$, deténgase; ya se ha cubierto todo el horizonte de planeación. De lo contrario, vaya al paso 1.

Ejemplo 13.4-4

Encuentre la política de inventario óptima para la siguiente situación de inventario con 6 períodos:

Período i	D_i (unidades)	K_i (\$)	h_i (\$)
1	10	20	1
2	15	17	1
3	7	10	1
4	20	18	3
5	13	5	1
6	25	50	1

El costo de producción unitario es de \$2 para todos los períodos.

Iteración 1 ($i = 1, K_1 = \$20$). La función $TC(1, t)$ se calcula en forma recursiva en t . Por ejemplo, dada $TC(1,1) = \$20, TC(1,2) = TC(1,1) + h_1 D_2 = 20 + 1 \times 15 = \35 .

Período t	D_t	$TC(1,t)$	$TCU(1,t)$
1	10	\$20	$\frac{20}{1} = \$20.00$
2	15	$20 + \frac{1}{1} \times 15 = \35	$\frac{35}{2} = \$17.50$
3	7	$35 + (1 + 1) \times 7 = \94	$\frac{49}{3} = \$16.33$
4	20	$49 + (1 + 1 + 1) \times 20 = \109	$\frac{109}{4} = \$27.25$

El mínimo local ocurre en $t^* = 3$, lo que indica pedir $10 + 15 + 7 = 32$ unidades en el período 1 para los períodos 1 a 3. Establezca $i = t^* + 1 = 3 + 1 = 4$.

Iteración 2 ($i = 4, K_4 = \$18$)

Período t	D_t	$TC(4,t)$	$TCU(4,t)$
4	20	\$18	$\frac{18}{1} = \$18.00$
5	13	$18 + 3 \times 1 = \$57$	$\frac{57}{2} = \$28.50$

Los cálculos muestran que $t^* = 4$, lo cual indica pedir 20 unidades en el período 4 para el período 4. Establezca $i = 4 + 1 = 5$.

Iteración 3 ($i = 5, K_5 = \$5$)

Período t	D_t	$TC(5,t)$	$TCU(5,t)$
5	13	\$5	$\frac{5}{1} = \$5$
6	25	$5 + 1 \times 20 = \$30$	$\frac{30}{2} = \$15$

El mínimo ocurre en $t^* = 5$, lo que indica pedir 13 unidades en el periodo 5 para el periodo 5. En seguida establezca $i = 5 + 1 = 6$. Sin embargo, como $i = 6$ es el último periodo del horizonte de planeación, se deben pedir 25 unidades en el periodo 6 para el periodo 6.

Comentarios. La siguiente tabla compara la solución heurística y la solución de PD exacta. Se ha eliminado el costo de producción unitario en el modelo de programación dinámica porque no está incluido en los cálculos heurísticos.

Periodo	Heurística		Programación dinámica	
	Unidades producidas	Costo (\$)	Unidades producidas	Costo (\$)
1	32	49	10	20
2	0	0	22	24
3	0	0	0	0
4	20	18	20	18
5	13	5	38	30
6	25	50	0	0
Total	90	122	90	92

Los costos del programa de producción heurístico son aproximadamente 32% más que los de la solución de PD (\$122 vs. \$92). El desempeño “inadecuado” de la heurística puede atribuirse a la naturaleza de los datos, ya que el problema puede quedar en los valores de costo de preparación extremos para los períodos 5 y 6. No obstante, el ejemplo muestra que la heurística no tiene la capacidad de “mirar hacia adelante” en busca de mejores oportunidades de programación. Por ejemplo, si se pide en el periodo 5 para los períodos 5 y 6 (en vez de pedir para cada periodo por separado) es posible ahorrar \$25, lo cual reduciría el costo heurístico total a \$97.

Momento de Excel

La plantilla *excelSilverMeal.xls* está diseñada para realizar todos los cálculos iterativos y proporcionar la solución final. El procedimiento inicia con la introducción de los datos necesarios para realizar los cálculos, incluyendo N , K , h y D para todos los períodos (estos ingresos aparecen resaltados en color turquesa en la hoja de cálculo). El usuario debe iniciar entonces cada iteración manualmente hasta que se hayan cubierto todos los períodos.

En la figura 13.11 se muestra la aplicación de la heurística en Excel al ejemplo 13.4-4. La primera iteración inicia al introducir el valor 1 en la celda J11, lo que indica que la iteración 1 inicia en el periodo 1. La hoja de cálculo generará entonces tantas filas como el número de períodos, N (= 6 en este ejemplo). El número del periodo aparecerá en orden ascendente en las celdas K11:K16. Ahora examine el TCU en la columna P (resaltado en color turquesa) y localice el periodo que corresponde al mínimo local en $t = 3$ con TCU = \$16.33, lo cual significa que la siguiente iteración se iniciará en el periodo 4. Ahora, deje una fila en blanco e introduzca el valor 4 en J18. Esta acción, que produce los cálculos en la iteración 2, muestra que su mínimo local aparecerá en el periodo 4 (TCU = \$18.00) y señala el inicio de la iteración 3 en el periodo 5. De nuevo, al introducir 5 en J22, el mínimo local para la iteración 3 ocurre en el nodo 5. Despues, al introducir el valor de 6 en J25 se produce la iteración que termina el problema. La hoja de cálculo actualizará automáticamente la política óptima asociada y su costo total, como se ilustra en la figura 13.11.

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1	Silver-Meal Heuristic Inventory Model													
2	Input data:													
3	Number of periods, N =	6	<<Maximum 14 periods											
4	Period t=	1	2	3	4	5	6							
5	Setup cost, K _t =	20	17	10	18	5	50							
6	Holding cost, h _t =	1	1	1	3	1	1							
7	Demand, D _t =	10	15	7	20	13	25							
8														
9	Solution complete	Model calculations: (Clear Column J manual)												
10	Start Iteration at Period	Period	D _t	$\sum D_i$	$\sum h_i$	TC	TCU							
11	1		1	10	10	0.00	20.00	20.00						
12			2	15	25	1.00	35.00	17.50						
13			3	7	32	2.00	49.00	16.33						
14			4	20	52	3.00	109.00	27.25						
15			5	13	65	6.00	187.00	37.40						
16			6	25	90	7.00	362.00	60.33	Order 32 in period 1 for periods 1 to 3, cost = \$49.00					
17														
18	4		4	20	20	0.00	18.00	18.00						
19			5	13	33	3.00	57.00	28.50						
20			6	25	58	4.00	157.00	52.33	Order 20 in period 4 for periods 4 to 4, cost = \$18.00					
21														
22	5		5	13	13	0.00	5.00	5.00						
23			6	25	38	1.00	30.00	15.00	Order 13 in period 5 for periods 5 to 5, cost = \$5.00					
24														
25	6		6	25	25	0.00	50.00	50.00	Order 25 in period 6 for periods 6 to 6, cost = \$50.00					

FIGURA 13.11

Solución en Excel del ejemplo 13.4-4 por medio de la heurística Silver-Meal (archivo *ExcelSilverMeal.xls*)

13.5 PROBLEMAS PEGAJOSOS EN EL MODELADO DE INVENTARIOS

En la práctica, la implementación de modelos de inventario se enfrenta a dos obstáculos:

1. Selección del modelo adecuado.
2. Estimación de los parámetros de costo.

La tarea de seleccionar un modelo adecuado se complica por la abundancia de modelos de inventario disponibles (muchos presentados en este capítulo y otros más en el capítulo 16). Cada modelo es una versión simplificada del problema general de inventarios. Por desgracia, la complejidad del problema de los inventarios hace que sea analíticamente imposible desarrollar un modelo matemático unificado que se ajuste a todas las situaciones. Y, por supuesto, cuando ninguno de los modelos matemáticos disponibles da resultado, siempre hay la alternativa de modelar la situación usando simulación (capítulo 19) y/o la heurística (capítulo 10) (vea también el estudio de caso al final de este capítulo, donde se presenta una ilustración del uso de la simulación incorporada a una hoja de cálculo en el modelado de inventarios).

En cuanto a la estimación de los parámetros de costo del inventario, es cierto que a pesar de la complejidad de los problemas de este tipo, *todas* las situaciones de inventario comparten un objetivo común; a saber,

$$\text{Minimizar} (\text{costo de preparación} + \text{costo de retención} + \text{costo por desabasto})$$

Pero incluso con este objetivo unificado, existe el desafío de cómo los parámetros de costo asociados (por ejemplo, K , h y p definidos anteriormente en este capítulo) se determinan en la práctica.

El tema de la estimación de los parámetros de costo del inventario no ha recibido el mismo nivel de atención en la literatura que el desarrollo (a veces demasiado teórico) de nuevos modelos matemáticos. Y los documentos que tratan el tema sólo ofrecen directrices generales con detalles incompletos. La razón es que los parámetros de costos son muy específicos de cada empresa, que van desde negocios familiares de ventas al menudeo hasta empresas de manufactura y entidades gubernamentales altamente burocráticas. De tal forma, el problema de la estimación de los parámetros de costo es realmente difícil, y ninguna cantidad de detalles puede conducir a reglas universales que abarquen todas las situaciones.

BIBLIOGRAFÍA

- Bishop, J., "Experience with a Successful System for Forecasting and Inventory Control," *Operations Research*, vol. 22, núm. 6, pp. 1224-1231, 1974.
- Lewis, T., "Personal Operations Research: Practicing OR on Ourselves," *Interfaces*, vol. 26, núm. 5, pp. 34-41, 1996.
- Muckstadt, J. y A. Sapra, *Principles of Inventory Management*, Springer, 2009.
- Nahmias, S., *Production and Operations Analysis*, 6a. ed., McGrawHill/Irwin, Nueva York, 2008.
- Silver, E., D. Pyke y R. Peterson, *Decision Systems for Inventory Management and Production Control*, 3a. ed., Wiley, Nueva York, 1998.
- Tersine, R., *Principles of Inventory and Materials Management*, 4a. ed., North Holland, Nueva York, 1993.
- Waters, D., *Inventory Control and Management*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 2003.

Estudio de caso: Kroger mejora la gestión de inventarios de farmacia⁷

Área de aplicación: Control de inventario en farmacias

Herramientas: Fórmulas de inventario, heurística, simulación en hoja de cálculo

Software: Excel

Descripción de la situación

La compañía Kroger, una cadena de supermercados, opera cerca de 2000 farmacias en el interior de sus tiendas en Estados Unidos, con un valor total al por menor de aproximadamente \$8 mil millones. La mayoría de las farmacias suelen retener un promedio de 2500 medicamentos cada una. Las farmacias reciben la mayoría de sus suministros de medicamentos de los almacenes de Kroger. El resto se envía desde almacenes pertenecientes a terceros.

El aspecto apremiante ha sido cómo manejar el enorme problema del inventario de medicamentos a nivel de la tienda. Un almacenamiento escaso implica desabasto frecuente con un impacto negativo en los ingresos y en la lealtad de los clientes; en tanto que el almacenamiento excesivo implica una alta inversión en capital, alto costo de mantenimiento y la posible caducidad de los productos. El objetivo de una buena gestión de inventarios en Kroger es lograr un equilibrio entre el exceso y la escasez de existencias.

⁷ Basado en Zhang, X. D., Meiser, Y. Liu, B. Bonner y L. Lin, "Kroger Uses Simulation-Optimization to Improve Pharmacy Inventory Management", *Interfaces*, vol. 44, núm. 1, pp. 70-84, 2014.

Política de inventario

La farmacia Kroger utiliza la política de revisión periódica (s, S) que exige elevar el nivel del inventario hasta S siempre que la posición del inventario (disponible + en pedido) caiga por debajo del punto de reorden s . Por lo tanto, si en el momento de la revisión el nivel de inventario actual es $x (< s)$, se coloca un pedido de tamaño $S - x$. En caso contrario, el pedido debe esperar el próximo proceso de revisión. Los tamaños de pedido se redondean a un múltiplo de un tamaño del paquete especificado previamente. Las revisiones tienen lugar durante el periodo de revisión, normalmente uno o dos días antes de la entrega programada.

El objetivo final de este estudio es determinar las cantidades s y S de la política de inventarios que minimizarán el costo de inventario total que comprende los tres costos involucrados de manera tradicional: (1) costo de hacer un pedido, (2) costo por retener inventario y (3) costo por desabasto. El modelo desarrollado debe ser fácil de usar para el personal de las farmacias a cargo de determinar la política de inventario para los miles de medicamentos que trabaja cada unidad.

Naturaleza de la demanda

La demanda típica de un medicamento por cliente por día se produce en valores discretos de 0, o suministros de 30, 60 y 90 días. Las cantidades más altas (por ejemplo, suministros de 120, 150 y 180 días) pueden presentarse cuando varios clientes compran el mismo medicamento en un día específico. La demanda de un fármaco específico varía ampliamente entre las ubicaciones de las tiendas dependiendo de los factores demográficos, la composición de la población y las enfermedades prevalentes. El resultado final es que la demanda de la mayoría de los medicamentos es intermitente e irregular, y probablemente no puede representarse mediante distribuciones teóricas conocidas. La forma más práctica de modelar dicha demanda es utilizar el muestreo directo de la distribución discreta empírica.

Modelo de simulación en hoja de cálculo

Se seleccionó la hoja de cálculo como el software idóneo para modelar el problema de inventarios de Kroger, porque es una herramienta familiar para la mayoría de los usuarios de computadoras. Esta ventaja fue importante para obtener la aceptación del software final, no únicamente por parte de la gerencia de Kroger, sino también por el personal de farmacia responsable de decidir la política de inventarios para cada medicamento.

En la figura 13.12 se ilustra una simulación de una hoja de cálculo a 20 días (en general, la simulación se ejecuta durante un año completo).⁸ Cada hoja de cálculo se enfoca en un solo medicamento. Los datos de demanda diaria (A9:A28) para el fármaco se generan aleatoriamente a partir de la distribución discreta empírica, proveniente de datos históricos de aproximadamente un año. La columna A proporciona uno de estos escenarios (aleatorios) usando el método de muestreo inverso.⁹ Este escenario ahora forma una equivalencia *determinística* de la distribución empírica de la demanda, y debería permanecer *inalterado* a lo largo de las comparaciones iterativas posteriores de búsqueda dirigidas a determinar una política de inventario aceptable.

Los principales datos de entrada que impulsan la simulación son los valores de la revisión periódica s y S en (B2:B3). Los valores iniciales (s, S) utilizados para empezar con las simulaciones iterativas son

$$Q = \text{Cantidad económica de pedido} \quad (\text{que se calcula mediante el archivo } excelEOQ.xls, \text{ sección 13.3.1})$$

$$S = \text{demanda máxima de un periodo de pedido basada en datos históricos}$$

$$S = s + Q$$

Los resultados de la simulación se utilizan para buscar una política (s, S) con un menor costo y, si se encuentra, los nuevos valores (s, S) se introducen en (B2:B3) para que la simulación se ejecute nuevamente para

⁸ No tuve acceso a ningún software ni a las hojas de cálculo utilizadas en el artículo de *Interfaces*. Desarrollé esta hoja de cálculo utilizando datos ficticios. El objetivo es demostrar la funcionalidad de la simulación.

⁹ El método inverso para generar muestras discretas aleatorias se estudia en la sección 19.3.2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Input				Output			
2	Reorder pt. s	120	Start wk day	Thu	Average demand	24.00	Normalize d cost, C	
3	Up-to qty. S	180	Starting inv	100	Average inventory	85.00		
4	Reviews occur on MWF		Pkge. Size	10	Average shortage	25	15.31250	
5			Lead time	2	Number of orders	5		
6					Min. inv. Held (I_+)	30		
7					Max. shortage (I_-)	30		
8	Demand	Week days	Beginning inventory	Inventory position	Place order?	Order quantity	Quantity received	Ending inventory
9	0	Thu	100	100		0	0	100
10	60	Fri	100	100	yes	80	0	40
11	60	Sat	40	120		0	0	-20
12	0	Sun	-20	60		0	80	60
13	0	Mon	60	60	yes	120	0	60
14	30	Tue	60	180		0	0	30
15	0	Wed	30	150		0	120	150
16	0	Thu	150	150		0	0	150
17	0	Fri	150	150		0	0	150
18	0	Sat	150	150		0	0	150
19	0	Sun	150	150		0	0	150
20	30	Mon	150	150		0	0	120
21	60	Tue	120	120		0	0	60
22	30	Wed	60	60	yes	120	0	30
23	60	Thu	30	150		0	0	-30
24	0	Fri	-30	90	yes	90	120	90
25	60	Sat	90	180		0	0	30
26	90	Sun	30	120		0	90	30
27	0	Mon	30	30	yes	150	0	30
28	0	Tue	30	180		0	0	30

FIGURA 13.12

Simulación en hoja de cálculo de Excel de una política específica (s, S) para un flujo de demanda diaria dado (archivo *excelKrogerCase9.xls*)

el mismo flujo de demanda de la columna A. El procedimiento se repite hasta que no se pueda encontrar una mejor política, como se explicará más adelante.

Los datos de entrada restantes indican el día de la semana de inicio (D2), el inventario inicial (D3), el tamaño del paquete (D4) y el tiempo de espera (D5). El día de la semana de inicio se utiliza para mejorar la legibilidad. Todos los pedidos se redondean a múltiplos del tamaño del paquete. Para simplificar esta hoja de cálculo se utiliza un tiempo de espera constante (= 2 días). De manera realista, el tiempo de espera puede ser aleatorio (por ejemplo, 2 días con probabilidad .6 y 3 días con probabilidad .4).

Los cálculos de la hoja de cálculo se basan en las siguientes fórmulas de política de pedidos y simulación:

Política de pedidos:

1. En un día de revisión, si $(\text{posición del inventario}) < s$, pedir $(S - \text{posición del inventario})$; en caso contrario, no pedir.
2. Posición del inventario revisada los días lunes, miércoles y viernes.
3. El pedido se coloca al final del día y queda pendiente durante todo el tiempo de espera.

4. El pedido satisfecho se recibe al final del día.
5. Toda la demanda no satisfecha se retrasa (no hay ventas perdidas).

Fórmulas de simulación (día i):

1. $(\text{Inventario inicial})_i = (\text{Inventario final})_{i-1}$
2. $(\text{Inventario final})_i = (\text{Inventario inicial})_i + (\text{Pedido recibido})_i - (\text{Demanda})_i$
3. $(\text{Posición del inventario})_i = (\text{Inventario inicial})_i + (\text{En pedido})_{i-1}$

La razón principal para asumir la política de pedidos en espera (retrasados) es que proporciona información sobre el desabasto. Se realizan simulaciones sucesivas para determinar una revisión periódica de la política (s, S) que reduzca o incluso elimine el desabasto.

Un resultado resumido de la simulación incluye la demanda promedio (G2); el inventario final positivo promedio (G3); el inventario final de desabasto promedio (G4); la cantidad de pedidos realizados (G5); el inventario final positivo mínimo, I^+ (G6); y el inventario final de desabasto máximo, I^- (G7).

Los datos de salida incluyen el costo de inventario total (normalizado) por día (H4), compuesto por la suma del costo de preparación del pedido, el costo de retención y el costo por desabasto.¹⁰ Esta función de costo evalúa diferentes políticas de revisión periódica.

Como se explica a continuación, se utiliza el resultado del inventario positivo mínimo (G6) y el desabasto máximo (G7) para guiar la búsqueda y encontrar una mejor política de inventario.

Algoritmo de búsqueda local

Una manera de encontrar una solución buena, o incluso la óptima, es suponer un intervalo razonable de valores discretos para s (por ejemplo, de 120 a 300 en incrementos de 10) y Q (por ejemplo, de 10 a 100 en incrementos de 10) y después ejecutar la simulación para todas las combinaciones posibles de s y S ($= s + Q$). Desde luego, esto no es eficiente. La alternativa es idear heurísticas que pudieran conducir rápidamente a una buena solución.

La búsqueda comienza con una política de revisión inicial $(s, s + Q)$ definida anteriormente. Los valores utilizados en la figura 13.12 son $s = 120$ y $Q = 60$, dando $S = 180$. Defina (s, S) como la mejor política de revisión hasta ahora encontrada, con el costo C (initialmente $C = \infty$) y las cantidades I^+ e I^- (G6:G7). La idea consiste en buscar una mejor política de revisión en la vecindad de (s, S) con base en dos pasos:

Paso 1. (Q fija):

- (a) Establezca $s' = s + I^-$ y $S' = s' + Q$ y ejecute la simulación para la nueva política (s', S') . Si produce un costo menor, actualice $(s, S) = (s', S')$ y repita (a). En caso contrario, vaya a (b).
- (b) Establezca $s' = s - I^+$ y $S' = s' + Q$ y ejecute la simulación para la nueva política (s', S') . Si produce un costo menor, actualice $(s, S) = (s', S')$ y repita (a). En caso contrario, no se puede encontrar una mejor solución para el punto fijo Q . Vaya al paso 2.

Paso 2. (Q variable): Sea $r = \min(I^+, I^-)$.

- (a) Establezca $S' = S + r$, para obtener $Q' = S' - s (> Q)$ y ejecute la simulación para la nueva política (s, S') . Si produce un costo menor, actualice $(s, S) = (s', S)$ y vaya al paso 1(a). En caso contrario, vaya a (b).
- (b) Establezca $s' = s - r$, obteniendo $Q' = S - s' (< Q)$ y ejecute la simulación para la nueva política (s, S') . Si produce un costo menor, actualice $(s, S) = (s', S)$ y vaya al paso 1(a). En caso contrario, no se puede encontrar una mejor solución para la variable Q . Deténgase.

¹⁰ El artículo de origen no especifica los parámetros de costo de la función de costo total ni explica cómo se determinan. A falta de mejores datos, utilicé una definición “normalizada” donde los costos diarios de retención y desabasto por unidad son porcentajes del costo de preparación (1 y 2.5%, respectivamente).

En el paso 1, Q se mantiene fija al cambiar (aumentando o disminuyendo) s y S en cantidades iguales. En el paso 1(a) se incrementa tanto s como S en un intento de eliminar el desabasto I^- y en el paso 1(b) se pretende llevar el inventario final mínimo I^+ a cero, disminuyendo así tanto s como S . Si el paso 1 no produce una mejor solución para una Q fija, el paso 2 (con una línea de razonamiento similar a la del paso 1) varía el valor de Q cambiando s y S , una a la vez. Cuando el paso 2 no puede producir una mejor política de revisión, la búsqueda termina con la última (s, S) que proporciona la mejor solución heurística.

Implementación

Kroger informa que el modelo desarrollado se implementó en 2011 en todas las farmacias de Estados Unidos. Se ha traducido en una apreciable reducción del desabasto y en un aumento en los ingresos. El incremento en los ingresos se estima en \$80 millones y se sumó a una reducción aproximada en el inventario de \$120 millones.

Existen planes para extender el modelo a otros departamentos de la tienda. En específico, los productos perecederos podrían beneficiarse de una aplicación semejante del control de inventarios, con la finalidad de eliminar las pérdidas resultantes del deterioro.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados	Sección	Problemas asignados
13.1.1	13-1 a 13-2	13.3.3	13-18 a 13-21
13.3.1	13-3 a 13-12	13.4.1	13-22 a 13-25
13.3.2	13-13 a 13-17	13.4.2	13-26 a 13-36

- ***13-1.** La hoja de balance del año actual de una compañía muestra inventarios inicial y final de \$100.3 millones y \$71.2 millones, respectivamente. El ingreso neto por ventas para el año es de \$230.3 millones y la utilidad bruta es de \$59.8 millones. El reporte final afirma que los días en inventario promedio de la empresa son 2 meses. Evalúe la afirmación de la compañía.
- 13-2.** Los datos financieros de una pequeña empresa muestran que su nivel de inventario de un artículo se mantuvo constante en 1000 unidades durante los primeros 9 meses del año. Las ventas se aceleraron durante el último trimestre, a tiempo para las compras navideñas, terminando el año con sólo 20 unidades en existencia. La compañía estima el costo del inventario total en \$.10 por unidad por día. El artículo se vende a \$190 por unidad, con un incremento de 60% sobre el costo. Evalúe la situación del inventario de la empresa con base en (a) un promedio simple del inventario de acuerdo con los niveles inicial y final, y (b) el inventario promedio real.
- 13-3.** En cada uno de los siguientes casos no se permite el desabasto, y el tiempo de espera entre la colocación y la recepción de un pedido son 30 días. Determine la política de inventario óptima y el costo asociado por día.
- (a) $K = \$100, h = \$.05, D = 30$ unidades por día
 - (b) $K = \$50, h = \$.05, D = 30$ unidades por día
 - (c) $K = \$100, h = \$.01, D = 40$ unidades por día
 - (d) $K = \$100, h = \$.04, D = 20$ unidades por día
- ***13-4.** McBurger pide carne molida al principio de cada semana para cubrir la demanda semanal de 300 lb. El costo fijo por pedido es de \$20. Refrigerar y almacenar la carne cuesta aproximadamente \$.03 diarios por lb.
- (a) Determine el costo de inventario por semana de la presente política de pedidos.
 - (b) Determine la política de inventario óptima que McBurger debería utilizar, suponiendo un tiempo de espera cero entre la colocación y la recepción de un pedido.

13-5. Una compañía tiene en existencia un artículo que se consume a razón de 50 unidades por día. Cada vez que se coloca un pedido, a la compañía le cuesta \$20. Una unidad de inventario mantenida en existencia durante una semana le costará \$.35.

- (a) Determine la política de inventario óptima, suponiendo un tiempo de espera de 1 semana.
- (b) Determine la cantidad óptima anual de pedidos (con años de 365 días).

***13-6.** El departamento de compras de una compañía sugirió dos políticas de inventario:

Política 1. Pedir 150 unidades. El punto de reorden es 50 unidades, y el tiempo entre la colocación y la recepción de un pedido es de 10 días.

Política 2. Pedir 200 unidades. El punto de reorden es 75 unidades, y el tiempo entre la colocación y la recepción de un pedido es de 15 días.

El costo de preparación por pedido es de \$20, y el costo diario de retención en inventario por unidad es de \$.02.

- (a) ¿Cuál de las dos políticas debería adoptar la compañía?
- (b) Si estuviera a cargo de idear una política de inventario para la compañía, ¿qué recomendaría en caso de que el proveedor requiriera un tiempo de espera de 22 días?

13-7. Walmark Store comprime y carga en una tarima las cajas de cartón vacías para reciclarlas. La tienda genera cinco tarimas al día. El costo de almacenar una tarima en la trastienda es de \$.10 por día. La compañía que traslada las tarimas al centro de reciclaje cobra una cuota fija de \$100 por la renta de su equipo de carga, más un costo de transporte variable de \$3 por tarima. Grafique el cambio en la cantidad de tarimas a través del tiempo, e idee una política óptima para el traslado de las tarimas al centro de reciclaje.

13-8. Un hotel utiliza un servicio de lavandería externo para proporcionar toallas limpias. El hotel genera 600 toallas sucias al día. El servicio de lavandería recoge las toallas sucias y las reemplaza con limpias a intervalos regulares. Hay un cargo fijo de \$81 por el servicio de recolección y entrega, además del costo variable de \$.60 por toalla. Al hotel le cuesta \$.02 al día almacenar una toalla sucia y \$.01 por día almacenar una limpia. ¿Con qué frecuencia debería el hotel utilizar el servicio de recolección y entrega? (*Sugerencia:* Hay dos tipos de artículos de inventario en esta situación. Conforme se incrementa el nivel de las toallas sucias, el de las toallas limpias se reduce al mismo ritmo).

13-9. Lewis (1996). Un empleado de una compañía multinacional se traslada en calidad de préstamo de Estados Unidos a la subsidiaria de la compañía en Europa. Durante el año, las obligaciones financieras del empleado en Estados Unidos (por ejemplo, pagos de hipoteca y primas de seguros) ascienden a \$12,000, distribuidas de manera uniforme a lo largo de los meses del año. El empleado puede cumplir con estas obligaciones depositando toda la suma en un banco estadounidense antes de partir hacia Europa. Sin embargo, en este momento la tasa de interés en Estados Unidos es bastante baja (cerca de 1.5% anual), en comparación con la tasa de interés en Europa (6.5% anual). El costo del envío de fondos desde el extranjero es de \$50 por transacción. Determine una política óptima para la transferencia de fondos de Europa a Estados Unidos, y analice la implementación práctica de la solución. Mencione todos los supuestos.

13-10. Considere una situación de inventarios donde las existencias se reponen de manera uniforme (en vez de instantáneamente) a una tasa a . El consumo ocurre a la tasa constante D . Debido a que también existe consumo durante el periodo de reposición, es necesario que $a > D$. El costo de preparación es K por pedido, y el costo de retención es h por unidad por unidad de tiempo. Si y es el tamaño del pedido y no se permite que haya desabasto, demuestre que

- (a) El nivel de inventario máximo es $y(1 - \frac{D}{a})$.
- (b) El costo total por unidad de tiempo y dado es

$$TCU(y) = \frac{KD}{y} + \frac{h}{2}(1 - \frac{D}{a})y$$

- (c) La cantidad económica de pedido es

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h(1 - \frac{D}{a})}}, D < a$$

- (d) Demuestre que la EOQ en la situación de reposición instantánea puede deducirse de la fórmula en (c).

- 13-11.** Una compañía puede producir una mercancía o adquirirla de un contratista. Si la produce, le costará \$20 cada vez que prepare las máquinas. La tasa de producción es de 100 unidades por día. Si se la compra al contratista le costará \$15 cada vez que coloque un pedido. El costo de mantener la mercancía en existencia, ya sea comprada o producida, es de \$.02 por unidad por día. La utilización que la compañía hace de la mercancía se estima en 26,000 unidades anualmente. Si se supone que el desabasto no está permitido, ¿la compañía debería comprar o producir la mercancía?
- 13-12.** En el problema 13-10, suponga que se permite el desabasto a un costo de penalización p por unidad, por unidad de tiempo.

- (a) Si w es el desabasto máximo durante el ciclo de inventario, demuestre que

$$\begin{aligned} \text{TCU } (y, w) &= \frac{KD}{y} + \frac{h\{y(1 - \frac{D}{a}) - w\}^2 + pw^2}{2(1 - \frac{D}{a})y} \\ y^* &= \sqrt{\frac{2KD(p + h)}{ph(1 - \frac{D}{a})}} \\ w^* &= \sqrt{\frac{2KDH(1 - \frac{D}{a})}{p(p + h)}} \end{aligned}$$

- (b) Demuestre que los resultados de la EOQ de la sección 13.3.1 pueden obtenerse a partir de las fórmulas generales en (a).

- 13-13.** Considere la situación del servicio de lavandería para un hotel del problema 13-8. El cobro normal por lavar una toalla sucia es de \$.60, pero el servicio de lavandería cobrará sólo \$.50 si el hotel entrega las toallas en lotes de al menos 2500. ¿Debería el hotel aprovechar el descuento?
- *13-14.** Un artículo se consume a razón de 30 artículos por día. El costo diario de retención por unidad es de \$.05 y el costo de preparación es de \$100. Suponga que no se permite desabasto y que el costo de compra por unidad es de \$10 para cualquier cantidad que no exceda 500 unidades y de \$8 en caso contrario. El tiempo de espera es de 21 días. Determine la política de inventario óptima.
- 13-15.** Un artículo se vende a \$25 por unidad, pero se ofrece 10% de descuento para lotes de 150 unidades o más. Una compañía utiliza este artículo a razón de 20 unidades por día. El costo de preparación por pedir un lote es de \$50, y el costo de retención diario por unidad es de \$.30. El tiempo de espera es de 12 días. ¿Debería la compañía aprovechar el descuento?
- *13-16.** En el problema 13-15, determine el intervalo del porcentaje de descuento en el precio que, cuando se ofrece para lotes de 150 unidades o más, no represente una ventaja financiera para la compañía.
- 13-17.** En el modelo de inventario analizado en la sección 13.3.2, suponga que el costo de retención por unidad por unidad de tiempo es h_1 para cantidades por debajo de q y h_2 en caso contrario, $h_1 > h_2$. Muestre cómo se determina el tamaño de lote económico.

*13-18. Los datos siguientes describen cinco artículos de inventario.¹¹

Artículo i	K_i (\$)	D_i (unidades por día)	h_i (\$)	a_i (ft^2)
1	20	22	0.35	1.0
2	25	34	0.15	0.8
3	30	14	0.28	1.1
4	28	21	0.30	0.5
5	35	26	0.42	1.2
Área de almacenamiento disponible total = 25 ft^2				

Determine las cantidades de pedido óptimas.

- 13-19. Resuelva el modelo del ejemplo 13.3-3, suponiendo que se requiere que la suma de los inventarios promedio de todos los artículos sea menor que 25 unidades.
- 13-20. En el problema 13-19, suponga que la única restricción es un límite de \$1000 en la cantidad de capital que puede invertirse en el inventario. Los costos de compra por unidad de los artículos 1, 2 y 3 son, \$100, \$55 y \$100, respectivamente. Determine la solución óptima.
- *13-21. Los siguientes datos describen cuatro artículos de inventario.

Artículo i	K_i (\$)	D_i (unidades por día)	h_i (\$)
1	100	10	.1
2	50	20	.2
3	90	5	.2
4	20	10	.1

La compañía desea determinar la cantidad económica de pedido para cada uno de los cuatro artículos, de modo que el total de pedidos por año de 365 días sea cuando mucho de 150. Formule el problema como un programa no lineal y encuentre la solución óptima.

- 13-22. En la figura 13.7, determine los requerimientos combinados para el subensamble S en cada uno de los siguientes casos:
- * (a) El tiempo de espera para $M1$ es de sólo un periodo.
 - (b) El tiempo de espera para $M1$ es de tres periodos.
- 13-23. Resuelva el ejemplo 13.4-1 suponiendo que los costos de producción y retención unitarios son los que se muestran en la tabla siguiente.

Periodo i	Costo unitario en tiempo regular (\$)	Costo unitario en tiempo extra (\$)	Costo de retención unitario (\$) hasta el periodo $i + 1$
1	5.00	7.50	.10
2	3.00	4.50	.15
3	4.00	6.00	.12
4	1.00	1.50	.20

¹¹ Los archivos *solverConstrEOQ.xls* y *amplConstrEOQ.txt* le resultarán útiles al resolver los problemas 13-18 a 13-21.

- 13-24.** Se fabrica un artículo para satisfacer la demanda conocida durante cuatro períodos de acuerdo con los siguientes datos:

Intervalo de producción (unidades)	Costo de producción unitario (\$) para el periodo			
	1	2	3	4
1–3	1	2	2	3
4–11	1	4	5	4
12–15	2	4	7	5
16–25	5	6	10	7
Costo de retención unitario hasta el siguiente periodo (\$)	.30	.35	.20	.25
Demanda total (unidades)	11	4	17	29

- (a) Encuentre la solución óptima e indique la cantidad de unidades que se producirá en cada período.
 (b) Suponga que se requieren 10 unidades adicionales en el período 4. ¿Dónde deberían producirse?
***13-25.** La demanda de un producto durante los siguientes cinco períodos puede satisfacerse con producción regular, producción con tiempo extra o subcontratación. Es posible acudir a la subcontratación sólo si se ha empleado toda la capacidad de tiempo extra. La siguiente tabla presenta la oferta, la demanda y los datos de costos en esta situación:

Periodo	Capacidad de producción (unidades)			
	Tiempo regular	Tiempo extra	Subcontratación	Demandada
1	100	50	30	153
2	40	60	80	200
3	90	80	70	150
4	60	50	20	200
5	70	50	100	203

Los costos de producción unitarios en los tres niveles de cada período son \$4, \$6 y \$7, respectivamente. El costo de retención unitario por período es de \$.50. Determine la solución óptima.

- *13-26.** Considere el ejemplo 13.4-2.
 (a) ¿Tiene sentido que $x_4 > 0$?
 (b) Para cada uno de los dos casos siguientes, determine los rangos factibles para z_1, z_2, z_3, x_1, x_2 y x_3 (le resultará útil representar cada situación como en la figura 13.10).
 $x_1 = 4$ y todos los datos restantes son los mismos.
 $x_1 = 0, D_1 = 5, D_2 = 3$ y $D_3 = 4$.

- *13-27. (a)** Encuentre la solución óptima del siguiente modelo de inventarios de cuatro períodos.

Período i	Demanda D_i (unidades)	Costo de preparación K_i (\$)	Costo de retención h_i (\$)
1	5	5	1
2	2	7	1
3	3	9	1
4	3	7	1

El costo de producción unitario es de \$1 para cada una de las primeras 6 unidades y de \$2 para cada una de las unidades adicionales.

- (b) Verifique los cálculos usando *excelDPInv.xls*.

- 13-28.** Suponga que el costo de retención del inventario se basa en el inventario *promedio* durante el periodo. Desarrolle la ecuación recursiva de avance correspondiente.
- 13-29.** Desarrolle la ecuación recursiva de retroceso para el modelo, y luego utilícela para resolver el ejemplo 13.4-2.
- 13-30.** Desarrolle la ecuación recursiva de retroceso para el modelo, suponiendo que el costo de retención del inventario se basa en el inventario *promedio* del periodo.
- *13-31.** Resuelva el ejemplo 13.4-3, suponiendo que el inventario inicial es de 80 unidades. Puede utilizar la plantilla *excelWagnerWhitin.xls* para verificar sus cálculos.
- 13-32.** Resuelva el siguiente modelo de inventario determinístico de 10 periodos. Suponga un inventario inicial de 50 unidades.

Periodo i	Demanda D_i (unidades)	Costo de producción unitario (\$)	Costo de retención unitario (\$)	Costo de preparación (\$)
1	150	6	1	100
2	100	6	1	100
3	20	4	2	100
4	40	4	1	200
5	70	6	2	200
6	90	8	3	200
7	130	4	1	300
8	180	4	4	300
9	140	2	2	300
10	50	6	1	300

- 13-33.** Encuentre la política de inventario óptima para el siguiente modelo de cinco periodos. El costo de producción unitario es de \$10 para todos los períodos. El costo de retención unitario es de \$1 por periodo.

Periodo i	Demanda D_i (unidades)	Costo de preparación K_1 (\$)
1	50	80
2	70	70
3	100	60
4	30	80
5	60	60

- 13-34.** Encuentre la política de inventario óptima para la siguiente situación de inventario de seis períodos: El costo de producción unitario es de \$2 para todos los períodos.

Periodo i	D_i (unidades)	K_i (\$)	h_i (\$)
1	10	20	1
2	15	17	1
3	7	10	1
4	20	18	3
5	13	5	1
6	25	50	1

- *13-35.** La demanda de cañas de pescar es mínima durante el mes de diciembre y máxima durante el de abril. Fishing Hole, Inc. estima que la demanda en diciembre es de 50 cañas. Se incrementa en 10 cañas cada

mes hasta que llega a 90 en abril. De ahí en adelante, la demanda se reduce a razón de 5 cañas por mes. El costo de preparación de un lote de producción es de \$250, excepto durante los meses de demanda pico de febrero a abril, donde se incrementa a \$300. El costo de producción por caña se mantiene aproximadamente constante en \$15 a lo largo del año, y el costo de retención por mes es de \$1. Fishing Hole está desarrollando el plan de producción del año siguiente (enero a diciembre). ¿Cómo debería programar sus instalaciones de producción?

- 13-36.** Una pequeña casa editora reimprime una novela para satisfacer la demanda durante los siguientes 12 meses. Las estimaciones de la demanda para los meses sucesivos son 100, 120, 50, 70, 90, 105, 115, 95, 80, 85, 100 y 110. El costo de preparación para reimprimir el libro es de \$200.00 y el costo de retención mensual por libro es de \$1.20. Determine el programa de reimpresión óptimo.

CAPÍTULO 14

Repasso de probabilidad básica

14.1 LEYES DE PROBABILIDAD

La probabilidad trata acerca de los resultados aleatorios de un **experimento**. La conjunción de todos los resultados es el **espacio muestral**, y un subconjunto de éste es un **evento**. A manera de ilustración, el experimento de lanzar un dado (de seis caras) produce el espacio muestral $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El subconjunto $\{1, 3, 5\}$ define el evento de obtener los valores impares.

Un experimento también se ocupa de un espacio muestral continuo. Por ejemplo, el tiempo entre las fallas de un componente electrónico puede asumir cualquier valor no negativo.

Si un evento E ocurre m veces en un experimento de n ensayos, entonces la probabilidad de realizar el evento E se define como

$$P\{E\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

La definición indica que cuando el experimento se repite un número infinito de veces ($n \rightarrow \infty$), la probabilidad de realizar un evento es $\frac{m}{n}$. Por ejemplo, cuanto más veces se lance una moneda equilibrada, más se acercará la estimación de $P\{\text{cara}\}$ (o $P\{\text{cruz}\}$) al valor teórico de 0.5.

Por definición,

$$0 \leq P\{E\} \leq 1$$

Un evento E es imposible si $P\{E\} = 0$, y seguro si $P\{E\} = 1$. Por ejemplo, en el experimento de un dado de seis caras, obtener un siete es imposible, pero obtener un número en el intervalo de 1 a 6 es seguro.

Momento, ¡ajá! Enseñanza (de probabilidad) mediante un ejemplo: ¡El desafío del cumpleaños!

He impartido el curso introductorio de probabilidad y estadística muchas veces. En la primera clase, después de un breve intercambio de anécdotas, tomo nota del tamaño de la clase, y si ésta excede 25, siempre planteo un desafío a los estudiantes: “¿Quién está dispuesto a apostar que hay una posibilidad mayor a

50-50 de que al menos dos de ustedes cumplan años el mismo día?” (vea el problema 14-2). Y así comienza el juego con los estudiantes turnándose para decir la fecha de su cumpleaños y otros levantando la mano si coincide con su propia fecha. Por supuesto, en algunas clases “gano” y en otras ganan mis alumnos. Y cuando ellos “ganan”, hay una expresión de satisfacción en sus caras porque piensan que están “demostrando” mi error. Pero de cualquier manera el objetivo del experimento se cumple: “Una posibilidad mayor a 50-50 no significa que el resultado anticipado sucederá con certeza”, les digo a mis alumnos. “Sólo significa que hay una mayor posibilidad de que ocurra; pero, al mismo tiempo, todavía hay una posibilidad positiva de que no sea así. Y eso es lo que hace la probabilidad: cuantificar el grado de certeza/incertidumbre respecto de una proposición”.

14.1.1 Ley de la adición de probabilidad

La **unión** de dos eventos E y F es $E + F$ o $E \cup F$, y su **intersección** es EF o $E \cap F$. Los eventos E y F son **mutuamente excluyentes** si la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro, o bien, $P\{EF\} = 0$. Con base en estas definiciones, la ley de la adición de probabilidad se formula como

$$P\{E + F\} = \begin{cases} P\{E\} + P\{F\}, & E \text{ y } F \text{ mutuamente excluyentes} \\ P\{E\} + P\{F\} - P\{EF\}, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejemplo 14.1-1

Considere el experimento de lanzar un dado. El espacio muestral del experimento es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Para un dado legal, se tiene

$$P\{1\} = P\{2\} = P\{3\} = P\{4\} = P\{5\} = P\{6\} = \frac{1}{6}$$

Defina

$$E = \{1, 2, 3 \text{ o } 4\}$$

$$F = \{3, 4 \text{ o } 5\}$$

El evento $EF = \{3 \text{ o } 4\}$ porque los resultados 3 y 4 son comunes entre E y F . Por lo tanto,

$$P\{E\} = P\{1\} + P\{2\} + P\{3\} + P\{4\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P\{F\} = P\{3\} + P\{4\} + P\{5\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{EF\} = P\{3\} + P\{4\} = \frac{1}{3}$$

$$P\{E + F\} = P\{E\} + P\{F\} - P\{EF\} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

De manera intuitiva, el resultado tiene sentido porque $P\{E + F\} = P\{1, 2, 3, 4, 5\} = \frac{5}{6}$.

14.1.2 Ley de probabilidad condicional

Dados los dos eventos E y F con $P\{F\} > 0$, la probabilidad condicional de E dado F se calcula como

$$P\{E|F\} = \frac{P\{EF\}}{P\{F\}}, \quad P\{F\} > 0$$

Si E es un subconjunto de F , entonces $P\{EF\} = P\{E\}$. Los dos eventos son independientes si, y sólo si,

$$P\{E|F\} = P\{E\}$$

En este caso, la ley de probabilidad condicional se reduce a

$$P\{EF\} = P\{E\}P\{F\}$$

Ejemplo 14.1-2

Usted participa en un juego en el cual otra persona lanza un dado. No puede ver el dado, pero le dan información sobre los resultados. Su tarea es predecir el resultado de cada lanzamiento. Determine la probabilidad de que el resultado sea 6, dado que le dicen que el resultado fue un número par.

Sea $E = \{6\}$, y defina $F = \{2, 4 \text{ o } 6\}$. Por consiguiente,

$$P\{E|F\} = \frac{P\{EF\}}{P\{F\}} = \frac{P\{E\}}{P\{F\}} = \left(\frac{1/6}{1/2} \right) = \frac{1}{3}$$

Observe que $P\{EF\} = P\{E\}$ porque E es un subconjunto de F .

14.2 VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Los resultados de un experimento pueden ser naturalmente numéricos (por ejemplo, el lanzamiento de un dado), o estar representados por un código (como en el caso del lanzamiento de una moneda con el resultado cara/cruz codificado como 0/1). La representación numérica de los resultados define lo que se conoce como **variable aleatoria**.

Una variable aleatoria, x , puede ser **discreta** (como en el lanzamiento de un dado) o **continua** (como en el tiempo hasta la falla de un equipo). Cada variable aleatoria x continua o discreta se cuantifica mediante una **función de densidad de probabilidad (fdp)**, $f(x)$ o $p(x)$, que satisface las siguientes condiciones:

	Variable aleatoria, x	
Característica	Discreta	Continua
Intervalo de aplicabilidad	$x = a, a + 1, \dots, b$	$a \leq x \leq b$
Condiciones para la fdp	$p(x) \geq 0, \sum_{x=a}^b p(x) = 1$	$f(x) \geq 0, \int_a^b f(x)dx = 1$

Una importante medida de probabilidad es la **función de distribución acumulada (FDA)**, definida como

$$P\{x \leq X\} = \begin{cases} P(X) = \sum_{x=a}^X p(x), & x \text{ discreta} \\ F(X) = \int_a^X f(x)dx, & x \text{ continua} \end{cases}$$

Ejemplo 14.2-1

Considere el experimento de lanzar un dado legal representado por la variable aleatoria $x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La fdp y la FDA asociadas son

$$p(x) = \frac{1}{6}, x = 1, 2, \dots, 6$$

$$P(X) = \frac{X}{6}, X = 1, 2, \dots, 6$$

La figura 14.1 grafica las dos funciones. La fdp $p(x)$ es una **función discreta uniforme** porque todos los valores de las variables aleatorias ocurren con iguales probabilidades.

La contraparte continua de la $p(x)$ uniforme se ilustra mediante el siguiente experimento. Una aguja de longitud l gira en el centro de un círculo de diámetro l . Después de marcar un punto de referencia arbitrario en la circunferencia, se hace girar la aguja en sentido horario y se mide la distancia de la circunferencia, x , desde el punto marcado hasta el punto donde se detuvo la aguja. Como cualquier punto de detención sobre la circunferencia tiene la misma probabilidad de ocurrir, la distribución de x es uniforme en el intervalo $0 \leq x \leq \pi l$ con la siguiente fdp:

$$f(x) = \frac{1}{\pi l}, 0 \leq x \leq \pi l$$

La FDA asociada, $F(X)$ se calcula como

$$F(X) = P\{x \leq X\} = \int_0^X f(x) dx = \int_0^X \frac{1}{\pi l} dx = \frac{X}{\pi l}, 0 \leq X \leq \pi l$$

La figura 14.2 muestra las gráficas de las dos funciones.

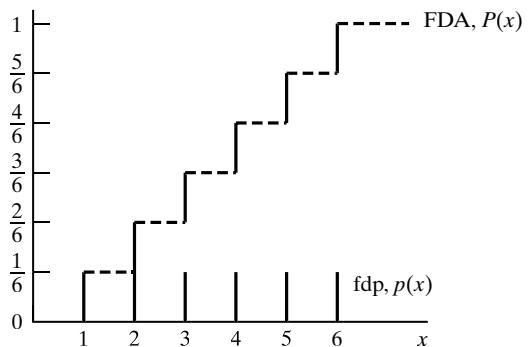


FIGURA 14.1
FDA y fdp para el lanzamiento de un dado

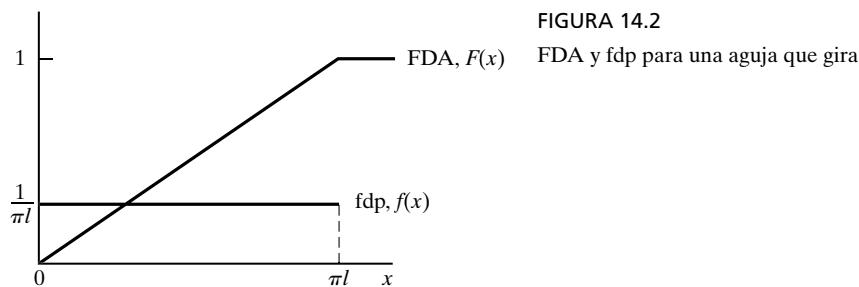


FIGURA 14.2
FDA y fdp para una aguja que gira

14.3 ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Dada una función real $h(x)$ de una variable aleatoria x , el **valor esperado** de $h(x)$ se calcula como

$$E\{h(x)\} = \begin{cases} \sum_{x=a}^b h(x)p(x), & x \text{ discreta} \\ \int_a^b h(x)f(x)dx, & x \text{ continua} \end{cases}$$

Ejemplo 14.3-1

Durante la primera semana de cada mes pagué todas mis facturas y contesté algunas cartas. Suelo comprar 20 estampillas postales de primera clase cada mes para dicho propósito. En realidad, la cantidad de estampillas que uso varía al azar entre 10 y 24 con iguales probabilidades. Determine la cantidad promedio de estampillas que sobran (es decir, el excedente promedio) por mes.

La fdp de la cantidad de estampillas utilizadas es

$$p(x) = \frac{1}{15}, x = 10, 11, \dots, 24.$$

El número de estampillas sobrantes es

$$h(x) = \begin{cases} 20 - x, & x = 10, 11, \dots, 19 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$E\{h(x)\} = \frac{1}{15} [(20 - 10) + (20 - 11) + (20 - 12) + \dots + (20 - 19)] + \frac{5}{15}(0) = 3\frac{2}{3}$$

El producto $\frac{5}{15}(0)$ representa el resultado de quedarse sin estampillas, lo cual corresponde a la probabilidad de utilizar al menos 20 estampillas; es decir,

$$P\{x \geq 20\} = p(20) + p(21) + p(22) + p(23) + p(24) = 5(\frac{1}{15}) = \frac{5}{15}$$

14.3.1 Media y varianza (desviación estándar) de una variable aleatoria

El **valor medio** $E\{x\}$ es una medida de la tendencia central (o suma ponderada) de la variable aleatoria x . La **varianza** $\text{var}\{x\}$ es una medida de la dispersión o desviación de x alrededor de su valor medio. Su raíz cuadrada se conoce como **desviación estándar** de x , $\text{desv.est.}\{x\}$. Una desviación estándar grande implica una alta incertidumbre.

Las fórmulas para la media y la varianza se pueden deducir de la definición general de $E\{h(x)\}$ en la sección 14.3, al sustituir $h(x) = x$ para obtener $E\{x\}$ y al remplazar $h(x) = (x - E\{x\})^2$ para obtener $\text{var}\{x\}$ —es decir,

$$E\{x\} = \begin{cases} \sum_{x=a}^b xp(x), & x \text{ discreta} \\ \int_a^b xf(x)dx, & x \text{ continua} \end{cases}$$

$$\text{var}\{x\} = \begin{cases} \sum_{x=a}^b (x - E\{x\})^2 p(x), & x \text{ discreta} \\ \int_a^b (x - E\{x\})^2 f(x) dx, & x \text{ continua} \end{cases}$$

$$\text{desv.est.}\{x\} = \sqrt{\text{var}\{x\}}$$

Ejemplo 14.3-2

Calcule la media y la varianza para cada uno de los dos experimentos del ejemplo 14-2-1.

Caso 1 (Lanzamiento de un dado). La fdp es $p(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \dots, 6$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} E\{x\} &= 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) = 3.5 \\ \text{var}\{x\} &= \left(\frac{1}{6}\right)\{(1 - 3.5)^2 + (2 - 3.5)^2 + (3 - 3.5)^2 + (4 - 3.5)^2 \right. \\ &\quad \left. + (5 - 3.5)^2 + (6 - 3.5)^2\} = 2.917 \\ \text{desv.est.}(x) &= \sqrt{2.917} = 1.708 \end{aligned}$$

Caso 2 (Rotación de la aguja). Suponga que la longitud de la aguja es de 1 pulgada. Entonces,

$$f(x) = \frac{1}{3.14}, \quad 0 \leq x \leq 3.14$$

La media y la varianza son

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_0^{3.14} x\left(\frac{1}{3.14}\right) dx = 1.57 \text{ in} \\ \text{var}(x) &= \int_0^{3.14} (x - 1.57)^2\left(\frac{1}{3.14}\right) dx = .822 \text{ in}^2 \\ \text{desv.est.}(x) &= \sqrt{.822} = .906 \text{ in} \end{aligned}$$

Momento de Excel

La plantilla *excelStatTables.xls* calcula la media, la desviación estándar, las probabilidades y los percentiles para 16 fdp comunes, incluidas las distribuciones uniformes discretas y continuas. El uso de la hoja de cálculo es autoexplicativo.

14.3.2 Variables aleatorias conjuntas

Considere las dos variables aleatorias continuas x_1 y x_2 , donde $a_1 \leq x_1 \leq b_1$ y $a_2 \leq x_2 \leq b_2$. Defina $f(x_1, x_2)$ como la **fdp conjunta** de x_1 y x_2 , y $f_1(x_1)$ y $f_2(x_2)$ como sus respectivas **fdp marginales**. Entonces,

$$f(x_1, x_2) \geq 0, a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2$$

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 f(x_1, x_2) = 1$$

$$f_1(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2$$

$$f_2(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1$$

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2), \text{ si } x_1 \text{ y } x_2 \text{ son independientes}$$

Las mismas fórmulas se aplican a las fdp discretas, si se reemplaza la integración con la suma.

Para el caso especial $y = c_1x_1 + c_2x_2$, donde las variables aleatorias x_1 y x_2 están distribuidas conjuntamente de acuerdo con la fdp $f(x_1, x_2)$, es posible demostrar que

$$\begin{aligned} E\{c_1x_1 + c_2x_2\} &= c_1E\{x_1\} + c_2E\{x_2\} \\ \text{var}\{c_1x_1 + c_2x_2\} &= c_1^2\text{var}\{x_1\} + c_2^2\text{var}\{x_2\} + 2c_1c_2\text{cov}\{x_1, x_2\} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \text{cov}\{x_1, x_2\} &= E\{(x_1 - E\{x_1\})(x_2 - E\{x_2\})\} \\ &= E(x_1x_2 - x_1E\{x_2\} - x_2E\{x_1\} + E\{x_1\}E\{x_2\}) \\ &= E\{x_1x_2\} - E\{x_1\}E\{x_2\} \end{aligned}$$

Si x_1 y x_2 son independientes, entonces $E\{x_1x_2\} = E\{x_1\}E\{x_2\}$ y $\text{cov}\{x_1, x_2\} = 0$. Lo contrario no es cierto, en el sentido de que dos variables dependientes puedan tener covarianza cero.

Ejemplo 14.3-3

Un lote incluye cuatro artículos defectuosos (D) y seis buenos (G). Se selecciona un artículo aleatoriamente y se examina. Luego se selecciona un segundo artículo de entre los nueve artículos restantes y se examina. Considere que x_1 y x_2 representan los resultados de la primera y segunda selecciones.

- (a) Determine las fdp conjuntas y marginales de x_1 y x_2 .
- (b) Suponga que un artículo bueno reditúa un ingreso neto de \$5 y uno defectuoso representa una pérdida de \$6. Determine la media y la varianza del ingreso después de examinar los dos artículos.

Sea $p(x_1, x_2)$ la fdp conjunta de x_1 y x_2 , y defina $p_1(x_1)$ y $p_2(x_2)$ como las fdp marginales respectivas. Primero, se determina $p_1(x_1)$ como

$$p_1(G) = \frac{6}{10} = .6, \quad p_1(D) = \frac{4}{10} = .4$$

A continuación, se sabe que el segundo resultado x_2 depende del primer resultado x_1 . Por consiguiente, para determinar $p_2(x_2)$, primero se determina la fdp conjunta $p(x_1, x_2)$ (aplicando la fórmula $P\{AB\} = P\{A|B\}P\{B\}$ en la sección 14.1.2), a partir de la cual es posible determinar la distribución marginal $p_2(x_2)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P\{x_2 = G|x_1 = G\} &= \frac{5}{9} \\ P\{x_2 = G|x_1 = B\} &= \frac{6}{9} \\ P\{x_2 = B|x_1 = G\} &= \frac{4}{9} \\ P\{x_2 = B|x_1 = B\} &= \frac{3}{9} \end{aligned}$$

En seguida,

$$\begin{aligned} p\{x_2 = G, x_1 = G\} &= \frac{5}{9} \times \frac{6}{10} = \frac{5}{15} \\ p\{x_2 = G, x_1 = B\} &= \frac{6}{9} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{15} \\ p\{x_2 = B, x_1 = G\} &= \frac{4}{9} \times \frac{6}{10} = \frac{4}{15} \\ p\{x_2 = B, x_1 = B\} &= \frac{3}{9} \times \frac{4}{10} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

El ingreso esperado se determina a partir de la distribución conjunta reconociendo que G produce \$5 y B produce -\$6. Por ende,

$$\text{Ingreso esperado} = (5 + 5)\frac{5}{15} + (5 - 6)\frac{4}{15} + (-6 + 5)\frac{4}{15} + (-6 - 6)\frac{2}{15} = \$1.20$$

El mismo resultado se determina al reconocer que el ingreso esperado de ambas selecciones es igual a la suma del ingreso esperado de cada selección individual (aun cuando las dos variables *no* son independientes). Estos cálculos requieren determinar las distribuciones marginales $p_1(x_1)$ y $p_2(x_2)$.

Una forma conveniente de determinar las distribuciones marginales es presentar la distribución conjunta, $p(x_1, x_2)$, como una tabla y luego agregar las columnas y filas correspondientes para determinar $p(x_1)$ y $p(x_2)$, respectivamente. Por consiguiente,

	$x_2 = G$	$x_2 = B$	$p_1(x_1)$
$x_1 = G$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{9}{15} = .6$
$x_1 = B$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{6}{15} = .4$
$p_2(x_2)$	$\frac{9}{15} = .6$	$\frac{6}{15} = .4$	

Ahora, el ingreso esperado se determina a partir de las distribuciones marginales como

$$\begin{aligned}\text{Ingreso esperado} &= \text{Ingreso esperado de la selección 1} + \text{Ingreso esperado de la selección 2} \\ &= (5 \times .6 - 6 \times .4) + (5 \times .6 - 6 \times .4) = \$1.20\end{aligned}$$

Para calcular la varianza del ingreso total se observa que

$$\text{var}\{\text{ingreso}\} = \text{var}\{\text{ingreso 1}\} + \text{var}\{\text{ingreso 2}\} + 2 \text{ cov}\{\text{ingreso 1, ingreso 2}\}$$

Debido a que $p_1(x_1) = p_2(x_2)$, $\text{var}\{\text{ingreso 1}\} = \text{var}\{\text{ingreso 2}\}$. Para calcular la varianza, se utiliza la siguiente fórmula (vea el problema 14-24):

$$\text{var}\{x\} = E\{x^2\} - (E\{x\})^2$$

Entonces,

$$\text{var}\{\text{ingreso 1}\} = [52 \times .6 + (-6)^2 \times .4] - .6^2 = 29.04$$

En seguida se calcula la covarianza mediante la fórmula

$$\text{cov}\{x_1, x_2\} = E\{x_1 x_2\} - E\{x_1\}E\{x_2\}$$

El término $E\{x_1 x_2\}$ se calcula a partir de la fdp conjunta de x_1 y x_2 como

$$\begin{aligned}\text{Covarinza} &= [(5 \times 5)(\frac{5}{15}) + (5 \times -6)(\frac{4}{15}) + (-6 \times 5)(\frac{4}{15}) \\ &\quad + (-6 \times -6)(\frac{2}{15})] - .6 \times .6 = -3.23\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Varianza} = 29.04 + 29.04 + 2(-3.23) = 51.62$$

14.4 CUATRO DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD COMUNES

En las secciones 14.2 y 14.3 se analizará la distribución uniforme (discreta y continua). En esta sección se estudian cuatro fdp adicionales que a menudo se presentan en estudios de investigación de operaciones: binomial y de Poisson discretas, y exponencial y normal continuas.

14.4.1 Distribución binomial

Un fabricante produce un artículo en lotes de n artículos cada uno. La fracción de artículos defectuosos, p , en cada lote se estima a partir de datos históricos. Se tiene interés en determinar la fdp de la cantidad de artículos defectuosos en un lote.

Existen $C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ combinaciones distintas de x artículos defectuosos en un lote de tamaño n , y la probabilidad de realizar cada combinación es $p^x(1-p)^{n-x}$. Por lo tanto, de acuerdo con la ley de la adición (sección 14.1.1), la probabilidad de k artículos defectuosos en un lote de n artículos es

$$P\{x = k\} = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Ésta es la distribución binomial con parámetros n y p . Su media y varianza son

$$E\{x\} = np$$

$$\text{var}\{x\} = np(1-p)$$

Ejemplo 14.4-1

Las actividades diarias de John Doe requieren hacer 10 viajes redondos en automóvil entre dos ciudades. Una vez que realiza los 10 viajes, el señor Doe puede descansar el resto del día, una motivación suficientemente atractiva como para exceder el límite de velocidad. La experiencia muestra que hay 40% de probabilidad de ser multado por exceso de velocidad en cualquier viaje redondo.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el día termine sin una multa por exceso de velocidad?
- (b) Si cada multa por exceso de velocidad es de \$80, ¿cuál es la multa diaria promedio?

La probabilidad de ser multado en cualquier viaje es $p = .4$. Por consiguiente, la probabilidad de no ser multado en cualquier día es

$$P\{x = 0\} = C_0^{10} (.4)^0 (.6)^{10} = .006$$

lo cual significa que la probabilidad de terminar el día sin ser multado es menor a 1%.

La multa promedio por día es

$$\text{Multa promedio} = \$80 E\{x\} = \$80 (np) = 80 \times 10 \times .4 = \$320$$

Comentarios. $P\{x = 0\}$ puede calcularse mediante el uso de *excelStatTables.xls*. Ingrese 10 en F7, .4 en G7 y 0 en J7. La respuesta es $P\{x = 0\} = .006047$ y se da en M7.

14.4.2 Distribución de Poisson

Los clientes llegan a un banco o a una tienda de abarrotes de una forma “totalmente aleatoria”, es decir, los tiempos de llegada no pueden predecirse con anticipación. La fdp que describe el *número* de llegadas durante un periodo de tiempo específico es la distribución de Poisson.

Sea x el número de eventos (por ejemplo, llegadas) que ocurren durante un periodo de tiempo específico (por ejemplo, un minuto o una hora). Dado que λ es una constante conocida, la fdp de Poisson se define como

$$P\{x = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

La media y la varianza de la distribución de Poisson son

$$E\{x\} = \lambda$$

$$\text{var}\{x\} = \lambda$$

La fórmula de la media revela que λ debe representar la razón a la que ocurren los eventos.

La distribución de Poisson figura prominentemente en el estudio de filas de espera o colas (vea el capítulo 18).

Ejemplo 14.4-2

A un taller de reparación de motores pequeños llegan aleatoriamente trabajos de reparación a razón de 10 por día.

- (a) ¿Cuál es el número promedio de trabajos que se reciben a diario en el taller?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que no lleguen trabajos durante cualquier hora, si se supone que el taller está abierto 8 horas al día?

El número promedio de trabajos recibidos por día es igual a $\lambda = 10$ trabajos por día. Para calcular la probabilidad de que no lleguen trabajos por hora, es necesario calcular la tasa de llegadas por hora; a saber, $\lambda_{\text{hora}} = \frac{10}{8} = 1.25$ trabajos por hora. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P\{\text{no hay llegadas por hora}\} &= \frac{(\lambda_{\text{hora}})^0 e^{-\lambda_{\text{hora}}}}{0!} \\ &= \frac{1.25^0 e^{-1.25}}{0!} = .2865 \end{aligned}$$

Comentario. La probabilidad anterior se calcula con *excelStatTables.xls*. Introduzca 1.25 en F16 y 0 en J16. La respuesta es .286505 y se muestra en M16.

14.4.3 Distribución exponencial negativa

Si el *número* de llegadas a una instalación de servicio durante un periodo de tiempo específico sigue la distribución de Poisson (sección 14.4.2), entonces, de manera automática, la distribución del *tiempo entre llegadas* (es decir, entre llegadas sucesivas) es la distribución exponencial negativa (o simplemente exponencial). De manera específica, si λ es la tasa de ocurrencia de las llegadas de Poisson, entonces la distribución del tiempo entre llegadas, x , es

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

En la figura 14.3 se muestra la gráfica de $f(x)$.

La media y la varianza de la distribución exponencial son

$$E\{x\} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{var}\{x\} = \frac{1}{\lambda}$$

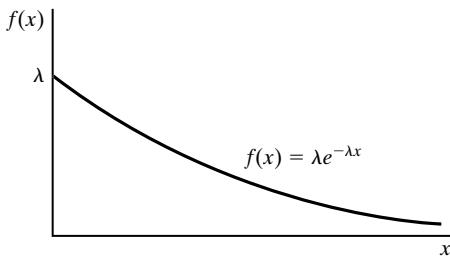


FIGURA 14.3
Función de densidad de probabilidad
de la distribución exponencial

La media $E\{x\}$ es consistente con la definición de λ . Si λ es la *tasa* a la cual ocurren los eventos, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es el intervalo de tiempo promedio entre eventos sucesivos.

Ejemplo 14.4-3

Los automóviles llegan al azar a una estación de gasolina. El tiempo promedio entre llegadas es de 2 minutos. Determine la probabilidad de que el tiempo entre llegadas no exceda de 1 minuto.

La determinación de la probabilidad deseada es igual a calcular la FDA de x ; a saber,

$$\begin{aligned} P\{x \leq A\} &= \int_0^A \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= -e^{-\lambda x} \Big|_0^A \\ &= 1 - e^{-\lambda A} \end{aligned}$$

La tasa de llegadas para el ejemplo es $\lambda = \frac{1}{2}$ llegadas por minuto. Si se sustituye $A = 1$, la probabilidad deseada es

$$P\{x \leq 1\} = 1 - e^{-(\frac{1}{2})(1)} = .3934$$

Comentarios. Usted puede utilizar la plantilla *excelStatTables.xls* para calcular la probabilidad anterior. Introduzca .5 en F9, 1 en J9. La respuesta es .393468 y se muestra en O9.

14.4.4 Distribución normal

La distribución normal describe muchos fenómenos aleatorios de la vida diaria, como las calificaciones de exámenes, y el peso y la estatura de las personas. La fdp de la distribución normal es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

La media y la varianza son

$$E\{x\} = \mu$$

$$\text{var}\{x\} = \sigma^2$$

La notación $N(\mu, \sigma)$ suele utilizarse para representar una distribución normal con media μ y desviación estándar σ .

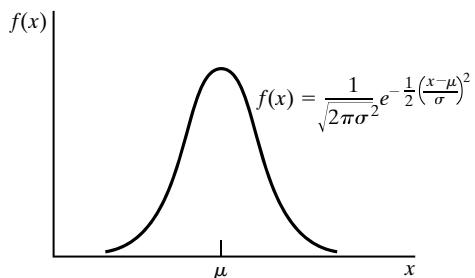


FIGURA 14.4

Función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria normal

En la figura 14.4 se muestran las gráficas de la fdp normal. La función siempre es simétrica respecto de la media μ .

Una propiedad importante de la variable aleatoria normal es que representa de forma aproximada la distribución del promedio de una muestra tomada de *cualquier* distribución. Este notable resultado se basa en el siguiente teorema:

Teorema del límite central. *Sean x_1, x_2, \dots y x_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cada una con media μ y desviación estándar σ , y defina*

$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

La distribución de s_n es asintóticamente normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$, independientemente de la distribución original de x_1, x_2, \dots , y x_n .

Un caso especial del teorema del límite central tiene que ver con la distribución del *promedio* de una muestra de tamaño n (tomada de *cualquier* distribución). El promedio es asintóticamente normal con media μ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$. Este resultado tiene aplicaciones importantes en el control estadístico de la calidad.

La FDA de la variable aleatoria normal no puede determinarse en una forma cerrada. La tabla A.1 del apéndice A da las probabilidades para $N(0, 1)$, la distribución normal estándar con media cero y desviación estándar 1. En general, una variable aleatoria normal x con media μ y desviación estándar σ puede convertirse en normal estándar z mediante la transformación

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Más de 99% del área bajo cualquier función de densidad normal se encuentra encerrada en el intervalo $\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma$, también conocido como los **límites 6 sigma**.

Ejemplo 14.4-4

El diámetro interno de un cilindro tiene la especificación $1 \pm .03$ cm. El resultado del proceso de maquinado que produce el cilindro sigue una distribución normal con media de 1 cm y desviación estándar de .1 cm. Determine el porcentaje de la producción que satisfará las especificaciones.

Si se define x como el parámetro interno del cilindro, la probabilidad de que satisfaga las especificaciones es

$$P\{1 - .03 \leq x \leq 1 + .03\} = P\{.97 \leq x \leq 1.03\}$$

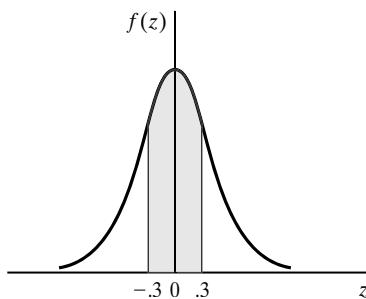


FIGURA 14.5

Cálculo de $P\{-.3 \leq z \leq .3\}$ en una distribución normal estándar

Esta probabilidad se calcula por medio de la normal estándar (tabla A.1 en el apéndice A). Dado que $\mu = 1$ y $\sigma = .1$, se tiene

$$\begin{aligned}
 P\{.97 \leq x \leq 1.03\} &= P\{\frac{.97 - 1}{.1} \leq z \leq \frac{1.03 - 1}{.1}\} \\
 &= P\{-.3 \leq z \leq .3\} \\
 &= P\{z \leq .3\} - P\{z \leq -.3\} \\
 &= P\{z \leq .3\} - P\{z \geq .3\} \\
 &= P\{z \leq .3\} - [1 - P\{z \leq .3\}] \\
 &= 2P\{z \leq .3\} - 1 \\
 &= 2 \times .6179 - 1 \\
 &= .2358
 \end{aligned}$$

Observe que $P\{z \leq -.3\} = 1 - P\{z \leq .3\}$ debido a la simetría de la fdp, como se muestra en la figura 14.5. La probabilidad acumulada $P\{z \leq .3\} (= .6179)$ se obtiene con la tabla normal estándar (tabla A.1 en el apéndice A) como la entrada designada con la fila $z = 0.3$ y la columna $z = 0.00$.

Comentarios. $P\{.97 \leq x \leq 1.03\}$ puede calcularse directamente en *excelStatTables.xls*. Introduzca 1 en F15, .1 en G15, .97 en J15 y 1.03 en K15. La respuesta es .235823 y se muestra en Q15.

14.5 DISTRIBUCIONES EMPÍRICAS

En las secciones precedentes se estudiaron las fdp y las FDA de cinco distribuciones comunes: uniforme, binomial, de Poisson, exponencial y normal. ¿Cómo se reconocen estas distribuciones en la práctica?

La base para identificar cualquier fdp son los datos sin procesar que se recopilan sobre la situación que se estudia. En esta sección se muestra cómo los datos muestreados pueden convertirse en una fdp.

Paso 1. Resuma los datos sin procesar en la forma de un histograma de frecuencia apropiado para determinar la fdp empírica asociada.

Paso 2. Use la *prueba de bondad* de ajuste para evaluar si la fdp empírica resultante se muestrea a partir de una fdp teórica conocida.

Histograma de frecuencias. Un histograma de frecuencias se construye con datos sin procesar dividiendo su intervalo (del valor mínimo al valor máximo) en clases que no se traslapan. La frecuencia en cada clase es el conteo de los valores de los datos sin procesar que quedan comprendidos dentro de los límites designados de la clase.

Ejemplo 14.5-1

Los siguientes datos representan el tiempo de servicio (en minutos) en una instalación de servicio de una muestra de 60 clientes.

.7	.4	3.4	4.8	2.0	1.0	5.5	6.2	1.2	4.4
1.5	2.4	3.4	6.4	3.7	4.8	2.5	5.5	.3	8.7
2.7	.4	2.2	2.4	.5	1.7	9.3	8.0	4.7	5.9
.7	1.6	5.2	.6	.9	3.9	3.3	.2	.2	4.9
9.6	1.9	9.1	1.3	10.6	3.0	.3	2.9	2.9	4.8
8.7	2.4	7.2	1.5	7.9	11.7	6.3	3.8	6.9	5.3

Los valores mínimo y máximo de los datos son .2 y 11.7, respectivamente. Esto significa que la muestra está cubierta por el intervalo (0, 12). Se divide arbitrariamente el intervalo (0, 12) en 12 clases, cada una de 1 minuto de ancho. La selección adecuada del ancho de la clase es crucial para revelar la forma de la distribución empírica. Aun cuando no haya reglas exactas para determinar el ancho de clase óptimo, una regla práctica general consiste en utilizar de 10 a 20 clases. En la práctica puede ser necesario probar diferentes anchos de clase antes de decidir sobre un histograma aceptable.

En la siguiente tabla se resume la información en forma de histograma de la muestra dada. La columna de frecuencias relativas, f_i , se calcula dividiendo las entradas de la columna de frecuencias observadas o_i en el total de observaciones ($n = 60$). Por ejemplo, $f_1 = \frac{11}{60} = .1833$. La columna de frecuencias acumuladas, F_i , se genera al sumar los valores de f_i de manera recursiva. Por ejemplo, $F_1 = f_1 = .1833$ y $F_2 = F_1 + f_2 = .1833 + .1333 = .3166$.

i	Intervalo de clase	Conteo de observaciones	Frecuencia observada, o_i	Frecuencia relativa, f_i	Frecuencia relativa acumulada, F_i
1	(0, 1)		11	.1833	.1833
2	(1, 2)		8	.1333	.3166
3	(2, 3)		9	.1500	.4666
4	(3, 4)		7	.1167	.5833
5	(4, 5)		6	.1000	.6833
6	(5, 6)		5	.0833	.7666
7	(6, 7)		4	.0667	.8333
8	(7, 8)		2	.0333	.8666
9	(8, 9)		3	.0500	.9166
10	(9, 10)		3	.0500	.9666
11	(10, 11)		1	.0167	.9833
12	(11, 12)		1	.0167	1.0000
Totales			60	1.0000	

Los valores de f_i y F_i proporcionan una versión “discretizada” de la fdp y la FDA en el tiempo de servicio. Es posible convertir la FDA resultante en una función continua parcial si se unen los puntos resultantes con

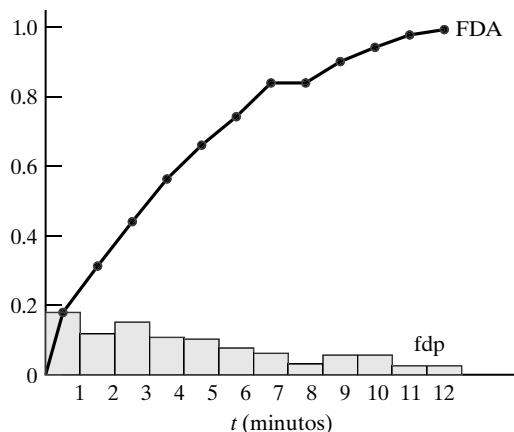


FIGURA 14.6
FDA lineal parcial de una distribución empírica

segmentos de línea. En la figura 14.6 se presenta la fdp empírica y la FDA para el ejemplo. La FDA, como la del histograma, aparece definida en los puntos medios de las clases.

Ahora es posible estimar la media, \bar{t} , y la varianza, s_t^2 , de la distribución empírica. Sea N el número de clases en el histograma y defina \bar{t}_i como el punto medio de la clase i , entonces,

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^N f_i \bar{t}_i$$

$$s_t^2 = \sum_{i=1}^N f_i (\bar{t}_i - \bar{t})^2$$

Al aplicar estas fórmulas al ejemplo presente, se obtiene

$$\bar{t} = .1833 \times .5 + .133 \times 1.5 + \dots + 11.5 \times .0167 = 3.934 \text{ minutos}$$

$$s_t^2 = .1833 \times (.5 - 3.934)^2 + .133 \times (1.5 - 3.934)^2 + \dots$$

$$+ .0167 \times (11.5 - 3.934)^2 = 8.646 \text{ minutos}^2$$

Momento de Excel

Los histogramas se construyen de manera conveniente usando Excel. Seleccione `Data Analysis` \Rightarrow `Histogram` y, luego, introduzca los datos pertinentes en el cuadro de diálogo.

La herramienta `Histogram` en Excel no produce la media ni la desviación estándar directamente como parte de los resultados.¹ Usted puede utilizar la plantilla en Excel `excelMeanVar.xls` para calcular la media, la varianza, el máximo y el mínimo muestrales. Asimismo, Excel permite el uso de la herramienta `Histogram`.

Prueba de bondad de ajuste. La prueba de bondad de ajuste evalúa si la muestra utilizada para determinar la distribución empírica se tomó de una distribución teórica específica. Puede realizarse una evaluación inicial de los datos comparando la FDA empírica con la FDA de la distribución teórica supuesta. Si las dos FDA no se desvían “en exceso”, entonces es probable que la muestra se haya tomado de la distribución teórica propuesta. Esta “corazonada” inicial puede respaldarse aún

¹ *Data Análisis* en Excel ofrece una herramienta por separado que se denomina *Descriptive Statistics*, que sirve para calcular la media y la varianza (¡así como muchas otras estadísticas que quizás nunca utilice!).

más con la prueba de bondad de ajuste. El siguiente ejemplo proporciona los detalles del procedimiento propuesto.

Ejemplo 14.5-2

En este ejemplo se prueban los datos del ejemplo 14.5-1 en relación con una distribución exponencial hipotética. La primera tarea es especificar la función que define la distribución teórica. De acuerdo con el ejemplo 14.5-1, $\bar{t} = 3.934$ minutos. Por consiguiente, $\lambda = \frac{1}{3.934} = .2542$ servicios por minuto según la distribución exponencial hipotética (vea la sección 14.4.3), y la fdp y la FDA asociadas se dan como

$$f(t) = .2542e^{-2542t}, t > 0$$

$$F(T) = \int_0^T f(t) dt = 1 - e^{-2542T}, T > 0$$

Se puede utilizar la FDA, $F(T)$, con la finalidad de calcular la FDA teórica para $T = .5, 1.5, \dots$ y 11.5 , y después compararla gráficamente con el valor empírico $F_i, i = 1, 2, \dots, 12$, calculado en el ejemplo 14.5-1 como se muestra en la figura 14.7. Un examen superficial de las dos gráficas sugiere que la distribución exponencial puede proporcionar un ajuste razonable para los datos observados.

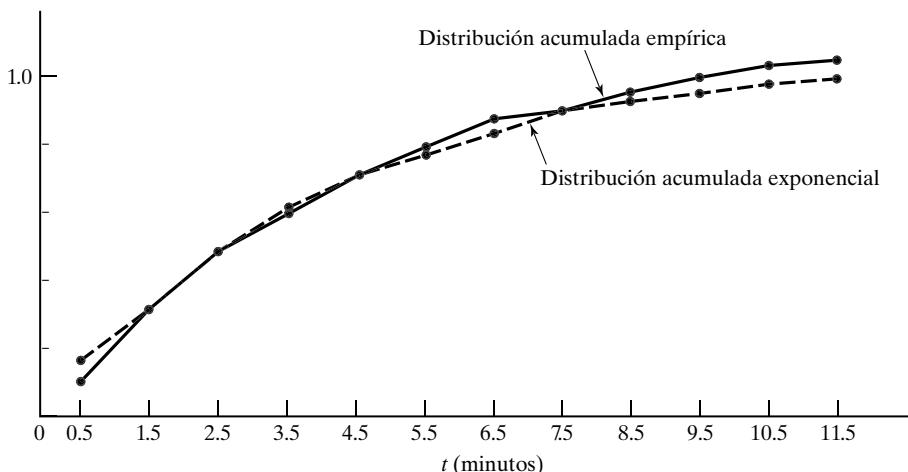
El siguiente paso es implementar la prueba de bondad de ajuste. Existen dos pruebas de este tipo: (1) la prueba de **Kolmogorov-Smirnov**, y (2) la prueba **ji cuadrada**. Nuestra presentación se limitará a esta última.

La prueba **ji cuadrada** se basa en una medición de la desviación entre las frecuencias empírica y teórica. Específicamente, para la clase i , la frecuencia teórica n_i correspondiente a la frecuencia observada o_i se calcula como

$$\begin{aligned} n_i &= n \int_{I_{i-1}}^{I_i} f(t) dt \\ &= n(F(I_i) - F(I_{i-1})) \\ &= 60(e^{-2542I_{i-1}} - e^{-2542I_i}) \end{aligned}$$

FIGURA 14.7

Comparación de la FDA empírica y la FDA exponencial teórica



En seguida, si se suponen N clases, es posible calcular una medida de la desviación entre las frecuencias empíricas y observadas como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(o_i - n_i)^2}{n_i}$$

La medida χ^2 es asintóticamente una fdp ji cuadrada con $N - k - 1$ grados de libertad, donde k es el número de parámetros estimados a partir de los datos sin procesar y utilizados para definir la distribución teórica.

La hipótesis nula de la prueba que expresa que la muestra observada se extrae de la distribución teórica $f(t)$ se acepta si

$$H: \text{Aceptar } f(t) \text{ si } \chi^2 < \chi^2_{N-k-1, 1-\alpha}$$

El valor crítico $\chi^2_{N-k-1, 1-\alpha}$ se obtiene a partir de tablas ji cuadrada (vea la tabla A.3 del apéndice A) correspondientes a $N - k - 1$ grados de libertad y a un nivel de significancia α .

Los cálculos de la prueba se muestran en la siguiente tabla:

i	Clase	Frecuencia observada, o_i	Frecuencia teórica, n_i	$\frac{(o_i - n_i)^2}{n_i}$
1	(0, 1)	11	13.448	.453
2	(1, 2)	8	10.435	.570
3	(2, 3)	9	8.095	.100
4	(3, 4)	7	6.281	.083
5	(4, 5)	6	4.873	
6	(5, 6)	5	3.781	
7	(6, 7)	4	2.933	
8	(7, 8)	2	2.276	
9	(8, 9)	3	1.766	
10	(9, 10)	3	1.370	
11	(10, 11)	1	1.063	
12	(11, ∞)	1	3.678	
Totales		$n = 60$	$n = 60$	$\chi^2\text{-valor} = 2.623$

Como regla práctica, el conteo de la frecuencia *teórica* debe ser al menos de 5 en cualquier clase. Este requisito se suele resolver combinando clases sucesivas hasta que se satisface la regla, como se muestra en la tabla. El número resultante de clases llega a ser $N = 7$. Debido a que se estima un parámetro a partir de datos observados (a saber, λ), el grado de libertad de la ji cuadrada es $7 - 1 - 1 = 5$. Si se considera un nivel de significancia $\alpha = .05$, se obtiene el valor crítico $\chi^2_{5, .05} = 11.07$ (utilice la tabla A.3 en el apéndice A, o en *excelStatTables.xls*, e introduzca 5 en F8 y .05 en L8 para obtener la respuesta en R8). Como el valor de χ^2 ($= 2.623$) es menor que el valor crítico, se acepta la hipótesis de que la muestra se extrajo de una fdp exponencial.

Momento, ¡ajá! Mark Twain crea una mala fama de la “estadística”

En pocas palabras: las estadísticas tienen que ver con datos y cómo interpretarlos. El objetivo es predecir el futuro, no con certeza sino con un grado de confianza razonable. Es un noble objetivo; así que ¿por qué se ha creado una mala fama de las estadísticas? Las infames citas de Mark Twain: “Hay mentiras, malditas mentiras y estadísticas”; de Darrell Huff: “Cómo mentir con estadística” (publicado desde 1954) y, más recientemente, de Joel Best: “Más malditas mentiras y estadística”; son sólo tres eslóganes o libros adoptados popularmente que tienden a poner en duda las estadísticas y su uso.

En realidad, estamos hablando de dos tipos distintos de “estadísticas”: la que a menudo se critica es utilizada por los medios de comunicación y los políticos, y la otra se usa en estudios de IO (y otras ciencias) para evaluar inteligentemente el pasado y predecir el futuro. En el primer tipo, las medidas estadísticas simples, incluidos los promedios, el porcentaje y los gráficos de pastel o barras, a veces se usan mal en relación con situaciones de interés público. Por ejemplo, el recorte de impuestos propuesto en Estados Unidos en 2001 reclamó una reducción *promedio* de la carga impositiva de más de \$1000 por familia, pero no agregó que 50% de todas las familias recibirían menos de \$100, es decir, ¡el recorte fiscal favoreció a los ricos! En el segundo tipo, la IO y otras ciencias utilizan herramientas estadísticas sofisticadas para llegar a conclusiones sólidas cerca del comportamiento futuro de un sistema. Éste es el tipo que nos interesa y, utilizado en forma adecuada, es una herramienta indispensable en prácticamente todos los proyectos de IO.

BIBLIOGRAFÍA

- Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 2a. ed., vols. 1 y 2, Wiley, Nueva York, 1967.
- Paulos, J. A., *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences*, Hill and Wang, Nueva York, 1988.
- Papoulis, A., *Probability and Statistics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1990.
- Ross, S., *Introduction to Probability Models*, 10a. ed., Academic Press, Nueva York, 2011.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados	Sección	Problemas asignados
14.1	14-1 a 14-3	14.3.2	14-26 a 14-26
14.1.1	14-4 a 14-7	14.4.1	14-27 a 14-32
14.1.2	14-8 a 14-14	14.4.2	14-33 a 14-36
14.2	14-15 a 14-17	14.4.3	14-37 a 14-38
14.3	14-18 a 14-20	14.4.4	14-39 a 14-41
14.3.1	14-21 a 14-25	14.5	14-42 a 14-44

- *14-1. En una encuesta aplicada en las preparatorias del estado de Arkansas para estudiar la correlación entre las calificaciones de matemáticas de los estudiantes de último año y la inscripción en carreras de ingeniería, 400 de 1000 estudiantes encuestados han estudiado matemáticas. La inscripción en carreras de ingeniería muestra que, de los 1000 estudiantes de último año, 150 han cursado matemáticas y 29 no. Determine las probabilidades de los siguientes eventos:
- (a) Un estudiante que llevó matemáticas se inscribe (o no) en una carrera de ingeniería.
 - (b) Un estudiante que no llevó matemáticas ni se inscribió en una carrera de ingeniería.
 - (c) Un estudiante que no está en una carrera de ingeniería.
- *14-2. Considere una reunión aleatoria de n personas. Determine el número n mínimo tal que sea más probable que dos personas o más hayan nacido el mismo día (*sugerencia*: Suponga que no hay años bisiestos y que todos los días del año tienen la misma probabilidad de ser el cumpleaños de una persona).

- *14-3.** Solucione el problema 14-2 suponiendo que en una habitación llena de n personas al menos una persona comparte su cumpleaños.
- 14-4.** Un dado legal de 6 caras se lanza dos veces. Si E y F representan los resultados de los dos lanzamientos, calcule las siguientes probabilidades:
- La suma de E y F es 11.
 - La suma de E y F es par.
 - La suma de E y F es impar y mayor que 3.
 - E es par y menor que 6, y F es impar y mayor que 1.
 - E es mayor que 2, y F es menor que 4.
 - E es 4, y la suma de E y F es impar.
- 14-5.** Se lanzan dos dados de forma independiente, y se registran los dos números que resultan. Determine lo siguiente:
- La probabilidad de que los dos números sean pares.
 - La probabilidad de que la suma de los dos números sea 10.
 - La probabilidad de que los dos números difieran en por lo menos 3.
- *14-6.** Usted puede lanzar una moneda equilibrada 7 veces. Ganará \$100 si aparecen tres cruces antes de que aparezca una cara. ¿Qué posibilidades tienen de ganar?
- *14-7.** Ann, Jim, John y Nancy se han programado para competir en un torneo de ráquetbol. Es dos veces más probable que Ann derrote a Jim, y Jim está al mismo nivel que John. El pasado registro ganador de Nancy contra John es uno de tres. Determine lo siguiente:
- La probabilidad de que Jim gane el torneo.
 - La probabilidad de que una mujer gane el torneo.
 - La probabilidad de que ninguna mujer gane.
- 14-8.** En el ejemplo 14.1-2, suponga que le dicen que el resultado es menor que 6.
- Determine la probabilidad de obtener un número par.
 - Determine la probabilidad de obtener un número impar mayor que uno.
- 14-9.** Las acciones de WalMark Stores, Inc. se cotizan en la Bolsa de Valores de Nueva York bajo el símbolo WMS. Históricamente, el precio de WMS sube con el índice Dow 60% de las veces, y baja 25% de las veces. Hay también 5% de probabilidades de que WMS suba cuando el Dow baje, y 10% de que baje cuando el Dow suba.
- Determine la probabilidad de que WMS suba independientemente del Dow.
 - Encuentre la probabilidad de que WMS suba dado que el Dow sube.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que WMS baje dado que el Dow baje?
- *14-10.** Los graduados de preparatoria con una calificación en el ACT de al menos 26 pueden buscar ser admitidos en dos universidades, A y B. La probabilidad de ser aceptados en A es de .4, y de .25 en B. La probabilidad de ser aceptado en ambas universidades es de sólo 15%.
- Determine la probabilidad de que el estudiante sea aceptado en B, dado que también fue aceptado en A.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que sea aceptado en A, dado que el estudiante fue aceptado en B?
- 14-11.** Demuestre que si la probabilidad $P\{A | B\} = P\{A\}$, entonces A y B deben ser independientes.

14-12. *Teorema de Bayes.*² Dados los dos eventos A y B , demuestre que

$$P\{A|B\} \sim \frac{P\{B|A\}P\{A\}}{P\{B\}}, P\{B\} > 0$$

14-13. Un minorista recibe 75% de sus baterías de la fábrica A y 25% de la fábrica B . Se sabe que el porcentaje de baterías defectuosas producidas por A y B es de 1% y 2%, respectivamente. Un cliente acaba de comprar al azar una batería al minorista.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la batería resulte defectuosa?
- (b) Si la batería es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica A ? (*Sugerencia:* Aplique el teorema de Bayes del problema 14-12).

***14-14.** Las estadísticas muestran que 70% de los hombres sufren de alguna forma de cáncer de próstata. El examen del antígeno prostático específico (PSA, por las siglas de *prostate specific antigen*) resulta positivo 90% de las veces en los hombres afectados, y 10% en hombres sanos. ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre que haya resultado positivo no tenga cáncer de próstata?

14-15. El número de unidades, x , requeridas de un artículo es discreto de 1 a 5. La probabilidad, $p(x)$, es directamente proporcional al número de unidades requeridas. La constante de proporcionalidad es K .

- (a) Determine la fdp y la FDA de x , y grafique las funciones resultantes.
- (b) Encuentre la probabilidad de que x sea un valor par.

14-16. Considere la siguiente función:

$$f(x) \sim \frac{k}{x^2}, 10 \leq x \leq 20$$

- *(a) Determine el valor de la constante k que hará que $f(x)$ sea una fdp.
- (b) Determine la FDA y encuentre la probabilidad de que x sea (i) mayor que 12 y (ii) que tenga un valor entre 13 y 15.

***14-17.** La demanda diaria de gasolina sin plomo está uniformemente distribuida entre 750 y 1250 galones. El tanque de 1100 galones se rellena diariamente a medianoche. ¿Cuál es la probabilidad de que el tanque se vacíe antes de volverlo a llenar?

14-18. En el ejemplo 14.3-1, calcule el faltante promedio de estampillas por mes (*sugerencia:* Puede haber un faltante si se necesitan más de 20 estampillas).

14-19. Los resultados del ejemplo 14.3-1 y del problema 14-18 muestran promedios *positivos tanto* del exceso como del faltante de estampillas. ¿Son inconsistentes tales resultados? Explique su respuesta.

***14-20.** El propietario de un puesto de periódicos recibe 50 copias del periódico *Al Ahram* cada mañana. La cantidad de copias vendidas, x , varía aleatoriamente de acuerdo con la siguiente distribución de probabilidad:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{45}, & x = 35, 36, \dots, 49 \\ \frac{1}{30}, & x = 50, 51, \dots, 59 \\ \frac{1}{33}, & x = 60, 61, \dots, 70 \end{cases}$$

- (a) Determine la probabilidad de que el propietario venda todas las copias.
- (b) Determine el número esperado de copias no vendidas por día.
- (c) Una copia cuesta 50 centavos y se vende a \$1.00. Las copias que no se venden no tienen valor. Determine el ingreso neto esperado por día.

² En la sección 15.2.2 se proporcionan más detalles sobre el teorema de Bayes.

***14-21.** Calcule la media y la varianza de la variable aleatoria definida en el problema 14-15.

14-22. Calcule la media y la varianza de la variable aleatoria del problema 14-16.

14-23. Demuestre que la media y la varianza de una variable aleatoria uniforme x , $a \leq x \leq b$, son

$$E\{x\} = \frac{b+a}{2}$$

$$\text{var } \{x\} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

14-24. Para la fdp $f(x)$, demuestre que

$$\text{var}\{x\} = E\{x^2\} - (E\{x\})^2$$

14-25. Dado que $f(x)$ es una fdp, y que $y = cx + d$, donde c y d son constantes, demuestre que

$$E\{y\} = cE\{x\} + d$$

$$\text{var}\{y\} = c^2 \text{var}\{x\}$$

14-26. La fdp conjunta de x_1 y x_2 es

	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$
$x_1 = 1$.2	0	.2
$p(x_1, x_2) = x_1 = 2$	0	.2	0
$x_1 = 3$.2	0	.2

***(a)** Encuentre las fdp marginales $p_1(x_1)$ y $p_2(x_2)$.

***(b)** ¿Son x_1 y x_2 independientes?

(c) Calcule $E\{x_1 + x_2\}$.

(d) Calcule $\text{cov}\{x_1, x_2\}$.

(e) Calcule $\text{var}\{5x_1 - 6x_2\}$.

***14-27.** Un dado legal se lanza 10 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el dado lanzado no muestre un número par?

14-28. Suponga que se lanzan cinco monedas de forma independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente una de las monedas sea diferente de las demás?

***14-29.** Un adivinador de la fortuna afirma que puede predecir si una persona amasará riqueza financiera a lo largo de su vida examinando su manera de escribir. Para verificar su afirmación, a 10 millonarios y a 10 profesores universitarios se les pidió que proporcionaran muestras de su escritura, las cuales luego se emparejaron (un millonario y un profesor) y se le presentaron al adivinador. Se dirá que la afirmación es cierta si el adivinador hace al menos ocho predicciones correctas. ¿Cuál es la probabilidad de que la afirmación sea correcta?

14-30. En un casino hay un juego que consiste en seleccionar un número del 1 al 6 antes de que el operador lance 3 dados legales al mismo tiempo. El casino paga tantos dólares como números de los dados resulten iguales a su selección. Si no hay ninguna coincidencia, usted sólo paga \$1 al casino. Determine su ganancia esperada a largo plazo.

14-31. Suponga que lanza 2 dados simultáneamente. Si coinciden recibe 50 centavos. De lo contrario, usted paga 10 centavos. Determine la ganancia esperada del juego.

- 14-32.** Compruebe las fórmulas de la media y la varianza de la distribución binomial.
- *14-33.** Los clientes llegan a una instalación de servicio de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de cuatro por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un cliente llegue en cualquier intervalo dado de 30 segundos?
- 14-34.** La distribución de Poisson con el parámetro λ se aproxima a la distribución binomial con parámetros (n, p) cuando $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$ y $np \rightarrow \lambda$. Demuestre este resultado para la situación donde sabe que un lote fabricado contiene 1% de artículos defectuosos. Si se toma una muestra de 10 artículos del lote, calcule la probabilidad de que en la muestra haya cuando mucho un artículo defectuoso, primero por medio de la distribución binomial (exacta) y luego mediante la distribución de Poisson (aproximada). Demuestre que la aproximación no será aceptable si el valor de p se incrementa, por ejemplo, a 0.5.
- *14-35.** Los clientes llegan aleatoriamente a un mostrador de recepción a una razón promedio de 20 por hora.
- Determine la probabilidad de que el mostrador esté ocioso.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos personas hagan fila en espera de ser atendidas?
- 14-36.** Compruebe las fórmulas de la media y la varianza de la distribución de Poisson.
- *14-37.** Los clientes que compran en Walmark Store son tanto urbanos como suburbanos. Los clientes urbanos llegan a razón de 5 por minuto y los suburbanos llegan a razón de 7 por minuto. Las llegadas son totalmente aleatorias. Determine la probabilidad de que el tiempo entre llegadas de todos los clientes sea menor que 5 segundos.
- 14-38.** Compruebe las fórmulas de la media y la varianza de la distribución exponencial.
- 14-39.** La escuela de ingeniería de la U de A exige una calificación mínima de 26 en el ACT. Las calificaciones del examen entre estudiantes del último año de preparatoria, en un distrito escolar dado, se distribuyen normalmente con media de 22 y desviación estándar de 2.
- Determine el porcentaje de estudiantes de último año de la preparatoria que son reclutas potenciales de carreras de ingeniería.
 - Si la U de A no acepta a ningún estudiante con una calificación menor que 17 en el ACT, ¿qué porcentaje de estudiantes no será elegible para admisión en la U de A?
- *14-40.** Los pesos de personas que quieren hacer un paseo en helicóptero en un parque de diversiones tienen una media de 180 lb y una desviación estándar de 15 lb. El helicóptero puede llevar a 5 personas, pero su capacidad de peso máxima es de 1000 lb. ¿Cuál es la probabilidad de que el helicóptero no despegue con cinco personas a bordo? (*Sugerencia:* Aplique el teorema del límite central).
- 14-41.** El diámetro interno de un cilindro está distribuido normalmente con una media de 1 cm y una desviación estándar de .01 cm. En el interior de cada cilindro se ensambla una varilla sólida. El diámetro de la varilla también suele distribuirse con una media de .99 cm y una desviación estándar de .01 cm. Determine el porcentaje de pares de cilindro y varilla que no podrán ensamblarse (*sugerencia:* La diferencia entre dos variables aleatorias normales también es normal).
- 14-42.** Los datos siguientes representan el tiempo entre llegadas (en minutos) a una instalación de servicio:

4.3	3.4	.9	.7	5.8	3.4	2.7	7.8
4.4	.8	4.4	1.9	3.4	3.1	5.1	1.4
.1	4.1	4.9	4.8	15.9	6.7	2.1	2.3
2.5	3.3	3.8	6.1	2.8	5.9	2.1	2.8
3.4	3.1	.4	2.7	.9	2.9	4.5	3.8
6.1	3.4	1.1	4.2	2.9	4.6	7.2	5.1
2.6	.9	4.9	2.4	4.1	5.1	11.5	2.6
.1	10.3	4.3	5.1	4.3	1.1	4.1	6.7
2.2	2.9	5.2	8.2	1.1	3.3	2.1	7.3
3.5	3.1	7.9	.9	5.1	6.2	5.8	1.4
.5	4.5	6.4	1.2	2.1	10.7	3.2	2.3
3.3	3.3	7.1	6.9	3.1	1.6	2.1	1.9

- (a)** Use Excel para desarrollar tres histogramas de los datos con base en anchos de clase de .5, 1 y 1.5 minutos, respectivamente.
- (b)** Compare gráficamente la distribución acumulada de la FDA empírica y la de una distribución exponencial correspondiente.
- (c)** Pruebe la hipótesis de que la muestra dada se toma de una distribución exponencial. Aplique un nivel de confianza de 95%.
- (d)** ¿Cuál de los tres histogramas es el “mejor” para comprobar la hipótesis nula?
- 14-43.** Los datos siguientes representan el periodo (en segundos) necesario para transmitir un mensaje.

25.8	67.3	35.2	36.4	58.7
47.9	94.8	61.3	59.3	93.4
17.8	34.7	56.4	22.1	48.1
48.2	35.8	65.3	30.1	72.5
5.8	70.9	88.9	76.4	17.3
77.4	66.1	23.9	23.8	36.8
5.6	36.4	93.5	36.4	76.7
89.3	39.2	78.7	51.9	63.6
89.5	58.6	12.8	28.6	82.7
38.7	71.3	21.1	35.9	29.2

Utilice Excel para construir un histograma adecuado. Compruebe la hipótesis de que estos datos se extraen de una distribución uniforme con un nivel de confianza de 95%, dada la siguiente información adicional sobre la distribución uniforme teórica:

- (a)** El intervalo de la distribución es entre 0 y 100.
- (b)** El intervalo de la distribución se estima a partir de los datos muestreados.
- (c)** El límite máximo en el intervalo de la distribución es 100, pero el límite mínimo debe estimarse a partir de los datos muestreados.
- 14-44.** Se utiliza un dispositivo automático para contar el volumen del tránsito en una intersección congestionada. Se registra el tiempo de llegada y se transforma en un tiempo absoluto que inicia desde cero. La siguiente tabla presenta los tiempos de llegada (en minutos) de los primeros 60 automóviles. Use Excel para construir un histograma apropiado. Compruebe la hipótesis de que el tiempo entre llegadas es exponencial utilizando un nivel de confianza de 95%.

Llegada	Tiempo de llegada (minutos)						
1	5.2	16	67.6	31	132.7	46	227.8
2	6.7	17	69.3	32	142.3	47	233.5
3	9.1	18	78.6	33	145.2	48	239.8
4	12.5	19	86.6	34	154.3	49	243.6
5	18.9	20	91.3	35	155.6	50	250.5
6	22.6	21	97.2	36	166.2	51	255.8
7	27.4	22	97.9	37	169.2	52	256.5
8	29.9	23	111.5	38	169.5	53	256.9
9	35.4	24	116.7	39	172.4	54	270.3
10	35.7	25	117.3	40	175.3	55	275.1
11	44.4	26	118.2	41	180.1	56	277.1
12	47.1	27	124.1	42	188.8	57	278.1
13	47.5	28	1127.4	43	201.2	58	283.6
14	49.7	29	127.6	44	218.4	59	299.8
15	67.1	30	127.8	45	219.9	60	300.0

CAPÍTULO 15

Análisis de decisiones y juegos

Aplicación de la vida real: Planeación de la distribución de planta en una instalación de manufactura integrada por computadora

La facultad de ingeniería en una institución académica desea establecer un laboratorio de manufactura integrada por computadora (CIM, por sus siglas de *computer integrated manufacturing*) en un edificio desocupado. El nuevo laboratorio funcionará como una instalación de enseñanza e investigación, y como centro industrial de excelencia técnica. Se recopilan las recomendaciones solicitadas por los profesores sobre el área ideal y mínima absoluta para cada unidad. El estudio utiliza tanto un proceso de jerarquía analítica (PJA) como la programación de metas, para llegar a una solución comprometida satisfactoria que cumpla con las metas de enseñanza, investigación y servicio a la industria. (Los detalles se explican en el caso 10 del capítulo 26, disponible en inglés en el sitio web de este libro).

15.1 TOMA DE DECISIONES BAJO CERTIDUMBRE: PROCESO DE JERARQUÍA ANALÍTICA (PJA)

Los modelos de PL presentados en los capítulos 2 a 9 son ejemplos de toma de decisiones bajo certidumbre (todos los datos se conocen con certeza). El PJA está diseñado para situaciones donde las ideas, los sentimientos y las emociones que afectan el proceso de toma de decisiones se cuantifican para así obtener una escala numérica que priorice las alternativas.

Ejemplo 15.1-1 (Idea general del PJA)

Martin Hans, un brillante estudiante del último año de bachillerato, recibió ofertas de becas académicas completas de tres instituciones: U de A, U de B y U de C. Martin fundamenta su elección en dos criterios: la ubicación y la reputación académica. Para él, la reputación académica es cinco veces más importante que la ubicación, y asigna un peso de aproximadamente 83% a la reputación y 17% a la ubicación. Luego utiliza un proceso

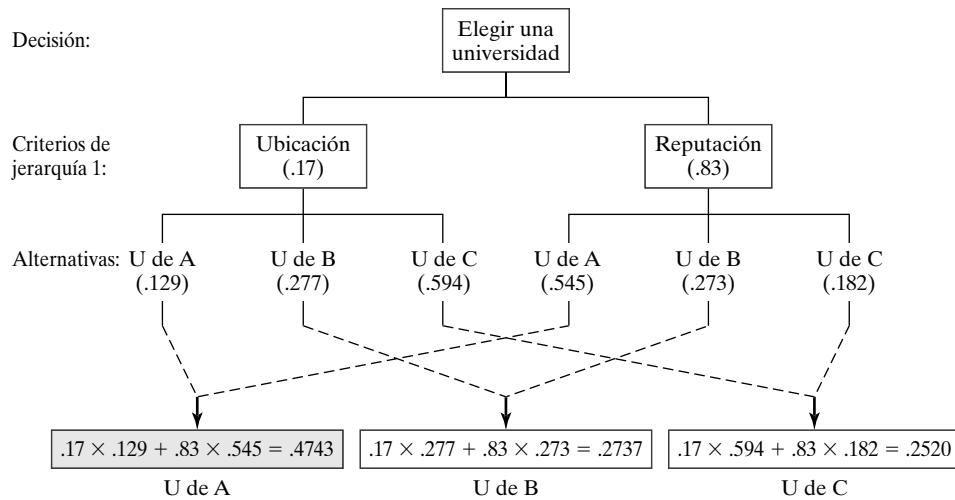


FIGURA 15.1

Resumen de cálculos del PJA para el ejemplo 15.1-1

sistemático (el cual se detallará más adelante) para calificar las tres universidades desde el punto de vista de la ubicación y la reputación, como se indica en la tabla siguiente:

Criterio	Estimaciones de peso en porcentaje para		
	U de A	U de B	U de C
Ubicación	12.9	27.7	59.4
Reputación	54.5	27.3	18.2

La estructura del problema de decisión se resume en la figura 15.1. El problema implica una sola jerarquía (nivel) con dos criterios (ubicación y reputación) y tres alternativas de decisión (U de A, U de B y U de C).

La calificación de cada universidad se basa en los siguientes pesos compuestos:

$$U \text{ de } A = .17 \times .129 + .83 \times .545 = \mathbf{.4743}$$

$$U \text{ de } B = .17 \times .277 + .83 \times .273 = .2737$$

$$U \text{ de } C = .17 \times .594 + .83 \times .182 = .2520$$

Con base en estos cálculos, Martin elige la U de A porque tiene el peso compuesto más alto.

Comentarios. La estructura general del PJA puede incluir varios niveles de criterios. Suponga en el ejemplo 15.1-1 que la hermana gemela de Martin, Jane, también fue aceptada con beca completa a las tres universidades. Los padres insisten en que ambos hermanos asistan a la misma universidad. La figura 15.2 resume el problema de decisión, que ahora involucra dos jerarquías. Los valores de p y q en la primera jerarquía son los pesos relativos que representan las opiniones de Martin y Jane (presumiblemente iguales). Los pesos (p_1, p_2) y (q_1, q_2) en la segunda jerarquía,

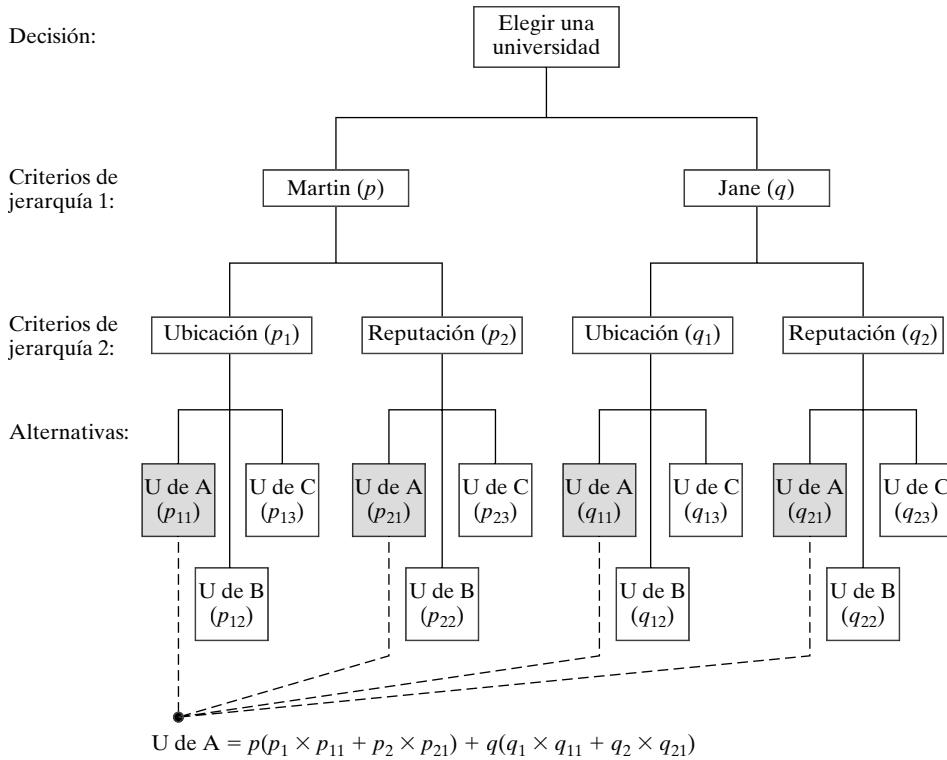


FIGURA 15.2

Refinamiento del problema de decisión del ejemplo 15.1-1

respectivamente, representan las preferencias de Martin y Jane respecto de la ubicación y reputación de cada universidad. El resto de la gráfica de toma de decisiones puede interpretarse del mismo modo. Observe que $p + q = 1$, $p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 1$, $p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1$, $p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1$, $q_{11} + q_{12} + q_{13} = 1$ y $q_{21} + q_{22} + q_{23} = 1$. La parte inferior de la figura 15.2 demuestra cómo se calcula el peso compuesto de la U de A.

Determinación de los pesos. El aspecto crucial del PJA es la determinación de los pesos relativos (como los utilizados en el ejemplo 15.1-1) para calificar las alternativas. Si se enfrentan n criterios en una jerarquía dada, el PJA establece una **matriz de comparación** por pares \mathbf{A} de $n \times n$, que cuantifica el juicio del tomador de decisiones sobre la importancia relativa de los criterios. La comparación por pares se hace de modo que el criterio en la fila i ($i = 1, 2, \dots, n$) se califica respecto de cada criterio alterno. Si a_{ij} define el elemento (i, j) de \mathbf{A} , el PJA utiliza una escala numérica de 1 a 9 donde $a_{ij} = 1$ significa que i y j son de igual importancia, $a_{ij} = 5$ indica que i es mucho más importante que j , y $a_{ij} = 9$ indica que i es extremadamente más importante que j . Otros valores intermedios entre 1 y 9 se interpretan según corresponda. La **consistencia** en el juicio implica que si $a_{ij} = k$, entonces $a_{ji} = \frac{1}{k}$. Asimismo, todos los elementos diagonales a_{ii} de \mathbf{A} son iguales a 1, ya que estos elementos califican cada criterio contra sí mismo.

Ejemplo 15.1-2

Con la finalidad de demostrar cómo se determina la matriz de comparación \mathbf{A} para el problema de decisión de Martin del ejemplo 15.1-1, se inicia con la jerarquía superior que trata de los criterios de ubicación (L) y reputación (R). En el juicio de Martin, R es *mucho más importante* que L y, por consiguiente, $a_{21} = 5$ y, de forma automática, $a_{12} = \frac{1}{5}$ por lo que se produce la siguiente matriz de comparación:

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & L & R \\ L & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ R & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Los pesos relativos de R y L se determinan normalizando \mathbf{A} para crear una nueva matriz \mathbf{N} . El proceso requiere dividir los elementos individuales de cada columna entre la suma de la columna. Por lo tanto, se dividen los elementos de la columna 1 entre 6 ($1 + 5$) y los de la columna 2 entre 1.2 ($= \frac{1}{5} + 1$). Los pesos relativos deseados, w_R y w_L , se calculan entonces como promedios de fila:

$$\mathbf{N} = \begin{matrix} & L & R & \text{Promedios de fila} \\ \begin{pmatrix} L & \begin{pmatrix} .17 & .17 \\ R & .83 & .83 \end{pmatrix} & w_L = \frac{.17 + .17}{2} = .17 \\ R & \begin{pmatrix} .83 & .83 \end{pmatrix} & w_R = \frac{.83 + .83}{2} = .83 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Los cálculos arrojan $w_L = .17$ y $w_R = .83$, los pesos que se utilizan en la figura 15.1. Las columnas de \mathbf{N} son iguales, una indicación de que el tomador de decisiones está ejerciendo un juicio consistente al especificar las entradas de la matriz de comparación \mathbf{A} . La consistencia siempre está garantizada en matrices de comparación de 2×2 pero no en matrices de mayor orden (como se explicará en breve).

Las preferencias de Martin respecto de la importancia relativa de las tres universidades desde el punto de vista de los dos criterios L y R se resumen en las siguientes matrices de comparación:

$$\mathbf{A}_L = \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{pmatrix} A & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ B & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ C & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A & B & C \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ B & 1 & \frac{3}{2} \\ C & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

A continuación, se tiene

$$\text{Suma de la columna } \mathbf{A}_L = (8, 3.5, 1.7)$$

$$\text{Suma de la columna } \mathbf{A}_R = (1.83, 3.67, 5.5)$$

Las matrices normalizadas se determinan dividiendo cada entrada de una columna entre la suma de la columna respectiva; a saber,

$$\mathbf{N}_L = \begin{matrix} & A & B & C & \text{Promedios de fila} \\ \begin{pmatrix} A & \begin{pmatrix} .125 & .143 & .118 \end{pmatrix} & w_{LA} = \frac{.125 + .143 + .118}{3} = .129 \\ B & \begin{pmatrix} .250 & .286 & .294 \end{pmatrix} & w_{LB} = \frac{.250 + .286 + .294}{3} = .277 \\ C & \begin{pmatrix} .625 & .571 & .588 \end{pmatrix} & w_{LC} = \frac{.625 + .571 + .588}{3} = .594 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N}_R = \begin{matrix} & A & B & C & \text{Promedios de fila} \\ \begin{pmatrix} A & \begin{pmatrix} .545 & .545 & .545 \end{pmatrix} & w_{RA} = \frac{.545 + .545 + .545}{3} = .545 \\ B & \begin{pmatrix} .273 & .273 & .273 \end{pmatrix} & w_{RB} = \frac{.273 + .273 + .273}{3} = .273 \\ C & \begin{pmatrix} .182 & .182 & .182 \end{pmatrix} & w_{RC} = \frac{.182 + .182 + .182}{3} = .182 \end{pmatrix}$$

Los valores de $(w_{LA}, w_{LB} \text{ y } w_{LC}) (= .129, .277 \text{ y } .594)$ dan los pesos de las ubicaciones respectivas de U de A, U de B y U de C, respectivamente. Asimismo, los valores de $(w_{RA}, w_{RB} \text{ y } w_{RC}) (= .545, .273, .182)$ dan los pesos relativos en cuanto a la reputación académica de las tres universidades. Éstos son los valores utilizados en la figura 15.1.

Consistencia de la matriz de comparación. En el ejemplo 15.1-2, todas las columnas de las matrices normalizadas \mathbf{N} y \mathbf{N}_R son idénticas, y las de \mathbf{N}_L no lo son. Esto significa que \mathbf{A} y \mathbf{A}_R son *consistentes* y que \mathbf{A}_L no lo es.

La consistencia implica juicio racional por parte del tomador de decisiones. Matemáticamente se dice que una matriz de comparación \mathbf{A} es consistente si

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik}, \text{ para todas las } i, j \text{ y } k$$

Por ejemplo, en la matriz \mathbf{A}_R del ejemplo 15.1-2, $a_{13} = 3$ y $a_{12}a_{23} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$. Esta propiedad requiere que todas las columnas (y filas) de \mathbf{A}_R sean linealmente dependientes. En específico, las columnas de cualquier matriz de comparación de 2×2 , como \mathbf{A} , son dependientes por definición y, por consiguiente, una matriz de 2×2 siempre es consistente.

Es inusual que las matrices de comparación de mayor orden sean siempre consistentes, y se espera un grado de inconsistencia. Para decidir qué nivel de inconsistencia es “tolerable” se requiere desarrollar una medida cuantificable de consistencia para la matriz de comparación \mathbf{A} . En el ejemplo 15.1-2 se vio que una matriz consistente \mathbf{A} produce una matriz normalizada \mathbf{N} , en la cual todas las columnas son idénticas; es decir,

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \dots & w_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n & w_n & \dots & w_n \end{pmatrix}$$

La matriz de comparación original \mathbf{A} puede determinarse a partir de \mathbf{N} mediante un proceso de retroceso que divide los elementos de la columna i entre w_i —esto es,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Al postmultiplicar \mathbf{A} por $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \dots \\ nw_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, \mathbf{A} es consistente si,

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = n\mathbf{w}$$

Para el caso en que \mathbf{A} no sea consistente, el peso relativo, w_i , está dado aproximadamente por el promedio de los n elementos de la fila i en la matriz normalizada \mathbf{N} (vea el ejemplo 15.1-2). Si $\bar{\mathbf{w}}$ es el vector de los promedios calculados, se puede demostrar que

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{w}} = n_{\max}\bar{\mathbf{w}}, n_{\max} \geq n$$

En este caso, cuanto más se acerque n_{\max} a n , más consistente será la matriz de comparación \mathbf{A} . Con base en esta observación, el PJA calcula la **razón de consistencia** como

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

donde

CI = Índice de consistencia de \mathbf{A}

$$= \frac{n_{\max} - n}{n - 1}$$

RI = Consistencia aleatoria de \mathbf{A}

$$= \frac{1.98(n - 2)}{n}$$

El índice de consistencia aleatoria, RI , se determina empíricamente como el CI promedio de una muestra grande de matrices de comparación \mathbf{A} generadas aleatoriamente.

Si $CR \leq .1$, el nivel de inconsistencia es aceptable. De lo contrario, la inconsistencia es alta, y quizás el tomador de decisiones deba revisar las estimaciones de los elementos a_{ij} para lograr una mejor consistencia.

El valor de n_{\max} se calcula a partir de $\mathbf{A}\bar{\mathbf{w}} = n_{\max}\bar{\mathbf{w}}$ observando que la i -ésima ecuación es

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{w}_j = n_{\max}\bar{w}_i, i = 1, 2, \dots, n$$

Dado que $\sum_{i=1}^n \bar{w}_i = 1$, se tiene

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{w}_j \right) = n_{\max} \sum_{i=1}^n \bar{w}_i = n_{\max}$$

Esto significa que el valor de n_{\max} es igual a la suma de los elementos del vector columna $\mathbf{A}\bar{\mathbf{w}}$.

Ejemplo 15.1-3

En el ejemplo 15.1-2, la matriz \mathbf{A}_L es inconsistente porque las columnas de su \mathbf{N}_L no son idénticas. Para probar la consistencia de \mathbf{N}_L , se inicia calculando n_{\max} . Por el ejemplo 15.1-2, se tiene

$$\bar{w}_1 = .129, \bar{w}_2 = .277, \bar{w}_3 = .594$$

Entonces,

$$\mathbf{A}_L\bar{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .129 \\ .277 \\ .594 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3863 \\ 0.8320 \\ 1.7930 \end{pmatrix}$$

$$n_{\max} = .3863 + .8320 + 1.7930 = 3.0113$$

Ahora, con $n = 3$,

$$CI = \frac{n_{\max} - n}{n - 1} = \frac{3.0113 - 3}{3 - 1} = .00565$$

$$RI = \frac{1.98(n - 2)}{n} = \frac{1.98 \times 1}{3} = .66$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{.00565}{.66} = .00856$$

Debido a que $CR < .1$, el nivel de inconsistencia en \mathbf{A}_L es aceptable.

Momento de Excel

La plantilla *excelAHP.xls* está regida por los datos introducidos por el usuario y puede manejar matrices de comparación de tamaño 8×8 o menor. En la figura 15.3 se demuestra la aplicación del modelo al ejemplo 15.1-2 (las columnas F:I y las filas 10:13 están ocultas para conservar espacio). Las matrices de comparación del problema se ingresan *una por una* en la sección (superior) de datos de entrada de la hoja de cálculo. No es importante el orden en el cual se ingresan las matrices de comparación, aunque tiene más sentido considerarlas en su orden jerárquico natural.

La sección de resultados (inferior) de la hoja de cálculo presenta la matriz normalizada asociada y su relación de consistencia, CR .¹ Los pesos, w , se copian de la columna J y se pegan en el área de resumen de la solución (la sección derecha de la hoja de cálculo). Recuerde utilizar Paste Special \Rightarrow Values cuando realice este paso para garantizar un registro permanente. El proceso se repite hasta que todos los pesos de todas las matrices de comparación se guardan en el área de resumen de la solución iniciando en la columna K.

En la figura 15.3, la calificación final se da en las celdas (K18:K20). La fórmula en la celda K18 es

$$= \$L\$4*\$L7+\$L\$5*\$N7$$

FIGURA 15.3

Solución en Excel del ejemplo 15.1-2 (archivo *excelAHP.xls*)

AHP-Analytic Hierarchy Process										
Input: Comparison matrix									Solution summary	
Matrix name: AL										
Matrix size= 3 <<Maximum size = 8										
Matrix data: UA UB UC										
UA 1 0.5 0.2										
UB 2 1 0.5										
UC 5 2 1										
Col sum 8 3.5 1.7										
Output: Normalized martix										
nMax= 3.00746 CR= 0.0056										
UA 0.12500 0.14286 0.11765									Weight Final ranking	
UB 0.25000 0.28571 0.29412									0.12850 UA= 0.47596	
UC 0.62500 0.57143 0.58824									0.27661 UB= 0.27337	
27 Caution: Formulas in Col. J are unprotected to allow copying to Solution Summary. Keep formulas intact.									0.59489 UC= 0.25066	

¹ Los resultados más precisos de la hoja de cálculo difieren de los presentados en los ejemplos 15.1-2 y 15.1-3, debido a la aproximación redondeada manual.

Esta fórmula proporciona el peso compuesto de la alternativa U de A y se copia en las celdas K19 y K20 para evaluar las alternativas U de B y U de C. Observe por la fórmula en K18 que la referencia a la alternativa U de A debe tener la *columna fija* (es decir, \$L7 y \$N7); mientras que *todas* las demás referencias tienen que estar fijas en la *fila y columna* (o bien \$L\$4 y \$L\$5). La validez de las fórmulas copiadas requiere que se apilen los pesos *alternativos* (fijos en la columna) de cada matriz en *una sola columna* (sin celdas vacías que intervengan). En la figura 15.3, los pesos A_R están en la columna L y los pesos A_L están en la columna N. No hay restricciones en la colocación de los pesos A porque las columnas y filas están fijas en la fórmula.

Puede refinar la fórmula en K18 para capturar los nombres de las alternativas aplicando

```
=\$K7& "="&TEXT($L$4*$L7+$L$5*$N7,"#### 0.00000")
```

El procedimiento para evaluar alternativas puede ampliarse a cualquier cantidad de niveles de jerarquía. Una vez que desarrolla la fórmula correctamente para la primera alternativa, la misma fórmula se copia en las celdas restantes. Recuerde que *todas* las referencias a celdas en la fórmula deben estar fijas en columna y fila, excepto las referencias a las alternativas, las cuales necesitan estar fijas sólo en la columna. El problema 15-2 le pide que desarrolle la fórmula para un problema de 3 niveles.

15.2 TOMA DE DECISIONES BAJO RIESGO

En condiciones de riesgo, los beneficios asociados con cada alternativa de decisión están representados por distribuciones de probabilidad, y la decisión puede basarse en el *criterio de valor esperado*: maximización de la utilidad esperada o minimización del costo esperado. En ocasiones, el criterio del valor esperado se modifica para tomar en cuenta otras situaciones, como se describirá más adelante en esta sección.

Aplicación de la vida real: Límites en las reservaciones de un hotel

El hotel La Posada cuenta con 300 habitaciones. Su clientela incluye a viajeros tanto de negocios como de diversión. Las tarifas de las habitaciones tienen descuentos, sobre todo para los últimos. Los viajeros de negocios, que suelen tardarse en reservar sus habitaciones, pagan la tarifa completa. La Posada establece un *límite en la reserva* de habitaciones con tarifas descontadas para aprovechar la tarifa completa que pagan los clientes de negocios. El estudio de caso que se incluye al final de este capítulo utiliza un análisis de árbol de decisiones para determinar el límite de las reservaciones.

15.2.1 Árbol de decisiones con base en el criterio del valor esperado

El criterio del valor esperado busca maximizar la utilidad esperada (promedio) o minimizar el costo esperado. Los datos del problema suponen que el pago (o el costo) asociado con cada alternativa de decisión es probabilística.

Análisis con árbol de decisiones. El siguiente ejemplo considera situaciones de decisión simples con una cantidad finita de alternativas de decisión y matrices de pago explícitas.

Ejemplo 15.2-1

Suponga que desea invertir \$10,000 en el mercado de valores adquiriendo acciones en una de dos compañías: A y B. Las acciones de la compañía A, aun cuando son riesgosas, podrían redituar 50% durante el siguiente año. Si las condiciones del mercado de valores no son favorables (es decir, un mercado “bajista”) las acciones pueden perder 20% de su valor. La compañía B proporciona inversiones seguras con 15% de rendimiento en un mercado

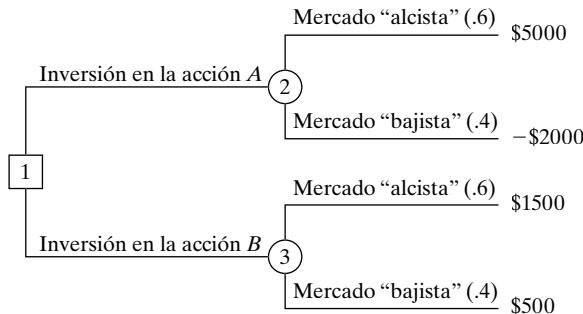


FIGURA 15.4

Representación en forma de árbol de decisiones del problema del mercado de valores

“alcista” y de sólo 5% en un mercado “bajista”. Todas las publicaciones que ha consultado (¡y siempre hay una abundancia de ellas al final del año!) pronostican una probabilidad de 60% de un mercado “alcista” y 40% de un mercado “bajista”. ¿Cómo debería invertir su dinero?

El problema de decisión se resume en la siguiente tabla.

Alternativa de decisión	Rendimiento a 1 año de la inversión de \$10,000	
	Mercado “alcista” (\$)	Mercado “bajista” (\$)
Acciones de la compañía A	5000	-2000
Acciones de la compañía B	1500	500
Probabilidad de ocurrencia	.6	.4

El problema también puede representarse como un **árbol de decisiones** como se muestra en la figura 15.4. Se utilizan dos tipos de nodos en el árbol: un cuadrado (\square) representa un *punto de decisión*; y un círculo (\circ), un evento aleatorio. Por lo tanto, las dos ramas que provienen del punto de decisión 1 representan las dos alternativas de invertir en la acción A o en la acción B. A continuación, las dos ramas que provienen de los eventos aleatorios 2 y 3 representan los mercados “alcista” y “bajista” con sus respectivas probabilidades y retribuciones.

De acuerdo con la figura 15.4, los rendimientos esperados a 1 año son

$$\text{Acción A} = \$5000 \times .6 + (-2000) \times .4 = \$2200$$

$$\text{Acción B} = \$1500 \times .6 + \$500 \times .4 = \$1100$$

Se elige la acción A porque produce un rendimiento esperado más alto.

Comentarios. En la terminología de teoría de decisiones, los mercados probabilísticos “alcista” y “bajista” se llaman **estados de la naturaleza**. En general, un problema de decisión puede incluir n estados de la naturaleza y m alternativas. Si $p_j (> 0)$ es la probabilidad de ocurrencia del estado j y a_{ij} es el pago de la alternativa i , dado el estado j ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$), entonces el pago esperado de la alternativa i se calcula como

$$\begin{aligned} EV_i &= a_{i1} p_1 + a_{i2} p_2 + \dots + a_{in} p_n, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n &= 1 \end{aligned}$$

La mejor alternativa corresponde a $\max_i \{EV_i\}$ y $\min_i \{EV_i\}$ para el caso de utilidad y pérdida, respectivamente.

15.2.2 Variantes del criterio del valor esperado

En esta sección se abordan dos temas relacionados con el criterio del valor esperado: la determinación de *probabilidades a posteriori* con base en la experimentación, y el uso de la *utilidad* contra el valor real del dinero.

Probabilidades a posteriori (de Bayes). Las probabilidades utilizadas en el criterio del valor esperado se suelen estimar a partir de datos históricos (vea la sección 14.5). En algunos casos, la precisión de estas estimaciones puede mejorarse usando experimentación adicional. Las probabilidades resultantes se conocen como **probabilidades a posteriori (o de Bayes)**, en contraste con las **probabilidades a priori** determinadas a partir de datos sin procesar.

Aplicación de la vida real: Problema de Casey, interpretación y evaluación de un nuevo examen

Un examen de detección en recién nacidos, llamado Casey, revela una deficiencia de la enzima C14:1, la cual se requiere para digerir una forma específica de grasas de cadena larga, y su ausencia podría conducir a una enfermedad grave o a una muerte misteriosa (catalogada comúnmente bajo el síndrome de muerte infantil repentina, o SIDS por sus siglas de *sudden infant death syndrome*). El examen se había administrado antes a aproximadamente 13,000 recién nacidos, y Casey fue el primero en dar positivo. Aun cuando el examen de detección por sí mismo no constituye un diagnóstico definitivo, la extrema rareza de la condición llevó a los doctores a concluir que había 80 a 90% de probabilidades de que padeciera la deficiencia. Dado que Casey dio positivo, se utiliza la probabilidad a posteriori de Bayes para valorar si el bebé sufre o no la deficiencia de C14:1. Los detalles se explican en el caso 11 del capítulo 26, disponible en inglés en el sitio web de este libro.

Ejemplo 15.2-2

En este ejemplo se demuestra cómo se modifica el criterio del valor esperado para aprovechar las probabilidades a posteriori. En el ejemplo 15.2-1, las probabilidades (a priori) de .6 y .4 de un mercado “alcista” y un mercado “bajista” se determinan a partir de publicaciones financieras disponibles. Suponga que en lugar de depender únicamente de tales publicaciones, usted decidió conducir una investigación más “personal” al consultar a un amigo que se desempeña bien en el mercado de valores. El amigo cuantifica una recomendación de invertir “a favor/en contra” de la siguiente manera: En un mercado “alcista”, hay 90% de probabilidades de que la recomendación sea “a favor”. Se reduce a 50% en un mercado “bajista”. ¿Cómo afecta la información adicional a la decisión?

La afirmación del amigo indica probabilidades condicionales de las recomendaciones “a favor” y “en contra”, dado que los estados de la naturaleza son mercados “alcista” y “bajista”. Defina

$$v_1 = \text{Voto “a favor”}$$

$$v_2 = \text{Voto “en contra”}$$

$$m_1 = \text{Mercado “alcista”}$$

$$m_2 = \text{Mercado “bajista”}$$

Por lo tanto, la afirmación del amigo se escribe en la forma de enunciados de probabilidad como

$$P\{v_1 | m_1\} = .9, P\{v_2 | m_1\} = .1$$

$$P\{v_1 | m_2\} = .5, P\{v_2 | m_2\} = .5$$

Con esta representación, el problema de decisión se resume como:

1. Si la recomendación del amigo es “a favor”, ¿invertiría en la acción A o en la acción B ?
2. Si la recomendación del amigo es “en contra”, ¿invertiría en la acción A o en la acción B ?

El árbol de decisiones que aparece en la figura 15.5 representa el problema. El nodo 1 es un evento aleatorio que representa las posibilidades “a favor” y “en contra”. Los nodos 2 y 3 son puntos de decisión para seleccionar entre las acciones A y B , dadas las recomendaciones “a favor” y “en contra”, respectivamente. Por último, los nodos 4 a 7 son eventos aleatorios que representan los mercados “alcista” y “bajista”.

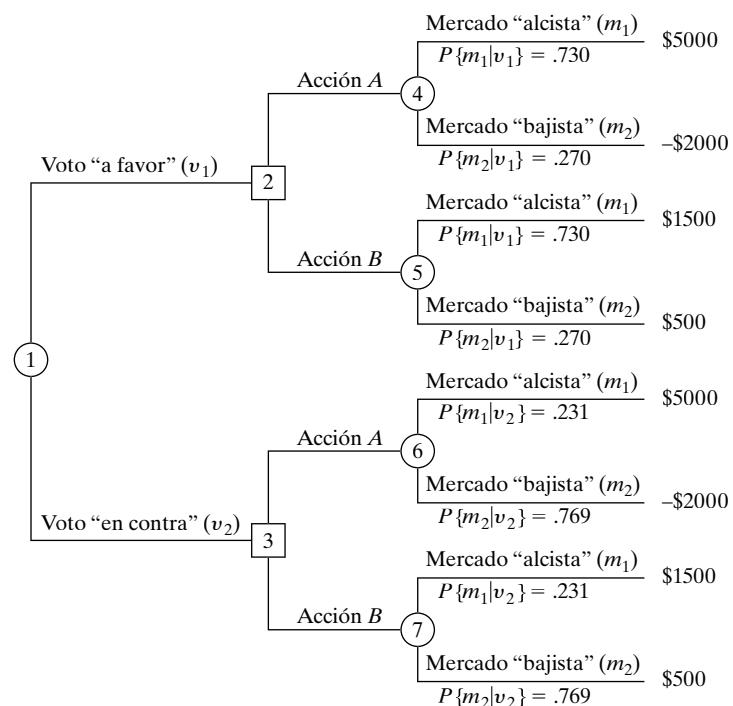
Para evaluar las diferentes alternativas en la figura 15.5 es necesario calcular las probabilidades *a posteriori* $P\{m_i|v_j\}$ mostradas en las ramas m_1 y m_2 de los nodos 4, 5, 6 y 7. Estas probabilidades a posteriori toman en cuenta la información adicional proporcionada por la recomendación “a favor” o “en contra” del amigo y se calculan de acuerdo con los siguientes pasos generales:

Paso 1. Resuma las probabilidades condicionales $P\{v_j|m_i\}$ en la siguiente forma tabular:

	v_1	v_2
m_1	.9	.1
m_2	.5	.5

FIGURA 15.5

Árbol de decisiones para el problema del mercado de valores con probabilidades a posteriori



Paso 2. Calcule las probabilidades conjuntas como

$$P\{m_i, v_j\} = P\{v_j|m_i\}P\{m_i\}, \text{ para todas las } i \text{ y } j$$

Dadas las probabilidades a priori $P\{m_1\} = .6$ y $P\{m_2\} = .4$, las probabilidades conjuntas se determinan multiplicando la primera y segunda filas de la tabla en el paso 1 por .6 y .4, respectivamente; es decir,

	v_1	v_2
m_1	.54	.06
m_2	.20	.20

La suma de todas las entradas en la tabla es igual a 1.

Paso 3. Determine las probabilidades absolutas como

$$P\{v_j\} = \sum_{\text{todas las } i} P\{m_i, v_j\}, \text{ para todas las } j$$

Estas probabilidades son las sumas en las columnas de la tabla del paso 2; esto es,

$P\{v_1\}$	$P\{v_2\}$
.74	.26

Paso 4. Calcule las probabilidades a posteriori deseadas como

$$P\left\{m_i \middle| v_j\right\} = \frac{P\{m_i, v_j\}}{P\{v_j\}}$$

Estas probabilidades se calculan dividiendo cada columna en la tabla del paso 2 entre la suma de la columna correspondiente en la tabla del paso 3, de donde se obtiene

	v_1	v_2
m_1	.730	.231
m_2	.270	.769

Éstas son las probabilidades utilizadas en la figura 15.5 y son diferentes de las probabilidades a priori $P\{m_1\} = .6$ y $P\{m_2\} = .4$.

Ahora ya es posible evaluar las alternativas con base en los pagos esperados para los nodos 4, 5, 6 y 7; es decir,

Recomendación “a favor”

Acción A en el nodo 4 = $5000 \times .730 + (-2000) \times .270 = \3110

Acción B en el nodo 5 = $1500 \times .730 + 500 \times .270 = 1230$

Decisión. Invertir en la acción A.

Recomendación “en contra”

$$\text{Acción } A \text{ en el nodo } 6 = 5000 \times .231 + (-2000) \times .769 = -\$383$$

$$\text{Acción } B \text{ en el nodo } 7 = 1500 \times .231 + 500 \times .769 = \$731$$

Decisión. Invertir en la acción *B*.

Las decisiones dadas equivalen a decir que los pagos esperados en los nodos de decisión 2 y 3 son \$3110 y \$731, respectivamente (vea la figura 15.5). Entonces, dadas las probabilidades $P[v_1] = 0.74$ y $P[v_2] = 0.26$ según se calcularon en el paso 3, es posible calcular la retribución esperada para todo el árbol de decisiones (vea el problema 15-30).

Momento de Excel

El archivo *excelBayes.xls* está diseñado para determinar las probabilidades a posteriori de matrices de probabilidad a priori de tamaños hasta de 10×10 (algunas filas y columnas se ocultaron para conservar espacio). Los datos de entrada incluyen $P[m]$ y $P[v|m]$. La hoja de cálculo verifica los errores en los datos de entrada y muestra los mensajes de error apropiados.

Momento, ¡ajá! Una lotería del siglo XVIII que ofrece un pago esperado infinito, ¿o no?

A principios del siglo XVIII, el matemático suizo Nicolas Bernoulli introdujo un juego de lotería teórico y paradójico con un pago esperado infinito. La paradoja surge porque el juego no establece ningún límite en la cantidad de dinero que un jugador puede ganar. El juego fue publicado por el hermano de Nicolas, Daniel, en 1738 en las *Actas de la Academia de San Petersburgo* y es conocido como la **paradoja de Petersburgo**. Las reglas del juego son sencillas: lanzar una moneda equilibrada. Si el resultado es cara (H), el juego continúa; de lo contrario, el juego termina con la primera aparición de una cruz (T). Comenzando con \$2 para la primera cara (H), el pago se duplica con la ocurrencia de cada H sucesiva, produciendo el flujo monetario \$2, \$4, \$8, \$16... La probabilidad de que una H se repita en el lanzamiento n es $(\frac{1}{2})^{n-1}(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2^n})$. Por lo tanto, si se supone que el juego se realiza indefinidamente,

$$\text{Pago esperado} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (\frac{1}{2^n}) = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

Si el pago esperado infinito es el valor “equilibrado” del juego, entonces, teóricamente, un jugador debería aceptar cualquier precio por practicar el juego, un resultado bastante paradójico, sobre todo cuando un tomador de decisiones racional se da cuenta de que es probable un pago bajo (por ejemplo, hay una posibilidad de 50-50 de ganar \$2) y es improbable un pago alto [por ejemplo, la probabilidad de ganar la cantidad modesta (comparativamente) de \$1024 ($= 2^{10}$) es menor que .001].

La paradoja fue resuelta por Daniel Bernoulli² introduciendo los conceptos de *funciones de utilidad* y *aversión al riesgo* para reemplazar las cantidades monetarias en los cálculos del valor esperado, como se explica en el resto de esta sección.

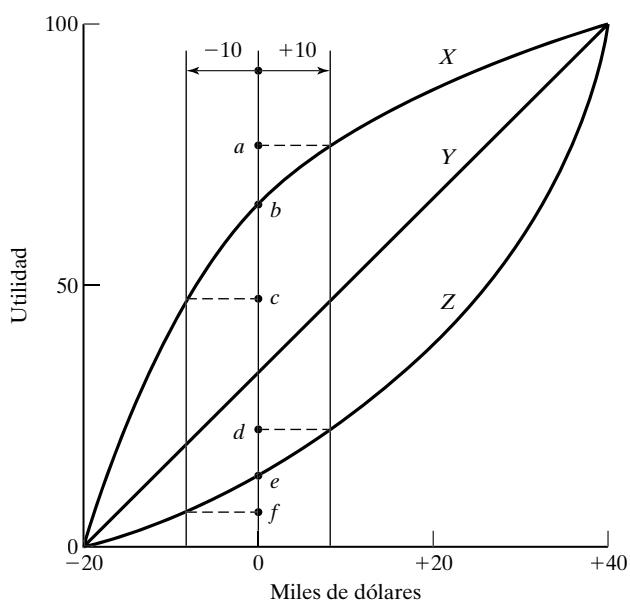
² <http://www.econ.ucsb.edu/~tedb/Courses/GraduateTheoryUCSB/Bernoulli.pdf>, consultado el 14/06/2015. Bernoulli reconoció que diez años antes, su colega suizo Gabriel Cramer, estuvo muy cerca de resolver la paradoja de manera independiente.

Funciones de utilidad. En la presentación anterior el criterio del valor esperado se aplica a situaciones donde el pago es dinero real. Hay casos en que en el análisis debe aplicarse la utilidad en lugar del valor *real*. Para ilustrarlo, suponga que hay una probabilidad 50-50 de que una inversión de \$20,000 produzca una ganancia de \$40,000 o que se pierda. La ganancia esperada asociada es de $\$40,000 \times .5 - \$20,000 \times .5 = \$10,000$. Aunque hay una ganancia esperada neta, diferentes individuos interpretan de forma distinta el resultado. Un inversionista que desea correr el riesgo puede realizar la inversión con 50% de probabilidades de obtener una ganancia de \$40,000. Por el contrario, quizás un inversionista conservador no esté dispuesto a correr el riesgo de perder \$20,000. El concepto de *función de utilidad* se ideó para reflejar tales diferencias. La función de utilidad ocupa entonces el lugar del dinero real en el modelo de toma de decisiones.

¿Cómo se cuantifica la actitud subjetiva ante el riesgo en la forma de una función de utilidad? En la ilustración anterior de inversión, el mejor pago es de \$40,000, y la peor de -\$20,000. Se puede establecer una escala de utilidad, U , de 0 a 100 que especifique $U(-\$20,000) = 0$ y $U(\$40,000) = 100$. El valor de U para un rendimiento de la inversión entre -\$20,000 y \$40,000 se determina como sigue: Si la actitud del tomador de decisiones hacia el riesgo es neutra (indiferente), entonces U puede representarse mediante una línea recta que une $(0, -\$20,000)$ y $(100, \$40,000)$. En este caso, tanto el dinero real como su utilidad conducen a las mismas decisiones. De manera más general, la función U puede adoptar otras formas que reflejan diferentes actitudes hacia el riesgo. La figura 15.6 ilustra los casos de los individuos X , Y y Z . El individuo Y es **neutro ante el riesgo**, el individuo X es **adverso al riesgo** (o precavido), y el individuo Z , el opuesto de X ,

FIGURA 15.6

Funciones de utilidad para tomadores de decisiones adversos al riesgo (X), neutros ante el riesgo (Y) y proclives al riesgo (Z)



es **proclive al riesgo**. La figura demuestra que para el adverso al riesgo X , la reducción de la utilidad bc correspondiente a una pérdida de \$10,000 es mayor que el incremento ab asociado con una ganancia de \$10,000. Lo contrario funciona para el proclive al riesgo Z donde $de > ef$. Por lo general, un individuo puede ser tanto proclive como adverso al riesgo, en cuyo caso la curva de utilidad seguirá una S de forma alargada.

Curvas de utilidad similares a las demostradas en la figura 15.6 se determinan “cuantificando” la actitud del tomador de decisiones hacia el riesgo, con diferentes niveles de efectivo. En nuestro ejemplo, el intervalo deseado es (\$-20,000 a \$40,000) con $U(-$20,000) = 0$ y $U($40,000) = 100$. Para especificar los valores de U para valores de efectivo intermedio (por ejemplo, -\$10,000, \$0, \$10,000, \$20,000 y \$30,000), se establece una **lotería** para una suma de efectivo x cuya utilidad esperada es

$$\begin{aligned} U(x) &= pU(-20,000) + (1 - p)U($40,000), 0 \leq p \leq 1 \\ &= 0p + 100(1 - p) \\ &= 100 - 100p \end{aligned}$$

Para determinar $U(x)$, el tomador de decisiones debe formular una preferencia entre una cantidad de efectivo *garantizada* x y la oportunidad de jugar una lotería en la que puede haber una pérdida de -\$20,000 con probabilidad p y una utilidad de \$40,000 con probabilidad $1 - p$. El valor de p refleja la neutralidad (o indiferencia) del tomador de decisiones hacia el riesgo. Por ejemplo, para $x = \$20,000$, quien toma decisiones puede pensar que un efectivo garantizado de \$20,000 y la lotería con $p = 0.8$ son igualmente atractivos. En este caso es posible calcular la utilidad de $x = \$20,000$ como

$$U($20,000) = 100 - 100 \times .8 = 20$$

Observe que los valores más altos de p con la misma lotería reflejan la búsqueda del riesgo (en oposición a la aversión al riesgo). Por ejemplo, para $p = .1$,

$$U($20,000) = 100 - 100 \times .1 = 90$$

15.3 DECISIÓN BAJO INCERTIDUMBRE

La toma de decisiones bajo incertidumbre, así como bajo riesgo, implica acciones alternativas cuyos pagos dependen de los *estados de la naturaleza* (aleatorios). Específicamente, la matriz de pagos de un problema de decisión con m acciones alternativas y n estados de la naturaleza puede representarse como

	s_1	s_2	\dots	s_n
a_1	$v(a_1, s_1)$	$v(a_1, s_2)$	\dots	$v(a_1, s_n)$
a_2	$v(a_2, s_1)$	$v(a_2, s_2)$	\dots	$v(a_2, s_n)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
a_m	$v(a_m, s_1)$	$v(a_m, s_2)$	\dots	$v(a_m, s_n)$

El elemento a_i representa la acción i y el elemento s_j representa el estado de la naturaleza j . La retribución o el resultado asociado con la acción a_i y el estado s_j es $v(a_i, s_j)$.

En la toma de decisiones bajo incertidumbre, la distribución de probabilidad asociada con los estados $s_j, j = 1, 2, \dots, n$, o se desconoce o no puede determinarse. Esta falta de información condujo al desarrollo de criterios de decisión especiales:

1. Laplace
2. Minimax
3. Savage
4. Hurwicz

Los criterios difieren en cuanto a qué tan conservador es el tomador de decisiones frente a la incertidumbre.

El criterio de **Laplace** se basa en el **principio de razón insuficiente**. Ya que no se conocen las distribuciones de probabilidad, no hay razón alguna para creer que las probabilidades asociadas con los estados de la naturaleza sean diferentes. Por consiguiente, las alternativas se evalúan utilizando el supuesto liberal de que todos los estados tienen la misma probabilidad de ocurrir; esto es, $P\{s_1\} = P\{s_2\} = \dots = P\{s_n\} = \frac{1}{n}$. Dado que el pago $v(a_i, s_j)$ representa la ganancia, la mejor alternativa es la que da por resultado

$$\max_{a_i} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v(a_i, s_j) \right\}$$

El criterio **maximin (minimax)** se basa en la actitud conservadora de hacer la mejor de las peores condiciones posibles. Si $v(a_i, s_j)$ es una pérdida, entonces se selecciona la acción que corresponde al siguiente criterio *minimax*.

$$\min_{a_i} \left\{ \max_{s_j} v(a_i, s_j) \right\}$$

Si $v(a_i, s_j)$ es una ganancia, se utiliza el criterio *maximin* dado por

$$\max_{a_i} \left\{ \min_{s_j} v(a_i, s_j) \right\}$$

El criterio de **arrepentimiento de Savage** “modera” el grado de conservadurismo del criterio *minimax* (*maximin*) al reemplazar la matriz de pagos (ganancia o pérdida) $v(a_i, s_j)$ con una matriz de pérdida (o arrepentimiento), $r(a_i, s_j)$ mediante la siguiente transformación:

$$r(a_i, s_j) = \begin{cases} v(a_i, s_j) - \min_{a_k} \{ v(a_k, s_j) \}, & \text{si } v \text{ es una pérdida} \\ \max_{a_k} \{ v(a_k, s_j) \} - v(a_i, s_j), & \text{si } v \text{ es una ganancia} \end{cases}$$

Para demostrar por qué el criterio de Savage modera el criterio minimax (maximin), considere la siguiente matriz de *pérdida*:

	s_1	s_2	Máx. de fila
$v(a_i, s_j)$	a_1	\$11,000 \$90	\$11,000
	a_2	\$10,000 \$10,000	\$10,000 ← Minimax

La aplicación del criterio minimax muestra que a_2 , con una pérdida definida de \$10,000, es la alternativa preferida. Sin embargo, sería mejor elegir a_1 porque hay una probabilidad de limitar la pérdida a \$90 sólo si ocurre s_2 . Éste suele ser el caso cuando se utiliza la matriz de arrepentimiento:

	s_1	s_2	Máx. de fila
$r(a_i, v_j)$	a_1	\$1,000 \$0	\$1,000 ← Minimax
	a_2	\$0 \$9,910	\$9,910

El último criterio, el de **Hurwicz**, está diseñado para representar diferentes actitudes de decisión que van desde la más liberal (optimista) hasta la más conservadora (pesimista). Defina $0 \leq \alpha \leq 1$. La acción seleccionada debe asociarse con

$$\begin{aligned} & \max_{a_i} \left\{ \alpha \max_{s_j} v(a_i, s_j) + (1 - \alpha) \min_{s_j} v(a_i, s_j) \right\}, \text{ si } v \text{ es una ganancia} \\ & \min_{a_i} \left\{ \alpha \min_{s_j} v(a_i, s_j) + (1 - \alpha) \max_{s_j} v(a_i, s_j) \right\}, \text{ si } v \text{ es una pérdida} \end{aligned}$$

El parámetro α es el **índice de optimismo**. Si $\alpha = 0$, entonces el criterio se reduce al criterio minimax conservador, que busca *la mejor de las peores* condiciones. Si $\alpha = 1$, entonces el criterio es liberal porque busca *la mejor de las mejores* condiciones. El grado de optimismo (o pesimismo) se ajusta seleccionando un valor de α entre 0 y 1. Sin la fuerte sensación respecto de un optimismo y de un pesimismo extremos, $\alpha = .5$ puede ser una elección justa.

Ejemplo 15.3-1

National Outdoors School (NOS) está preparando un sitio para acampar durante el verano en el corazón de Alaska, con la finalidad de enseñar técnicas de sobrevivencia en áreas salvajes. NOS estima que la asistencia puede caer en una de cuatro categorías: 200, 250, 300 y 350 personas. El costo del campamento será mínimo cuando su tamaño satisfaga la demanda con exactitud. Las desviaciones por encima y por debajo de los niveles de demanda ideales incurren en costos adicionales por construir más capacidad que la necesaria o por perder oportunidades de ingresos cuando la demanda no se satisface. Si las variables de a_1 a a_4 representan los tamaños de los campamentos (200, 250, 300 y 350 personas) y de s_1 a s_4 el nivel de asistencia, la siguiente tabla resume la matriz de costos (en miles de dólares) para la situación:

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	5	10	18	25
a_2	8	7	12	23
a_3	21	18	12	21
a_4	30	22	19	15

El problema se analiza aplicando los cuatro criterios.

Laplace. Dado que $P = \{s_j\} = \frac{1}{4}, j = 1 \text{ a } 4$, los valores esperados con las diferentes acciones se calculan como

$$E\{a_1\} = \frac{1}{4}(5 + 10 + 18 + 25) = \$14,500$$

$$E\{a_2\} = \frac{1}{4}(8 + 7 + 12 + 23) = \$12,500 \leftarrow \text{Óptimo}$$

$$E\{a_3\} = \frac{1}{4}(21 + 18 + 12 + 21) = \$18,000$$

$$E\{a_4\} = \frac{1}{4}(30 + 22 + 19 + 15) = \$21,500$$

Minimax. El criterio minimax produce la siguiente matriz:

	s_1	s_2	s_3	s_4	Máx. de fila
a_1	5	10	18	25	25
a_2	8	7	12	23	23
a_3	21	18	12	21	21 ← Minimax
a_4	30	22	19	15	30

Savage. La matriz de arrepentimiento se determina restando 5, 7, 12 y 15 de las columnas 1 a 4, respectivamente. Por lo tanto,

	s_1	s_2	s_3	s_4	Máx. de fila
a_1	0	3	6	10	10
a_2	3	0	0	8	8 ← Minimax
a_3	16	11	0	6	16
a_4	25	15	7	0	25

Hurwicz. La siguiente tabla resume los cálculos:

Alternativa	Mín. de fila	Máx. de fila	$\alpha(\text{Mín. de fila}) + (1 - \alpha)(\text{Máx. de fila})$
a_1	5	25	$25 - 20\alpha$
a_2	7	23	$23 - 16\alpha$
a_3	12	21	$21 - 9\alpha$
a_4	15	30	$30 - 15\alpha$

Si se utiliza una α apropiada se puede determinar la alternativa óptima. Por ejemplo, en $\alpha = .5$, a_1 o a_2 es la óptima, y en $\alpha = .25$, a_3 es la óptima.

Momento de Excel

La plantilla *excelUncertainty.xls* puede usarse para automatizar los cálculos de los criterios de Laplace, maximin, Savage y Hurwicz. La hoja de cálculo se basa en el uso de una matriz de *costos*. Para utilizar una matriz de recompensas, todas las entradas deben multiplicarse por -1 . El tamaño máximo de la matriz es (10×10) .

15.4 TEORÍA DE JUEGOS

La teoría de juegos trata con situaciones de decisión en las cuales dos oponentes *inteligentes* con objetivos conflictivos rivalizan intensamente para superar al otro. Ejemplos típicos incluyen el lanzamiento de campañas publicitarias de productos que compiten y estrategias de planeación para batallas en la guerra.

En un conflicto, cada uno de los dos **jugadores** (oponentes) tiene una cantidad (finita o infinita) de alternativas o **estrategias**. Asociada con cada par de estrategias está el **pago** que un jugador recibe del otro. Tal situación se conoce como **juego de suma cero entre dos personas** porque la ganancia de un jugador es igual a la pérdida del otro, lo cual significa que es posible representar el juego en función del pago que recibe un jugador. Si se designan los dos jugadores A y B con m y n estrategias, respectivamente, el juego se presenta usualmente en función de la matriz de pagos que recibe el jugador A como

	B_1	B_2	\dots	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2m}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
A_m	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}

La representación indica que si A utiliza la estrategia i y B utiliza la estrategia j , el pago para A es a_{ij} , y el pago para B es $-a_{ij}$.

Aplicación de la vida real: Ordenación de golfistas el día final de los juegos en pareja de la Ryder Cup

El día final de un torneo de golf, dos equipos compiten por el campeonato. El capitán de cada equipo presenta una *pizarra* (una lista ordenada de los golfistas) que determina las parejas. Para dos golfistas que ocupan el mismo orden en sus respectivas pizarras, es plausible suponer que haya una probabilidad de 50-50 de que cualquiera de ellos gane el juego. La probabilidad de ganar se incrementa para un golfista de mayor orden cuando se enfrenta a uno de menor orden. El objetivo es desarrollar un procedimiento analítico que apoye o refute la idea de utilizar pizarras. El caso 12 del capítulo 26, disponible en inglés en el sitio web de este libro, detalla el estudio basado en la teoría de juegos.

15.4.1 Solución óptima de juegos de suma cero entre dos personas

Debido a que los juegos implican un conflicto de intereses, la base para la selección de estrategias óptimas garantiza que ninguno de los jugadores intente buscar una estrategia diferente porque el resultado será un peor pago. Las soluciones pueden estar en la forma de una sola estrategia pura o varias estrategias mezcladas aleatoriamente.

Ejemplo 15.4-1

Dos compañías, A y B , venden dos marcas de un medicamento para la gripe. La compañía A se anuncia en radio (A_1), televisión (A_2) y periódicos (A_3). La compañía B , además de utilizar la radio (B_1), la televisión (B_2) y los periódicos (B_3), también envía folletos por correo (B_4). Dependiendo de la efectividad de cada campaña

publicitaria, una compañía puede captar una parte del mercado que pertenecía a la otra. La siguiente matriz resume el porcentaje del mercado captado o perdido por la compañía A .

	B_1	B_2	B_3	B_4	Mín. de fila
A_1	8	-2	9	-3	-3
A_2	6	5	6	8	5 ← Maximin
A_3	-2	4	-9	5	-9
Máx. de columna	8	5	9	8	
		↑			Minimax

La solución del juego se basa en el principio de asegurar *lo mejor de lo peor* para cada jugador. Si la compañía A selecciona la estrategia A_1 , entonces, independientemente de lo que haga B , lo peor que puede suceder es que A pierda 3% del segmento del mercado ante B . Esto se representa por medio del valor mínimo de las entradas en la fila 1. Asimismo, con la estrategia A_2 , el peor resultado es que A capte 5% de B , y con la estrategia A_3 , el peor resultado es que A pierda 9% ante B . Estos resultados aparecen bajo Mín. de fila. Para lograr *lo mejor de lo peor*, la compañía A elige la estrategia A_2 porque corresponde a un valor maximin.

Después, para la compañía B , la matriz de pagos dada es para A , y *la mejor de la peor* solución de B se basa en el valor minimax. El resultado es que la compañía B elegirá la estrategia B_2 .

La solución óptima del juego exige seleccionar las estrategias A_2 y B_2 , lo cual significa que ambas compañías deberían utilizar la publicidad por televisión. El pago favorecerá a la compañía A porque su segmento del mercado se incrementará 5%. En este caso, se dice que el **valor del juego** es 5%, y que A y B están utilizando una solución de **punto de silla**.

La solución de punto de silla impide seleccionar una mejor estrategia por parte de cualquiera de las compañías. Si B cambia de estrategia (B_1 , B_3 o B_4), la compañía A puede seguir con la estrategia A_2 , lo que resultaría en una pérdida peor para B (6% u 8%). Por la misma razón, A no buscaría una estrategia diferente porque B puede cambiar a B_3 para obtener 9% de ganancia del mercado si se utiliza A_1 , y 3% si se utiliza A_3 .

La solución de punto de silla óptima de un juego no tiene que ser una estrategia pura. En cambio, la solución puede requerir combinar dos o más estrategias al azar, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.4-2

Dos jugadores, A y B , juegan a lanzar una moneda. Cada jugador, sin saberlo el otro, elige cara (H) o cruz (T). Ambos jugadores revelan sus elecciones al mismo tiempo. Si coinciden (HH o TT), el jugador A recibe \$1 de B . De lo contrario, A paga \$1 a B .

La siguiente matriz de pagos para el jugador A da los valores mín. de fila y máx. de columna correspondientes a las estrategias de A y B , respectivamente.

	B_H	B_T	Mín. de fila
A_H	1	-1	-1
A_T	-1	1	-1
Máx. de columna	1	1	

Los valores maximin y minimax de los juegos son -\$1 y \$1, respectivamente, y el juego no tiene una solución de estrategia pura porque los dos valores no son iguales. Específicamente, si el jugador A elige A_H , el jugador B

puede seleccionar B_T para recibir \$1 de A . Si esto sucede, A puede cambiar a la estrategia A_T para invertir el resultado y recibir \$1 de B . La constante tentación de cambiar de estrategia muestra que una solución de estrategia pura no es aceptable. Lo que se requiere en este caso es que ambos jugadores combinen aleatoriamente sus estrategias puras respectivas. El valor óptimo del juego ocurrirá entonces en alguna parte entre los valores maximin y minimax del juego; esto es,

$$\text{valor maximin (menor)} \leq \text{valor del juego} \leq \text{valor minimax (mayor)}$$

En el ejemplo de lanzar la moneda, el valor del juego debe quedar entre $-\$1$ y $+\$1$ (vea el problema 15-45).

15.4.2 Solución de juegos con estrategias combinadas

Los juegos con estrategias combinadas pueden resolverse usando métodos gráficos o programación lineal. La solución gráfica es adecuada para juegos con exactamente dos estrategias puras de uno o ambos jugadores. Por otro lado, la programación lineal puede resolver cualquier juego de suma cero entre dos personas. El método gráfico es interesante porque explica la idea de un punto de silla en forma pictórica.

Solución gráfica de juegos. Se inicia con el caso de $(2 \times n)$ juegos donde el jugador A tiene dos estrategias, A_1 y A_2 .

	y_1	y_2	\dots	y_n	
	B_1	B_2	\dots	B_n	
$x_1:$	A_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1m}
$1 - x_1:$	A_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2m}

El jugador A combina las estrategias A_1 y A_2 con probabilidades x_1 y $1 - x_1$, $0 \leq x_1 \leq 1$. El jugador B combina las estrategias $B_1, B_2, \dots, y B_n$ con probabilidades y_1, y_2, \dots, y_n , $y_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \dots, n$, y $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$. En este caso, el pago esperado de A correspondiente a la j -ésima estrategia pura de B es

$$(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}, j = 1, 2, \dots, n$$

El jugador A busca el valor de x_1 que maximice los pagos mínimos esperados, es decir,

$$\max_{x_i} \min_j \{(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}\}$$

Ejemplo 15.4-3

Considere el siguiente juego de 2×4 . El pago es para el jugador A .

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	3	-1
A_2	4	3	2	6

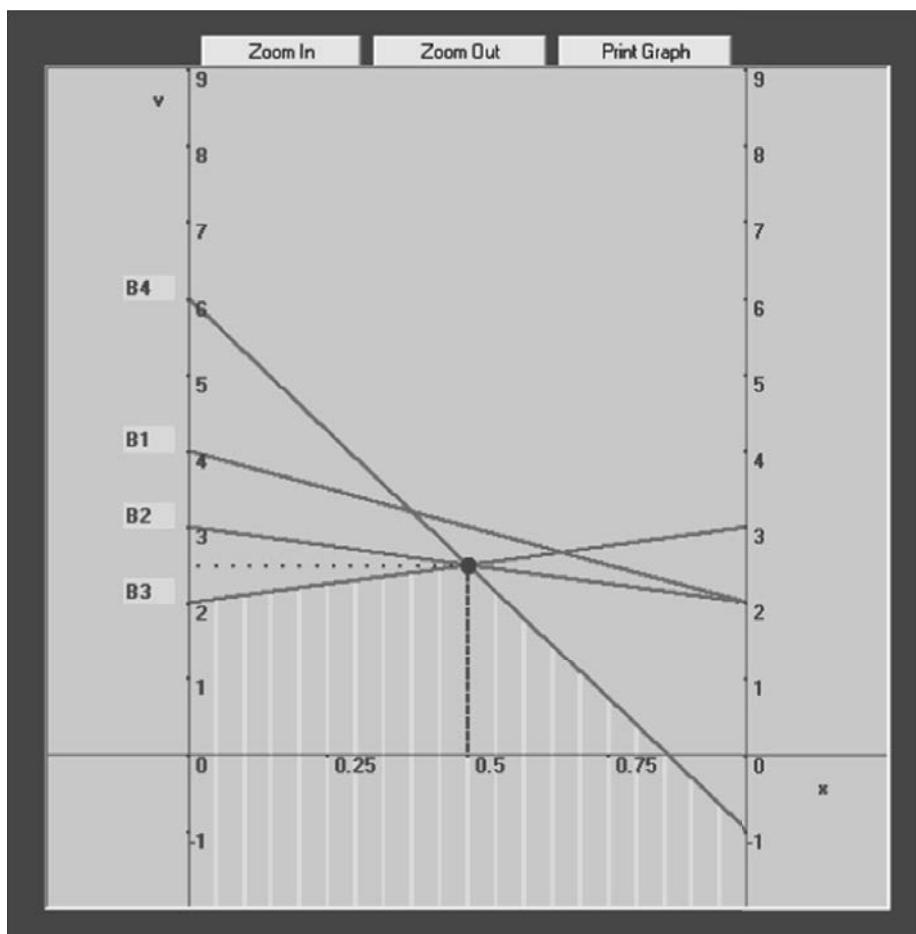
El juego no tiene ninguna solución de estrategia pura porque los valores maximin y minimax no son iguales (¡verifíquelo!). Los pagos esperados de A correspondientes a las estrategias puras de B se dan como

Estrategia pura de B	Pago esperado de A
1	$-2x_1 + 4$
2	$-x_1 + 3$
3	$x_1 + 2$
4	$-7x_1 + 6$

En la figura 15.7 se muestra una gráfica creada por TORA de las cuatro líneas rectas asociadas con las estrategias puras de B (archivo *toraExl5.4-3.txt*).³ Para determinar *la mejor de las peores soluciones*, la envolvente inferior de las cuatro líneas (delineada por franjas verticales) representa el pago mínimo (peor) esperado para A , independientemente de las elecciones de B . El máximo (mejor) de la envolvente inferior corresponde al punto de solución maximin $x_1^* = .5$, que es la intersección de las líneas asociadas con las estrategias B_3 y B_4 .

FIGURA 15.7

Solución gráfica en TORA del juego de suma cero entre dos personas del ejemplo 15.4-3 (archivo *toraExl5.4-3.txt*)



³ Del Main Menu, seleccione la opción Zero-sum Games e introduzca los datos del problema, en seguida elija la opción Graphical del menú SOLVE/MODIFY.

La solución óptima del jugador A pide una combinación 50-50 de A_1 y A_2 . El valor correspondiente del juego, v , se determina al sustituir $x_1 = .5$ en la función de la línea 3, o bien, de la línea 4, de donde resulta

$$v = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}, & \text{de la línea 3} \\ -7\left(\frac{1}{2}\right) + 6 = \frac{5}{2}, & \text{de la línea 4} \end{cases}$$

La combinación óptima del jugador B se determina mediante las dos estrategias que definen la envolvente inferior de la gráfica. Esto significa que B puede combinar las estrategias B_3 y B_4 —en cuyo caso $y_1 = y_2 = 0$ y $y_4 = 1 - y_3$. Como resultado, los pagos esperados de B correspondientes a las estrategias puras de A son

Estrategia pura de A	Estrategia pura de B
1	$4y_3 - 1$
2	$-4y_3 + 6$

La mejor de las peores soluciones para B es el punto mínimo de la envolvente *superior* de las dos líneas dadas (le será instructivo trazar las dos líneas e identificar la envolvente superior). Este proceso equivale a resolver la ecuación

$$4y_3 - 1 = -4y_3 + 6$$

La solución da $y_3 = \frac{7}{8}$, de donde puede obtenerse el valor del juego como $v = 4 \times \left(\frac{7}{8}\right) - 1 = \frac{5}{2}$.

La solución del juego pide que el jugador A combine A_1 y A_2 con probabilidades iguales, y que el jugador B combine B_3 y B_4 con probabilidades de $\frac{7}{8}$ y $\frac{1}{8}$ (en realidad, el juego tiene soluciones alternativas para B , porque el punto máximo en la figura 15.7 está determinado por más de dos líneas. Cualquier combinación no negativa de estas soluciones alternativas también es una solución legítima).

Comentarios. Los juegos donde el jugador A tiene m estrategias y el jugador B sólo tiene dos pueden tratarse del mismo modo. La diferencia principal es que se graficará el pago esperado de B correspondiente a las estrategias puras de A . Por consiguiente, se buscará el punto minimax en vez del punto maximin de la *envolvente superior* de las líneas trazadas. Sin embargo, para resolver el problema con TORA, es necesario expresar el pago en función del jugador que tiene dos estrategias, multiplicando la matriz de pagos por -1 .

Momento, ¡ajá! ¡El nombre del juego debería ser “cooperación”!

En un juego de suma cero con dos personas, la ganancia de un jugador es una pérdida igual para su oponente. Un **juego no cooperativo** diferente que implica $N (\geq 2)$ jugadores fue desarrollado en 1951 por el matemático estadounidense John Nash.⁴ El objetivo es maximizar el pago de cada jugador dado que se mantienen fijas las estrategias de los $N - 1$ jugadores restantes. La estrategia de cada jugador es óptima contra la de los demás. Un ejemplo del juego no cooperativo es el conocido **dilema del prisionero**, donde dos sospechosos se mantienen incomunicados en prisión en espera del juicio. La pena máxima para el delito es de 5 años. Cada preso tiene dos posibles estrategias de interrogatorio: permanecer en silencio o testificar contra el otro preso. Si ambos permanecen en silencio, cada uno de ellos recibe una condena de un año de prisión por falta de evidencia. Si ambos simultáneamente testifican el uno contra el otro, cada uno obtiene 3 años; pero si uno permanece en silencio y el otro testifica, el prisionero silencioso recibe la sentencia máxima y el otro obtiene su libertad. La siguiente matriz resume el juego donde el pago (recompensa) = 5 – sentencia en la cárcel:

⁴ Vea, Nash, J., “Non-Cooperative Games”, *The Annals of Mathematics*, vol. 54, núm. 2, pp. 286-295, 1951.

		Prisionero <i>B</i> (Los elementos subrayados dan el pago al prisionero <i>B</i>)	
		Mantenerse en silencio	Testificar
Prisionero <i>A</i>	Mantenerse en silencio	4,4	0,5
	Testificar	5,0	2,2

La estrategia óptima del juego requiere que *A* y *B* testifiquen uno contra otro (lo que resulta en una condena de prisión de tres años: dos años de recompensa para cada uno) porque ninguno de los jugadores está tentado a seleccionar otra estrategia sin llegar finalmente a un peor acuerdo (convénzase usted mismo que este es el caso verificando distintos cambios de estrategia). La estrategia pura de “testificar” se llama **equilibrio de Nash** y es, en cierto modo, el equivalente del punto de silla en el juego de suma cero de dos personas. Si el juego no tiene una estrategia *pura* óptima, el equilibrio de Nash es reemplazado por una estrategia mixta ponderada por probabilidad. Curiosamente, si se permite la cooperación entre ambos jugadores, ambos se beneficiarán eligiendo permanecer en silencio (con sentencia de 1 año de cárcel).

La carrera armamentista entre las superpotencias puede modelarse como un juego del dilema del prisionero, con los beneficios mutuos resultantes si todas las partes deciden cooperar [como ejemplifica el Tratado de No Proliferación Nuclear (TNP) de 1968 principalmente entre Estados Unidos y la ex Unión Soviética]. Otras posibles aplicaciones se producen, por ejemplo, entre fabricantes competidores.

Como nota final, John Nash (1928-2015) compartió el Premio Nobel de Economía en 1994 por su contribución en los juegos no cooperativos. Su trabajo en matemáticas y sus severos brotes de esquizofrenia que padeció después de los 30 años inspiraron la película estadounidense *A Beautiful Mind* en 2001.

Solución de juegos con programación lineal. La teoría de juegos está estrechamente relacionada con la programación lineal en el sentido de que cualquier juego de suma cero entre dos personas puede expresarse como un programa lineal, y viceversa. De hecho, G. Dantzig (1963, p. 24) asegura que cuando J. von Neumann, padre de la teoría de juegos, la introdujo por primera vez al método simplex en 1947, de inmediato reconoció esta relación y además precisó y destacó el concepto de *dualidad* en la programación lineal. En esta sección se explica cómo se resuelven los juegos mediante programación lineal.

Las probabilidades óptimas del jugador *A*, x_1, x_2, \dots , y x_m , pueden determinarse resolviendo el siguiente problema maximin:

$$\max_{x_i} \left\{ \min \left(\sum_{i=1}^m a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^m a_{i2}x_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in}x_i \right) \right\}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Sea

$$v = \min \left\{ \sum_{i=1}^m a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^m a_{i2}x_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in}x_i \right\}$$

La ecuación implica que

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \geq v, j = 1, 2, \dots, n$$

Por lo tanto, el problema del jugador A puede escribirse como

$$\text{Maximizar } z = v$$

sujeto a

$$\begin{aligned} v - \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i &\leq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m &= 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ v &\text{ irrestricta} \end{aligned}$$

Observe que el valor del juego, v , no está restringido en cuanto al signo.

Las estrategias óptimas del jugador B , y_1, y_2, \dots, y_n , se determinan resolviendo el problema

$$\begin{aligned} \min_{y_j} \left\{ \max \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}y_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}y_j \right) \right\} \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1 \\ y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Si se emplea un procedimiento semejante al del jugador A , el problema de B se reduce a

$$\text{Minimizar } w = v$$

sujeto a

$$\begin{aligned} v - \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j &\geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n &= 1 \\ y_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ v &\text{ irrestricta} \end{aligned}$$

Los dos problemas optimizan la misma variable v (irrestricta), el valor del juego. La razón es que el problema de B es el dual del problema de A (verifique esta afirmación mediante la definición de dualidad del capítulo 4). Lo anterior significa que la solución óptima de un problema da automáticamente la solución óptima del otro.

Ejemplo 15.4-4

Resuelva el siguiente juego mediante programación lineal. El valor del juego, v , queda entre -2 y 2 .

	B_1	B_2	B_3	Mín. de fila
A_1	3	-1	-3	-3
A_2	-2	4	-1	-2
A_3	-5	-6	2	-6

Máx. de columna 3 4 **2**

Programa lineal del jugador AMaximizar $z = v$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 v - 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 0 \\
 v + x_1 - 4x_2 + 6x_3 &\leq 0 \\
 v + 3x_1 + x_2 - 2x_2 &\leq 0 \\
 x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\
 v &\text{ irrestricta}
 \end{aligned}$$

La solución óptima⁵ es $x_1 = .39$, $x_2 = .31$, $x_3 = .29$ y $v = -0.91$.**Programa lineal del jugador B**Minimizar $z = v$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 v - 3y_1 + y_2 + 3y_3 &\geq 0 \\
 v + 2y_1 - 4y_2 + y_3 &\geq 0 \\
 v + 5y_1 + 6y_2 - 2y_3 &\geq 0 \\
 y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\
 v &\text{ irrestricta}
 \end{aligned}$$

La solución da $y_1 = .32$, $y_2 = .08$, $y_3 = .60$ y $v = -0.91$.**BIBLIOGRAFÍA**

- Chen, S. y C. Hwang, *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making*, Springer-Verlag, Berlín, 1992.
- Clemen, R. J. y T. Reilly, *Making Hard Decisions with Decision Tools*, Suite Update Edition, Duxbury, Pacific Grove, CA, 2004.
- Cohan, D., S. Haas, D. Radloff y R. Yancik, "Using Fire in Forest Management: Decision Making under Uncertainty", *Interfaces*, vol. 14, núm. 5, pp. 8-19, 1984.
- Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.
- Meyerson, R., *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1991.
- Rapport, A. "Sensitivity Analysis in Decision Making", *The Accounting Review*, vol. 42, núm. 3, pp. 441-456, 1967.
- Saaty, T. L., *Fundamentals of Decision Making*, RWS Publications, Pittsburgh, 1994.

⁵ La línea de comandos de TORA `Zero-sum Games` ⇒ `Solve` ⇒ `LP-based` se utiliza para resolver cualquier juego de suma cero entre dos personas.

Estudio de caso: Límites en las reservaciones de un hotel⁶

Herramienta: Análisis de árboles de decisiones

Área de aplicación: Hoteles

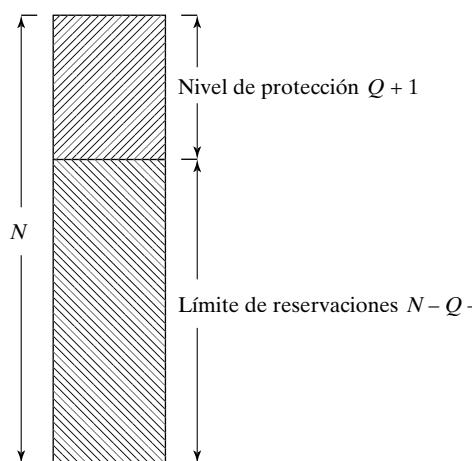
Descripción de la situación

El Hotel La Posada tiene un total de 300 habitaciones. Su clientela incluye tanto a viajeros de negocios como de diversión. Las habitaciones se pueden vender por adelantado (generalmente para viajeros de diversión) a un precio de descuento. Los viajeros de negocios, que invariablemente reservan sus habitaciones a último momento, pagan el precio completo. Por lo tanto, La Posada debe establecer un *límite de reservaciones* para el número de habitaciones de descuento que se venden a los viajeros de diversión, con la finalidad de aprovechar los clientes de negocios a precio completo.

Modelo matemático:

Sea N el número de habitaciones disponibles y suponga que el nivel de protección actual de habitaciones vendidas a precio completo es $Q + 1$, $0 \leq Q < N$. El límite de reservaciones asociado (habitaciones vendidas con descuento) es $N - Q - 1$. La situación se resume en la figura 15.8.

Para determinar si el nivel de protección debería bajarse de $Q + 1$ a Q , se utiliza el árbol de decisiones de la figura 15.9. Sea D la variable aleatoria que representa la demanda histórica o pronosticada de habitaciones a precio completo (de negocios). Además, sea c el precio completo y d el precio con descuento ($d < c$). Una decisión de bajar el nivel de protección de $Q + 1$ a Q significa que la habitación $Q + 1$ se venderá al precio de descuento d porque habrá una amplia oportunidad de hacerlo. De manera alternativa, no bajar el nivel de protección dará lugar a dos resultados probabilísticos: Si la demanda de habitaciones de negocios es mayor o igual a $Q + 1$, entonces la habitación $Q + 1$ se venderá a precio completo, c ; en caso contrario, la habitación no se venderá en absoluto. Las probabilidades asociadas son $P\{D \geq Q + 1\}$ y $P\{D \leq Q\}$, respectivamente. De esto se desprende que la decisión de reducir el nivel de protección a Q debería adoptarse si



⁶ Netessine, S. y R. Shumsky, "Introduction to the Theory and Practice of Yield Management", *INFORMS Transactions on Education*, vol. 3, núm. 1, pp. 20-28, 2002.

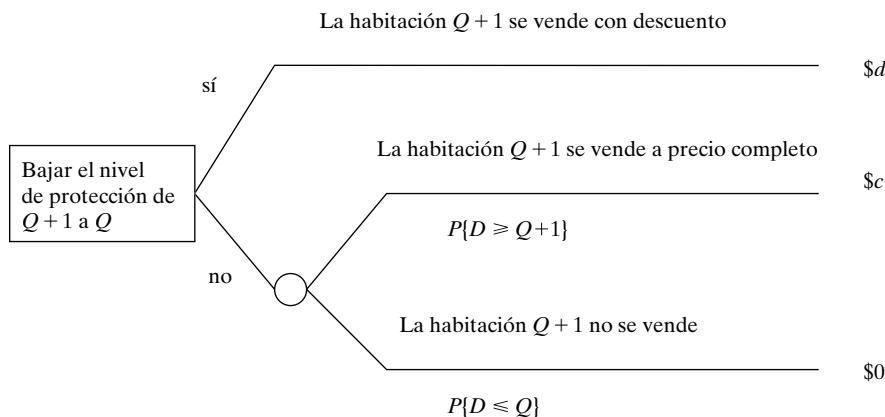


FIGURA 15.9
Árbol de decisiones para determinar el nivel de protección Q

$$d \geq cP\{D \geq Q + 1\} + 0P\{D \leq Q\}$$

o bien,

$$P\{D \leq Q\} \geq \frac{c - d}{c}$$

Dada la distribución de la demanda D , junto con los costos unitarios c y d , es posible determinar fácilmente el nivel de protección Q .

Recolección de datos:

La información más importante que se necesita para determinar el nivel de protección es la distribución de la demanda de habitaciones de precio completo. Para tal propósito, se pueden utilizar datos históricos durante un periodo de tiempo especificado. Así, el número de días que un bloque de habitaciones Q está reservado a tarifa completa estima la probabilidad de la demanda $P\{D = Q\}$, a partir de la cual se puede determinar la probabilidad acumulada. En la tabla 15.1 se presentan los datos para determinar la distribución de la demanda. Las dos primeras columnas incluyen los datos sin procesar.

El uso de la información de la tabla 15.1 puede ilustrarse por medio la siguiente situación. Suponga que la tarifa completa es de \$159 y la tarifa de descuento es de \$105. El límite de protección se determina de modo que

$$P\{D \leq Q\} \geq \frac{159 - 105}{159} = .33962$$

La columna de la probabilidad acumulada en la tabla 15.1 muestra que el nivel de protección es $Q = 79$ habitaciones.

Conclusión:

Las ideas presentadas en este estudio se pueden extender de manera similar al establecimiento de límites de reservaciones para pasajes aéreos. Además, en lugar de utilizar un límite de reservaciones, el análisis se puede modificar para permitir establecer varios niveles de límites de reservaciones, de modo que el precio de descuento aumente con la proximidad de la fecha de reservación. La información más importante para el modelo es una estimación confiable de los datos de la demanda.

TABLA 15.1 Cálculo de $P\{D = x\}$ y $P\{D \leq x\}$

Número de habitaciones, Q	Número de días en demanda	$P\{D = Q\}$	$P\{D \leq Q\}$
0-70	12	0.09756	0.097561
71	3	0.02439	0.12195
72	3	0.02439	0.14634
73	2	0.01626	0.16260
74	0	0.00000	0.16260
75	4	0.03252	0.19512
76	4	0.03252	0.22764
77	5	0.04065	0.26829
78	2	0.01626	0.28455
79	7	0.05691	0.34146
80	4	0.03252	0.37398
81	10	0.08130	0.45528
82	13	0.10569	0.56098
83	12	0.09756	0.65854
84	4	0.03252	0.69106
85	9	0.07317	0.76423
86	10	0.08130	0.84553
>86	19	0.15447	1.00000
Total	123	1.00000	

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados	Sección	Problemas asignados
15.1	15-1 a 15-8	15.3	15-38 a 15-40
15.2.1	15-9 a 15-27	15.4.1	15-41 a 15-45
15.2.2	15-28 a 15-37	15.4.2	15-46 a 15-53

*15-1. Suponga que se especifican los siguientes pesos para la situación de Martin y Jane (figura 15.2):

$$p = .5, q = .5$$

$$p_1 = .17, p_2 = .83$$

$$p_{11} = .129, p_{12} = .277, p_{13} = .594$$

$$p_{21} = .545, p_{22} = .273, p_{23} = .182$$

$$q_1 = .3, q_2 = .7$$

$$q_{11} = .2, q_{12} = .3, q_{13} = .5$$

$$q_{21} = .5, q_{22} = .2, q_{23} = .3$$

Con base en esta información, califique las tres universidades.

15-2. Considere los datos de las dos jerarquías del problema 15-1. Copie los pesos en un orden lógico en la sección del resumen de la solución de la hoja de cálculo *excelAHP.xls*, luego desarrolle la

fórmula para evaluar la primera alternativa, U de A, y cópiela para evaluar las dos alternativas restantes.⁷

- *15-3.** El departamento de personal en C&H ha reducido la búsqueda de una nueva contratación a tres candidatos: Steve (S), Jane (J) y Maisa (M). La selección final se basa en tres criterios: entrevista personal (*I*), experiencia (*E*) y referencias (*R*). El departamento utiliza la matriz **A** (dada a continuación) para establecer las preferencias entre los tres criterios. Después de entrevistar a los tres candidatos y de recopilar los datos respecto de sus experiencias y referencias, se construyen las matrices **A_I**, **A_E** y **A_R**. ¿Cuál de los tres candidatos debería contratarse? Evalúe la consistencia de los datos.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & I & E & R \\ I & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} & & \mathbf{A}_I = \begin{matrix} & S & J & M \\ S & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 5 & 1 \end{pmatrix} & & \end{matrix} \\ E & & & \\ R & & & \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_E = \begin{matrix} & S & J & M \\ S & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} & & \mathbf{A}_R = \begin{matrix} & S & J & M \\ S & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & & \end{matrix} \\ J & & & \\ M & & & \end{matrix}$$

- 15-4.** Kevin y June Park (*K* y *J*) están en el proceso de comprar una nueva casa. Hay tres casas disponibles: *A*, *B* y *C*. Los Park acordaron dos criterios para seleccionar la casa —cantidad de trabajo de jardinería (*Y*) y cercanía al lugar de trabajo (*W*)— y desarrollaron las siguientes matrices de comparación. Califique las tres casas en orden de prioridad y calcule la relación de consistencia para cada matriz.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & K & J \\ K & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} & \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_K = \begin{matrix} & Y & W \\ Y & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{A}_J = \begin{matrix} & Y & W \\ Y & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} & \end{matrix} \\ W & & \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_{KY} = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{A}_{KW} = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{A}_{JY} = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{A}_{JW} = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} & \end{matrix} \\ B & & \\ C & & \end{matrix}$$

- *15-5.** Un nuevo autor establece tres criterios para seleccionar un editor para un libro de texto de investigación de operaciones: porcentaje de regalías (*R*), marketing (*M*) y pago anticipado (*A*). Dos editores, *H* y *P*, expresaron su interés en el libro. Utilice las siguientes matrices de comparación para clasificar a los dos editores y evalúe la consistencia de la decisión.

⁷ La hoja de cálculo *excelAHP.xls* podría serle útil al verificar sus cálculos en los problemas 15-2 a 15-8.

$$\mathbf{A} = M \begin{pmatrix} R & M & A \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{5} \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_R = \begin{matrix} H & P \\ P & \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \mathbf{A}_M = \begin{matrix} H & P \\ P & 2 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_A = \begin{matrix} H & P \\ P & 1 \end{matrix}$$

- 15-6.** Un profesor de ciencias políticas desea predecir el resultado de la elección de la mesa directiva en su escuela. Se postularon tres candidatos para el puesto, Ivy (*I*), Bahrn (*B*) y Smith (*S*). Existen tres categorías de votantes: de izquierda (*L*), de centro (*C*) y de derecha (*R*). Se juzga a los candidatos con base en tres factores: experiencia académica (*E*), postura ante los problemas (*S*) y carácter personal (*P*). Las siguientes son las matrices de comparación para la primera jerarquía de izquierda, centro y derecha.

$$\mathbf{A} = C \begin{pmatrix} L & C & R \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_L = S \begin{pmatrix} E & S & P \\ 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_c = S \begin{pmatrix} E & S & P \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_R = P \begin{pmatrix} E & S & P \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 8 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

El profesor generó nueve matrices de comparación más para la segunda jerarquía que representa experiencia (*E*), postura ante los problemas (*S*) y carácter personal (*P*). Luego se utilizó el PJA para reducir las matrices a los siguientes pesos relativos.

Candidato	Izquierda			Centro			Derecha		
	<i>E</i>	<i>S</i>	<i>P</i>	<i>E</i>	<i>S</i>	<i>P</i>	<i>E</i>	<i>S</i>	<i>P</i>
Ivy	.1	.2	.3	.3	.5	.2	.7	.1	.3
Bahrn	.5	.4	.2	.4	.2	.4	.1	.4	.2
Smith	.4	.4	.5	.3	.3	.4	.2	.5	.5

Determine el candidato ganador y evalúe la consistencia de la decisión.

- 15-7.** Un distrito escolar tiene la necesidad urgente de reducir el gasto para cumplir con las nuevas restricciones de presupuesto en sus escuelas primarias. Tiene dos opciones: eliminar el programa de educación física (*E*), o el de música (*M*). El superintendente formó un comité con igual representación de votos de la mesa directiva (*S*) y la asociación de padres y profesores (*P*) para estudiar la situación y hacer una recomendación. El comité ha decidido estudiar el problema desde el punto de vista de la restricción al presupuesto (*B*) y de las necesidades de los estudiantes (*N*). El análisis produjo las siguientes matrices de comparación:

$$\mathbf{A}_s = \begin{matrix} B & N \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \mathbf{A}_P = \begin{matrix} B & N \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_{SB} = \begin{matrix} E & M \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \mathbf{A}_{SN} = \begin{matrix} E & M \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_{PB} = \begin{matrix} E & M \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \mathbf{A}_{PN} = \begin{matrix} E & M \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Analice el problema de decisión y haga una recomendación.

- 15-8.** Una persona está en el proceso de comprar un automóvil y redujo sus opciones a tres modelos: *M1*, *M2* y *M3*. Los factores de decisión incluyen el precio de compra (PP), el costo de mantenimiento (MC), el costo de manejo en la ciudad (CD) y el costo de manejo rural (RD). La siguiente tabla muestra los datos correspondientes para 3 años de operación:

Modelo de automóvil	PP (\$)	MC (\$)	CD (\$)	RD (\$)
<i>M1</i>	6000	1800	4500	1500
<i>M2</i>	8000	1200	2250	750
<i>M3</i>	10,000	600	1125	600

Utilice los datos de costos para desarrollar las matrices de comparación. Evalúe la consistencia de las matrices y determine la selección del modelo.

- 15-9.** Usted ha sido invitado a participar en el juego de la rueda de la fortuna en televisión. La rueda funciona electrónicamente con dos botones para producir un giro fuerte (*H*) o un giro suave (*S*). La rueda está dividida en dos regiones semicirculares, una blanca (*W*) y una roja (*R*). Le dijeron que la rueda está diseñada para que se detenga 30% de las veces en la región blanca. El pago del juego es

	<i>W</i>	<i>R</i>
<i>H</i>	\$800 \$200	
<i>S</i>	-\$2500 \$1000	

Desarrolle un árbol de decisiones asociado, y determine un curso de acción con base en el criterio del valor esperado.

- *15-10.** Farmer McCoy puede sembrar maíz o soya. Las probabilidades de que los precios de la siguiente cosecha suban, no cambien o bajen son .25, .30 y .45, respectivamente. Si los precios suben, la cosecha de maíz redituará un ingreso neto de \$30,000 y la de soya redituará un ingreso neto de \$10,000. Si los precios no cambian, McCoy saldrá (apenas) a mano. Pero si los precios bajan, las cosechas de maíz y soya sufrirán pérdidas de \$35,000 y \$5000, respectivamente.

- (a) Represente el problema de McCoy como un árbol de decisiones.
 (b) ¿Cuál cosecha debería sembrar McCoy?

- 15-11.** Usted tiene la oportunidad de invertir en tres fondos mutuos: de servicios, de crecimiento agresivo y global. El valor de su inversión cambiará según las condiciones del mercado. Hay 10% de

probabilidad de que el mercado baje, 50% de que permanezca moderado y 40% de que funcione bien. La siguiente tabla proporciona el cambio porcentual del valor de la inversión en las tres condiciones:

Alternativa	Porcentaje de rendimiento sobre la inversión		
	Mercado bajista (%)	Mercado moderado (%)	Mercado alcista(%)
Servicios	+5	+7	+8
Crecimiento agresivo	-10	+5	+30
Global	+2	+7	+20

- (a) Represente el problema como un árbol de decisiones.
 (b) ¿Cuál fondo mutuo debería seleccionar?
- 15-12.** Usted tiene la oportunidad de invertir su dinero en un bono que rinde 7.5% y que se vende a su precio nominal, o en una acción de crecimiento agresivo que paga sólo 1% de dividendos. Si se presenta inflación, la tasa de interés subirá a 8%, en cuyo caso el valor principal del bono bajará 10% y el valor de la acción bajará 20%. Si la recesión se materializa, la tasa de interés bajará a 6%. En este caso, se espera que el valor principal del bono aumente 5%, y que el valor de la acción suba 20%. Si la economía no cambia, el valor de la acción subirá 8% y el valor principal del bono no cambiará. Los economistas estiman 20% de probabilidad de inflación y 15% de recesión. Usted basará su decisión de inversión en las condiciones económicas del siguiente año.
- (a) Represente el problema como un árbol de decisiones.
 (b) ¿Invertiría en acciones o en bonos?
- 15-13.** AFC está a punto de lanzar su nueva comida rápida Wings 'N Things a nivel nacional. El departamento de investigación está convencido de que Wings 'N Things será un gran éxito y desea presentarlo de inmediato sin publicidad en todas las tiendas de distribución de AFC. El departamento de marketing ve las "cosas" de forma diferente y desea lanzar una intensa campaña publicitaria. La campaña publicitaria costará \$100,000, y hay 70% de probabilidades de que tenga éxito con ingresos de \$950,000. Si la campaña no tiene éxito, el ingreso estimado bajará a \$200,000. Si no se utiliza publicidad, el ingreso se estima en \$400,000 con una probabilidad de .8 si los clientes son receptivos al nuevo producto, y de \$200,000 con probabilidades de .2 si no lo son.
- (a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado.
 (b) ¿Qué curso de acción debería seguir AFC al lanzar el nuevo producto?
- ***15-14.** Se lanza una moneda legal tres veces sucesivas. Usted recibe \$1.00 por cada cara (*H*) que salga y \$.25 más por cada dos caras sucesivas que aparezcan (recuerde que *HHH* incluye dos conjuntos de *HH*). Sin embargo, usted devuelve \$1.10 por cada cruz que salga. Tiene las opciones de jugar o no jugar.
- (a) Desarrolle el árbol de decisiones para el juego.
 (b) ¿Le favorecería la decisión de continuar con el juego?
- 15-15.** Usted tiene la oportunidad de participar en el siguiente juego en un casino. Se lanza dos veces un dado equilibrado, con cuatro resultados: (1) ambos lanzamientos muestran el mismo número par; (2) ambos lanzamientos dan el mismo número impar; (3) los dos lanzamientos muestran un número par seguido por uno impar o un número impar seguido por uno par, y (4) todos los demás resultados. Le permiten apostar

su dinero en exactamente dos resultados con cantidades en dólares iguales. Por ejemplo, puede apostar cantidades de dólares iguales a un lanzamiento par (resultado 1) y un lanzamiento impar (resultado 2). El premio por cada dólar que apueste es de \$2.00 por el primer resultado, \$1.95 por el segundo y tercer resultados, y \$1.50 por el cuarto resultado.

- (a) Dibuja el árbol de decisiones para el juego.
- (b) ¿Cuál de las dos opciones tomaría?
- (c) ¿Alguna vez resultará ganador en este juego?

15-16. Acme Manufacturing produce lotes de aparatos con 0.8%, 1%, 1.2% y 1.4% de aparatos defectuosos de acuerdo con las probabilidades respectivas, 0.4, 0.3, 0.25 y 0.05. Tres clientes, *A*, *B* y *C* están contratados para recibir lotes con no más de 0.8%, 1.2% y 1.4% de aparatos defectuosos, respectivamente. Si los aparatos defectuosos resultan ser más que los contratados, se penaliza a Acme con \$100 por cada 0.1% de incremento. Si Acme surte lotes con mayor calidad que la requerida le cuesta \$50 por cada 0.1% por debajo de las especificaciones. Suponga que no se inspeccionan los lotes antes de su envío.

- (a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado.
- (b) ¿Cuál de los tres clientes debería tener la mayor prioridad para recibir su pedido?

15-17. TriStar planea abrir una nueva planta en Arkansas. La compañía puede abrir una planta de tamaño grande ahora o una planta pequeña que puede ampliarse 2 años más tarde, si se garantiza una demanda alta. El horizonte de tiempo para el problema de decisión es de 10 años. TriStar estima que las probabilidades de demandas alta y baja durante los siguientes 10 años son .75 y .25, respectivamente. El costo de construcción inmediato es de \$5 millones para la planta grande y de \$1 millón para la pequeña. El costo de expansión de una planta pequeña dentro de 2 años será de \$4.2 millones. El ingreso por la operación durante los siguientes 10 años se da en la tabla siguiente:

Alternativa	Estimaciones del ingreso anual (en miles de dólares)	
	Demandada alta	Demandada baja
Planta grande ahora	1000	300
Planta pequeña ahora	250	200
Planta ampliada en 2 años	900	200

- (a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado, si después de 2 años TriStar tiene la opción de ampliar o no la planta pequeña.
- (b) Desarrolle una estrategia de construcción para TriStar durante los siguientes 10 años (por sencillez, no tome en cuenta el valor del dinero en el tiempo).

15-18. Resuelva de nuevo el problema 15-17, suponiendo que las decisiones se toman considerando el valor del dinero en el tiempo a una tasa de interés anual de 10% [nota: Necesitará tablas de interés compuesto para resolver este problema. Puede utilizar la función del $VPN(i, R)$ en Excel para calcular el valor presente de los flujos de efectivo en el rango *R*, dada una tasa de interés *i*. El VPN supone que cada flujo de efectivo ocurre al final del año].

15-19. Resuelva de nuevo el problema 15-17, suponiendo que la demanda puede ser alta, mediana y baja con probabilidades de 0.7, 0.2 y 0.1, respectivamente. La ampliación de una planta pequeña ocurrirá sólo si la demanda en los primeros 2 años es alta. La siguiente tabla proporciona estimaciones del ingreso anual. No tome en cuenta el valor del dinero en el tiempo.

Alternativa	Estimaciones del ingreso anual (en miles de \$1)		
	Demanda alta	Demanda mediana	Demanda baja
Planta grande ahora	1000	500	300
Planta pequeña ahora	400	280	150
Planta ampliada dentro de 2 años	900	600	200

- *15-20.** Sunray Electric Coop utiliza una flotilla de 20 camiones para dar servicio a su red eléctrica. La compañía desea desarrollar un programa de mantenimiento preventivo para la flotilla. La probabilidad de una avería en el año 1 es cero. Para el año 2, la probabilidad de una avería es de 0.03 y se incrementa 0.01 en los años 3 a 10. Después del año 10, la probabilidad de una avería se mantiene constante en 0.13. El costo de mantenimiento por camión es de \$200 por una avería aleatoria y de \$75 por un mantenimiento programado.

- (a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado.
 (b) Determine el periodo óptimo (en meses) entre mantenimientos preventivos sucesivos.

- 15-21.** La demanda diaria de hogazas de pan en una tienda de abarrotes se especifica mediante la siguiente distribución de probabilidades:

<i>n</i>	100	150	200	250	300
<i>p_n</i>	.20	.25	.30	.15	.10

La tienda compra una hogaza a 55 centavos y la vende a \$1.20. Las hogazas que no se venden al final del día se liquidan a 25 centavos cada una. Suponga que el nivel de las existencias se limita a uno de los niveles de demanda especificado para *p_n*.

- (a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado.
 (b) ¿Cuántas hogazas deberían tenerse en existencia diariamente?

- 15-22.** En el problema 15-21, suponga que la tienda desea ampliar el problema de decisión a un horizonte de 2 días. Las alternativas para el segundo día dependen de la demanda en el primer día. Si la demanda en el día 1 es igual a la cantidad en existencia, la tienda continuará pidiendo la misma cantidad para el día 2; si excede la cantidad en existencia, la tienda puede pedir cualquiera de las existencias de alto nivel; y si es menor que la cantidad en existencia, la tienda puede pedir cualquiera de las existencias de bajo nivel. Desarrolle el árbol de decisiones y determine la estrategia de colocación de pedidos óptima.

- *15-23.** Una máquina automática produce α (miles de) unidades de un producto al día. A medida que α se incrementa, la proporción de unidades defectuosas, p , se eleva de acuerdo con la siguiente función de densidad de probabilidad

$$f(p) = \begin{cases} \alpha p^{\alpha-1}, & 0 \leq p \leq 1 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Cada unidad defectuosa incurre en una pérdida de \$50. Un artículo bueno produce una utilidad de \$.5.

- (a) Desarrolle un árbol de decisiones para este problema.
 (b) Determine el valor de α que maximiza la utilidad esperada.

- 15-24.** El diámetro externo, d , de un cilindro se procesa mediante una máquina automática con límites de tolerancia superior e inferior de $d + t_U$ y $d - t_L$. El proceso de producción sigue una distribución normal

con media μ y desviación estándar σ . Los cilindros de dimensiones excedidas se vuelven a trabajar a un costo de c_1 dólares cada uno. Los cilindros de dimensiones menores se desechan a un costo de c_2 dólares cada uno. Desarrolle el árbol de decisiones y determine el ajuste d óptimo para la máquina.

- 15-25.** Cohan y colaboradores (1984). La gestión de bosques moderna aplica incendios controlados para reducir los riesgos de incendio y estimular el crecimiento de árboles nuevos. La gerencia tiene la opción de posponer o planear una quema. En una extensión de bosque específica, si se pospone una quema, se incurre en un costo administrativo general de \$300. Si se planea una quema controlada, hay 50% de probabilidades de que el buen tiempo prevalezca y que la quema cueste \$3200. Los resultados de la quema pueden ser exitosos con probabilidad de .6, o marginales con probabilidad de .4. La ejecución exitosa producirá un beneficio estimado de \$6000, y la ejecución marginal proporcionará sólo \$3000 en beneficios. Si el clima es malo, la quema se cancelará y se incurrirá en un costo de \$1200 sin beneficios.
- (a) Desarrolle un árbol de decisiones para determinar si la quema debería planearse o posponerse.
 - (b) Estudie la sensibilidad de la solución a cambios en la probabilidad de buen clima.

- 15-26.** Rapport (1967). Un fabricante ha utilizado programación lineal para determinar la combinación de producción óptima de los varios modelos de televisiones que fabrica. Información reciente recibida por el fabricante indica que hay 40% de probabilidad de que el proveedor de un componente utilizado en uno de los modelos pueda elevar el precio en \$35. Por lo tanto, el fabricante puede seguir utilizando la combinación de productos (óptima) original (A1), o utilizar una nueva combinación (óptima) con base en el componente de mayor precio (A2). Desde luego, la acción A1 es ideal si el precio no se eleva, y la acción A2 también será ideal si el precio sube. En la siguiente tabla se proporciona la utilidad total resultante por mes en función de la acción tomada y el resultado aleatorio respecto del precio del componente.

	Incremento de precio (O1)	Sin incremento de precio (O2)
Combinación original (A1)	\$400,000	\$295,500
Combinación nueva (A2)	\$372,000	\$350,000

- (a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado y determine la acción que debería adoptarse.
- (b) El fabricante puede invertir \$1000 para obtener más información sobre si el precio se incrementará o no. Esta información indica que hay 58% de probabilidades de que el incremento del precio sea de .9 y 42% de que sea de .3. ¿Recomendaría la inversión adicional?

- *15-27.** Criterio del nivel de aspiración. Acme Manufacturing utiliza un producto químico en uno de sus procesos. La vida en anaquel es de 1 mes, y se destruye cualquier cantidad sobrante. La cantidad, x , en galones del producto químico utilizada por Acme se representa mediante la siguiente distribución:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{200}{x^2}, & 100 \leq x \leq 200 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

El consumo real del producto químico ocurre instantáneamente al inicio del mes. Acme desea determinar el nivel del producto químico que satisfaga dos criterios conflictivos (o niveles de aspiración): La cantidad excedente promedio mensual no debe superar los 20 galones, y la cantidad faltante promedio mensual no debe exceder de 40 galones.

15-28. Los datos en una universidad comunitaria muestran que el 75% de los estudiantes que cursaron cálculo en la preparatoria se desempeñan bien, en comparación con 50% de quienes no lo cursaron. Las admisiones para el año académico actual muestran que sólo 30% de los nuevos estudiantes completaron un curso de cálculo. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante nuevo se desempeñe bien en la universidad?

***15-29.** Elektra recibe 75% de sus componentes electrónicos del proveedor *A* y el 25% restante del proveedor *B*. El porcentaje de componentes defectuosos provenientes de los proveedores *A* y *B* son de 1% y 2%, respectivamente. Cuando se inspeccionó una muestra aleatoria de tamaño 5 de un lote recibido, sólo se encontró una unidad defectuosa. Determine la probabilidad de que el lote se haya recibido del proveedor *A*. Y del proveedor *B* (*sugerencia:* La distribución de probabilidad de artículos defectuosos en una muestra es binomial).

15-30. En el ejemplo 15.2-2, suponga que también tiene la opción de invertir los \$10,000 originales en un certificado de depósito seguro que produce 8% de interés. El consejo del amigo es invertir sólo en el mercado de valores.

- (a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado.
- (b) ¿Cuál es la decisión óptima en este caso? (*Sugerencia:* Utilice $P\{v_1\}$ y $P\{v_2\}$ dadas en el paso 3 del ejemplo 15.2-2 para determinar el valor esperado de invertir en el mercado de valores).

***15-31.** Usted es el autor de lo que promete ser una novela exitosa. Tiene la opción de publicar la novela usted mismo, o por medio de un editor. El editor le ofrece \$20,000 por firmar el contrato. Si la novela tiene éxito venderá 200,000 copias. De lo contrario, venderá sólo 10,000. El editor le paga \$1 de regalías por copia. Una investigación de mercado indica que hay 70% de probabilidades de que la novela tenga éxito. Si decide publicarla usted mismo, incurrirá en un costo inicial de \$90,000 por la impresión y comercialización, pero obtendrá una utilidad neta de \$2 por cada copia vendida.

- (a) Con base en la información dada, ¿aceptaría la oferta del editor, o publicaría usted mismo la novela?
- (b) Suponga que contrata a un agente literario para que realice una encuesta en relación con el éxito potencial de la novela. Por experiencias anteriores, el agente le advierte que cuando una novela tiene éxito, la encuesta predecirá el resultado equivocado 20% de las veces. Cuando la novela no tiene éxito, la encuesta predecirá correctamente 85% de las veces. ¿Cómo afectaría esta información su decisión?

15-32. Considere la situación de decisión de Farmer McCoy en el problema 15-10. El granjero tiene la opción adicional de utilizar el terreno como área de pastizales, en cuyo caso está garantizado un pago de \$7500. El granjero también recabó información adicional segura de un corredor de bolsa respecto del grado de estabilidad de los precios futuros de materias primas. La valoración del corredor como “favorable” o “desfavorable” se describe por medio de las siguientes probabilidades condicionales:

	a_1	a_2
s_1	.85	.15
$P\{a_j s_l\} = s_2$.50	.50
s_3	.15	.85

Los símbolos a_1 y a_2 representan las valoraciones “favorable” y “desfavorable”, y s_1 , s_2 y s_3 representan los cambios “hacia arriba”, “iguales” y “hacia abajo” de los futuros precios.

- (a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado.
- (b) Especifique la decisión óptima para el problema.

- 15-33.** En el problema 15-13, suponga que la gerencia de AFC decidió investigar el mercado para su nuevo producto Wings 'N Things en lugares seleccionados. El resultado de la investigación es o “bueno” (a_1) o “malo” (a_2). La investigación arroja las siguientes probabilidades condicionales con y sin campaña publicitaria.

$$P\{a_j | v_i\} - \text{Con campaña} \quad P\{a_j | w_i\} - \text{Sin campaña}$$

	a_1	a_2		a_1	a_2
v_1	.95	.05	w_1	.8	.2
v_2	.3	.7	w_2	.4	.6

Los símbolos v_1 y v_2 representan “éxito” y “sin éxito”, y w_1 y w_2 representan “receptivo” y “no receptivo”.

- (a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado.
- (b) Determine el mejor curso de acción para AFC.

- 15-34.** Datos históricos en Acme Manufacturing estiman 5% de posibilidades de que un lote de artefactos sea inaceptable (malo). Un lote malo tiene 15% de artículos defectuosos y un lote bueno incluye sólo 4% de artículos defectuosos. Si $a = \theta_1$ y $a = \theta_2$ representan un lote bueno y un lote malo, respectivamente, las probabilidades a priori se dan como

$$P\{a = \theta_1\} = .95 \quad \text{y} \quad P\{a = \theta_2\} = .05$$

En lugar de enviar lotes con base en sólo probabilidades a priori, se utiliza una muestra de prueba de dos artículos y se obtienen tres posibles resultados: (1) ambos artículos son buenos (z_1), (2) un artículo es bueno (z_2), y (3) ambos artículos son defectuosos (z_3).

- (a) Determine las probabilidades a posteriori $P\{\theta_i | z_j\}, i = 1, 2; j = 1, 2, 3$.
- *(b) Suponga que el fabricante envía lotes a dos clientes A y B . Los contratos especifican que los artículos defectuosos para A y B no deberían exceder de 5 y 8%, respectivamente. Se incurre en una penalización de \$100 por cada punto porcentual por encima del límite máximo. Si entrega lotes de mejor calidad que la especificada por los costos del contrato, le cuesta al fabricante \$50 por cada punto porcentual. Desarrolle el árbol de decisiones asociado y determine la estrategia de prioridad para enviar los lotes.

- *15-35.** Usted es un estudiante en la Universidad de Arkansas y desea desesperadamente asistir al siguiente juego de básquetbol de los Razorbacks. El problema es que el boleto de admisión cuesta \$10 y usted sólo tiene \$5. Puede apostar sus \$5 en un juego de póquer, con una probabilidad de 50-50 de duplicar su dinero o perderlo todo.

- (a) Con base en el valor real del dinero, ¿intentaría participar en el juego de póquer?
- (b) Con base en su ardiente deseo de ver el juego, transforme el dinero real en una función de utilidad.
- (c) Con base en la función de utilidad que desarrolló en (b), ¿intentaría participar en el juego de póquer?

- *15-36.** La familia Golden se acaba de mudar a una ciudad donde hay sismos de manera frecuente. Deben decidir si construyen su casa de acuerdo con el código sísmico de alto estándar. El costo de construcción aplicando el código sísmico es de \$850,000; por otro lado, puede construirse una casa comparable por sólo \$350,000. Si ocurre un sismo (y la probabilidad de que ocurra uno es de .001), costará \$900,000 reparar una casa construida por debajo de las normas. Desarrolle la lotería asociada con esta situación, suponiendo una escala de utilidad de 0 a 100.

15-37. Una inversión de \$10,000 en una empresa de alto riesgo tiene una probabilidad 50-50 de incrementarse a \$14,000 o de reducirse a \$8000 durante el siguiente año. Por lo tanto, el rendimiento neto puede ser o de \$4000 o de -\$2,000.

- (a) Suponiendo un inversionista neutro hacia el riesgo y una escala de utilidad de 0 a 100, determine la utilidad de rendimiento *neto* de \$0 sobre la inversión y la probabilidad de indiferencia asociada.
- (b) Suponga que dos inversionistas *A* y *B* han seguido las siguientes probabilidades de indiferencia:

Rendimiento neto (\$)	Probabilidad de indiferencia	
	<i>Inversionista A</i>	<i>Inversionista B</i>
-2000	1.00	1.00
-1000	0.30	0.90
0	0.20	0.80
1000	0.15	0.70
2000	0.10	0.50
3000	0.05	0.40
4000	0.00	0.00

Grafe las funciones de utilidad para los inversionistas *A* y *B*, y clasifique a cada inversionista ya sea como persona adversa al riesgo o como proclive al riesgo.

- (c) Suponga que el inversionista *A* tiene la oportunidad de invertir en una de dos empresas. La empresa I puede producir un rendimiento neto de \$2000 con probabilidad de 0.4 o una pérdida neta de \$1000 con probabilidad de 0.6. La empresa II puede producir un rendimiento neto de \$3000 con probabilidad de 0.6 y cero rendimiento con probabilidad de 0.4. Con base en la función de utilidad en (b), use el criterio de utilidad esperada para determinar la empresa que el inversionista *A* debería elegir. ¿Cuál es el valor monetario esperado asociado con la empresa seleccionada? (*Sugerencia:* Utilice una interpolación lineal de la función de utilidad).
 - (d) Repita el inciso (c) para el inversionista *B*.
- *15-38.** Hank es un estudiante inteligente y suele obtener buenas calificaciones, siempre que pueda repasar el material del curso la noche anterior al examen. Para el examen de mañana, Hank enfrenta un pequeño problema. Sus hermanos de fraternidad van a tener una fiesta que durará toda la noche, y a la cual le gustaría asistir. Hank tiene tres opciones:

a_1 = Irse de fiesta toda la noche

a_2 = Dividir la noche en partes iguales entre estudiar y estar en la fiesta

a_3 = Estudiar toda la noche

El examen de mañana puede ser fácil (s_1), moderado (s_2) o difícil (s_3), dependiendo del impredecible humor del profesor. Hank anticipa las siguientes calificaciones:

	s_1	s_2	s_3
a_1	85	60	40
a_2	92	85	81
a_3	100	88	82

- (a) Recomiende un curso de acción para Hank (con base en cada uno de los cuatro criterios de decisión bajo incertidumbre).

- (b)** Suponga que a Hank le interesa más la calificación que obtendrá. Las calificaciones aprobatorias que van de la *A* a la *D*, son 90, 80, 70 y 60, respectivamente. ¿Exigiría esta actitud hacia las calificaciones un cambio en el curso de acción de Hank?

- 15-39.** Para la temporada de siembra venidera, Farmer McCoy puede sembrar maíz (a_1), trigo (a_2) o soya (a_3), o bien, utilizar el terreno para pastoreo (a_4). Los pagos asociados con las diferentes acciones dependen de la cantidad de lluvia: lluvia fuerte (s_1), lluvia moderada (s_2), lluvia ligera (s_3) o sequía (s_4). La matriz de pagos (en miles de dólares) se estima como

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	-20	60	30	-5
a_2	40	50	35	0
a_3	-50	100	45	-10
a_4	12	15	15	10

Desarrolle un curso de acción para Farmer McCoy con base en cada una de las cuatro decisiones bajo criterios de incertidumbre.

- 15-40.** Se debe seleccionar una de N máquinas para fabricar Q unidades de un producto específico. Las demandas mínima y máxima del producto son Q^* y Q^{**} , respectivamente. El costo de producción total de Q artículos con la máquina i implica un costo fijo K_i y un costo variable por unidad c_i , y está dado como

$$TCi = Ki + ciQ$$

- (a)** Idee una solución para el problema conforme a cada uno de los cuatro criterios de decisión bajo incertidumbre.
(b) Para $1000 \leq Q \leq 4000$, resuelva el problema considerando el siguiente conjunto de datos:

Máquina i	K_i (\$)	C_i (\$)
1	100	5
2	40	12
3	150	3
4	90	8

- 15-41.** En los juegos (a) y (b) dados a continuación, el pago es para el jugador *A*. Cada juego tiene una solución de estrategia pura. En cada caso, determine las estrategias que definen el punto de silla y el valor del juego:

* (a)	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	6	2	8
A_2	8	9	4	5
A_3	7	5	3	5

(b)	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	-4	-5	6
A_2	-3	-4	-9	-2
A_3	6	7	-8	-9
A_4	7	3	-9	5

15-42. En los juegos (a) y (b) dados a continuación, el pago es para el jugador A . Determine los valores de p y q que harán de (A_2, B_2) un punto de silla:

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	q	6
A_2	p	5	10
A_3	6	2	3

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	4	5
A_2	10	7	q
A_3	4	p	6

15-43. En los juegos dados a continuación, el pago es para el jugador A . Especifique el intervalo del valor del juego en cada caso.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	9	6	0
A_2	2	3	8	4
A_3	-5	-2	10	-3
A_4	7	4	-2	-5

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-1	9	6	8
A_2	-2	10	4	6
A_3	5	3	0	7
A_4	7	-2	8	4

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	6	1
A_2	5	2	3
A_3	4	2	-5

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	7	1	3
A_2	4	8	0	-6
A_3	6	-9	-2	4

15-44. Dos compañías promueven dos productos competitores. En la actualidad, cada producto controla 50% del mercado. Debido a mejoras recientes en los dos productos, cada compañía planea lanzar una campaña publicitaria. Si ninguna de las dos compañías se anuncia, se conservará la división del mercado. Si alguna de las compañías lanza una campaña más agresiva, la otra compañía con toda certeza perderá un porcentaje proporcional de sus clientes. Un sondeo del mercado muestra que se puede llegar a 50% de los clientes potenciales mediante la televisión, a 30% a través de periódicos y a 20% con la radio.

- (a) Formule el problema como un juego de suma cero entre dos personas, y determine el medio publicitario para cada compañía.
- (b) Determine un intervalo para el valor del juego. ¿Puede operar cada compañía con una sola estrategia pura?

15-45. Sea a_{ij} el (i, j) -ésimo elemento de una matriz de pagos con m estrategias para el jugador A y n estrategias para el jugador B , el pago es para el jugador A . Demuestre que

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_i \max_j a_{ij}$$

***15-46.** Resuelva gráficamente el juego de lanzar la moneda del ejemplo 15.4-2.⁸

⁸ El módulo de juegos de suma cero en TORA se puede utilizar para verificar la respuesta de los problemas 15-46 a 15-49.

***15-47.** Robin viaja entre dos ciudades y puede utilizar una de dos rutas. La ruta A es una carretera rápida de cuatro carriles y la ruta B es una carretera larga y sinuosa. Ella conduce “superrápido” y la patrulla de caminos cuenta con una fuerza policial limitada. Si se asignara toda la fuerza a la ruta por la que maneja Robin, con toda certeza recibiría una multa de \$100 por exceso de velocidad. Si la fuerza se reparte 50-50 entre las dos rutas, hay 50% de probabilidades de que reciba una multa de \$100 en la ruta A , y sólo 30% de que reciba la misma multa en la ruta B . Desarrolle una estrategia tanto para Robin como para la patrulla de caminos.

15-48. Resuelva gráficamente los siguientes juegos. El pago es para el jugador A .

(a)	B_1	B_2	B_3
A_1	1	-3	7
A_2	2	4	-6

(b)	B_1	B_2
A_1	5	8
A_2	6	5
A_3	5	7

15-49. Considere el siguiente juego de suma cero entre dos personas:

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	50	50
A_2	1	1	.1
A_3	10	1	10

- (a) Verifique que las estrategias $(\frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6})$ para A y $(\frac{49}{54}, \frac{5}{54}, 0)$ para B sean óptimas, y determine el valor del juego.
(b) Demuestre que el valor óptimo del juego es igual a

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i y_j$$

15-50. En un paseo campesbre, 2 equipos de dos personas juegan a las escondidas. Hay cuatro escondites (A, B, C y D) y los dos miembros del equipo que se esconden pueden hacerlo por separado en dos de los cuatro escondites. El otro equipo puede entonces buscar en los otros dos escondites restantes. El equipo que busca obtiene un punto si encuentra a los dos miembros del equipo que se esconde; si no encuentra a los dos pierde un punto. En caso contrario, el resultado es un empate.

- (a) Desarrolle el problema como un juego de suma cero entre dos personas.
(b) Determine la estrategia óptima y el valor del juego.

15-51. Las universidades UA y DU están ideando sus estrategias para el juego de básquetbol colegial varonil del campeonato nacional de 1994. Valorando las fuerzas de sus respectivas “bancas”, cada entrenador idea cuatro estrategias para rotar a los jugadores durante el encuentro. La habilidad de cada equipo anotar de 2 puntos, 3 puntos y tiros libres es la clave para determinar el marcador final del juego. En la siguiente tabla se resumen los puntos netos que la UA anotará por posesión como una función de las diferentes estrategias disponibles para cada equipo:

	DU_1	DU_2	DU_3	DU_4
UA_1	3	-2	1	2
UA_2	2	3	-3	0
UA_3	-1	2	-2	2
UA_4	-1	-2	4	1

- (a) Resuelva el juego mediante programación lineal y determine una estrategia para el juego de campeonato.
- (b) Con base en la información dada, ¿cuál de los dos equipos se perfila para ganar el campeonato?
- (c) Suponga que todo el juego constará de 60 posesiones (30 para cada equipo). Pronostique el número de puntos esperado con el cual se ganará el campeonato.
- 15-52.** El ejército del coronel Blotto está peleando por el control de dos posiciones estratégicas. Blotto dispone de dos regimientos y el enemigo de tres. Una posición caerá ante el ejército con más regimientos. De lo contrario, el resultado de la batalla es un empate.
- *(a) Formule el problema como un juego de suma cero entre dos personas y resuélvalo mediante programación lineal.
- (b) ¿Cuál ejército ganará la batalla?
- 15-53.** En el juego morra de dos dedos entre dos jugadores, cada jugador muestra uno o dos dedos, y al mismo tiempo adivina cuántos dedos mostrará el oponente. El jugador que adivina correctamente gana una cantidad igual al número total de dedos mostrados. De lo contrario, el juego es un empate. Desarrolle el problema como un juego de suma cero entre dos personas, y resuélvalo mediante programación lineal.

CAPÍTULO 16

Modelos de inventario probabilísticos

Aplicación de la vida real: Decisiones de inventario en la cadena de suministro de Dell

Dell, Inc., implementa un modelo de negocio de ventas directas en el que las computadoras personales se venden directamente a los clientes en Estados Unidos. Cuando llega un pedido de un cliente, las especificaciones se envían a una planta de manufactura en Austin, Texas, donde la computadora se ensambla, prueba y empaca en aproximadamente 8 horas. Dell conserva poco inventario. A sus proveedores, que por lo general se ubican en el sureste asiático, se les pide que manejen lo que se conoce como inventario “revolvente” disponible en *revolvedores* (almacenes) cerca de las plantas de manufactura. Los revolvedores son propiedad de Dell y los rentan a los proveedores. Dell entonces “saca” las partes que necesita de los revolvedores, y la responsabilidad de los proveedores es reposicionar el inventario para satisfacer la demanda de Dell. Aunque Dell no posee el inventario guardado en los revolvedores, su costo se transfiere de manera indirecta a los clientes mediante la fijación de precios de los componentes. Por lo tanto, cualquier reducción del inventario beneficia directamente a los clientes de Dell con la reducción de los precios de los productos. La solución propuesta ha dado como resultado un estimado de \$2.7 millones en ahorros anuales. (Los detalles se explican en el caso 14 del capítulo 26, disponible en inglés en el sitio web de este libro).

16.1 MODELOS DE REVISIÓN CONTINUA

En esta sección se presentan dos modelos: (1) una versión “probabilizada” del modelo EOQ determinístico (sección 13.3.1) que utiliza existencias de reserva para satisfacer una demanda probabilística, y (2) un modelo EOQ probabilístico más exacto que incluye la demanda aleatoria directamente en la formulación.

16.1.1 Modelo EOQ “probabilizado”

Algunos profesionales han buscado adaptar el modelo EOQ determinístico (sección 13.3.1) para aproximarse a la naturaleza probabilística de la demanda. El periodo crítico durante el ciclo de

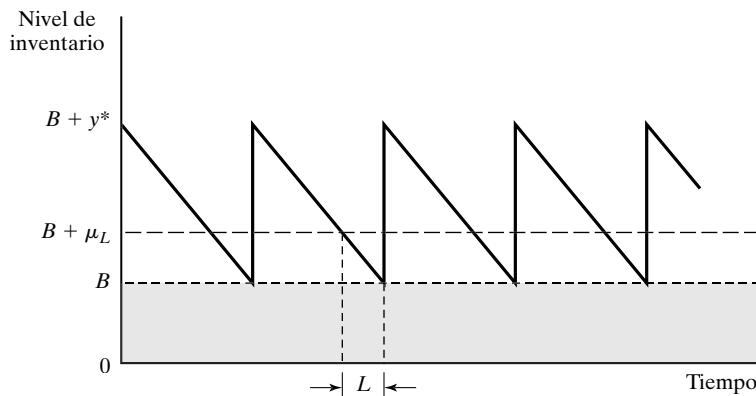


FIGURA 16.1

Existencias de reserva, B , impuestas sobre el modelo EOQ clásico

inventario ocurre entre la colocación y la recepción de los pedidos. Éste es el lapso de tiempo en que se podrían presentar los faltantes (agotamiento de las existencias). La idea entonces es mantener existencias de seguridad constantes que limiten la probabilidad de desabasto. Por intuición, una probabilidad de pocos desabasto implica mayores existencias de reserva, y viceversa.

La figura 16.1 ilustra la relación entre las existencias de reserva, B , y los parámetros del modelo EOQ determinístico que incluyen el tiempo de espera, L ; la demanda promedio durante el tiempo de espera, μ_L ; y la cantidad económica de pedido (EOQ), y^* . Observe que L es el tiempo de espera efectivo como se definió en la sección 13.3.1.

El supuesto principal del modelo es que la demanda por unidad de tiempo es normal con media D y desviación estándar σ —es decir, $N(D, \sigma)$. Con este supuesto, la demanda durante el tiempo de espera L también debe ser normal con media $\mu_L = DL$ y desviación estándar $\sigma_L = \sqrt{L\sigma^2}$. La fórmula para σ_L supone que L es (aproximadamente si es necesario) un valor entero.

El tamaño de las existencias de reserva B se determina de modo que la probabilidad de desabasto durante L sea cuando mucho α . Sea x_L la demanda durante el tiempo de espera L ; entonces

$$P\{x_L \geq B + \mu_L\} \leq \alpha$$

Si se usa $N(0, 1)$, $z = \frac{x_L - \mu_L}{\sigma_L}$ (como se definió en la sección 14.4.4), resulta

$$P\left\{z \geq \frac{B}{\sigma_L}\right\} \leq \alpha$$

En la figura 16.2 se define el parámetro K_α para la distribución normal estándar, de modo que $P\{z \geq k_\alpha\} \leq \alpha$. Se deduce que

$$B \geq \alpha_L K_\alpha$$

La cantidad $\sigma_L K_\alpha$ proporciona el valor mínimo de B (el valor de K_α puede determinarse a partir de la tabla normal estándar del apéndice A, o mediante el archivo *excelStatTables.xls*).

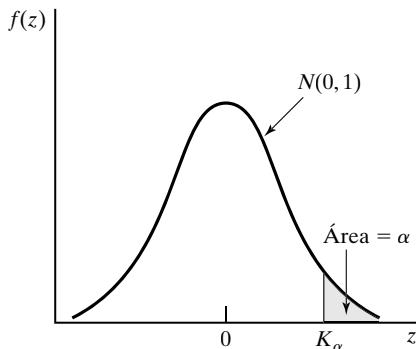


FIGURA 16.2

Probabilidad de quedarse sin existencias, $P\{z \geq K_\alpha\} = \alpha$

Ejemplo 16.1-1

En el ejemplo 13.3-1, donde se determina la política de inventario de las luces de neón, la EOQ es de 1000 unidades. Suponga que la demanda *diaria* es $N(100, 10)$, es decir, $D = 100$ unidades y que la desviación estándar es $\sigma = 10$ unidades. Determine el tamaño de la reserva, B , utilizando $\alpha = .05$.

De acuerdo con el ejemplo 13.3-1, el tiempo de espera *efectivo* es $L = 2$ días. Por lo tanto,

$$\mu_L = DL = 100 \times 2 = 200 \text{ unidades}$$

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L} = \sqrt{10^2 \times 2} = 14.14 \text{ unidades}$$

Si $K_{.05} = 1.645$, el tamaño de la reserva se calcula como

$$B \geq 14.14 \times 1.645 \approx 23 \text{ luces de neón}$$

La política de inventario óptima (con reserva) requiere pedir 1000 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 223 ($= B + \mu_L = 23 + 2 \times 100$) unidades.

16.1.2 Modelo EOQ probabilístico

La base para el desarrollo del modelo EOQ “probabilizado” en la sección 16.1.1 es “plausible”, pero no hay razón alguna para creer que el modelo produce una política de inventario óptima. El hecho de que la información pertinente en relación con la naturaleza probabilística de la demanda se ignore en un principio, sólo para ser “revivida” de una manera totalmente independiente en una etapa posterior de los cálculos, es suficiente para refutar la optimalidad. Para enmendar la situación, esta sección presenta un modelo más preciso, en el cual la naturaleza probabilística de la demanda se incluye directamente en la información del modelo. Desde luego, la mayor precisión se obtiene a expensas de cálculos más complejos.

En la figura 16.3 se presenta un cambio típico del nivel de inventario con el tiempo. Puede ocurrir desabasto o no durante los tiempos de espera (posiblemente aleatorios), como se ilustra mediante los ciclos 1 y 2, respectivamente. La política exige pedir la cantidad y siempre que la cantidad del inventario disponible se reduzca a un nivel R . Como en el caso determinístico, el nivel de reorden

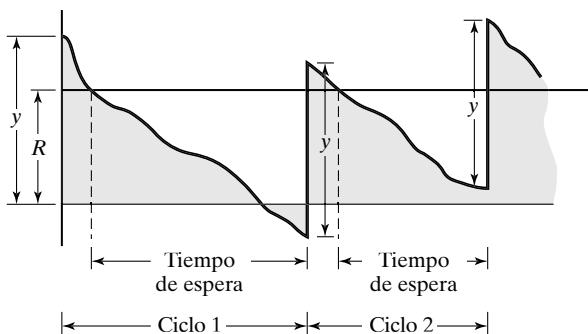


FIGURA 16.3

Modelo de inventario probabilístico con desabasto

R es una función del tiempo de espera entre la colocación y la recepción de un pedido. Los valores óptimos de y y R se determinan al minimizar la suma esperada de los costos de preparación, retención y desabasto por unidad de tiempo.

El modelo se basa en tres supuestos:

1. La demanda no satisfecha durante el tiempo de espera se pone en rezago.
2. No se permite más de un pedido pendiente.
3. La distribución de la demanda durante el tiempo de espera permanece estacionaria con el tiempo.

Para desarrollar la función de costo total por unidad de tiempo, sean

$f(x) = \text{fdp de la demanda, } x, \text{ durante el tiempo de espera}$

$D = \text{Demanda esperada por unidad de tiempo}$

$h = \text{Costo de retención por unidad de inventario por unidad de tiempo}$

$p = \text{Costo por desabasto por unidad de inventario}$

$K = \text{Costo de preparación por pedido}$

Ahora se determinan los elementos de la función de costo.

1. *Costo de preparación.* La cantidad aproximada de pedidos por unidad de tiempo es $\frac{D}{y}$, de modo que el costo de preparación por unidad de tiempo es aproximadamente $\frac{KD}{y}$.
2. *Costo de retención esperado.* Si I es el nivel de inventario promedio, el costo de retención esperado por unidad de tiempo es hI . El nivel de inventario promedio se calcula como

$$I = \frac{(y + E\{R - x\}) + E\{R - x\}}{2} = \frac{y}{2} + R - E\{x\}$$

La fórmula promedia los inventarios inicial y final esperados en un ciclo: $y + E\{R - x\}$ y $E\{R - x\}$, respectivamente. Como una aproximación, la expresión ignora el caso en que $R - E\{x\}$ puede ser negativo.

3. Costo por desabasto esperado. Los desabastos ocurren cuando $x > R$. Su valor esperado por ciclo se calcula como

$$S = \int_R^\infty (x - R)f(x)dx$$

Debido a que se supone que p es proporcional sólo a la cantidad de desabasto, el costo de desabasto esperado por ciclo es pS y, con base en $\frac{D}{y}$ ciclos por unidad de tiempo, el costo por desabasto por unidad de tiempo es $\frac{pS}{y/D} = \frac{pDS}{y}$.

La función de costo total resultante por unidad de tiempo es

$$\text{TCU}(y, R) = \frac{DK}{y} + h\left(\frac{y}{2} + R - E\{x\}\right) + \frac{pD}{y} \int_R^\infty (x - R)f(x)dx$$

Los valores óptimos, y^* y R^* , se determinan a partir de

$$\frac{\partial \text{TCU}}{\partial y} = -\left(\frac{DK}{y^2}\right) + \frac{h}{2} - \frac{pDS}{y^2} = 0$$

$$\frac{\partial \text{TCU}}{\partial R} = h - \left(\frac{pD}{y}\right) \int_R^\infty f(x)dx = 0$$

Estas dos ecuaciones dan como resultado

$$y^* = \sqrt{\frac{2D(K + pS)}{h}} \quad (1)$$

$$\int_{R^*}^\infty f(x)dx = \frac{hy^*}{pD} \quad (2)$$

Los valores óptimos de y^* y R^* no se pueden determinar en formas cerradas. Se aplica un algoritmo iterativo, desarrollado por Hadley y Whitin (1963, pp. 169-174), a las ecuaciones (1) y (2) para determinar la solución. El algoritmo converge en un número finito de iteraciones, siempre que haya una solución factible.

Para $R = 0$, las ecuaciones (1) y (2) producen

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2D(K + pE\{x\})}{2}}$$

$$\tilde{y} = \frac{PD}{h}$$

Los valores óptimos únicos de y y R existen cuando $\tilde{y} \geq \hat{y}$. El menor valor de y^* es $\sqrt{\frac{2KD}{h}}$, que ocurre cuando $S = 0$.

Los pasos del algoritmo son

- Paso 0.** Use la solución inicial $y_1 = y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$, y sea $R_0 = 0$. Establezca $i = 1$, y vaya al paso i .
- Paso i.** Use y_i para determinar R_i a partir de la ecuación (2). Si $R_i \approx R_{i-1}$, deténgase; la solución óptima es $y^* = y_i$ y $R^* = R_i$. En caso contrario, use R_i en la ecuación (1) para calcular y_{i+1} . Establezca $i = i + 1$, y repita el paso i .

Ejemplo 16.1-2

Electro utiliza resina en su proceso de fabricación a razón de 1000 galones por mes. La colocación de un pedido le cuesta \$100. El costo mensual de retención por galón es de \$2, y el costo por desabasto por galón es de \$10. Los datos históricos muestran que la demanda durante el tiempo de espera es uniforme en el rango (0, 100) galones. Determine la política de colocación de pedidos óptima para Electro.

Utilizando los símbolos del modelo, se tiene

$$D = 1000 \text{ galones mensuales}$$

$$K = \$100 \text{ por pedido}$$

$$h = \$2 \text{ por galón mensuales}$$

$$p = \$10 \text{ por galón}$$

$$f(x) = \frac{1}{100}, 0 \leq x \leq 100$$

$$E[x] = 50 \text{ galones}$$

Primero es necesario verificar si el problema tiene una solución única. Con base en las ecuaciones de \hat{y} y \tilde{y} se obtiene

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2 \times 1000(100 + 10 \times 50)}{2}} = 774.6 \text{ galones}$$

$$\tilde{y} = \frac{10 \times 1000}{2} = 5000 \text{ galones}$$

Debido a que $\tilde{y} \geq \hat{y}$, existe una solución única para y^* y R^* .

La expresión para S se calcula como

$$S = \int_R^{100} (x - R) \frac{1}{100} dx = \frac{R^2}{200} - R + 50$$

Mediante S en las ecuaciones (1) y (2), se obtiene

$$y_i = \sqrt{\frac{2 \times 1000(100 + 10S)}{2}} = \sqrt{100,000 + 10,000S} \text{ galones} \quad (3)$$

$$\int_R^{100} \frac{1}{100} dx = \frac{2y_i}{10 \times 1000} \quad (4)$$

La ecuación (4) produce

$$R_i = 100 - \frac{y_i}{50} \quad (5)$$

Ahora se utilizan las ecuaciones (3) y (5) para determinar la solución óptima.

Iteración 1

$$y_1 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 100}{2}} = 316.23 \text{ galones}$$

$$R_1 = 100 - \frac{316.23}{50} = 93.68 \text{ galones}$$

Iteración 2

$$S = \frac{R_1^2}{200} - R_1 + 50 = .19971 \text{ galones}$$

$$y_2 = \sqrt{100,000 + 10,000 \times .19971} = 319.37 \text{ galones}$$

Por consiguiente,

$$R_2 = 100 - \frac{319.39}{50} = 93.612$$

Iteración 3

$$S = \frac{R_2^2}{200} - R_2 + 50 = .20399 \text{ galones}$$

$$y_3 = \sqrt{100,000 + 10,000 \times .20399} = 319.44 \text{ galones}$$

Por lo tanto,

$$R_3 = 100 - \frac{319.44}{50} = 93.611 \text{ galones}$$

Debido a que $y_3 \approx y_2$ y $R_3 \approx R_2$, la solución óptima es $R^* \approx 93.611$ galones, $y^* \approx 319.44$ galones. El archivo *excelContRev.xls* se puede utilizar para determinar la solución a cualquier grado de precisión especificando la tolerancia $|R_{i-1} - R_i|$. La política de inventario óptima exige pedir aproximadamente 320 galones siempre que el nivel del inventario se reduzca a 94 galones.

16.2 MODELOS DE UN SOLO PERIODO

Esta sección trata sobre los artículos de inventario que están en existencia durante un solo periodo de tiempo. Al final del periodo se desechan las unidades sobrantes, si las hay, como en el caso de los artículos de moda. Se desarrollarán dos modelos. La diferencia entre ellos es si se incurre o no en un costo de preparación para colocar un pedido.

Los símbolos utilizados en el desarrollo de los modelos son

K = Costo de preparación por pedido

h = Costo de retención por unidad retenida durante el periodo

p = Costo de penalización por unidad de desabasto durante el periodo

$f(D)$ = fdp de la demanda, D , durante el periodo

y = Cantidad de pedido

x = Inventario disponible antes de que se coloque un pedido

El modelo determina el valor óptimo de y que minimiza la suma de los costos de retención y por desabasto. Si $y (= y^*)$ es óptima, la política de inventario indica pedir $y^* - x$ si $x < y$; en caso contrario, no se coloca ningún pedido.

16.2.1 Modelo sin costo de preparación (del vendedor de periódicos)

Este modelo se conoce en la literatura como modelo del *vendedor de periódicos* (el nombre original clásico es modelo del *periodiquero*). Trata sobre el almacenamiento y la venta de periódicos.

Los supuestos del modelo son

1. La demanda ocurre instantáneamente al inicio del periodo inmediatamente después de que se recibe el pedido.
2. No se incurre en ningún costo de preparación.

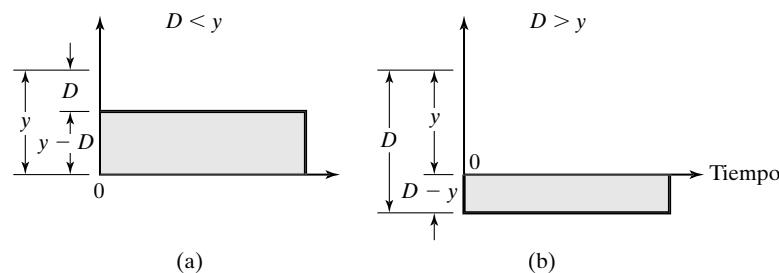
En la figura 16.4 se muestra la posición del inventario después de satisfacer la demanda, D . Si $D < y$, la cantidad $y - D$ se mantiene durante el periodo. Por el contrario, si $D > y$, habrá una cantidad de desabasto $D - y$.

El costo esperado para el periodo, $E\{C(y)\}$, se expresa como

$$E\{C(y)\} = h \int_0^y (y - D)f(D)dD + p \int_y^\infty (D - y)f(D)dD$$

FIGURA 16.4

Inventario con retención y desabasto en un modelo de un solo periodo



Es posible demostrar que la función $E\{C(y)\}$ es convexa en y , por lo que tiene un mínimo único. Si se calcula la primera derivada de $E\{C(y)\}$ respecto de y y se iguala a cero, resulta

$$h \int_0^y f(D) dD - p \int_0^\infty f(D) dD = 0$$

es decir,

$$hP\{D \leq y\} - p(1 - P\{D \leq y\}) = 0$$

o bien,

$$P\{D \leq y^*\} = \frac{p}{p + h}$$

Si la demanda, D , es discreta, entonces la función de costo asociada es

$$E\{C(y)\} = h \sum_{D=0}^y (y - D)f(D) + p \sum_{D=y+1}^{\infty} (D - y)f(D)$$

Las condiciones necesarias para la optimalidad son

$$E\{C(y - 1)\} \geq E\{C(y)\} \quad y \quad E\{C(y + 1)\} \geq E\{C(y)\}$$

Estas condiciones también son suficientes porque $E\{C(y)\}$ es una función convexa. Después de algunas manipulaciones algebraicas, la aplicación de estas condiciones da como resultado las siguientes desigualdades para determinar y^* :

$$P\{D \leq y^* - 1\} \leq \frac{p}{p + h} \leq P\{D \leq y^*\}$$

Ejemplo 16.2-1

El propietario de un quiosco de periódicos desea determinar la cantidad de ejemplares de *USA Now* que debe tener en existencia al inicio de cada día. El propietario paga 30 centavos por una copia y la vende a 75 centavos. La venta del periódico suele ocurrir entre 7:00 y 8:00 A.M. (la demanda es prácticamente instantánea). Los periódicos que sobran al final del día se reciclan y se obtiene un ingreso de 5 centavos por copia. ¿Cuántas copias debería tener en existencia cada mañana? Suponga que la demanda del día puede describirse como

- (a) Una distribución normal con media de 300 copias y desviación estándar de 20 copias.
- (b) Una fdp discreta, $f(D)$, definida como

D	200	220	300	320	340
$f(D)$.1	.2	.4	.2	.1

Los costos de retención y penalización no se definen de manera directa en esta situación. Los datos del problema indican que cada copia no vendida costará al dueño $30 - 5 = 25$ centavos, y que el costo de penalización por quedarse sin existencias es de $75 - 30 = 45$ centavos por copia. Por lo tanto, en función de los parámetros del problema de inventario, se tienen $h = 25$ centavos por copia por día y $p = 45$ centavos por copia por día.

En primer lugar, se determina la relación crítica como

$$\frac{p}{p + h} = \frac{45}{45 + 25} = .643$$

Caso (a). La demanda D es $N(300, 20)$. Se puede utilizar la plantilla *excelStatTables.xls* para determinar la cantidad de pedido óptima al introducir 300 en F15, 20 en G15 y .643 en L15, de donde se obtiene la respuesta deseada de 307.33 periódicos en R15. De manera alternativa, se pueden utilizar las tablas normales estándar del apéndice A. Defina

$$z = \frac{D - 300}{20}$$

Entonces, a partir de las tablas normales,

$$P\{z \leq .366\} \approx .643$$

o bien,

$$\frac{y^* - 300}{20} = .366$$

Por lo tanto, $y^* = 307.3$. El pedido óptimo es aproximadamente de 308 copias.

Caso (b). La demanda D sigue una fdp discreta, $f(D)$. En primer lugar, se determina la FDA $P\{D \leq y\}$ como

y	200	220	300	320	340
$P\{D \leq y\}$.1	.3	.7	.9	1.0

Para la relación crítica calculada de .643, se tiene

$$P(D \leq 220) \leq .643 \leq P(D \leq 300)$$

De aquí se deduce que $y^* = 300$ copias.

16.2.2 Modelo con costo de preparación (política s - S)

El presente modelo es diferente del de la sección 16.2.1 en que se incurre en un costo de preparación K . Si se usa la misma notación, el costo esperado total por periodo es

$$\begin{aligned} E\{\bar{C}(y)\} &= K + E\{C(y)\} \\ &= K + h \int_0^y (y - D)f(D)dD + p \int_y^\infty (D - y)f(D)dD \end{aligned}$$

Como se muestra en la sección 16.2.1, el valor óptimo y^* debe satisfacer

$$P\{y \leq y^*\} = \frac{p}{p+h}$$

Debido a que K es constante, el valor mínimo de $E\{C(y)\}$ también debe ocurrir en y^* .

En la figura 16.5, $S = y^*$, y el valor de $s (< S)$ se determina a partir de la ecuación

$$E\{C(s)\} = E\{\bar{C}(S)\} = K + E\{C(S)\}, s < S$$

La ecuación resulta en otro valor $s_1 (> S)$, que se descarta.

Suponga que x es la cantidad disponible antes de que se coloque un pedido. ¿Cuánto debería pedirse? Esta pregunta se responde con tres condiciones:

1. $x < s$.
2. $s \leq x \leq S$.
3. $x > S$.

Caso 1 ($x < s$). Debido a que x ya está disponible, su costo equivalente está dado por $E\{C(x)\}$. Si se pide cualquier cantidad adicional $y - x$ ($y > x$), el costo correspondiente dada y es $E\{\bar{C}(y)\}$, que incluye el costo de preparación K . A partir de la figura 16.5, se tiene

$$\min_{y>x} E\{\bar{C}(y)\} = E(\bar{C}(S)) < E\{C(x)\}$$

Por lo tanto, la política de inventario óptima en este caso es pedir $S - x$ unidades.

Caso 2 ($s \leq x \leq S$). De acuerdo con la figura 16.5, se tiene

$$E\{C(x)\} \leq \min_{y>x} E\{\bar{C}(y)\} = E(\bar{C}(S))$$

Por consiguiente, *no* es ventajoso pedir en este caso, y $y^* = x$.

Caso 3 ($x > S$). Con base en la figura 16.5, se tiene para $y > x$,

$$E\{C(x)\} < E\{\bar{C}(y)\}$$

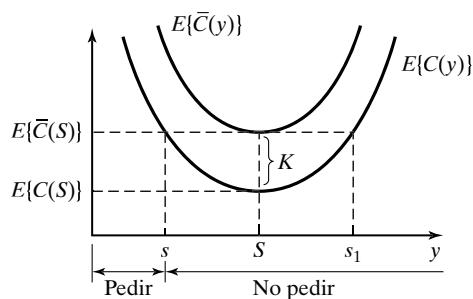


FIGURA 16.5

Política de pedidos óptima ($s-S$) en un modelo de un solo periodo con costo de preparación

Esta condición indica que, como en el caso (2), no es ventajoso colocar un pedido, es decir, $y^* = x$.

La política de inventario óptima, más conocida como **política s-S**, se resume de la siguiente manera:

Si $x < s$, pedir $S - x$

Si $x \geq s$, no pedir

La optimalidad de la política s-S está garantizada porque la función de costo asociada es convexa.

Ejemplo 16.2-2

La demanda diaria de un artículo durante un solo periodo ocurre de forma instantánea al inicio del periodo. La fdp de la demanda es uniforme entre 0 y 10 unidades. El costo de retención unitario del artículo durante el periodo es de \$.50, y el costo de penalización unitario por quedarse sin existencias es de \$.450. Se incurre en un costo fijo de \$25 cada vez que se coloca un pedido. Determine la política de inventario óptima para el artículo.

Para determinar y^* , considere

$$\frac{p}{p + h} = \frac{4.5}{4.5 + .5} = .9$$

Además,

$$P\{D \leq y^*\} = \int_0^{y^*} \frac{1}{10} dD = \frac{y^*}{10}$$

Por lo tanto, $S = y^* = 9$.

La función de costo esperada es

$$\begin{aligned} E\{C(y)\} &= .5 \int_0^y \frac{1}{10} (y - D) dD + 4.5 \int_y^{10} \frac{1}{10} (D - y) dD \\ &= .25y^2 - 4.5y + 22.5 \end{aligned}$$

El valor de s se determina resolviendo

$$E\{C(s)\} = K + E\{C(S)\}$$

o bien,

$$.25s^2 - 4.5s + 22.5 = 25 + .25S^2 - 4.5S + 22.5$$

Si $S = 9$, la ecuación anterior se reduce a

$$s^2 - 18s - 19 = 0$$

La solución de esta ecuación es $s = -1$, o $s = 19$. Se descarta el valor de $s > S$. Debido a que el valor restante es negativo ($= -1$), s no tiene un valor factible. Como se muestra en la figura 16.6, la política de inventario óptima en este caso indica que no se pida el artículo. Este resultado se suele presentar cuando la función de costo es “plana” o cuando el costo de preparación es alto respecto de los demás costos del modelo.

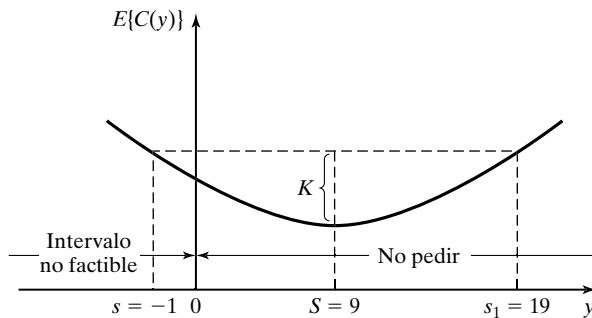


FIGURA 16.6

Política $s-S$ aplicada al ejemplo 16.2-2

16.3 MODELO DE VARIOS PERIODOS MÚLTIPLES

En esta sección se presenta un modelo de varios períodos con el supuesto de que no hay costo de preparación. Adicionalmente, el modelo permite un retraso en el cumplimiento de la demanda y supone un retraso cero en la entrega. Además, asume que la demanda en cualquier periodo está descrita por una fdp estacionaria, $f(D)$.

El modelo de varios períodos considera el valor descontado del dinero. Si $\alpha (< 1)$ es el factor de descuento por periodo, entonces una cantidad $\$A$ disponible durante n períodos a partir de ahora tiene un valor presente de $\$a^n A$.

Suponga que la situación del inventario comprende n períodos y que la demanda no satisfecha se deja pendiente exactamente un periodo. Defina

$F_i(x_i) =$ Utilidad máxima esperada para los períodos $i, i + 1, \dots, y n$, dado que

x_i es la cantidad disponible antes de que se coloque un pedido en el periodo i

Si se aplica la notación utilizada en la sección 16.2 y se supone que c y r son el costo y el ingreso por unidad, respectivamente, la situación del inventario puede formularse utilizando el siguiente modelo de programación dinámica probabilística:

$$\begin{aligned}
 F_{n+1}(y_n - D) &= 0 \\
 F_i(x_i) &= \max_{y_i \geq x_i} \left\{ -c(y_i - x_i) + \int_0^{y_i} [rD - h(y_i - D)]f(D)dD \right. \\
 &\quad + \int_{y_i}^{\infty} [ry_i + \alpha r(D - y_i) - p(D - y_i)]f(D)dD \\
 &\quad \left. + \alpha \int_0^{\infty} F_{i+1}(y_i - D)f(D)dD \right\}, i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

El valor de x_i puede ser negativo porque la demanda no satisfecha se coloca en rezago. Se incluye la cantidad $\alpha r(D - y_i)$ en la segunda integral porque $(D - y_i)$ es la demanda no satisfecha en el periodo i que se debe satisfacer en el periodo $i + 1$.

El problema se puede resolver de manera recursiva. En el caso en que la cantidad de periodos es infinita, la ecuación recursiva se reduce a

$$\begin{aligned} F(x) = \max_{y \geq x} & \left\{ -c(y - x) + \int_0^y [rD - h(y - D)]f(D)dD \right. \\ & + \int_y^\infty [ry + \alpha r(D - y) - p(D - y)]f(D)dD \\ & \left. + \alpha \int_0^\infty F(y - D)f(D)dD \right\} \end{aligned}$$

donde x y y son los niveles del inventario durante cada periodo antes y después de recibir un pedido, respectivamente.

El valor óptimo de y se determina a partir de la siguiente condición necesaria, que también resulta ser suficiente porque la función del ingreso esperado $F(x)$ es cóncava:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = & -c - h \int_0^y f(D)dD + \int_y^\infty [(1 - \alpha)r + p]f(D)dD \\ & + \alpha \int_0^\infty \frac{\partial F(y - D)}{\partial y} f(D)dD = 0 \end{aligned}$$

El valor de $\frac{\partial F(y - D)}{\partial y}$ se determina como sigue. Si hay β (> 0) unidades adicionales disponibles al inicio del siguiente periodo, la utilidad durante el siguiente periodo se incrementará en $c\beta$, porque se tiene que pedir una cantidad menor en ese monto. Lo anterior significa que

$$\frac{\partial F(y - D)}{\partial y} = c$$

Por lo tanto, la condición necesaria se convierte en

$$-c - h \int_0^y f(D)dD + \left[(1 - \alpha)r + p \right] \left(1 - \int_0^y f(D)dD \right) + \alpha c \int_0^\infty f(D)dD = 0$$

Así, el nivel del inventario óptimo y^* se determina a partir de

$$\int_0^{y^*} f(D)dD = \frac{p + (1 - \alpha)(r - c)}{p + h + (1 - \alpha)r}$$

En consecuencia, la política de inventario óptima durante cada periodo, dado su nivel de inventario de entrada x , se da como

Si $x < y^*$, pedir $y^* - x$

Si $x \geq y^*$, no pedir

BIBLIOGRAFÍA

- Cohen, R. y F. Dunford, "Forecasting for Inventory Control: An Example of When 'Simple' Means 'Better'", *Interfaces*, vol. 16, núm. 6, pp. 95-99, 1986.
- Hadley, G. y T. Whitin, *Analysis of Inventory Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1963.
- Nahmias, S., *Production and Operations Analysis*, 5a. ed., Irwin, Homewood, IL, 2005.
- Silver, E., D. Pyke y R. Peterson, *Decision Systems for Inventory Management and Production Control*, 3a. ed., Wiley, Nueva York, 1998.
- Zipken, P., *Foundations of Inventory Management*, McGraw-Hill, Boston, 2000.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados
16.1.1	16-1 a 16-3
16.1.2	16-4 a 16-7
16.2.1	16-8 a 16-15
16.2.2	16-16 a 16-18
16.3	16-19 a 16-21

16-1. En el ejemplo 16.1-1, determine la política de inventario óptima para cada uno de los siguientes casos:

- (a)** Tiempo de espera = 15 días.
- (b)** Tiempo de espera = 23 días.
- (c)** Tiempo de espera = 8 días.
- (d)** Tiempo de espera = 10 días.

16-2. La demanda diaria de un popular CD en una tienda de música es aproximadamente $N(200, 20)$. El costo de conservar el CD en los anaqueles es de \$.04 por disco por día. A la tienda le cuesta \$100 colocar un nuevo pedido. El tiempo de espera para la entrega es de 7 días. Determine la política de inventario óptima de la tienda dado que ésta desea limitar la probabilidad de desabasto cuando mucho a .02.

16-3. La demanda diaria de rollos de película para cámara en una tienda de regalos es $N(300, 5)$. El costo de retener un rollo en la tienda es de \$.02 por día, y el costo fijo de colocar un pedido de reposición es de \$30. La política de inventario de la tienda es pedir 150 rollos, siempre que el nivel del inventario se reduzca a 80 unidades. De manera simultánea, mantiene siempre una reserva de 20 rollos.

- (a)** Determine la probabilidad de quedarse sin existencias.
- (b)** Dados los datos de la situación, recomiende la política de inventario para la tienda, dado que la probabilidad de desabastos no puede exceder .10.

16-4. Para los datos dados en el ejemplo 16.1-2, determine lo siguiente:

- (a)** El número aproximado de pedidos por mes.
- (b)** El costo de preparación mensual esperado.
- (c)** El costo de retención esperado por mes.
- (d)** El costo por desabasto esperado por mes.
- (e)** La probabilidad de quedarse sin existencias durante el tiempo de espera.

- *16-5.** Resuelva el problema 16.1-2, suponiendo que la demanda durante el tiempo de espera se mantiene uniforme entre 0 y 50 galones.
- *16-6.** En el ejemplo 16.1-2 suponga que la demanda durante el tiempo de espera se mantiene uniforme entre 40 y 60 galones. Compare la solución con la obtenida en el ejemplo 16.1-2 e interprete los resultados (*sugerencia:* En ambos problemas, $E\{x\}$ es igual, pero la varianza en el presente problema es menor).
- 16-7.** Encuentre la solución óptima para el ejemplo 16.1-2, suponiendo que la demanda durante el tiempo de espera es $N(100, 2)$. Además, suponga que $D = 10,000$ galones por mes, $h = \$2$ por galón al mes, $p = \$4$ por galón y $K = \$20$.
- 16-8.** Para el modelo de un solo periodo, demuestre que si la demanda es discreta, la cantidad de pedido óptima se determina a partir de

$$P\{D \leq y^* - 1\} \leq \frac{p}{p + h} \leq P\{D \leq y^*\}$$

- 16-9.** La demanda de un artículo durante un solo periodo ocurre de manera instantánea al inicio del periodo. La fdp asociada se mantiene uniforme entre 10 y 15 unidades. Debido a la dificultad de estimar los parámetros de costo, la cantidad de pedido se determina de modo que la probabilidad de un excedente o de un desabasto no sea mayor que .1. ¿Es posible satisfacer ambas condiciones simultáneamente?
- *16-10.** El costo de retención unitario en una situación de inventario de un solo periodo es de \$1. Si la cantidad de pedido es de 4 unidades, encuentre el intervalo permisible del costo de penalización unitario implicado por las condiciones óptimas. Suponga que la demanda ocurre instantáneamente al inicio del periodo y que la fdp de la demanda es como sigue:

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(D)$.05	.1	.1	.2	.25	.15	.05	.05	.05

- 16-11.** La librería de la U de A ofrece un programa de reproducción de apuntes de clase para profesores participantes. El profesor Yataha imparte clases a un grupo de primer año de entre 200 y 250 estudiantes, distribuidos de manera uniforme. La reproducción de una copia cuesta \$10 y se vende a \$25. Los estudiantes compran sus libros al inicio del semestre. Las copias de los apuntes del profesor Yataha que no se venden se trituran para reciclarlas. Mientras tanto, una vez que la librería se queda sin copias, no se imprimen más. Si la librería desea maximizar sus ingresos, ¿cuántas copias debería imprimir?
- 16-12.** QuickStop ofrece a sus clientes café y donas todos los días a las 6:00 A.M. La tienda compra las donas a 7 centavos cada una y las vende a 25 centavos hasta las 8:00 A.M. Después de esa hora, las donas se venden a 5 centavos cada una. La cantidad de clientes que compran donas entre las 6:00 y las 8:00 se distribuye uniformemente entre 30 y 50. Cada cliente suele pedir 3 donas con café. ¿Cuántas donas debe tener aproximadamente en existencia QuickStop cada mañana para maximizar los ingresos?
- *16-13.** Colony Shop está adquiriendo abrigos para el siguiente invierno. Colony paga \$50 por un abrigo y lo vende a \$110. Al final de la temporada invernal, Colony ofrece los abrigos a \$55 cada uno. La demanda de abrigos durante la temporada invernal es de más de 20 pero menor o igual que 30, todo con iguales probabilidades. Debido a que la temporada invernal es corta, el costo de retención es insignificante. Asimismo, el gerente de Colony no cree que la escasez de sacos provoque penalizaciones. Determine la cantidad de pedido óptima que maximizará el ingreso para Colony Shop. Puede utilizar una aproximación continua.

- 16-14.** Para el modelo de un solo periodo, suponga que el artículo se consume de modo uniforme durante el periodo (y no de forma instantánea al inicio de éste). Desarrolle el modelo de costo asociado, y determine la cantidad de pedido óptima.
- 16-15.** Resuelva el ejemplo 16.2-1 suponiendo que la demanda es continua y uniforme durante el periodo, y que la fdp de la demanda es uniforme entre 0 y 100 (*sugerencia:* Utilice los resultados del problema 16-14).
- *16-16.** Determine la política de inventario óptima para la situación en el ejemplo 16.2-2, suponiendo que el costo de preparación es de \$5.
- 16-17.** En el modelo de un solo periodo de la sección 16.2.1, suponga que el modelo maximiza la utilidad y que se incurre en un costo de preparación K . Dado que r es el precio de venta unitario, utilice la información de la sección 16.2.1 con la finalidad de desarrollar una expresión para la utilidad esperada; asimismo, determine la cantidad de pedido óptima. Resuelva el problema numéricamente para $r = \$3$, $c = \$2$, $p = \$4$, $h = \$1$ y $K = \$10$. La fdp de la demanda es uniforme entre 0 y 10.
- 16-18.** Resuelva el problema 16-12, suponiendo que hay un costo fijo de \$10 asociado con la entrega de las donas.

- 16-19.** Considere un modelo de inventario probabilístico de dos periodos, en el cual el cumplimiento de la demanda se coloca en rezago, y los pedidos se reciben con retraso cero en la entrega. La fdp de la demanda por periodo es uniforme entre 0 y 10, y los parámetros de costos se dan como

Precio de venta unitario = \$2

Precio de compra unitario = \$1

Costo de retención unitario por mes = \$.10

Costo de penalización unitario por mes = \$3

Factor de descuento = .8

Encuentre la política de inventario óptima para los dos periodos, suponiendo que el inventario inicial en el periodo 1 es cero.

- *16-20.** La fdp de la demanda por periodo en un modelo de inventario de horizonte infinito se da como

$$f(D) = .08D, 0 \leq D \leq 5$$

Los parámetros de costos unitarios son

Precio de venta unitario = \$10

Precio de compra unitario = \$8

Costo de retención unitario por mes = \$1

Costo de penalización unitario por mes = \$10

Factor de descuento = .9

Determine la política de inventario óptima suponiendo un retraso cero en la entrega y que el no cumplimiento de la demanda se coloca en rezago.

- 16-21.** Considere la situación de inventario de horizonte infinito con retraso cero en la entrega y cumplimiento de la demanda en rezago. Desarrolle la política de inventario óptima con base en la minimización del costo, dado que

$$\text{Costo de retención por } z \text{ unidades} = hz^2$$

$$\text{Costo de penalización por } z \text{ unidades} = px^2$$

Demuestre que para el caso especial donde $h = p$, la solución óptima es independiente de la fdp de la demanda.

CAPÍTULO 17

Cadenas de Markov

Aplicación de la vida real: Predicción del cambio de la cubierta forestal usando el modelo de cadenas de Markov. Un estudio de caso en el pueblo de Gangtok, del Subhimalaya, en India

Este caso evalúa el uso actual y futuro del suelo y de su cubierta forestal en la capital del Subhimalaya: Gangtok, India. El aumento de la población ha dado lugar a la conversión de tierras forestales para su uso agrícola y el desarrollo urbano. Las series temporales de imágenes satelitales, utilizadas para monitorear los cambios en las condiciones ambientales, son la base para representar los diferentes estados de los cambios forestales (urbanización, agricultura, suelo forestal) en términos de la probabilidad de transición en una cadena de Markov. El modelo de cadenas de Markov se utiliza para predecir el futuro uso de la tierra en el área de estudio. Los detalles se explican en el caso 15 del capítulo 26, disponible en inglés en el sitio web de este libro.

17.1 DEFINICIÓN DE UNA CADENA DE MARKOV

Sea X_t una variable aleatoria que caracteriza el estado del sistema en puntos discretos en el tiempo $t = 1, 2, \dots$. La familia de variables aleatorias $\{X_t\}$ forma un **proceso estocástico** con una cantidad de estados finita o infinita.

Ejemplo 17.1-1 (Mantenimiento de una máquina)

La condición de una máquina en el momento del mantenimiento preventivo mensual es mala, regular o buena. Para el mes t , el proceso estocástico en esa situación se representa como sigue:

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{si la condición es mala} \\ 1, & \text{si la condición es regular} \\ 2, & \text{si la condición es buena} \end{cases}, \quad t = 1, 2, \dots$$

La variable aleatoria X_t es *finita* porque representa tres estados: malo (0), regular (1) y bueno (2).

Ejemplo 17.1-2 (Taller)

Los trabajos llegan aleatoriamente a un taller a razón de 5 trabajos por hora. El proceso de llegada sigue una distribución de Poisson que, en teoría, permite la llegada de cualquier cantidad de trabajos durante el intervalo de tiempo $(0, t)$. El proceso de estado infinito que describe la cantidad de trabajos que llegan es $X_t = 0, 1, 2, \dots, t > 0$.

Proceso de Markov. Un proceso estocástico es un proceso de Markov si un estado futuro depende sólo del estado inmediatamente anterior. Esto significa que dados los tiempos cronológicos t_0, t_1, \dots, t_n , la familia de variables aleatorias $\{X_{t_n}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es un proceso de Markov si

$$P\{X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0\} = P\{X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\}$$

En un proceso markoviano con n estados exhaustivos y mutuamente excluyentes, las probabilidades en un punto específico del tiempo $t = 0, 1, 2, \dots$ se definen como

$$p_{ij} = P\{X_t = j | X_{t-1} = i\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n, t = 0, 1, 2, \dots, T$$

Esto se conoce como **probabilidad de transición en un paso** al ir del estado i en $t - 1$ al estado j en t . Por definición, se tiene

$$\sum_j p_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

$$p_{ij} \geq 0, (i, j) = 1, 2, \dots, n$$

Las probabilidades de transición en un paso pueden representarse en forma matricial como:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz \mathbf{P} define una **cadena de Markov** y tiene la propiedad de que todas sus probabilidades de transición p_{ij} son estacionarias e independientes a lo largo del tiempo. Aunque una cadena de Markov puede incluir un número infinito de estados, la presentación en este capítulo se limita sólo a las cadenas finitas, puesto que son las únicas que se requieren en el texto.

Ejemplo 17.1-3 (Problema del jardinero)

Cada año, durante la temporada de cultivo de marzo a septiembre, un jardinero realiza una prueba química para verificar la condición de la tierra. Según el resultado de la prueba, la productividad en la nueva temporada puede ser uno de tres estados: (1) bueno, (2) regular y (3) malo. A lo largo de los años, el jardinero ha observado que la condición de la tierra del año anterior afecta la productividad del año actual y que la situación se describe mediante la siguiente cadena de Markov:

$$\begin{array}{c}
 \text{Estado del} \\
 \text{sistema el} \\
 \text{siguiente año} \\
 \hline
 & 1 & 2 & 3 \\
 \mathbf{P} = & \begin{array}{l} \text{Estado} \\ \text{del sistema} \\ \text{este año} \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} 1 \begin{pmatrix} .2 & .5 & .3 \end{pmatrix} \\ 2 \begin{pmatrix} 0 & .5 & .5 \end{pmatrix} \\ 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Las probabilidades de transición muestran que la condición de la tierra puede deteriorarse o permanecer como está, pero nunca mejorar. Por ejemplo, si la condición de la tierra es buena en este año (estado 1) hay 20% de probabilidades de que no cambie el año siguiente, 50% de probabilidad de que sea regular (estado 2), y 30% de probabilidad de que se deteriorará a una condición mala (estado 3). El jardinero modifica las probabilidades de transición \mathbf{P} utilizando un fertilizante orgánico. En este caso, la matriz de transición se vuelve:

$$\begin{array}{c}
 & 1 & 2 & 3 \\
 \mathbf{P}_1 = & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

El uso de fertilizante puede conducir a mejorar las condiciones del suelo.

Momento, ¡ajá! ¡El correo basura se vuelve markoviano!

Hace un tiempo recibí un correo electrónico de una fuente desconocida. El mensaje era sintácticamente correcto pero su contenido era absurdo (por ejemplo, “En un modelo, él tiene todas las soluciones en paralelo cuando pasa de 10 y emite 0”). Deseché el correo electrónico y supuse que el culpable era el dominio del idioma inglés del remitente. Cuando se repitió la misma experiencia en nuevos correos electrónicos, decidí hacer un poco de investigación. Resultó que tales inserciones sintácticamente correctas, pero por demás absurdas, son totalmente generadas por computadora y utilizadas por los generadores de correo basura para evitar los filtros de spam. Curiosamente, el código informático utilizado para generar estos mensajes tiene sus raíces en las cadenas de Markov. La idea es escanear un texto (un párrafo, un capítulo o un libro entero) para crear una tabla que calcule las frecuencias en que una palabra en el texto es seguida por otras palabras. Por ejemplo, en el texto *No es lo que dices; es lo que haces*, los estados de la cadena de Markov están representados por 6 palabras y dos puntuaciones. Hay una probabilidad de 100% que después de *es* aparezca la palabra *lo*, y una probabilidad 50-50 de que la palabra que esté seguida por *dices* o *haces*. Con base en esta lógica, toda la cadena de Markov puede poblar con probabilidades de transición. Una vez hecho esto, es posible generar un nuevo texto comenzando en un estado aleatorio (por ejemplo, *que*) y luego decidir *al azar* cuál debería ser la siguiente palabra (o puntuación). La palabra siguiente se utiliza entonces para decidir sobre la palabra siguiente, y así sucesivamente. Desde luego, se necesitan más refinamientos para asegurar que se tomen en cuenta la corrección sintáctica y otras características deseadas.

Los generadores de correo basura no son los únicos usuarios de este modelo de Markov. El mismo modelo se utiliza satíricamente como generador de parodias. La idea también se ha utilizado para comparar estilos de escritura de autores diferentes.

17.2 PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN ABSOLUTAS Y DE n PASOS

Dada la matriz de transición \mathbf{P} de una cadena de Markov y el vector de probabilidades iniciales, $\mathbf{a}^{(0)} = \{a_j^{(0)}, j = 1, 2, \dots, n\}$ las probabilidades absolutas $\mathbf{a}^{(n)} = \{a_j^{(n)}, j = 1, 2, \dots, n\}$ después de $n (> 0)$ transiciones se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^{(1)} &= \mathbf{a}^{(0)} \mathbf{P} \\ \mathbf{a}^{(2)} &= \mathbf{a}^{(1)} \mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)} \mathbf{P} \mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)} \mathbf{P}^2 \\ \mathbf{a}^{(3)} &= \mathbf{a}^{(2)} \mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)} \mathbf{P}^2 \mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)} \mathbf{P}^3 \\ &\vdots \\ \mathbf{a}^{(n)} &= \mathbf{a}^{(0)} \mathbf{P}^n\end{aligned}$$

La matriz \mathbf{P}^n se conoce como la **matriz de transición de n pasos**. A partir de estos cálculos, se observa que

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{P}$$

y que

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-m} \mathbf{P}^m, 0 < m < n$$

Éstas se conocen como ecuaciones de **Chapman-Kolomogorov**.

Ejemplo 17.2-1

La siguiente matriz de transición es aplicable al problema del jardinero con el fertilizante (ejemplo 17.1-3):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}$$

La condición inicial de la tierra es buena; es decir, $\mathbf{a}^{(0)} = (1, 0, 0)$. Determine las probabilidades absolutas de los tres estados del sistema después de 1, 8 y 16 temporadas de cultivo.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^8 &= \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} .101753 & .525514 & .372733 \\ .101702 & .525435 & .372863 \\ .101669 & .525384 & .372863 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}^{16} &= \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}^{16} = \begin{pmatrix} .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por lo tanto, las probabilidades absolutas requeridas se calculan como

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^{(1)} &= (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix} = (.30 \quad .60 \quad .1) \\ \mathbf{a}^{(8)} &= (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} .101753 & .525514 & .372733 \\ .101702 & .525435 & .372863 \\ .101669 & .525384 & .372863 \end{pmatrix} = (.101753 \quad .525514 \quad .372733)\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}^{(16)} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \end{pmatrix} = (.101659 \ 52454 \ .372881)$$

Las filas de \mathbf{P}^8 y el vector de probabilidades absolutas $\mathbf{a}^{(8)}$ son casi idénticos. El resultado es más evidente para \mathbf{P}^{16} . Lo anterior demuestra que, a medida que la cantidad de transiciones aumenta, las probabilidades absolutas se vuelven independientes del $\mathbf{a}^{(0)}$ inicial. Las probabilidades resultantes se conocen como **probabilidades de estado estable**.

Comentarios. Los cálculos asociados con las cadenas de Markov son tediosos. La plantilla *excelMarkovChains.xls* proporciona una hoja de cálculo general fácil de usar para realizar estos cálculos (vea el *Momento de Excel* después del ejemplo 17.4-1).

17.3 CLASIFICACIÓN DE LOS ESTADOS EN UNA CADENA DE MARKOV

Los estados de una cadena de Markov se clasifican con base en la probabilidad de transición p_{ij} de \mathbf{P} .

1. Un estado j es **absorbente** si es seguro que regrese a sí mismo en una transición, es decir, $p_{jj} = 1$.
2. Un estado j es **transitorio** si puede llegar a otro estado, pero no puede regresar desde otro estado. Matemáticamente, esto sucederá si $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$, para toda las i .
3. Un estado j es **recurrente** si la probabilidad de ser revisitado desde otros estados es 1. Esto puede suceder si, y sólo si, el estado no es transitorio.
4. Un estado j es **periódico** con periodo de $t > 1$ si es posible un retorno sólo en $t, 2t, 3t, \dots$ pasos. Esto significa que $p_{jj}^{(n)} = 0$ cuando n no es divisible entre t .

Con base en las definiciones dadas, una cadena de Markov *finita* no puede constar de todos los estados transitorios porque, por definición, la propiedad transitoria requiere entrar a otro estado de “atrapamiento” y nunca volver a visitar el estado transitorio. El estado de “atrapamiento” no necesita ser un solo estado absorbente. Por ejemplo, considere la cadena

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .3 & .7 \\ 0 & 0 & .4 & .6 \end{pmatrix}$$

Los estados 1 y 2 son transitorios porque no se puede volver a entrar a ellos una vez que el sistema se “queda atrapado” en los estados 3 y 4. Un **conjunto cerrado** lo constituyen los estados 3 y 4 que, en cierta forma, desempeñan el papel de un estado absorbente. Por definición, todos los estados de un *conjunto cerrado* deben **comunicarse**, lo cual significa que es posible ir de cualquier estado a cualquier otro estado del conjunto en una o más transiciones; es decir, $p_{ij}^{(n)} > 0$ para toda $i \neq j$ y $n \geq 1$. Observe que cada uno de los estados 3 y 4 puede ser absorbente si $p_{33} = p_{44} = 1$. En un caso como éste, cada estado forma un conjunto cerrado.

Se dice que una cadena de Markov *cerrada* es **ergódica**, si todos los estados son *recurrentes* y **aperiodica** (no periódica). En este caso, las probabilidades absolutas después de n transiciones, $\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^n$, siempre convergen de forma única a una distribución limitante (estado estable) que es independiente de las probabilidades iniciales $\mathbf{a}^{(0)}$, como se demostrará en la sección 17.4.

Ejemplo 17.3-1 (Estados absorbentes y transitorios)

Considere la cadena de Markov del jardinero sin el uso de fertilizante:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .2 & .5 & .3 \\ 0 & .5 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los estados 1 y 2 son transitorios porque llegan al estado 3 pero nunca se puede regresar a ellos. El estado 3 es absorbente porque $p_{33} = 1$. Estas clasificaciones también se observan cuando se calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. Por ejemplo, considere

$$\mathbf{P}^{100} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultado muestra que, a la larga, la probabilidad de volver a entrar al estado 1 o 2 es cero, y que la probabilidad de quedarse “atrapado” en el estado absorbente 3 es segura.

Ejemplo 17.3-2 (Estados periódicos)

Se puede probar la periodicidad de un estado calculando \mathbf{P}^n y observando los valores de $p_{ii}^{(n)}$ para $n = 2, 3, 4, \dots$. Estos valores serán positivos sólo en el periodo correspondiente del estado. Por ejemplo, considere

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & .6 & .4 \\ 0 & 1 & 0 \\ .6 & .4 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} .24 & .76 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & .76 & .24 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & .904 & .0960 \\ 0 & 1 & 0 \\ .144 & .856 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} .0567 & .9424 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & .9424 & .0576 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^5 = \begin{pmatrix} 0 & .97696 & .02304 \\ 0 & 1 & 0 \\ .03456 & .96544 & 0 \end{pmatrix}$$

Los resultados muestran que p_{11} y p_{33} son positivos para valores pares de n y cero en cualquier otro caso (usted puede confirmar esta observación calculando \mathbf{P}^n con $n > 5$). Lo anterior significa que el periodo de cada uno de los estados 1 y 3 es $t = 2$.

17.4 PROBABILIDADES DE ESTADO ESTABLE Y TIEMPOS DE RETORNO PROMEDIO DE CADENAS ERGÓDICAS

En una cadena ergódica de Markov, las probabilidades de estado estable se definen como

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Estas probabilidades, que son independientes de $\{a_j^{(0)}\}$, se determinan a partir de las ecuaciones

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

(Una de las ecuaciones en $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ es redundante). Lo que $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ indica es que las probabilidades $\boldsymbol{\pi}$ permanecen sin cambio después de una transición adicional y, por tal razón, representan la distribución de estado estable.

Un subproducto directo de las probabilidades de estado estable es la determinación del número esperado de transiciones antes de que el sistema regrese a un estado j por primera vez. Esto se conoce como **tiempo medio del primer retorno** o **tiempo medio de recurrencia**, y se calcula en una cadena de Markov de n estados como

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j}, j = 1, 2, \dots, n$$

Ejemplo 17.4-1

Para determinar la distribución de probabilidad de estado estable del problema del jardinero con fertilizante (ejemplo 17.1-3), se tiene

$$(\pi_1 \pi_2 \pi_3) = (\pi_1 \pi_2 \pi_3) \begin{pmatrix} .3 & .6 & .1 \\ .1 & .6 & .3 \\ .05 & .4 & .55 \end{pmatrix}$$

o bien,

$$\pi_1 = .3\pi_1 + .1\pi_2 + .05\pi_3$$

$$\pi_2 = .6\pi_1 + .6\pi_2 + .4\pi_3$$

$$\pi_3 = .1\pi_1 + .3\pi_2 + .55\pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

(Cualquiera de las primeras tres ecuaciones es redundante). La solución es $\pi_1 = 0.1017$, $\pi_2 = 0.5254$ y $\pi_3 = 0.3729$ —lo que significa que a la larga la condición de la tierra será buena 10% del tiempo, regular 52% del tiempo y mala 37% del tiempo.

Los tiempos medios del primer retorno se calculan como

$$\mu_{11} = \frac{1}{.1017} = 9.83, \mu_{22} = \frac{1}{.5254} = 1.9, \mu_{33} = \frac{1}{.3729} = 2.68$$

Esto significa que, en promedio, se requerirán aproximadamente 10 temporadas de cultivo para que la tierra regrese a un *buen* estado, 2 temporadas para que regrese al estado *regular* y 3 temporadas para que regrese a un estado *malo*. Los resultados anteriores apuntan hacia un panorama menos promisorio para la condición de la tierra con el uso de fertilizantes propuesto. Un programa más agresivo debería mejorar el panorama. Por ejemplo, considere la siguiente matriz de transición en la que las probabilidades de pasar a un buen estado son más altas que en la matriz previa:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .35 & .6 & .05 \\ .3 & .6 & .1 \\ .25 & .4 & .35 \end{pmatrix}$$

En este caso, $\pi_1 = 0.31$, $\pi_2 = 0.58$ y $\pi_3 = 0.11$, de donde resulta $\mu_{11} = 3.2$, $\mu_{22} = 1.7$ y $\mu_{33} = 8.9$, un cambio reversible del sombrío panorama dado anteriormente.

	A	B	C	D	E	F	G	H
Markov Chains								
2	Step 1:	Number of states =		3	Step 2a:	Initial probabilities:		
3	Step 2:	Click to enter Markov chain			Codes:	1	2	3
4						1	0	0
5	Step 3:	Number of transitions		8	Step 2b:	Input Markov chain:		
6	Step 4:	Click to execute				1	2	3
7						1	0.3	0.6
8	Output Results							
9		Absolute	Steady	Mean return		Output (8-step) transition matrix		
10	State	(8-step)	state	time		1	2	3
11	1	0.10175	0.101695	9.8333254		1	0.10175	0.525514
12	2	0.52551	0.525424	1.9032248		2	0.1017	0.525435
13	3	0.37273	0.372882	2.6818168		3	0.10167	0.525384
14								0.372947

FIGURA 17.1

Hoja de cálculo en Excel para realizar cálculos en cadenas de Markov (archivo *excelMarkovChains.xls*)

Momento de Excel

En la figura 17.1 se aplica la plantilla de Excel general *excelMarkovChains.xls* al ejemplo del jardinero. La plantilla calcula las probabilidades absolutas y de estado estable, y el tiempo de retorno promedio, de n pasos de cualquier cadena de Markov. Los pasos son autoexplicativos. En el paso 2a, usted puede invalidar los códigos de estado preestablecidos (1, 2, 3, ...) por un código de su elección y, luego, hacer clic en el botón ubicado en la celda L2. Los nuevos códigos se transferirán automáticamente a toda la hoja de cálculo cuando ejecute el paso 4.

Ejemplo 17.4-2 (Modelo de costos)

Considere el problema del jardinero con el fertilizante (ejemplo 17.1-3). El jardín necesita dos sacos de fertilizante si la tierra es buena. La cantidad se incrementa en 25% si la tierra es regular, y en 60% si la tierra es mala. El costo del fertilizante es de \$50 por saco. El jardinero estima un rendimiento anual de \$250 si no utiliza fertilizante, y de \$420 si se aplica el fertilizante. ¿Es rentable utilizar fertilizante?

Al aplicar las probabilidades de estado estable del ejemplo 17.4-1, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \text{Costo anual esperado del fertilizante} &= 2 \times \$50 \times \pi_1 + (1.25 \times 2) \times \$50 \times \pi_2 \\
 &\quad + (1.60 \times 2) \times \$50 \times \pi_3 \\
 &= 100 \times .1017 + 125 \times .5254 + 160 \times .3729 \\
 &= \$135.51
 \end{aligned}$$

Incremento diferencial del valor anual del rendimiento = \$420 – \$250 = \$170.
Se recomienda el uso del fertilizante.

17.5 TIEMPO DE PRIMERA VISITA

En la sección 17.4 se utilizaron las probabilidades de estado estable para calcular μ_{jj} , el *tiempo medio del primer retorno* para el estado j . En esta sección lo importante es el **tiempo medio de la primera visita** μ_{ij} , definido como el número esperado de transiciones para llegar por primera vez al estado j

desde el estado i . Los cálculos tienen su origen en la determinación de la probabilidad de al menos un paso del estado i al estado j , definido como $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$, donde $f_{ij}^{(n)}$ es la probabilidad del primer paso del estado i al estado j en n transiciones.

1. Si $f_{ij} < 1$, no es seguro que el sistema pase alguna vez del estado i al estado j y $\mu_{ij} = \infty$.
2. Si $f_{ij} = 1$, la cadena de Markov es ergódica, y el tiempo medio de la primera visita del estado i al estado j se calcula como

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

Una forma más sencilla para calcular μ_{ij} consiste en usar la siguiente idea: un retorno del estado i al estado j puede ocurrir en una transición con probabilidad p_{ij} o puede ocurrir al transitar a través de otro estado k con probabilidad p_{ik} seguido por una transición de k a j , ya sea directamente o a través de otros (múltiples) estados. En el primer caso, la longitud de transición es 1; y en el segundo, la longitud de transición esperada es $1 + \mu_{kj}$. Esto se traduce a la ecuación

$$\mu_{ij} = 1p_{ij} + \sum_{k \neq j} (1 + \mu_{kj})p_{ik} = \sum_k p_{ik} + \sum_{k \neq j} \mu_{kj}p_{ik} = 1 + \sum_{k \neq j} \mu_{kj}p_{ik}$$

o bien, para la cadena de Markov con m estados, se tiene

$$\mu_{ij} - \sum_{k \neq j} \mu_{kj}p_{ik} = 1, i, j = 1, 2, \dots, m$$

Estas ecuaciones de forma larga se reducen notablemente a la siguiente forma matricial, como se demuestra en el ejemplo 17.5-1

$$\|\mu_{ij}\| = (\mathbf{I} - \mathbf{N}_j)^{-1} \mathbf{1}, j \neq i$$

donde

I = Matriz identidad ($m - 1$)

N_j = Matriz de transición **P** sin su j -ésima fila y j -ésima columna del estado destino j

1 = vector columna ($m - 1$) con todos los elementos iguales a 1

La operación matricial $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_j)^{-1} \mathbf{1}$ suma esencialmente las columnas de $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_j)^{-1}$.

Ejemplo 17.5-1

Considere de nuevo la cadena de Markov del jardinero con el fertilizante.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}$$

Para demostrar el cálculo del tiempo de la primera visita a un estado específico desde todos los demás, considere el paso de los estados 2 y 3 (regular y malo) al estado 1 (bueno), lo cual significa que $j = 1$.

Primero se utilizarán las ecuaciones en su forma larga para justificar el uso de la fórmula matricial dada anteriormente:

$$\mu_{21} - .60\mu_{21} - .30\mu_{31} = 1$$

$$\mu_{31} - .40\mu_{21} - .55\mu_{31} = 1$$

Estas ecuaciones se escriben en forma matricial como

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} .60 & .30 \\ .40 & .55 \end{pmatrix} \right] \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o bien,

$$\left[\mathbf{I} - \mathbf{N}_1 \right] \boldsymbol{\mu} = \mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{N}_1 \right]^{-1} \mathbf{1}$$

Continuando con el ejemplo,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{N}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} .4 & -.3 \\ -.4 & .45 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7.50 & 5.00 \\ 6.67 & 6.67 \end{pmatrix}$$

Así que,

$$\begin{pmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.50 & 5.00 \\ 6.67 & 6.67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.50 \\ 13.34 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, en promedio se requerirán 12.5 temporadas para pasar de tierra regular a tierra buena, y 13.34 temporadas para pasar de tierra mala a tierra buena.

Es posible realizar cálculos similares para obtener μ_{12} y μ_{32} a partir de $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_2)$ y μ_{13} y μ_{23} a partir de $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_3)$, como se muestra a continuación.

Momento de Excel

La plantilla *excelFirstPassTime.xls* se utiliza para realizar los cálculos de los tiempos medios de la primera visita. En la figura 17.2 se muestran los cálculos asociados con el ejemplo 17.5-1. El paso 2 de la hoja de cálculo inicializa automáticamente la matriz de transiciones \mathbf{P} en cero según el tamaño dado en el paso 1. En el paso 2a, usted puede anular los códigos de estado preestablecidos en la fila 6 con un código de su elección. El código se transfiere entonces automáticamente a toda la hoja de cálculo. Después de que introduzca las probabilidades de transición, el paso 3 crea la matriz $\mathbf{I} - \mathbf{P}$. El paso 4 se realiza por completo utilizando $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ como el origen para crear $\mathbf{I} - \mathbf{N}_j$ ($j = 1, 2$ y 3). Puede hacerlo copiando toda la $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ y sus códigos de estado y pegándola en la ubicación destino y, luego, utilizando las operaciones adecuadas Cut y Paste (Cortar y Pegar) de Excel para liberar $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ de la fila j y la columna j . Por ejemplo, para crear $\mathbf{I} - \mathbf{N}_2$, primero copie $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ y sus códigos de estado en la ubicación destino seleccionada. A continuación, resalte la columna 3 de la matriz copiada, córtela, y péguela en la columna 2, y así se elimina la columna 2. De manera similar, resalte ahora la fila 3 de la matriz resultante, córtela y luego péguela en la fila 2, y así se elimina la fila 2. La $\mathbf{I} - \mathbf{N}_2$ creada lleva automáticamente su código de estado correcto.

Una vez que se crea $\mathbf{I} - \mathbf{N}_j$, se calcula la inversa $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_j)^{-1}$ en la ubicación destino. Las operaciones asociadas se demuestran invirtiendo $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_1)$ en la figura 17.2:

1. Introduzca la fórmula = MINVERSE(B18:C19) en E18.
2. Resalte E18:F19, el área donde residirá la inversa.
3. Presione F2.
4. Pulse CTRL + SHIFT + ENTER.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1 First Passage Times in Ergodic and Absorbing Markov Chains								
2	Step 1:	Number of states =	3	Step 2a:				
4	Step 2:	Click to enter Markov chain, P		Step 3:	Click to compute I-P			
5 Matrix P:								
6	Codes	1	2	3				
7	1	0.3	0.6	0.1				
8	2	0.1	0.6	0.3				
9	3	0.05	0.4	0.55				
10 Matrix I-P:								
11		1	2	3				
12	1	0.7	-0.6	-0.1				
13	2	-0.1	0.4	-0.3				
14	3	-0.05	-0.4	0.45				
15 Step 4: Perform first passage time calculations below:								
16		I-N		inv(I-N)		Mu		
17	i=1	2	3		2	3		1
18	2	0.4	-0.3		2	7.5	5	12.5
19	3	-0.4	0.45		3	6.666667	6.6666667	13.33333
20								
21	i=2	1	3		1	3		2
22		0.7	-0.1		1	1.451613	0.3225806	1.774194
23		-0.05	0.45		3	0.16129	2.2580645	2.419355
24								
25	i=3	1	2		1	2		3
26	1	0.7	-0.6		1	1.818182	2.7272727	4.545455
27	2	-0.1	0.4		2	0.454545	3.1818182	3.636364

FIGURA 17.2

Cálculos del tiempo de la primera visita para el ejemplo 17.5-1 en una hoja de cálculo de Excel (archivo *excelFirstPassTime.xls*)

Entonces, los valores del tiempo de la primera visita de los estados 2 y 3 al estado 1 se calculan sumando las filas de la inversa; es decir, al introducir =SUM(E18:F18) en H18 para después copiar H18 en H19. Después de crear $\mathbf{I} - \mathbf{N}$ para $i = 2$ e $i = 3$, los cálculos restantes se realizan de forma automática copiando E18:F19 en E22:F23 y E26:F27, y copiando H18:H19 en H22:H23 y H26:H27.

17.6 ANÁLISIS DE LOS ESTADOS ABSORBENTES

En el problema del jardinero sin fertilizante, la matriz de transición se da como

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .2 & .5 & .3 \\ 0 & .5 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los estados 1 y 2 (condiciones de tierra buena y regular) son *transitorios*, y el estado 3 (condición de tierra mala) es *absorbente*, ya que una vez que llega a ese estado el sistema permanecerá ahí por tiempo indefinido. Una cadena de Markov puede tener más de un estado absorbente. Por ejemplo,

un empleado permanecerá con la misma compañía hasta su retiro o renunciar antes (dos estados absorbentes). En estos tipos de cadenas, se tiene interés en determinar la probabilidad de llegar a la absorción y el número esperado de transiciones para llegar a ella, dado que el sistema se inicia en un estado transitorio específico. Por ejemplo, en la cadena de Markov antes dada, si actualmente la tierra es buena, importará determinar el promedio de temporadas de cultivo hasta que la tierra se vuelva mala, e igualmente la probabilidad asociada con esta transición.

El análisis de las cadenas de Markov con estados absorbentes puede realizarse de forma conveniente con matrices. Primero, la cadena de Markov se particiona de la siguiente manera:

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{N} & \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right)$$

El arreglo requiere que todos los estados absorbentes ocupen la esquina sudeste de la nueva matriz. Por ejemplo, considere la siguiente matriz de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left(\begin{matrix} .2 & .3 & .4 & .1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ .5 & .3 & 0 & .2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

La matriz \mathbf{P} puede reacomodarse y particionarse como

$$\mathbf{P}^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} & \left(\begin{matrix} .2 & .4 & .3 & .1 \\ .5 & 0 & .3 & .2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

En este caso, se tiene

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} .2 & .4 \\ .5 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} .3 & .1 \\ .3 & .2 \end{pmatrix}, \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dada la definición de \mathbf{A} y \mathbf{N} y el vector columna unitario $\mathbf{1}$ (donde todos los elementos son 1), se demuestra que

Tiempo esperado en el estado j iniciado en el estado i = elemento (i,j) de $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$

Tiempo esperado hasta la absorción = $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}\mathbf{1}$

Probabilidad de absorción = $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}\mathbf{A}$

Ejemplo 17.6-1¹

Un producto se procesa de manera secuencial en dos máquinas, I y II. La inspección se realiza después de que una unidad del producto se completa en cualquiera de las máquinas. Hay 5% de probabilidades de que

¹ Adaptado de J. Shamblin y G. Stevens, *Operations Research: A Fundamental Approach*, McGraw-Hill, Nueva York, capítulo 4, 1974.

una unidad sea desechada antes de inspeccionarla. Después de la inspección, hay 3% de probabilidades de que la unidad sea desechada, y 7% de probabilidades de ser devuelta a la misma máquina para trabajarla de nuevo. De lo contrario, es buena una unidad que pasa la inspección en ambas máquinas.

- (a) Para una pieza que inicia en la máquina I, determine el promedio de visitas a cada estado.
- (b) Si un lote de 1000 unidades inicia en la máquina I, determine el promedio de unidades buenas completadas.

Para la cadena de Markov, el proceso de producción tiene 6 estados: iniciar en I (s_1), inspeccionar después de I (i_1), iniciar en II (s_2), inspeccionar después de II (i_2), desechar después de la inspección I o II (J), y buena después de II (G). Los estados J y G son estados absorbentes. La matriz de transiciones se da como

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|ccccc|cc} & s_1 & i_1 & s_2 & i_2 & & J & G \\ \hline s_1 & 0 & .95 & 0 & 0 & & .05 & 0 \\ i_1 & .07 & 0 & .9 & 0 & & .03 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 0 & .95 & & .05 & 0 \\ i_2 & 0 & 0 & .07 & 0 & & .03 & .9 \\ \hline J & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ G & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{array}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c|cccc} & s_1 & i_1 & s_2 & i_2 \\ \hline s_1 & 0 & .95 & 0 & 0 \\ i_1 & .07 & 0 & .9 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 0 & .95 \\ i_2 & 0 & 0 & .07 & 0 \end{array}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} .05 & 0 \\ .03 & 0 \\ .05 & 0 \\ .03 & .9 \end{pmatrix}$$

Si se emplean los cálculos de la hoja en *excelExl7.6-1.xls* (vea el *Momento de Excel* después del ejemplo 17.5-1), se obtiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -.95 & 0 & 0 \\ -.07 & 1 & -.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.95 \\ 0 & 0 & -.07 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.07 & 1.02 & .98 & 0.93 \\ 0.07 & 1.07 & 1.03 & 0.98 \\ 0 & 0 & 1.07 & 1.02 \\ 0 & 0 & 0.07 & 1.07 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1.07 & 1.02 & .98 & 0.93 \\ 0.07 & 1.07 & 1.03 & 0.98 \\ 0 & 0 & 1.07 & 1.02 \\ 0 & 0 & 0.07 & 1.07 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .05 & 0 \\ .03 & 0 \\ .05 & 0 \\ .03 & .9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .16 & .84 \\ .12 & .88 \\ .08 & .92 \\ .04 & .96 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La fila superior de $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$ muestra que, en promedio, la máquina I es visitada 1.07 veces, la inspección I es visitada 1.02 veces, la máquina II es visitada .98 veces, y la inspección II es visitada .93 veces. La razón por la que el número de visitas en la máquina I y la inspección I es mayor que 1 son el retrabajo y la reinspección. Por otro lado, los valores correspondientes para la máquina II son menores que 1 porque algunas piezas se desechan antes de que lleguen a la máquina II. En realidad, en condiciones perfectas (ninguna pieza se desecha ni retrabaja), la matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$ demostrará que cada estación se visita exactamente una vez (compruébelo asignando una probabilidad de transición de 1 a todos los estados). Desde luego, la permanencia en cada estado podría diferir. Por ejemplo, si los tiempos de procesamiento en las máquinas I y II son de 20 y 30 minutos, y si los tiempos de

inspección en I y II son de 5 y 7 minutos, entonces una pieza que inicia en la máquina I será procesada (es decir, desecharada o terminada) en $1.07 \times 20 + 1.02 \times 5 + .98 \times 30 + .93 \times 7 = 62.41$ minutos.

Para determinar la cantidad de piezas terminadas en un lote inicial de 1000 piezas, es posible ver en la fila superior de $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}\mathbf{A}$ que

Probabilidad de que una pieza sea desecharada = .16

Probabilidad de que una pieza se complete = .84

lo cual significa que, en cada lote inicial de 1000 piezas, se completarán $1000 \times .84 = 840$ piezas.

BIBLIOGRAFÍA

- Bini, D., E. Harold y J. Palacios, *Numerical Methods for Structured Markov Chains*, Oxford University Press, Nueva York, 2005.
- Cyert, R., H. Davidson y G. Thompson, "Estimation of the Allowance for Doubtful Accounts by Markov Chains," *Management Science*, vol. 8, núm. 4, pp. 287-303, 1963.
- Grimmet, G. y D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, 2a. ed., Oxford University Press, Oxford, Inglaterra, 1992.
- Pfifer, P. y R. Cassaway, "Modeling Customer Relations with Markov Chains," *Journal of Interactive Marketing*, vol. 14, núm. 2, pp. 43-55, 2000.
- Pliskin, J. y E. Tell, "Using Dialysis Need-Projection Model for Health Planning in Massachusetts," *Interfaces*, vol. 11, núm. 6, pp. 84-99, 1981.
- Stewart, W., *Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.
- Tijms, H., *A First Course in Stochastic Models*, Wiley, Nueva York, 2003.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados
17.1	17-1 a 17-4
17.2	17-5 a 17-9
17.3	17-10 a 17-12
17.4	17-13 a 17-28
17.5	17-29 a 17-33
17.6	17-34 a 17-45

- 17-1.** Un profesor de ingeniería adquiere una computadora nueva cada dos años. El profesor puede elegir de entre tres modelos: M_1 , M_2 y M_3 . Si el modelo actual es M_1 , la siguiente computadora puede ser M_2 con probabilidad .2, o M_3 con probabilidad .15. Si el modelo actual es M_2 , las probabilidades de cambiar a M_1 y M_3 son .6 y .25, respectivamente. Pero si el modelo actual es M_3 , entonces las probabilidades de comprar los modelos M_1 y M_2 son .5 y .1, respectivamente. Represente la situación como una cadena de Markov.
- *17-2.** Una patrulla policiaca vigila un vecindario conocido por sus actividades pandilleriles. Durante un patrullaje hay 60% de probabilidades de llegar a tiempo al lugar donde se requiere la ayuda; si no sucede algo, continuará el patrullaje regular. Despues de recibir una llamada, hay 10% de probabilidades

de cancelación (en cuyo caso se reanuda el patrullaje normal), y 30% de probabilidad de que la unidad ya esté respondiendo a una llamada anterior. Cuando la patrulla llega a la escena, hay 10% de probabilidades de que los instigadores se hayan fugado (en cuyo caso reanuda su patrullaje), y 40% de probabilidades de que se haga una aprehensión de inmediato. De otro modo, los oficiales rastrearán el área. Si ocurre una aprehensión, hay 60% de probabilidades de trasladar a los sospechosos a la estación de policía, de lo contrario son liberados y la unidad regresa a patrullar. Exprese las actividades probabilísticas de la patrulla en la forma de una matriz de transición.

- 17-3.** *Cyert y colaboradores (1963).* El Banco 1 ofrece préstamos que se liquidan al vencimiento o se retrasan. Si el pago sobre un préstamo se retrasa más de cuatro trimestres (1 año), el Banco 1 considera el préstamo como una deuda incobrable y la cancela. La siguiente tabla presenta una muestra de la experiencia anterior del Banco 1 con los préstamos.

Cantidad prestada	Trimestres de retraso	Historia de pagos
\$10,000	0	\$2000 pagados, \$3000 retrasados un trimestre, \$3000 retrasados 2 trimestres, y el resto retrasados 3 trimestres.
\$25,000	1	\$4000 pagados, \$12,000 retrasados un trimestre, \$6000 retrasados dos trimestres, y el resto retrasado 3 trimestres.
\$50,000	2	\$7500 pagados, \$15,000 retrasados un trimestre, y el resto retrasados 2 trimestres.
\$50,000	3	\$42,000 pagados, y el resto retrasado un trimestre.
\$100,000	4	50,000 pagados.

Exprese la situación del préstamo del Banco 1 como una cadena de Markov.

- 17-4.** *Pliskin y Tell (1981).* Los pacientes que sufren de falla de riñón pueden conseguir un trasplante o someterse a diálisis periódicas. Durante 1 año cualquiera, 30% se somete a trasplantes cadávericos y 10% recibe riñones de donadores vivos. En el año posterior a un trasplante, 30% de los trasplantes cadávericos y 15% de los receptores de donadores vivos regresan a la diálisis. Los porcentajes de muertes entre ambos grupos son 20 y 10%, respectivamente. De aquellos que están en el grupo de diálisis, 10% mueren, y de quienes sobreviven más de un año después de un trasplante, 5% mueren y 5% regresan a la diálisis. Represente la situación como una cadena de Markov.

- 17-5.** Considere el problema 17-1. Determine la probabilidad de que el profesor compre el modelo actual en 4 años.
- *17-6.** Considere el problema 17-2. Si la patrulla se encuentra en este momento en la escena de una llamada, determine la probabilidad de que haga una aprehensión en dos patrullajes.
- 17-7.** Considere el problema 17-3. Suponga que actualmente el Banco 1 tiene préstamos pendientes que ascienden a \$500,000. De éstos, \$100,000 se acaban de pagar, \$50,000 están retrasados un trimestre, \$150,000 están retrasados dos trimestres, \$100,000 están retrasados tres trimestres, y el resto están retrasados más de cuatro trimestres. ¿Cuál sería la situación de estos préstamos después de dos ciclos de préstamos?
- 17-8.** Considere el problema 17-4.
- (a) Para un paciente al que se está tratando con diálisis, ¿cuál es la probabilidad de recibir un trasplante en 2 años?
 - (b) Para un paciente que haya sobrevivido más de un año, ¿cuál es la probabilidad de que sobreviva cuatro años más?
- 17-9.** Un juego de lanzamiento de dados utiliza una cuadrícula de cuatro casillas. Las casillas están designadas en sentido horario como *A*, *B*, *C* y *D* con retribuciones monetarias de \$4, -\$2, -\$6 y \$9, respectivamente. Comenzando en la casilla *A*, se lanza el dado para determinar la siguiente casilla a la que se hará el

movimiento en sentido horario. Por ejemplo, si el dado muestra 2, se hace un movimiento a la casilla C . El juego se repite utilizando la última casilla como punto inicial.

(a) Exprese el problema como una cadena de Markov.

(b) Determine la ganancia o pérdida esperada después de lanzar el dado 5 veces.

- 17-10.** Clasifique los estados de las siguientes cadenas de Markov. Si un estado es periódico, determine su periodo:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .7 & .3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & .6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & 8 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} .1 & 0 & .9 \\ .7 & .3 & 0 \\ .2 & .7 & .1 \end{pmatrix}$

- 17-11.** Un juego implica cuatro bolas y dos urnas. Una bola en cualquier urna tiene una probabilidad 50-50 de transferirse a la otra urna. Represente el juego como una cadena de Markov, y demuestre que sus estados son periódicos con periodo $t = 2$.

- 17-12.** Un museo tiene seis salas de tamaños iguales dispuestas en forma de una cuadrícula con tres filas y dos columnas. Cada muro interior tiene una puerta que conecta con las salas adyacentes. Los guardias se desplazan por las salas a través de las puertas interiores. Represente los movimientos de cada guardia en el museo como una cadena de Markov, y demuestre que sus estados son periódicos con periodo $t = 2$.

- ***17-13.** En un día soleado, MiniGolf puede tener ingresos de \$2000. Si el día está nublado, los ingresos se reducen 20%. Un día lluvioso reducirá los ingresos en 80%. Si hoy está soleado hay 80% de probabilidades de que mañana esté soleado sin amenaza de lluvia. Si está nublado, hay 20% de probabilidades de que mañana llueva, y 30% de probabilidades de que esté soleado. La lluvia seguirá hasta el día siguiente con una probabilidad de .8, pero con 10% de probabilidades de que esté soleado.

(a) Determine los ingresos diarios esperados para MiniGolf.

(b) Determine el promedio de días que no estarán soleados.

- 17-14.** A Joe le encanta salir a comer a los restaurantes del área. Sus comidas favoritas son la mexicana, la italiana, la china y la tailandesa. En promedio, Joe paga \$10.00 por una comida mexicana, \$15.00 por una comida italiana, \$9.00 por una comida china y \$11.00 por una comida tailandesa. Los hábitos alimenticios

de Joe son predecibles: Hay 70% de probabilidad de que la comida de hoy sea una repetición de la de ayer y probabilidades iguales de que cambie a una de las tres restantes.

- (a) ¿Cuánto paga Joe en promedio por su comida diaria?
- (b) ¿Con qué frecuencia consume Joe comida mexicana?

17-15. Algunos exconvictos pasan el resto de su vida libres, en juicio, en la cárcel o en libertad condicional. Al inicio de cada año, las estadísticas muestran que hay 50% de probabilidades de que un exconvicto libre cometiera un nuevo delito y de que sea procesado. El juez puede enviar al exconvicto a la cárcel con una probabilidad de .6, u otorgarle la libertad condicional con probabilidad de .4. Una vez que están en la cárcel, 10% de los exconvictos serán puestos en libertad por buena conducta. De quienes están en libertad condicional, 10% cometen nuevos delitos y son arraigados para ser procesados, 50% regresarán para cumplir su sentencia por violar las órdenes de libertad condicional, y 10% serán puestos en libertad por falta de pruebas. Los contribuyentes solventan el costo asociado con el castigo de los exconvictos. Se estima que un juicio costará aproximadamente \$5000, una sentencia de cárcel promedio costará \$20,000 y un periodo de libertad condicional promedio costará \$2000.

- (a) Determine el costo esperado por exconvicto.
- (b) ¿Con qué frecuencia regresa un exconvicto a la cárcel? ¿Con qué frecuencia va a juicio? ¿Con qué frecuencia alcanza su libertad?

17-16. Una tienda vende un artículo especial cuya demanda diaria puede describirse mediante la siguiente fdp:

Demanda diaria, D	0	1	2	3
$P\{D\}$.1	.3	.4	.2

La tienda, que utiliza revisión diaria, compara dos políticas para la colocación de pedidos: (1) Pedir hasta 3 unidades si el nivel de existencias es menor que 2; de lo contrario, no pedir. (2) Pedir 3 unidades si el nivel de inventario es cero; en caso contrario, no pedir. El costo fijo por ordenar por envío es de \$300, y el costo de retener las unidades excedentes por unidad por día es de \$3. Se espera una entrega inmediata.

- (a) ¿Qué política debería adoptar la tienda para minimizar el costo diario esperado total de pedir y retener?
- (b) Para las dos políticas, compare el promedio de días entre agotamientos sucesivos del inventario.

***17-17.** Hay tres categorías de filtros del impuesto sobre la renta en Estados Unidos: los que nunca evaden impuestos, quienes a veces lo hacen, y aquellos que siempre lo hacen. Un examen de las declaraciones de impuestos auditadas de un año al siguiente muestra que, de los que no evadieron impuestos el año pasado, 95% continuarán en la misma categoría este año, 4% se moverá a la categoría "a veces"; y el resto se moverá a la categoría "siempre". Para quienes a veces evaden impuestos, 6% se moverá a "nunca"; 90% permanecerá igual y 4% se moverá a "siempre". Por lo que se refiere a los evasores de "siempre", los porcentajes respectivos son 0, 10 y 90%.

- (a) Exprese el problema como una cadena de Markov.
- (b) A la larga, ¿cuáles serían los porcentajes en las categorías de evasión de impuestos de "nunca", "a veces" y "siempre"?
- (c) Las estadísticas muestran que un contribuyente que "a veces" evade impuestos que suman aproximadamente \$5000 por declaración y en la categoría "siempre" suman aproximadamente \$12,000. Si se supone que la población de contribuyentes es de 70 millones y la tasa del impuesto sobre la renta promedio es 12%, determine la reducción anual en los impuestos recaudados debido a la evasión.

17-18. Warehouzer posee un bosque renovable para plantar pinos. Los árboles caen dentro de una de cuatro categorías según su edad: bebés (0 a 5 años); jóvenes (5 a 10 años); maduros (11 a 15 años); y viejos (más

de 15 años). Diez por ciento de los árboles bebés y jóvenes muere antes de llegar al siguiente grupo de edad. Por lo que se refiere a los árboles maduros y viejos, 50% se talan y sólo 5% mueren. Debido a la naturaleza de renovación de la operación, todos los árboles talados y muertos son reemplazados con árboles nuevos (bebés) al final del siguiente ciclo de 5 años.

- (a) Exprese la dinámica del bosque como una cadena de Markov.
 - (b) Si el bosque puede contener un total de 500,000 árboles, determine la composición del bosque a largo plazo.
 - (c) Si un árbol nuevo se planta a un costo de \$1 por árbol y uno talado tiene un valor de \$20 en el mercado, determine el ingreso anual promedio derivado de la operación del bosque.
- 17-19.** La dinámica de la población se ve afectada por el movimiento continuo de personas que buscan una mejor calidad de vida o un mejor empleo. La ciudad de Mobile tiene una población citadina interna, una población suburbana y una población rural circundante. El censo levantado a intervalos de 10 años muestra que 10% de la población rural se traslada a los suburbios y 5% al interior de la ciudad. En cuanto a la población suburbana, 30% se traslada a las áreas rurales y 15% al interior de la ciudad. La población del interior de la ciudad no se cambiaría a los suburbios, pero 20% sí se mudaría a la tranquila vida rural.
- (a) Exprese la dinámica de la población como una cadena de Markov.
 - (b) Si el área metropolitana de Mobile en la actualidad incluye a 20,000 residentes rurales, 100,000 suburbanos y 30,000 habitantes citadinos, ¿cuál será la distribución de la población en 10 años? ¿Y en 20 años?
 - (c) Determine el panorama de la población de Mobile a largo plazo.
- 17-20.** Una agencia de renta de automóviles tiene oficinas en Phoenix, Denver, Chicago y Atlanta. La agencia permite rentas en una y en dos direcciones, de modo que los automóviles rentados en un lugar pueden terminar en otro. Las estadísticas muestran que al final de cada semana 70% de todas las rentas son en dos direcciones. En cuanto a las rentas en una dirección: Desde Phoenix, 20% van a Denver, 60% a Chicago y el resto va a Atlanta; desde Denver, 40% va a Atlanta y 60% a Chicago; desde Chicago, 50% va a Atlanta y el resto a Denver; y desde Atlanta, 80% va a Chicago, 10% a Denver, y 10% a Phoenix.
- (a) Exprese la situación como una cadena de Markov.
 - (b) Si la agencia inicia la semana con 100 autos en cada lugar, ¿cómo será la distribución en dos semanas?
 - (c) Si cada lugar está diseñado para manejar un máximo de 110 autos, ¿habría a la larga un problema de disponibilidad de espacio en cualquiera de los lugares?
 - (d) Determine el promedio de semanas que transcurren antes de que un auto regrese a su lugar de origen.
- 17-21.** Una librería repone las existencias de un libro popular a nivel de 100 ejemplares al inicio de cada día. Los datos de los últimos 30 días proporcionan las siguientes posiciones de inventario al final del día: 1, 2, 0, 3, 2, 1, 0, 0, 3, 0, 1, 1, 3, 2, 3, 3, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 3, 0, 0, 3, 2, 1, 2, 2.
- (a) Represente el inventario diario como una cadena de Markov.
 - (b) Determine la probabilidad de estado estable de que la librería se quede sin libros en cualquier día.
 - (c) Determine el inventario diario esperado.
 - (d) Determine el promedio de días entre inventarios cero sucesivos.

- 17-22.** En el problema 17-21, suponga que la demanda diaria puede exceder la oferta, lo cual da lugar a desabastos (inventario negativo). El nivel del inventario al final del día durante los 30 días pasados se da como: 1, 2, 0, -2, 2, 2, -1, -1, 3, 0, 0, 1, -1, -2, 3, 3, -2, -1, 0, 2, 0, -1, 3, 0, 0, 3, -1, 1, 2, -2.
- (a) Exprese la situación como una cadena de Markov.
 - (b) Determine la probabilidad a largo plazo de un excedente de inventario en un día.
 - (c) Calcule la probabilidad a largo plazo de un desabasto de inventario en un día.
 - (d) Determine la probabilidad a largo plazo de que la oferta diaria satisfaga la demanda diaria con exactitud.
 - (e) Si el costo de retención por libro excedente (al final del día) es de \$.15 por día y el costo de penalización por libro faltante es de \$4.00 por día, determine el costo del inventario esperado por día.
- 17-23.** Una tienda inicia una semana con al menos 3 PC. La demanda por semana se estima en 0 con probabilidad de .15, 1 con probabilidad de .2, 2 con probabilidad de .35, 3 con probabilidad de .25, y 4 con probabilidad de .05. La demanda insatisfecha se deja en rezago. La política de la tienda es colocar un pedido para entregarse al inicio de la siguiente semana siempre que el nivel del inventario se reduzca por debajo de 3 PC. El nuevo reabastecimiento siempre regresa las existencias a 5 PC.
- (a) Exprese la situación como una cadena de Markov.
 - (b) Suponga que la semana se inicia con 4 PC. Determine la probabilidad de que un pedido se coloque al final de dos semanas.
 - (c) Determine la probabilidad a largo plazo de que no se coloque ningún pedido en cualquier semana.
 - (d) Si el costo fijo de colocar un pedido es de \$200, el costo de retención por PC por semana es de \$5, y el costo de penalización por computadora faltante es de \$20, determine el costo de inventario esperado por semana.
- 17-24.** Resuelva el problema 17-23, suponiendo que el tamaño del pedido, cuando se coloca, es exactamente de 5 PC.
- 17-25.** En el problema 17-24, suponga que la demanda de las PC es de 0, 1, 2, 3, 4 o 5 con iguales probabilidades. Suponga además que la demanda no satisfecha no se deja en rezago, pero que aún se incurre en un costo de penalización por desabasto.
- (a) Exprese la situación como una cadena de Markov.
 - (b) Determine la probabilidad a largo plazo de que ocurra un desabasto.
 - (c) Si el costo fijo de colocación de un pedido es de \$200, el costo de retención por computadora por semana es de \$5, y el costo de penalización por desabasto de PC por semana es de \$20, determine los costos de pedido e inventario esperados por semana.
- 17-26.** El gobierno federal trata de promover las actividades de las pequeñas empresas otorgando concesiones anuales para proyectos. Todas las licitaciones son competitivas, pero la probabilidad de recibir una concesión es máxima si el propietario no ha recibido alguna durante los últimos tres años, y mínima si se dieron otorgamientos en cada uno de los últimos tres años. De manera específica, la probabilidad de obtener una concesión si no se ha recibido ninguna en los últimos tres años es de .9. Se reduce a .8 si se recibió una, a .7 si se recibieron dos, y de sólo .5 si se recibieron tres.
- (a) Exprese la situación como una cadena de Markov.
 - (b) Determine la cantidad esperada de otorgamientos por propietario por año.
- 17-27.** Jim Bob ha recibido muchas multas por infracciones al reglamento de tránsito. Por desgracia para Jim Bob, la tecnología moderna puede seguir el rastro de sus multas anteriores. En cuanto acumula 4 infracciones, su licencia de manejo es revocada hasta que completa una nueva clase de educación vial, en cuyo caso comienza con un historial limpio. Jim Bob es más imprudente inmediatamente después de completar la clase de educación vial, e invariablemente la policía lo detiene con 50% de probabilidades de ser

multado. Después de cada nueva multa, trata de ser más cuidadoso, lo cual reduce la probabilidad de una multa en .1.

- (a) Exprese el problema de Jim Bob como una cadena de Markov.
 - (b) ¿Cuál es la cantidad promedio de veces que Jim Bob es detenido por la policía antes de que su licencia sea revocada de nuevo?
 - (c) ¿Cuál es la probabilidad de que Jim Bob pierda su licencia?
 - (d) Si cada multa es de \$100, ¿cuánto, en promedio, paga Jim Bob entre suspensiones sucesivas de su licencia?
- 17-28.** El clima diario en Fayetteville, Arkansas, puede ser nublado (C), soleado (S), lluvioso (R), o ventoso (W). Los registros a lo largo de los últimos 90 días son CCSWRWRSSCCRCSSWRCCCCCWSSWRWRCCSWSWRWWCRRCR RRRCWSSWRWCCSWRRWSSS. Con base en los registros, use una cadena de Markov para determinar la probabilidad de que un día típico en Fayetteville pueda estar nublado, soleado, lluvioso o ventoso.
- *17-29.** Un laberinto para ratones se compone de las rutas mostradas en la figura 17.3. La intersección 1 es la entrada al laberinto, y la intersección 5 es la salida. En cualquier intersección, el ratón tiene probabilidades iguales de seleccionar cualquiera de las rutas disponibles. Cuando el ratón llega a la intersección 5, el experimento se repite volviendo a entrar al laberinto por la intersección 1.
- (a) Exprese el laberinto como una cadena de Markov.
 - (b) Determine la probabilidad de que, comenzando en la intersección 1, el ratón llegue a la salida después de tres intentos.
 - (c) Determine la probabilidad a largo plazo de que el ratón localice la intersección de salida.
 - (d) Determine la cantidad promedio de intentos necesarios para llegar al punto de salida desde la intersección 1.
- 17-30.** En el problema 17-29, por intuición, si se agregan más opciones (rutas) al laberinto, ¿se incrementará o reducirá el promedio de intentos necesarios para llegar al punto de salida? Demuestre la respuesta agregando una ruta entre las intersecciones 3 y 4.
- 17-31.** Jim y Joe comienzan un juego con cinco fichas, tres para Jim y dos para Joe. Se lanza una moneda, y si el resultado es cara, Jim da a Joe una ficha, de lo contrario Jim obtiene una ficha de Joe. El juego termina cuando Jim o Joe tienen todas las fichas. En este punto, hay 30% de probabilidades de que Jim y Joe continúen con el juego, comenzando de nuevo con tres fichas para Jim y dos para Joe.
- (a) Represente el juego como una cadena de Markov.
 - (b) Determine la probabilidad de que Joe gane con tres lanzamientos de la moneda. De que Jim gane con tres lanzamientos de la moneda.

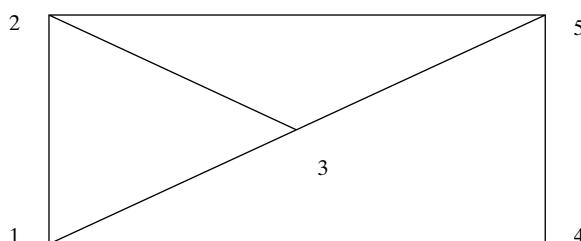


FIGURA 17.3

Laberinto para ratones del problema 17-29

- (c) Determine la probabilidad de que un juego termine a favor de Jim. Y a favor de Joe.
- (d) Determine la cantidad promedio de lanzamientos de moneda necesarios antes de que Jim gane. Y de que Joe gane.
- 17-32.** Un jardinero aficionado con capacitación en botánica está buscando la forma de fecundar por polinización cruzada flores de lis rosas con flores de lis rojas, naranjas y blancas. Experimentos anuales muestran que las rosas pueden producir 60% rosas y 40% blancas; las rojas pueden producir 40% rojas, 50% rosas y 10% naranjas; las naranjas pueden producir 25% naranjas, 50% rosas y 25% blancas; y las blancas pueden producir 50% rosas y 50% blancas.
- (a) Exprese la situación del jardinero como una cadena de Markov.
- (b) Si el jardinero inició la fecundación por polinización cruzada con números iguales de cada tipo de flores de lis, ¿cómo sería la distribución después de 5 años? Y a largo plazo?
- (c) Determine la cantidad promedio de años que se requerirían para que una flor de lis roja produzca una flor de lis blanca.
- *17-33.** Los clientes pueden ser leales a marcas de productos, pero pueden ser persuadidos mediante publicidad y mercadotecnia inteligentes para que cambien de marcas. Considere el caso de tres marcas: A, B y C. Los clientes que se “mantienen” leales a una marca dada se estiman en 75%, con un margen de sólo 25% para que sus competidores hagan un cambio. Los competidores lanzan sus campañas publicitarias una vez al año. Para los clientes de la marca A, las probabilidades de que cambien a las marcas B y C son de .1 y .15, respectivamente. Los clientes de la marca B son proclives a cambiar a las marcas A y C, con las siguientes probabilidades respectivas: .2 y .05. Los clientes de la marca C pueden cambiar a las marcas A y B con probabilidades iguales.
- (a) Exprese la situación como una cadena de Markov.
- (b) A largo plazo, ¿qué participación del mercado dominará cada marca?
- (c) ¿Cuánto tiempo en promedio le llevará a un cliente de la marca A cambiar a la marca B? Y a la marca C?
- 17-34.** En el ejemplo 17.6-1, suponga que el costo de la mano de obra para las máquinas I y II es de \$20 por hora y que para la inspección es de sólo \$18 por hora. Suponga además que se requieren 30 minutos y 20 minutos para procesar una pieza en las máquinas I y II, respectivamente. El tiempo de inspección en cada una de las dos estaciones es de 10 minutos. Determine el costo de la mano de obra asociado con una pieza (buena) terminada.
- *17-35.** Cuando pido prestado un libro de la biblioteca de la ciudad, trato de devolverlo después de una semana. Dependiendo del tamaño del libro y de mi tiempo libre, hay 30% de probabilidades de que lo conserve otra semana. Si me lo quedara dos semanas, hay 10% de probabilidades que me quede con él una semana más. En ningún caso me lo quedo más de tres semanas.
- (a) Exprese la situación como una cadena de Markov.
- (b) Determine la cantidad promedio de semanas antes de devolver el libro a la biblioteca.
- 17-36.** En el Casino del Río, un jugador puede apostar en dólares enteros. Cada apuesta gana \$1 con probabilidad de .4 o pierde \$1 con probabilidad de .6. Comenzando con tres dólares, el apostador se retirará si pierde todo el dinero o bien lo duplica.
- (a) Exprese el problema como una cadena de Markov.
- (b) Determine la cantidad promedio de apuestas hasta que el juego termine.
- (c) Calcule la probabilidad de terminar el juego con \$6. Y de perder los \$3.
- 17-37.** Jim debe avanzar cinco años para completar su doctorado en la Universidad ABC. Sin embargo, le agrada la vida de estudiante y no tiene prisa por obtener su grado. En cualquier año académico, hay 50% de probabilidades de que pueda tomarse un año sabático y 50% de probabilidad de dedicar tiempo completo a su doctorado. Después de completar tres años académicos, hay 30% de probabilidades de que Jim pueda dar “marcha atrás” y simplemente obtenga una maestría; 20% de probabilidades de que se

tome libre el siguiente año, pero continúe con el programa de doctorado; y 50% de probabilidades de que asista a la escuela a tiempo completo en busca de su doctorado.

- (a) Exprese la situación de Jim como una cadena de Markov.
- (b) Determine la cantidad esperada de años académicos antes de que termine la vida de estudiante de Jim.
- (c) Calcule la probabilidad de que Jim termine su ciclo académico con sólo una maestría.
- (d) Si la beca de Jim desembolsa \$15,000 anuales (pero sólo cuando asiste a la escuela), ¿cuánto deberá pagar antes de que obtenga un grado?

17-38. Un empleado que ahora tiene 55 años de edad planea jubilarse a la edad de 62, pero no ha descartado la posibilidad de hacerlo antes. Al final de cada año pondera sus opciones (y actitud respecto del trabajo). La probabilidad de renunciar después de un año es de sólo .1, pero parece incrementarse en aproximadamente .01 con cada año más que pasa.

- (a) Exprese el problema como una cadena de Markov.
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el empleado permanezca con la compañía hasta que planee su jubilación a los 62 años?
- (c) A la edad de 57 años, ¿cuál es la probabilidad de que el empleado renuncie?
- (d) A la edad de 58 años, ¿cuál es la cantidad esperada de años antes de que el empleado quede fuera de la nómina?

17-39. En el problema 17-3,

- (a) Determine la cantidad esperada de trimestres hasta que una deuda se liquide o se pierda como deuda incobrable.
- (b) Determine la probabilidad de que un nuevo préstamo se cancele como deuda incobrable. Y de que se liquide en su totalidad.
- (c) Si un préstamo tiene 6 meses de antigüedad, determine el número de trimestres hasta que se resuelva su estado.

17-40. En un torneo individual de tenis, Andre y John están jugando el partido por el campeonato. El partido se gana cuando uno de los jugadores gana tres de cinco sets. Las estadísticas muestran que hay 60% de probabilidades de que Andre gane cualquier set.

- (a) Exprese el partido como una cadena de Markov.
- (b) En promedio, ¿cuánto durará el partido, y cuál es la probabilidad de que Andre gane el campeonato?
- (c) Si el marcador es 1 set a 2 a favor de John, ¿cuál es la probabilidad de que gane Andre?
- (d) En el inciso (c), determine la cantidad promedio de sets hasta que el partido termine e interprete el resultado.

***17-41.** Los estudiantes en la U de A han expresado su disgusto por el ritmo rápido al cual el departamento de matemáticas está impartiendo el curso de Cálculo I de un semestre. Para afrontar este problema, el departamento de matemáticas ahora ofrece Cálculo I en 4 módulos. Los estudiantes establecerán su ritmo individual para cada módulo y, cuando estén listos, harán un examen que los llevará al siguiente módulo. Los exámenes se aplican una vez cada 4 semanas, de modo que un estudiante diligente pueda completar los 4 módulos en un semestre. Después de un par de años con este programa, 20% de los estudiantes no completa el primer módulo a tiempo. Los porcentajes para los módulos 2 a 4 fueron de 22, 25 y 30%, respectivamente.

- (a) Exprese el problema como una cadena de Markov.
- (b) En promedio, ¿un estudiante que inició el módulo I al principio del semestre actual será capaz de llevar Cálculo II el siguiente semestre? (Cálculo I es un prerequisito para Cálculo II).

- (c)** ¿Un estudiante que haya completado sólo un módulo el semestre anterior será capaz de terminar el Cálculo I al final del semestre actual?
- (d)** ¿Recomienda aplicar la idea del módulo a otras materias básicas? Explique su respuesta.
- 17-42.** En la U de A, la promoción de profesor asistente a profesor asociado requiere el equivalente de cinco puntos (años) de desempeño aceptable. Se realizan revisiones de desempeño una vez al año, y el candidato recibe una calificación promedio, una buena calificación o una calificación excelente. Una calificación promedio equivale a estar a prueba y el candidato no gana puntos hacia la promoción. Una buena calificación equivale a ganar un punto, y una calificación excelente suma dos puntos. Las estadísticas muestran que en cualquier año 10% de los candidatos obtienen una calificación promedio y 70% una buena calificación; el resto obtiene una calificación excelente.
- (a)** Exprese el problema como una cadena de Markov.
- (b)** Determine el promedio de años hasta que se promueva un nuevo profesor asistente.
- 17-43.** *Pfifer y Carraway (2000).* Una compañía busca sus clientes mediante publicidad enviada por correo. Durante el primer año, la probabilidad de que un cliente realice una compra es de .5, la cual se reduce a .4 en el año 2, a .3 en el año 3 y a .2 en el año 4. Si no realiza ninguna compra en cuatro años consecutivos, el cliente se borra de la lista de correo. Si hace una compra la cuenta regresa a cero.
- (a)** Exprese la situación como una cadena de Markov.
- (b)** Determine el número esperado de años que un cliente nuevo permanecerá en la lista de correo.
- (c)** Si un cliente no ha realizado una compra en dos años, determine el número esperado de años que estará en la lista de correo.
- 17-44.** Una máquina CN está diseñada para que funcione adecuadamente con voltajes de 108 a 112 volts. Si el voltaje se sale de este intervalo, la máquina se detiene. El regulador de voltaje de la máquina puede detectar variaciones en incrementos de un volt. La experiencia muestra que el voltaje cambia cada 15 minutos. Dentro del intervalo permisible (118 a 112 volts) el voltaje puede subir 1 volt, permanecer igual, o bajar un volt, todos con iguales probabilidades.
- (a)** Exprese la situación como una cadena de Markov.
- (b)** Determine la probabilidad de que la máquina se detenga a causa de un voltaje bajo. Y de un voltaje alto.
- (c)** ¿Cuál sería el voltaje ideal que haría que la máquina trabaje durante más tiempo?
- 17-45.** Considere el problema 17-4, que trata sobre los pacientes que sufren de falla de riñón. Determine las siguientes medidas:
- (a)** ¿Cuántos años puede un paciente permanecer sometido a diálisis?
- (b)** La longevidad de un paciente que inicia un tratamiento de diálisis.
- (c)** La esperanza de vida de un paciente que sobrevive al menos un año o más después de un trasplante.
- (d)** La cantidad esperada de años antes de que un trasplantado que sobrevivió al menos 1 año regrese a la diálisis o muera.
- (e)** La calidad de vida para los que sobreviven un año o más después de un trasplante (supuestamente, pasar pocos años con diálisis significa una mejor calidad de vida).

CAPÍTULO 18

Sistemas de colas

Aplicación de la vida real: Estudio de un sistema de transporte interno en una planta de manufactura

En una planta de manufactura se utilizan tres camiones para transportar materiales. Los camiones esperan en un lote central de estacionamiento hasta que se les solicita. Un camión que responde a una solicitud viajará a las instalaciones del cliente, transportará una carga hasta su destino y después regresará al lote central. Los departamentos principales que utilizan el servicio son producción, taller y mantenimiento. Los usuarios se han quejado por sus largas esperas hasta que se desocupa un camión, sobre todo el departamento de producción, y han solicitado que se agregue un cuarto camión a la flotilla. Ésta es una aplicación inusual, porque la teoría de colas se utiliza para demostrar que la causa de los largos retrasos es principalmente logística, y que con un simple cambio del procedimiento de operación de la flotilla de camiones no se requeriría un cuarto camión. Los detalles del estudio se dan al final del capítulo.

18.1 ¿POR QUÉ ESTUDIAR LAS COLAS?

La espera por un servicio forma parte de la vida cotidiana. Se debe esperar en los restaurantes, hacer fila para abordar un avión y formarse en la cola para recibir atención en oficinas postales. Además, el fenómeno de esperar no se limita a los seres humanos: los trabajos esperan para ser procesados en una máquina, los aviones vuelan en círculos a diferentes alturas hasta que se les permite aterrizar, y los automóviles se detienen en los semáforos. Eliminar la espera por completo no es una opción factible, debido a que el costo de instalación y operación del centro de servicio suele ser prohibitivo. El único recurso disponible es buscar el equilibrio entre el costo de ofrecer un servicio y el de esperar a ser atendido. El análisis de las colas es el vehículo para alcanzar esa meta.

El estudio de las colas trata de la cuantificación del fenómeno de la espera usando medidas de desempeño representativas, como la longitud promedio de la cola, el tiempo de espera promedio en la cola y la utilización promedio de la instalación. El siguiente ejemplo demuestra cómo pueden usarse esas medidas para diseñar una instalación de servicio.

Ejemplo 18.1-1

McBurger es un restaurante de comida rápida con tres mostradores de servicio. El gerente desea agilizar el servicio. Un estudio revela la siguiente relación entre la cantidad de mostradores y el tiempo de espera para el servicio:

Cantidad de mostradores	1	2	3	4	5	6	7
Tiempo de espera promedio (min)	16.2	10.3	6.9	4.8	2.9	1.9	1.3

Un examen de los datos revela un tiempo de espera promedio de 7 minutos en la situación actual de 3 mostradores. Cinco mostradores reducirían la espera aproximadamente a 3 minutos.

Modelo basado en costos. Los resultados del análisis de colas pueden incorporarse a un modelo de optimización de costos que busca la minimización de la suma del costo de ofrecer el servicio y de la espera por parte de los clientes. En la figura 18.1 se presenta un modelo de costos típico (en dólares por unidad de tiempo), donde el costo del servicio aumenta con el incremento del nivel de servicio (por ejemplo, la cantidad de mostradores de servicio). Al mismo tiempo, el costo de esperar se reduce con el incremento del nivel de servicio.

El principal obstáculo al implementar modelos de costos es la dificultad al determinar el costo de la espera, en particular la que experimentan los seres humanos. Este punto se analiza en la sección 18.9.

18.2 ELEMENTOS DE UN MODELO DE COLAS

Los actores principales en una situación de colas son el **cliente** y el **servidor**. Los clientes llegan a una **instalación** (servicio) desde una **fuente**. Al llegar, un cliente puede ser atendido de inmediato o esperar en una **cola** si la instalación está ocupada. Cuando una instalación completa un servicio, “jala” de forma automática a un cliente que está esperando en la cola, si existe tal cliente. Si la cola está vacía, la instalación se encuentra ociosa hasta que llega un nuevo cliente.

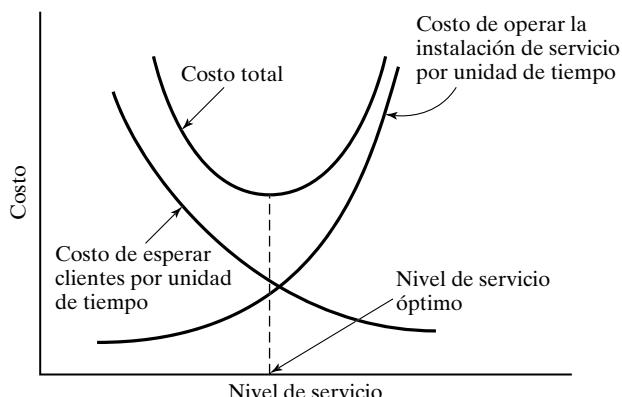


FIGURA 18.1

Modelo de decisión de colas basado en costos

Desde el punto de vista del análisis de colas, la llegada de los clientes está representada por el **tiempo entre llegadas** (tiempo entre llegadas sucesivas), y el servicio se mide mediante el **tiempo de servicio** por cliente. Por lo general, los tiempos entre llegadas y de servicio son probabilísticos (por ejemplo, la operación de una oficina postal) o determinísticos (como la llegada de solicitantes para una entrevista de trabajo o para una cita con el médico).

El **tamaño de la cola** tiene un papel en el análisis de colas. Puede ser finito (como en el área disponible entre dos máquinas sucesivas) o, para propósitos prácticos, infinito (como en las instalaciones de pedidos por correo).

La **disciplina de la cola**, que representa el orden en que se seleccionan los clientes en una cola, es un factor importante en el análisis de modelos de colas. La disciplina más común es **primero en llegar, primero en ser atendido (FIFO)**, por las siglas de *first-in, first-out*). Entre otras disciplinas están **último en llegar, primero en ser atendido (LIFO)**, por las siglas de *last-in, first-out*) y **servicio en orden aleatorio (SIRO)**, por las siglas de *service in random order*). Los clientes también pueden ser seleccionados de la cola, con base en algún orden de **prioridad**. Por ejemplo, los trabajos urgentes en un taller se procesan antes que los trabajos regulares.

El comportamiento en la cola también tiene un papel en el análisis de líneas de espera. Los clientes pueden **cambiar** de una cola más larga a una más corta para reducir el tiempo de espera, **desistir** completamente de hacer cola debido a la larga tardanza anticipada, o **salir** de una cola porque han estado esperando demasiado.

El diseño de la instalación de servicio puede incluir servidores paralelos (por ejemplo, la operación de una oficina postal o un banco). Los servidores también pueden estar dispuestos en serie (por ejemplo, los trabajos procesados en máquinas sucesivas) o estar dispuestos en red (como los ruteadores en una red de computadoras).

La fuente desde la que se generan los clientes puede ser finita o infinita. Una **fuente finita** limita la cantidad de clientes que llegan (por ejemplo, las máquinas que solicitan el servicio de un técnico en mantenimiento). Una **fuente infinita** es, para todo propósito práctico, abundante por siempre (como las llamadas que entran a un conmutador telefónico).

Las variaciones en los elementos de una situación de colas originan varios modelos matemáticos de colas. En este capítulo se proporcionan ejemplos de estos modelos. Las situaciones de colas complejas que no pueden representarse matemáticamente suelen analizarse mediante el uso de la simulación (vea el capítulo 19).

Momento, ¡ajá! Percepción de la espera ¡y el factor cultural!

Es claro que los modelos matemáticos de colas deberían emplearse para diseñar la operación eficiente de las líneas de espera, sobre todo cuando se trata de máquinas, redes informáticas o redes telefónicas. Pero cuando las operaciones involucran a seres humanos, en especial clientes, hay factores que podrían ser difíciles de manejar para las matemáticas, como el aburrimiento de las personas mientras esperan. En esos casos, hay que reconocer un principio importante de la psicología de la espera: *El tiempo pasa más rápido cuando la gente está ocupada haciendo algo*. Y esto es exactamente lo que sucedió en las dos situaciones reales que cité en la sección 1.6. En la situación del ascensor, los usuarios se mantenían ocupados observándose a sí mismos y a los demás en grandes espejos mientras esperaban entrar a los ascensores; y en el caso del aeropuerto de Houston, los pasajeros se mantenían ocupados caminando más tiempo antes de llegar a la zona de equipaje, simplemente al estacionar los aviones en la puerta más alejada de los carruseles. En ambos casos, las quejas sobre el tiempo de espera desaparecieron, no mediante la implementación de mejoras basadas en modelos de colas en las instalaciones físicas, sino alterando la *percepción* que los usuarios tenían de la espera, aunque el tiempo real para completar la actividad siguiera siendo el mismo. De hecho, a menudo me preguntaba por qué los tabloides se colocan en los supermercados cerca de las cajas en lugar de en la sección de revistas, periódicos y libros (*¡cuidado, no estoy comparando los contenidos!*). Creo que se hace así con el propósito de mantener ocupados a los clientes leyendo titulares sensacionalistas mientras esperan a ser atendidos en la caja.

No hay nadie mejor que Disney cuando se trata de utilizar estratagemas para mitigar el aburrimiento por la espera en sus grandes parques temáticos, incluyendo la colocación de temporizadores digitales a lo largo de las colas —que inflan los tiempos de espera para que los usuarios se vean gratamente sorprendidos cuando superan sus expectativas—, el uso de colas serpentinas para hacer lucir más cortas las líneas de espera, la colocación de atracciones visuales y sonoras a lo largo de la cola para entretenér a los usuarios, y el establecimiento de un comando central (dirigido por “imaginadores”; ¡nada menos!) que anticipan los puntos de congestión e inmediatamente reúnen los recursos necesarios para aliviar o eliminar el problema.

Desde luego, la *percepción* de la espera y sus efectos negativos puede ser un fenómeno cultural; y el comportamiento de una cola que parecería inaceptable en algunos países, sería perfectamente aceptable en otros. Recuerdo una experiencia que tuve al vivir durante un largo periodo en el extranjero. Yo estaba de pie en la cola de un banco, casi al alcance del cajero, cuando un hombre entró y formó su propia línea de una sola persona directamente en la ventanilla. Fue entonces cuando grité: “¡Oye, tienes que estar en la fila como el resto de nosotros”, a lo que el hombre respondió: “¿Cuál es el problema?, no estoy *delante* de ti”. Perplejo por su lógica, oí repentinamente al cajero del banco, al parecer alertado por la conmoción en curso, que me llamaba por mi nombre (me conocía de visitas anteriores) y me preguntaba si *podría* ayudarme en algo. Al darme cuenta de que probablemente era la única persona “extraña” en el lugar, simplemente seguí el adagio “A la tierra que fueres...” y avancé a la ventanilla para terminar mi transacción. Lo asombroso es que nadie en la cola se opuso a nada de lo que estaba ocurriendo (el hombre que formó su propia línea, la oferta del cajero de ayudarme antes que a otros y mi adelantamiento para completar mi transacción). No era un problema para ellos. Aquí cabe la pregunta ¿por principio de cuentas, entonces para qué se formó la cola?

18.3 PAPEL DE LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

En la mayoría de las situaciones de colas, las llegadas ocurren de manera *aleatoria*. La aleatoriedad significa que la ocurrencia de un evento (por ejemplo, la llegada de un cliente o la terminación de un servicio) no está influída por el tiempo transcurrido desde la ocurrencia del último evento.

Los tiempos aleatorios entre llegadas y de servicio se describen cuantitativamente en modelos de colas por medio de una **distribución exponencial**, definida como

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$$

En la sección 12.4.3 se muestra que para la distribución exponencial

$$\begin{aligned} E\{t\} &= \frac{1}{\lambda} \\ P\{t \leq T\} &= \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda T} \end{aligned}$$

La definición de $E\{t\}$ muestra que λ es la tasa por unidad de tiempo a la cual se generan los eventos (llegadas o salidas).

La distribución exponencial describe un fenómeno *totalmente aleatorio*. Por ejemplo, si en este momento la hora es 8:20 A.M. y la última llegada fue a las 8:02 A.M., la probabilidad de que la siguiente llegada ocurra a las 8:29 es una función sólo del intervalo de las 8:20 a las 8:29, y es totalmente independiente del tiempo que ha transcurrido desde la ocurrencia del último evento (8:02 a 8:20).

La propiedad totalmente aleatoria de la exponencial se conoce como **olvido** o **falta de memoria**. Dado que $f(t)$ es la distribución exponencial del tiempo, t , entre eventos sucesivos (llegadas), si S es el intervalo desde la ocurrencia del último evento, entonces la *propiedad de olvido* implica que

$$P\{t > T + S | t > S\} = P\{t > T\}$$

Para comprobar este resultado, se observa que para la exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$,

$$P\{t > Y\} = 1 - P\{t < Y\} = e^{-\lambda Y}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P\{t > T + S | t > S\} &= \frac{P\{t > T + S, t > S\}}{P\{t > S\}} = \frac{P\{t > T + S\}}{P\{t > S\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda(T+S)}}{e^{-\lambda S}} = e^{-\lambda T} \\ &= P\{t > T\} \end{aligned}$$

Ejemplo 18.3-1

Una máquina de servicio cuenta siempre con una unidad de respaldo para su reemplazo inmediato si ocurre una falla. El tiempo para que falle la máquina (o su unidad de respaldo) es exponencial y ocurre cada 5 horas en promedio. El operador de la máquina afirma que ésta “tiene el hábito” de descomponerse cada noche alrededor de las 8:30 P.M. Analice la afirmación del operador.

La tasa de fallas promedio de la máquina es $\lambda = \frac{1}{5} = .2$ fallas por hora. Entonces, la distribución exponencial del tiempo hasta una falla es

$$f(t) = .2e^{-2t}, t > 0$$

En relación con la afirmación del operador, se sabe de antemano que no puede ser cierta porque entra en conflicto con el hecho de que el tiempo entre fallas es exponencial y, por consiguiente, totalmente aleatorio. La probabilidad de que ocurra una falla a las 8:30 P.M. no puede usarse para sostener o refutar la afirmación del operador, porque el valor de esa probabilidad depende de la hora (respecto de las 8:30 P.M.) a la cual se calcule. Por ejemplo, si en este momento son las 8:20 P.M., entonces hay una baja probabilidad de que la afirmación del operador sea correcta, es decir,

$$P\left\{t < \frac{10}{60}\right\} = 1 - e^{-2(\frac{10}{60})} = .03278$$

Si la hora en este momento es la 1:00 P.M., entonces la probabilidad de que ocurra una falla a las 8:30 P.M. se incrementa a aproximadamente .777 (¡verifíquelo!). Estos dos valores extremos muestran que no es cierta la afirmación del operador.

18.4 MODELOS DE NACIMIENTO Y MUERTE PUROS (RELACIÓN ENTRE LAS DISTRIBUCIONES EXPONENCIAL Y DE POISSON)

En esta sección se presentan dos situaciones de colas, el modelo de **nacimiento puro** en el cual sólo ocurren llegadas, y el modelo de **muerte pura** donde sólo ocurren salidas. Un ejemplo del modelo de nacimiento puro es la creación de actas de nacimiento de bebés recién nacidos. El modelo de muerte pura puede demostrarse por medio del retiro aleatorio de un artículo en existencia en una tienda.

La distribución exponencial se utiliza para describir el tiempo entre llegadas en el modelo de nacimiento puro y el tiempo entre salidas en el modelo de muerte pura. Un subproducto del desa-

rrrollo de ambos modelos es demostrar la estrecha relación entre la distribución exponencial y la de Poisson, en el sentido de que una distribución define automáticamente a la otra.

18.4.1 Modelo de nacimiento puro

Defina

$$p_0(t) = \text{Probabilidad de que no ocurran llegadas durante un periodo de tiempo } t$$

Dado que el tiempo entre llegadas es exponencial y que la tasa de llegadas es de λ clientes por unidad de tiempo, entonces

$$\begin{aligned} p_0(t) &= P\{\text{tiempo entre llegadas} \geq t\} \\ &= 1 - P\{\text{tiempo entre llegadas} \leq t\} \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda t}) \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Para un intervalo de tiempo suficientemente pequeño $h > 0$, se tiene

$$p_0(h) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \dots = 1 - \lambda h + O(h^2)$$

La distribución exponencial se basa en el supuesto de que durante $h > 0$, cuando mucho puede ocurrir un evento (una llegada). Por lo tanto, cuando $h \rightarrow 0$,

$$p_1(h) = 1 - p_0(h) \approx \lambda h$$

Este resultado muestra que la probabilidad de una llegada durante h es directamente proporcional a h , con la tasa de llegadas, λ , como constante de proporcionalidad.

Para obtener la distribución de la *cantidad* de llegadas durante un periodo t cuando el tiempo entre llegadas es exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$, defina

$$p_n(t) = \text{Probabilidad de } n \text{ llegadas durante } t$$

Para un $h > 0$ suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &\approx p_n(t)(1 - \lambda h) + p_{n-1}(t)\lambda h, \quad n > 0 \\ p_0(t+h) &\approx p_0(t)(1 - \lambda h), \quad n = 0 \end{aligned}$$

En la primera ecuación habrá n llegadas durante $t+h$ si hay n llegadas durante t y ninguna llegada durante h , o $n-1$ llegadas durante t y una llegada durante h . No se permiten todas las demás combinaciones porque, de acuerdo con la distribución exponencial, cuando mucho puede haber una llegada durante un periodo h muy pequeño. La ley del producto de las probabilidades es aplicable al lado derecho de la ecuación porque las llegadas son independientes. Para la segunda ecuación, durante $t+h$ puede haber cero llegadas sólo si no hay llegadas durante t y h .

Si se reacomodan los términos y se toman los límites cuando $h \rightarrow 0$ para obtener la primera derivada de $p_n(t)$ respecto de t , se tiene

$$p'_n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), n > 0$$

$$p'_0(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_0(t-h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t), \quad n = 0$$

Al resolver las ecuaciones diferenciales anteriores resulta

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Ésta es una **distribución de Poisson** con media de $E[n|t] = \lambda t$ llegadas durante t .

El resultado anterior muestra que si el tiempo entre llegadas es exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$, entonces la cantidad de llegadas durante un periodo específico t es de Poisson con media λt . Lo contrario también es cierto.

En la siguiente tabla se resumen las relaciones entre las distribuciones exponencial y de Poisson, dada la tasa de llegadas λ :

	Exponencial	Poisson
Variable aleatoria	Tiempo entre llegadas sucesivas, t	Cantidad de llegadas, n , durante un periodo específico, T
Intervalo	$t \geq 0$	$n = 0, 1, 2, \dots$
Función de densidad	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$	$p_n(T) = \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$
Valor medio	$\frac{1}{\lambda}$ unidades de tiempo	λT llegadas durante T
Probabilidad acumulada	$P\{t \leq A\} = 1 - e^{-\lambda A}$	$p_{n \leq N}(T) = p_0(T) + p_1(T) + \dots + p_N(T)$
$P[\text{No hay llegadas durante el periodo } A]$	$P\{t > A\} = e^{-\lambda A}$	$p_0(A) = e^{-\lambda A}$

Comentario. La distribución de Poisson tiene la propiedad única de que su media y varianza son iguales (vea la sección 14.4.2). Esta observación puede ser útil para hacer una “estimación” inicial respecto de si los datos empíricos describen o no una distribución de Poisson: Si la media y la varianza de la muestra están muy separadas, entonces con toda probabilidad la muestra no proviene de una distribución de Poisson. Sin embargo, lo contrario no es obligatoriamente cierto, y será necesario realizar al menos una prueba de bondad de ajuste (sección 14.5) para aceptar o rechazar la hipótesis. Sobre todo, se debe tener la “sensación” de por qué un proceso debería designarse como *completamente aleatorio*.

Ejemplo 18.4-1

En una gran ciudad, los bebés nacen a razón de uno cada 12 minutos. El tiempo entre nacimientos sigue una distribución exponencial. Determine lo siguiente:

- (a) La cantidad promedio de nacimientos por año.
- (b) La probabilidad de que no haya nacimientos durante 1 día.
- (c) La probabilidad de emitir 50 actas de nacimiento en 3 horas, dado que se emitieron 40 actas durante las primeras 2 horas del periodo de 3 horas.

La tasa diaria de nacimientos se calcula como

$$\lambda = \frac{24 \times 60}{12} = 120 \text{ nacimientos/día}$$

Por lo tanto, la cantidad de nacimientos por año en el estado es

$$\lambda t = 120 \times 365 = 43,800 \text{ nacimientos/año}$$

La probabilidad de que no haya nacimientos durante 1 día es

$$p_0(1) = \frac{(120 \times 1)^0 e^{-120 \times 1}}{0!} = e^{-120} = 0$$

Otra forma de calcular la misma probabilidad es observar que si no hay ningún nacimiento en cualquier día equivale a decir que el *tiempo entre nacimientos sucesivos* es de más de un día. Por consiguiente, es posible utilizar la distribución exponencial para calcular la probabilidad deseada como

$$P\{t > 1\} = e^{-120} = 0$$

Debido a que la distribución de la cantidad de nacimientos es de Poisson, la probabilidad de emitir 50 actas de nacimiento en 3 horas, dado que se emitieron 40 actas durante las primeras 2 horas, equivale a tener 10 ($= 50 - 40$) nacimientos en una hora ($= 3 - 2$), es decir,

$$p_{10}(1) = \frac{\left(\frac{60}{12} \times 1\right)^{10} e^{-5 \times 1}}{10!} = .01813$$

Momento de Excel

Los cálculos asociados con la distribución de Poisson y, de hecho, todas las fórmulas de colas son tediosas y requieren habilidades de programación para asegurar una precisión computacional razonable. Es posible utilizar las funciones POISSON, POISSONDIST y EXPONDIST de Excel para calcular las probabilidades individuales y acumuladas de Poisson y exponencial. Esas funciones también están automatizadas en *exceStatTables.xls*. Por ejemplo, para una tasa de nacimientos de 5 bebés por hora, la probabilidad de *exactamente* 10 nacimientos en .5 horas se calcula introduciendo 2.5 en F16 y 10 en J16 para obtener la respuesta .000216 en M16. La probabilidad acumulada de *cuando mucho* 10 nacimientos se da en O16 ($= .999938$). Para determinar la probabilidad de que el tiempo entre nacimientos sea menor o igual que 18 minutos, use la distribución exponencial introduciendo 2.5 en F9 y .3 en J9. La respuesta .527633 aparece en O9.

Momento de TORA/Excel

También es posible utilizar TORA (archivo *toraEx18-4.1.txt*) o la plantilla *excelPoissonQ.xls* para determinar de forma automática todas las probabilidades de Poisson significativas ($> 10^{-5}$ en TORA y $> 10^{-7}$ en Excel). En ambos casos, los datos de entrada son los mismos. Para el modelo de nacimiento puro del ejemplo 18.4-1, los datos son los siguientes:

Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
5	0	0	Infinito	Infinito

Observe la entrada bajo Lambda $\lambda t = 5 \times 1 = 5$ nacimientos por día. Note también que Mu = 0 identifica el modelo como nacimiento puro.

18.4.2 Modelo de muerte pura

En el modelo de muerte pura, el sistema inicia con N clientes en el tiempo 0, sin llegadas nuevas permitidas. Las salidas ocurren a razón de μ clientes por unidad de tiempo. Para desarrollar las ecuaciones diferenciales de la probabilidad $p_n(t)$ de que n clientes permanezcan después de t unidades de tiempo, se siguen los argumentos utilizados con el modelo de nacimiento puro (sección 18.4.1). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_N(t+h) &= p_N(t)(1 - \mu h) \\ p_n(t+h) &= p_n(t)(1 - \mu h) + p_{n+1}(t)\mu h, \quad 0 < n < N \\ p_0(t+h) &= p_0(t)(1) + p_1(t)\mu h \end{aligned}$$

Cuando $h \rightarrow 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} p'_N(t) &= -\mu p_N(t) \\ p'_n(t) &= -\mu p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad 0 < n < N \\ p'_0(t) &= \mu p_1(t) \end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones genera la siguiente **distribución de Poisson** truncada:

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!}, \quad n = 1, 2, \dots, N \\ p_0(t) &= 1 - \sum_{n=1}^N p_n(t) \end{aligned}$$

Ejemplo 18.4-2

La sección de florería en una tienda de comestibles inicia cada semana con 18 docenas de rosas en existencia. En promedio, la florería vende 3 docenas al día (una docena a la vez), pero la demanda real sigue una distribución de Poisson. Siempre que el nivel de las existencias llega a 5 docenas, se coloca un nuevo pedido de 18 nuevas docenas para entrega al principio de la siguiente semana. Debido a la naturaleza de la mercancía, se desechan las rosas sobrantes al final de la semana. Determine lo siguiente:

- (a) La probabilidad de colocar un pedido cualquier día de la semana.
- (b) La cantidad promedio de docenas de rosas desecharadas al final de la semana.

Debido a que las compras ocurren a una tasa de $\mu = 3$ docenas por día, la probabilidad de colocar un pedido al final del día t es

$$\begin{aligned} p_{n \leq 5}(t) &= p_0(t) + p_1(t) + \dots + p_5(t) \\ &= p_0(t) + \sum_{n=1}^5 \frac{(3t)^{18-n} e^{-3t}}{(18-n)!}, \quad t = 1, 2, \dots, 7 \end{aligned}$$

Los cálculos de $p_{n \leq 5}(t)$ se realizan de mejor manera mediante el uso de *excelPoissonQ.xls* o TORA. Los múltiples escenarios de TORA pueden ser más convenientes en este caso. Los datos de entrada asociados en el caso del modelo de muerte pura correspondientes a $t = 1, 2, \dots, 7$ son $\lambda = 0$, $\mu = 3t$, $c = 1$, límite del sistema = 18, y límite de la fuente = 18. Observe que t debe sustituirse numéricamente como se muestra en el archivo *toraEx18.4-2.txt*.

Los resultados se resumen como sigue:

t (día)	1	2	3	4	5	6	7
μt	3	6	9	12	15	18	21
$p_{n \leq 5}(t)$.0000	.0088	.1242	.4240	.7324	.9083	.9755

La cantidad promedio de docenas de rosas desechadas al final de la semana ($t = 7$) es $E\{n|t = 7\}$. Para calcular este valor se requiere $p_n(7)$, $n = 0, 1, 2, \dots, 18$, que puede determinarse con el software proporcionado. El resultado es

$$E\{n|t = 7\} = \sum_{n=0}^{18} np_n(7) = .664 \approx 1 \text{ docena}$$

18.5 MODELO DE COLAS GENERAL DE POISSON

En esta sección se desarrolla un modelo de colas general que combina tanto llegadas como salidas con base en los supuestos de Poisson; es decir, que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial. El modelo es la base para la deducción de los modelos de Poisson especializados de la sección 18.6.

El desarrollo del modelo generalizado se basa en el comportamiento a largo plazo o de **estado estable** de la situación de colas, alcanzado después de que el sistema ha estado en operación durante un tiempo suficientemente largo. Este tipo de análisis contrasta con el comportamiento **transitorio** (o de calentamiento) que prevalece durante el inicio de la operación del sistema (una razón para no analizar el comportamiento transitorio en este capítulo es su complejidad analítica. Otra es que el estudio de la mayoría de las situaciones de colas sucede en condiciones de estado estable).

El modelo general supone que tanto las tasas de entrada como de salida **dependen del estado**, lo cual significa que dependen de la cantidad de clientes en la instalación de servicio. Por ejemplo, en una caseta de cobro en una carretera, los encargados tienden a acelerar el cobro de las cuotas durante las horas pico. Otro ejemplo ocurre en un taller donde la tasa de descomposturas de las máquinas disminuye a medida que aumenta el número de máquinas descompuestas (porque sólo las máquinas que funcionan son capaces de generar nuevas descomposturas).

Defina

n = Cantidad de clientes en el sistema (en la cola o siendo atendidos)

λ_n = Tasa de llegadas, dados n clientes en el sistema

μ_n = Tasa de salidas, dados n clientes en el sistema

p_n = Probabilidad de estado estable de que haya n clientes en el sistema

El modelo general deriva a p_n como una función de λ_n y μ_n . Estas probabilidades se utilizan entonces para determinar las medidas de desempeño del sistema, como la longitud promedio de las colas, el tiempo de espera promedio y la utilización promedio de la instalación.

Las probabilidades p_n se determinan mediante el uso del **diagrama de tasa de transición** de la figura 18.2. El sistema de colas está en el estado n cuando el número de clientes en el sistema es n . Como se explica en la sección 18.3, la probabilidad de que suceda más de un evento durante

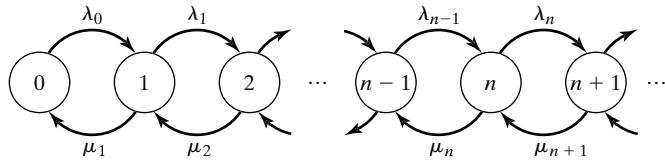


FIGURA 18.2

Diagrama de transición en colas de Poisson

un pequeño intervalo h tiende a cero cuando $h \rightarrow 0$. Esto significa que para $n > 0$, el estado n puede cambiar sólo a dos estados posibles: $n - 1$ cuando ocurre una salida a razón de μ_n , y $n + 1$ cuando ocurre una llegada a la tasa λ_n . El estado 0 sólo puede cambiar al estado 1 cuando sucede una llegada a la tasa λ_0 . Observe que μ_0 es indefinida porque no pueden ocurrir salidas si el sistema está vacío.

En condiciones de estado estable, para $n > 0$, deben ser iguales las tasas de flujo *esperadas* de entrada y salida del estado n . Con base en el hecho de que el estado n puede cambiar sólo a los estados $n - 1$ y $n + 1$, se tiene

$$\left(\begin{array}{l} \text{Tasa de flujo de entrada} \\ \text{esperada al estado } n \end{array} \right) = \lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1}$$

Asimismo,

$$\left(\begin{array}{l} \text{Tasa de flujo de salida} \\ \text{esperada del estado } n \end{array} \right) = (\lambda_n + \mu_n) p_n$$

Al igualar las dos tasas, se obtiene la siguiente **ecuación de balance**:

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) p_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

A partir de la figura 18.2, la ecuación de balance asociada con $n = 0$ es

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

Las ecuaciones de balance se resuelven en forma recursiva en términos de p_0 . Para $n = 0$, se tiene

$$p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} \right) p_0$$

En seguida, para $n = 1$,

$$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) p_1$$

Si se sustituye $p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} \right) p_0$ y se simplifica, resulta (¡verifíquelo!)

$$p_2 = \left(\frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} \right) p_0$$

Por inducción es posible demostrar que

$$p_n = \left(\frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} \right) p_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

El valor de p_0 se determina a partir de la ecuación $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$

Ejemplo 18.5-1

B&K Groceries opera con tres cajas. El gerente utiliza el siguiente programa para determinar el número de cajas en operación, de acuerdo con la cantidad de clientes que haya en la línea:

Cantidad de clientes en la tienda	Número de cajas en operación
1 a 3	1
4 a 6	2
Más de 6	3

Los clientes llegan al área de cajas según una distribución de Poisson a una tasa media de 10 clientes por hora. El tiempo promedio en la caja es exponencial con media de 12 minutos. Determine la probabilidad de estado estable p_n de que haya n clientes en el área de cajas.

A partir de la información del problema, se tiene

$$\lambda_n = \lambda = 10 \text{ clientes por hora}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\mu_n = \begin{cases} \frac{60}{12} = 5 \text{ clientes por hora,} & n = 0, 1, 2, 3 \\ 2 \times 5 = 10 \text{ clientes por hora,} & n = 4, 5, 6 \\ 3 \times 5 = 15 \text{ clientes por hora,} & n = 7, 8, \dots \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(\frac{10}{5}\right)p_0 = 2p_0 \\ p_2 &= \left(\frac{10}{5}\right)^2 p_0 = 4p_0 \\ p_3 &= \left(\frac{10}{5}\right)^3 p_0 = 8p_0 \\ p_4 &= \left(\frac{10}{5}\right)^3 \left(\frac{10}{10}\right) p_0 = 8p_0 \\ p_5 &= \left(\frac{10}{5}\right)^3 \left(\frac{10}{10}\right)^2 p_0 = 8p_0 \\ p_6 &= \left(\frac{10}{5}\right)^3 \left(\frac{10}{10}\right)^3 p_0 = 8p_0 \\ p_{n \geq 7} &= \left(\frac{10}{5}\right)^3 \left(\frac{10}{10}\right)^3 \left(\frac{10}{15}\right)^{n-6} p_0 = 8\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6} p_0 \end{aligned}$$

El valor de p_0 se determina a partir de la ecuación

$$p_0 + p_0 \left\{ 2 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8\left(\frac{2}{3}\right) + 8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 8\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right\} = 1$$

o, de forma equivalente,

$$p_0 \left\{ 31 + 8\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right) \right\} = 1$$

Si se utiliza la serie de suma geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

resulta

$$p_0 \left\{ 31 + 8 \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) \right\} = 1$$

Por consiguiente, $p_0 = \frac{1}{55}$.

Dado p_0 , ahora es posible determinar p_n para $n > 0$. Por ejemplo, la probabilidad de que sólo una caja abra se calcula como la probabilidad de que haya cuando mucho tres clientes en el sistema:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = (1 + 2 + 4 + 8)\left(\frac{1}{55}\right) \approx .273$$

Se utiliza p_n para determinar medidas de desempeño para la situación de B&K. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{Cantidad esperada de} \\ \text{cajas desocupadas} \end{array} \right) &= 3p_0 + 2(p_1 + p_2 + p_3) + 1(p_4 + p_5 + p_6) \\ &\quad + 0(p_7 + p_8 + \dots) \\ &= 1 \text{ caja} \end{aligned}$$

18.6 COLAS DE POISSON ESPECIALIZADAS

En la figura 18.3 se presenta la situación de colas de Poisson especializadas con c servidores paralelos. Se selecciona un cliente en espera en la fila para iniciar el servicio con el primer servidor disponible. La tasa de llegadas al sistema es de λ clientes por unidad de tiempo. Todos los servidores paralelos son idénticos, es decir, que la tasa de servicio de cualquier servidor es de μ clientes por unidad de tiempo. La cantidad de clientes en el *sistema* se define para incluir los que están en el servicio y los que están *en la cola*.

Una notación conveniente para resumir las características de la situación de colas de la figura 18.3 se da mediante el siguiente formato:

$$(a/b/c):(d/e/f)$$

donde

a = Distribución de llegadas

b = Distribución de salidas (tiempo de servicio)

c = Cantidad de servidores paralelos ($= 1, 2, \dots, \infty$)

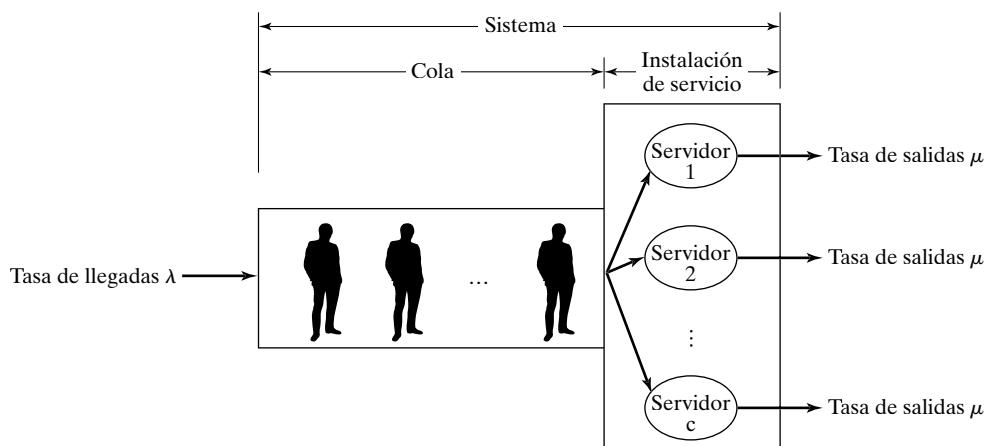
d = Disciplina de la cola

e = Número máximo (finito o infinito) permitido en el sistema
(en cola o en servicio)

f = Tamaño de la fuente solicitante (finita o infinita)

FIGURA 18.3

Representación esquemática de un sistema de colas con c servidores paralelos



La notación estándar para representar las distribuciones de las llegadas y las salidas (símbolos a y b) es

M = Distribución markoviana (o de Poisson) de llegadas y salidas (o de forma equivalente la distribución exponencial del tiempo entre llegadas y de servicio)

D = Tiempo constante (determinístico)

E_k = Distribución de Erlang o gama del tiempo (o, de forma equivalente, la suma de distribuciones exponenciales independientes)

GI = Distribución general (genérica) del tiempo entre llegadas

G = Distribución general (genérica) del tiempo de servicio

La notación para la disciplina de la cola (símbolo d) incluye

$FIFO$ = Primero en llegar, primero en ser atendido

$LIFO$ = Último en llegar, primero en ser atendido

$SIRO$ = Servicio en orden aleatorio

GD = Disciplina general (es decir, cualquier tipo de disciplina)

Para ilustrar el uso de la notación, el modelo $(M/D/10):(GD/20/\infty)$ utiliza llegadas de Poisson (o tiempo entre llegadas exponencial), tiempo de servicio constante, y 10 servidores paralelos. La disciplina de la cola es GD , y hay un límite de 20 clientes en todo el sistema. El tamaño de la fuente de donde llegan los clientes es infinito.

Como nota histórica, los primeros tres elementos de la notación $(a/b/c)$ fueron ideados por D. G. Kendall en 1953, y se conocen en la literatura como **notación de Kendall**. En 1966, A. M. Lee agregó los símbolos d y e a la notación. El autor de este libro agregó el último elemento, el símbolo f , en 1968. La adición de f no pretende ser decorativa, puesto que completa todos los datos necesarios para calcular los resultados de estado estable del modelo de colas de Poisson, mediante el uso de TORA y la hoja de cálculo en Excel, como se explicará posteriormente.

Antes de presentar los detalles de las colas de Poisson especializadas, se muestra cómo pueden obtenerse las medidas de desempeño de estado estable de la situación de colas generalizada, a partir de las probabilidades de estado estable p_n dadas en la sección 18.5.

Momento, ¡ajá! Los últimos serán los primeros..., o ¡cómo hacer que las filas de espera avancen más rápido!

Un artículo titulado “La maldición de la disciplina de cola del primero en llegar primero en ser atendido”, publicado en 2015 por dos economistas daneses, Trine T. Platz y Lars P. Østerdal,¹ propone que una disciplina LIFO puede mover las colas más rápidamente en situaciones donde la cola está totalmente bajo el control del servidor (lo que excluye, en su mayor parte, las colas que implican la interacción humana cara a cara). Los autores presentan una serie de situaciones en las que los resultados de su modelo pueden ser aplicables: (1) aviones que circulan en una fila esperando el aterrizaje, (2) aviones que despegan de un aeropuerto, (3) 4.5 millones de contribuyentes daneses que acceden a sus devoluciones en Internet (todas las devoluciones se liberan en línea en una fecha y hora específicas), y (4) centros de apoyo telefónico. En estas situaciones, el servidor es invisible para el cliente. Además, el servidor puede administrar la cola en el orden que prefiera (incluyendo LIFO). En esas condiciones, el modelo matemático de los autores muestra que LIFO mueve la cola con mayor rapidez.

¹ <http://scienzenordic.com/queues-move-faster-if-last-person-served-first> (consultado el 22 de septiembre de 2015, 6:00 AM).

El argumento principal de los autores es que FIFO, aunque percibida como la más justa de todas las disciplinas de cola, es realmente la peor cuando se trata de reducir la espera promedio. Sin embargo, reconocen que la implementación de LIFO en colas que implican una interacción humana cara a cara es altamente improbable, salvo que hubiera un cambio en los hábitos culturales existentes.

Naturalmente, el uso provocativo de la regla LIFO se informó en los medios sociales globales, aunque de una manera imparcial. Los comentarios de los lectores que aparecen en el *Daily Mail* de Londres (un total de 128) fueron particularmente reveladores. La mayoría de los comentaristas son, como se esperaba, británicos que están condicionados a un estricto comportamiento FIFO. Prácticamente todos ellos están dispuestos a renunciar a la supuesta eficiencia LIFO por el bien de la imparcialidad FIFO. En particular, un comentarista manifiestamente afirma (sin duda con un fuerte acento británico): “¡Perdí la voluntad de vivir tratando de leer este [artículo]”!

18.6.1 Medidas de desempeño de estado estable

Las medidas de desempeño más comúnmente utilizadas en una situación de colas son

$$L_s = \text{Cantidad promedio de clientes en el sistema}$$

$$L_q = \text{Cantidad promedio de clientes en la cola}$$

$$W_s = \text{Tiempo de espera promedio en el sistema}$$

$$W_q = \text{Tiempo de espera promedio en la cola}$$

$$\bar{c} = \text{Cantidad promedio de servidores ocupados}$$

Recuerde que el *sistema* incluye tanto la *cola* como la *instalación de servicio*.

Ahora se demostrará cómo se deducen estas medidas (directa o indirectamente) a partir de la probabilidad de estado estable de n clientes en el sistema p_n como

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} np_n$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n - c)p_n$$

La relación entre L_s y W_s (también entre L_q y W_q) se conoce como **fórmula de Little** y se da como

$$L_s = \lambda_{\text{ef}} W_s$$

$$L_q = \lambda_{\text{ef}} W_q$$

Estas relaciones son válidas en condiciones bastante generales. El parámetro λ_{ef} es la tasa de llegadas efectiva al sistema. Es igual a la tasa de llegadas λ (nominal) cuando todos los clientes que llegan pueden unirse al sistema. En caso contrario, si algunos clientes no pueden unirse porque el sistema está lleno (por ejemplo, un estacionamiento), entonces $\lambda_{\text{ef}} < \lambda$. Más adelante se estudiará la manera como se determina λ_{ef} .

También existe una relación directa entre W_s y W_q . Por definición,

$$\left(\begin{array}{c} \text{Tiempo de espera} \\ \text{promedio en el sistema} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Tiempo de espera} \\ \text{promedio en la cola} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Tiempo de} \\ \text{servicio promedio} \end{array} \right)$$

Esto se traduce como

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

En seguida, es posible relacionar L_s con L_q al multiplicar ambos lados de la última fórmula por λ_{ef} que, junto con la fórmula de Little, da

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{\text{ef}}}{\mu}$$

La diferencia entre la cantidad promedio en el sistema, L_s , y la cantidad promedio en la cola, L_q , debe ser igual al promedio de servidores ocupados, \bar{c} . Por lo tanto,

$$\bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{\text{ef}}}{\mu}$$

Se deduce que

$$\left(\begin{array}{l} \text{Utilización de} \\ \text{la instalación} \end{array} \right) = \frac{\bar{c}}{c}$$

Ejemplo 18.6-1

El estacionamiento para visitantes en el Colegio Ozark se limita a sólo 5 espacios. Los automóviles que utilizan estos espacios llegan de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de seis por hora. El tiempo de estacionamiento se distribuye exponencialmente con una media de 30 minutos. Los visitantes que no encuentran un espacio vacío pueden esperar temporalmente en el estacionamiento hasta que salga un auto estacionado. El espacio temporal tiene cabida sólo para tres autos. Los demás que no pueden estacionarse o encontrar un espacio de espera temporal deben retirarse. Determine lo siguiente:

- (a) La probabilidad, p_n , de que haya n autos en el sistema.
- (b) La tasa de llegadas efectiva de autos que realmente utilizan el estacionamiento.
- (c) El promedio de autos en el estacionamiento.
- (d) El tiempo promedio que un auto espera un espacio de estacionamiento.
- (e) La cantidad promedio de espacios de estacionamiento *ocupados*.
- (f) La utilización promedio del estacionamiento.

Se observa primero que un espacio de estacionamiento actúa como un servidor, de modo que el sistema cuenta con un total de $c = 5$ servidores paralelos. Asimismo, la capacidad máxima del sistema es $5 + 3 = 8$ automóviles.

La probabilidad p_n puede determinarse como un caso especial del modelo generalizado de la sección 18.5 mediante el uso de

$$\lambda_n = 6 \text{ autos/hora}, n = 0, 1, 2, \dots, 7$$

$$\mu_n = \begin{cases} n \left(\frac{60}{30} \right) = 2n \text{ autos/hora}, & n = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 5 \left(\frac{60}{30} \right) = 10 \text{ autos/hora}, & n = 6, 7, 8 \end{cases}$$

De la sección 18.5, se obtiene

$$p_n = \begin{cases} \frac{3^n}{n!} p_0, & n = 1, 2, 3, 4, 5 \\ \frac{3^n}{5! 5^{n-5}} p_0, & n = 6, 7, 8 \end{cases}$$

El valor de p_0 se calcula sustituyendo p_n , $n = 1, 2, \dots, 8$, en la siguiente ecuación:

$$p_0 + p_1 + \dots + p_8 = 1$$

o bien,

$$p_0 + p_0 \left(\frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{5!5^2} + \frac{3^7}{5!5^3} \right) = 1$$

De aquí se obtiene $p_0 = .04812$ (¡verifíquelo!). Con p_0 ahora es posible calcular de p_1 a p_8 como

n	1	2	3	4	5	6	7	8
p_n	.14436	.21654	.21654	.16240	.09744	.05847	.03508	.02105

La tasa de llegadas efectiva λ_{ef} se calcula observando el diagrama en la figura 18.4, donde los clientes llegan de la fuente a razón de λ autos por hora. Un automóvil que llega puede entrar al estacionamiento a la razón λ_{ef} o irse a otro lado a la razón λ_{perdida} . Esto significa que $\lambda = \lambda_{\text{ef}} + \lambda_{\text{perdida}}$.

Un auto no podrá entrar al estacionamiento si ya entraron 8, lo cual significa que la proporción de autos que no podrán entrar al estacionamiento es p_8 . Por lo tanto,

$$\lambda_{\text{perdida}} = \lambda p_8 = 6 \times .02105 = .1263 \text{ autos/hora}$$

$$\lambda_{\text{ef}} = \lambda - \lambda_{\text{perdida}} = 6 - .1263 = 5.8737 \text{ autos/hora}$$

La cantidad promedio de autos en el estacionamiento (los que esperan que se desocupe un espacio) es igual a L_s , el número promedio en el sistema. Es posible calcular L_s a partir de p_n como

$$L_s = 0p_0 + 1p_1 + \dots + 8p_8 = 3.1286 \text{ autos}$$

Un auto que espera en el espacio temporal es en realidad un auto que está en la cola. Por consiguiente, su tiempo de espera hasta que encuentra un espacio es W_q . Para determinar W_q se usa

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

Así que,

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{ef}}} = \frac{3.1286}{5.8737} = .53265 \text{ horas}$$

$$W_q = .53265 - \frac{1}{2} = .03265 \text{ horas}$$

La cantidad promedio de espacios de estacionamiento ocupados es igual al promedio de servidores ocupados,

$$\bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{\text{ef}}}{\mu} = \frac{5.8737}{2} = 2.9368 \text{ espacios}$$

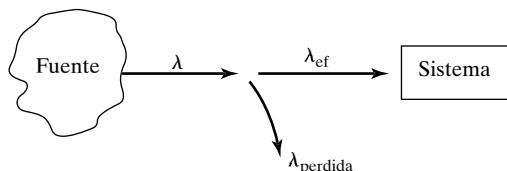


FIGURA 18.4
Relación entre λ , λ_{ef} y λ_{perdida}

A partir de \bar{c} se obtiene

$$\text{Utilización del estacionamiento} = \frac{\bar{c}}{c} = \frac{2.9368}{5} = .58736$$

18.6.2 Modelos de un solo servidor

Esta sección presenta dos modelos para el caso de un solo servidor ($c = 1$). El primer modelo no limita el número máximo en el sistema, y el segundo supone un límite finito del sistema. Ambos modelos suponen una capacidad infinita de la fuente. Las llegadas ocurren a razón de λ clientes por unidad de tiempo y la tasa de servicio es μ clientes por unidad de tiempo.

Los resultados de los dos modelos (y de hecho de todos los modelos restantes en la sección 18.6) se deducen como casos especiales de los resultados del modelo generalizado de la sección 18.5.

Se utilizará la notación ampliada de Kendall para caracterizar cada situación. Debido a que las deducciones de p_n en la sección 18.5 y de todas las medidas de desempeño en la sección 18.6.1 son totalmente independientes de una disciplina de colas específica, se utilizará el símbolo *GD* (por las siglas de *general discipline*) con la notación.

(M/M/1):(GD/ ∞/∞). Si se utiliza la notación del modelo general,

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = \mu \end{array} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Incluso, $\lambda_{\text{ef}} = \lambda$ y $\lambda_{\text{perdida}} = 0$, porque todos los clientes pueden unirse al sistema.

Si $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ la expresión para p_n en el modelo generalizado se reduce a

$$p_n = \rho^n p_0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Para determinar el valor de p_0 se usa la identidad

$$p_0(1 + \rho + \rho^2 + \dots) = 1$$

La suma de la serie geométrica es $(\frac{1}{1 - \rho})$ siempre que $\rho < 1$. Así,

$$p_0 = 1 - \rho, \rho < 1$$

Entonces, la fórmula general para p_n está dada por la siguiente distribución geométrica:

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n, n = 1, 2, \dots (\rho < 1)$$

La derivación matemática de p_n impone la condición $\rho < 1$, o $\lambda < \mu$. Si $\lambda \geq \mu$, la serie geométrica diverge, y las probabilidades de estado estable p_n no existen. Este resultado tiene un sentido intuitivo, ya que a menos que la tasa de servicio sea mayor que la tasa de llegadas, la longitud de la cola continuará creciendo y no puede alcanzarse ningún estado estable.

La medida de desempeño L_s se puede deducir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L_s &= \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1 - \rho)\rho^n \\ &= (1 - \rho)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \\ &= (1 - \rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1 - \rho} \right) = \frac{\rho}{1 - \rho} \end{aligned}$$

Debido a que $\lambda_{\text{ef}} = \lambda$ para la situación presente, las medidas de desempeño restantes se calculan utilizando las relaciones dadas en la sección 18.6.1. Por lo tanto,

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}$$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

$$\bar{c} = L_s - L_q = \rho$$

Ejemplo 18.6-2

El servicio de lavado de automóviles Automata es una instalación de una sola bahía. Los vehículos llegan de acuerdo con una distribución de Poisson con una media de 4 autos por hora y pueden esperar en el estacionamiento de la instalación, o en la calle si la bahía está ocupada. El tiempo para lavar y limpiar un auto es exponencial, con una media de 10 minutos. Esto significa que, para todo propósito práctico, no hay ningún límite en el tamaño del sistema. El gerente de la instalación desea determinar el tamaño del estacionamiento.

Para esta situación se tienen $\lambda = 4$ autos por hora y $\mu = \frac{60}{10} = 6$ autos por hora. Como $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, el sistema puede operar en condiciones de estado estable. Los datos de TORA o *excelPoissonQ.xls* para este modelo son

Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
4	6	1	Infinito	Infinito

Los resultados del modelo se muestran en la figura 18.5. El promedio de autos que esperan en la cola, L_q , es de 1.33 autos.

Por lo general, no es aconsejable utilizar L_q como la única base para determinar la cantidad de espacios de estacionamiento, pues el diseño debería, en cierto sentido, tener en cuenta la longitud máxima posible de la cola. Por ejemplo, quizás sea más plausible diseñar el estacionamiento de modo que un auto que llega encuentre un espacio de al menos 90% de las veces. Para hacerlo, sea S la cantidad de espacios de estacionamiento. Tener S espacios de estacionamiento equivale a tener $S + 1$ espacios en el *sistema* (cola más bahía). Un auto que llega encontrará un espacio 90% de las veces si hay *cuando mucho* S autos en el sistema. Esta condición es equivalente al siguiente enunciado de probabilidad:

$$p_0 + p_1 + \dots + p_S \geq .9$$

A partir de la figura 18.5, la probabilidad *acumulada* p_n con $n = 5$ es .91221. Lo anterior significa que la condición se satisface con $S \geq 5$ espacios de estacionamiento.

La cantidad de espacios S se determina también por medio de la definición matemática de p_n —es decir,

$$(1 - \rho)(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^S) \geq .9$$

La suma de la serie geométrica truncada es $\frac{1 - \rho^{S+1}}{1 - \rho}$, la cual reduce la condición a

$$(1 - \rho^{S+1}) \geq .9$$

Scenario 1: (M/M/1) : (GD/infinity/infinity)

Lambda = 4.00000	Mu = 6.00000
Lambda eff = 4.00000	Rho/c = 0.66667

Ls = 2.00000	Lq = 1.33333
Ws = 0.50000	Wq = 0.33333

n	Probability pn	Cumulative Pn	n	Probability pn	Cumulative Pn
0	0.33333	0.33333	13	0.00171	0.99657
1	0.22222	0.55556	14	0.00114	0.99772
2	0.14815	0.70370	15	0.00076	0.99848
3	0.09877	0.80247	16	0.00051	0.99899
4	0.06584	0.86831	17	0.00034	0.99932
5	0.04390	0.91221	18	0.00023	0.99955
6	0.02926	0.94147	19	0.00015	0.99970
7	0.01951	0.96098	20	0.00010	0.99980
8	0.01301	0.97399	21	0.00007	0.99987
9	0.00867	0.98266	22	0.00004	0.99991
10	0.00578	0.98844	23	0.00003	0.99994
11	0.00385	0.99229	24	0.00002	0.99996
12	0.00257	0.99486	25	0.00001	0.99997

FIGURA 18.5

Resultados de TORA para el ejemplo 18.6-2 (archivo *toraEx18.6-2.txt*)

Al simplificar la desigualdad,

$$\rho^{S+1} \leq .1$$

Si se obtienen los logaritmos en ambos lados (y al observar que $\log(x) < 0$ para $0 < x < 1$, lo que invierte la dirección de la desigualdad), resulta

$$S \geq \frac{\ln (.1)}{\ln (\frac{4}{6})} - 1 = 4.679 \approx 5$$

(M/M/1):(GD/N/∞). Este modelo difiere de (M/M/1):(GD/∞/∞) en que hay un límite N en el número en el sistema (longitud máxima de la cola = $N - 1$). Algunos ejemplos incluyen situaciones de manufactura, en las cuales una máquina puede tener un espacio intermedio limitado, y una ventanilla de servicio en el automóvil en un restaurante de comida rápida. No se permiten nuevas llegadas cuando la cantidad de clientes en el sistema llega a N . Por lo tanto,

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 0, 1, \dots, N - 1 \\ 0, & n = N, N + 1 \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

Si se usa $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, el modelo generalizado de la sección 18.5 da

$$p_n = \begin{cases} \rho^n p_0 & n \leq N \\ 0, & n > N \end{cases}$$

El valor de p_0 se determina a partir de la ecuación $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ que da

$$p_0(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^N) = 1$$

o bien,

$$p_0 = \begin{cases} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}, & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{N + 1}, & \rho = 1 \end{cases}$$

Entonces,

$$p_n = \begin{cases} \frac{(1 - \rho)\rho^n}{1 - \rho^{N+1}}, & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{N + 1}, & \rho = 1 \end{cases}, n = 0, 1, \dots, N$$

El valor de $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ no tiene que ser menor que 1 en este modelo, porque el límite N controla las llegadas al sistema. Esto significa que λ_{ef} , y no λ , es la tasa que importa en este caso. Debido a que se pierden clientes cuando hay N en el sistema, entonces, como se indica en la figura 18.4,

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{perdida}} &= \lambda p_N \\ \lambda_{\text{ef}} &= \lambda - \lambda_{\text{perdida}} = \lambda(1 - p_N)\end{aligned}$$

En este caso, $\lambda_{\text{ef}} < \mu$.

La cantidad esperada de clientes en el sistema se calcula como

$$\begin{aligned}L_s &= \sum_{n=1}^N np_n \\ &= \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \sum_{n=0}^N n\rho^n \\ &= \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}\right) \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^N \rho^n \\ &= \frac{(1 - \rho)\rho}{1 - \rho^{N+1}} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1 - \rho^{N+1}}{1 - \rho}\right) \\ &= \frac{\rho[1 - (N + 1)\rho^N + N\rho^{N+1}]}{(1 - \rho)(1 - \rho^{N+1})}, \rho \neq 1\end{aligned}$$

Cuando $\rho = 1$, $L_s = \frac{N}{2}$ (¡verifíquelo!). Es posible deducir W_s , W_q y L_q a partir de L_s utilizando λ_{ef} como se muestra en la sección 18.6.1.

El uso de una calculadora de mano para procesar las fórmulas de colas es, en el mejor de los casos, incómodo (¡las fórmulas se vuelven más complejas en modelos posteriores!) Se recomienda utilizar TORA o la plantilla *excelPoissonQ.xls* para manejar estos cálculos.

Ejemplo 18.6-3

Considere la instalación de lavado de automóviles del ejemplo 18.6-2. Suponga que la instalación cuenta con un total de cuatro espacios de estacionamiento. Si el estacionamiento está lleno, los autos que llegan pueden irse a otras instalaciones. El propietario desea determinar el efecto del espacio de estacionamiento limitado en la pérdida de clientes frente a la competencia.

En términos de la notación del modelo, el límite en el sistema es $N = 4 + 1 = 5$. Los siguientes datos de entrada permiten obtener los resultados que aparecen en la figura 18.6.

Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
4	6	1	5	Infinito

Debido a que el límite en el sistema es $N = 5$, la proporción de clientes perdidos es $p_5 = .04812$, que con base en un día de 24 horas equivale a perder el negocio de $(\lambda p_5) \times 24 = 4 \times .04812 \times 24 = 4.62$ autos al día. La decisión en cuanto a incrementar el tamaño del lote de estacionamiento debería basarse en el valor del negocio perdido.

Si se observa el problema desde un ángulo diferente, el tiempo total esperado en el sistema, W_s , es de .3736 horas, o aproximadamente 22 minutos, por debajo de los 30 minutos del ejemplo 18.6-3, cuando se permite que todos los autos que lleguen se unan a la instalación. Esta reducción de aproximadamente 25% se asegura a expensas de perder alrededor de 4.8% de todos los clientes potenciales por el espacio de estacionamiento limitado.

18.6.3 Modelos de varios servidores

Esta sección considera tres modelos de colas con varios servidores paralelos. Los primeros dos modelos son las versiones de varios servidores de los modelos de la sección 18.6.2. El tercer modelo trata el caso del autoservicio, que es equivalente a tener una cantidad infinita de servidores paralelos.

FIGURA 18.6

Resultados de TORA para el ejemplo 18.6-4 (archivo toraEx18.6-4.txt)

Scenario 1: (M/M/1) : (GD/5/infinity)

Lambda = 4.00000	Mu = 6.00000
Lambda eff = 3.80752	Rho/c = 0.66667
Ls = 1.42256	Lq = 0.78797
Ws = 0.37362	Wq = 0.20695

n	Probability pn	Cumulative Pn	n	Probability pn	Cumulative Pn
0	0.36541	0.36541	3	0.10827	0.87970
1	0.24361	0.60902	4	0.07218	0.95188
2	0.16241	0.77143	5	0.04812	1.00000

Aplicación de la vida real: Planeación del personal de ventas por teléfono en Qantas Airways

Para reducir los costos de operación, Qantas Airways busca dotar de personal a su oficina principal de reservaciones y ventas por teléfono de forma eficiente, al mismo tiempo que brinda un servicio de calidad a sus clientes. Tradicionalmente, las necesidades de personal se estiman pronosticando las llamadas telefónicas futuras con base en el incremento histórico del negocio. Después, el aumento en la cantidad de empleados se calcula según el incremento promedio proyectado de las llamadas telefónicas, dividido entre el promedio de llamadas que un operador puede manejar. Debido a que los cálculos se basan en promedios, la cantidad adicional de empleados contratados no toma en cuenta las fluctuaciones de la demanda durante el día. En particular, el largo tiempo de espera para el servicio durante horas laborales pico ha ocasionado quejas de los clientes y en consecuencia pérdida de negocios. El problema tiene que ver con la determinación de un plan que equilibre el número de empleados contratados y las necesidades de los clientes. La solución utiliza el análisis de colas ($M/M/c$) incrustado en un modelo de programación entera. Los ahorros a partir del modelo en la oficina de Sydney fueron alrededor de \$173,000 en el año fiscal 1975-1976. (Los detalles del estudio se explican en el caso 17 del capítulo 26, disponible en inglés en el sitio web de este libro).

($M/M/c$):($G/D/\infty/\infty$). Este modelo trata con c servidores paralelos idénticos. La tasa de llegadas es λ y la tasa de servicio por servidor es μ . En esta situación $\lambda_{\text{ef}} = \lambda$ porque no hay límite en el número presente en el sistema.

El efecto de utilizar c servidores idénticos paralelos es un incremento proporcional en la tasa de servicio de la instalación. Por lo tanto, en términos del modelo generalizado (sección 18.5), λ_n y μ_n se definen como

$$\lambda_n = \lambda, \quad n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n < c \\ c\mu, & n \geq c \end{cases}$$

Así que,

$$p_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\dots(n\mu)} p_0 = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} p_0, & n < c \\ \frac{\lambda^n}{(\prod_{i=1}^c i\mu)(c\mu)^{n-c}} p_0 = \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} p_0 = \frac{\rho^n}{c!c^{n-c}} p_0, & n \geq c \end{cases}$$

Si $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ y se supone que $\frac{\rho}{c} < 1$, el valor de p_0 se determina a partir de $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, que resulta en

$$\begin{aligned} p_0 &= \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c} \right)^{n-c} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{c}} \right) \right\}^{-1}, \quad \frac{\rho}{c} < 1 \end{aligned}$$

La expresión para L_q se determina como sigue:

$$\begin{aligned}
 L_q &= \sum_{n=c}^{\infty} (n - c) p_n \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} kp_{k+c} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^{k+c}}{c^k c!} p_0 \\
 &= \frac{\rho^{c+1}}{c! c} p_0 \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1} \\
 &= \frac{\rho^{c+1}}{c! c} p_0 \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^k \\
 &= \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} p_0
 \end{aligned}$$

Porque $\lambda_{\text{ef}} = \lambda$, $L_s = L_q + \rho$. Las medidas W_s y W_q se determinan dividiendo L_s y L_q entre λ .

Ejemplo 18.6-4

Dos compañías de taxis prestan servicio a una comunidad. Cada compañía posee dos taxis, y ambas comparten el mercado por igual; las llamadas llegan a la oficina de despachos de cada compañía a una tasa promedio de ocho por hora. El tiempo promedio por viaje es de 12 minutos. Las llamadas llegan de acuerdo con una distribución de Poisson y el tiempo de viaje es exponencial. Las dos compañías fueron adquiridas por un inversionista y se consolidarán en una sola oficina de despachos. Analice la propuesta del nuevo propietario.

Desde el punto de vista de las colas, los taxis son los servidores, y el viaje en el taxi es el servicio. Cada compañía puede representarse mediante el modelo $(M/M/2):(GD/\infty/\infty)$ con $\lambda = 8$ llamadas por hora y $\mu = \frac{60}{10} = 5$ viajes por taxi por hora. El modelo consolidado es $(M/M/4):(GD/\infty/\infty)$ con $\lambda = 2 \times 8 = 16$ llamadas por hora y $\mu = 5$ viajes por taxi por hora.

Una medida adecuada para comparar los dos modelos es el tiempo de espera promedio para un viaje, W_q . La siguiente tabla presenta los datos de entrada de análisis comparativos de Tora.

Escenario	Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
1	8	5	2	Infinito	Infinito
2	16	5	4	Infinito	Infinito

En la figura 18.7 se muestran los resultados con los dos escenarios. Los resultados indican que el tiempo de espera para un viaje es de .356 horas (≈ 21 minutos) en la situación de dos taxis y de .149 (≈ 9 minutos) en la situación consolidada, una notable reducción de más de 50% y una clara evidencia de que está garantizada la consolidación de las dos compañías.

Comparative analysis

c	Lambda	Mu	L' da eff	p0	Ls	Ws	Lq	Wq
2	8.000	5.000	8.00	0.110	4.444	0.556	2.844	0.356
4	16.000	5.000	16.00	0.027	5.586	0.349	2.386	0.149

FIGURA 18.7

Resultados de TORA para el ejemplo 18.6-4 (archivo *toraEx.18.6-4.txt*)

Comentarios. La conclusión del análisis anterior es que los **grupos de servicio** *siempre* proporcionan un modo de operación más eficiente. Esta conclusión es cierta incluso si las instalaciones distintas resultan estar “muy ocupadas” (vea el problema 18-69 y su generalización matemática en el problema 18-77). Aún más, parece intuitivamente plausible que el modo de funcionamiento de los grupos de servicio se aplique incluso si la situación de colas no sigue el modelo de Poisson (para más información al respecto, vea el *Momento de Excel* posterior a la sección 19.5.2). De hecho, este notable resultado parece haber ganado amplia aceptación en Estados Unidos y en el extranjero, como se observa en las oficinas de correos, los puestos de seguridad aeroportuarios y el despacho de aduanas en las llegadas internacionales, y las cajas de salida en los supermercados, entre otras aplicaciones.

(M|M|c):(GD|N|∞), c ≤ N. El modelo difiere de (M|M|c):(GD/∞/∞) en que el límite del sistema es finito e igual a N . Esto significa que el tamaño máximo de la cola es $N - c$. Las tasas de llegadas y de servicio son λ y μ . La tasa de llegadas efectiva λ_{ef} es menor que λ debido al límite del sistema, N .

En términos del modelo generalizado (sección 18.5), para el modelo actual λ_n y μ_n se definen como

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \begin{cases} \lambda, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & n > N \end{cases} \\ \mu_n &= \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n \leq c \\ c\mu, & c \leq n \leq N \end{cases}\end{aligned}$$

Al sustituir λ_n y μ_n en la expresión general de la sección 18.5 y observando que $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, se obtiene

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0, & 0 \leq n < c \\ \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} p_0, & c \leq n \leq N \end{cases}$$

donde

$$p_0 = \begin{cases} \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c (1 - (\frac{\rho}{c})^{N-c+1})}{c!(1 - \frac{\rho}{c})} \right)^{-1}, & \frac{\rho}{c} \neq 1 \\ \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} (N - c + 1) \right)^{-1}, & \frac{\rho}{c} = 1 \end{cases}$$

En seguida, se calcula L_q en el caso donde $\frac{\rho}{c} \neq 1$ como

$$\begin{aligned}
 L_q &= \sum_{n=c}^N (n - c)p_n \\
 &= \sum_{j=0}^{N-c} j p_{j+c} \\
 &= \frac{\rho^c \rho}{c! c} p_0 \sum_{j=0}^{N-c} j \left(\frac{\rho}{c}\right)^{j-1} \\
 &= \frac{\rho^{c+1}}{cc!} p_0 \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{j=0}^{N-c} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j \\
 &= \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1} - (N-c+1)\left(1 - \frac{\rho}{c}\right)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} \right\} p_0
 \end{aligned}$$

Se demuestra que para $\frac{\rho}{c} = 1$, L_q se reduce a

$$L_q = \frac{\rho^c (N-c)(N-c+1)}{2c!} p_0, \frac{\rho}{c} = 1$$

Para determinar W_q y por consiguiente W_s y L_s , se calcula el valor de λ_{ef} como

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\text{perdida}} &= \lambda p_N \\
 \lambda_{\text{ef}} &= \lambda - \lambda_{\text{perdida}} = (1 - p_N) \lambda
 \end{aligned}$$

Ejemplo 18.6-5

En el problema de la compañía de taxis consolidada del ejemplo 18.6-4, suponga que no pueden asegurarse nuevos fondos para la compra de más taxis. Se le aconsejó al propietario que una forma de reducir el tiempo de espera es que la oficina de despachos informe a los nuevos clientes sobre una demora potencial excesiva, una vez que la lista de espera sea de seis clientes. La expectativa es que estos clientes busquen el servicio en otro lado, lo que a su vez reducirá el tiempo de espera promedio de quienes ya están en la lista de espera. Evalúe la situación.

Limitar la lista de espera a 6 clientes equivale a hacer $N = 6 + 4 = 10$ clientes, lo que conduce al modelo $(M/M/4):(GD/10/\infty)$ con $\lambda = 16$ clientes por hora y $\mu = 5$ viajes por hora. Los siguientes datos de entrada proporcionan los resultados de la figura 18.8.

Lambda	Mu	C	Límite del sistema	Límite de la fuente
16	5	4	10	Infinito

El tiempo de espera promedio, W_q , antes de limitar la capacidad del sistema es de .149 horas (≈ 9 minutos) (vea la figura 18.7), lo cual es aproximadamente el doble del nuevo promedio de .075 horas (≈ 4.5 minutos). Esta notable reducción se logra a expensas de perder alrededor de 3.6% de los clientes potenciales ($p_{10} = .03574$). Sin embargo, este resultado no refleja la pérdida intangible de la buena disposición de los clientes en relación con la operación de la compañía.

Scenario1: (M/M/4) : (GD/10/infinity)

Lambda =	16.00000	Mu =	5.00000		
Lambda eff =	15.42815	Rho/c =	0.80000		
Ls =	4.23984	Lq =	1.15421		
Ws =	0.27481	Wq =	0.07481		
<hr/>					
n	Probability pn	Cumulative Pn	n	Probability pn	Cumulative Pn
0	0.03121	0.03121	6	0.08726	0.79393
1	0.09986	0.13106	7	0.06981	0.86374
2	0.15977	0.29084	8	0.05584	0.91958
3	0.17043	0.46126	9	0.04468	0.96426
4	0.13634	0.59760	10	0.03574	1.00000

FIGURA 18.8

Resultados de TORA para el ejemplo 18.6-5 (archivo *toraEx18.6-5.txt*)

(M/M/ ∞):(GD/ ∞/∞)—Modelo de autoservicio. En este modelo, las tasas de llegadas y servicio son λ y μ , respectivamente, y la cantidad de servidores es ilimitada porque el cliente también es el servidor. Un ejemplo típico es realizar la parte escrita del examen para la licencia de conductor. Las gasolineras de autoservicio y los bancos automáticos que operan durante las 24 horas del día no caen dentro de este modelo, porque los servidores en estos casos son en realidad las bombas de gasolina y los cajeros automáticos.

En términos del modelo general de la sección 18.5, se tiene

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_n = n\mu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por lo tanto,

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, se sigue que

$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots} = \frac{1}{e^\rho} = e^{-\rho}$$

Como resultado,

$$p_n = \frac{e^{-\rho} \rho^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

que es de Poisson con media $L_s = \rho$. Como era de esperarse, L_q y W_q son cero porque se trata de una instalación de autoservicio.

Ejemplo 18.6-6

Una persona invierte \$1000 al mes, en promedio, en el mercado de valores. Debido a que el inversionista debe esperar una buena oportunidad para “comprar”, el tiempo real de compra es aleatorio. El inversionista suele conservar los valores durante unos 3 años en promedio, pero los vende al azar cuando se le presenta una buena oportunidad para “vender”. Aunque al inversionista se le suele reconocer como un astuto corredor del mercado bursátil, la experiencia pasada indica que alrededor de 25% de los valores declinan aproximadamente a 20% al año. El 75% restante aumenta de valor a razón de 12% al año. Estime el capital accionario promedio (a largo plazo) del inversionista en el mercado de valores.

Esta situación se puede tratar como $(M/M/\infty):(GD/\infty/\infty)$ porque, para todos los propósitos prácticos, el inversionista no tiene que esperar en línea para comprar o vender sus valores. El tiempo promedio entre colocaciones de pedidos es de 1 mes, lo cual produce $\lambda = 12$ valores por año. La tasa de venta de los valores es $\mu = \frac{1}{3}$ de valor al año. Usted puede asegurar los resultados del modelo con los siguientes datos de entrada:

Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
12	.3333333	Infinito	Infinito	Infinito

Dados los valores de λ y μ , se obtiene

$$L_s = \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 36 \text{ valores}$$

La estimación del valor neto *anual* promedio (a largo plazo) del inversionista es

$$(.25L_s \times \$1000)(1 - .20) + (.75L_s \times \$1000)(1 + .12) = \$63,990$$

18.6.4 Modelo de servicio de máquinas ($M/M/R):(GD/K/K)$, $R < K$

El ámbito de este modelo es un taller con K máquinas. Cuando una máquina se descompone, se llama a uno de los técnicos en mantenimiento R para que la repare. La tasa de descomposturas *por máquina* es λ descomposturas por unidad de tiempo, y un técnico reparará las máquinas descompostas a razón de μ máquinas por unidad de tiempo. Todas las descomposturas y servicios siguen la distribución de Poisson.

La fuente en este modelo es finita porque las máquinas que están funcionando pueden descomponerse y, por consiguiente, puede generar llamadas de servicio. Una vez que todas las máquinas se descompongan, no podrá haber más llamadas de servicio.

Dada λ , que es la tasa de descomposturas *por máquina*, la tasa de descomposturas de *todo el taller* es proporcional a la cantidad de máquinas que están funcionando. En función del modelo de colas, tener n máquinas *en el sistema* significa que n máquinas están descompostas, y que la tasa de descomposturas asociada de todo el taller es

$$\lambda_n = (K - n)\lambda, 0 \leq n \leq K$$

En términos del modelo generalizado de la sección 18.5, se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \begin{cases} (K - n)\lambda, & 0 \leq n \leq K \\ 0, & n \geq K \end{cases} \\ \mu_n &= \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n \leq R \\ R\mu, & R \leq n \leq K \end{cases} \end{aligned}$$

A partir del modelo generalizado se puede obtener (¡verifíquelo!)

$$p_n = \begin{cases} C_n^K \rho^n p_0, & 0 \leq n \leq R \\ C_n^K \frac{n! \rho^n}{R! R^{n-R}} p_0, & R \leq n \leq K \end{cases}$$

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^R C_n^K \rho^n + \sum_{n=R+1}^K C_n^K \frac{n! \rho^n}{R! R^{n-R}} \right)^{-1}$$

No hay ninguna expresión de forma cerrada para L_s y por ende debe calcularse mediante la siguiente definición básica:

$$L_s = \sum_{n=0}^K np_n$$

El valor de λ_{ef} se calcula como

$$\lambda_{\text{ef}} = E\{\lambda(K - n)\} = \lambda(K - L_s)$$

Si se utilizan las fórmulas de la sección 18.6.1, es posible calcular las medidas de desempeño restantes W_s , W_q y L_q .

Ejemplo 18.6-7

Toolco opera un taller con 22 máquinas. En promedio, una máquina se descompone cada 2 horas. Se requiere un promedio de 12 minutos para terminar una reparación. Tanto el tiempo entre descomposturas como el tiempo de reparación son exponenciales. Toolco está interesada en determinar la cantidad de técnicos en reparaciones necesarios para mantener el taller funcionando “fluidamente”.

La situación se analiza investigando la productividad de las máquinas en función de la cantidad de técnicos, definida como

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{Productividad} \\ \text{de las máquinas} \end{array} \right) &= \frac{\text{Máquinas disponibles} - \text{Máquinas descompuestas}}{\text{Máquinas disponibles}} \times 100 \\ &= \frac{22 - L_s}{22} \times 100 \end{aligned}$$

Los resultados en esta situación se obtienen utilizando los siguientes datos de entrada: $\lambda = .5$,

FIGURA 18.9

Resultados del análisis comparativo de TORA para el ejemplo 18.6-7 (archivo *toraEx18.6-7.txt*)

Comparative Analysis

c	Lambda	Mu	L' da eff	p0	Ls	Lq	Ws	Wq
1	0.500	5.00	4.9980	0.0004	12.0040	11.0044	2.4018	2.2018
2	0.500	5.00	8.8161	0.0564	4.3677	2.6045	0.4954	0.2954
3	0.500	5.00	9.7670	0.1078	2.4660	0.5128	0.2525	0.0525
4	0.500	5.00	9.9500	0.1199	2.1001	0.1102	0.2111	0.0111

$\mu = 5$, $R = 1, 2, 3$ o 4 , límite del sistema = 22, y límite de la fuente = 22. En la figura 18.9 se proporcionan los resultados. La siguiente tabla da la productividad asociada en función del número de técnicos en reparaciones.

Técnico en reparación, R	1	2	3	4
Productividad de las máquinas (100%)	45.44	80.15	88.79	90.45
Incremento marginal (100%)	—	34.71	8.64	1.66

Los resultados muestran que con un técnico la productividad es baja ($= 45.44\%$). Si se aumenta la cantidad de técnicos a dos, la productividad aumenta 34.71% hasta 80.15%. Cuando el taller emplea tres técnicos, la productividad se incrementa sólo en aproximadamente 8.64% hasta 88.79%; mientras que cuatro técnicos incrementarán la productividad en un escaso 1.66% hasta 90.45%.

A partir de estos resultados se puede justificar el uso de dos técnicos. El caso de tres no es tan fuerte porque eleva la productividad en sólo 8.64%. Tal vez una comparación monetaria entre el costo de contratar un tercer técnico y el ingreso atribuido al incremento de 8.64% de la productividad pueda usarse para resolver este punto (vea en la sección 18.10 un análisis de los modelos de costos).

18.7 $(M/G/1):(GD/\infty/\infty)$ —FÓRMULA DE POLLACZEK-KHINTCHINE (P-K)

Son complejos los modelos de colas donde las llegadas y salidas no siguen la distribución de Poisson. En general, es aconsejable utilizar la simulación como una herramienta alternativa para analizar estas situaciones (vea el capítulo 19).

En esta sección se presenta una de las pocas colas que no son de Poisson y para la cual hay resultados analíticos disponibles. Se trata del caso en que el tiempo de servicio, t , está representado por cualquier distribución de probabilidad con media $E\{t\}$ y varianza $\text{var}\{t\}$. Los resultados del modelo incluyen las medidas de desempeño básicas L_s , L_q , W_s y W_q , así como p_0 . El modelo no ofrece una expresión de forma cerrada para p_n debido a la intratabilidad analítica.

Sea λ la tasa de llegadas a la instalación de un solo servidor. Dadas $E\{t\}$ y $\text{var}\{t\}$ de la distribución del tiempo de servicio y dado que $\lambda E\{t\} < 1$, se puede demostrar por medio de un análisis de cadena de Markov y probabilidad sofisticada que

$$L_s = \lambda E\{t\} + \frac{\lambda^2(E^2\{t\} + \text{var}\{t\})}{2(1 - \lambda E\{t\})}, \quad \lambda E\{t\} < 1$$

La probabilidad de que la instalación esté vacía (ociosa) se calcula como

$$p_0 = 1 - \lambda E\{t\} = 1 - \rho$$

Dada $\lambda_{\text{ef}} = \lambda$, las medidas de desempeño restantes (L_q , W_s y W_q) se deducen a partir de L_s como se explica en la sección 18.6.1.

La plantilla *excelPKFormula.xls* automatiza los cálculos de este modelo.

Ejemplo 18.7-1

En la instalación de lavado de automóviles Automata del ejemplo 18.6-2, suponga que se instala un sistema nuevo, de modo que el tiempo de servicio de todos los autos es constante e igual a 10 minutos. ¿Cómo afecta el nuevo sistema al funcionamiento de la instalación?

A partir del ejemplo 18.6-2, $\lambda_{\text{ef}} = \lambda = 4$ autos por hora. El tiempo de servicio es constante de modo que $E\{t\} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ hora y $\text{var}\{t\} = 0$. Por lo tanto,

$$L_s = 4\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{4^2\left(\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 0\right)}{2\left(1 - \frac{4}{6}\right)} = 1.33 \text{ autos}$$

$$L_q = 1.333 - \left(\frac{1}{6}\right) = .667 \text{ autos}$$

$$W_s = \frac{1.333}{4} = .333 \text{ horas}$$

$$W_q = \frac{.667}{4} = .167 \text{ horas}$$

Es interesante comparar los tiempos de espera con los del caso de Poisson en el ejemplo 18.6-2, $(M/D/1):(GD/\infty/\infty)$. Las tasas de llegadas y salidas son las mismas en ambos casos ($\lambda = 4$ autos por hora y $\mu = \frac{1}{E\{t\}} = 6$ autos por hora). No obstante, como se muestra en la tabla siguiente, el tiempo de espera promedio es menor en el modelo actual. Los resultados tienen sentido porque un tiempo de servicio constante indica *más certeza* en la operación de la instalación. De hecho, la fórmula P-K muestra que el tiempo de espera aumenta cuando $\text{Var}\{t\}$ se incrementa (de nuevo debido al aumento de la incertidumbre en el funcionamiento del sistema de colas).

	$(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$	$(M/D/1):(GD/\infty/\infty)$
W_s (hr)	.500	.333
W_q (hr)	.333	.167

18.8 OTROS MODELOS DE COLAS

Las secciones anteriores se concentraron en el modelo de colas de Poisson. En la literatura sobre colas abundan otros tipos de colas. En particular, las colas con prioridad de servicio, las colas en red y las colas que no son de Poisson forman un importante cuerpo de la literatura de teoría de colas. Estos modelos se encuentran en la mayoría de libros especializados en la teoría de colas.

Comentarios. Los modelos de colas de Poisson han tenido grandes éxitos en una serie de áreas, incluyendo las telecomunicaciones y la informática. De hecho, la teoría de colas fue iniciada a principios del siglo xx por el matemático danés A. K. Erlang, sobre la necesidad práctica de decidir cuántas centrales telefónicas automáticas deberían utilizarse para satisfacer la demanda de llamadas telefónicas en su ciudad. Uno de los aspectos más convenientes de los modelos de Poisson es que, prácticamente en todos los casos, las fórmulas para determinar las medidas de desempeño del sistema en estado estable son computacionalmente manejables. Pero por desgracia, no todos los modelos de colas son de Poisson, y la variedad de situaciones de colas de la vida real en las que los supuestos de Poisson no se aplican son numerosas y tangibles. Los modelos más prometedores son $D/M/1$ y $D/M/c$ de Erlang con tiempo constante entre llegadas y el modelo Pollaczek-Khintchine $M/G/1$ con distribución general del tiempo de servicio (sección 18.7). Aunque se han realizado esfuerzos para resolver el modelo general $G/G/c$ donde se puede utilizar cualquier distribución de probabilidad, las matemáticas de alto nivel asociadas con estos modelos resultaron en información “irregular” o aproximada sobre las medidas de desempeño

del sistema. Asimismo, la calidad y facilidad de uso de estos resultados no están a la altura de los modelos de Poisson.

La simulación es una herramienta alternativa para analizar situaciones de colas complejas, imitando con la computadora literalmente su comportamiento en la vida real. Las medidas de desempeño se obtienen observando el comportamiento del sistema y recopilando estadísticas pertinentes a medida que la simulación progresó en el tiempo. Aunque la simulación es una herramienta altamente flexible, tiene sus inconvenientes. El capítulo 19 se dedica a presentar los detalles de esta importante herramienta.

18.9 MODELOS DE DECISIÓN EN COLAS

El *nivel de servicio* en una instalación de colas es una función de la tasa de servicios, μ , y de la cantidad de servidores paralelos, c . En esta sección se presentan dos modelos de decisión para determinar los niveles de servicio “adecuados” en sistemas de colas: (1) un modelo de costos y (2) un modelo de nivel de aspiración. Ambos modelos reconocen que los altos niveles de servicio reducen el tiempo de espera en el sistema. El objetivo es encontrar un equilibrio entre el nivel de servicio y la espera.

18.9.1 Modelos de costos

Los modelos de costos intentan equilibrar dos costos conflictivos:

1. El costo por ofrecer el servicio.
2. El costo de la demora al ofrecer el servicio (tiempo de espera del cliente).

Un incremento de un costo provoca automáticamente una reducción del otro, como se demostró antes en la figura 18.1.

Si x ($= \mu$ o c) representa el nivel de servicio, el modelo de costos se expresa como

$$ETC(x) = EOC(x) + EWC(x)$$

donde

ETC = Costo total promedio *por unidad de tiempo*

EOC = Costo de operación promedio de la instalación *por unidad de tiempo*

EWC = Costo de espera promedio *por unidad de tiempo*

Las formas más simples de EOC y EWC son las siguientes funciones lineales:

$$EOC(x) = C_1x$$

$$EWC(x) = C_2L_s$$

donde

C_1 = Costo *marginal* por unidad de x por unidad de tiempo

C_2 = Costo de espera por unidad de tiempo por cliente (en espera)

Los dos ejemplos siguientes ilustran el uso del modelo de costos. El primer ejemplo supone que $x = \mu$ y el segundo que $x = c$.

Ejemplo 18.9-1

KeenCo Publishing está en el proceso de comprar una copiadora comercial de alta velocidad. Los vendedores propusieron cuatro modelos, cuyas especificaciones se resumen a continuación.

Modelo de copiadora	Costo de operación (\$/hr)	Velocidad (hojas/min)
1	15	30
2	20	36
3	24	50
4	27	66

Los trabajos llegan a KeenCo en una corriente de Poisson a razón de cuatro trabajos por día de 24 horas. El tamaño del trabajo es aleatorio con promedios aproximadamente de 10,000 hojas por trabajo. Los contratos con los clientes especifican un costo de penalización diaria por entrega retrasada de \$80 por trabajos. ¿Cuál copiadora debería comprar KeenCo?

El costo total esperado *por día* asociado con la copiadora *i* es

$$\begin{aligned} ETC_i &= EOC_i + EWC_i \\ &= C_{1i} \times 24 + C_{2i}L_{si} \\ &= 24C_{1i} + 80L_{si}, i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Los datos del problema dan los valores de C_{1i} . Se determina L_{si} al reconocer que, para todo propósito práctico, cada copiadora puede tratarse como un modelo $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$. La tasa de llegadas es $\lambda = 4$ trabajos/día. La tasa de servicios μ_i asociada con el modelo *i* se calcula como

Modelo <i>i</i>	Tasa de servicio μ_i (trabajos/día)
1	4.32
2	5.18
3	7.20
4	9.50

El cálculo de la tasa de servicio se demuestra para el modelo 1.

$$\text{Tiempo promedio por trabajo} = \frac{10,000}{30} \times \frac{1}{60} = 5.56 \text{ horas}$$

Por lo tanto,

$$\mu_1 = \frac{24}{5.56} = 4.32 \text{ trabajos/día}$$

Los valores de L_{si} —calculados por TORA o *excelPoissonQ.xls*— se dan en la siguiente tabla:

Modelo <i>i</i>	λ_i (Trabajos/día)	μ_i (Trabajos/día)	L_{si} (Trabajos)
1	4	4.32	12.50
2	4	5.18	3.39
3	4	7.20	1.25
4	4	9.50	0.73

Los costos de los cuatro modelos se calculan como sigue:

Modelo i	EOC_i (\$)	EWC_i (\$)	ETC_i (\$)
1	360.00	1000.00	1360.00
2	480.00	271.20	751.20
3	576.00	100.00	676.00
4	648.00	58.40	706.40

El modelo 3 produce el costo mínimo.

Ejemplo 18.9-2

En un almacén de herramientas con varios empleados, las solicitudes de cambio de herramientas llegan de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 17.5 solicitudes por hora. Cada empleado puede manejar un promedio de 10 solicitudes por hora. El costo de contratar un nuevo empleado en la instalación es de \$12 por hora. El costo de la producción perdida por cada hora que una máquina está en espera es aproximadamente de \$50. Determine la cantidad óptima de empleados para la instalación.

La situación corresponde a un modelo $(M/M/c)$, donde se desea determinar el valor óptimo de c . Por lo tanto, en el modelo de costos general presentado al inicio de esta sección, con $x = c$, se obtiene el siguiente modelo de costos:

$$\begin{aligned} ETC(c) &= C_1c + C_2L_s(c) \\ &= 12c + 50L_s(c) \end{aligned}$$

Observe que $L_s(c)$ es una función de la cantidad de empleados (paralelos) en el almacén.

Se usa $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$ con $\lambda = 17.5$ solicitudes por hora y $\mu = 10$ solicitudes por hora. El estado estable se alcanza sólo si $c > \frac{\lambda}{\mu}$ —es decir, $c \geq 2$ en este ejemplo. La tabla siguiente presenta los cálculos necesarios para determinar el c óptimo. Los valores de $L_s(c)$ (determinados mediante *excelPoissonQ.xls* o TORA) muestran que el número óptimo de empleados es 4.

c	$L_s(c)$ (solicitudes)	$ETC(c)$ (\$)
2	7.467	397.35
3	2.217	146.85
4	1.842	140.10
5	1.769	148.45
6	1.754	159.70

18.9.2 Modelo del nivel de aspiración

La viabilidad del modelo de costos depende de qué tan bien se puedan estimar los parámetros de costos. En general, estos parámetros son difíciles de estimar, sobre todo el asociado con el tiempo de espera de los clientes. El modelo de nivel de aspiración alivia esta dificultad al trabajar directamente con las medidas de desempeño de la situación de colas. La idea es determinar un intervalo aceptable para el nivel de servicio (μ o c) especificando límites razonables en las medidas de desempeño conflictivas. Esos límites son los **niveles de aspiración** que desea alcanzar el tomador de decisiones.

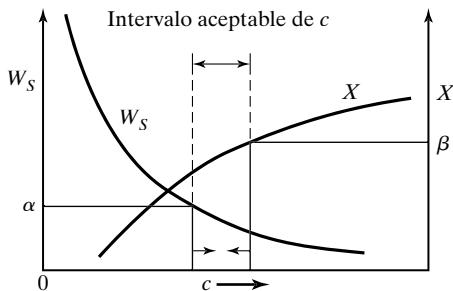


FIGURA 18.10
Aplicación de los niveles de aspiración
en la toma de decisiones de colas

El modelo se aplica al modelo de varios servidores para determinar una cantidad “aceptable” de servidores, c^* , tomando en cuenta dos medidas de desempeño (conflictivas):

1. El tiempo promedio en el sistema, W_s .
2. El porcentaje de ociosidad de los servidores, X .

El porcentaje de ociosidad se calcula como sigue:

$$X = \frac{c - \bar{c}}{c} \times 100 = \frac{c - (L_s - L_q)}{c} \times 100 = \left(1 - \frac{\lambda_{\text{ef}}}{c\mu}\right) \times 100$$

(Vea la comprobación en el problema 18-79).

El problema se reduce a determinar la cantidad de servidores c^* tal que

$$W_s \leq \alpha \quad \text{y} \quad X \leq \beta$$

Las constantes α y β son los niveles de aspiración especificados por el tomador de decisiones. Por ejemplo, $\alpha = 3$ minutos y $\beta = 10\%$.

La solución del problema puede determinarse trazando una gráfica de W_s y X en función de c , como se muestra en la figura 18.10. Al localizar α y β en la gráfica, es posible determinar un intervalo aceptable para c^* . Si no se pueden satisfacer las dos condiciones al mismo tiempo, entonces una o ambas deben relajarse antes de que se encuentre un intervalo factible.

Ejemplo 18.9-3

En el ejemplo 18.9-2, suponga que se desea determinar la cantidad de empleados tal que el tiempo de espera hasta que se recibe una herramienta permanezca por debajo de 5 minutos. Al mismo tiempo, el porcentaje de ociosidad debería estar por debajo de 20%.

Sin pensarlo mucho, y antes de realizar cualquier cálculo, un límite de aspiración de 5 minutos en el tiempo de espera hasta que se recibe una herramienta (es decir, $W_s \leq 5$ minutos) es inalcanzable porque, según los datos del problema, el tiempo de servicio promedio sólo es de 6 minutos.

La siguiente tabla resume W_s y X como una función de c :

c	2	3	4	5	6	7	8
W_s (min)	25.4	7.6	6.3	6.1	6.0	6.0	6.0
X (%)	12.5	41.7	56.3	65.0	70.8	75.0	78.0

Con base en estos resultados, es necesario reducir el tiempo de servicio, o reconocer que la causa del problema es que las herramientas se solicitan a una tasa irrazonablemente alta ($\lambda = 17.5$ solicitudes por hora). Ésta, sin duda, es el área que debería atacarse. Por ejemplo, sería deseable investigar la razón de una demanda tan alta en el reemplazo de herramientas. ¿Podría ser que el diseño de la herramienta en sí esté defectuoso? ¿O que los operadores de las máquinas tratan a propósito de interrumpir la producción para expresar sus quejas?

BIBLIOGRAFÍA

- Bose, S., *An Introduction to Queueing Systems*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.
- Chhajed, D. y T. Lowe (eds.), *Building Intuition: Insights From Basic Operations Management Models and Principles* (capítulo 5), Springer Science, Nueva York, 2008.
- Gross, D. y M. Harris, *Fundamentals of Queueing Theory*, 3a. ed., Wiley, Nueva York, 1998.
- Lee, A., *Applied Queueing Theory*, St. Martin's Press, Nueva York, 1966.
- Lipsky, L., *Queueing Theory, A Linear Algebraic Approach*, Macmillan, Nueva York, 1992.
- Saaty, T., *Elements of Queueing Theory with Applications*, Dover, Nueva York, 1983.
- Stone, A., "Why Waiting Is Torture", *The New York Times*, 18 de agosto de 2012.
- Tanner, M., *Practical Queueing Analysis*, McGraw-Hill, Nueva York, 1995.

Estudio de caso: Análisis de un sistema de transporte interno en una planta de manufactura²

Herramientas: Teoría de colas, simulación

Área de aplicación: Manejo de materiales

Descripción de la situación:

En una planta de manufactura se utilizan tres camiones para transportar materiales. Los camiones esperan en un estacionamiento central hasta que los solicitan. Un camión solicitado viajará a la ubicación del cliente, llevará la carga al destino y luego regresará al estacionamiento central. El usuario principal del servicio es producción (P) seguida por el taller (W) y mantenimiento (M). Otros departamentos (O) ocasionalmente pueden solicitar el uso de los camiones. Las quejas sobre la larga espera por un camión libre han llevado a los usuarios, especialmente producción, a solicitar la adición de un cuarto camión a la flotilla. El estudio trata de la justificación del costo de un cuarto camión.

Resumen de datos de entrada:

La información sobre el funcionamiento del sistema de transporte interno se recopiló durante un periodo de 17 días consecutivos de trabajo en dos turnos. Las tablas 18.1 y 18.2 proporcionan un resumen de los datos recopilados. En la tabla 18.1 se tiene la tasa promedio de solicitudes (tasa de llegada), el tiempo promedio que el camión está en uso (tiempo de servicio), así como el tiempo de espera promedio por una solicitud. La tabla 18.2 indica la cantidad de camiones en uso en función del número de solicitudes realizadas a lo largo del periodo de observación.

² Fuente: G. P. Cosmetatos, "The Value of Queueing Theory—A Case Study," *Interfaces*, vol. 9, núm. 3, pp. 47-51, 1979.

TABLA 18.1 Datos resumidos de la operación del sistema de transporte interno

	Usuario de camión				
	P	W	M	O	Global
Cantidad promedio de solicitudes de camiones por hora	3.02	.84	.26	.48	4.6
Tiempo promedio de camión en servicio por solicitud (min)	18.0	25.0	32.0	20.0	20.3
Desviación estándar del tiempo de camión por solicitud (min)	8.0	11.0	15.0	14.0	10.6
Tiempo de espera promedio para una solicitud de camión (min)	9.2	9.4	9.2	8.4	9.0

TABLA 18.2 Cantidad de camiones en uso como una función del número de solicitudes

	Cantidad de camiones en uso en el momento de la solicitud				Total
	0	1	2	3	
Número de solicitudes	862	28	167	115	1172
Porcentaje del total	73.6	2.4	14.2	9.8	

Análisis de la situación:

El análisis de los datos sin procesar utilizados para obtener la información de la tabla 18.1 genera las siguientes observaciones:

1. Las solicitudes del uso de camiones son aleatorias y pueden representarse mediante una distribución de Poisson.
2. El tiempo de servicio (tiempo del camión en servicio desde el momento en que viaja hacia el cliente hasta que regresa al estacionamiento) es unimodal y está sesgado, y no parece seguir una distribución exponencial. Tal vez se pueda usar la distribución triangular para aproximar la situación en este caso.
3. Aunque no hay prioridad ni asignación de camiones a los usuarios, los conductores de los camiones tienden a mostrar preferencia por los clientes más cercanos.

Los datos de la tabla 18.2 conducen a dos observaciones:

- a. En el 73.6% de las solicitudes, los tres camiones están inactivos.
- b. Sólo en el 9.8% de las solicitudes, los tres camiones están en uso.

Debido a que las llegadas son aleatorias y pueden describirse mediante una distribución de Poisson y el tiempo de servicio no es una distribución exponencial, el modelo de cola que mejor representa el problema es $M/G/c/\infty/\infty$. Sin embargo, los cálculos para el modelo $M/G/c$ no son fáciles de manejar. En consecuencia, se decide que es posible emplear un modelo $M/M/c$ equivalente para proporcionar una estimación del límite superior del tiempo de espera en la cola. La justificación es que el tiempo de servicio exponencial es el “más aleatorio” de todas las distribuciones y, por lo tanto, dará lugar al peor escenario para la situación actual (por la misma lógica, el modelo $M/D/c$ proporciona un límite inferior para el tiempo promedio en cola porque el tiempo de servicio es constante y, por lo tanto, representa el caso “menos aleatorio”).

El siguiente es un resumen de los resultados del modelo $M/M/c$ para $c = 3$, $\lambda = \frac{4.6}{60} = .0767$ solicitudes por minuto y $\mu = \frac{1}{20.3} = .0493$ servicios por minuto:

Probabilidad de que el sistema esté vacío, $p_0 = .197$

Probabilidad de al menos tres solicitudes en el sistema, $p_{n \geq 3} = .133$

Longitud promedio de la cola, $L_q = .277$ solicitudes

Tiempo de espera promedio en la cola, $W_q = 3.6$ minutos

Con estos resultados, se tiene la observación desconcertante de que el límite superior del tiempo de espera promedio en la cola (estimado a partir del modelo $M/M/c$) es mucho menor que lo que se observa realmente ($W_q = 3.6$ minutos frente a los 9.0 minutos que indica la tabla 18.2). Esta observación conduce a una de dos conclusiones: las estimaciones de λ y μ son inexactas, o la estimación de la espera promedio no es confiable. Un estudio cuidadoso de los datos muestra que los datos son realmente confiables. Para reforzar los resultados del modelo $M/M/c$, se utiliza una simulación, en la cual la distribución del tiempo de servicio se aproxima mediante una distribución triangular con parámetros (15, 20.3, 30). El valor medio representa el tiempo de servicio promedio observado, y los valores inferior y superior se calculan con base en la desviación estándar del tiempo de servicio (= 10.6 minutos) y los tiempos de servicio mínimos y máximos observados. Es posible realizar una simulación mediante la plantilla en Excel *excelMultiServer.xls* con una tasa de llegada de Poisson de .0767 solicitudes por minuto y un tiempo de servicio triangular. Con 10 repeticiones que simulan 450 solicitudes cada una, se encontró que el tiempo promedio en la cola varía desde un mínimo de 1.1 minutos hasta un máximo de 3.62 minutos, con un valor promedio de 2.07 minutos. Este resultado dio mayor credibilidad al resultado del límite superior de 3.6 minutos obtenido mediante el modelo $M/M/c$. Por otro lado, el alto tiempo de espera obtenido de los datos observados (= 9.0 minutos) parece contradecir los datos de la tabla 18.2, donde el 73.6% del tiempo los tres camiones están inactivos cuando llega una solicitud de servicio.

¿Cómo se explica esta inconsistencia entre los resultados observados y los estimados? Volviendo a la planta para estudiar más a fondo el funcionamiento del sistema de transporte, un analista hizo una observación afortunada: El diseño del estacionamiento era tal que los camiones en espera no podían ser vistos por los usuarios, quienes entonces suponían que no había camiones disponibles. Esto en esencia era equivalente a operar con menos de tres camiones, lo que a su vez resultó en un aumento artificial del tiempo de espera. Una vez que este problema se descubrió, la solución se hizo evidente: Proporcionar a los conductores de camiones y a los usuarios un sistema de comunicación de dos vías. La solución propuesta condujo a una mejora inmediata en el servicio y una notable disminución del tiempo de espera.

Aunque la solución propuesta no fue “impulsada” de manera directa por los resultados de un análisis de colas, la lógica inherente a dicho análisis condujo al descubrimiento de la inconsistencia de los datos y, por consiguiente, a la ubicación de la fuente del problema.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados	Sección	Problemas asignados
18.1	18-1 a 18-2	18.6.2	18-50 a 18-67
18.2	18-3 a 18-7	18.6.3	18-68 a 18-94
18.3	18-8 a 18-20	18.6.4	18-95 a 18-103
18.4.1	18-21 a 18-28	18.7	18-104 a 18-112
18.4.2	18-29 a 18-38	18.9.1	18-113 a 18-125
18.5	18-39 a 18-47	18.9.2	18-126 a 18-127
18.6.1	18-48 a 18-49		

***18-1.** Suponga que un análisis más profundo del restaurante Mc Burger (ejemplo 18.1-1) revela los siguientes resultados adicionales:

Cantidad de mostradores	1	2	3	4	5	6	7
Ociosidad (%)	0	8	12	18	29	36	42

- (a) ¿Cuál es la productividad de la operación (expresada como un porcentaje del tiempo que los empleados están ocupados) cuando el número de mostradores es de cinco?
 - (b) El gerente desea mantener el tiempo de espera promedio en alrededor de 3 minutos y, al mismo tiempo, mantener la eficiencia de la instalación aproximadamente en 90%. ¿Pueden alcanzarse ambas metas? Explique su respuesta.
- 18-2.** Acme Metal Jobshop está en el proceso de comprar un taladro vertical de usos múltiples. Dos modelos, *A* y *B*, están disponibles con costo de operación por hora de \$18 y \$25, respectivamente. El modelo *A* es más lento que el modelo *B*. El análisis de colas de máquinas similares muestra que cuando se utiliza *A*, el número promedio de trabajos en la cola es 4, el cual es 30% mayor que el tamaño de la cola con *B*. Un trabajo retrasado representa un ingreso perdido, que Acme estima en \$10 por trabajo en espera por hora. ¿Cuál modelo debería comprar Acme?
- 18-3.** En cada una de las siguientes situaciones, identifique al cliente y al servidor:
- *(a) Aviones que llegan a un aeropuerto.
 - *(b) Sitio de taxis que atiende a pasajeros que esperan.
 - (c) Herramientas verificadas de un depósito en un taller de maquinado.
 - (d) Cartas procesadas en una oficina postal.
 - (e) Inscripción para clases en una universidad.
 - (f) Casos en cortes legales.
 - (g) Operación de pago en un supermercado.
 - *(h) Operación de un estacionamiento.
- 18-4.** Para cada una de las situaciones en el problema 18-3, identifique lo siguiente: (a) la naturaleza de la fuente solicitante (finita o infinita); (b) la naturaleza de los clientes que llegan (individualmente o en masa); (c) el tipo del tiempo entre llegadas (probabilístico o determinístico); (d) la definición y el tipo del tiempo de servicio; (f) la capacidad de la cola (finita o infinita); y (g) la disciplina de la cola.
- 18-5.** Estudie el siguiente sistema e identifique las situaciones de colas asociadas. Para cada situación, defina los clientes, el(s) servidor(es), la disciplina de la cola, el tiempo de servicio, la longitud máxima de la cola y la fuente solicitante. En un taller se reciben órdenes de trabajo para procesarse. Cuando las recibe, el supervisor decide si es un trabajo urgente o regular. Algunas órdenes requieren el uso de una o de varias máquinas idénticas. Las órdenes restantes se procesan en una línea de producción de dos etapas, de la cual dos están disponibles. En cada grupo, se asigna una instalación para manejar los trabajos urgentes. Los trabajos que llegan a cualquier instalación se procesan en el orden en que llegan. Las órdenes terminadas se envían en cuanto llegan de una zona de envío con capacidad limitada. Las herramientas afiladas para las diferentes máquinas se abastecen desde un depósito de herramientas central. Cuando una máquina se avería, se solicita un técnico en mantenimiento del centro de servicio para que la repare. Las máquinas que procesan órdenes urgentes siempre reciben prioridades, tanto en la adquisición de herramientas nuevas del depósito como en el servicio de reparación.

18-6. ¿Verdadero o falso?

- (a) Un cliente impaciente en espera puede salirse de la cola.
- (b) Si se anticipa un largo tiempo de espera, un cliente que llega puede desistir de hacer cola.
- (c) Cambiarse de una cola a otra tiene por objetivo reducir el tiempo de espera.

- 18-7.** En cada una de las situaciones descritas en el problema 18-3, analice la posibilidad de que los clientes se cambien de cola, desistan de hacer cola o se salgan de ésta.
- 18-8.** (a) Explique según su comprensión de la relación entre la tasa de llegadas λ y el tiempo entre llegadas promedio, ¿cuáles son las unidades que describen cada variable?
- (b) En cada uno de los siguientes casos, determine la tasa de llegadas promedio por hora, λ , y el tiempo entre llegadas promedio en horas.
- *(i) Cada 10 minutos ocurre una llegada.
 - (ii) Cada 6 minutos ocurren dos llegadas.
 - (iii) La cantidad de llegadas en un periodo de 30 minutos es de 10.
 - (iv) El intervalo promedio entre llegadas sucesivas es de .5 horas.
- (c) En cada uno de los siguientes casos, determine la tasa de servicio promedio por hora, μ , y el tiempo de servicio promedio en horas.
- *(i) Se completa un servicio cada 12 minutos.
 - (ii) Cada 15 minutos hay dos salidas.
 - (iii) La cantidad de clientes atendidos en un periodo de 30 minutos es de 5.
 - (iv) El tiempo promedio de servicio es de .3 horas.
- 18-9.** En el ejemplo 18.3-1, determine lo siguiente:
- (a) La cantidad promedio de fallas en una semana, suponiendo que el servicio se ofrece las 24 horas del día, 7 días a la semana.
 - (b) La probabilidad de al menos una falla en un periodo de 2 horas.
 - (c) La probabilidad de que la siguiente falla *no* ocurra dentro de 3 horas.
 - (d) Si no ha ocurrido ninguna falla 3 horas después de la última falla, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre fallas sea al menos de 4 horas?
- 18-10.** El tiempo entre llegadas a la Oficina Estatal de Hacienda es exponencial, con valor medio de .05 horas. La oficina abre a las 8:00 A.M.
- *(a) Escriba la distribución exponencial que describe el tiempo entre llegadas.
 - (b) Encuentre la probabilidad de que no lleguen clientes a la oficina hasta las 8:15 A.M.
 - (c) Ahora son las 8:35 A.M. El último cliente llegó a la oficina a las 8:26. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llegue antes de las 8:38 A.M.? ¿Y de que no llegue hasta las 8:40 A.M.?
 - (d) ¿Cuál es la cantidad promedio de clientes que llegan entre las 8:10 y las 8:45 A.M.?
- 18-11.** Suponga que el tiempo entre fallas de una máquina es exponencial con una media de 6 horas. Si la máquina ha funcionado sin fallar durante las últimas 3 horas, ¿cuál es la probabilidad de que siga funcionando sin fallar durante la siguiente hora? ¿Y de que se descomponga durante la siguiente media hora?
- 18-12.** El tiempo entre llegadas al salón de juegos en la unión estudiantil es exponencial con una media de 10 minutos.
- (a) ¿Cuál es la tasa de llegadas por hora?
 - (b) ¿Cuál es la probabilidad de que no lleguen estudiantes al salón de juegos durante los siguientes 15 minutos?
 - (c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un estudiante visite el salón de juegos durante los siguientes 20 minutos?
- 18-13.** El gerente de un nuevo restaurante de comida rápida desea cuantificar el proceso de llegadas de clientes estimando la fracción de los intervalos de tiempo entre llegadas, que serán (a) de menos

de 2 minutos, (b) de entre 2 y 3 minutos, y (c) de más de tres minutos. Las llegadas en restaurantes similares ocurren a razón de 35 clientes por hora. El tiempo entre llegadas está distribuido exponencialmente.

- *18-14.** Ann y Jim, dos empleados en un restaurante de comida rápida, realizan el siguiente juego mientras esperan que lleguen clientes: Jim paga a Ann 2 centavos si el siguiente cliente no llega dentro de 1 minuto; de lo contrario, Ann paga a Jim 2 centavos. Determine la ganancia promedio de Jim en un periodo de 8 horas. El tiempo entre llegadas es exponencial con media de 1.5 minutos.
- 18-15.** Suponga que en el problema 18-14 las reglas del juego son que Jim paga a Ann 2 centavos, si el siguiente cliente llega después de 1.5 minutos; y Ann paga a Jim una cantidad igual, si la siguiente llegada ocurre dentro de 1 minuto. Para llegadas dentro del intervalo de 1 a 1.5 minutos, el juego es un empate. Determine la ganancia esperada de Jim en un periodo de 8 horas.
- 18-16.** En el problema 18-14, suponga que Ann paga a Jim 2 centavos si la siguiente llegada ocurre dentro de 1 minuto, y 3 centavos si el tiempo entre llegadas es entre 1 y 1.5 minutos. Ann recibe 5 centavos de Jim si el tiempo entre llegadas es entre 1.5 y 2 minutos, y 6 centavos si es de más de 2 minutos. Determine la ganancia esperada de Ann en un periodo de 8 horas.
- *18-17.** Un cliente que llega a un restaurante de comida rápida McBurger en un tiempo no mayor a 4 minutos desde el cliente inmediatamente anterior recibirá 10% de descuento. Si el tiempo entre llegadas es de entre 4 y 5 minutos, el descuento es de 6%. Si el tiempo entre llegadas es de más de 5 minutos, el cliente obtiene 2% de descuento. El tiempo entre llegadas es exponencial con una media de 6 minutos.
- Determine la probabilidad de que un cliente que llega reciba 10% de descuento.
 - Determine el descuento promedio por cliente que llega.
- 18-18.** Se sabe que el tiempo entre fallas de un refrigerador Kencore es exponencial con valor medio de 9000 horas (aproximadamente 1 año de operación), y la compañía emite una garantía de 1 año sobre el refrigerador. ¿Cuáles son las probabilidades de que la reparación de una falla sea cubierta por la garantía?
- 18-19.** La U de A opera dos líneas de autobuses en el campus: roja y verde. La línea roja presta servicio al norte del campus, y la verde al sur del campus, con una estación de transferencia que une ambas rutas. Los autobuses verdes llegan al azar (tiempo entre llegadas exponencial) a la estación de transferencia cada 10 minutos. Los autobuses rojos también lo hacen aleatoriamente cada 7 minutos.
- ¿Cuál es la distribución de probabilidad del tiempo de espera de un estudiante que llega en la línea roja para abordar la línea verde?
 - ¿Cuál es la distribución de probabilidad del tiempo de espera de un estudiante que llega en la línea verde para abordar la línea roja?
- 18-20.** Demuestre que son iguales la media y la desviación estándar de la distribución exponencial.
- *18-21.** En el ejemplo 18.4-1, suponga que el oficinista que captura la información de las actas de nacimiento en la computadora normalmente espera hasta que se juntan al menos 5 actas. Determine la probabilidad de que el oficinista capture un nuevo lote cada hora.
- 18-22.** Un coleccionista viaja a subastas de arte una vez al mes en promedio. Es seguro que cada viaje produzca una compra. El tiempo entre viajes se distribuye exponencialmente. Determine lo siguiente:
- La probabilidad de que no se realice una compra en un periodo de 3 meses.
 - La probabilidad de que se realicen no más de 8 compras por año.
 - La probabilidad de que el tiempo entre viajes sucesivos exceda de 1 mes.
- 18-23.** En la operación de un banco, la tasa de llegadas es de 2 clientes por minuto. Determine lo siguiente:
- El promedio de llegadas durante 5 minutos.
 - La probabilidad de que no haya llegadas durante los siguientes .5 minutos.

- (c) La probabilidad de que haya al menos una llegada durante los siguientes .5 minutos.
 (d) La probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas sucesivas sea al menos de 3 minutos.
- 18-24.** El tiempo entre llegadas en el restaurante L&J es exponencial con media de 5 minutos. El restaurante abre a las 11:00 A.M. Determine lo siguiente:
- *(a) La probabilidad de tener 10 llegadas en el restaurante alrededor de las 11:12 A.M., dado que 8 clientes llegaron a las 11:05 A.M.
 - (b) La probabilidad de que un nuevo cliente llegue entre las 11:28 y las 11:33 A.M., si el último cliente llegó a las 11:25 A.M.
- 18-25.** La biblioteca pública de Springdale recibe nuevos libros de acuerdo con una distribución de Poisson con media de 25 libros por día. Cada anaquel en la estantería contiene 100 libros. Determine lo siguiente:
- (a) La cantidad promedio de anaqueles que se llenarán de nuevos libros cada mes (30 días).
 - (b) La probabilidad de que se requieran más de 10 libreros cada mes, si un librero tiene 5 anaqueles.
- 18-26.** La U de A opera dos líneas de autobuses en el campus: roja y verde. La línea roja presta servicio al norte del campus y la línea verde al sur del campus, con una estación de transferencia que conecta ambas líneas. Los autobuses verdes llegan aleatoriamente (de acuerdo con una distribución de Poisson) a la estación de transferencia cada 10 minutos. Los autobuses rojos también llegan al azar cada 7 minutos.
- *(a) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos autobuses (rojo y verde) se detengan en la estación durante un intervalo de 5 minutos?
 - (b) Un estudiante cuyo dormitorio está cerca de la estación tiene clase en 10 minutos. Cualquiera de los autobuses lo lleva al edificio del salón de clases. El viaje requiere 5 minutos, después de lo cual el estudiante camina durante aproximadamente 3 minutos para llegar al salón. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante llegue a tiempo?
- 18-27.** Pruebe que la media y la varianza de la distribución de Poisson durante un intervalo t es igual a λt , donde λ es la tasa de llegadas.
- 18-28.** Deduzca la distribución de Poisson a partir de las ecuaciones diferenciales del modelo de nacimiento puro. *Sugerencia:* La solución de la ecuación diferencial general
- $$y' + a(t)y = b(t)$$
- es
- $$y = e^{-\int a(t)dt} \left\{ \int b(t) e^{\int a(t)dt} dt + \text{constante} \right\}$$
- 18-29.** En el ejemplo 18.4-2, use la plantilla *excelPoissonQ.xls* o TORA para calcular $p_n(7)$, $n = 1, 2, \dots, 18$, y luego verifique manualmente que estas probabilidades den $E[n|t=7] = .664$ docenas.
- 18-30.** Considere el ejemplo 18.4-2. En cada uno de los siguientes casos, primero escriba la respuesta algebraicamente, y luego utilice *excelPoissonQ.xls* o TORA para dar las respuestas numéricicas.
- *(a) La probabilidad de que las existencias se agoten después de 3 días.
 - (b) La cantidad promedio de docenas de rosas sobrantes al final del segundo día.
 - *(c) La probabilidad de que se compre al menos una docena al final del cuarto día, si la última docena se compró al final del tercer día.
 - (d) La probabilidad de que el tiempo que falta para la siguiente compra sea cuando mucho de medio día, dado que la última compra se realizó el día anterior.

- (e) La probabilidad de que no se realicen compras durante el primer día.
 (f) La probabilidad de que no se coloque ningún pedido al final de la semana.
- 18-31.** La banda de la preparatoria de Springdale va a ofrecer un concierto a beneficio en su nuevo auditorio de 400 asientos. Las empresas locales compran los boletos en bloques de 10 y los donan a organizaciones juveniles. Los boletos se ponen a la venta para las empresas durante 4 horas sólo un día antes del concierto. El proceso de colocación de pedidos de boletos es de Poisson con una media de 10 llamadas por hora. Cualesquiera (bloques de) boletos que sobran después de que se cierra la oficina se venden con descuento como “boletos baratos de última hora”, una hora antes de que inicie el concierto. Determine lo siguiente:
 (a) La probabilidad de que sea posible comprar boletos baratos de última hora.
 (b) La cantidad promedio de boletos baratos de última hora disponibles.
- 18-32.** Cada mañana, el refrigerador en un pequeño taller se abastece con dos cajas (24 latas por caja) de bebidas gaseosas para los 10 empleados del taller. Los empleados pueden saciar su sed a cualquier hora durante el día de trabajo de 8 horas (8:00 A.M. a 4:00 P.M.), y se sabe que cada empleado consume aproximadamente 4 latas al día, pero el proceso es totalmente aleatorio (distribución de Poisson). ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado no encuentre una gaseosa al mediodía (al inicio del periodo del almuerzo)? ¿Y justo antes de que cierre el taller?
- ***18-33.** Un estudiante de nuevo ingreso recibe un depósito bancario de \$100 al mes desde su casa para que cubra gastos imprevistos. Los retiros de \$20 cada uno ocurren aleatoriamente durante el mes y están espaciados de acuerdo con una distribución exponencial con un valor medio de 1 semana. Determine la probabilidad de que el estudiante se quede sin dinero para gastos imprevistos antes del final de la cuarta semana.
- 18-34.** Se retira inventario de las existencias de 80 artículos según una distribución de Poisson a razón de 5 artículos por día. Determine lo siguiente:
 (a) La probabilidad de que se saquen 10 artículos durante los 2 primeros días.
 (b) La probabilidad de que ya no haya artículos al final de 4 días.
 (c) La cantidad promedio de artículos sacados a lo largo de un periodo de 4 días.
- 18-35.** Un taller mecánico se acaba de surtir de 10 piezas de repuesto para la reparación de una máquina. La reposición de las existencias que regresan el nivel a 10 piezas ocurre cada 7 días. El tiempo entre fallas es exponencial con media de 1 día. Determine la probabilidad de que la máquina permanezca descompuesta durante 2 días porque no hay piezas de repuesto disponibles.
- 18-36.** La demanda de un artículo ocurre de acuerdo con una distribución de Poisson con media de 3 por día. El nivel de existencia máximo es de 25 artículos, lo cual ocurre cada lunes inmediatamente después de que se recibe un pedido. El tamaño del pedido depende de la cantidad de unidades sobrantes al final de la semana, el día sábado (el negocio cierra los domingos). Determine lo siguiente:
 *(a) El tamaño semanal promedio del pedido.
 *(b) La probabilidad de desabasto al abrir el negocio el viernes.
 (c) La probabilidad de que el tamaño del pedido semanal exceda de 10 unidades.
- 18-37.** Demuestre que la distribución del tiempo entre salidas correspondiente a la de Poisson truncada en el modelo de muerte pura es una distribución exponencial con media de $\frac{1}{\mu}$ unidades de tiempo.
- 18-38.** Deduzca la distribución de Poisson truncada a partir de las ecuaciones diferenciales del modelo de muerte pura por inducción [nota: Vea la sugerencia del problema 18-28].
- 18-39.** En el ejemplo 18.5-1, determine lo siguiente:
 (a) La distribución de probabilidad de la cantidad de cajas abiertas.
 (b) La cantidad promedio de cajas ocupadas.

18-40. En el modelo de B&K del ejemplo 18.5-1, suponga que el tiempo entre llegadas en el área de cajas es exponencial con media de 5 minutos y que el tiempo en la caja por cliente también es exponencial con media de 10 minutos. Suponga además que B&K agrega una cuarta caja. Las cajas 1, 2 y 3 abrirán con base en incrementos de dos clientes y la caja 4 abrirá cuando haya 7 o más clientes en la tienda. Determine lo siguiente:

- (a) Las probabilidades de estado estable, p_n para todas las n .
- (b) La probabilidad de que se requiera una cuarta caja.
- (c) La cantidad promedio de cajas ociosas.

***18-41.** En el modelo de B&K del ejemplo 18.5-1, suponga que las tres cajas están siempre abiertas y que la operación está configurada de tal modo que el cliente vaya a la primera caja vacía. Determine lo siguiente:

- (a) La probabilidad de que las tres cajas estén en uso.
- (b) La probabilidad de que un cliente que llega no tenga que esperar.

18-42. El First Bank de Springdale opera cajeros automáticos de un solo carril. Los automóviles llegan de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 12 autos por hora. El tiempo por auto necesario para completar la transacción en el cajero es exponencial con media de 6 minutos. El carril tiene espacio para un total de 10 autos. Una vez que el carril se llena, los demás autos que llegan buscan el servicio en otra sucursal. Determine lo siguiente:

- (a) La probabilidad de que un auto que llega no pueda utilizar el cajero porque el carril está lleno.
- (b) La probabilidad de que un auto no pueda utilizar el cajero inmediatamente después de llegar.
- (c) La cantidad promedio de autos en el carril.

18-43. ¿Alguna vez ha escuchado a alguien repetir el contradictorio comentario: “El lugar está tan abarrotado que ya nadie va ahí”? Este comentario equivale a decir que la oportunidad de desistir se incrementa con el aumento en la cantidad de clientes que buscan un servicio. Una posible plataforma para modelar esta situación, es decir, que la tasa de llegadas al sistema se reduce a medida que se incrementa la cantidad de clientes. De manera más específica, considere el caso simplificado del Club de Pool M&M, donde los clientes suelen llegar en parejas para “jugar pool”. La tasa de llegadas normal es de 6 parejas (de personas) por hora. Sin embargo, una vez que la cantidad de parejas en el salón de pool excede de 8, la tasa de llegadas se reduce a 5 parejas por hora. Se supone que el proceso de llegadas sigue la distribución de Poisson. Cada pareja juega pool durante un tiempo exponencial con media de 30 minutos. El salón de pool cuenta con un total de 5 mesas y puede dar servicio a un máximo de 12 parejas a la vez. Determine lo siguiente:

- (a) La probabilidad de que los clientes comiencen a desistir.
- (b) La probabilidad de que todas las mesas estén ocupadas.
- (c) La cantidad promedio de mesas en uso.
- (d) La cantidad promedio de parejas que esperan a que se desocupe una mesa de pool.

***18-44.** Una peluquería atiende a un cliente a la vez y cuenta con tres sillas para los clientes que esperan. Si el lugar está lleno, los clientes se van a otro lado. Las llegadas ocurren de acuerdo con una distribución de Poisson con media de cuatro por hora. El tiempo para recibir un corte de pelo es exponencial con media de 15 minutos. Determine lo siguiente:

- (a) Las probabilidades de estado estable.
- (b) La cantidad esperada de clientes en la peluquería.
- (c) La probabilidad de que los clientes se vayan a otro lado porque la peluquería está llena.

- 18-45.** Considere una situación de colas con un servidor donde las tasas de llegadas y servicio están dadas por

$$\lambda_n = 10 - n, n = 0, 1, 2, 3$$

$$\mu_n = \frac{n}{2} + 5, n = 1, 2, 3, 4$$

Esta situación equivale a reducir la tasa de llegadas e incrementar la tasa de servicio a medida que se incrementa el número n en el sistema.

- (a) Prepare el diagrama de transición y determine la ecuación de balance del sistema.
 - (b) Determine las probabilidades de estado estable.
- 18-46.** Considere el modelo de una sola cola, donde se permite sólo un cliente en el sistema. Los clientes que llegan y encuentran la instalación ocupada nunca regresan. Suponga que la distribución de las llegadas es de Poisson con media λ por unidad de tiempo, y que el tiempo de servicio es exponencial con media de $\frac{1}{\mu}$ unidades de tiempo.
- (a) Prepare el diagrama de transición y determine las ecuaciones de balance.
 - (b) Determine las probabilidades de estado estable.
 - (c) Determine la cantidad promedio en el sistema.
- 18-47.** La comprobación por inducción para deducir la solución general del modelo generalizado se aplica de la siguiente manera. Considere

$$p_k = \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right) p_0, k = 0, 1, 2, \dots$$

Se sustituye p_{n-1} y p_{n-2} en la ecuación diferencial general que implica p_n, p_{n-1} y p_{n-2} para deducir la expresión deseada para p_n . Verifique este procedimiento.

- 18-48.** En el ejemplo 18.6-1, haga lo siguiente:
- *(a) Calcule L_q directamente con la fórmula $\sum_{n=c+1}^{\infty} (n - c)p_n$.
 - (b) Calcule W_s a partir de L_q .
 - *(c) Calcule la cantidad promedio de autos que no podrán entrar al estacionamiento durante un periodo de 8 horas.
 - *(d) Por definición, la cantidad promedio de espacios vacíos se puede calcular como $c - (L_s - L_q)$ o $\sum_{n=0}^{c-1} (c - n)p_n$. Muestre que la segunda definición se deduce directamente de la primera usando manipulaciones algebraicas.
- 18-49.** Resuelva el problema 18.6-1 con los siguientes datos: cantidad de espacios de estacionamiento = 6, cantidad de espacios temporales = 4, $\lambda = 10$ autos por hora y tiempo promedio de estacionamiento = 45 minutos.
- 18-50.** En el ejemplo 18.6-2, haga lo siguiente.
- (a) Determine la utilización porcentual de la bahía de lavado.
 - (b) Determine la probabilidad de que un automóvil que llega tenga que esperar en el estacionamiento antes de entrar a la bahía de lavado.
 - (c) Si hay siete espacios de estacionamiento, determine la probabilidad de que un auto que llega encuentre un estacionamiento vacío.
 - (d) ¿Cuántos espacios de estacionamiento deberían proporcionarse de modo que un auto que llega encuentre un espacio de estacionamiento 99% de las veces?

***18-51.** John Macko estudia en la U de Ozark. Realiza trabajos ocasionales para complementar sus ingresos.

Las solicitudes para que realice un trabajo llegan en promedio cada 5 días, pero el tiempo entre solicitudes es exponencial. El tiempo para terminar un trabajo también es exponencial con media de 4 días.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que John se quede sin trabajos?
- (b) Si John gana aproximadamente \$50 por trabajo, ¿cuál es su ingreso mensual promedio?
- (c) Si al final del semestre John decide subcontratar los trabajos pendientes a \$40 cada uno, ¿cuánto, en promedio, debería esperar que le paguen?

18-52. Durante años, el detective Columbo, del Departamento de Policía de Fayetteville, ha tenido un gran éxito al resolver todos los casos criminales. Es sólo cuestión de tiempo antes de que cualquier caso se resuelva. Columbo admite que el tiempo por caso es “totalmente aleatorio”, pero en promedio cada investigación le lleva aproximadamente una semana y media. Los crímenes en el tranquilo Fayetteville no son muy comunes. Ocurren al azar a razón de un crimen por mes (4 semanas). El detective Columbo solicita que un asistente comparta su pesada carga de trabajo. Analice la petición de Columbo, sobre todo desde la perspectiva de los siguientes puntos:

- (a) La cantidad promedio de casos en espera de ser investigados.
- (b) El porcentaje del tiempo que el detective permanece ocupado.
- (c) El tiempo promedio necesario para resolver un caso.

18-53. Los automóviles que llegan a la caseta de cobro del túnel Lincoln lo hacen según una distribución de Poisson, con una media de 90 autos por hora. El tiempo para cruzar la caseta es exponencial con media de 38 segundos. Los conductores se quejan del largo tiempo de espera, y las autoridades desean reducir el tiempo de cruce promedio a 30 segundos con la instalación de dispositivos de cobro de cuota automáticos, siempre que se satisfagan dos condiciones: (1) que la cantidad promedio de autos que esperan en este sistema exceda de 5, y (2) que el porcentaje del tiempo ocioso de la caseta con el nuevo dispositivo instalado no exceda de 10%. ¿Se puede justificar el nuevo dispositivo?

***18-54.** Un restaurante de comida rápida tiene una ventanilla para servicio en el automóvil. Los autos llegan según una distribución de Poisson a razón de 2 cada 5 minutos. El espacio en frente de la ventanilla puede acomodar cuando mucho a 10 autos, incluyendo al que recibe el servicio. Los demás autos esperan afuera de este espacio, si es necesario. El tiempo de servicio por cliente es exponencial, con una media de 1.5 minutos. Determine lo siguiente:

- (a) La probabilidad de que la ventanilla esté ociosa.
- (b) La cantidad anticipada de clientes que esperan ser atendidos.
- (c) El tiempo de espera promedio hasta que un cliente llega a la ventanilla para hacer su pedido.
- (d) La probabilidad de que la línea de espera exceda la capacidad de 10 espacios.

18-55. Los clientes llegan a la ventanilla de servicio en el automóvil de un banco según una distribución de Poisson, con una media de 10 por hora. El tiempo de servicio por cliente es exponencial con una media de 5 minutos. Hay tres espacios en frente de la ventanilla, incluido el auto que recibe el servicio. Los demás autos que llegan se forman afuera de este espacio para 3 autos.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un auto que llega entre a uno de los 3 espacios?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un auto que llega espere afuera del espacio designado para tres autos?
- (c) ¿Cuánto tiempo se anticipa que espere un cliente que llega antes de iniciar el servicio?
- (d) ¿Cuántos espacios para autos deberían proporcionarse en frente de la ventanilla (incluido el que se está atendiendo), de modo que un auto que llega encuentre un espacio ahí al menos 90% de las veces?

- 18-56.** En el escenario $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$, dé un argumento plausible de por qué en general L_s no es igual a $L_q + 1$. ¿En qué condición se mantendrá la igualdad?
- 18-57.** Para el escenario $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$, deduzca la expresión para L_q utilizando la definición básica $\sum_{n=2}^{\infty} (n - 1)p_n$.
- 18-58.** Para el escenario $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$, demuestre que
- La cantidad esperada en la cola, si la cola no está vacía = $\frac{1}{(1 - \rho)}$.
 - El tiempo de espera promedio en la cola para quienes deben esperar = $(\frac{1}{\mu - \lambda})$.
- *18-59.** En el ejemplo 18.6-4, determine lo siguiente:
- La probabilidad de que un automóvil que llega entre de inmediato a la bahía de lavado.
 - El tiempo de espera promedio hasta que se inicie el servicio.
 - La cantidad esperada de espacios de estacionamientos vacíos.
 - La probabilidad de que todos los espacios de estacionamiento estén ocupados.
 - La reducción porcentual del tiempo de servicio promedio que limitará el tiempo promedio en el sistema a aproximadamente 10 minutos (*sugerencia*: Utilice el método de prueba y error con *excelPoissonQ.xls* o TORA).
- 18-60.** Considere la instalación de lavado de automóviles del ejemplo 18.6-4. Determine la cantidad de espacios de estacionamiento, de modo que el porcentaje de los autos que no puedan encontrar un espacio no exceda de 1%.
- 18-61.** El tiempo que el peluquero Joe emplea para realizar un corte de pelo es exponencial con una media de 12 minutos. Debido a su popularidad, los clientes suelen llegar (de acuerdo con una distribución de Poisson) a una razón mucho mayor que la que Joe puede manejar: seis clientes por hora. Joe en realidad se siente cómodo, si la tasa de llegadas se reduce efectivamente a alrededor de cuatro clientes por hora. Para alcanzar esta meta, se le ocurrió proporcionar asientos limitados en el área de espera, de modo que los clientes que acaban de llegar se vayan a otro lado cuando se dan cuenta de que todos los asientos están ocupados. ¿Cuántos asientos debería proporcionar Joe para alcanzar su meta?
- *18-62.** El ensamble final de los generadores eléctricos en Electro se realiza a la razón de Poisson de 10 generadores por hora. Luego los generadores son transportados por una banda al departamento de inspección para su revisión final. La banda puede transportar un máximo de 7 generadores. Un sensor electrónico detiene al instante la banda una vez que se llena, lo que evita que el departamento de ensamble final arme más unidades hasta que haya un espacio disponible. El tiempo para inspeccionar los generadores es exponencial, con una media de 15 minutos.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el departamento de ensamble final detenga la producción?
 - ¿Cuál es la cantidad promedio de generadores sobre la banda transportadora?
 - El ingeniero de producción afirma que las interrupciones en el departamento de ensamble pueden reducirse si se incrementa la capacidad de la banda. De hecho, el ingeniero afirma que la capacidad puede incrementarse al punto en que el departamento de ensamble opere 95% del tiempo sin interrupciones. ¿Es justificable esta afirmación?
- 18-63.** Una cafetería puede acomodar un máximo de 50 personas. Los clientes llegan en una corriente de Poisson a razón de 10 por hora y son atendidos (uno a la vez) a razón de 12 por hora.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llegue no coma en la cafetería porque está llena?
 - Suponga que a tres clientes (con tiempos de llegada aleatorios) les gustaría sentarse juntos. ¿Cuál es la probabilidad de que se cumpla su deseo? (Suponga que pueden hacerse arreglos para que se sienten juntos en cuanto haya tres sillas disponibles).

18-64. Los pacientes llegan a la clínica de un médico de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 20 pacientes por hora. La sala de espera no puede acomodar más de 14 pacientes. El tiempo de consulta por paciente es exponencial, con una media de 8 minutos.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente que llegue no espere?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente que llegue encuentre un asiento en la sala?
- (c) ¿Cuál es el tiempo total esperado que un paciente pasa en la clínica?

18-65. La probabilidad p_n de que haya n clientes en el sistema para un escenario $(M/M/1):(GD/5/\infty)$ se da en la siguiente tabla:

n	0	1	2	3	4	5
p_n	.399	.249	.156	.097	.061	.038

La tasa de llegadas λ es de cinco clientes por hora. La tasa de servicio μ es de 8 clientes por hora. Calcule lo siguiente:

- *(a) La probabilidad que un cliente que llega no pueda entrar al sistema.
- *(b) La tasa a la cual los clientes que llegan no podrán entrar al sistema.
- (c) La cantidad esperada en el sistema.
- (d) El tiempo de espera promedio en la cola.

18-66. Demuestre que cuando $\rho = 1$ para $(M/M/1):(GD/N/\infty)$, la cantidad esperada en el sistema, L_s , es igual a $\frac{N}{2}$ (sugerencia: $1 + 2 + \dots + i = \frac{i(i+1)}{2}$).

18-67. Demuestre que λ_{ef} para $(M/M/1):(GD/N/\infty)$ puede calcularse a partir de la fórmula

$$\lambda_{\text{ef}} = \mu(L_s - L_q)$$

18-68. Considere el ejemplo 18.6-5.

- (a) Demuestre que la notable reducción del tiempo de espera de más de 50% en el caso consolidado está asociada con un incremento del porcentaje del tiempo que los servidores permanecen ocupados.
- (b) Determine la cantidad de taxis que la compañía consolidada debe tener para limitar el tiempo de espera promedio de un viaje a 5 minutos o menos.

***18-69.** En el ejemplo de la compañía de taxis, suponga que el tiempo promedio por viaje es en realidad de aproximadamente 14.5 minutos, de modo que la utilización ($= \frac{\lambda}{\mu c}$) para la operación con 2 y 4 taxis se incrementa a más de 96%. ¿Sigue valiendo la pena consolidar ambas compañías en una? Use el tiempo de espera promedio de un viaje como medida de comparación.

- 18-70.** Determine la cantidad mínima de servidores paralelos necesarios en cada una de las siguientes situaciones (llegadas/salidas de Poisson) que garantice que la operación de la situación de colas será estable (es decir, que la longitud de la cola no crezca de forma indefinida):
- (a) Los clientes llegan cada 5 minutos y son atendidos a razón de 10 clientes por hora.
 - (b) El tiempo entre llegadas promedio es de 2 minutos, y el tiempo de servicio promedio es de 6 minutos.
 - (c) La tasa de llegadas es de 30 clientes por hora, y la tasa de servicios por servidor es de 40 clientes por hora.

18-71. Los clientes llegan al Thrift Bank según una distribución de Poisson, con una media de 45 clientes por hora. Las transacciones por cliente tardan alrededor de 5 minutos y están distribuidas exponencialmente. El banco desea utilizar una sola línea y varias cajas, similar a las que se utilizan en aeropuertos y oficinas postales. El gerente está consciente de que los clientes pueden irse a otros bancos si perciben que su espera en la línea es “excesiva”. Por esa razón, el gerente desea limitar el tiempo de espera en la cola a no más de 30 segundos. ¿Cuántas cajas debería ofrecer el banco?

- *18-72.** El restaurante de comida rápida McBurger tiene 3 mostradores. Los clientes llegan de acuerdo con una distribución de Poisson cada 3 minutos y forman una línea para ser atendidos por el primer mostrador disponible. El tiempo para completar un pedido se distribuye exponencialmente con una media de 5 minutos. La sala de espera en el interior del restaurante está limitada. Sin embargo, la comida es buena, y los clientes están dispuestos a esperar afuera del restaurante, si es necesario. Determine el tamaño de la sala de espera dentro del restaurante (excluyendo a los clientes en los mostradores), de modo que la probabilidad de que un cliente que llega no espere afuera del restaurante sea al menos de .999.
- 18-73.** Una pequeña oficina postal tiene dos ventanillas abiertas. Los clientes llegan de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 1 cada 3 minutos. Sin embargo, sólo 80% de ellos busca servicio en las ventanillas. El tiempo de servicio por cliente es exponencial, con una media de 5 minutos. Todos los clientes que llegan forman una línea y acceden a las ventanillas disponibles con base en la disciplina FIFO.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llega espere en la línea?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que ambas ventanillas estén ociosas?
 - ¿Cuál es la longitud promedio de la línea de espera?
 - ¿Sería posible ofrecer un servicio razonable con sólo una ventanilla? Explique su respuesta.
- 18-74.** El centro de cómputo de la U de A está equipado con cuatro maxicomputadoras idénticas. La cantidad de usuarios en cualquier momento es de 25. Cada usuario es capaz de enviar un trabajo desde una terminal cada 15 minutos en promedio, pero el tiempo real entre envíos es exponencial. Los trabajos que llegan automáticamente se van a la primera computadora disponible. El tiempo de ejecución por envío es exponencial con una media de 2 minutos. Calcule lo siguiente:
- La probabilidad de que un trabajo no se ejecute inmediatamente después de enviarlo.
 - El tiempo promedio hasta que los resultados de un trabajo se le devuelvan al usuario.
 - La cantidad promedio de trabajos en espera de ser ejecutados.
 - El porcentaje de tiempo que todo el centro de cómputo está ocioso.
 - La cantidad promedio de computadoras ociosas.
- 18-75.** El aeropuerto Drake presta servicios a pasajeros rurales, suburbanos y en tránsito. La distribución de las llegadas de cada uno de los tres grupos es de Poisson con tasas medias de 15, 10 y 20 pasajeros por hora, respectivamente. El tiempo para documentar un pasajero es exponencial con media de 6 minutos. Determine la cantidad de mostradores que debería haber en Drake en cada una de las siguientes condiciones:
- El tiempo promedio total para documentar un cliente es de al menos 15 minutos.
 - El porcentaje de ociosidad de los mostradores no excede de 10%.
 - La probabilidad de que todos los mostradores estén ociosos no excede de .01.
- 18-76.** En Estados Unidos, el uso de una sola fila y varios servidores es común en las oficinas postales, y en mostradores para la documentación de pasajeros en aeropuertos. Sin embargo, tanto en supermercados como en bancos (especialmente en comunidades pequeñas) se tiende a favorecer la configuración de una línea y un servidor, a pesar del hecho de que la configuración de una línea y varios servidores ofrece una operación más eficiente. Comente esta observación.
- 18-77.** Para el modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$, Morse (1958, p. 103) muestra que cuando $\frac{\rho}{c} \rightarrow 1$

$$L_q = \frac{\rho}{c - \rho}$$

Con la observación de que $\frac{\rho}{c} \rightarrow 1$ significa que los servidores están extremadamente ocupados, use esta información para demostrar que la relación del tiempo de espera promedio en la cola del modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$ sobre la del modelo $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ tiende a $\frac{1}{c}$ cuando $\frac{\rho}{c} \rightarrow 1$. Por lo tanto, con $c = 2$, el tiempo de espera promedio puede reducirse en un 50%. La conclusión de este ejercicio es que siempre es aconsejable agrupar los servicios, independientemente de qué tan "sobrecargados" estén los servidores.

18-78. En la deducción de p_n para el modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$, indique cuál parte de la deducción requiere la condición $\frac{\rho}{c} < 1$. Explique verbalmente el significado de la condición. ¿Qué sucederá si no se satisface la condición?

18-79. Compruebe que $L_s = L_q + c$ comenzando con la definición $L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n - C)p_n$ donde c es la cantidad promedio de servidores ocupados. Por consiguiente, demuestre que $\bar{c} = \frac{\lambda_{\text{ef}}}{\mu}$.

18-80. Demuestre que p_n para el modelo $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ se obtiene a partir de la p_n para el modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$ con $c = 1$.

18-81. Demuestre que para el modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$

$$L_q = \frac{c\rho}{(c - \rho)^2} p_c$$

18-82. Para el modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$, demuestre lo siguiente:

(a) La probabilidad de que un cliente esté esperando es $\frac{\rho}{(c - \rho)} p_c$.

(b) La cantidad promedio en la cola si no está vacía es $\frac{c}{(c - \rho)}$.

(c) El tiempo de espera promedio en la cola para los clientes que deben esperar es $\frac{1}{\mu(c - \rho)}$.

18-83. En el ejemplo 18.6-6, determine lo siguiente:

(a) El número esperado de taxis ociosos.

(b) La probabilidad de que un cliente que llama sea el último de la lista.

(c) El límite en la lista de espera si se desea mantener el tiempo de espera en la cola por debajo de 3 minutos.

18-84. En la tienda de Eat & Gas funciona una estación de gasolina de dos bombas. El carril que conduce a las bombas puede alojar cuando mucho 3 automóviles, excluyendo a los que se les está dando atención. Los autos que llegan se van a otro lado si el carril está lleno. La distribución de los autos que llegan es de Poisson con media de 20 por hora. El tiempo para llenar el tanque y pagar es exponencial con media de 6 minutos. Determine lo siguiente:

(a) El porcentaje de autos que buscarán servicio en otro lado.

(b) El porcentaje de tiempo que una bomba está en uso.

*(c) La utilización porcentual de las dos bombas.

*(d) La probabilidad de que un auto que llega no inicie el servicio de inmediato pero que encuentre un espacio vacío en el carril.

(e) La capacidad del carril que garantice que, en promedio, no más de 10% de los autos que llegan se vaya.

(f) La capacidad del carril que garantice que la probabilidad de que ambas bombas estén ociosas es de .05 o menos.

18-85. Tres mecánicos atienden un pequeño taller de reparación de motores. A principios de marzo de cada año, las personas traen sus cultivadoras y podadoras de césped para servicio y reparación. El taller está dispuesto a aceptar todas las cultivadoras y podadoras que traigan los clientes. Sin embargo, cuando los clientes nuevos ven el piso del taller tapizado de trabajos en espera, se van a otro lado buscando un servicio más rápido. El piso del taller puede alojar un máximo de 15 podadoras o cultivadoras, excluyendo las que están en reparación. Los clientes llegan al taller cada 10 minutos en promedio, y a cada mecánico le lleva un promedio de 30 minutos completar cada trabajo. Tanto los tiempos entre llegadas como los de servicio son exponenciales. Determine lo siguiente:

(a) La cantidad promedio de mecánicos ociosos.

(b) La cantidad de negocios perdidos ante la competencia por día de 10 horas a causa de la capacidad limitada del taller.

- (c) La probabilidad de que el siguiente cliente que llegue sea atendido por el taller.
 (d) La probabilidad de que al menos un mecánico esté ocioso.
 (e) La cantidad promedio de cultivadoras o podadoras en espera de servicio.
 (f) Una medida de la productividad global del taller.
- 18-86.** En la U de A, los estudiantes de primer año recién matriculados son muy notorios porque quieren conducir sus automóviles hasta las clases (aun cuando se requiere que la mayoría de ellos vivan en el campus y puedan utilizar el sistema de tránsito gratuito de la universidad). Durante el primer par de semanas del semestre de otoño, prevalece el caos vial en el campus porque los estudiantes de primer año intentan desesperadamente encontrar espacios de estacionamiento. Con una rara dedicación, los estudiantes esperan pacientemente en los carriles del estacionamiento a que alguien salga y puedan estacionar sus autos. Considere un escenario específico. El estacionamiento cuenta con 30 espacios, pero también puede acomodar 10 autos más en los carriles. Estos 10 autos adicionales no pueden estacionarse en los carriles de forma permanente y deben esperar la disponibilidad de uno de los 30 espacios de estacionamiento. Los estudiantes de primer año llegan al estacionamiento de acuerdo con una distribución de Poisson, con una media de 20 autos por hora. El tiempo de estacionamiento por auto promedia 60 minutos, pero en realidad sigue una distribución exponencial.
- *(a) ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes de primer año que se van porque no pueden entrar al estacionamiento?
 *(b) ¿Cuál es la probabilidad que un auto que llega espere en los carriles?
 (c) ¿Cuál es la probabilidad de que un auto que llega ocupe el único espacio de estacionamiento que quede en el lote?
 *(d) Determine la cantidad promedio de espacios de estacionamiento ocupados.
 *(e) Calcule la cantidad promedio de espacios que están ocupados en los carriles.
 (f) Determine la cantidad de estudiantes de primer año que no llegarán a tiempo a clase durante un periodo de 8 horas porque el estacionamiento está lleno.
- 18-87.** Verifique la expresión de p_0 para el modelo $(M/M/c):(GD/N/\infty)$, dado que $\frac{\rho}{c} \neq 1$.
- 18-88.** Compruebe la siguiente igualdad para $(M/M/c):(GD/N/\infty)$:
- $$\lambda_{\text{ef}} = \mu \bar{c},$$
- donde \bar{c} es el número de servidores ocupado.
- 18-89.** Verifique la expresión para p_0 y L_q para $(M/M/c):(GD/N/\infty)$ cuando $\frac{\rho}{c} = 1$.
- 18-90.** Para $(M/M/c):(GD/N/\infty)$ con el cual $N = c$, defina λ_n y μ_n en términos del modelo general (sección 18.5), luego demuestre que la expresión para p_n está dada como
- $$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, n = 1, 2, \dots, c$$
- donde
- $$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^c \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}$$
- 18-91.** En el ejemplo 18.6-7, calcule lo siguiente:
- (a) La probabilidad de que el inversionista venda todos sus valores.
 (b) La probabilidad de que el inversionista posea al menos 10 valores.
 (c) La probabilidad de que el inversionista posea entre 30 y 40 valores, inclusive.
 (d) El capital accionario anual neto del inversionista, si sólo 10% de los valores se deprecian 30% al año y el 90% restante suben 15% al año.

18-92. Se requiere que los nuevos conductores aprueben exámenes escritos antes de someterlos a un examen de manejo en carretera. Estos exámenes suelen ser administrados por el departamento de policía de la ciudad. Los registros en la ciudad de Springdale muestran que el promedio de exámenes escritos es de 100 por día de ocho horas. El tiempo promedio necesario para terminar el examen es aproximadamente de 30 minutos. Sin embargo, la llegada real de los conductores que van a realizar el examen y el tiempo que cada uno emplea en el examen son totalmente aleatorios. Determine lo siguiente:

- *(a) La cantidad promedio de asientos que el departamento de policía debe proporcionar en el salón donde se realizan los exámenes.
 - *(b) La probabilidad de que la cantidad de conductores que van a realizar el examen exceda el promedio de asientos proporcionados en el salón de exámenes.
 - (c) La probabilidad de que no se administren exámenes en cualquier día.
- 18-93.** Demuestre (utilizando *excelPoissonQ.xls* o TORA) que para una pequeña $\rho = .1$, los valores de L_s , L_q , W_s , W_q y p_n con una c tan pequeña como 4 servidores, el modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$ puede estimarse con confiabilidad utilizando las fórmulas menos complicadas del modelo $(M/M/\infty):(GD/\infty/\infty)$.

18-94. Repita el problema 18-93 para una ρ más grande ($= .9$), y demuestre que la misma conclusión es válida excepto que el valor de c debe ser mayor (al menos 14). A partir de los resultados de los problemas 18-93 y 18-94, ¿a qué conclusión general puede llegarse respecto del uso de $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$ para estimar los resultados del modelo $(M/M/\infty):(GD/\infty/\infty)$?

18-95. En el ejemplo 18.6-8, haga lo siguiente:

- (a) Verifique los valores de λ_{ef} dados en la figura 18.9.
 - *(b) Calcule la cantidad esperada de técnicos ociosos, si $R = 4$.
 - (c) Determine la probabilidad de que los técnicos estén ociosos, si $R = 3$.
 - *(d) Calcule la probabilidad de que la mayoría (más de la mitad) de los técnicos estén ociosos, si $R = 3$.
- 18-96.** En el ejemplo 18.6-8, defina y calcule la productividad de los técnicos para $R = 1, 2, 3$ y 4 . Use esta información junto con la medida de productividad de la máquina para decidir el número de técnicos que Toolco debería contratar.
- 18-97.** En los cálculos de la figura 18.9, quizás parezca confuso que la tasa promedio de descomposturas de máquinas en el taller, λ_{ef} , se incrementa con el aumento de R . Explique por qué debería esperarse el incremento de λ_{ef} .

- ***18-98.** Un operador atiende 5 máquinas automáticas. Después de que cada máquina completa un lote, el operador debe reiniciarla antes de que se inicie un nuevo lote. El tiempo para completar un lote es exponencial con media de 45 minutos. El tiempo de preparación también es exponencial con media de 8 minutos.
- (a) Determine la cantidad promedio de máquinas en espera de ser preparadas o que se están preparando.
 - (b) Calcule la probabilidad de que todas las máquinas estén funcionando.
 - (c) Determine el tiempo promedio que una máquina está detenida.

- 18-99.** Kleen All es una compañía de servicios que realiza varios trabajos peculiares, como jardinería, poda de árboles y pintura de casas. Los cuatro empleados de la compañía salen de la oficina con la primera asignación del día. Después de completar una asignación, el empleado llama a la oficina para pedir instrucciones para el siguiente trabajo que va a realizar. El tiempo para completar una asignación es exponencial con una media de 45 minutos. El tiempo de viaje entre los trabajos también es exponencial con una media de 20 minutos.
- (a) Determine el promedio de empleados que viajan entre los trabajos.
 - (b) Calcule la probabilidad de que ningún empleado esté en el camino.

***18-100.** Luego de una larga espera, los Newborn fueron recompensados con quíntuples, 2 niños y 3 niñas, gracias a los asombrosos avances de la medicina. Durante los primeros 5 meses, la vida de los niños consistía en dos estados, despiertos (la mayor parte del tiempo llorando) y dormidos. De acuerdo con los Newborn, las actividades de los bebés de “despertar-dormir” nunca coinciden. En vez de eso, todo el asunto es totalmente aleatorio. De hecho, la señora Newborn, profesional en estadística, cree que el tiempo que cada bebé llora es exponencial, con una media de 30 minutos. La cantidad de sueño que cada bebé obtiene también resulta ser exponencial, con media de 2 horas. Determine lo siguiente:

- (a) La cantidad promedio de bebés despiertos en cualquier momento.
- (b) La probabilidad de que todos los bebés estén dormidos.
- (c) La probabilidad de que los Newborn no se sientan felices porque haya más bebés despiertos (y llorando) que dormidos.

18-101. Verifique la expresión de p_n para el modelo $(M/M/R):(GD/K/K)$.

18-102. Demuestre que la tasa de descomposturas en el taller puede calcularse a partir de la fórmula

$$\lambda_{\text{ef}} = \mu \bar{R}$$

donde \bar{R} es el promedio de técnicos ocupados.

18-103. Verifique los siguientes resultados en el caso especial de un técnico ($R = 1$):

$$p_n = \frac{K! \rho^n}{(K - n)!} p_0$$

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^R \frac{K! \rho^n}{(K - n)!} \right)^{-1}$$

$$L_s = K - \frac{(1 - p_0)}{\rho}$$

18-104. En el ejemplo 18.7-1, calcule el porcentaje de tiempo que la instalación está ociosa.

18-105. Resuelva el ejemplo 18.7-1 suponiendo que la distribución del tiempo de servicio es como sigue:

- *(a) Uniforme entre 8 y 20 minutos.
- (b) Normal con $\mu = 12$ minutos y $\sigma = 3$ minutos.
- (c) Discreta con valores iguales a 4, 8 y 15 minutos y probabilidades de .2, .6 y .2, respectivamente.

18-106. Layson Roofing Inc. instala techos de tejas en casas nuevas y viejas en Arkansas. Los clientes potenciales solicitan el servicio aleatoriamente a razón de nueve trabajos por mes de 30 días y se les pone en una lista de espera para procesarse sobre una base FIFO. Los tamaños de las casas varían, pero es bastante razonable suponer que las áreas del techo están uniformemente distribuidas entre 150 y 300 cuadrados. Por lo general, la cuadrilla de trabajo puede completar 75 cuadrados al día. Determine lo siguiente:

- (a) La cantidad promedio de trabajos de techado pendientes en Layson.
- (b) El tiempo promedio que un cliente espera hasta que se completa un trabajo de techado.
- (c) Si la cuadrilla de trabajo se incrementa al punto de que pueden completar 150 cuadrados al día, ¿cómo afectará esto al tiempo promedio hasta que se termina un trabajo?

***18-107.** Óptica elabora lentes de prescripción de acuerdo con los pedidos de los clientes. Cada trabajador se especializa en ciertos tipos de lentes. La compañía ha estado experimentando demoras inusuales en el procesamiento de prescripciones bifocales y trifocales. El trabajador a cargo recibe 30 pedidos

por día de 8 horas. El tiempo para completar una prescripción se distribuye normalmente, con una media de 12 minutos y una desviación estándar de 3 minutos. Después de emplear entre 2 y 4 minutos, distribuidos de manera uniforme, para inspeccionar los lentes, el trabajador puede empezar a procesar una nueva prescripción. Determine lo siguiente:

- (a) El porcentaje de tiempo que el trabajador está ocioso.
 - (b) La cantidad promedio de prescripciones bifocales y trifocales pendientes en Óptica.
 - (c) El tiempo promedio hasta que se completa una prescripción.
- 18-108.** Un producto llega de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de uno cada 45 minutos. El producto requiere dos operaciones secuenciales atendidas por un trabajador. La primera operación utiliza una máquina semiautomática que completa su ciclo en exactamente 28 minutos. La segunda operación realiza ajustes y cambios menores, y su tiempo depende de la condición del producto cuando sale de la operación 1. Específicamente, el tiempo de la operación 2 es uniforme entre 3 y 6 minutos. Debido a que cada operación requiere toda la atención del trabajador, no se puede cargar un nuevo producto en la máquina semiautomática sino hasta que el producto actual sale de la operación 2.
- (a) Determine la cantidad de productos en espera de ser procesados en la máquina semiautomática.
 - (b) ¿Cuál es el porcentaje de tiempo que el trabajador estará ocioso?
 - (c) ¿Cuánto tiempo se requiere, en promedio, para que un producto que llega salga de la operación 2?
- 18-109.** $(M/D/1):(GD/\infty/\infty)$. Demuestre que para el caso en que el tiempo es constante, la fórmula P-K se reduce a

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)}$$

donde $\mu = \frac{1}{E\{t\}}$ y $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E\{t\}$.

- 18-110.** $(M/E_m/1):(GD/\infty/\infty)$. Dado que el tiempo de servicio es de Erlang con parámetros m y μ (es decir, $E\{t\} = \frac{m}{\mu}$ y $\text{var}\{t\} = \frac{m}{\mu^2}$), demuestre que la fórmula P-K se reduce a

$$L_s = m\rho + \frac{m(1 + m)\rho^2}{2(1 - m\rho)}$$

- 18-111.** Demuestre que la fórmula P-K se reduce a L_s del modelo $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ cuando el tiempo de servicio es exponencial con media de $\frac{1}{\mu}$ unidades de tiempo.
- 18-112.** En una instalación de servicio con c servidores paralelos, suponga que los clientes llegan según una distribución de Poisson, con tasa media de λ . Los clientes que llegan son asignados a los servidores (ocupados o desocupados) de una forma estrictamente rotacional.
- (a) Determine la distribución de probabilidad del tiempo entre llegadas.
 - (b) Suponga en el inciso (a) que los clientes que llegan son asignados al azar a los c servidores con probabilidades α_i , $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, c$, y $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_c = 1$. Determine la distribución de la probabilidad del tiempo entre llegadas.

- 18-113.** En el ejemplo 18.9-1, haga lo siguiente:
- (a) Verifique los valores de μ_2 , μ_3 y μ_4 dados en el ejemplo.
 - (b) Suponga que la penalización de \$80 por trabajo por día se aplica sólo a trabajos que no “están en progreso” al final del día. ¿Cuál copiadora produce el costo mínimo total por día?

- *18-114.** Metalco está en el proceso de contratar a un técnico de reparación para un taller de 10 máquinas. Se están considerando dos candidatos. El primero puede realizar reparaciones a razón de 5 máquinas por hora y gana \$15 por hora. El segundo, por estar más calificado, recibe \$20 por hora y puede reparar 8 máquinas por hora. Metalco estima que cada máquina descompuesta incurrirá en un costo de \$50 por hora a causa de la producción perdida. Suponiendo que las máquinas se descomponen de acuerdo con una distribución de Poisson con una media de 3 por hora y que el tiempo de reparación es exponencial, ¿cuál técnico debería ser contratado?
- 18-115.** B&K Groceries va a abrir una tienda que presumirá de constar con lectores de códigos de barras de “última generación”. El señor Bih, uno de los propietarios de B&K ha limitado las opciones a dos lectores: El lector *A* puede procesar 10 artículos por minuto, y el lector *B* de mejor calidad puede leer 15 artículos por minuto. El costo diario de operación (10 horas) y mantenimiento de los lectores es de \$25 y \$35 para los modelos *A* y *B*, respectivamente. Los clientes que terminan sus compras llegan a la caja de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 10 clientes por hora. Cada carrito lleva entre 25 y 35 artículos, distribuidos de manera uniforme. El señor Bih estima que el costo promedio por cliente que espera es aproximadamente de 20 centavos por minuto. ¿Cuál lector debe adquirir B&K? (*Sugerencia:* El tiempo de servicio por cliente no es exponencial, sino que está uniformemente distribuido).
- 18-116.** H&I Industry produce una máquina especial con diferentes tasas de producción (piezas por hora) para satisfacer las especificaciones del cliente. El propietario de un taller está considerando comprar una de estas máquinas y desea adquirir la de velocidad más económica (en piezas por hora). Por su experiencia, el propietario estima que los pedidos de los clientes llegan al taller de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de tres pedidos por hora. Cada pedido promedia 500 piezas. Los contratos entre el propietario y los clientes especifican una penalización de \$100 por pedido retrasado por hora.
- (a) Si se supone que el tiempo de producción real por pedido es exponencial, desarrolle un modelo de costos general como una función μ de la tasa de producción.
 - *(b)** A partir del modelo de costos en (a), determine una expresión para la tasa de producción óptima.
 - *(c)** Use los datos en el problema para determinar la tasa de producción óptima que el propietario debería solicitar a H&I.
- 18-117.** A un taller llegan trabajos de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 80 trabajos por semana. Una máquina automática representa el cuello de botella en el taller. Se estima que un incremento unitario en la producción de la máquina costará \$250 por semana. Los trabajos retrasados normalmente originan un negocio perdido, que se supone es de \$500 por trabajo por semana. Determine la tasa de producción óptima para la máquina automática.
- 18-118.** Pizza Unlimited vende dos modelos de restaurantes franquiciados. La capacidad del modelo *A* es de 20 grupos de clientes, la del modelo *B* es de 30 grupos. El costo mensual de operación del modelo *A* es de \$12,000 y el del modelo *B* es de \$16,000. Un inversionista desea montar un restaurante de pizzas estilo buffet y estima que los grupos de clientes, cada uno ocupando una mesa, lleguen siguiendo una distribución de Poisson a razón de 25 grupos por hora. Si todas las mesas están ocupadas, los clientes se irán a otro lado. El modelo *A* servirá a 26 grupos por hora, el modelo *B* servirá a 29 grupos por hora. Debido a la variación de los tamaños de los grupos y de los tipos de pedidos, el tiempo de servicio es exponencial. El inversionista estima que el negocio perdido promedio por grupo de clientes es de \$15 por hora. Se estima que una demora en el servicio de los clientes que esperan cuesta un promedio de \$10 por grupo de clientes por hora.
- (a) Desarrolle un modelo de costos apropiado.
 - (b) Si se supone que el restaurante estará abierto 10 horas al día, ¿cuál modelo recomendaría para el inversionista?

- 18-119.** Suponga que en el problema 18-118 el inversionista puede elegir cualquier capacidad de restaurante deseada con base en un costo marginal específico por cada unidad de capacidad adicional solicitada. Deduzca el modelo de costos general, y defina todos sus componentes y términos.
- 18-120.** Second Time Around vende a consignación artículos populares usados. Su operación puede considerarse como un problema de inventario, en el cual las existencias se reponen y agotan aleatoriamente de acuerdo con una distribución de Poisson, con tasas de λ y μ artículos por día. Cada unidad de tiempo que el artículo está agotado, Second Time pierde $\$C_1$ a causa de las oportunidades perdidas; y cada unidad de tiempo que un artículo se mantiene en existencia, se incurre en un costo de retención de $\$C_2$.
- Desarrolle una expresión para el costo total esperado por unidad de tiempo.
 - Determine el valor óptimo de $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. ¿Cuál condición debe imponerse a los valores relativos de C_1 y C_2 para que la solución sea consistente con los supuestos del modelo $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$?
- 18-121.** Resuelva el ejemplo 18.9-2, suponiendo que $C_1 = \$20$ y $C_2 = \$45$.
- *18-122.** Tasco Oil posee una unidad propulsora de oleoducto que opera de forma continua. El tiempo entre descomposturas de cada propulsor es exponencial con una media de 20 horas. El tiempo de reparación es exponencial con una media de 3 horas. En una estación específica, dos técnicos de reparación atienden 10 propulsores. El salario por hora de cada técnico es de \$18. Se estima que las pérdidas del oleoducto son de \$30 por propulsor descompuesto por hora. Tasco está estudiando la posibilidad de contratar a un técnico adicional.
- ¿Se ahorrarán costos con la contratación de un tercer técnico?
 - ¿Cuál es la pérdida programada en dólares por descompostura cuando la cantidad de técnicos en servicio es de dos? ¿Y de tres?
- 18-123.** Una compañía renta una línea telefónica de banda ancha WATS a \$2000 mensuales. La oficina está abierta 200 horas laborales por mes. Durante el tiempo restante, la línea WATS se utiliza para otros propósitos y no está disponible para la compañía. El acceso a la línea WATS durante las horas laborales se amplía a 100 vendedores, cada uno de los cuales puede necesitar la línea en cualquier momento, pero promedia dos veces al día de 8 horas con tiempo exponencial entre llamadas. Un vendedor siempre espera si la línea WATS está ocupada a un costo estimado de 1 centavo por minuto de espera. Se supone que mientras un vendedor espera una llamada dada no se presentará la necesidad de hacer llamadas. El costo normal de las llamadas (sin utilizar la línea WATS) promedia aproximadamente 50 centavos por minuto, y la duración de cada llamada es exponencial, con una media de 6 minutos. La compañía está considerando rentar (al mismo precio) una segunda línea WATS para mejorar el servicio.
- ¿La línea WATS única está ahorrando dinero a la compañía en comparación con un sistema sin línea WATS? ¿Qué tanto está ganando o perdiendo la compañía por mes en comparación con el sistema sin línea WATS?
 - ¿Debería rentar la compañía una segunda línea WATS? ¿Cuánto ganaría o perdería en relación con el caso de una línea WATS al rentar la segunda línea?
- *18-124.** Un taller mecánico incluye 20 máquinas y 3 técnicos en reparaciones. Una máquina en funcionamiento se descompone al azar de acuerdo con una distribución de Poisson. El tiempo de reparación por máquina es exponencial con una media de 6 minutos. Un análisis de colas de la situación muestra un promedio de 57.8 solicitudes de reparación por día de 8 horas para todo el taller. Suponga que la tasa de producción por máquina es de 25 unidades por hora y que cada unidad producida genera \$2 en ingresos. Asimismo, suponga que el salario de un técnico es de \$20 por hora. Compare el costo de contratar los técnicos con el costo de los ingresos perdidos cuando se descomponen las máquinas.

18-125. Las condiciones necesarias para que el $ETC(c)$ (definido antes) asuma un valor mínimo en $c = c^*$ son

$$ETC(c^* - 1) \geq ETC(c^*) \text{ y } ETC(c^* + 1) \geq ETC(c^*)$$

Demuestre que estas condiciones se reducen a

$$L_s(c^*) - L_s(c^* + 1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L_s(c^* - 1) - L_s(c^*)$$

Aplique el resultado al ejemplo 18.9-2, y demuestre que el resultado es $c^* = 4$.

***18-126.** Un taller utiliza 10 máquinas idénticas. Cada máquina se descompone una vez cada 7 horas en promedio. Se requiere media hora en promedio para reparar una máquina descompuesta. Los procesos de descompostura y reparación siguen la distribución de Poisson. Determine lo siguiente:

- (a) La cantidad de técnicos de reparación necesarios para que el número promedio de máquinas descompuestas sea menor que 1.
- (b) La cantidad de técnicos de reparación necesarios para que el tiempo de demora esperado hasta que se inicie una reparación sea menor a 10 minutos.

18-127. En el modelo de costos de la sección 18.9-1, generalmente es difícil estimar el parámetro de costo C_2 (costo de espera). En consecuencia, puede ser útil calcular el costo C_2 implicado por los niveles de aspiración. Si se usa el modelo de nivel de aspiración para determinar c^* , es posible determinar el C_2 implicado mediante la siguiente desigualdad:

$$L_s(c^*) - L_s(c^* + 1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L_s(c^* - 1) - L_s(c^*)$$

(Vea la deducción en el problema 18-125). Aplique el procedimiento al problema del ejemplo 18.9-2, con $c^* = 3$ y $C_1 = \$12.00$.

CAPÍTULO 19

Modelado de simulación

19.1 SIMULACIÓN DE MONTECARLO

Un precursor de la simulación hasta la actualidad es el experimento de Montecarlo, que es un esquema de modelado que estima parámetros estocásticos o determinísticos con base en un muestreo aleatorio. Algunos ejemplos de aplicaciones de Montecarlo incluyen la evaluación de integrales múltiples, la estimación de la constante π (≈ 3.14159) y la inversión de matrices.

En esta sección se utiliza un ejemplo para demostrar la técnica de Montecarlo. El objetivo del ejemplo es enfatizar la naturaleza estadística de la simulación.

Ejemplo 19.1-1

Se utilizará un muestreo de Montecarlo para estimar el área del siguiente círculo:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

El radio del círculo es $r = 5$ cm y su centro es $(x, y) = (1, 2)$.

El procedimiento para estimar el área requiere encerrar estrechamente el círculo en un cuadrado cuyo lado sea igual al diámetro del círculo, como se muestra en la figura 19.1. Los puntos de esquina se determinan a partir de la geometría del cuadrado.

La estimación del área del círculo se basa en un experimento de muestreo que brinda la misma posibilidad de seleccionar cualquier punto en el cuadrado. Si m de n puntos muestreados quedan dentro del círculo, entonces,

$$\left(\begin{array}{c} \text{Área aproximada} \\ \text{del círculo} \end{array} \right) = \frac{m}{n} \left(\begin{array}{c} \text{Área del} \\ \text{cuadrado} \end{array} \right) = \frac{m}{n} (10 \times 10)$$

Para asegurarse de que todos los puntos en el cuadrado sean igualmente probables, las coordenadas x y y de un punto en el cuadrado se representan mediante las siguientes distribuciones *uniformes*:

$$f_1(x) = \frac{1}{10}, -4 \leq x \leq 6$$

$$f_2(y) = \frac{1}{10}, -3 \leq y \leq 7$$

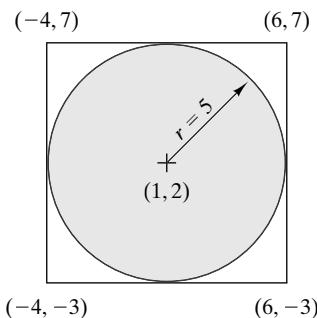


FIGURA 19.1
Estimación de Montecarlo
del área de un círculo

TABLA 19.1 Lista breve de números aleatorios entre 0 y 1

.0589	.3529	.5869	.3455	.7900	.6307
.6733	.3646	.1281	.4871	.7698	.2346
.4799	.7676	.2867	.8111	.2871	.4220
.9486	.8931	.8216	.8912	.9534	.6991
.6139	.3919	.8261	.4291	.1394	.9745
.5933	.7876	.3866	.2302	.9025	.3428
.9341	.5199	.7125	.5954	.1605	.6037
.1782	.6358	.2108	.5423	.3567	.2569
.3473	.7472	.3575	.4208	.3070	.0546
.5644	.8954	.2926	.6975	.5513	.0305

La determinación de una muestra (x, y) se basa en el uso de números aleatorios independientes entre 0 y 1. La tabla 19.1 incluye una muestra de esos números, los cuales se utilizarán en los ejemplos de este capítulo. Para el propósito de simulación general, se utilizan operaciones aritméticas especiales para generar números (seudo) aleatorios entre 0 y 1, como se mostrará en la sección 19.4.

Es posible usar un par de números aleatorios entre 0 y 1, R_1 y R_2 , para generar un punto aleatorio (x, y) en el cuadrado, mediante el uso de las siguientes fórmulas:

$$x = -4 + [6 - (-4)]R_1 = -4 + 10R_1$$

$$y = -3 + [7 - (-3)]R_2 = -3 + 10R_2$$

Para demostrar la aplicación del procedimiento, considere $R_1 = .0589$ y $R_2 = .6733$.

$$x = -4 + 10R_1 = -4 + 10 \times .0589 = -3.411$$

$$y = -3 + 10R_2 = -3 + 10 \times .6733 = 3.733$$

Este punto queda dentro del círculo debido a que

$$(-3.411 - 1)^2 + (3.733 - 2)^2 = 22.46 < 25$$

Comentarios. La precisión de la estimación del área se puede mejorar usando experimentos estadísticos comunes.

1. Aumentar el tamaño de la muestra, n .
2. Usar réplicas, N .

El análisis del ejemplo 19.1-1 formula dos preguntas respecto del experimento de simulación:

1. ¿Qué tan grande debería ser la muestra?
2. ¿Cuántas réplicas se requieren?

Existen algunas fórmulas en la teoría estadística para determinar n y N , las cuales dependen de la naturaleza del experimento de simulación y del nivel de confianza deseado. Sin embargo, como en cualquier experimento estadístico, la regla de oro es que los mayores valores de n y N producen resultados de simulación más precisos. Al final, el tamaño de la muestra dependerá del costo asociado con la realización del experimento de simulación. Sin embargo, un tamaño de muestra seleccionado se suele considerar “adecuado” si produce una desviación estándar relativamente “pequeña”.

Es necesario expresar los resultados como un intervalo de confianza para tener en cuenta la variación aleatoria del resultado del experimento. Si \bar{A} y s son la media y la varianza de N réplicas, entonces, con un nivel de confianza α , el intervalo de confianza del área verdadera A es

$$\bar{A} - \frac{s}{\sqrt{N}} t_{\frac{\alpha}{2}, N-1} \leq A \leq \bar{A} + \frac{s}{\sqrt{N}} t_{\frac{\alpha}{2}, N-1}$$

El parámetro $t_{\frac{\alpha}{2}, N-1}$ se determina a partir de las tablas de distribución t dado un nivel de confianza α y $N-1$ grados de libertad (vea la tabla t del apéndice A o utilice *excelStatTable.xls*). Observe que N es igual al número de réplicas, que es distinto al tamaño n de la muestra.

Momento de Excel

Los cálculos asociados con cada muestra en el ejemplo 19.1-1 son voluminosos. Se utiliza la plantilla de Excel *excelCircle.xls* (con macros VBA), para probar el efecto del tamaño de la muestra y la cantidad de réplicas en la precisión del área estimada. Los datos de entrada incluyen el radio r del círculo; y su centro (cx, cy); el tamaño de la muestra, n ; el número de réplicas, N ; y el nivel de confianza α . La entrada *Steps* en la celda D4 permite ejecutar varias muestras en la misma corrida. Por ejemplo, si $n = 30,000$ y *Steps* = 3, la plantilla generará de forma automática el resultado con $n = 30,000, 60,000$ y $90,000$. Se realizan nuevas estimaciones cada vez que se hace clic en el botón *Press to Execute Monte Carlo*, porque Excel actualiza de nuevo la semilla del generador de números aleatorios.

En la figura 19.2 se resumen los resultados de 5 réplicas y los tamaños de muestra de 30,000, 60,000 y 90,000. El área exacta es de 78.54 cm^2 y los resultados de Monte Carlo muestran que las áreas medias estimadas con los tres tamaños de muestra son ligeramente diferentes.

En la figura 19.2 se dan los intervalos de confianza de 95% para cada n . Por ejemplo, el intervalo de confianza $78.452 \leq A \leq 78.68$ corresponde a $n = 90,000$, con $N = 5$, $\bar{A} = 78.566 \text{ cm}^2$, y $s = .092 \text{ cm}$ y $t_{.025,4} = 2.776$. En general, para obtener una precisión razonable en la estimación del intervalo de confianza, el valor de N debe ser al menos 5.

Momento, ¡ajá! Planeación de la jubilación en línea: ¡El método de Montecarlo!

En el pasado, un asesor financiero era una persona real con quien un inversionista podía reunirse cara a cara para analizar planes financieros para su jubilación. Aunque el asesoramiento con personas reales sigue existiendo (sobre todo para los grandes inversionistas), la tendencia ahora, especialmente para los pequeños inversores, es buscar asesoramiento financiero en línea. El software disponible calcula el flujo de caja poste-

	B	C	D	E
1	Monte Carlo Estimation of the Area of a Circle			
2	Input data			
3	Nbr. Replications, N =	5	α =	0.025
4	Sample size, n =	30,000	Steps =	3
5	Radius, r =	5		
6	Center, cx =	1		
7	Center, cy =	2		
8	Output results			
9	Exact area =	78.540		
10	Press to Execute Monte Carlo			
11	Monte Carlo Calculations:			
12		n=30000	n=60000	n=90000
13	Replication 1	78.590	78.543	78.536
14	Replication 2	78.447	78.695	78.731
15	Replication 3	78.747	78.648	78.534
16	Replication 4	78.363	78.500	78.512
17	Replication 5	78.540	78.420	78.517
18				
19	Mean =	78.537	78.561	78.566
20	Std. Deviation =	0.142	0.118	0.092
21				
22	95% lower conf. limit =	78.361	78.415	78.452
23	95% upper conf. limit =	78.714	78.708	78.680

FIGURA 19.2

Resultados de Excel para la estimación del área de un círculo utilizando el método de Montecarlo (archivo *excelCircle.xls*)

rior a la jubilación, con base en la información financiera histórica sobre acciones, bonos e instrumentos similares, junto con las contribuciones anuales al fondo de jubilación, la fecha de jubilación anticipada y otros datos pertinentes. Pero el elemento más importante del modelo es cómo explica la volatilidad (altibajos) de la bolsa con base en eventos previstos e imprevistos. Se trata de un proceso estocástico complejo que describe la incertidumbre siempre presente en el comportamiento del mercado a través del tiempo. En la práctica, casi todas las calculadoras de jubilación disponibles traducen la volatilidad del mercado como simples estimaciones porcentuales que reflejan el grado de incertidumbre en el mercado. Estos porcentajes son la base para el uso del muestreo aleatorio (o de Montecarlo), con el propósito de simular el comportamiento del mercado bursátil. Prácticamente todos los corredores financieros utilizan alguna versión de un simulador de datos tipo *caja negra* (basado en el método de Montecarlo). Pero, como en cualquier modelo de simulación, el resultado final es simplemente la consecuencia de un experimento estadístico peculiar (vea la sección 19.6) y, por lo tanto, está acotado por las limitaciones del diseño y la ejecución de esos experimentos. Entonces, la calidad de los consejos propuestos depende de la robustez del modelo y de la exactitud de los datos de entrada que guían el modelo.

19.2 TIPOS DE SIMULACIÓN

La ejecución actual de la simulación se basa en la idea del muestreo utilizado con el método de Montecarlo. Difiere en que estudia el comportamiento de sistemas reales como una *función de tiempo*. Existen dos tipos distintos de modelos de simulación.

1. Los **modelos continuos** se ocupan de sistemas cuyo comportamiento cambia *continuamente* con el tiempo. Estos modelos suelen utilizar ecuaciones diferenciales en diferencias para describir las interacciones entre los distintos elementos del sistema. Un ejemplo típico tiene que ver con el estudio de la dinámica de la población mundial.
2. Los **modelos discretos** se ocupan principalmente del estudio de líneas de espera con el objetivo de determinar medidas como el tiempo de espera promedio y la longitud de la cola. Estas medidas cambian sólo cuando un cliente entra o sale del sistema. Los instantes en que ocurren los cambios en puntos discretos específicos del tiempo (eventos de llegada y salida) originan el nombre **simulación de evento discreto**.

En este capítulo se presentan los fundamentos de la simulación de evento discreto, incluyendo una descripción de los componentes de un modelo de simulación, la recolección de estadísticas de simulación y el aspecto estadístico del experimento de simulación. También enfatiza el papel de la computadora y los lenguajes de simulación en la ejecución de los modelos de simulación.

19.3 ELEMENTOS DE LA SIMULACIÓN DE EVENTO DISCRETO

La meta final de la simulación es estimar algunas medidas de desempeño deseables que describan el comportamiento del sistema simulado. Por ejemplo, en una instalación de servicio, las medidas de desempeño asociadas pueden incluir el tiempo de espera promedio hasta que un cliente es atendido, la longitud promedio de la cola y la utilización promedio de la instalación de servicio. En esta sección se muestra cómo se recopilan las estadísticas del sistema simulado con base en el concepto de *eventos*.

19.3.1 Definición genérica de los eventos

Todas las simulaciones de evento discreto describen, en forma directa o indirecta, situaciones de colas donde los clientes llegan (para recibir un servicio), esperan en la cola (si es necesario) y después reciben el servicio antes de salir de la instalación. En este caso, cualquier simulación de evento discreto, independientemente de la complejidad del sistema que describe, se reduce a tratar con dos eventos básicos: llegadas y salidas. El siguiente ejemplo ilustra el uso de los eventos de llegada y salida para describir un sistema consistente en colas distintas.

Ejemplo 19.3-1

Metalco Jobshop recibe dos tipos de trabajos: regulares y urgentes. Todos los trabajos se procesan en dos máquinas consecutivas con amplias áreas intermedias. Los trabajos urgentes siempre suponen prioridad no preventiva sobre los trabajos regulares.

Esta situación consiste en colas en tándem que representan las dos máquinas. Al principio puede existir la tendencia a identificar los eventos de la situación como

A11: Un trabajo regular llega a la máquina 1.

A21: Un trabajo urgente llega a la máquina 1.

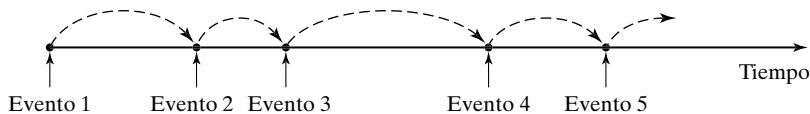


FIGURA 19.3

Ejemplo de la ocurrencia de eventos de simulación en una escala de tiempo

- D11: Un trabajo regular sale de la máquina 1.
- D21: Un trabajo urgente sale de la máquina 1.
- A12: Un trabajo regular llega a la máquina 2.
- A22: Un trabajo urgente llega a la máquina 2.
- D12: Un trabajo regular sale de la máquina 2.
- D22: Un trabajo urgente sale de la máquina 2.

En realidad sólo hay dos eventos: la llegada de un (nuevo) trabajo al taller y la salida de un trabajo (terminado) de una máquina. En primer lugar, observe que los eventos D11 y A12 en realidad son el mismo, lo cual también se aplica para D21 y A22. Luego, en la simulación discreta se puede utilizar un evento (llegada o salida) para ambos tipos de trabajos y “etiquetar” simplemente el evento con un **atributo** que identifique el tipo de trabajo como regular o urgente. (En este caso, se piensa en el atributo como un *descriptor de identificación personal*, y de hecho lo es). Dado este razonamiento, los eventos del modelo se reducen a (1) una llegada A (al taller), y (2) una salida D (de una máquina). Las acciones asociadas con el evento de llegada dependen del tipo de trabajo que llega (urgente o regular) y de la disponibilidad de una máquina. Asimismo, el procesamiento del evento de salida dependerá de la máquina y del estatus de los trabajos en espera.

Luego de haber definido los eventos básicos de un modelo de simulación, es posible demostrar cómo se ejecuta el modelo. La figura 19.3 ofrece una representación esquemática de ocurrencias típicas de eventos de simulación en una escala de tiempo. Después de que se hayan realizado todas las acciones asociadas con un evento existente, la simulación avanza “saltando” al siguiente evento cronológico. En esencia, la ejecución de la simulación ocurre en los instantes en que ocurren eventos.

¿Cómo determina la simulación el tiempo de ocurrencia de los eventos? Los eventos de llegada están separados por el tiempo entre llegadas (el intervalo entre llegadas sucesivas) y los eventos de salida son una función del tiempo de servicio en la instalación. Estos tiempos pueden ser determinísticos (por ejemplo, un tren que llega a una estación cada 5 minutos) o probabilísticos (como la llegada aleatoria de los clientes a un banco). Si el tiempo entre eventos es determinístico, la determinación de sus tiempos de ocurrencia es simple. Si es probabilístico, se utiliza un procedimiento especial para muestrear de la distribución de probabilidad correspondiente. Este punto se analiza en la siguiente sección.

19.3.2 Muestreo a partir de distribuciones de probabilidad

La aleatoriedad de la simulación surge cuando el intervalo, t , entre eventos sucesivos es probabilístico. En esta sección se presentan tres métodos para generar muestras aleatorias sucesivas ($t = t_1, t_2, \dots$) a partir de una distribución de probabilidad $f(t)$:

1. Método inverso.
2. Método de convolución.
3. Método de aceptación y rechazo.

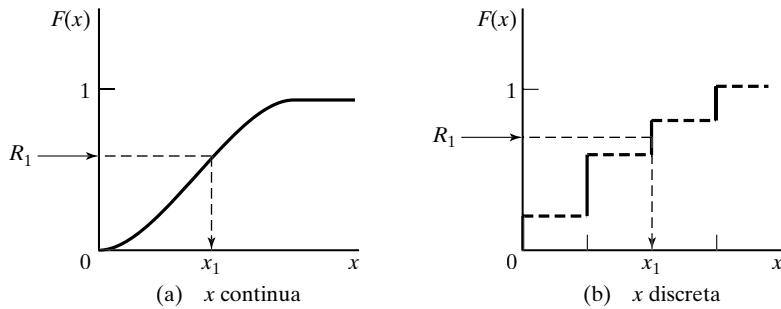


FIGURA 19.4

Muestreo de una distribución de probabilidad usando el método inverso

El método inverso es particularmente adecuado para funciones de densidad de probabilidad analíticamente solubles, como la exponencial y la uniforme. Los otros dos métodos se ocupan de casos más complejos, como el normal y el de Poisson. Los tres métodos emanan del uso de números aleatorios uniformes independientes e idénticamente distribuidos entre 0 y 1.

En esta sección se presentarán únicamente los dos primeros métodos. Los detalles del método de aceptación y rechazo se pueden consultar en Law (2007).

Método inverso. Para obtener una muestra aleatoria x de la función de densidad de probabilidad $f(x)$ (continua o discreta), el método inverso determina primero la expresión de forma cerrada de la función de densidad acumulada $F(x) = P\{y \leq x\}$, donde $0 \leq F(x) \leq 1$, para todos los valores definidos de y . Se puede demostrar que la variable aleatoria $z = F(x)$ está uniformemente distribuida en el intervalo $0 \leq z \leq 1$. Con base en este resultado, se determina una muestra aleatoria de $f(x)$ mediante los siguientes pasos (F^{-1} es la inversa de F):

Paso 1. Genere un número aleatorio R entre 0 y 1.

Paso 2. Calcule la muestra deseada $x = F^{-1}(R)$.

En la figura 19.4 se ilustran los procedimientos para distribuciones aleatorias tanto continuas como discretas.

Ejemplo 19.3-2 (Distribución exponencial)

La función de densidad de probabilidad exponencial $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$ representa el tiempo entre llegadas t a una instalación con valor medio de $\frac{1}{\lambda}$. La función de densidad acumulada es

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0$$

Si se establece $R = F(t)$, es posible despejar t como

$$t = -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln(1 - R)$$

Por ejemplo, para $\lambda = 4$ clientes por hora y $R = .9$, el periodo de tiempo hasta que ocurre la siguiente llegada es

$$t_1 = -\left(\frac{1}{4}\right) \ln(1 - .9) = .577 \text{ horas} = 34.5 \text{ minutos}$$

Observe que $\ln(1 - R)$ se puede reemplazar con $\ln(R)$ porque $1 - R$ es el complemento de R .

Método de convolución. La idea básica del método de convolución es expresar la muestra deseada como la suma estadística de otras variables aleatorias fáciles de muestrear. Entre las distribuciones típicas de este tipo se encuentran las de Erlang y de Poisson, cuyas muestras se obtienen a partir de las muestras de la distribución exponencial.

Ejemplo 19.3-3 (Distribución de Erlang)

La variable aleatoria m de Erlang se define como la suma estadística (convoluciones) de m variables aleatorias exponenciales independientes e idénticamente distribuidas. Sea y la variable aleatoria m de Erlang; entonces,

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

Las variables aleatorias y_i , $i = 1, 2, \dots, m$ son exponentes independientes e idénticamente distribuidos con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(y_i) = \lambda e^{-\lambda y_i}, y_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$$

De acuerdo con el ejemplo 19.3-2, una muestra de la i -ésima distribución exponencial se calcula como

$$y_i = -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln(R_i), i = 1, 2, \dots, m$$

Por consiguiente, la muestra m de Erlang se calcula como

$$\begin{aligned} y &= -\left(\frac{1}{\lambda}\right) [\ln(R_1) + \ln(R_2) + \dots + \ln(R_m)] \\ &= -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln\left(\prod_{i=1}^m R_i\right) \end{aligned}$$

Para ilustrar el uso de la fórmula, suponga que $m = 3$ y $\lambda = 4$ eventos por hora. Los tres primeros números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1 producen $R_1 R_2 R_3 = (.0589)(.6733)(.4799) = .0190$, de donde resulta

$$y = -\left(\frac{1}{4}\right) \ln(.019) = .991 \text{ horas}$$

Ejemplo 19.3-4 (Distribución de Poisson)

La sección 18.4.1 muestra que si la distribución del tiempo entre las ocurrencias sucesivas de eventos es exponencial, entonces la distribución de la cantidad de eventos por unidad de tiempo es de Poisson, y viceversa. Se usa esta relación para muestrear la distribución de Poisson.

Suponga que la media de la distribución de Poisson es λ eventos por unidad de tiempo. Se sigue que el tiempo entre eventos es exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$ unidades de tiempo, lo cual significa que una muestra, n , de Poisson se repetirá durante t unidades de tiempo si, y sólo si,

El periodo hasta que ocurre el evento $n \leq t$ < el periodo hasta que ocurre el evento $n + 1$.

Esta condición se traduce a

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + \cdots + t_n &\leq t < t_1 + t_2 + \cdots + t_{n+1}, n > 0 \\ 0 &\leq t < t_1, n = 0 \end{aligned}$$

La variable aleatoria $t_i, i = 1, 2, \dots, n+1$, es una muestra de la distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$. A partir del resultado del ejemplo 19.3-3, se tiene

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln\left(\prod_{i=1}^n R_i\right) &\leq t < -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln\left(\prod_{i=1}^{n+1} R_i\right), n > 0 \\ 0 &\leq t < -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln(R_1), n = 0 \end{aligned}$$

que se reducen a

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n R_i &\geq e^{-\lambda t} > \prod_{i=1}^{n+1} R_i, n > 0 \\ 1 &\geq e^{-\lambda t} > R_1, n = 0 \end{aligned}$$

Para ilustrar la implementación del proceso de muestreo, suponga que $\lambda = 4$ eventos por hora. Con la finalidad de obtener una muestra durante un periodo $t = .5$ horas, primero se calcula $e^{-\lambda t} = .1353$. El número aleatorio $R_1 = .0589$ es menor que $e^{-\lambda t} = .1353$. Por lo tanto, la muestra correspondiente es $n = 0$.

Ejemplo 19.3-5 (Distribución normal)

El teorema del límite central (vea la sección 14.4.4) establece que la suma (convolución) de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas se hace asintóticamente normal cuando n se vuelve grande de manera suficiente. Este resultado se utiliza para generar muestras de una distribución normal con media μ y desviación estándar σ .

Defina

$$x = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

La variable aleatoria es asintóticamente normal de acuerdo con el teorema del límite central. Dado que el número aleatorio $(0, 1)$ uniforme R tiene una medida de $\frac{1}{2}$ y una varianza de $\frac{1}{12}$, se sigue que la media y la varianza de x son $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{12}$, respectivamente. Por lo tanto, una muestra aleatoria, y , de una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, con media μ y desviación estándar σ , se calcula a partir de x como

$$y = \mu + \sigma \left(\frac{x - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \right)$$

En la práctica, se toma $n = 12$ por conveniencia, lo que reduce la fórmula a

$$y = \mu + \sigma(x - 6)$$

Para ilustrar el uso de este método, suponga que se desea generar una muestra a partir de $N(10, 2)$ (media $\mu = 10$ y desviación estándar $\sigma = 2$). Si se suman los primeros 12 números aleatorios de las columnas 1 y 2 de la tabla 19.1, se tiene $x = 6.1094$. Por lo tanto, $y = 10 + 2(6.1094 - 6) = 10.2188$.

Fórmula de muestreo normal de Box-Muller. La desventaja del procedimiento anterior es que requiere generar 12 números aleatorios por muestra normal, lo cual es computacionalmente ineficiente. Un procedimiento más eficiente utiliza la transformación

$$x = \cos(2\pi R_2) \sqrt{-2 \ln(R_1)}$$

Box y Muller (1958) demostraron que x es una $N(0, 1)$ estándar. Por lo tanto, $y = \mu + \sigma x$ producirá una muestra a partir de $N(\mu, \sigma)$. El nuevo procedimiento es más eficiente porque requiere sólo dos números aleatorios entre 0 y 1. En realidad, este método es aún más eficiente de lo que se formuló, ya que Box y Muller demostraron que la fórmula dada produce otra muestra $N(0, 1)$ si $\sin(2\pi R_2)$ reemplaza a $\cos(2\pi R_2)$.

Para ilustrar la aplicación del procedimiento de Box y Muller a la distribución normal $N(10, 2)$, los dos primeros números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1 producen las siguientes muestras $N(0, 1)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos(2\pi \times .6733) \sqrt{-2 \ln(.0589)} \approx -1.103 \\ x_2 &= \sin(2\pi \times .6733) \sqrt{-2 \ln(.0589)} \approx -2.109 \end{aligned}$$

Entonces, las muestras $N(10, 2)$ correspondientes son

$$\begin{aligned} y_1 &= 10 + 2(-1.103) = 7.794 \\ y_2 &= 10 + 2(-2.109) = 5.782 \end{aligned}$$

19.4 GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS

Los números aleatorios uniformes (0, 1) desempeñan un papel clave en el muestreo de distribuciones. Sólo los dispositivos electrónicos pueden generar números aleatorios verdaderos entre 0 y 1. Sin embargo, debido a que los modelos de simulación se ejecutan en computadora, el uso de dispositivos electrónicos para generar números aleatorios es demasiado lento para ese propósito. Asimismo, los dispositivos electrónicos son activados por leyes de probabilidad, lo que hace imposible duplicar la misma secuencia de números aleatorios a voluntad. Este punto es importante porque, con frecuencia, la depuración, verificación y validación del modelo de simulación requieren la duplicación de la secuencia de números aleatorios.

La única forma factible de generar números aleatorios entre 0 y 1 para usarlos en una simulación se basa en operaciones aritméticas. Esos números no son verdaderamente aleatorios debido a que toda la secuencia puede generarse con anticipación. Por consiguiente, es más adecuado referirse a ellos como **números seudoaleatorios**.

La operación aritmética más común para generar números aleatorios (0, 1) es el **método congruencial multiplicativo**. Dados los parámetros u_0, b, c y m , un número seudoaleatorio R_n se genera con las fórmulas:

$$u_n = (bu_{n-1} + c) \text{ mod}(m), n = 1, 2, \dots$$

$$R_n = \frac{u_n}{m}, n = 1, 2, \dots$$

Al valor inicial u_0 se le suele conocer como la **semilla** del generador.

En Law (2007) se pueden encontrar variaciones del método congruencial multiplicativo que mejoran la calidad del generador.

Ejemplo 19.4-1

Genere tres números aleatorios con base en el método congruencial multiplicativo aplicando $b = 9$, $c = 5$ y $m = 12$. La semilla es $u_0 = 11$.

$$u_1 = (9 \times 11 + 5) \bmod 12 = 8, R_1 = \frac{8}{12} = .6667$$

$$u_2 = (9 \times 8 + 5) \bmod 12 = 5, R_2 = \frac{5}{12} = .4167$$

$$u_3 = (9 \times 5 + 5) \bmod 12 = 2, R_3 = \frac{2}{12} = .1667$$

Momento de Excel

La plantilla *excelRN.xls* implementa el método congruencial multiplicativo. La figura 19.5 genera la secuencia asociada con los parámetros del ejemplo 19.4-1. Observe que la duración del ciclo es exactamente 4, después

FIGURA 19.5

Números aleatorios generados por Excel para los datos del ejemplo 19.4-1 (archivo *excelRN.xls*)

	A	B
1	Multiplicative Congruential Method	
2	Input data(B7<=1000)	
3	b =	9
4	c =	5
5	u0 =	11
6	m =	12
7	How many numbers?	10
8	Output results	
9	Press to Generate Sequence	
10	Generated random numbers:	
11	1	0.66667
12	2	0.41667
13	3	0.16667
14	4	0.91667
15	5	0.66667
16	6	0.41667
17	7	0.16667
18	8	0.91667
19	9	0.66667
20	10	0.41667

de lo cual se repite la secuencia. El punto aquí es que los valores seleccionados de u_0 , b , c y m son críticos para determinar la calidad (estadística) del generador y la duración de su ciclo. Por lo tanto, no se recomienda la implementación “casual” de la fórmula congruencial. En su lugar, se debe utilizar un generador confiable y probado. Todos los programas de computadora comerciales están equipados con generadores de números aleatorios confiables.

19.5 MECÁNICA DE LA SIMULACIÓN DISCRETA

En esta sección se detalla cómo se recopilan las estadísticas típicas en un modelo de simulación. El vehículo de explicación es un modelo de una sola cola. En la sección 19.5.1 se utiliza un ejemplo numérico para detallar las acciones y los cálculos que ocurren en el modelo de simulación de colas de un solo servidor. Debido a los tediosos cálculos que tipifican la ejecución de un modelo de simulación, en la sección 19.5.2 se muestra la forma de modelar y ejecutar el modelo de un solo servidor con una hoja de cálculo en Excel.

19.5.1 Simulación manual de un modelo de un solo servidor

Ejemplo 19.5-1

El tiempo entre llegadas de los clientes a la peluquería HairKare es exponencial con media de 15 minutos. El negocio es atendido por sólo un peluquero, y se lleva entre 10 y 15 minutos, distribuidos de manera uniforme, para realizar un corte de cabello. Los clientes se atienden con base en la disciplina de primero en llegar, primero en ser atendido (FIFO, por las siglas de *first-in, first-out*). El objetivo de la simulación es calcular las siguientes medidas de desempeño:

1. La utilización promedio de la peluquería.
 2. La cantidad promedio de clientes en espera.
 3. El tiempo promedio que un cliente espera en la cola.
-

En el resto de esta sección, la situación de la peluquería del ejemplo 19.5-1, se utiliza para describir la lógica del modelo de simulación, detallando las acciones asociadas con los eventos de llegada y salida. De manera concurrente, en la presentación se detalla la forma de recopilar los datos/observaciones estadísticos de la simulación.

Evento de llegada

1. Genere y guarde cronológicamente el tiempo de ocurrencia del siguiente evento de llegada (= tiempo de simulación actual + tiempo entre llegadas).
2. Si la instalación (peluquero) está inactiva:
 - a. Inicie el servicio y declare ocupada la instalación. Actualice las estadísticas de utilización de la instalación.
 - b. Genere y guarde cronológicamente el tiempo del evento de salida del cliente (= tiempo de simulación actual + tiempo de servicio).
3. Si la instalación está ocupada, coloque al cliente en la cola y actualice las estadísticas de la cola.

Evento de salida

1. Si la cola está vacía, declare inactiva la instalación. Actualice las estadísticas de utilización de la instalación.
2. Si la cola no está vacía:
 - a. Seleccione un cliente de la cola, póngalo en la instalación. Actualice las estadísticas de utilización de la instalación y la cola.
 - b. Genere y guarde cronológicamente el tiempo de ocurrencia del evento de salida del cliente (= tiempo de simulación actual + tiempo de servicio).

A partir de los datos del problema, el tiempo entre llegadas es exponencial con media de 15 minutos, y el tiempo de servicio es uniforme entre 10 y 15 minutos. Si p y q representan muestras aleatorias de tiempos entre llegadas y de servicio, entonces, como se explica en la sección 19.3.2, se obtiene

$$p = -15 \ln(R) \text{ minutos, } 0 \leq R \leq 1$$

$$q = 10 + 5R \text{ minutos, } 0 \leq R \leq 1$$

Para el objetivo de este ejemplo, se utiliza R de la tabla 19.1, comenzando con la columna 1. También se utiliza el símbolo T para representar el tiempo del reloj de simulación. Además, se supone que el primer cliente llega en el instante $T = 0$ y que la instalación comienza vacía.

Debido a que los cálculos de simulación suelen ser voluminosos, la simulación se limita sólo a las primeras 5 llegadas. El ejemplo está diseñado para cubrir todas las situaciones posibles que surjan en el curso de la simulación. Más adelante, en la sección 19.5.2, se presenta la plantilla *excelSingleServer.xls* que permite experimentar con el modelo sin tener que realizar manualmente los cálculos.

Llegada del cliente 1 en $T = 0$. Genere la llegada del cliente 2 en

$$T = 0 + p_1 = 0 + [-15 \ln(.0589)] = 42.48 \text{ minutos}$$

Debido a que la instalación está inactiva en el instante $T = 0$, el cliente 1 inicia el servicio de inmediato. Por lo tanto, el tiempo de salida se calcula como

$$T = 0 + q_1 = 0 + (10 + 5 \times .6733) = 13.37 \text{ minutos}$$

Por lo tanto, la lista *cronológica* de eventos futuros es

Tiempo, T	Evento
13.37	Salida del cliente 1
42.48	Llegada del cliente 2

Salida del cliente 1 en $T = 13.37$. Debido a que la cola está vacía, la instalación se declara inactiva. Al mismo tiempo, se registra que la instalación ha estado ocupada entre $T = 0$ y $T = 13.37$ minutos. La lista actualizada de eventos futuros se convierte en

Tiempo, T	Evento
42.48	Llegada del cliente 2

Llegada del cliente 2 en $T = 42.48$. El cliente 3 llegará en

$$T = 42.48 + [-15 \ln(.4799)] = 53.49 \text{ minutos}$$

Debido a que la instalación está inactiva, el cliente 2 inicia el servicio, y la instalación se declara ocupada. El tiempo de salida es

$$T = 42.48 + (10 + 5 \times .9486) = 57.22 \text{ minutos}$$

La lista de eventos futuros se actualiza como

Tiempo, T	Evento
53.49	Llegada del cliente 3
57.22	Salida del cliente 2

Llegada del cliente 3 en $T = 53.49$. El cliente 4 llegará en

$$T = 53.49 + [-15 \ln(.6139)] = 60.81 \text{ minutos}$$

Debido a que actualmente la instalación está ocupada (hasta $T = 57.22$), el cliente 3 se coloca en la cola en $T = 53.49$. La lista actualizada de eventos futuros es

Tiempo, T	Evento
57.22	Salida del cliente 2
60.81	Llegada del cliente 4

Salida del cliente 2 en $T = 57.22$. El cliente 3 se retira de la cola para iniciar el servicio. El tiempo de espera es

$$W_3 = 57.22 - 53.49 = 3.73 \text{ minutos}$$

El tiempo de salida es

$$T = 57.22 + (10 + 5 \times .5933) = 70.19 \text{ minutos}$$

La lista actualizada de eventos futuros es

Tiempo, T	Evento
60.81	Llegada del cliente 4
70.19	Salida del cliente 3

Llegada del cliente 4 en $T = 60.81$. El cliente 5 llegará en

$$T = 60.81 + [-15 \ln(.9341)] = 61.83 \text{ minutos}$$

Debido a que la instalación está ocupada hasta $T = 70.19$, el cliente 4 se sitúa en la cola. La lista actualizada de eventos futuros es

Tiempo, T	Evento
61.83	Llegada del cliente 5
70.19	Salida del cliente 3

Llegada del cliente 5 en $T = 61.83$. La simulación se limita a 5 llegadas y, por consiguiente, no se genera la llegada del cliente 6. La instalación sigue ocupada, de modo que el cliente se coloca en la cola en el instante $T = 61.83$. La lista actualizada de eventos es

Tiempo, T	Evento
70.19	Salida del cliente 3

Salida del cliente 3 en $T = 70.19$. El cliente 4 se retira de la cola para iniciar el servicio. El tiempo de espera es

$$W_4 = 70.19 - 60.81 = 9.38 \text{ minutos}$$

El tiempo de salida es

$$T = 70.19 + [110 + 5 \times .1782] = 81.08 \text{ minutos}$$

La lista actualizada de eventos futuros es

Tiempo, T	Evento
81.08	Salida del cliente 4

Salida del cliente 4 en $T = 81.08$. El cliente se retira de la cola para iniciar el servicio. El tiempo de espera es

$$W_5 = 81.08 - 61.83 = 19.25 \text{ minutos}$$

El tiempo de salida es

$$T = 81.08 + (10 + 5 \times .3473) = 92.82 \text{ minutos}$$

La lista actualizada de eventos futuros es

Tiempo, T	Evento
92.82	Salida del cliente 5

Salida del cliente 5 en $T = 92.82$. No hay más clientes en el sistema (cola e instalación) y termina la simulación.

En la figura 19.6 se resumen los cambios de longitud de la cola y la utilización de la instalación como una función del tiempo de simulación.

La longitud de la cola y la utilización de la instalación se conocen como variables **basadas en el tiempo**, porque su variación es una función del tiempo. En consecuencia, sus valores promedio se calculan como

$$\left(\begin{array}{c} \text{Valor promedio de una variable} \\ \text{basada en el tiempo} \end{array} \right) = \frac{\text{Área bajo la curva}}{\text{Periodo simulado}}$$

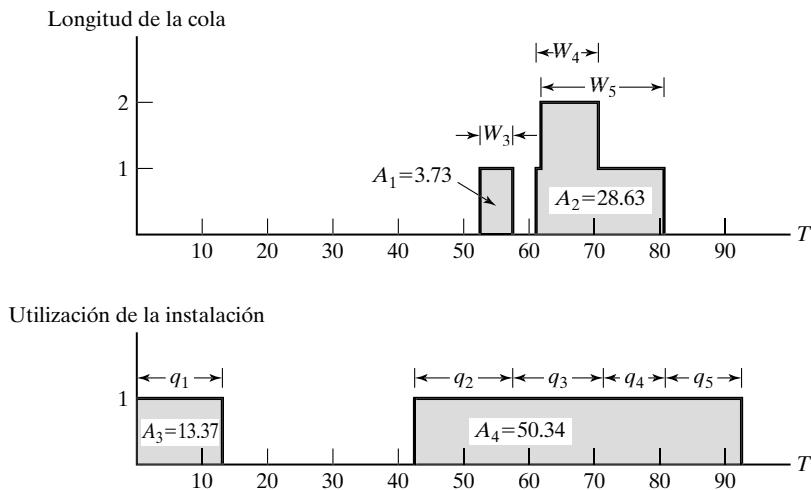


FIGURA 19.6

Cambios en la longitud de la cola y en la utilización de la instalación como una función del tiempo de simulación, T

Al implementar esta fórmula para los datos de la figura 19.6, se obtiene

$$\left(\begin{array}{c} \text{Longitud promedio} \\ \text{de la cola} \end{array} \right) = \frac{A_1 + A_2}{92.82} = \frac{32.36}{92.82} = .349 \text{ clientes}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Utilización promedio} \\ \text{de la instalación} \end{array} \right) = \frac{A_3 + A_4}{92.82} = \frac{63.71}{92.82} = .686 \text{ peluqueros}$$

El tiempo de espera promedio en la cola es una variable **basada en observaciones**, cuyo valor se calcula como

$$\left(\begin{array}{c} \text{Valor promedio de una variable} \\ \text{basada en observaciones} \end{array} \right) = \frac{\text{Suma de las observaciones}}{\text{Cantidad de observaciones}}$$

El examen de la figura 19.6 revela que el área bajo la curva de longitud de la cola en realidad es igual a la suma del tiempo de espera de los tres clientes que se unen a la cola, es decir,

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 0 + 0 + 3.73 + 9.38 + 19.25 = 32.36 \text{ minutos}$$

Por lo tanto, el tiempo de espera promedio en la cola para todos los clientes se calcula como

$$\overline{W}_q = \frac{32.36}{5} = 6.47 \text{ minutos}$$

19.5.2 Simulación basada en hoja de cálculo del modelo de un solo servidor

En esta sección se desarrolla un modelo basado en hoja de cálculo para el caso de un solo servidor. El objetivo del desarrollo consiste en reforzar las ideas presentadas en la sección 19.5.1. Desde luego, un modelo de un solo servidor es una situación simple, fácil de modelar en un entorno de hoja de

cálculo. Otras situaciones requieren un esfuerzo de modelado más complicado, tarea que se facilita con los paquetes de simulación disponibles (vea la sección 19.7).

La presentación en la sección 19.5.1 muestra que el modelo de simulación de la instalación de un solo servidor requiere dos elementos básicos:

1. Una lista cronológica de los eventos del modelo.
2. Una gráfica que rastree los cambios en la utilización de la instalación y la longitud de la cola.

Ambos elementos continúan siendo esenciales en el desarrollo de un modelo de simulación basado en hoja de cálculo (en realidad, basado en cualquier programa computacional). La diferencia es que la implementación se realiza de modo que sea compatible con el uso de la computadora. Como en la sección 19.5.1, a los clientes se les atiende en el orden de llegada (FIFO).

En la figura 19.7 se presentan los resultados obtenidos con *excelSingleServer.xls*. Los datos de entrada permiten representar el tiempo entre llegadas y de servicio en una de cuatro formas: constante, exponencial, uniforme y triangular. La distribución triangular es útil porque sirve como una estimación inicial aproximada de cualquier distribución, simplemente con tres estimaciones a , b y c que representan los valores mínimo, más probable y máximo del tiempo entre llegadas y de servicio. La única información adicional necesaria para controlar la simulación es la duración de la corrida de simulación, que en este modelo se especifica mediante el número de llegadas que se pueden generar en el modelo.

Los cálculos de la hoja de cálculo reservan una fila para cada llegada. Los tiempos entre llegadas y de servicio de cada llegada se generan con los datos de entrada. Se supone que la primera llegada ocurre en $T = 0$. Debido a que la instalación comienza inactiva, el cliente inicia el servicio de inmediato. La hoja de cálculo ofrece suficiente información para demostrar los cálculos internos dados en la sección 19.5.1.

FIGURA 19.7

Resultados de Excel para un modelo de simulación de un solo servidor (archivo *excelSingleServer.xls*)

A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	M	N	O	P	Q
Simulation of a Single-Server Queueing Model														
2	Nbr of arrivals = 20 <<Maximum 500													
3	Enter x in column A to select interarrival pdf:													
4	Constant =							1	3.73	12.83	0.00	12.83	0.00	12.83
5	x Exponential: λ =	0.067						2	5.37	14.71	3.73	27.55	9.10	23.82
6	Uniform: a =		b =					3	3.86	12.21	9.09	39.75	18.45	30.66
7	Triangular: a =		b =	c =				4	14.10	11.18	12.95	50.94	26.80	37.98
8	Enter x in column A to select service time pdf:													
9	Constant =							5	7.35	14.92	27.05	65.85	23.88	38.80
10	x Exponential: μ =							6	35.70	14.22	34.41	80.07	31.45	45.67
11	Uniform: a = 10 b = 15							7	0.60	14.50	70.11	94.58	9.97	24.47
12	Triangular: a =		b =	c =				8	4.25	13.35	70.71	107.93	23.87	37.22
13	Output Summary													
14	Av. facility utilization =	0.98						11	8.99	14.65	87.24	146.59	44.70	59.34
15	Percent idleness (%) =	1.95						12	49.78	12.85	96.23	159.43	50.36	63.20
16	Press F9 to trigger a new simulation run.													
17	Av. queue length, L_q =	1.57						13	0.42	14.12	146.01	173.55	13.43	27.54
18	Av. nbr in system, L_s =	2.55						14	8.77	13.69	146.43	187.24	27.13	40.82
19	Av. queue time, W_q =	21.24						15	11.19	10.50	155.20	197.75	32.05	42.55
20	Av. system time, W_s =	34.47						16	42.82	13.78	166.38	211.53	31.36	45.14
21	Sum(ServiceTime) =	264.65						17	19.87	12.29	209.20	223.82	2.33	14.62
22	Sum(W_q) =	424.80						18	9.25	12.95	229.07	242.03	0.00	12.95
23	Sum(W_s) =	689.44						19	13.98	12.99	238.33	255.02	3.70	16.69
								20	58.46	14.88	252.31	269.90	2.71	17.59

Se desarrolló otra hoja de cálculo para simular modelos de varios servidores (*excelMultiServer.xls*). El diseño de la plantilla se basa en las mismas ideas utilizadas en el caso de un solo servidor. La determinación del tiempo de salida, sin embargo, no es tan sencilla y requiere el uso de macros VBA.

Momento de Excel

En el ejemplo 18.6-5 y en los problemas 18-69 y 18-77, se analiza la ventaja operativa de usar agrupaciones de servicios bajo los supuestos de Poisson, incluso con tasas de utilización de instalaciones muy altas (es decir, $\frac{\rho}{c} \rightarrow 1$). En los comentarios que siguen al ejemplo 18.6-5, hice la afirmación (sin fundamento) de que las agrupaciones de servicios pueden conducir un modo eficiente de operación, incluso si la situación de las colas no sigue el modelo de Poisson. La literatura está vacía de argumentos matemáticos que invaliden esta afirmación. El presente capítulo ofrece una oportunidad para tener una idea de si la afirmación es plausible. En concreto, las hojas de cálculo en Excel *excelSingleServer.xls* y *excelMultiServer.xls* simulan las colas de un solo servidor y de servidores múltiples con tiempos de servicio e intervalos entre llegadas constantes, exponenciales, uniformes y triangulares. Se le anima a diseñar un experimento que “corrobore” o “refute” la afirmación. Tenga en cuenta que sólo está ejecutando un experimento y no busca una demostración.

19.6 MÉTODOS PARA REUNIR OBSERVACIONES ESTADÍSTICAS

La simulación es un experimento estadístico y sus resultados deben interpretarse por medio de herramientas de inferencia estadística adecuadas (por ejemplo, intervalos de confianza y pruebas de hipótesis). Para realizar esta tarea, un experimento de simulación debe satisfacer tres condiciones:

1. Las observaciones se extraen de distribuciones estacionarias (idénticas).
2. Las observaciones se muestran a partir de una población normal.
3. Las observaciones son independientes.

En un sentido estricto, el experimento de simulación no satisface ninguna de estas condiciones. No obstante, es posible garantizar que estas condiciones permanezcan estadísticamente aceptables al restringir la forma de reunir las observaciones.

En primer lugar, se considera el tema de las distribuciones estacionarias. Los resultados de la simulación son una función de la longitud del periodo simulado. El periodo inicial produce un comportamiento errático conocido en general como **periodo transitorio o de calentamiento**. Cuando los resultados de la simulación se estabilizan, el sistema opera en **estado estable**. Por desgracia, no hay una forma definitiva de predecir de antemano el punto de inicio del estado estable. Por lo general, una ejecución más larga de la simulación tiene una mejor posibilidad de alcanzar el estado estable, es decir, que el problema se aborda con un tamaño de muestra suficientemente grande.

En seguida se considera el requisito de que las observaciones para la simulación se extraigan de una población normal, que se cumple utilizando el **teorema del límite central** (vea la sección 14.4.4), el cual confirma que la distribución del promedio de una muestra es asintóticamente normal, sin importar cuál sea la población padre. Por lo tanto, el teorema del límite central es la herramienta principal que se utiliza para satisfacer el supuesto de la distribución normal.

La tercera condición tiene que ver con la independencia de las observaciones. En la simulación, una observación se puede basar en una sola ejecución independiente, o bien, en la subdivisión de una sola ejecución en subintervalos donde cada uno representa una observación. Cada método implica

tanto ventajas como desventajas. El primero alivia la cuestión de independencia, pero tiene la desventaja de incluir el periodo transitorio en cada observación. En el segundo método, el efecto del periodo transitorio no es tan pronunciado, pero empeora de manera inherente el asunto de la independencia. Como se explicará más adelante en esta sección, un posible remedio implica aumentar la longitud de la corrida de simulación.

Los métodos más comunes para recabar observaciones en una simulación son

1. Método de subintervalos.
2. Método de réplica.
3. Método regenerativo (o de ciclos).

Los dos primeros métodos son fáciles de automatizar en todos los lenguajes de simulación ampliamente utilizados (vea la sección 19.7). Por otro lado, el tercer método, aun cuando aborda directamente el tema de la independencia al buscar condiciones iniciales idénticas para las diferentes observaciones, puede ser difícil de implementar en la práctica.

En las secciones 19.6.1 y 19.6.2 se presentan los primeros dos métodos. Los detalles del tercer método se pueden consultar en Law (2007).

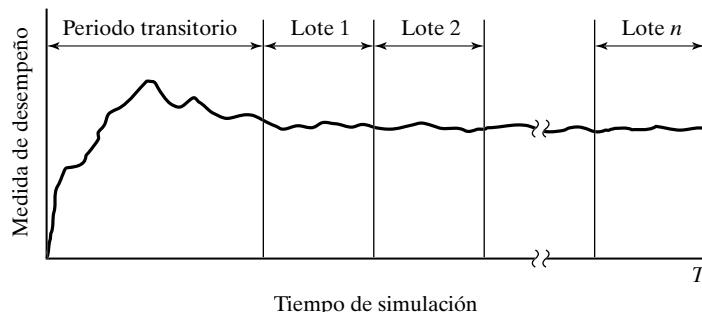
19.6.1 Método de subintervalos

En la figura 19.8 se ilustra la idea del método de subintervalos. Suponga que la duración de la corrida de simulación es de T unidades de tiempo. El método de subintervalos primero trunca un periodo transitorio inicial y luego subdivide el resto de la corrida de simulación en n subintervalos (o lotes) iguales. El promedio de una medida de desempeño deseada (por ejemplo, la longitud de la cola o el tiempo de espera en la cola) dentro de cada subintervalo se utiliza entonces para representar una sola observación. El truncamiento del periodo transitorio inicial significa que durante ese periodo no se reúnen datos estadísticos.

La ventaja del método de subintervalos es que se mitiga el efecto de las condiciones transitórias (no estacionarias), sobre todo para las observaciones que se recopilan al final de la ejecución de la simulación. La desventaja es que los lotes sucesivos con condiciones de frontera comunes no son necesariamente independientes. El problema puede aliviarse incrementando la base de tiempo para cada observación.

FIGURA 19.8

Recolección de datos de simulación utilizando el método de subintervalos



Ejemplo 19.6-1

En la figura 19.9 se muestra el cambio en la longitud de la cola para un modelo de una sola cola en función del tiempo de simulación. La longitud de la corrida de simulación es $T = 35$ horas, y la longitud del periodo transitorio se estima como 5 horas. La base de tiempo para una observación es de 6 horas, lo que produce $n = 5$ observaciones.

Sea \bar{Q}_i la longitud promedio de la cola en el lote i . Debido a que la longitud de la cola es una variable basada en el tiempo, se tiene

$$\bar{Q}_i = \frac{A_i}{t}, i = 1, 2, \dots, 5$$

donde A_i es el área bajo la curva de la longitud de la cola asociada con el lote (la observación) i y $t (= 6)$ es la base de tiempo por lote.

Los datos que aparecen en la figura 19.9 producen las siguientes observaciones:

Observación i	1	2	3	4	5
A_i	14	10	11	6	15
Q_i	2.33	1.67	1.83	1.00	2.50
Media muestral = 1.87					Desviación estándar muestral = .59

La media y la varianza muestrales pueden usarse para calcular un intervalo de confianza, si así se desea. El cálculo de la varianza muestral en el ejemplo 19.6-1 se basa en la siguiente fórmula conocida:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$$

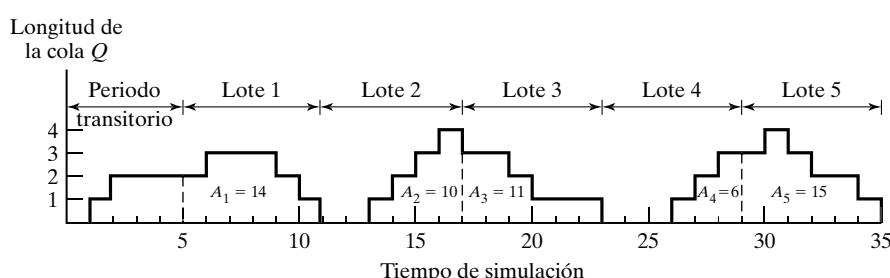
Esta fórmula es sólo una aproximación de la desviación estándar verdadera porque ignora el efecto de la autocorrelación entre los lotes sucesivos. La fórmula exacta se analiza en Law (2007).

19.6.2 Método de réplica

Como lo ilustra la figura 19.10, en el método de réplica cada observación está representada por una corrida de simulación independiente, donde se trunca el periodo transitorio. El cálculo de los promedios de observación para cada lote es igual que en el método de subintervalos. La úni-

FIGURA 19.9

Cambio en la longitud de la cola con el tiempo de simulación, ejemplo 19.6-1



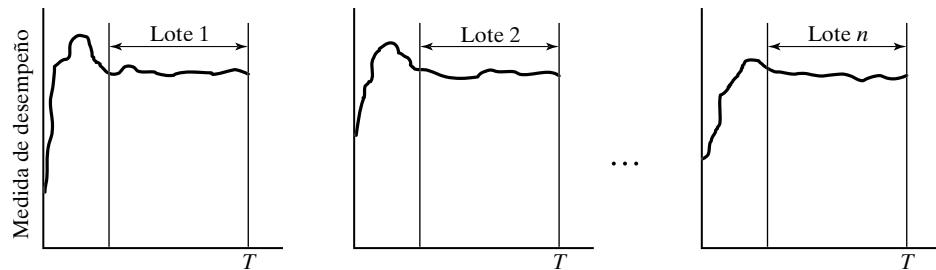


FIGURA 19.10

Recolección de datos de simulación mediante el método de réplica

ca diferencia es que la fórmula estándar de la varianza es aplicable porque los lotes no son independientes.

La ventaja del método de réplica es que cada corrida de simulación está controlada por una corriente distinta de números aleatorios entre 0 y 1, lo cual produce observaciones estadísticamente independientes. La desventaja es que cada observación puede verse influida por el efecto inicial de las condiciones transitorias. Dicho problema suele atenuarse si la longitud de la corrida de simulación se hace suficientemente grande.

19.7 LENGUAJES DE SIMULACIÓN

La ejecución de los modelos de simulación implica dos tipos distintos de cálculos: (1) manipulaciones de archivos que tienen que ver con el almacenamiento y procesamiento cronológicos de los eventos del modelo, y (2) cálculos aritméticos y de contabilidad asociados con la generación de muestras aleatorias y recolección de estadísticas del modelo. El primer tipo de cálculo implica una lógica extensa en el desarrollo del procesamiento de listas, y el segundo tipo involucra cálculos tediosos que requieren mucho tiempo. La naturaleza de estos cálculos hace que la computadora sea una herramienta esencial para ejecutar modelos de simulación y, a su vez, promueve el desarrollo de lenguajes de simulación especiales para computadora, con la finalidad de realizar estos cálculos de una forma conveniente y eficiente.

Los lenguajes de simulación discretos disponibles quedan comprendidos en dos grandes categorías:

1. Programación del evento.
2. Orientado al proceso.

En los lenguajes de programación del evento, el usuario detalla las acciones asociadas con la ocurrencia de cada evento, como en el ejemplo 19.5-1. El papel principal del lenguaje en este caso es (1) la automatización del muestreo a partir de las distribuciones, (2) el almacenamiento y la recuperación de eventos en orden cronológico, y (3) la recolección de estadísticas del modelo.

Los lenguajes orientados al proceso utilizan bloques o nodos que pueden vincularse entre sí para formar una red que describe los movimientos de **transacciones** o **entidades** (es decir, clientes) en el sistema. Por ejemplo, los tres bloques/nodos más prominentes en cualquier lenguaje de

simulación orientado al proceso son una *fuente* desde la cual se crean las transacciones, una *cola* donde pueden esperar si es necesario, y una *instalación*, donde se realiza el servicio. Cada uno de estos bloques/nodos se define con toda la información necesaria para controlar automáticamente la simulación. Por ejemplo, una vez que se especifica el tiempo entre llegadas para la fuente, un lenguaje orientado al proceso “sabe” de manera automática cuándo ocurrirán los eventos de llegada. De hecho, cada bloque/nodo del modelo cuenta con instrucciones permanentes que definen *cómo* y *cuándo* se mueven las transacciones en la red de simulación.

Los lenguajes orientados al proceso están controlados internamente por las mismas acciones que se utilizan en los lenguajes de programación del evento. La diferencia es que estas acciones se automatizan para liberar al usuario de los tediosos detalles de cálculo y lógica. En cierto modo, los lenguajes orientados al proceso se consideran como basados en el concepto de entrada y salida del método de la “caja negra”. En esencia, esto significa que los lenguajes orientados al proceso intercambian la flexibilidad del modelo por la sencillez y facilidad de uso.

Los lenguajes de programación de evento (como SIMSCRIPT, SLAM y SIMAN) son anticuados y se utilizan muy pocas veces en la práctica. Recientemente, un nuevo lenguaje llamado DEEDS (Elizandro y Taha, 2008) se basa en el uso incipiente de la hoja de cálculo de Excel para controlar la programación del evento. DEEDS permite la flexibilidad de modelado de los lenguajes de simulación orientados al evento, al mismo tiempo que logra la naturaleza intuitiva de un lenguaje orientado al proceso.

El paquete comercial predominante orientado al proceso es Arena. Utiliza una extensa interfaz del usuario para simplificar el proceso de creación de un modelo de simulación. También cuenta con capacidades de animación donde pueden observarse visualmente los cambios en el sistema. Sin embargo, para un profesional experimentado en simulación, estas interfaces parecen reducir el desarrollo de un modelo de simulación a un ritmo de “cámara lenta”. No sorprende que algunos usuarios prefieran seguir escribiendo modelos de simulación en lenguajes de programación de alto nivel.

Comentarios. La mayoría de los lenguajes de simulación están equipados con animación que exhibe movimientos de eventos simultáneos de objetos o transacciones (por ejemplo, productos que transitan entre máquinas de procesamiento). La representación de los movimientos de las transacciones puede ser abstracta (por ejemplo, viñetas simples que atraviesan los componentes del modelo con contadores numéricos que registran la frecuencia de las visitas a lo largo de sus rutas) o una animación en 3D integral cercana a la realidad.

La animación puede tener un papel en la fase de verificación del desarrollo del modelo, identificando irregularidades ocasionales en los movimientos de la transacción. Sin embargo, esta ventaja potencial suele perder su atractivo en los modelos complejos, donde la pantalla visual se llena de transacciones que se mueven al azar por todas partes. Agregue a esto el hecho de que la paciencia humana para observar la animación de una simulación suele alcanzar su límite en unos cuantos minutos, sin importar qué tan realista sea la presentación.

Algunas personas argumentan que la animación es una herramienta “perfecta” para convencer a la gerencia de la viabilidad del modelado de simulación. Este argumento trata al modelo de simulación como una “caja negra”, que requiere sólo datos de entrada para producir resultados de salida. No educa al usuario sobre lo que la simulación puede o no puede hacer, o sobre la complejidad del experimento de simulación, por no mencionar la longitud de tiempo y el esfuerzo necesario para producir un modelo de trabajo. Estos factores son de suma importancia cuando se trata de asegurar el apoyo a largo plazo de la gerencia a los proyectos de simulación.

BIBLIOGRAFÍA

- Banks, J., J. Carson, B. Nelson y D. Nicol, *Discrete-Event System Simulation*, 4a. ed., Prentice Hall, NJ, 2005.
- Box, G. y M. Muller, "A Note on the Generation of Random Normal Deviates", *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 29, pp. 610-611, 1958.
- Elizandro, D. y H. Taha, *Simulation of Industrial Systems: Discrete Event Simulation Using Excel/VBA*, Taylor and Francis, Nueva York, 2008.
- Law, A., *Simulation Modeling & Analysis*, 4a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2007.
- Rubenstein, R., B. Melamed y A. Shapiro, *Modern Simulation and Modeling*, Wiley, Nueva York, 1998.
- Taha, H., *Simulation Modeling and SIMNET*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1988.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados	Sección	Problemas asignados
19.1	19-1 a 19-9	19.4	19-34 a 19-35
19.2	19-10 a 19-11	19.5.1	19-36 a 19-39
19.3.1	19-12 a 19-15	19.5.2	19-40 a 19-42
19.3.2	19-16 a 19-25	19.6.1	19-43 a 19-44
19.3.2	19-26 a 19-33	19.6.2	19-45 a 19-49

- 19-1.** En el ejemplo 19.1-1, estime el área del círculo utilizando las primeras dos columnas de los números aleatorios entre 0 y 1 en la tabla 19.1. (Por conveniencia, repase cada columna de arriba abajo y seleccione primero R_1 y luego R_2). ¿Cómo se compara esta estimación con las dadas en la figura 19.2?
- 19-2.** Suponga que la ecuación de un círculo es
- $$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$
- (a) Defina las distribuciones correspondientes $f(x)$ y $f(y)$ y luego demuestre cómo se determina un punto muestral (x, y) utilizando el par de número aleatorios entre 0 y 1, (R_1, R_2) .
- (b) Use *excelCircle.xls* para estimar el área y el intervalo de confianza de 95% asociado, dados $n = 100,000$ y $N = 10$.
- 19-3.** Use el muestreo de Montecarlo para estimar el área del lago que se muestra en la figura 19.11. Base su estimación en las primeras dos columnas de números aleatorios $(0, 1)$ en la tabla 19.1.

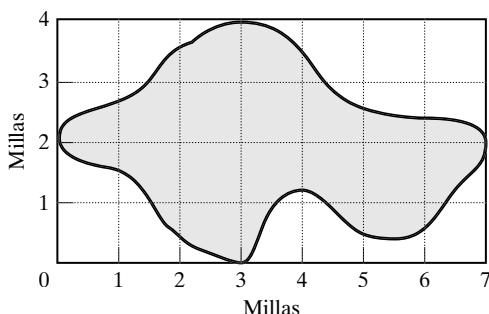


FIGURA 19.11
Mapa del lago para el problema 19-3

- 19-4.** Considere el juego en el que dos participantes, Jan y Jim, se turnan para lanzar al aire una moneda legal. Si el resultado es cara, Jim obtiene \$10 de Jan. De lo contrario, Jan obtiene \$10 de Jim.

- *(a) ¿Cómo se simula el juego como un experimento de Montecarlo?
- (b) Realice el experimento con 5 réplicas de 10 lanzamientos cada una. Use las primeras 5 columnas de los números aleatorios entre 0 y 1 de la tabla 19.1, donde cada columna corresponde a una réplica.
- (c) Establezca un intervalo de confianza de 95% para los triunfos de Jan.
- (d) Compare el intervalo de confianza en (c) con los triunfos teóricos esperados para Jan.

- 19-5.** Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 x^2 dx$$

- (a) Desarrolle el experimento de Montecarlo para estimar la integral.
- (b) Use las primeras cuatro columnas de la tabla 19.1 para evaluar la integral con 4 réplicas, cada una de tamaño 5. Calcule el intervalo de confianza de 95% y compárela con el valor exacto de la integral.

- 19-6.** Simule cinco ganancias o pérdidas en el siguiente juego de dados. El jugador lanza dos dados legales. Si la suma resultante es 7 u 11, el jugador gana \$10. De lo contrario, el jugador anota la suma resultante (llamada *punto*) y continúa lanzando los dados hasta que la suma resultante coincide con el *punto* anotado, en cuyo caso el jugador gana \$10. Si obtiene un 7 antes de la coincidencia con el *punto*, el jugador pierde \$10.

- ***19-7.** El tiempo de espera para recibir un pedido puede ser de 1 o 2 días con probabilidades iguales. La demanda *por día* supone los valores 0, 1 y 2 con las probabilidades respectivas de .2, .7 y .1. Use los números aleatorios de la tabla 19.1 (comenzando con la columna 1) para estimar la distribución conjunta de la demanda y el tiempo de espera. A partir de la distribución conjunta, estime la función de densidad de probabilidad de la demanda durante el tiempo de espera (*sugerencia*: La demanda durante el tiempo de espera supone valores discretos de 0 a 4).

- 19-8.** *Experimento de la aguja de Buffon.* Se traza un plano horizontal con líneas paralelas con una separación de D cm entre sí. Se deja caer una aguja de d cm de longitud ($d < D$) al azar sobre el plano. El objetivo del experimento es determinar la probabilidad de que cualquiera de los extremos toque o cruce una de las líneas. Defina

h = Distancia perpendicular del centro de la aguja a una línea (paralela)

θ = Ángulo de inclinación de la aguja respecto de una línea

- (a) Demuestre que la aguja tocará o cruzará una línea sólo si

$$h \leq \frac{d}{2} \operatorname{sen} \theta, 0 \leq h \leq \frac{D}{2}, 0 \leq \theta \leq \pi$$

- (b) Diseñe el experimento de Montecarlo y estime la probabilidad deseada.
- (c) Use Excel para obtener 4 réplicas, cada una de tamaño 10 de la probabilidad deseada. Determine el intervalo de confianza de 95% para la estimación. Suponga que $D = 20$ cm y $d = 10$ cm.
- (d) Demuestre que la siguiente fórmula da la probabilidad teórica:

$$P = \frac{2d}{\pi D}$$

- (e) Use el resultado en (c) junto con la fórmula en (d) para estimar π .

- 19-9.** Con base en los resultados de la figura 19.2 (ejemplo 19.1-1) con $n = 60,000$ para estimar el área de un círculo, diseñe un experimento de Montecarlo para estimar el valor de la constante π [sugerencia: (Área de un círculo)/(Área de un rectángulo que envuelve estrechamente al círculo) = $\pi/4$].
- 19-10.** Categorice las siguientes situaciones como discretas o continuas (o una combinación de ambas). En cada caso, especifique el objetivo de desarrollar el modelo de simulación.
- *(a) Los pedidos de un artículo llegan aleatoriamente a un almacén. Un pedido que no puede ser respondido de inmediato con las existencias disponibles debe esperar la llegada de nuevos envíos.
 - (b) La población mundial se ve afectada por la disponibilidad de recursos naturales, la producción de alimentos, las condiciones ambientales, el nivel académico, el cuidado de la salud y las inversiones de capital.
 - (c) A una bahía receptora de un almacén automatizado llegan mercancías en tarimas, las cuales se cargan sobre una banda transportadora inferior y se elevan con un ascensor a una banda transportadora superior que mueve las tarimas a los corredores. Los corredores son atendidos por grúas que recogen las tarimas de la banda y las colocan en compartimientos de almacenamiento.
- 19-11.** Explique por qué estaría de acuerdo o en desacuerdo con la siguiente afirmación: “La mayoría de los modelos de simulación de evento discreto pueden considerarse de una u otra forma como sistemas de colas, compuestos de *fuentes* desde las cuales llegan los clientes, *colas* donde los clientes esperan e *instalaciones* donde se atiende a los clientes”.
- 19-12.** Identifique los eventos discretos necesarios para simular la siguiente situación. Llegan dos tipos de trabajos de dos fuentes diferentes. Ambos tipos se procesan en una sola máquina, con prioridad dada a los trabajos de la primera fuente.
- 19-13.** Llegan trabajos a una tasa constante en un sistema transportador de carrusel. Tres estaciones de servicio están equidistantes entre sí alrededor del carrusel. Si el servidor está inactivo cuando llega un trabajo a la estación, el trabajo se retira del transportador para procesarlo. De lo contrario, el trabajo continúa girando en el carrusel hasta que el servidor vuelve a estar disponible. Un trabajo procesado se guarda en un área de envío adyacente. Identifique los eventos discretos necesarios para simular esta situación.
- 19-14.** Los automóviles llegan a los dos carriles de una caja bancaria de servicio en el auto, donde cada carril puede alojar un máximo de cuatro vehículos. Si ambos carriles están llenos, los autos que llegan buscan servicio en otra parte. Si en cualquier momento un carril es al menos dos autos más largo que el otro, el último auto en el carril más largo pasará a la última posición del carril más corto. El banco opera la instalación de servicio en auto de 8:00 A.M. a 3:00 P.M. cada día laboral. Defina los eventos discretos de la situación.
- *19-15.** La cafetería en la escuela primaria Elmdale proporciona un almuerzo de menú fijo servido en una sola charola a todos sus alumnos. Los niños llegan a la ventanilla despachadora cada 30 segundos. Se requieren 18 segundos para recibir la charola del almuerzo. Trace el mapa de los eventos de llegada y salida en la escala de tiempo para los primeros cinco alumnos.
- *19-16.** En el ejemplo 19.3-2, suponga que el primer cliente llega en el instante 0. Use los primeros tres números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1 para generar los tiempos de llegada de los 3 clientes siguientes, y grafique los eventos resultantes en la escala de tiempo.
- *19-17.** *Distribución uniforme.* Suponga que la siguiente distribución uniforme describe el tiempo necesario para fabricar una pieza en una máquina:

$$f(t) = \frac{1}{b - a}, a \leq t \leq b$$

Determine una expresión para la muestra t , dado el número aleatorio R .

- 19-18.** En un taller con una máquina se reciben trabajos aleatoriamente. El tiempo entre llegadas es exponencial con media de 2 horas. El tiempo necesario para procesar un trabajo es uniforme entre 1.1 y 2 horas. Suponiendo que el primer trabajo llega en el instante 0, determine el tiempo de llegada y salida de los primeros cinco trabajos mediante los números aleatorios (0, 1) de la columna 1 de la tabla 19.1.
- 19-19.** La demanda de una pieza cara de repuesto de un avión de pasajeros es de 0, 1, 2 o 3 unidades por mes con probabilidades de .2, .3, .4 y .1, respectivamente. El taller de mantenimiento de la aerolínea inicia la operación con existencias de 5 unidades y regresará el nivel de las existencias a 5 unidades inmediatamente después que se reduzca a 2 unidades.
- (a)** Idee el procedimiento para muestrear la demanda.
(b) ¿Cuántos meses transcurrirán hasta que ocurra la primera reposición? Use valores sucesivos de R de la primera columna de la tabla 19.1.

- 19-20.** En una situación de simulación, se inspeccionan televisores en busca de posibles defectos. Hay 80% de probabilidades de que una unidad pase la inspección, en cuyo caso se le envía a empaque. De lo contrario, la unidad se repara. Es posible representar la situación simbólicamente de dos maneras.

```
goto REPARACIÓN/.2, EMPAQUE/.8
goto EMPAQUE/.8, REPARACIÓN/.2
```

Ambas representaciones parecen equivalentes. No obstante, cuando se aplica una secuencia dada de números aleatorios (0, 1) a las dos representaciones, pueden resultar decisiones diferentes (REPARACIÓN o EMPAQUE). Explique por qué.

- 19-21.** Un jugador lanza una moneda repetidamente hasta que cae una cara. El pago asociado es 2^n , donde n es la cantidad de lanzamientos hasta que sale una cara.
- (a)** Idee el procedimiento de muestreo del juego.
(b) Use los números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1 para determinar el pago acumulado después de que salen dos caras.

- 19-22.** *Distribución triangular.* En la simulación, la carencia de datos puede imposibilitar la determinación de la distribución de probabilidad asociada con una actividad de simulación. En la mayoría de estas situaciones puede ser fácil describir la variable deseada estimando sus valores mínimo, más probable y máximo. Los tres valores bastan para definir una distribución triangular, la cual puede utilizarse entonces como una estimación “preliminar” de la distribución real.

- (a)** Desarrolle la fórmula para tomar muestras de la siguiente distribución triangular, cuyos parámetros respectivos son a , b y c :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x - a)}{(b - a)(c - a)}, & a \leq x \leq b \\ \frac{2(c - x)}{(c - b)(c - a)}, & b \leq x \leq c \end{cases}$$

- (b)** Genere tres muestras a partir de una distribución triangular con parámetros (1, 3, 7) utilizando los primeros tres números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1.
- 19-23.** Considere una distribución de probabilidad compuesta de un rectángulo flanqueado por triángulos rectángulos simétricos en los lados izquierdo y derecho. Los intervalos respectivos de los triángulos de la izquierda y de la derecha son $[a, b]$, $[b, c]$ y $[c, d]$, $a < b < c < d$. Ambos triángulos tienen la misma altura que el rectángulo.
- (a)** Desarrolle un procedimiento de muestreo.
(b) Determine cinco muestras con $(a, b, c, d) = (1, 2, 4, 6)$ utilizando los cinco primeros números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1.

- *19-24.** *Distribución geométrica.* Demuestre cómo se puede obtener una muestra aleatoria de la siguiente distribución geométrica:

$$f(x) = p(1 - p)^x, x = 0, 1, 2, \dots$$

El parámetro x es el número (de Bernoulli) de fallas hasta que ocurre un éxito, y p es la probabilidad de un éxito, $0 < p < 1$. Genere cinco muestras para $p = .6$, utilizando los cinco primeros números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1.

- 19-25.** *Distribución de Weibull.* Demuestre cómo obtener una muestra aleatoria de la distribución de Weibull con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(x/\beta)^\alpha}, x > 0$$

donde $\alpha > 0$ es el parámetro de forma y $\beta > 0$ es el parámetro de escala.

- *19-26.** En el ejemplo 19.3-3, calcule una muestra de Erlang, si $m = 4$ y $\lambda = 5$ eventos por hora.¹
- 19-27.** En el ejemplo 19.3-4, genere tres muestras de Poisson durante un periodo de 2 horas, dado que la media de la distribución de Poisson es de 5 eventos por hora.
- 19-28.** En el ejemplo 19.4-5, genere dos muestras a partir de $N(8, 1)$ utilizando tanto el método de convolución como el de Box-Muller.
- 19-29.** Los trabajos llegan al taller Metalco de acuerdo con una distribución de Poisson, con una media de 6 trabajos por día. Los trabajos se asignan a los cinco centros de maquinado del taller en una forma estrictamente rotacional. Determine una muestra del intervalo entre llegadas de trabajos al primer centro de maquinado.
- 19-30.** Las calificaciones del examen ACT de la generación de último año de 1994 en la preparatoria de Springdale son normales, con una medida de 27 puntos y una desviación estándar de 3 puntos. Suponga que se obtiene una muestra aleatoria de seis estudiantes de último año de esa generación. Utilice el método de Box-Muller para determinar la media y la desviación estándar de la muestra.
- *19-31.** El profesor de psicología Yataha realiza un experimento de aprendizaje, en el cual se entrena ratones para que encuentren su camino en un laberinto. La base del laberinto es un cuadrado. Un ratón entra al laberinto por una de las cuatro esquinas y debe encontrar su camino a través del laberinto para salir por el mismo punto por donde entró. El diseño del laberinto es tal que el ratón debe pasar por cada uno de los tres puntos de esquina restantes exactamente una vez antes de salir. Las múltiples rutas del laberinto conectan las cuatro esquinas en un estricto orden en sentido horario. El profesor Yataha estima que el tiempo que el ratón emplea para llegar a un punto de esquina desde el anterior se distribuye uniformemente entre 10 y 20 segundos, según la ruta que tome. Desarrolle un procedimiento de muestreo para el tiempo que un ratón pasa en el laberinto.
- 19-32.** En el problema 19-31, suponga que una vez que el ratón sale del laberinto, de inmediato entra otro ratón. Desarrolle un procedimiento de muestreo para la cantidad de ratones que salen del laberinto en 5 minutos o menos.
- 19-33.** *Binomial negativa.* Demuestre cómo se puede determinar una muestra aleatoria a partir de la binomial negativa cuya distribución está dada por

$$f(x) = C_x^{r+x-1}p^r(1-p)^x, x = 0, 1, 2, \dots$$

donde x es la cantidad de fallas hasta que ocurre el r -ésimo éxito en una secuencia de ensayos de Bernoulli independientes, y p es la probabilidad de éxito $0 < p < 1$ (*sugerencia:* La binomial negativa es la convolución de r muestras geométricas independientes. Vea el problema 19-24).

- *19-34.** Use *excelRN.xls* con el siguiente conjunto de parámetros y compare los resultados con los del ejemplo 19.4-1:

$$b = 17, c = 111, m = 103, \text{semilla} = 7$$

¹ Para los problemas 19-26 a 19-33, utilice los números aleatorios de la tabla 19.1 comenzando con columna 1.

- 19-35.** Encuentre un generador de números aleatorios en su computadora, y utilícelo para generar 500 números aleatorios entre cero y uno. Elabore el histograma de los valores resultantes (por medio de la herramienta histograma de Microsoft, vea la sección 12.5) y convéngase visualmente de que los números obtenidos siguen razonablemente la distribución uniforme $(0, 1)$. En realidad, para probar adecuadamente la secuencia, necesitaría aplicar las siguientes pruebas: bondad de ajuste de $j\bar{i}$ cuadrada (vea la sección 14.5), pruebas a las corridas en busca de independencia y la prueba de correlación —para mayores detalles vea Law (2007).
- 19-36.** Suponga que la peluquería del ejemplo 19.5-1 es atendida por dos peluqueros con una base de primero en llegar, primero en ser atendido (FIFO). Suponga asimismo que el tiempo para obtener un corte de pelo está uniformemente distribuido entre 15 y 30 minutos. El tiempo entre llegadas de los clientes es exponencial con una media de 10 minutos. Simule manualmente el sistema durante 75 unidades de tiempo. Con los resultados de la simulación, determine el tiempo promedio que un cliente espera en la cola, el promedio de clientes que esperan y la utilización promedio de los peluqueros. Use los números aleatorios de la tabla 19.1.
- 19-37.** Clasifique las siguientes variables como *basadas en observaciones* o *basadas en el tiempo*:
- *(a) Tiempo hasta la falla de un componente electrónico.
 - *(b) Nivel de inventario de un artículo.
 - (c) Cantidad de pedido de un artículo en inventario.
 - (d) Cantidad de artículos defectuosos en un lote.
 - (e) Tiempo necesario para calificar exámenes.
 - (f) Cantidad de vehículos en el lote de estacionamiento de una agencia de renta de automóviles.

- ***19-38.** La siguiente tabla representa la variación de la cantidad de clientes que esperan en una cola como una función del tiempo de simulación.

Tiempo de simulación, T (hr)	Cantidad de clientes que esperan
$0 \leq T \leq 3$	0
$3 < T \leq 4$	1
$4 < T \leq 6$	2
$6 < T \leq 7$	1
$7 < T \leq 10$	0
$10 < T \leq 12$	2
$12 < T \leq 18$	3
$18 < T \leq 20$	2
$20 < T \leq 25$	1

Calcule las siguientes medidas de desempeño:

- (a) La longitud promedio de la cola.
- (b) El tiempo de espera promedio en cola de quienes deben esperar.

- 19-39.** Suponga que la peluquería descrita al inicio del ejemplo 19.5-1 es atendida por tres peluqueros. Suponga además que la utilización de los servidores (peluqueros) se resume en la siguiente tabla:

Tiempo de simulación, T (hr)	Cantidad de servidores ocupados
$0 < T \leq 10$	0
$10 < T \leq 20$	1
$20 < T \leq 30$	2
$30 < T \leq 40$	0
$40 < T \leq 60$	1
$60 < T \leq 70$	2
$70 < T \leq 80$	3
$80 < T \leq 90$	1
$90 < T \leq 100$	0

Determine las siguientes medidas de desempeño:

- (a) La utilización promedio de la instalación.
 - (b) El tiempo promedio que la instalación está ocupada.
 - (c) El tiempo inactivo promedio de la instalación.
- 19-40.** Con los datos del ejemplo 19.5.1, ejecute el simulador de Excel para 10 llegadas y grafique los cambios del uso de la instalación y la longitud de la cola en función del tiempo de simulación. Compruebe que las áreas bajo las curvas son iguales a la suma de los tiempos de servicio y la suma de los tiempos de espera, respectivamente.
- 19-41.** Simule el modelo $M/M/1$ para 500 llegadas, con la tasa de llegadas $\lambda = 4$ clientes por hora y la tasa de servicios $\mu = 6$ salidas por hora. Corra 5 aplicaciones (actualizando la hoja de cálculo, la pulsar F9) y determine un intervalo de confianza de 95% con todas las medidas de desempeño del modelo. Compare los resultados con los valores teóricos de estado estable del modelo $M/M/1$.
- 19-42.** Cada 15 minutos llegan televisores sobre una banda transportadora para ser inspeccionados por un solo operador. No están disponibles los datos detallados de la estación de inspección. Sin embargo, el operador estima emplear 10 minutos “en promedio” para inspeccionar una unidad. En las peores condiciones, el tiempo de inspección no supera 13 minutos, y para ciertas unidades el tiempo de inspección puede ser tan bajo como 9 minutos.
- (a) Use el simulador de Excel para simular la inspección de 200 televisores.
 - (b) Con base en 5 réplicas, estime la cantidad promedio de unidades en espera de ser inspeccionadas y el uso promedio de la estación de inspección.
- 19-43.** En el ejemplo 19.6-1, use el método de subintervalos para calcular el tiempo de espera promedio en la cola para quienes deben esperar.
- *19-44.** En un modelo de simulación se utiliza el método de subintervalos para calcular promedios de lotes. Se estima que el periodo transitorio es de 100, y cada lote también tiene una base de tiempo de 100 unidades. Al aplicar los siguientes datos, que proporcionan los tiempos de espera de los clientes en función del tiempo de simulación, estime el intervalo de confianza de 95% para el tiempo de espera medio.

Intervalo de tiempo	Tiempos de espera
0–100	10, 20, 13, 14, 8, 15, 6, 8
100–200	12, 30, 10, 14, 16
200–300	15, 17, 20, 22
300–400	10, 20, 30, 15, 25, 31
400–500	15, 17, 20, 14, 13
500–600	25, 30, 15

- 19-45.** Los clientes llegan al azar a una oficina postal. El tiempo entre llegadas es exponencial con media de 5 minutos. El tiempo que un empleado pasa con un cliente es exponencial con media de 10 minutos. Todos los clientes forman una cola y esperan al primer empleado libre disponible. Ejecute un modelo de simulación del sistema durante 480 minutos para determinar lo siguiente:²
- (a) La cantidad promedio de clientes que esperan en la cola.
 - (b) La utilización promedio de los empleados.
 - (c) Compare los resultados de la simulación con los del modelo de colas $M/M/c$ (capítulo 18) y con la hoja de cálculo *MultiServerSimulator.xls*.

² Resuelva los problemas 19-45 a 19-49 usando un lenguaje de simulación de su elección, o bien, un lenguaje de programación de alto nivel.

- 19-46.** En una banda transportadora llegan televisores para ser inspeccionados a una tasa constante de 5 unidades por hora. El tiempo de inspección requiere entre 10 y 15 minutos distribuidos uniformemente. La experiencia muestra que 20% de las unidades inspeccionadas deben ajustarse y enviarse de nuevo para reinspección. El tiempo de ajuste también se distribuye uniformemente entre 6 y 8 minutos. Corra un modelo de simulación durante 480 minutos para calcular lo siguiente:
- El tiempo promedio que una unidad requiere hasta que pasa la inspección.
 - El promedio de veces que una unidad debe ser reinspeccionada antes de que salga del sistema.
- 19-47.** Un ratón se encuentra atrapado en un laberinto y “desea salir” desesperadamente. Después de tratar entre 1 y 3 minutos, distribuidos de manera uniforme, hay 30% de probabilidades de que encuentre la ruta correcta. De lo contrario, vagará sin rumbo entre 2 y 3 minutos, distribuidos de manera uniforme, y a la larga terminará donde comenzó tan sólo para intentarlo una vez más. El ratón puede “tratar de liberarse” las veces que le plazca, pero hay un límite para todo. Con tanta energía consumida al intentarlo una y otra vez, es seguro que el ratón muera si no logra liberarse dentro de un periodo normalmente distribuido, con una media de 10 minutos y una desviación estándar de 2 minutos. Escriba un modelo de simulación para estimar la probabilidad de que el ratón se libere. Para estimar la probabilidad, suponga que el modelo procesará 100 ratones.
- 19-48.** En la etapa final de manufactura, un automóvil que se desplaza sobre un transportador se sitúa entre dos estaciones de trabajo paralelas, para que se le realicen trabajos en los lados izquierdo y derecho al mismo tiempo. Los tiempos de operación en los lados izquierdo y derecho son uniformes entre 15 y 20 minutos, y entre 18 y 22 minutos, respectivamente. El transportador llega al área de las estaciones cada 20 minutos. Simule el proceso durante 480 minutos para determinar la utilización de las estaciones izquierda y derecha.
- 19-49.** Los automóviles llegan a una instalación de lavado de una bahía donde el tiempo entre llegadas es exponencial, con una media de 10 minutos. Los autos que llegan se forman en un solo carril que tiene espacio para cinco unidades, cuando mucho. Si el carril está lleno, los autos que llegan se van a otro lado. Se requieren entre 10 y 15 minutos distribuidos uniformemente para lavar un auto. Simule el sistema durante 960 minuto y estime el tiempo que el auto pasa en la instalación.

CAPÍTULO 20

Teoría de optimización clásica

20.1 PROBLEMAS NO RESTRINGIDOS

Un punto extremo de una función $f(\mathbf{X})$ define un máximo o un mínimo de la función. Matemáticamente, un punto $\mathbf{X}_0 = (x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0)$ es un máximo si

$$f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) \leq f(\mathbf{X}_0)$$

para toda $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_j, \dots, h_n)$ donde $|h_j|$ es suficientemente pequeña para todas las j . Asimismo, \mathbf{X}_0 es un mínimo si

$$f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) \geq f(\mathbf{X}_0)$$

En la figura 20.1 se ilustran el máximo y mínimo de una función de una sola variable $f(x)$ definida en el intervalo $a \leq x \leq b$. Los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 y x_6 son los extremos de $f(x)$, con x_1, x_3 y x_6 como máximos, y x_2 y x_4 como mínimos. El valor $f(x_6) = \max\{f(x_1), f(x_3), f(x_6)\}$ es un máximo **global** o **absoluto**, y $f(x_1)$ y $f(x_3)$ son máximos **locales** o **relativos**. De manera similar, $f(x_4)$ es un mínimo local y $f(x_2)$ es un mínimo global.

Aunque (en la figura 20.1) x_1 es un punto máximo (local), difiere de los máximos locales restantes en que el valor de f correspondiente al menos a un punto en la vecindad de x_1 es igual a $f(x_1)$. Entonces, x_1 es un **máximo débil**, mientras que x_3 y x_6 son **máximos fuertes**. En general, para \mathbf{h} como se definió antes, \mathbf{X}_0 es un máximo débil si $f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) \leq f(\mathbf{X}_0)$ y un máximo fuerte si $f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) < f(\mathbf{X}_0)$.

En la figura 20.1, la primera derivada (pendiente) de f es igual a cero en todos los extremos. Esta propiedad también se satisface en puntos de **inflexión** y de **silla**, como es el caso de x_5 . Si un punto con pendiente (gradiente) cero no es un punto extremo (máximo o mínimo), entonces debe ser un punto de inflexión o de silla.

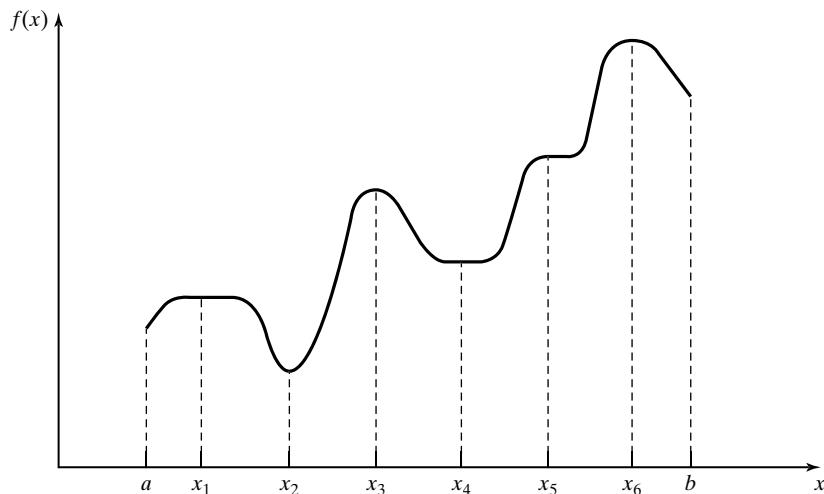


FIGURA 20.1

Ejemplos de puntos extremos para una función de una sola variable

20.1.1 Condiciones necesarias y suficientes

En esta sección se desarrollan las condiciones necesarias y suficientes para que una función $f(\mathbf{X})$ de n variables tenga extremos. Se supone que la primera y segunda derivadas parciales de $f(\mathbf{X})$ son continuas para toda \mathbf{X} .

Teorema 20.1-1. *Una condición necesaria para que \mathbf{X}_0 sea un punto extremo de $f(\mathbf{X})$ es que*

$$\nabla f(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$$

Debido a que la condición necesaria también se satisface en puntos de inflexión y de silla, es más adecuado referirse a estos puntos obtenidos con la solución de $\nabla f(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$ como puntos **estacionarios**. El siguiente teorema establece las condiciones de suficiencia para que \mathbf{X}_0 sea un punto extremo.

Teorema 20.1-2. *Una condición suficiente para que un punto estacionario \mathbf{X}_0 sea un extremo es que la matriz hessiana \mathbf{H} evaluada en \mathbf{X}_0 satisfaga las siguientes condiciones:*

- (i) **\mathbf{H} se define positiva si \mathbf{X}_0 es un punto mínimo.**
- (ii) **\mathbf{H} se define negativa si \mathbf{X}_0 es un punto máximo.**

Ejemplo 20.1-1

Considere la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

La condición necesaria $\nabla f(\mathbf{X}_0) = 0$ da

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= 1 - 2x_1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= x_3 - 2x_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} &= 2 + x_2 - 2x_3 = 0\end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones simultáneas es

$$\mathbf{X}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

Para determinar el tipo de punto estacionario, considere

$$|\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}_{\mathbf{X}_0} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Los determinantes menores principales de $|\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ tienen los valores -2 , 4 y -6 , respectivamente. Por lo tanto, $|\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ se define negativa y $\mathbf{X}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$ representa un punto máximo.

Por lo común, si $|\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ es indefinida, \mathbf{X}_0 debe ser un punto de silla. En casos no concluyentes, \mathbf{X}_0 puede ser o no un extremo, y la condición de suficiencia se hace algo complicada, ya que se tienen que considerar términos de mayor orden en la expansión de Taylor.

La condición de suficiencia establecida por el teorema 20.1-2 se aplica a funciones de una sola variable como sigue. Dado que y_0 es un punto estacionario, entonces

- (i) y_0 es un máximo si $f''(y_0) < 0$.
- (ii) y_0 es un mínimo si $f''(y_0) > 0$.

Si $f''(y_0) = 0$, deben investigarse derivadas de mayor orden como lo requiere el siguiente teorema.

Teorema 20.1-3. *Dado y_0 , un punto estacionario de $f(y)$, si las primeras $(n - 1)$ derivadas son cero y $f^{(n)}(y_0) \neq 0$, entonces*

- (i) *Si n es impar, y_0 es un punto de inflexión.*
- (ii) *Si n es par, entonces y_0 es un mínimo si $f^{(n)}(y_0) > 0$ y un máximo si $f^{(n)}(y_0) < 0$.*

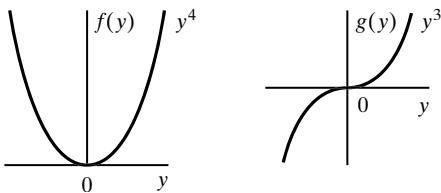


FIGURA 20.2
Puntos extremos de $f(y) = y^4$ y $g(y) = y^3$

Ejemplo 20.1-2

En la figura 20.2 se grafican las siguientes funciones

$$\begin{aligned}f(y) &= y^4 \\g(y) &= y^3\end{aligned}$$

Para $f(y) = y^4$, $f'(y) = 4y^3 = 0$, que genera el punto estacionario $y_0 = 0$. Ahora

$$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 24 > 0$$

Por consiguiente, $y_0 = 0$ es un punto mínimo (vea la figura 20.2).

Para $g(y) = y^3$, $g'(y) = 3y^2 = 0$, que produce $y_0 = 0$, como un punto estacionario. Además,

$$g'(0) = g''(0), g^{(3)}(0) = 6 \neq 0$$

Por consiguiente, $y_0 = 0$ es un punto de inflexión.

20.1.2 Método de Newton-Raphson

En general, la condición necesaria $\nabla f(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ puede ser extremadamente no lineal y, en consecuencia, difícil de resolver. El método de Newton-Raphson es un algoritmo iterativo para resolver ecuaciones no lineales simultáneas.

Consideré las ecuaciones simultáneas

$$f_i(\mathbf{X}) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Sea \mathbf{X}^k un punto dado. Luego, por la expansión de Taylor,

$$f_i(\mathbf{X}) \approx f_i(\mathbf{X}_k) + \nabla f_i(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k), i = 1, 2, \dots, m$$

Así, las ecuaciones originales $f_i(\mathbf{X}) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ pueden representarse de forma aproximada como

$$f_i(\mathbf{X}_k) + \nabla f_i(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Estas ecuaciones se escriben en notación matricial como

$$\mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) = \mathbf{0}$$

Si \mathbf{B}_k es no singular, entonces

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_k - \mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{A}_k$$

La idea del método es comenzar desde un punto inicial \mathbf{X}_0 y, luego, utilizar la ecuación anterior para determinar un nuevo punto. El proceso puede converger o no dependiendo de la selección del punto de inicio. La convergencia ocurre cuando dos puntos sucesivos, \mathbf{X}_k y \mathbf{X}_{k+1} , son aproximadamente iguales (dentro de una tolerancia especificada aceptable).

En la figura 20.3 se ilustra una interpretación geométrica del método mediante una función de una sola variable. La relación entre x_k y x_{k+1} para una función $f(x)$ de una sola variable se reduce a

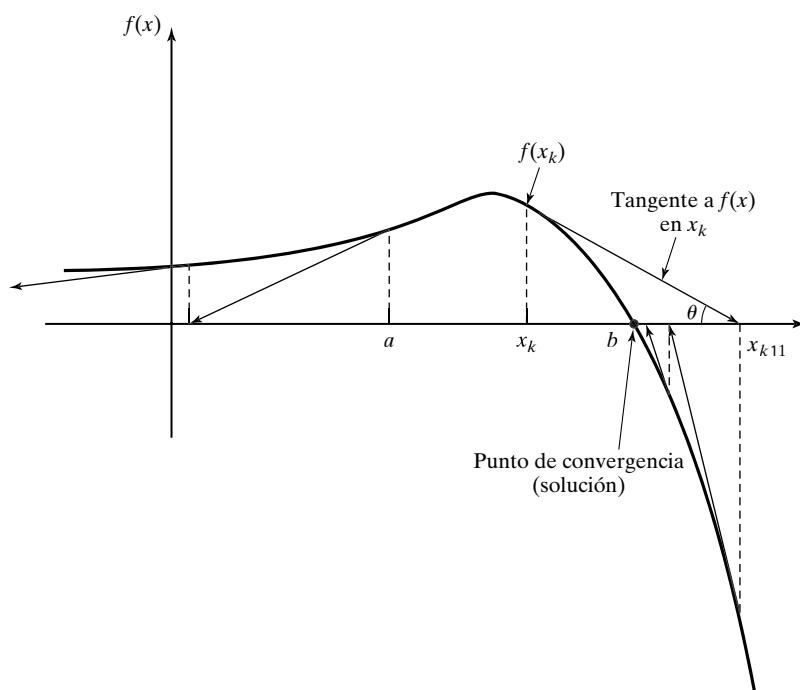
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Los términos se pueden acomodar como $f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$, lo que significa que x_{k+1} se determina a partir de la pendiente de $f(x)$ en x_k , donde $\tan \theta = f'(x_k)$ como indica la figura.

En la figura 20.3 se demuestra que la convergencia no siempre es posible. Si el punto inicial es a , el método divergirá. Por lo común, quizás sea necesario intentar varios puntos de inicio antes de que se logre la convergencia.

FIGURA 20.3

Ilustración del proceso iterativo en el método de Newton-Raphson



Ejemplo 20.1-3

Para demostrar el uso del método de Newton-Raphson, considere la función

$$g(x) = (3x - 2)^2(2x - 3)^2$$

Para determinar los puntos estacionarios de $g(x)$, es necesario resolver

$$f(x) \equiv g'(x) = 72x^3 - 234x^2 + 241x - 78 = 0$$

Por lo tanto, para el método de Newton-Raphson, se tiene

$$f'(x) = 216x^2 - 468x + 241$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{72x^3 - 234x^2 + 241x - 78}{216x^2 - 468x + 24}$$

Si se inicia con $x_0 = 10$, la siguiente tabla presenta las iteraciones sucesivas:

k	x_k	$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$	x_{k+1}
0	10.000000	2.978923	7.032108
1	7.032108	1.976429	5.055679
2	5.055679	1.314367	3.741312
3	3.741312	0.871358	2.869995
4	2.869995	0.573547	2.296405
5	2.296405	0.371252	1.925154
6	1.925154	0.230702	1.694452
7	1.694452	0.128999	1.565453
8	1.565453	0.054156	1.511296
9	1.511296	0.010864	1.500432
10	1.500432	0.000431	1.500001

El método converge a $x = 1.5$. En realidad, $f(x)$ tiene tres puntos estacionarios en $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{13}{12}$ y $x = \frac{3}{2}$. Los dos puntos restantes se determinan intentando diferentes valores para x_0 inicial. De hecho, $x_0 = 0.5$ y $x_0 = 1$, deberían dar por resultado los puntos estacionarios faltantes (¡verifíquelo!).

Momento de Excel

Se puede utilizar la plantilla *excelNewtonRaphson.xls* para resolver cualquier ecuación de una sola variable. Requiere la introducción de $\frac{f(x)}{f'(x)}$ en la celda C3. Para el ejemplo 20.1-3, se ingresa

$$= (72*A3^3-234*A3^2+241*A3-78)/(216*A3^2-468*A3+241)$$

La variable x se reemplaza con A3. La plantilla permite establecer un límite de tolerancia Δ , que especifica la diferencia permisible entre x_k y x_{k+1} , y señala la terminación de las iteraciones. Se le pide que utilice puntos iniciales diferentes, x_0 , para que tenga una idea de cómo funciona el método.

20.2 PROBLEMAS RESTRINGIDOS

Esta sección se ocupa de la optimización de funciones continuas restringidas. En la sección 20.2.1 se presenta el caso de restricciones de igualdad, y la sección 20.2.2 trata sobre las restricciones de desigualdad. La mayor parte de la presentación en la sección 20.2.1 se cubre en Beightler y colaboradores (1979, pp. 45-55).

20.2.1 Restricciones de igualdad

En esta sección se presentan dos métodos: el **jacobiano** y el **lagrangiano**. El método **lagrangiano** se puede desarrollar lógicamente a partir del jacobiano. Esta relación ofrece una interpretación económica interesante del método lagrangiano.

Método de derivadas restringidas (jacobiano). Considere el problema

$$\text{Minimizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

donde

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_m)^T$$

Las funciones $f(\mathbf{X})$ y $g_i(\mathbf{X})$, $i = 1, 2, \dots, m$, son dos veces continuamente diferenciables.

La idea de utilizar derivadas restringidas es desarrollar una expresión de forma cerrada para las primeras derivadas parciales de $f(\mathbf{X})$ en todos los puntos que satisfacen $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. Los puntos estacionarios correspondientes se identifican como los puntos donde estas derivadas parciales se desvanecen. De este modo, las condiciones de suficiencia presentadas en la sección 20.1 se utilizan para verificar la identidad de los puntos estacionarios.

Para aclarar el concepto propuesto, considere $f(x_1, x_2)$ ilustrada en la figura 20.4. Esta función se debe minimizar sujeta a la restricción

$$g_1(x_1, x_2) = x_2 - b = 0$$

donde b es una constante. En la figura 20.4, la curva designada por los tres puntos A , B y C representa los valores de $f(x_1, x_2)$ que satisfacen la restricción dada. El método de las derivadas restringidas define el gradiente de $f(x_1, x_2)$ en cualquier punto de la curva ABC . El punto B donde la derivada restringida se desvanece es un punto estacionario para el problema restringido.

Ahora se desarrolla matemáticamente el método. De acuerdo con el teorema de Taylor, para $\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}$ en la vecindad factible de \mathbf{X} , se tiene

$$f(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X}) \Delta\mathbf{X} + O(\Delta x_j^2)$$

y

$$\mathbf{g}(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) - \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}) \Delta\mathbf{X} + O(\Delta x_j^2)$$

Cuando $\Delta x_j \rightarrow 0$, las ecuaciones se reducen a

$$\partial f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X}) \partial \mathbf{X}$$

y

$$\partial \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}) \partial \mathbf{X}$$

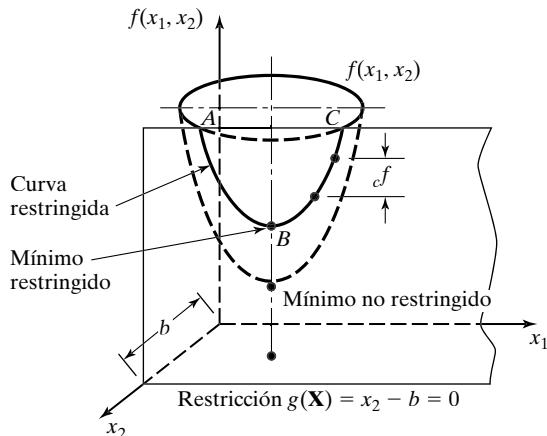
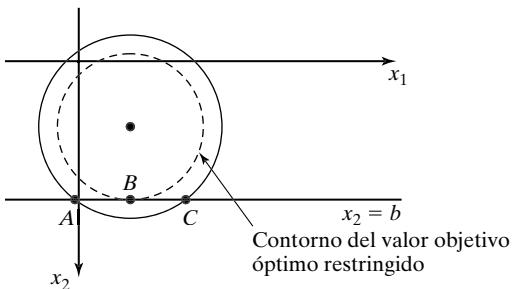


FIGURA 20.4
Demostración de la idea
del método jacobiano



Para la factibilidad, se debe tener $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, $\partial\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\partial f(\mathbf{X}) - \nabla f(\mathbf{X})\partial\mathbf{X} &= 0 \\ \nabla\mathbf{g}(\mathbf{X})\partial\mathbf{X} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Esto da $(m + 1)$ ecuaciones con $(n + 1)$ incógnitas, $\partial f(\mathbf{X})$ y $\partial\mathbf{X}$. Observe que $\partial f(\mathbf{X})$ es una variable dependiente cuyo valor se determina una vez que se conoce $\partial\mathbf{X}$. Esto significa que, de hecho, se tienen m ecuaciones con n incógnitas.

Si $m > n$, al menos $(m - n)$ ecuaciones son redundantes. Si se elimina la redundancia, el sistema se reduce a $m \leq n$. Si $m = n$, la solución es $\partial\mathbf{X} = \mathbf{0}$, y \mathbf{X} no tiene ninguna vecindad factible, lo cual indica que el espacio de soluciones se compone de sólo un punto. El caso restante ($m < n$) requiere más elaboración.

Defina

$$\mathbf{X} = (\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$$

de modo que

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m), \mathbf{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_{n-m})$$

Los vectores \mathbf{Y} y \mathbf{Z} representan las variables *dependiente* e *independiente*, respectivamente. Rescribiendo los vectores gradiente de f y g en términos de \mathbf{Y} y \mathbf{Z} , se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= (\nabla_{\mathbf{Y}}f, \nabla_{\mathbf{Z}}f) \\ \nabla g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= (\nabla_{\mathbf{Y}}g, \nabla_{\mathbf{Z}}g)\end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned}\mathbf{J} = \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{g} &= \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{Y}}g_1 \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{Y}}g_m \end{pmatrix} \\ \mathbf{C} = \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{g} &= \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{Z}}g_1 \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{Z}}g_m \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\mathbf{J}_{m \times m}$ se conoce como la **matriz jacobiana** y $C_{m \times n-m}$ como la **matriz de control**. Se supone que la jacobiana \mathbf{J} es no singular. Esto siempre es posible debido a que las m ecuaciones dadas son independientes por definición. Por lo tanto, los componentes del vector \mathbf{Y} deben seleccionarse de modo que \mathbf{J} sea no singular.

El conjunto original de ecuaciones en $\partial f(\mathbf{X})$ y $\partial \mathbf{X}$ se escribe como

$$\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{Y}}f \partial \mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{Z}}f \partial \mathbf{Z}$$

y

$$\mathbf{J} \partial \mathbf{Y} = -\mathbf{C} \partial \mathbf{Z}$$

Dado que \mathbf{J} es no singular, se deduce que

$$\partial \mathbf{Y} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{C} \partial \mathbf{Z}$$

Al sustituir $\partial \mathbf{Y}$ en la ecuación para $\partial f(\mathbf{X})$ se obtiene ∂f en función de $\partial \mathbf{Z}$, es decir,

$$\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (\nabla_{\mathbf{Z}}f - \nabla_{\mathbf{Y}}f \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}) \partial \mathbf{Z}$$

A partir de esta ecuación, la derivada restringida respecto del vector independiente \mathbf{Z} está dada por

$$\nabla_c f = \frac{\partial_c f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}} = \nabla_{\mathbf{Z}}f - \nabla_{\mathbf{Y}}f \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}$$

donde $\nabla_c f$ es el vector **gradiente restringido** de f respecto de \mathbf{Z} . Por lo tanto, $\nabla_c f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ debe ser nula en los puntos estacionarios.

Las condiciones de suficiencia son similares a las desarrolladas en la sección 20.1. La matriz hessiana (restringida) corresponde al vector independiente \mathbf{Z} , y los elementos de la matriz hessiana deben ser las segundas derivadas *restringidas*.

Ejemplo 20.2-1

Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned}f(\mathbf{X}) &= x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_1x_3 \\g_1(\mathbf{X}) &= x_1x_3 + 2x_2 + x_2^2 - 11 = 0 \\g_2(\mathbf{X}) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 - 14 = 0\end{aligned}$$

Dado el punto factible $\mathbf{X}_0 = (1, 2, 3)$, se desea estudiar la variación de $f (= \partial_c f)$ en la vecindad factible de \mathbf{X}_0 . Sean

$$\mathbf{Y} = (x_1, x_3) \quad \text{y} \quad \mathbf{Z} = x_2$$

Entonces,

$$\nabla_{\mathbf{Y}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = (2x_1 + 5x_3^2, 10x_1x_3)$$

$$\nabla_{\mathbf{Z}} f = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_2$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

Suponga que es necesario estimar $\partial_c f$ en la vecindad factible del punto factible $\mathbf{X}_0 = (1, 2, 3)$, dado un pequeño cambio $\partial x_2 = 0.01$ de la variable independiente x_2 . Se tiene

$$\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{6}{12} & \frac{3}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.83 \\ -2.50 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, el valor incremental de f restringida está dado como

$$\partial_c f = (\nabla_{\mathbf{Z}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} f \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}) \partial \mathbf{Z} = \left(6(2) - (47, 30) \begin{pmatrix} 2.83 \\ -2.50 \end{pmatrix} \right) \partial x_2 = -46.01 \partial x_2$$

Al especificar el valor de ∂x_2 para la variable *independiente* x_2 , los valores factibles de ∂x_1 y ∂x_2 se determinan para las variables dependientes x_1 y x_3 mediante la fórmula

$$\partial \mathbf{Y} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{C} \partial \mathbf{Z}$$

Entonces, para $\partial x_2 = 0.01$,

$$\begin{pmatrix} \partial x_1 \\ \partial x_3 \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{C} \partial x_2 = \begin{pmatrix} -.0283 \\ .0250 \end{pmatrix}$$

Ahora se compara el valor de $\partial_c f$ calculado anteriormente con la diferencia $f(\mathbf{X}_0 + \partial\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_0)$, dada $\partial x_2 = 0.01$.

$$\mathbf{X}_0 + \partial\mathbf{X} = (1 - .0283, 2 + .01, 3 + .025) = (.9717, 2.01, 3.025)$$

Se obtiene

$$f(\mathbf{X}_0) = 58, f(\mathbf{X}_0 + \partial\mathbf{X}) = 57.523$$

o bien,

$$f(\mathbf{X}_0 + \partial\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_0) = -0.477$$

La cantidad -0.477 se compara favorablemente con $\partial_c f = -46.01\partial x_2 = -46.01$. La diferencia entre los dos valores es el resultado de la aproximación lineal al calcular $\partial_c f$ en \mathbf{X}_0 .

Ejemplo 20.2-2

Este ejemplo ilustra el uso de derivadas restringidas. Considere el problema

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{X}) &= x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 = 0 \\ g_2(\mathbf{X}) &= 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0 \end{aligned}$$

Se determinan los puntos extremos restringidos de la siguiente manera. Sean

$$\mathbf{Y} = (x_1, x_2) \text{ y } \mathbf{Z} = x_3$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{Y}} f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (2x_1, 2x_2), \quad \nabla_{\mathbf{Z}} f = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 \\ \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \nabla_c f &= \frac{\partial_c f}{\partial_c x_3} = 2x_3 - (2x_1, 2x_2) \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{10}{3}x_1 - \frac{28}{3}x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

Así, las ecuaciones para determinar los puntos estacionarios se dan como

$$\nabla_c f = 0$$

$$g_1(\mathbf{X}) = 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = 0$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} 10 & -28 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La solución es

$$\mathbf{X}_0 \approx (.81, .35, .28)$$

La identidad de este punto estacionario se verifica mediante la condición de suficiencia. Dado que x_3 es la variable independiente, a partir de $\nabla_c f$ se desprende que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial_c x_3^2} = \frac{10}{3} \left(\frac{dx_1}{dx_3} \right) - \frac{28}{3} \left(\frac{dx_2}{dx_3} \right) + 2 = \left(\frac{10}{3}, -\frac{28}{3} \right) \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dx_3} \\ \frac{dx_2}{dx_3} \end{pmatrix} + 2$$

Con base en el método jacobiano,

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dx_3} \\ \frac{dx_2}{dx_3} \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

La sustitución da $\frac{\partial^2 f}{\partial_c x_3^2} = \frac{460}{9} > 0$. Por consiguiente, \mathbf{X}_0 es el punto mínimo.

Análisis de sensibilidad en el método jacobiano. El método jacobiano se puede utilizar para estudiar el efecto de pequeños cambios en el lado derecho de las restricciones en el valor óptimo de f . De manera específica, ¿cuál es el efecto de cambiar $g_i(\mathbf{X}) = 0$ a $g_i(\mathbf{X}) = \partial g_i$ en el valor óptimo de f ? Este tipo de investigación se llama **análisis de sensibilidad** y es similar al realizado en la programación lineal (vea los capítulos 3 y 4). Sin embargo, el análisis de sensibilidad en programación no lineal es válido únicamente en la pequeña proximidad del punto extremo. El desarrollo será útil al estudiar el método lagrangiano.

Anteriormente se demostró que

$$\begin{aligned} \partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= \nabla_{\mathbf{Y}} f \partial \mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{Z}} f \partial \mathbf{Z} \\ \partial \mathbf{g} &= \mathbf{J} \partial \mathbf{Y} + \mathbf{C} \partial \mathbf{Z} \end{aligned}$$

Dada $\partial \mathbf{g} \neq 0$, entonces

$$\partial \mathbf{Y} = \mathbf{J}^{-1} \partial \mathbf{g} - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C} \partial \mathbf{Z}$$

Al sustituir en la ecuación para $\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ se obtiene

$$\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{Y}} f \mathbf{J}^{-1} \partial \mathbf{g} + \nabla_c f \partial \mathbf{Z}$$

donde

$$\nabla_c f = \nabla_{\mathbf{Z}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} f \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}$$

como se definió previamente. La expresión para $\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ se puede utilizar para estudiar la variación de f en la vecindad factible de un punto factible \mathbf{X}_0 producida por los pequeños cambios $\partial \mathbf{g}$ y $\partial \mathbf{Z}$.

En el punto extremo (de hecho en cualquier punto estacionario) $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0)$, se debe desvanecer el gradiente restringido $\nabla_c f$. Por lo tanto,

$$\partial f(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0) = \nabla_{\mathbf{Y}_0} f \mathbf{J}^{-1} \partial \mathbf{g}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0)$$

o bien,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}} = \nabla_{\mathbf{Y}_0} f \mathbf{J}^{-1}$$

El efecto del pequeño cambio $\partial \mathbf{g}$ en el valor *óptimo* de f se estudia evaluando la razón de cambio de f respecto de \mathbf{g} . Por lo general, estas razones se conocen como **coeficientes de sensibilidad**.

Ejemplo 20.2-3

Considere el mismo problema del ejemplo 20.2-2. El punto óptimo está dado por $\mathbf{X}_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (.81, .35, .28)$. Dado $\mathbf{Y}_0 = (x_{01}, x_{02})$, entonces

$$\nabla_{\mathbf{Y}_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (2x_{01}, 2x_{02}) = (1.62, .70)$$

En consecuencia,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g_1}, \frac{\partial f}{\partial g_2} \right) = \nabla_{\mathbf{Y}_0} f \mathbf{J}^{-1} = (1.62, .7) \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = (.0876, .3067)$$

Esto significa que para $\partial g_1 = 1$, f se incrementará *aproximadamente* en .0867. Asimismo, para $\partial g_2 = 1$, f se incrementará *aproximadamente* en .3067.

Método lagrangiano. En el método jacobiano, considere que el vector $\boldsymbol{\lambda}$ representa los coeficientes de sensibilidad, es decir,

$$\boldsymbol{\lambda} = \nabla_{\mathbf{Y}_0} \mathbf{J}^{-1} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}}$$

Por lo tanto,

$$\partial f - \boldsymbol{\lambda} \partial \mathbf{g} = 0$$

Esta ecuación satisface las condiciones necesarias para puntos estacionarios porque $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}}$ se calcula de modo que $\nabla_c f = \mathbf{0}$. Una forma más conveniente para representar estas ecuaciones es calcular sus derivadas parciales respecto de todas las x_j . Esto resulta en

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f - \boldsymbol{\lambda} \mathbf{g}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Las ecuaciones resultantes junto con las ecuaciones de restricción $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ producen los valores factibles de \mathbf{X} y $\boldsymbol{\lambda}$ que satisfacen las condiciones necesarias para los puntos estacionarios.

El procedimiento dado define el *método lagrangiano* para identificar los puntos estacionarios en problemas de optimización con restricciones de *igualdad*. Sea

$$L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda} \mathbf{g}(\mathbf{X})$$

La función L se llama **función lagrangiana** y los elementos del vector $\boldsymbol{\lambda}$ constituyen los **multiplicadores de Lagrange**. Por definición, estos multiplicadores tienen la misma interpretación que los coeficientes de sensibilidad del método jacobiano.

Las ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} = 0$$

proporcionan las condiciones necesarias para determinar los puntos estacionarios de $f(\mathbf{X})$ sujeta a $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. Existen condiciones de suficiencia para el método lagrangiano, pero generalmente son difíciles de calcular.

Ejemplo 20.2-4

Considere el problema del ejemplo 20.2-2. La función lagrangiana es

$$L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) - \lambda_2(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5)$$

lo cual genera las siguientes condiciones necesarias:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 5\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5) = 0$$

La solución de estas ecuaciones simultáneas produce

$$\mathbf{X}_0 = (x_1, x_2, x_3) = (.8043, .3478, .2826)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) = (.0870, .3043)$$

Esta solución combina los resultados de los ejemplos 20.2-2 y 20.2-3. Los valores de los multiplicadores de Lagrange, dados por el vector $\boldsymbol{\lambda}$, son iguales a los coeficientes de sensibilidad obtenidos en el ejemplo 20.2-3. El resultado muestra que estos coeficientes son independientes de la selección específica del vector \mathbf{Y} dependiente en el método jacobiano.

20.2.2 Restricciones de desigualdad: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)¹

Esta sección extiende el método lagrangiano a problemas con restricciones de desigualdad. La contribución principal de la sección es el desarrollo de las condiciones *necesarias* generales de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para determinar los puntos estacionarios. Esas condiciones también son suficientes conforme a ciertas reglas que se establecerán más adelante.

Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$$

¹ W. Karush fue el primero en desarrollar las condiciones de KKT en 1939, como parte de una tesis de maestría en la University of Chicago. Las mismas condiciones fueron desarrolladas de forma independiente en 1951 por W. Kuhn y A. Tucker.

Las restricciones de desigualdad pueden convertirse en ecuaciones por medio de variables de holgura *no negativas*. Sea $S_i^2 (\geq 0)$ la cantidad de holgura agregada a la i -ésima restricción $g_i(\mathbf{X}) \leq 0$ y se define

$$\mathbf{S} = (S_1, S_2, \dots, S_m)^T, \mathbf{S}^2 = (S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2)^T$$

donde m es el total de restricciones de desigualdad. Por consiguiente, la función lagrangiana está dada por

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda} [\mathbf{g}(\mathbf{X}) + \mathbf{S}^2]$$

Dadas las restricciones $\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$, una condición necesaria para la optimalidad es que $\boldsymbol{\lambda}$ sea no negativo (no positivo) para problemas de maximización (minimización). El resultado se justifica observando que el vector $\boldsymbol{\lambda}$ mide la razón de variación de f respecto de \mathbf{g} —es decir,

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}}$$

En el caso de maximización, a medida que se incrementa el lado derecho de la restricción $\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$ desde $\mathbf{0}$ hasta el vector $\partial \mathbf{g}$, el espacio de soluciones se vuelve menos restringido y, por ende, f no puede disminuir, lo cual significa que $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$. De manera similar, para la minimización, a medida que se incrementa el lado derecho de las restricciones, f no puede aumentar, lo cual implica que $\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$. Si las restricciones son igualdades, esto es, $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{\lambda}$ se vuelve no restringido en cuanto al signo (vea el problema 20-18).

Las restricciones en $\boldsymbol{\lambda}$ se mantienen como parte de las condiciones necesarias de KKT. Ahora se desarrollarán las condiciones restantes.

Si se calculan las derivadas parciales de L respecto de \mathbf{X}, \mathbf{S} y $\boldsymbol{\lambda}$, se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} = \nabla f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_i} = -2\lambda_i S_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = -(\mathbf{g}(\mathbf{X}) + \mathbf{S}^2) = \mathbf{0}$$

El segundo conjunto de ecuaciones revela los siguientes resultados:

1. Si $\lambda_i \neq 0$, entonces $S_i^2 = 0$. Este resultado indica que el recurso correspondiente es escaso (se ha agotado por completo).
2. Si $S_i^2 > 0$, entonces $\lambda_i = 0$. Lo cual indica que el recurso i no es escaso y, por consiguiente, no tiene ningún efecto en el valor de f (es decir, $\lambda_i = \frac{\partial f}{\partial g_i} = 0$).

Del segundo y tercer conjuntos de ecuaciones, se obtiene

$$\lambda_i g_i(\mathbf{X}) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Esta nueva condición repite en esencia el argumento anterior, porque si $\lambda_i > 0$, $g_i(\mathbf{X}) = 0$ o $S_i^2 = 0$; y si $g_i(\mathbf{X}) < 0$, $S_i^2 > 0$ y $\lambda_i = 0$.

TABLA 20.1 Suficiencia de las condiciones de KKT

Sentido de la optimización	Condiciones requeridas	
	Función objetivo	Espacio de soluciones
Maximización	Cóncava	Conjunto convexo
Minimización	Convexa	Conjunto convexo

Las condiciones necesarias de KKT para problemas de maximización se resumen como sigue:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0} \\ \nabla f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}) &= \mathbf{0} \\ \lambda_i g_i(\mathbf{X}) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \mathbf{g}(\mathbf{X}) &\leq \mathbf{0}\end{aligned}$$

Estas condiciones también se aplican para el caso de minimización, excepto que $\boldsymbol{\lambda}$ debe ser no positiva (¡verifíquelo!). Tanto en maximización como en minimización, los multiplicadores de Lagrange correspondientes a restricciones de igualdad no están restringidos en cuanto al signo.

Suficiencia de las condiciones de KKT. Las condiciones necesarias de KKT también son suficientes si la función objetivo y el espacio de soluciones satisfacen las condiciones que aparecen en la tabla 20.1.

Es más fácil verificar que una función sea convexa o cóncava, que demostrar que un espacio de soluciones es un conjunto convexo. Por esa razón, se ofrece un *subconjunto* de las condiciones de suficiencia que, aunque no es tan general como el de la tabla 20.1, es más fácil de aplicar en la práctica. Para proporcionar estas condiciones, se definen los problemas no lineales generalizados como

$$\text{Maximizar o minimizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\begin{aligned}g_i(\mathbf{X}) &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \\ g_i(\mathbf{X}) &\geq 0 \quad i = r + 1, \dots, p \\ g_i(\mathbf{X}) &= 0 \quad i = p + 1, \dots, m \\ L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda}) &= f(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^r \lambda_i [g_i(\mathbf{X}) + S_i^2] - \sum_{i=r+1}^p \lambda_i [g_i(\mathbf{X}) - S_i^2] - \sum_{i=p+1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{X})\end{aligned}$$

El parámetro λ_i es el multiplicador de Lagrange asociado con la restricción i . Las condiciones para establecer la suficiencia de las condiciones de KKT se resumen en la tabla 20.2.

Las condiciones que aparecen en la tabla 20.2 son un subconjunto de las condiciones de la tabla 20.1, porque un espacio de soluciones puede ser convexo sin que satisfaga las condiciones que se presentan en la tabla 20.2.

La tabla 20.2 es válida porque las condiciones dadas producen una función lagrangiana cóncava $L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda})$ en caso de maximización y una convexa $L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda})$ en caso de minimización. Este resul-

TABLA 20.2 Subconjunto de condiciones suficientes de KKT

Sentido de la optimización	$f(\mathbf{X})$	Condiciones requeridas		
		$g_i(\mathbf{X})$	λ_i	
Maximización	Cóncava	Cóncava	≥ 0	$(1 \leq i \leq r)$
		Convexa	≤ 0	$(r + 1 \leq i \leq p)$
		Lineal	No restringida	$(p + 1 \leq i \leq m)$
Minimización	Convexa	Convexa	≤ 0	$(1 \leq i \leq r)$
		Cóncava	≥ 0	$(r + 1 \leq i \leq p)$
		Lineal	No restringida	$(p + 1 \leq i \leq m)$

tado se verifica observando que si $g_i(x)$ es convexa, entonces $\lambda_i g_i(x)$ es convexa si $\lambda_i \geq 0$ y cóncava si $\lambda_i \leq 0$. Se pueden establecer interpretaciones similares para todas las condiciones restantes. Observe que una función lineal es tanto convexa como cóncava. Además, si una función f es cóncava, entonces $(-f)$ es convexa, y viceversa.

Ejemplo 20.2-5

Considere el siguiente problema de minimización:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{X}) &= 2x_1 + x_2 - 5 \leq 0 \\ g_2(\mathbf{X}) &= x_1 + x_3 - 2 \leq 0 \\ g_3(\mathbf{X}) &= 1 - x_1 \leq 0 \\ g_4(\mathbf{X}) &= 2 - x_2 \leq 0 \\ g_5(\mathbf{X}) &= -x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

Éste es un problema de minimización, de ahí que $\lambda \leq \mathbf{0}$. Por lo tanto, las condiciones de KKT se dan como

$$\begin{aligned} (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) &\leq \mathbf{0} \\ (2x_1, 2x_2, 2x_3) - (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \lambda_1 g_1 = \lambda_2 g_2 = \dots = \lambda_5 g_5 &= 0 \\ \mathbf{g}(\mathbf{X}) &\leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Estas condiciones se reducen a

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \leq 0$$

$$2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_4 = 0$$

$$2x_3 - \lambda_2 + \lambda_5 = 0$$

$$\lambda_1(2x_1 + x_2 - 5) = 0$$

$$\lambda_2(x_1 + x_3 - 2) = 0$$

$$\lambda_3(1 - x_1) = 0$$

$$\lambda_4(2 - x_2) = 0$$

$$\lambda_5x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_3 \leq 2$$

$$x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 0$$

La solución es $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -4$. Debido a que tanto $f(\mathbf{X})$ como el espacio de soluciones $\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$ son convexos, $L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda})$ debe ser convexa, y el punto estacionario resultante da un mínimo restringido global. Las condiciones de KKT son cruciales para el desarrollo de los algoritmos de programación no lineal del capítulo 21.

BIBLIOGRAFÍA

- Bazaraa, M., H. Sherali y C. Shetty, *Nonlinear Programming Theory and Algorithms*, 3a. ed., Wiley, Nueva York, 2006.
- Beightler, C., D. Phillips y D. Wilde, *Foundations of Optimization*, 2a. ed., Prentice Hall, NJ, 1979.
- Bertsekas, D., *Nonlinear Programming*, 2a. ed., Athena Scientific, NH, 1999.
- Fletcher, R., *Practical Methods of Optimization*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 2000.
- Taha, H. y G. Curry, "Classical Derivation of the Necessary and Sufficient Conditions for Optimal Linear Programs", *Operations Research*, vol. 19, núm. 4, pp. 1045-1049, 1971.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados
20.1.1	20-1 a 20-4
20.1.2	20-5 a 20-6
20.2.1	20-7 a 20-16
20.2.2	20-17 a 20-21

20-1. Determine los puntos extremos de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^3 + x$

(b) $f(x) = x^4 + x^2$

(c) $f(x) = 4x^4 - x^2 + 5$

(d) $f(x) = (3x - 2)^2(2x - 3)^2$

*(e) $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 10$

20-2. Determine los puntos extremos de las siguientes funciones.

(a) $f(\mathbf{X}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$

(b) $f(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6(x_1 + x_2 + x_3) + 2x_1x_2x_3$

20-3. Verifique que la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2x_3 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 + 4x_3$$

tenga los puntos estacionarios $(0, 3, 1), (0, 1, -1), (1, 2, 0), (2, 1, 1)$ y $(2, 3, -1)$. Utilice la condición de suficiencia para identificar los puntos extremos.

***20-4.** Resuelva las siguientes ecuaciones simultáneas convirtiendo el sistema en una función objetivo no lineal sin restricciones.

$$x_2 - x_1^2 = 0$$

$$x_2 - x_1 = 2$$

[Sugerencia: $\min f^2(x_1, x_2)$ ocurre en $f'(x_1, x_2) = 0$].

20-5. Use *NewtonRaphson.xls* para resolver el problema 20.1(c).

20-6. Resuelva el problema 20-2(b), por el método de Newton-Raphson.

20-7. Considere el ejemplo 20.2-1.

(a) Calcule $\partial_c f$ por medio de los dos métodos presentados en el ejemplo, utilizando $\partial x_2 = .001$ en vez de $\partial x_2 = .01$. ¿Se hace el efecto de la aproximación lineal más insignificante con la reducción del valor de ∂x_2 ?

*(b) Especifique una relación entre los elementos de $\partial \mathbf{X} = (\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)$ en el punto factible $\mathbf{X}_0 = (1, 2, 3)$ que mantendrá factible al punto $\mathbf{X}_0 + \partial \mathbf{X}$.

(c) Si $\mathbf{Y} = (x_2, x_3)$ y $\mathbf{Z} = x_1$, ¿cuál es el valor de ∂x_1 que producirá el mismo valor de $\partial_c f$ dado en el ejemplo?

20-8. Suponga que el ejemplo 20.2-2 se resuelve de la siguiente manera. Primero, utilice las restricciones para expresar x_1 y x_2 en términos de x_3 ; luego, utilice las ecuaciones resultantes para expresar la función objetivo sólo en términos de x_3 . Al obtener la derivada de la nueva función objetivo respecto de x_3 , es posible determinar los puntos máximo y mínimo.

(a) ¿Sería diferente la derivada de la nueva función objetivo (expresada en términos de x_3) de la obtenida usando el método jacobiano?

(b) ¿Cómo difiere el método sugerido del método jacobiano?

20-9. Aplique el método jacobiano al ejemplo 20.2-1 seleccionando $\mathbf{Y} = (x_2, x_3)$ y $\mathbf{Z} = (x_1)$.

***20-10.** Resuelva por medio del método jacobiano:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

sujeto a

$$\prod_{i=1}^n x_i = C$$

C es una constante positiva. Suponga que el lado derecho de la restricción se cambia a $C + \delta$, donde δ es una pequeña cantidad positiva. Determine el cambio correspondiente del valor óptimo de f .

20-11. Resuelva usando el método jacobiano:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = 5x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

sujeto a

$$g(\mathbf{X}) = x_1x_2 - 10 = 0$$

- (a) Encuentre el cambio del valor óptimo de $f(\mathbf{X})$ si la restricción se reemplaza con $x_1x_2 - 9.99 = 0$.
- (b) Encuentre el cambio del valor de $f(\mathbf{X})$ en la vecindad del punto factible $(2, 5)$, dado que $x_1x_2 = 9.99$ y $\partial x_1 = .01$.

20-12. Considere el problema:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 + 5x_1x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{X}) &= x_1 + x_2^2 + 3x_2x_3 - 5 = 0 \\ g_2(\mathbf{X}) &= x_1^2 + 5x_1x_2 + x_3^2 - 7 = 0 \end{aligned}$$

Aplique el método jacobiano para hallar $\partial f(\mathbf{X})$ en la vecindad del punto factible $(1, 1, 1)$. Suponga que esta vecindad se especifica mediante $\partial g_1 = -.01$, $\partial g_2 = .02$ y $\partial x_1 = .01$.

20-13. Considere el problema

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{X}) &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10 = 0 \\ g_2(\mathbf{X}) &= x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 15 = 0 \end{aligned}$$

- (a) Demuestre que al seleccionar x_3 y x_4 como variables independientes, el método Jacobiano no proporciona una solución e indique la razón.
 - *(b) Resuelva el problema utilizando x_1 y x_3 como variables independientes, y aplique la condición de suficiencia para determinar el tipo de punto estacionario resultante.
 - (c) Determine los coeficientes de sensibilidad, dada la solución en (b).
- 20-14.** Resuelva el siguiente problema de programación lineal mediante los métodos jacobiano y lagrangiano:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X}) = 5x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{X}) &= x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0 \\ g_2(\mathbf{X}) &= 3x_1 + x_2 + x_4 - 9 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

***20-15.** Determine la solución óptima del problema

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 + x_3 - 5 = 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = x_1 + 5x_2 + x_3 - 7 = 0$$

Suponga que $g_1(\mathbf{X}) = .01$ y $g_2(\mathbf{X}) = .02$. Determine el cambio correspondiente del valor óptimo de $f(\mathbf{X})$.

20-16. Resuelva el problema 20-13 por el método lagrangiano y verifique que los valores de los multiplicadores de Lagrange sean los mismos que los coeficientes de sensibilidad obtenidos en el problema 20.13.

20-17. Considere el problema:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \geq \mathbf{0}$$

Muestre que las condiciones de KKT son las mismas que en la sección 20.2.2, excepto que $\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$.

20-18. Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

Muestre que las condiciones de KKT son

$$\nabla f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ no restringida en cuanto al signo

20-19. Escriba las condiciones necesarias de KKT para los siguientes problemas.

(a) Maximizar $f(\mathbf{X}) = x_1^3 - x_2^2 + x_1x_3^2$
sujeto a

$$x_1 + x_2^2 + x_3 = 5$$

$$5x_1^2 - x_2^2 - x_3 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(b) Minimizar $f(\mathbf{X}) = x_1^4 + x_2^2 + 5x_1x_2x_3$
sujeto a

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^3 \leq 10$$

$$x_1^3 + x_2^2 + 4x_3^2 \geq 20$$

20-20. Considere el problema

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

Dado que $f(\mathbf{X})$ es cóncava y $g_i(\mathbf{X})(i=1, 2, \dots, m)$ es una función *lineal*, demuestre que las condiciones necesarias de KKT también son suficientes. ¿Es cierto este resultado, si $g_i(\mathbf{X})$ es una función no lineal convexa para toda i ? ¿Por qué?

20-21. Considere el problema

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) \geq 0, g_2(\mathbf{X}) = 0, g_3(\mathbf{X}) \leq 0$$

Desarrolle las condiciones de KKT e indique las estipulaciones bajo las cuales son suficientes las condiciones.

CAPÍTULO 21

Algoritmos de programación no lineal

21.1 ALGORITMOS NO RESTRINGIDOS

En esta sección se presentan dos tipos de algoritmos para el problema no restringido: de *búsqueda directa* y del *gradiente*.

21.1.1 Método de búsqueda directa

Los métodos de búsqueda directa se aplican sobre todo a funciones de una sola variable estrictamente unimodales. Aunque el caso parezca trivial, en la sección 21.1.2 se demuestra que la optimización de funciones de una sola variable es clave en el desarrollo del algoritmo general de múltiples variables.

La idea de los métodos de búsqueda directa es identificar el **intervalo de incertidumbre** que se sabe incluye el punto de solución óptimo. El procedimiento localiza el óptimo estrechando de manera iterativa el intervalo de incertidumbre a un nivel de exactitud deseada.

En esta sección se presentan dos algoritmos de búsqueda estrechamente relacionados: el **dicótomo** y el de la **sección dorada**. Ambos buscan la maximización de una función unimodal $f(x)$ a lo largo del intervalo $a \leq x \leq b$ que incluye el punto óptimo x^* . Los dos métodos comienzan con el intervalo inicial de incertidumbre $I_0 = (a, b)$.

Paso general i . Sea $I_{i-1} = (x_L, x_R)$ el intervalo actual de incertidumbre (en la iteración 0, $x_L = a$ y $x_R = b$). La siguiente tabla muestra cómo se determinan x_1 y x_2 :

Método dicótomo	Método de la sección dorada
$x_1 = \frac{1}{2}(x_R + x_L - \Delta)$	$x_1 = x_R - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(x_R - x_L)$
$x_2 = \frac{1}{2}(x_R + x_L + \Delta)$	$x_2 = x_L + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(x_R - x_L)$

La selección de x_1 y x_2 garantiza que $x_L < x_1 < x_2 < x_R$.

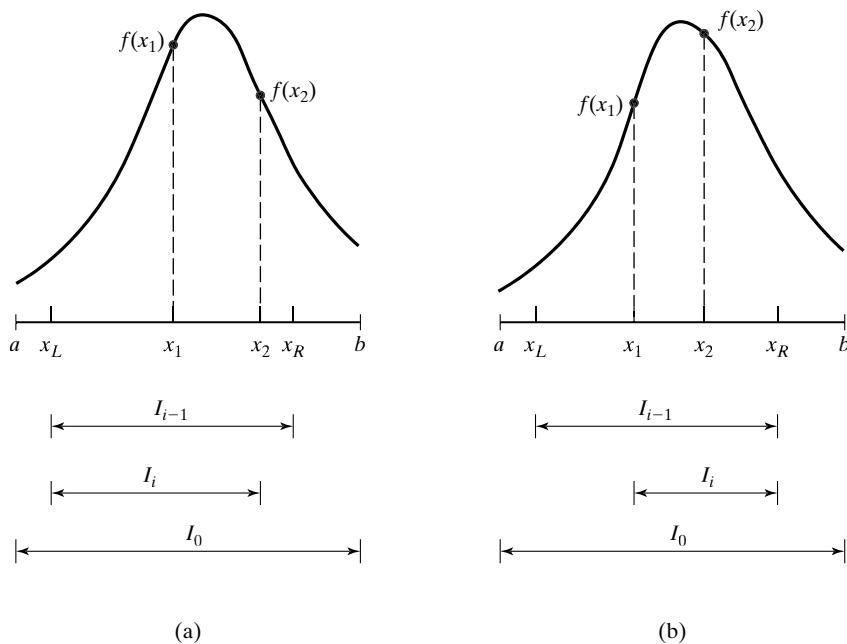


FIGURA 21.1

Ilustración del paso general de los métodos de búsqueda, dicótomo y de la sección dorada

El siguiente intervalo de incertidumbre, I_i , se determina de la siguiente manera:

- Si $f(x_1) > f(x_2)$, entonces $x_L < x^* < x_2$. Sea $x_R = x_2$ y establezca $I_i = (x_L, x_2)$ [vea la figura 21.1(a)].
 - Si $f(x_1) < f(x_2)$, entonces $x_1 < x^* < x_R$. Sea $x_L = x_1$ y establezca $I_i = (x_1, x_R)$ [vea la figura 21.1(b)].
 - Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 < x^* < x_2$. Sean $x_L = x_1$ y $x_R = x_2$; establezca $I_i = (x_1, x_2)$.

La manera de determinar x_1 y x_2 garantiza que $I_{l+1} < I_l$, como se demostrará en breve. El algoritmo termina en la iteración k si $I_k \leq \Delta$, donde Δ es un nivel de exactitud especificado por el usuario.

En el método dicotómico, los valores x_1 y x_2 se sitúan simétricamente alrededor del punto medio del intervalo de incertidumbre actual. Esto significa que

$$I_{i+1} = .5(I_i + \Delta)$$

La aplicación repetida del algoritmo garantiza que la longitud del intervalo de incertidumbre se aproxime a la exactitud deseada, Δ .

En el método de la sección dorada, la idea es más elaborada. Se observa que cada iteración del método dicótomo requiere calcular los dos valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$, pero al final se descarta uno de

ellos. Lo que el método de la sección dorada propone es ahorrar cálculos al reutilizar el valor desecharo en la iteración inmediatamente subsiguiente.

Defina

$$\begin{aligned} x_1 &= x_R - \alpha(x_R - x_L) \\ x_2 &= x_L + \alpha(x_R - x_L) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \alpha < 1 \end{array} \right.$$

Entonces, el intervalo de incertidumbre I_i en la iteración i es igual a (x_L, x_2) o (x_1, x_R) . Consideré el caso $I_i = (x_L, x_2)$, lo cual significa que x_1 está incluida en I_i . En la iteración $i + 1$, se selecciona x_2 igual a x_1 en la iteración i , que conduce a la siguiente ecuación:

$$x_2(\text{iteración } i + 1) = x_1(\text{iteración } i)$$

La sustitución produce

$$x_L + \alpha[x_2(\text{iteración } i) - x_L] = x_R - \alpha(x_R - x_L)$$

o bien,

$$x_L + \alpha[x_L + \alpha(x_R - x_L) - x_L] = x_R - \alpha(x_R - x_L)$$

la cual se simplifica como

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

Esta ecuación da como resultado $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Se selecciona la raíz positiva $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx .681$ porque $0 < \alpha < 1$.

El diseño de los cálculos de la sección dorada garantiza una reducción α en los intervalos de incertidumbre sucesivos, es decir,

$$I_{i+1} = \alpha I_i$$

El método de la sección dorada converge con más rapidez que el método dicótomo porque, en éste, el estrechamiento del intervalo de incertidumbre se desacelera significativamente a medida que $I \rightarrow \Delta$. Además, el método de la sección dorada requiere la mitad de los cálculos porque recicla un conjunto de cálculos de la iteración inmediata anterior.

Ejemplo 21.1-1

$$\text{Maximizar } f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{3}(-x + 20), & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

El valor máximo de $f(x)$ ocurre en $x = 2$. La siguiente tabla demuestra los cálculos para las iteraciones 1 y 2 siguiendo los métodos dicótomo y de la sección dorada, con $\Delta = .1$.

Método dicótomo	Método de la sección dorada
<i>Iteración 1</i>	<i>Iteración 1</i>
$I_0 = (0, 3) \equiv (x_L, x_R)$	$I_0 = (0, 3) \equiv (x_L, x_R)$
$x_1 = 0 + .5(3 - 0 - .1) = 1.45, f(x_1) = 4.35$	$x_1 = 3 - .618(3 - 0) = 1.146, f(x_1) = 3.438$
$x_2 = 0 + .5(3 - 0 + .1) = 1.55, f(x_2) = 4.65$	$x_2 = 0 + .618(3 - 0) = 1.854, f(x_2) = 5.562$
$f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow x_L = 1.45, I_1 = (1.45, 3)$	$f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow x_L = 1.146, I_1 = (1.146, 3)$
<i>Iteración 2</i>	<i>Iteración 2</i>
$I_1 = (1.45, 3) \equiv (x_L, x_R)$	$I_1 = (1.146, 3) \equiv (x_L, x_R)$
$x_1 = 1.45 + .5(3 - 1.45 - .1) = 2.175, f(x_1) = 5.942$	$x_1 = x_2$ en iteración 0 = 1.854, $f(x_1) = 5.562$
$x_2 = \frac{3+1.45+.1}{2} = 2.275, f(x_2) = 5.908$	$x_2 = 1.146 + .618(3 - 1.146) = 2.292, f(x_2) = 5.903$
$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_R = 2.275, I_2 = (1.45, 2.275)$	$f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow x_L = 1.854, I_2 = (1.854, 3)$

Continuando de la misma forma, en algún momento el intervalo de incertidumbre se estrechará hasta la tolerancia deseada Δ .

Momento de Excel

La plantilla *excelDiGold.xls* maneja ambos métodos al introducir la letra X en D5 (dicótomo) o F5 (sección dorada). Los datos de entrada incluyen $f(x)$, a , b y Δ . La función $f(x)$ se ingresa en la celda E3 como

$$=IF(C3<=2, 3*C3, (-C3+20)/3)$$

La celda C3 desempeña el papel de x en $f(x)$.

La figura 21.2 compara los dos métodos. El método de la sección dorada requiere menos de la mitad de las iteraciones del método dicótomo, además de la mitad de los cálculos en cada iteración.

21.1.2 Método del gradiente

En esta sección se desarrolla un método para optimizar dos veces funciones continuamente diferenciables, llamado **método del ascenso más pronunciado**. La idea es generar puntos sucesivos en la dirección del gradiente de la función.¹ La terminación del método del gradiente se da en el punto donde el vector gradiente se vuelve nulo. Ésta es la única condición necesaria para la optimalidad.

Suponga que $f(\mathbf{X})$ se maximiza. Sea \mathbf{X}_0 el punto inicial desde donde empieza el procedimiento, y defina $\nabla f(\mathbf{X}_k)$ como el gradiente de f en el punto \mathbf{X}_k . La idea es determinar una ruta específica p a lo largo de la cual $\frac{\partial f}{\partial p}$ se maximice en un punto dado. Este resultado se logra si se seleccionan los puntos sucesivos \mathbf{X}_k y \mathbf{X}_{k+1} de modo que

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + r_k \nabla f(\mathbf{X}_k)$$

donde r_k es el **tamaño del paso** óptimo en \mathbf{X}_k .

¹ El método de Newton-Raphson de la sección 20.1.2 también es un método del gradiente que localiza el óptimo en forma indirecta mediante la resolución de las ecuaciones de condiciones necesarias.

	A	B	C	D	E	F
Dichotomous/Golden Section Search						
2	Input data: Type $f(C3)$ in E3, where C3 represents x in $f(x)$					
3	$\Delta =$	0.1	C3		#VALUE!	Clear Calculations
4	Minimum $x =$	0	Maximum $x =$	3		
5	Solution:	Enter x to select>	Dichotomous:	X	GoldenSection:	
6	$x^* =$	2.04001	$f(x^*) =$	5.97002		
7	Calculations:				Perform calculation	
8	xL	xR	x1	x2	f(x1)	f(x2)
9	0.000000	3.000000	1.450000	1.550000	4.350000	4.650000
10	1.450000	3.000000	2.175000	2.275000	5.941667	5.908333
11	1.450000	2.275000	1.812500	1.912500	5.437500	5.737500
12	1.812500	2.275000	1.993750	2.093750	5.981250	5.968750
13	1.812500	2.093750	1.903125	2.003125	5.709375	5.998958
14	1.903125	2.093750	1.948438	2.048438	5.845313	5.983854
15	1.948438	2.093750	1.971094	2.071094	5.913281	5.976302
16	1.971094	2.093750	1.982422	2.082422	5.947266	5.972526
17	1.982422	2.093750	1.988086	2.088086	5.964258	5.970638
18	1.988086	2.093750	1.990918	2.090918	5.972754	5.969694
19	1.988086	2.090918	1.989502	2.089502	5.968506	5.970166
20	1.989502	2.090918	1.990210	2.090210	5.970630	5.969930
21	1.989502	2.090210	1.989856	2.089856	5.969568	5.970048
22	1.989856	2.090210	1.990033	2.090033	5.970099	5.969989
23	1.989856	2.090033	1.989944	2.089944	5.969833	5.970019
24	1.989944	2.090033	1.989989	2.089989	5.969966	5.970004
25	1.989989	2.090033	1.990011	2.090011	5.970033	5.969996
26	1.989989	2.090011	1.990000	2.090000	5.969999	5.970000
27	1.990000	2.090011	1.990005	2.090005	5.970016	5.969998
28	1.990000	2.090005	1.990003	2.090003	5.970008	5.969999
5	Solution:	Enter x to select>	Dichotomous:		GoldenSection:	X
6	$x^* =$	2.00909	$f(x^*) =$	5.99290		
7	Calculations:				Perform calculation	
8	xL	xR	x1	x2	f(x1)	f(x2)
9	0.000000	3.000000	1.145898	1.854102	3.437694	5.562306
10	1.145898	3.000000	1.854102	2.291796	5.562306	5.902735
11	1.854102	3.000000	2.291796	2.562306	5.902735	5.812565
12	1.854102	2.562306	2.124612	2.291796	5.958463	5.902735
13	1.854102	2.291796	2.021286	2.124612	5.992905	5.958463
14	1.854102	2.124612	1.957428	2.021286	5.872283	5.992905
15	1.957428	2.124612	2.021286	2.060753	5.992905	5.979749
16	1.957428	2.060753	1.996894	2.021286	5.990683	5.992905
17	1.996894	2.060753	2.021286	2.036361	5.992905	5.987880

FIGURA 21.2

Resultados de Excel para los métodos dicótomo y de la sección dorada aplicados al ejemplo 21.1-1 (archivo *excelDiGold.xls*)

El tamaño del paso r_k se determina de modo que el siguiente punto \mathbf{X}_{k+1} conduzca al mayor mejoramiento de f , lo cual equivale a determinar $r = r_k$ que maximiza la función

$$h(r) = f[\mathbf{X}_k + r \nabla f(\mathbf{X}_k)]$$

Debido a que $h(r)$ es una función de una sola variable, se utiliza el método de búsqueda de la sección 21.1.1 para determinar el óptimo, siempre que $h(r)$ sea unimodal.

El procedimiento propuesto termina cuando dos puntos de prueba sucesivos \mathbf{X}_k y \mathbf{X}_{k+1} son aproximadamente iguales. Esto equivale a tener $r_k \nabla f(\mathbf{X}_k) \approx \mathbf{0}$, o de forma equivalente $\nabla f(\mathbf{X}_k) \approx \mathbf{0}$.

Ejemplo 21.1-2

Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

El óptimo exacto ocurre en $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

El gradiente de f es

$$\nabla f(\mathbf{X}) = (4 - 4x_1 - 2x_2, 6 - 2x_1 - 4x_2)$$

La naturaleza cuadrática de la función indica que los gradientes en dos puntos sucesivos son ortogonales (perpendiculares entre sí).

Suponga que se comienza en el punto inicial $\mathbf{X}_0 = (1, 1)$. En la figura 21.3 se muestran los puntos de solución sucesivos.

Iteración 1

$$\nabla f(\mathbf{X}_0) = (-2, 0)$$

El siguiente punto \mathbf{X}_1 se obtiene al considerar

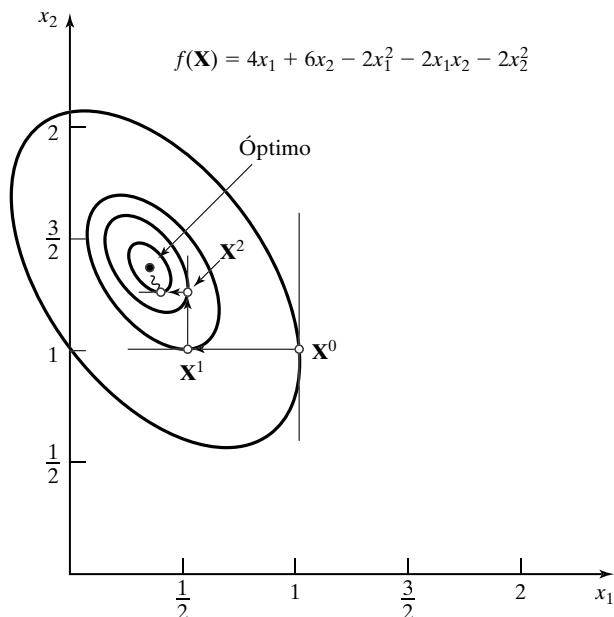
$$\mathbf{X} = (1, 1) + r(-2, 0) = (1 - 2r, 1)$$

Por lo tanto,

$$h(r) = f(1 - 2r, 1) = -2(1 - 2r)^2 + 2(1 - 2r) + 4$$

FIGURA 21.3

Maximización de $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$ por el método del ascenso más pronunciado



El tamaño óptimo del paso se obtiene aplicando las condiciones necesarias clásicas expuestas en el capítulo 20 (también se pueden utilizar los algoritmos de búsqueda dados en la sección 21.1.1 para determinar el óptimo). El valor máximo de $h(r)$ es $r_1 = \frac{1}{4}$, que da el siguiente punto solución $\mathbf{X}_1 = (\frac{1}{2}, 1)$.

Iteración 2

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{X}_1) &= (0, 1) \\ \mathbf{X} &= \left(\frac{1}{2}, 1\right) + r(0, 1) = \left(\frac{1}{2}, 1 + r\right) \\ h(r) &= -2(1 + r)^2 + 5(1 + r) + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $r_2 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

Iteración 3

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{X}_2) &= \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \\ \mathbf{X} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) + r\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1-r}{2}, \frac{5}{4}\right) \\ h(r) &= -\frac{1}{2}(1 - r)^2 + \frac{3}{4}(1 - r) + \frac{35}{8}\end{aligned}$$

Por consiguiente, $r_3 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}_3 = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{4}\right)$.

Iteración 4

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{X}_3) &= \left(0, \frac{1}{4}\right) \\ \mathbf{X} &= \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{4}\right) + r\left(0, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{8}, \frac{5+r}{4}\right) \\ h(r) &= -\frac{1}{8}(5 + r)^2 + \frac{21}{16}(5 + r) + \frac{39}{32}\end{aligned}$$

Así que, $r_4 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}_4 = \left(\frac{3}{8}, \frac{21}{16}\right)$.

Iteración 5

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{X}_4) &= \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \\ \mathbf{X} &= \left(\frac{3}{8}, \frac{21}{16}\right) + r\left(-\frac{1}{8}, 0\right) = \left(\frac{3-r}{8}, \frac{21}{16}\right) \\ h(r) &= -\frac{1}{32}(3 - r)^2 + \frac{11}{64}(3 - r) + \frac{567}{128}\end{aligned}$$

Se obtiene entonces $r_5 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}_5 = \left(\frac{11}{32}, \frac{21}{16}\right)$.

Iteración 6

$$\nabla f(\mathbf{X}_5) = \left(0, \frac{1}{16}\right)$$

El proceso se puede terminar en este punto porque $\nabla f(\mathbf{X}_5) \approx \mathbf{0}$. El punto máximo *aproximado* lo da $\mathbf{X}_5 = (.3438, 1.3125)$. El óptimo exacto es $\mathbf{X}^* = (.3333, 1.3333)$.

21.2 ALGORITMOS RESTRINGIDOS

El problema de programación no lineal restringido general se define como

$$\text{Maximizar (o minimizar)} z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$$

Las condiciones de no negatividad, $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, forman parte de las restricciones. Incluso, al menos una de las funciones $f(\mathbf{X})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ es no lineal, y todas las funciones son continuamente diferenciables.

El comportamiento errático de las funciones no lineales impide el desarrollo de un solo algoritmo para el modelo no lineal general. Quizás el resultado más general aplicable al problema sean las condiciones de KKT (sección 20.2.2). En la tabla 20.2 se muestra que las condiciones de KKT sólo son necesarias, a menos que $f(\mathbf{X})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ sean funciones bien comportadas.

En esta sección se presentan varios algoritmos que pueden clasificarse de manera general como métodos *indirectos* y *directos*. Los métodos indirectos resuelven el problema no lineal mediante el uso de uno o más programas *lineales* derivados del programa original. Los métodos directos emplean el programa original.

Los algoritmos indirectos presentados en esta sección incluyen las programaciones restringidas separable, cuadrática y estocástica. Los algoritmos directos incluyen el método de combinación lineal y un breve análisis del algoritmo SUMT (por sus siglas de *sequential unconstrained maximization technique*, técnica de maximización secuencial no restringida). En la lista de referencias al final del capítulo se pueden encontrar otras importantes técnicas no lineales.

21.2.1 Programación separable

Una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es **separable** si se puede expresar como la suma de n funciones de una sola variable $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)$, es decir,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

Por ejemplo, cualquier función lineal es separable. Por otro lado, la función

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 \operatorname{sen}(x_2 + x_3) + x_2 e^{x_3}$$

no es separable.

Algunas funciones no lineales (convolucionadas) se pueden hacer separables mediante sustituciones adecuadas. Considere, por ejemplo, el caso de maximizar $z = x_1 x_2$. Sea $y = x_1 x_2$, entonces $\ln y = \ln x_1 + \ln x_2$, y el problema separable equivalente es

$$\text{Maximizar } z = y$$

sujeto a

$$\ln y = \ln x_1 + \ln x_2$$

La sustitución supone que x_1 y x_2 son variables *positivas* porque la función logarítmica es indefinida para los valores no positivos. Es posible tener en cuenta el caso donde x_1 y x_2 pueden asumir valores cero mediante las aproximaciones

$$w_1 = x_1 + \delta_1 > 0$$

$$w_2 = x_2 + \delta_2 > 0$$

Las constantes δ_1 y δ_2 son valores positivos muy pequeños.

En esta sección se muestra cómo puede obtenerse una solución aproximada de cualquier problema separable utilizando aproximación lineal y el método simplex de programación lineal. La función de una sola variable $f(x)$ se puede representar mediante una función lineal definida por intervalos con la programación entera combinada (capítulo 9). Suponga que $f(x)$ se representa de forma aproximada en el intervalo $[a, b]$, y se define $a_k, k = 1, 2, \dots, K$, como el k -ésimo punto de quiebre sobre el eje x , de modo que $a_1 < a_2 < \dots < a_K$. Los puntos a_1 y a_K coinciden con los puntos extremos a y b del intervalo designado. Por lo tanto, $f(x)$ se representa de forma aproximada como

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^K f(a_k) w_k$$

$$x = \sum_{k=1}^K a_k w_k$$

Los pesos no negativos w_k deben satisfacer la condición

$$\sum_{k=1}^K w_k = 1, w_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, K$$

La programación entera combinada garantiza la validez de la aproximación al imponer dos condiciones adicionales:

1. Cuando mucho dos w_k son positivos.
2. Si w_k es positivo, entonces sólo un w_{k+1} o w_{k-1} adyacente puede asumir un valor positivo.

Para demostrar cómo se satisfacen estas condiciones, considere el problema separable

$$\text{Maximizar (o minimizar)} \quad z = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n g_{ij}(x_j) \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

Este problema se aproxima mediante un programa entero combinado como sigue. Sean²

$$\left. \begin{array}{l} a_{jk} = \text{punto de quiebre } k \text{ de la variable } x_j \\ w_{jk} = \text{peso con punto de quiebre } k \text{ de la variable } x_j \end{array} \right\} k = 1, 2, \dots, K_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Entonces, el problema combinado equivalente es

$$\text{Maximizar (o minimizar)} \quad z = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{K_j} f_j(a_{jk}) w_{jk}$$

² Es más preciso reemplazar el índice k con k_j de modo que corresponda de forma única a la variable j . En este instante, se renunciará a la precisión matemática en favor de una notación más sencilla.

sujeto a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{K_j} g_{jk}(a_{jk}) w_{jk} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & 0 \leq w_{j1} \leq y_{j1}, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 & 0 \leq w_{jk} \leq y_{j,k-1} + y_{jk}, \quad k = 2, 3, \dots, K_j - 1, j = 1, 2, \dots, n \\
 & 0 \leq w_{jK_j} \leq y_{j,K_j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 & \sum_{k=1}^{K_j-1} y_{jk} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 & \sum_{k=1}^{K_j} w_{jk} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 & y_{jk} = (0, 1), \quad k = 1, 2, \dots, K_j, j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Las variables en el problema de aproximación son w_{jk} y y_{jk} .

La formulación muestra cómo se resuelve cualquier problema separable, en principio, mediante programación entera combinada. La dificultad es que las restricciones se incrementan muy rápido con la cantidad de puntos de quiebre. En particular, la factibilidad computacional del procedimiento es cuestionable, ya que no hay códigos de computadora consistentemente confiables para resolver grandes problemas de programación entera combinada.

Otro método para resolver el modelo de aproximación es el método simplex regular (capítulo 3) utilizando una **base restringida**. En este caso, se eliminan las restricciones adicionales que implican y_{jk} . La base restringida modifica la condición de optimalidad del método simplex, seleccionando la variable de entrada w_j con la *mejor* ($z_{jk} - c_{jk}$) que no quebre el requisito de adyacencia de las variables w con valores positivos. El proceso se repite hasta que se satisfaga la condición de optimalidad o hasta que sea imposible satisfacer la condición de base restringida, lo que ocurría primero.

El método de programación entera combinada da un óptimo global al problema aproximado, en tanto que el método de base restringida sólo puede garantizar un óptimo local. Asimismo, en ambos métodos, la solución aproximada puede no ser factible para el problema original, en cuyo caso quizás sea necesario refinar la aproximación incrementando la cantidad de puntos de quiebre.

Ejemplo 21.2-1

Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2^4$$

sujeto a

$$3x_1 + 2x_2^2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución óptima exacta de este problema, obtenida con AMPL o Solver, es $x_1 = 0$, $x_2 = 2.12132$ y $z^* = 20.25$. Para demostrar cómo se utiliza el método de aproximación, considere las funciones separables

$$f_1(x_1) = x_1$$

$$f_2(x_2) = x_2^4$$

$$g_1(x_1) = 3x_1$$

$$g_2(x_2) = 2x_2^2$$

La variable x_1 no es aproximada porque las funciones $f_1(x_1)$ y $g_1(x_1)$ ya son lineales. Considerando $f_2(x_2)$ y $g_2(x_2)$, se suponen cuatro puntos de quiebre $a_{2k} = 0, 1, 2$ y 3 para $k = 1, 2, 3$ y 4 , respectivamente. Dado que $x_2 \leq 3$, se sigue que

k	a_{2k}	$f_2(a_{2k}) = a_{2k}^4$	$g_2(a_{2k}) = 2a_{2k}^2$
1	0	0	0
2	1	1	2
3	2	16	8
4	3	81	18

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f_2(x_2) &\approx w_{21}f_2(a_{21}) + w_{22}f_2(a_{22}) + w_{23}f_2(a_{23}) + w_{24}f_2(a_{24}) \\ &\approx 0w_{21} + 1w_{22} + 16w_{23} + 81w_{24} = w_{22} + 16w_{23} + 81w_{24} \end{aligned}$$

Asimismo,

$$g_2(x_2) \approx 2w_{22} + 8w_{23} + 18w_{24}$$

Por consiguiente, el problema de aproximación es

$$\text{Maximizar } z = x_1 + w_{22} + 16w_{23} + 81w_{24}$$

sujeto a

$$3x_1 + 2w_{22} + 8w_{23} + 18w_{24} \leq 9$$

$$w_{21} + w_{22} + w_{23} + w_{24} = 1$$

$$x_1 \geq 0, w_{2k} \geq 0, k = 1, 2, 3, 4$$

Los valores de $w_{2k}, k = 1, 2, 3, 4$, deben satisfacer la condición de base restringida.

La tabla simplex inicial (con las columnas reacomodadas para proporcionar una solución inicial) se da como

Básicas	x_1	w_{22}	w_{23}	w_{24}	s_1	w_{21}	Solución
z	-1	-1	-16	-81	0	0	0
s_1	3	2	8	18	1	0	9
w_{21}	0	1	1	1	0	1	1

La variable $s_1 (\geq 0)$ es una holgura (el problema resultó tener una solución inicial evidente. En general se pueden utilizar variables artificiales, como las que se presentaron en la sección 3.4).

En la fila z , w_{24} es la variable de entrada. Debido a que w_{21} en este momento es básica y positiva, la condición de base restringida dicta que debe salir antes de que w_{24} pueda entrar a la solución. Sin embargo, de acuerdo con la condición de factibilidad, s_1 debe ser la variable de salida, lo cual significa que w_{24} no puede entrar a la solución. La siguiente mejor variable de entrada, w_{23} , requiere que w_{21} salga de la solución básica, una condición que resulta ser satisfecha por la condición de factibilidad. Así, la nueva tabla se convierte en

Básicas	x_1	w_{22}	w_{23}	w_{24}	s_1	w_{21}	Solución
z	-1	15	0	-65	0	16	16
s_1	3	-6	0	10	1	-8	1
w_{23}	0	1	1	1	0	1	1

Después, w_{24} es la variable de entrada, lo que es admisible porque w_{23} es positiva. El método simplex muestra que s_1 saldrá. Entonces,

Básicas	x_1	w_{22}	w_{23}	w_{24}	s_1	w_{21}	Solución
z	$\frac{37}{2}$	-24	0	0	$\frac{13}{2}$	-36	$22\frac{1}{2}$
w_{24}	$\frac{3}{10}$	$-\frac{6}{10}$	0	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{8}{10}$	$\frac{1}{10}$
w_{23}	$-\frac{3}{10}$	$\frac{16}{10}$	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{18}{10}$	$\frac{9}{10}$

La tabla muestra que w_{21} y w_{22} son candidatas a variable de entrada. La variable w_{21} no está adyacente a la básica w_{23} o w_{24} ; por consiguiente, no puede volverse básica. Asimismo, w_{22} no puede entrar porque w_{24} no puede salir. En consecuencia, la última tabla es la mejor solución de base restringida para el problema aproximado.

La solución óptima al problema original es

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_2 &\approx 2w_{23} + 3w_{24} = 2\left(\frac{9}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{10}\right) = 2.1 \\z &= 0 + 2.1^4 = 19.45\end{aligned}$$

El valor $x_2 = 2.1$ es aproximadamente igual al valor óptimo verdadero (= 2.12132).

Programación separable convexa. Un caso de programación separable ocurre cuando $g_{ij}(x_j)$ es convexa para todas las i y j , lo cual garantiza un espacio de soluciones convexas. Además, si $f_j(x_j)$ es convexa (minimización) o cóncava (maximización) para todas las j , entonces el problema tiene un óptimo global (vea la tabla 20.2, sección 20.2.2). En esas condiciones, se puede utilizar la siguiente aproximación simplificada.

Considere un problema de minimización y sea $f_j(x_j)$ como se muestra en la figura 21.4. Los puntos de quiebre de la función $f_j(x_j)$ son $x_j = a_{jk}$, $k = 0, 1, \dots, K_j$. Si x_{jk} define el incremento de la variable x_j en el intervalo $(a_{j,k-1}, a_{jk})$, $k = 1, 2, \dots, K_j$ y si r_{jk} es la tasa de cambio correspondiente (pendiente del segmento de línea) en el mismo intervalo. Entonces,

$$f_j(x_j) \approx \sum_{k=1}^{K_j} r_{jk} x_{jk} + f_j(a_{j0})$$

$$x_j = \sum_{k=1}^{K_j} x_{jk}$$

$$0 \leq x_{jk} \leq a_{jk} - a_{j,k-1}, k = 1, 2, \dots, K_j$$

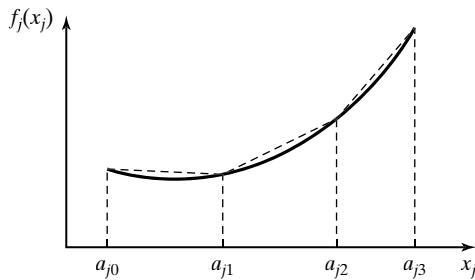


FIGURA 21.4
Aproximación lineal por partes
de una función convexa

El hecho de que $f_j(x_j)$ sea convexa garantiza que $r_{j1} < r_{j2} < \dots < r_{jK_j}$, lo cual significa que en el problema de minimización, la variable x_{jp} es más atractiva que x_{jq} con $p < q$. En consecuencia, x_{jp} siempre alcanzará su límite máximo antes de que x_{jq} pueda asumir un valor positivo.

En esencia las funciones de restricción convexas $g_{ij}(x_j)$ se representan de forma aproximada de la misma manera. Sea r_{ijk} la pendiente del k -ésimo segmento de línea correspondiente a $g_{ij}(x_j)$. Se deduce que

$$g_{ij}(x_j) \approx \sum_{k=1}^{K_j} r_{ijk} x_{jk} + g_{ij}(a_{j0})$$

Por lo tanto, el problema completo es

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{K_j} r_{jk} x_{jk} + f_j(a_{j0}) \right)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{K_j} r_{ijk} x_{jk} + g_{ij}(a_{j0}) \right) &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ 0 \leq x_{jk} &\leq a_{jk} - a_{j,k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, K_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

donde

$$r_{jk} = \frac{f_j(a_{jk}) - f_j(a_{j,k-1})}{a_{jk} - a_{j,k-1}}$$

$$r_{ijk} = \frac{g_{ij}(a_{jk}) - g_{ij}(a_{j,k-1})}{a_{jk} - a_{j,k-1}}$$

El problema de maximización se trata esencialmente del mismo modo. En este caso, $r_{j1} > r_{j2} > \dots > r_{jK_j}$, que significa que para $p < q$ la variable x_{jp} siempre alcanzará su valor máximo antes de que x_{jq} pueda asumir un valor positivo (vea la comprobación en el problema 21-11).

El nuevo problema se resuelve mediante el método simplex con variables de cota superior (sección 7.3). El concepto de base restringida no se requiere porque la convexidad (concavidad) de las funciones garantiza la selección correcta de las variables básicas.

Ejemplo 21.2-2

Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 - x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1^4 + x_2 &\leq 243 \\ x_1 + 2x_2^2 &\leq 32 \\ x_1 &\geq 2.1 \\ x_2 &\geq 3.5 \end{aligned}$$

Las funciones separables de este problema son

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= x_1, & f_2(x_2) &= -x_2 \\ g_{11}(x_1) &= 3x_1^4, & g_{12}(x_2) &= x_2 \\ g_{21}(x_1) &= x_1, & g_{22}(x_2) &= 2x_2^2 \end{aligned}$$

Estas funciones satisfacen la condición de convexidad requerida para los problemas de minimización. Las funciones $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$, $g_{12}(x_2)$ y $g_{21}(x_1)$ ya son lineales.

Los intervalos de las variables x_1 y x_2 (estimados con las restricciones) son $0 \leq x_1 \leq 3$ y $0 \leq x_2 \leq 4$. Sean $K_1 = 3$ y $K_2 = 4$. Las pendientes correspondientes a las funciones separables se determinan como sigue.

Para $j = 1$,

k	a_{1k}	$g_{11}(a_{1k}) = 3a_{1k}^4$	r_{11k}	x_{1k}
0	0	0	—	—
1	1	3	3	x_{11}
2	2	48	45	x_{12}
3	3	243	195	x_{13}

Para $j = 2$,

k	a_{2k}	$g_{22}(a_{2k}) = 2a_{2k}^2$	r_{22k}	x_{2k}
0	0	0	—	—
1	1	2	2	x_{21}
2	2	8	6	x_{22}
3	3	18	10	x_{23}
4	4	32	14	x_{24}

Entonces, el problema completo se convierte en

$$\text{Maximizar } z = x_1 - x_2$$

sujeto a

$$3x_{11} + 45x_{12} + 195x_{13} + x_2 \leq 243 \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23} + 14x_{24} \leq 32 \quad (2)$$

$$x_1 \geq 2.1 \quad (3)$$

$$x_2 \geq 3.5 \quad (4)$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_1 = 0 \quad (5)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} - x_2 = 0 \quad (6)$$

$$0 \leq x_{1k} \leq 1, \quad k = 1, 2, 3 \quad (7)$$

$$0 \leq x_{2k} \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (8)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Las restricciones 5 y 6 son necesarias para mantener la relación entre las variables originales y las nuevas. La solución óptima es

$$z = -.52, x_1 = 2.98, x_2 = 3.5, x_{11} = x_{12} = 1, x_{13} = .98, x_{21} = x_{22} = x_{23} = 1, x_{24} = .5$$

Momento de AMPL

El modelado con AMPL del problema no lineal *original* del ejemplo 21.2-2 es muy parecido al de los problemas lineales. La obtención de la solución es un asunto totalmente diferente debido al comportamiento “impredecible” de las funciones no lineales. El archivo *amplEx21.2-2.txt* presenta el modelo.

21.2.2 Programación cuadrática

Un modelo de programación cuadrática se define como

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{D}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

donde

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

La función $\mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{X}$ define una forma cuadrática (vea en el apéndice D, sección D.3, en el sitio web del libro). Se supone que la matriz \mathbf{D} es simétrica y definida negativa, es decir, que z es estrictamente cóncava. Las restricciones son lineales, lo que garantiza un espacio convexo de soluciones.

La solución de este problema se basa en las condiciones de KKT necesarias. Estas condiciones (como se muestra en la tabla 20.2, sección 20.2.2) también son suficientes porque z es cóncava y el espacio de soluciones es un conjunto convexo.

El problema de programación cuadrática se tratará sólo para el caso de maximización; pero la conversión a minimización es bastante directa. El problema puede escribirse como

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{C} \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{X} - \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}$$

Sean

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$$

$$\mathbf{U} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$$

los multiplicadores de Lagrange correspondientes a las restricciones $\mathbf{AX} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$ y $-\mathbf{X} \leq \mathbf{0}$, respectivamente. La aplicación de las condiciones de KKT produce

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{U} \geq \mathbf{0}$$

$$\nabla z - (\boldsymbol{\lambda}^T, \mathbf{U}^T) \nabla \mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$\lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\mu_j x_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$$

$$-\mathbf{X} \leq \mathbf{0}$$

Ahora

$$\nabla z = \mathbf{C} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{D}$$

$$\nabla \mathbf{G}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

Sean $\mathbf{S} = \mathbf{b} - \mathbf{AX} \geq \mathbf{0}$ las variables de holgura de las restricciones. Las condiciones se reducen a

$$-2\mathbf{X}^T \mathbf{D} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} - \mathbf{U}^T = \mathbf{C}$$

$$\mathbf{AX} + \mathbf{S} = \mathbf{b}$$

$$\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i \text{ para todas las } i \text{ y } j$$

$$\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}, \mathbf{X}, \mathbf{S} \geq \mathbf{0}$$

Debido a que $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$, la transpuesta del primer conjunto de ecuaciones puede escribirse como

$$-2\mathbf{DX} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{U} = \mathbf{C}^T$$

Por consiguiente, las condiciones necesarias pueden combinarse como

$$\begin{pmatrix} -2\mathbf{D} & \mathbf{A}^T & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

$$\mu_j x_j = 0 = \lambda_i s_i \text{ para todas las } i \text{ y } j$$

$$\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}, \mathbf{X}, \mathbf{S} \geq \mathbf{0}$$

Excepto para las condiciones $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i s_i$, las ecuaciones restantes son lineales en \mathbf{X} , $\boldsymbol{\lambda}$, \mathbf{U} y \mathbf{S} . Por lo tanto, el problema equivale a resolver un conjunto de ecuaciones lineales con las condiciones adicionales $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i s_i$.

La solución del sistema se obtiene con la fase I del método de dos fases (sección 3.4.2) con las restricciones agregadas $\lambda_i s_i = 0$ y $\mu_j x_j = 0$. Esto significa que λ_i y s_i no pueden ser positivas al mismo tiempo, ni tampoco μ_j y x_j . Ésta es la misma idea de **base restringida** que se utilizó en la sección 21.2.1.

La fase I hace que todas las variables artificiales sean iguales a cero siempre que el problema tenga un espacio de soluciones factible.

Ejemplo 21.2-3

Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Este problema se expresa en la siguiente forma matricial:

$$\text{Maximizar } z = (4, 6) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sujeto a

$$(1, 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Las condiciones de KKT se dan como

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu_1 x_1 = \mu_1 x_2 = \lambda_1 s_1 = 0$$

La tabla inicial correspondiente a la fase 1 se obtiene introduciendo las variables artificiales R_1 y R_2 y actualizando la fila objetivo.

Básicas	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	s_1	Solución
r	6	6	3	-1	-1	0	0	0	10
R_1	4	2	1	-1	0	1	0	0	4
R_2	2	4	2	0	-1	0	1	0	6
s_1	1	2	0	0	0	0	0	1	2

Iteración 1. La variable de entrada más promisoria x_1 puede hacerse básica porque $\mu_1 = 0$.

Básicas	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	s_1	Solución
R	0	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	0	0	4
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1
R_2	0	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	4
s_1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	1

Iteración 2. La variable de entrada más promisoria x_2 puede hacerse básica porque $\mu_2 = 0$.

Básicas	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	s_1	Solución
r	0	0	2	0	-1	-1	0	-2	2
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
R_1	0	0	2	0	-1	0	1	-2	2
x_1	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Iteración 3. El multiplicador λ_1 puede hacerse básico porque $s_1 = 0$.

Básicas	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	s_1	Solución
r	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
λ_1	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	1
x_2	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$

La última tabla da la solución factible óptima ($x_1^* = \frac{1}{3}, x_2^* = \frac{5}{6}$). El valor óptimo asociado de z es 4.16.

Momento de Solver

La plantilla de Solver *excelQP.xls* resuelve el ejemplo 21.2-3. Los datos se introducen de una manera similar a la programación lineal (vea la sección 2.3.1). La diferencia principal está en la forma de ingresar las funciones no lineales. Específicamente, la función objetivo no lineal se ingresa en la celda objetivo D5 como

$$=4*B10+6*C10-2*B10^2-2*B10*C10-2*C10^2$$

Las celdas cambiantes son B10:C10[$\equiv (x_1, x_2)$]. Observe que las celdas B5:C5 no se utilizan para nada en el modelo. Por legibilidad, se ingresa el símbolo NL para indicar que la restricción asociada es no lineal. También se puede especificar la no negatividad de las variables, ya sea en el cuadro de diálogo Options o bien agregando restricciones explícitas de no negatividad.

Demuestre que z es estrictamente convexa y después resuélvala mediante el algoritmo de programación cuadrática.

21.2.3 Programación estocástica

La programación estocástica maneja situaciones donde los parámetros de las restricciones son variables aleatorias y las restricciones se cumplen con una probabilidad mínima. Matemáticamente, el problema se define como

$$\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

sujeto a

$$P\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\right\} \geq 1 - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \text{ para todas las } j$$

Los parámetros a_{ij} y b_i son variables aleatorias, y la restricción i se lleva a cabo con una probabilidad mínima de $1 - \alpha_i$, $0 < \alpha_i < 1$.

Se consideran tres casos:

1. Sólo a_{ij} es aleatoria para todas las i y j .
2. Sólo b_i es aleatoria para todas las i .
3. Tanto a_{ij} como b_i son aleatorias para todas las i y j .

En los tres casos, se supone que los parámetros están normalmente distribuidos con medias y varianzas conocidas.

Caso 1. Cada a_{ij} está normalmente distribuida con media $E\{a_{ij}\}$, varianza $\text{var}\{a_{ij}\}$ y $\text{cov}\{a_{ij}, a_{i'j'}\}$ de a_{ij} y $a_{i'j'}$.

Considere

$$P\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\right\} \geq 1 - \alpha_i$$

Defina

$$h_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

La variable aleatoria h_i está normalmente distribuida con

$$E\{h_i\} = \sum_{j=1}^n E\{a_{ij}\} x_j$$

$$\text{var}\{h_i\} = \mathbf{X}^T \mathbf{D}_i \mathbf{X}$$

donde

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$$

\mathbf{D}_i = i -ésima matriz de covarianza

$$= \begin{pmatrix} \text{var}\{a_{i1}\} & \dots & \text{cov}\{a_{i1}, a_{in}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{cov}\{a_{in}, a_{i1}\} & \dots & \text{var}\{a_{in}\} \end{pmatrix}$$

Ahora,

$$P\{h_i \leq b_i\} = P\left\{\frac{h_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}} \leq \frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}}\right\} \geq 1 - \alpha_i$$

Si F es la FDA de la función de distribución normal estándar, se deduce que

$$P\{h_i \leq b_i\} = F\left(\frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}}\right)$$

Sea K_{α_i} el valor normal estándar tal que

$$F(K_{\alpha_i}) = 1 - \alpha_i$$

Entonces el enunciado $P\{h_i \leq b_i\} \geq 1 - \alpha_i$ se cumple si, y sólo si,

$$\frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}} \geq K_{\alpha_i}$$

que produce la siguiente restricción determinística no lineal:

$$\sum_{j=1}^n E\{a_{ij}\} x_j + K_{\alpha_i} \sqrt{\mathbf{X}^T \mathbf{D}_i \mathbf{X}} \leq b_i$$

Para el caso especial en que los parámetros a_{ij} son independientes, $\text{cov}\{a_{ij}, a_{i'j'}\} = 0$, y la última restricción se reduce a

$$\sum_{j=1}^n E\{a_{ij}\} x_j + K_{\alpha_i} \sqrt{\sum_{j=1}^n \text{var}\{a_{ij}\} x_j^2} \leq b_i$$

Esta restricción puede ponerse en la forma de programación lineal separable (sección 21.2.1) mediante la sustitución

$$y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n \text{var}\{a_{ij}\}x_j^2}, \text{ para todas las } i$$

Por lo tanto, la restricción original es equivalente a

$$\sum_{j=1}^n E\{a_{ij}\}x_j + K_{\alpha_i}y_i \leq b_i$$

y

$$\sum_{j=1}^n \text{var}\{a_{ij}\}x_j^2 - y_i^2 = 0$$

Caso 2. Sólo b_i es normal con media $E\{b_i\}$ y varianza $\text{var}\{b_i\}$.

Considere la restricción estocástica

$$P\left\{b_i \geq \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right\} \geq \alpha_i$$

Como en el caso 1,

$$P\left\{\frac{b_i - E\{b_i\}}{\sqrt{\text{var}\{b_i\}}} \geq \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - E\{b_i\}}{\sqrt{\text{var}\{b_i\}}}\right\} \geq \alpha_i$$

Esto puede mantenerse cierto sólo si

$$\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - E\{b_i\}}{\sqrt{\text{var}\{b_i\}}} \leq K_{\alpha_i}$$

Por lo tanto, la restricción estocástica es equivalente a la restricción lineal determinística

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq E\{b_i\} + K_{\alpha_i}\sqrt{\text{var}\{b_i\}}$$

Caso 3. Todas las a_{ij} y b_i son variables aleatorias normales.

Considere la restricción

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$$

Ésta puede escribirse como

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \leq 0$$

Debido a que todas las a_{ij} y b_i son normales, $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i$ también es normal, lo cual demuestra que la estocástica se reduce a la situación del caso 1 y se trata de una manera similar.

Ejemplo 21.2-4

Considere el problema de estocástica

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$P\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq 8\} \geq .95$$

$$P\{5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq b_2\} \geq .10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Suponga que los parámetros a_{1jj} , $j = 1, 2, 3$, son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con las siguientes medias y varianzas:

$$E\{a_{11}\} = 1, E\{a_{12}\} = 3, E\{a_{13}\} = 9$$

$$\text{var}\{a_{11}\} = 25, \text{var}\{a_{12}\} = 16, \text{var}\{a_{13}\} = 4$$

El parámetro b_2 está normalmente distribuido con media 7 y varianza 9.

A partir de las tablas normales estándar en el apéndice A (o de *excelStatTables.xls*),

$$K_{\alpha_1} = K_{.05} \approx 1.645, \quad K_{\alpha_2} = K_{.10} \approx 1.285$$

Para la primera restricción, la restricción determinística equivalente es

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 1.645\sqrt{25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2} \leq 8$$

y para la segunda restricción:

$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 7 + 1.285(3) = 10.855$$

El problema resultante se resuelve como un programa no lineal (utilizando AMPL o Solver), o bien, puede convertirse en un programa separable como:

$$y^2 = 25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2$$

El problema se convierte en

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 1.645y \leq 8$$

$$25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2 - y^2 = 0$$

$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 10.855$$

$$x_1, x_2, x_3, y \geq 0$$

El problema puede resolverse mediante programación separable. Incluso, puede utilizarse el archivo *excelCCP.xls* para resolver el problema no lineal de forma directa.

21.2.4 Método de combinaciones lineales

Este método aborda el siguiente problema, donde todas las restricciones son lineales:

$$\text{Maximizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

El procedimiento se basa en el método del ascenso más pronunciado (gradiente) (sección 21.1.2). Sin embargo, es posible que la dirección especificada por el vector gradiente no ofrezca una solución factible para el problema restringido. Asimismo, el vector gradiente no necesariamente será nulo en el punto óptimo (restringido). Por lo tanto, el método del ascenso más pronunciado debe modificarse para manejar el caso restringido.

Sea \mathbf{X}_k el punto de prueba *factible* en la iteración k . La función objetivo $f(\mathbf{X})$ puede ampliarse en la vecindad de \mathbf{X}_k mediante la serie de Taylor. Esto da

$$f(\mathbf{X}) \approx f(\mathbf{X}_k) + \nabla f(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) = (f(\mathbf{X}_k) - \nabla f(\mathbf{X}_k)\mathbf{X}_k) + \nabla f(\mathbf{X}_k)\mathbf{X}$$

El procedimiento requiere determinar un punto factible $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ tal que $f(\mathbf{X})$ se maximice sujeta a las restricciones (lineales) del problema. Debido a que $f(\mathbf{X}_k) - \nabla f(\mathbf{X}_k)\mathbf{X}_k$ es una constante, el problema para determinar \mathbf{X}^* se reduce a resolver el siguiente programa lineal:

$$\text{Maximizar } w_k(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X}_k)\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Dado que w_k se construye a partir del gradiente de $f(\mathbf{X})$ en \mathbf{X}_k , se puede asegurar una mejor solución si y sólo si $w_k(\mathbf{X}^*) > w_k(\mathbf{X}_k)$. De acuerdo con la expansión de Taylor, la condición no garantiza que $f(\mathbf{X}^*) > f(\mathbf{X}_k)$ a menos que \mathbf{X}^* se encuentre en la vecindad de \mathbf{X}_k . Sin embargo, dado que $w_k(\mathbf{X}^*) > w_k(\mathbf{X}_k)$, debe existir un punto \mathbf{X}_{k+1} en el segmento de línea $(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}^*)$ tal que $f(\mathbf{X}_{k+1}) > f(\mathbf{X}_k)$. El objetivo consiste en determinar \mathbf{X}_{k+1} . Defina

$$\mathbf{X}_{k+1} = (1 - r)\mathbf{X}_k + r\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^k + r(\mathbf{X}^* - \mathbf{X}_k), 0 < r \leq 1$$

Esto significa que \mathbf{X}_{k+1} es una **combinación lineal** de \mathbf{X}_k y \mathbf{X}^* . Debido a que \mathbf{X}_k y \mathbf{X}^* son dos puntos factibles en un espacio *convexo* de soluciones, \mathbf{X}_{k+1} también es factible. En términos del método del ascenso más pronunciado (sección 21.1.2), el parámetro r representa el tamaño del paso.

Se determina el punto \mathbf{X}_{k+1} tal que $f(\mathbf{X})$ sea máxima. Debido a que \mathbf{X}_{k+1} es una función sólo de r , \mathbf{X}_{k+1} se determina al maximizar

$$h(r) = f(\mathbf{X}_k + r(\mathbf{X}^* - \mathbf{X}_k))$$

El procedimiento se repite hasta que, en la k -ésima iteración, se tenga $w_k(\mathbf{X}^*) \leq w_k(\mathbf{X}_k)$. En este punto ya no son posibles más mejoras y el proceso termina con \mathbf{X}_k como el mejor punto solución.

Los problemas de programación lineal generados en las iteraciones sucesivas difieren sólo en los coeficientes de la función objetivo. Por lo tanto, los procedimientos de análisis postóptimo presentados en la sección 4.5 pueden utilizarse para realizar cálculos de forma eficiente.

Ejemplo 21.2-5

Considere la programación cuadrática del ejemplo 21.2-3.

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X}) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Sea el punto inicial $\mathbf{X}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, que es factible. Ahora

$$\nabla f(\mathbf{X}) = (4 - 4x_1 - 2x_2, 6 - 2x_1 - 4x_2)$$

Iteración 1

$$\nabla f(\mathbf{X}_0) = (1, 3)$$

El programa lineal asociado maximiza $w_1 = x_1 + 3x_2$ sujeta a las restricciones del problema original, lo cual da la solución óptima $\mathbf{X}^* = (0, 1)$. Los valores de w_1 en \mathbf{X}_0 y \mathbf{X}^* son iguales a 2 y 3, respectivamente. Por consiguiente, un nuevo punto de prueba se determina como

$$\mathbf{X}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + r\left[(0, 1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right] = \left(\frac{1-r}{2}, \frac{1+r}{2}\right)$$

La maximización de

$$h(r) = f\left(\frac{1-r}{2}, \frac{1+r}{2}\right)$$

produce $r_1 = 1$. Por lo tanto, $\mathbf{X}_1 = (0, 1)$ con $f(\mathbf{X}_1) = 4$.

Iteración 2

$$\nabla f(\mathbf{X}_1) = (2, 2)$$

La función objetivo del nuevo problema de programación lineal es $w_2 = 2x_1 + 2x_2$. La solución óptima de este problema produce $\mathbf{X}^* = (2, 0)$. Debido a que los valores de w_2 en \mathbf{X}_1 y \mathbf{X}^* son 2 y 4, respectivamente, se debe determinar un nuevo punto de prueba. Así,

$$\mathbf{X}_2 = (0, 1) + r[(2, 0) - (0, 1)] = (2r, 1-r)$$

La maximización de

$$h(r) = f(2r, 1-r)$$

produce $r_2 = \frac{1}{6}$. Entonces, $\mathbf{X}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$ con $f(\mathbf{X}_2) \approx 4.16$.

Iteración 3

$$\nabla f(\mathbf{X}_2) = (1, 2)$$

La función objetivo correspondiente es $w_3 = x_1 + 2x_2$. La solución óptima de este problema produce las soluciones alternativas $\mathbf{X}^* = (0, 1)$ y $\mathbf{X}^* = (2, 0)$. El valor de w_3 para ambos puntos es igual a su valor en \mathbf{X}_2 . En consecuencia no son posibles más mejoras. La solución óptima *aproximada* es $\mathbf{X}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$ con $f(\mathbf{X}_2) \approx 4.16$, que resulta ser la solución óptima exacta.

21.2.5 Algoritmo SUMT

En esta sección se presenta un método del gradiente más general. Se supone que la función objetivo $f(\mathbf{X})$ es cóncava y cada función de restricción $g_i(\mathbf{X})$ es convexa. Aún más, el espacio de soluciones debe tener un interior. Esto descarta el uso tanto implícito como explícito de restricciones de *igualdad*.

El algoritmo SUMT ((por sus siglas de *sequential unconstrained maximization technique*, técnica de maximización secuencial no restringida) se basa en la transformación del problema restringido a un problema no restringido equivalente. El procedimiento es más o menos semejante al método de multiplicadores de Lagrange. El problema transformado se resuelve entonces siguiendo el método del ascenso más pronunciado (sección 21.1.2).

Para aclarar este concepto, considere la nueva función

$$p(\mathbf{X}, t) = f(\mathbf{X}) + t \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(\mathbf{X})} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} \right)$$

donde t es un parámetro no negativo. El segundo signo de suma tiene en cuenta las restricciones de no negatividad, las cuales deben ponerse en la forma $-x_j \leq 0$ para que sean consistentes con las restricciones originales. Debido a que $g_i(\mathbf{X})$ es convexa, $\frac{1}{g_i(\mathbf{X})}$ es cóncava. Esto significa que $p(\mathbf{X}, t)$ es cóncava en \mathbf{X} . Por consiguiente, $p(\mathbf{X}, t)$ tiene un máximo único. La optimización del problema restringido original es equivalente a la optimización de $p(\mathbf{X}, t)$.

El algoritmo se inicia al seleccionar arbitrariamente un valor *no negativo* inicial para t . Se selecciona un punto inicial \mathbf{X}_0 como la primera solución de prueba. Este punto debe ser un punto interior; es decir, no debe quedar en los límites del espacio de soluciones. Dado el valor de t , se utiliza el método del ascenso más pronunciado para determinar la solución óptima correspondiente (máxima) de $p(\mathbf{X}, t)$.

El nuevo punto solución siempre será un punto interior, porque si el punto solución está cerca de los límites, al menos una de las funciones $\frac{1}{g_i(\mathbf{X})}$ o $-\frac{1}{x_i}$ adquirirá un valor negativo muy grande. Debido a que el objetivo es maximizar $p(\mathbf{X}, t)$, esos puntos de solución se descartan de forma automática. El resultado principal es que los puntos de solución sucesivos siempre serán puntos interiores. Por consiguiente, el problema siempre puede tratarse como un caso no restringido.

Una vez que se obtiene la solución óptima correspondiente a un valor dado de t , se genera un nuevo valor de t , y se repite el proceso de optimización (con el método del ascenso más pronunciado). Si t' es el valor actual de t , el siguiente valor, t'' , debe seleccionarse de modo que $0 < t'' < t'$.

El algoritmo SUMT termina cuando, para dos valores sucesivos de t , los valores *óptimos* correspondientes de \mathbf{X} obtenidos al maximizar $p(\mathbf{X}, t)$ son aproximadamente los mismos. En este punto, más ensayos producirán poca mejora.

La implementación real de SUMT implica más detalles de los que aquí se presentaron. Específicamente, la selección de un valor inicial de t es un factor importante que suele afectar la velocidad de convergencia. Además, la determinación de un punto interior inicial puede requerir técnicas especiales. Los detalles al respecto se encuentran en Fiacco y McCormick (1968).

BIBLIOGRAFÍA

- Bazaraa, M., H. Sherall y C. Shetty, *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 1993.
- Beightler, C., D. Phillips y D. Wilde, *Foundations of Optimization*, 2a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1979.
- Fletcher, R., *Practical Methods of Optimization*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 2000.
- Fiacco, A. y G. McCormick, *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, Wiley, Nueva York, 1968.
- Luenberger, D., *Linear and Nonlinear Programming*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados
21.1.1	21-1 a 21-4
21.2.1	21-5 a 21-13
21.2.2	21-14 a 21-15
21.2.3	21-16 a 21-17
21.2.4	21-18 a 21-18

- 21-1.** Use la plantilla *excelDiGold.xls* para resolver el ejemplo 21.1-1 suponiendo que $\Delta = .01$. Compare la cantidad de cálculos y la exactitud de los resultados con los de la figura 21.2.
- 21-2.** Encuentre el máximo de cada una de las siguientes funciones mediante una búsqueda dicótoma. Suponga que $\Delta = .05$.
- (a) $f(x) = \frac{1}{|(x - 3)^3|}, \quad 2 \leq x \leq 4$
- (b) $f(x) = x \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi$
- *(c) $f(x) = x \operatorname{sen} \pi x, \quad 1.5 \leq x \leq 2.5$
- (d) $f(x) = -(x - 3)^2, \quad 2 \leq x \leq 4$
- *(e) $f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4 - x, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$
- *21-3.** Demuestre que, por lo general, cuando se aplica el método de Newton-Raphson (sección 20.1.2) a una función cuadrática estrictamente cóncava convergerá en exactamente un paso. Aplique el método a la maximización de

$$f(\mathbf{X}) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

21-4. Realice cinco iteraciones para cada uno de los siguientes problemas con el método del ascenso/descenso más pronunciado. Suponga que $\mathbf{X}^0 = \mathbf{0}$ en cada caso.

(a) $\min f(\mathbf{X}) = \min f(\mathbf{X}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)$

(b) $\max f(\mathbf{X}) = \mathbf{c}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$

donde

$$\mathbf{c} = (1, 3, 5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -\frac{1}{2} \\ -3 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) $\min f(\mathbf{X}) = x_1 - x_2 + x_1^2 - x_1x_2$

21-5. Aproxime el siguiente problema como un programa entero combinado.

$$\text{Maximizar } z = e^{-x_1} + x_1 + (x_2 + 1)^2$$

sujeto a

$$x_1^2 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

***21-6.** Repita el problema 21-5 siguiendo el método de base restringida. Luego determine la solución óptima.

21-7. Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1x_2x_3$$

sujeto a

$$x_1^2 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Aproxime el problema como un programa lineal para usarlo con el método de base restringida.

***21-8.** Demuestre cómo se puede hacer separable el siguiente problema.

$$\text{Maximizar } z = x_1x_2 + x_3 + x_1x_3$$

sujeto a

$$x_1x_2 + x_2 + x_1x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

21-9. Demuestre cómo se puede hacer separable el siguiente problema.

$$\text{Minimizar } z = e^{2x_1+x_2^2} + (x_3 - 2)^2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

21-10. Demuestre cómo se puede hacer separable el siguiente problema.

$$\text{Maximizar } z = e^{x_1 x_2} + x_2^2 x_3 + x_4$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 x_3 + x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

x_4 no restringida en cuanto al signo

21-11. Demuestre que en la programación convexa separable nunca es óptimo tener $x_{ki} > 0$ cuando $x_{k-1,i}$ no se encuentra en su cota superior.

21-12. Resuelva como un problema de programación convexa separable.

$$\text{Minimizar } z = x_1^4 + x_2 + x_3^2$$

sujeto a

$$x_1^2 + x_2 + x_3^2 \leq 4$$

$$|x_1 + x_2| \leq 3$$

$$x_1, x_3 \geq 0$$

x_2 no restringida en cuanto al signo

21-13. Resuelva lo siguiente como un problema de programación convexa separable:

$$\text{Minimizar } z = (x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 6)^2$$

sujeto a

$$6x_1 + 3(x_2 + 1)^2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

***21-14.** Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = 6x_1 + 3x_2 - 4x_1 x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Demuestre que z es estrictamente cóncava y, después, resuelva el problema utilizando el algoritmo de programación cuadrática.

***21-15.** Considere el problema:

$$\text{Minimizar } z = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + x_1 - 3x_2 - 5x_3$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

***21-16.** Convierta el siguiente problema estocástico en un modelo determinístico equivalente

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$P\{a_1x_1 + 3x_2 + a_3x_3 \leq 10\} \geq 0.9$$

$$P\{7x_1 + 5x_2 + x_3 \leq b_2\} \geq 0.1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Suponga que a_1 y a_3 son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con medias $E\{a_1\} = 2$ y $E\{a_3\} = 5$ y varianzas $\text{var}\{a_1\} = 9$ y $\text{var}\{a_3\} = 16$, y que b_2 está normalmente distribuida con media 15 y varianza 25.

21-17. Considere el siguiente modelo de programación estocástica:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2^2 + x_3$$

sujeto a

$$P\{x_1^2 + a_2x_2^3 + a_3\sqrt{x_3} \leq 10\} \geq 0.9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Los parámetros a_2 y a_3 son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con medias de 5 y 2, y varianza de 16 y 25, respectivamente. Convierta el problema en una forma de programación separable (determinística).

21-18. Resuelva el siguiente problema usando el método de combinaciones lineales.

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 \leq 3$$

$$5x_1 - 3x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

APÉNDICE A

Tablas estadísticas¹

TABLA A.1 Función de distribución normal

z	$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-(\frac{1}{2})t^2} dt$									
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

¹ La hoja de cálculo *excelStatTable.xls* reemplaza las tablas estadísticas (impresas) de 12 distribuciones comunes, incluidas las presentadas en este apéndice.

TABLA A.1 Continuación

<i>z</i>	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998									
4.0	0.99997									
5.0	0.9999997									
6.0	0.999999999									

Fuente: Miller, I. y J. Freund, *Probability and Statistics for Engineers*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1985.

TABLA A.2 Valores de $t_{\alpha, v}$ (*t* de Student)

<i>v</i>	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	<i>v</i>
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20

TABLA A.2 Continuación

<i>v</i>	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	<i>v</i>
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
Inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf.

Fuente: Compendiada con la autorización de Macmillan Publishing Co. Inc., de *Statistical Methods for Research Workers*, 14a. ed. de R. A. Fisher. Derechos reservados © 1970 University of Adelaide.

TABLA A.3 Valores de $\chi^2_{\alpha, v}$ (ji cuadrada)

<i>v</i>	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.975$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	<i>v</i>
1	0.0000393	0.000157	0.000982	0.00393	3.841	5.024	6.635	7.879	1
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597	2
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.143	12.838	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.056	16.750	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548	6
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278	7
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955	8
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589	9
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188	10
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757	11
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300	12
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819	13
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319	14
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801	15
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267	16
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718	17
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156	18
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582	19
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997	20
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401	21
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796	22
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181	23
24	9.886	10.856	12.401	13.484	36.415	39.364	42.980	45.558	24
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928	25
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290	26
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645	27
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993	28
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.772	49.588	52.336	29
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672	30

Fuente: Esta tabla se basa en la tabla 8 de *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. 1, con autorización de los fiduciarios de Biometrika.

APÉNDICE B

Respuestas parciales a problemas seleccionados¹

CAPÍTULO 1

- 1-3.** 14 caídas.
1-4. (b) 17 minutos.
1-10. (b) Un pesaje.

CAPÍTULO 2

- 2-1.** (a) $-x_1 + x_2 \geq 1$
(c) $x_1 - x_2 \leq 0$
(e) $.5x_1 - .5x_2 \geq 0$
2-3. ($M_1 = 4, M_2 = 0$) toneladas/día no utilizadas
2-5. (a y e) Vea la figura B.1.
2-6. (a y d) Vea la figura B.2.

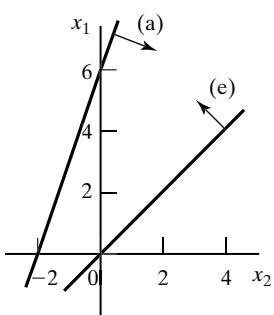


FIGURA B.1

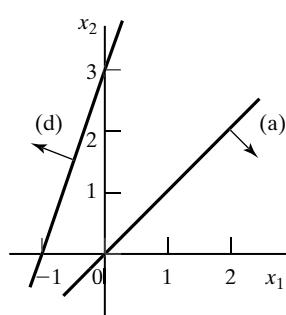


FIGURA B.2

¹ Los problemas resueltos en este apéndice aparecen en el texto marcados con un asterisco (*).

2-9. Sean

x_1 = Cantidad de unidades de *A*

x_2 = Cantidad de unidades de *B*

Maximizar $z = 20x_1 + 50x_2$ sujeto a

$$-.2x_1 + .8x_2 \leq 0, 2x_1 + 4x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 100, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $(x_1, x_2) = (80, 20)$, $z = \$2,600$

2-11. Sean

x_1 = Dólares invertidos en *A*

x_2 = Dólares invertidos en *B*

Maximizar $z = .05x_1 + .08x_2$ sujeto a

$$.75x_1 - .25x_2 \geq 0, .5x_1 - .5x_2 \geq 0$$

$$x_1 - .5x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 5000, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $(x_1, x_2) = (2500, 2500)$, $z = \$325$

2-18. Sean

x_1 = Toneladas de *C1* por hora

x_2 = Toneladas de *C2* por hora

Maximizar $z = 12000x_1 + 9000x_2$ sujeto a

$$-200x_1 + 100x_2 \leq 0, 2.1x_1 + .9x_2 \leq 20, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $(x_1, x_2) = (5.13, 10.26)$, $z = 153.846$ lb

(a) Relación óptima de *C1:C2* = .5

(b) La relación óptima es la misma, pero la generación de vapor se incrementará en 7692 lb/h.

2-22. Sean

x_1 = Cantidad de unidades de HiFi1

x_2 = Cantidad de unidades de HiFi2

Minimizar $z = 1267.2 - (15x_1 + 15x_2)$ sujeto a

$$6x_1 + 4x_2 \leq 432, 5x_1 + 5x_2 \leq 412.8$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 422.4, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $(x_1, x_2) = (50.88, 31.68)$, $z = 1238.4$ minutos ociosos.

2-28. (a) Vea la figura B.3.**2-32.** Sean

x_1 = Miles de barriles/día de Irán

x_2 = Miles de barriles/día de Dubai

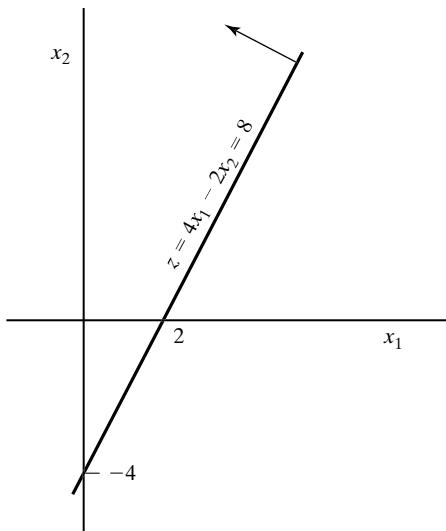


FIGURA B.3

Minimizar $z = x_1 + x_2$ sujeto a

$$-.6x_1 + .4x_2 \leq 0, .2x_1 + .1x_2 \geq 14$$

$$.25x_1 + .6x_2 \geq 30, .1x_1 + .15x_2 \geq 10$$

$$.15x_1 + .1x_2 \geq 8, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $x_1 = 55, x_2 = 30, z = 85$

2-34. Sean

x_1 = Relación de desecho de la aleación A

x_2 = Relación de desecho de la aleación B

Minimizar $z = 100x_1 + 80x_2$ sujeto a

$$.03 \leq .06x_1 + .03x_2 \leq .06, .03 \leq .03x_1 + .06x_2 \leq .05$$

$$.03 \leq .04x_1 + .03x_2 \leq .07, x_1 + x_2 = 1, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $x_1 = .33, x_2 = .67, z = \$86,667$

2-41. Sean

x_i = Dólares invertidos en el proyecto $i, i = 1, 2, 3, 4$

y_j = Dólares invertidos en el banco en el año $j, j = 1, 2, 3, 4$

Maximizar $z = y_5$ sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_4 + y_1 \leq 10,000$$

$$.5x_1 + .6x_2 - x_3 + .4x_4 + 1.065y_1 - y_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 .3x_1 + .2x_2 + .8x_3 + .6x_4 + 1.065y_2 - y_3 &= 0 \\
 1.8x_1 + 1.5x_2 + 1.9x_3 + 1.8x_4 + 1.065y_3 - y_4 &= 0 \\
 1.2x_1 + 1.3x_2 + .8x_3 + .95x_4 + 1.065y_4 - y_5 &= 0 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Solución óptima:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0, x_2 = \$10,000, x_3 = \$6000, x_4 = 0 \\
 y_1 &= 0, y_2 = 0, y_3 = \$6800, y_4 = \$33,642 \\
 z &= \$53,628.73 \text{ al inicio del año 5}
 \end{aligned}$$

- 2-44.** Sean x_{iA} = cantidad invertida en el año i con el plan A , $i = 1, 2, 3$
 x_{iB} = cantidad invertida en el año i con el plan B , $i = 1, 2, 3$

Maximizar $z = 3x_{2B} + 1.7x_{3A}$ sujeto a

$$\begin{aligned}
 x_{1A} + x_{1B} &\leq 100 \quad (\text{al inicio del año 1}) \\
 -1.7x_{1A} + x_{2A} + x_{2B} &= 0 \quad (\text{al inicio del año 2}) \\
 -3x_{1B} - 1.7x_{2A} + x_{3A} &= 0 \quad (\text{al inicio del año 3}) \\
 x_{iA}, x_{iB} &\geq 0, i = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

Solución óptima: Invertir \$100,000 en el plan A en el año 1 y \$170,000 en el plan B en el año 2, $z = \$510$. El problema tiene una solución óptima alternativa.

- 2-49.** Sea x_j = cantidad de unidades del producto j , $j = 1, 2, 3$

Maximizar $z = 30x_1 + 20x_2 + 50x_3$ sujeto a

$$\begin{aligned}
 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 4000 \\
 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 &\leq 6000 \\
 x_1 + .5x_2 + .33x_3 &\leq 1500 \\
 2x_1 - 3x_2 &= 0 \\
 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\
 x_1 &\geq 200, x_2 \geq 200, x_3 \geq 150 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Solución óptima: $x_1 = 324.32$, $x_2 = 216.22$, $x_3 = 540.54$, $z = \$41,081.08$

- 2-53.** Sean x_{ij} = Cantidad producida por la operación i en el mes j , $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$

I_{ij} = Inventario de entrada de la operación i en el mes j , $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$

Minimizar $z = \sum_{j=1}^3 (c_{1j}x_{1j} + c_{2j}x_{2j} + .2I_{1j} + .4I_{2j})$ sujeto a

$$\begin{aligned}
 .6x_{11} &\leq 800, .6x_{12} \leq 700, .6x_{13} \leq 550 \\
 .8x_{21} &\leq 1000, .8x_{22} \leq 850, .8x_{23} \leq 700
 \end{aligned}$$

$$x_{1j} + I_{1,j-1} = x_{2j} + I_{1j}, x_{2j} + I_{2,j-1} = d_j + I_{2j}, j = 1, 2, 3$$

$$I_{1,0} = I_{2,0} = 0, \text{ todas las variables } \geq 0$$

$$d_j = 500, 450, 600 \text{ para } j = 1, 2, 3$$

$$c_{1j} = 10, 12, 11 \text{ para } j = 1, 2, 3$$

$$c_{2j} = 15, 18, 16 \text{ para } j = 1, 2, 3$$

Óptima: $x_{11} = 1333.33$ unidades, $x_{13} = 216.67$, $x_{21} = 1250$ unidades, $x_{23} = 300$ unidades, $z = \$39.720$.

- 2-55.** Sea $x_i (y_i) =$ Cantidad de autobuses en turnos de 8 horas (12 horas) que inician en el periodo i . Los coeficientes 1 y 1.75 de la función objetivo son pesos de costo relativo por autobús para operaciones de 8 y 12 horas, respectivamente.

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^6 x_i + 1.75 \sum_{i=1}^6 y_i \text{ sujeto a}$$

$$x_1 + x_6 + y_1 + y_5 + y_6 \geq 4, x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + y_6 \geq 8,$$

$$x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 \geq 10, x_3 + x_4 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 7$$

$$x_4 + x_5 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 12, x_5 + x_6 + y_4 + y_5 + y_6 \geq 4$$

Todas las variables son no negativas

Solución: $x_1 = 4, x_2 = 4, x_4 = 2, x_5 = 4, y_3 = 6$, todas las demás = 0.

$z = 24.5$. Total de autobuses = 20. En el caso del turno de 8 horas,

cantidad de autobuses = 26 y comparable $z = 1 \times 26 = 26$. Por lo tanto, el turno de (8 horas + 12 horas) es mejor.

- 2-59.** Sea $x_i =$ Cantidad de estudiantes que inician en el periodo i ($i = 1$ a las 8:01 A.M., $i = 9$ a las 4:01 P.M.).

$$\text{Minimizar } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \text{ sujeto a}$$

$$x_1 \geq 2, x_1 + x_2 \geq 2, x_1 + x_2 + x_3 \geq 3,$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \geq 4, x_3 + x_4 \geq 4, x_4 + x_6 \geq 3,$$

$$x_6 + x_7 \geq 3, x_6 + x_7 + x_8 \geq 3, x_7 + x_8 + x_9 \geq 3$$

$$x_5 = 0, \text{ todas las demás variables son no negativas}$$

Solución: Contratar 2 para las 8:01, 1 para las 10:01, 3 para las 11:01 y 3 para las 2:01.

Total = 9 estudiantes

- 2-63.** Sean

$x_{ij} =$ Parte del proyecto i que se completa en el año j

$$\text{Maximizar } z = .05(4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13}) + .07(3x_{22} + 2x_{23} + x_{24})$$

$$+ .15(4x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + x_{34}) + .02(2x_{43} + x_{44})$$

sujeto a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1, x_{43} + x_{44} = 1$$

$$.25 \leq x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 1$$

$$.25 \leq x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 1$$

$$\begin{aligned}
5x_{11} + 15x_{31} &\leq 3, \quad 5x_{12} + 8x_{22} + 15x_{32} \leq 6 \\
5x_{13} + 8x_{23} + 15x_{33} + 1.2x_{43} &\leq 7 \\
8x_{24} + 15x_{34} + 1.2x_{44} &\leq 7, \quad 8x_{25} + 15x_{35} \leq 7 \\
\text{todas } x_{ij} &\geq 0
\end{aligned}$$

Óptima: $x_{11} = .6, x_{12} = .4, x_{24} = .255, x_{25} = .025, x_{32} = .267,$
 $x_{33} = .387, x_{34} = .346, x_{43} = 1, z = \$523,750$

- 2-68.** Sea x_s = lb de tornillos/paquete, x_b = libras de pernos/paquete, x_n = lb de tuercas/paquete, x_w = lb de arandelas/paquete

Minimizar $z = 1.1x_s + 1.5x_b + (\frac{70}{80})x_n + (\frac{20}{30})x_w$ sujeto a

$$\begin{aligned}
y &= x_s + x_b + x_n + x_w \\
y &\geq 1, \quad x_s \geq .1y, \quad x_b \geq .25y, \quad x_n \leq .15y, \quad x_w \leq .1y \\
(\frac{1}{10})x_b &\leq x_n \quad (\frac{1}{50})x_b \leq x_w
\end{aligned}$$

Todas las variables son no negativas

Solución: $z = \$1.12, y = 1, x_s = .5, x_b = .25, x_n = .15, x_w = .1$

- 2-71.** Sean x_A = barriles de crudo A/día, x_B = barriles de crudo B/día, x_r = barriles de gasolina regular/día, x_p = barriles de gasolina premium/día, x_j = barriles de combustible para avión/día.

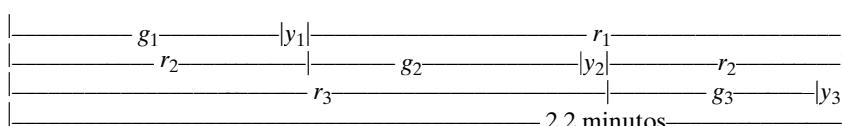
Maximizar $z = 50(x_r - s_r^+) + 70(x_p - s_p^+) + 120(x_j - s_j^+)$
 $- (10s_r^- + 15s_p^- + 20s_j^- + 2s_r^+ + 3s_p^+ + 4s_j^+)$
 $- (30x_A + 40x_B)$ sujeto a

$x_A \leq 2500, x_B \leq 3000, x_r = .2x_A + .25x_B, x_p = .1x_A + .3x_B, x_j = .25x_A + .1x_B$

$x_r + s_r^- - s_r^+ = 500, x_p + s_p^- - s_p^+ = 700, x_j + s_j^- - s_j^+ = 400$, todas las variables ≥ 0

Solución: $z = \$21,852.94, x_A = 1176.47$ barriles/día, $x_B = 1058.82, x_r = 500$ barriles/día

$x_p = 435.29$ barriles/día, $x_j = 400$ barriles/día, $s_p^- = 264.71$

- 2-81.** 

Sean g_i, y_i y r_i las duraciones de las luces verde, amarilla y roja para los automóviles que se salen de la carretera i . Todas las unidades de tiempo están en segundos. Los automóviles no avanzan con la luz amarilla.

maximizar $z = 3(500/3600)g_1 + 4(600/3600)g_2 + 5(400/3600)g_3$ sujeto a

$(500/3600)g_1 + (600/3600)g_2 + (400/3600)g_3 \leq (510/3600)(2.2 \times 60 - 3 \times 10)$

$g_1 + g_2 + g_3 + 3 \times 10 \leq 2.2 \times 60, g_1 \geq 25, g_2 \geq 25, g_3 \geq 25$

Solución: $g_1 = 25$ seg, $g_2 = 43.6$ seg, $g_3 = 33.4$ seg. Ingreso de la caseta de cobro = \$58.04/hora

CAPÍTULO 3

3-1. 2 toneladas/día y 1 tonelada/día de las materias primas $M1$ y $M2$, respectivamente.

3-4. Sea x_{ij} = unidades del producto i producidas en la máquina j .

Maximizar $z = 10(x_{11} + x_{12}) + 15(x_{21} + x_{22})$ sujeto a

$$x_{11} + x_{21} - x_{12} - x_{22} + s_1 = 5$$

$$-x_{11} - x_{21} + x_{12} + x_{22} + s_2 = 5$$

$$x_{11} + x_{21} + s_3 = 200$$

$$x_{12} + x_{22} + s_4 = 250$$

$$s_i, x_{ij} \geq 0, \text{ para todas las } i \text{ y } j$$

3-9. Sea x_j = unidades de producto $j, j = 1, 2, 3$.

Maximizar $z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 15x_4^+ - 10x_5^+$ sujeto a

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^- - x_4^+ = 80$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5^- - x_5^+ = 65$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4^-, x_4^+, x_5^-, x_5^+ \geq 0$$

Solución óptima: $x_2 = 65$ unidades, $x_4^- = 15$ unidades, todas las demás = 0, $z = \$325$.

3-11. (c) $x_1 = \frac{6}{7}, x_2 = \frac{12}{7}, z = \frac{48}{7}$.

(e) Los puntos de esquina $(x_1 = 0, x_2 = 3)$ y $(x_1 = 6 \text{ y } x_2 = 0)$ son no factibles.

3-13. Las soluciones básicas no factibles son:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{26}{3}, -\frac{4}{3}\right), (x_1, x_3) = (8, -2),$$

$$(x_1, x_4) = (6, -4), (x_2, x_3) = (16, -26),$$

$$(x_2, x_4) = (3, -13), (x_3, x_4) = (6, -16)$$

3-18. (a) Sólo (A, B) representan iteraciones simplex sucesivas porque los puntos de esquina A y B son adyacentes. En todos los demás pares, los puntos de esquina asociados son no adyacentes.

(c) (i) Sí. (ii) No, A y E son no adyacentes. (iii) No, la ruta regresa al punto de esquina anterior, A .

3-20. (a) x_3 entra con el valor 1, $z = 3$ en el punto de esquina D .

3-23.

Nueva variable básica	x_1	x_2	x_3	x_4
Valor	1.5	1	0	.8
Variable de salida	x_7	x_7	x_8	x_4

3-26. (b) x_2, x_5 y x_6 pueden incrementar el valor de z . Si x_2 entra, x_8 sale y $\Delta z = 5 \times 4 = 20$. Si x_5 entra, x_1 sale y $\Delta z = 0$ porque x_5 es igual a 0 en la nueva solución. Si x_6 entra, ninguna variable sale porque todos los coeficientes de restricción de x_6 son menores o iguales a cero. $\Delta z = \infty$ porque x_6 puede incrementarse a un valor infinito sin provocar no factibilidad.

3-29. El segundo mejor valor de $z = 20$ ocurre cuando s_2 se hace básica.

3-36. (a) Minimizar $z = (8M - 4)x_1 + (6M - 1)x_2 - Ms_2 - Ms_3 = 10M$

(b) Minimizar $z = (3M - 4)x_1 + (M - 1)x_2 = 3M$

3-39. La tabla de inicio es

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	-1	-12	0	0	-8
x_3	1	1	1	0	4
x_4	1	4	0	1	8

3-40. Óptima: $x_1 = 0, x_2 = 7/4, x_3 = 0, x_4 = 33/4, z = 7/2$.

3-41. Óptima: $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1, z = 5$.

3-43. Siempre minimice la suma de las variables artificiales porque la suma representa la cantidad no factible en el problema.

3-49. Cualquier variable no básica con coeficientes objetivo distintos de cero al final de la fase I no puede hacerse positiva en la fase II, porque ello significará que el valor objetivo óptimo en la fase I será positivo, es decir, una solución no factible en la fase I.

3-51. (a) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$.

(b) 1 en A , 1 en B , $C_2^4 = 6$ en C y 1 en D .

3-55. Solución óptima básica alternativa: $(0, 0, \frac{10}{3}), (0, 5, 0), (1, 4, \frac{1}{3})$. Solución óptima alternativa no básica:

$$(\alpha_3, 5\alpha_2 + 4\alpha_3, \frac{10}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_3), \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, 2, 3.$$

3-59. (a) El espacio de soluciones no está acotado en la dirección de x_2 .

(b) El valor objetivo no está acotado porque cada unidad de incremento en x_2 (no acotada) incrementa z en 10.

3-61. Lo máximo que se puede producir son 275 unidades.

3-64. Sean

x_1 = Cantidad de sombreros tipo 1 por día,

x_2 = Cantidad de sombreros tipo 2 por día.

Maximizar $z = 8x_1 + 5x_2$ sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1 \leq 150, x_2 \leq 200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(a) Vea la figura B.4: $x_1 = 100, x_2 = 200, z = \1800 en el punto B .

(b) \$4 por sombrero tipo 2 en el intervalo $(200, 500)$.

(c) Ningún cambio porque el precio dual es de \$0 por unidad en el intervalo $(100, \infty)$.

(d) \$1 por unidad en el intervalo $(100, 400)$. Incremento máximo = 200 del tipo 2.

3-67. (a) $0 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$.

(b) Nueva $\frac{c_1}{c_2} = 1$. La solución no cambia.

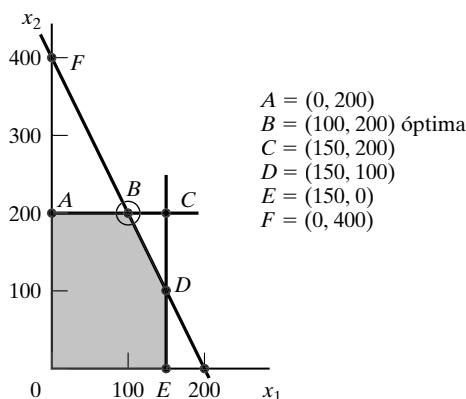


FIGURA B.4

- 3-69.** (a) Sí, porque el ingreso adicional por min = \$1 (hasta por 10 minutos de tiempo extra) excede el costo adicional de \$.83/min.
 (b) El ingreso adicional es de \$2/min (por hasta 400 min de tiempo extra) = \$240 por 2 horas. Costo adicional por 2 horas = \$110. Ingreso neto = \$130.
 (c) No, su precio dual es cero porque el recurso ya es abundante.
 (d) $D_1 = 10$ min. Precio dual = \$1/min para $D_1 \leq 10$. $x_1 = 0, x_2 = 105, x_3 = 230$, ingreso neto = $(\$1350 + \$1 \times 10 \text{ min}) - (\frac{\$40}{60} \times 10 \text{ min}) = \1353.33 .
 (e) $D_2 = -15$. Precio dual = \$2/min con $D_2 \geq -20$. Reducción del ingreso = \$30. Reducción del costo = \$750. No se recomienda.

3-73. Sean

$$x_1 = \text{minutos de radio}, x_2 = \text{minutos de TV}, x_3 = \text{anuncios en el periódico}$$

Maximizar $z = x_1 + 50x_2 + 5x_3$ sujeto a

$$15x_1 + 300x_2 + 50x_3 + s_1 = 10,000, x_3 - S_2 = 5$$

$$x_1 + s_3 = 400, -x_1 + 2x_2 + s_4 = 0, x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$s_1, S_2, s_3, s_4 \geq 0$$

- (a) $x_1 = 59.09$ min, $x_2 = 29.55$ min, $x_3 = 5$ anuncios en el periódico, $z = 1561.36$.
 (b) Con TORA, $z + .158s_1 + 2.879S_2 + 0s_3 + 1.364s_4 = 156.364$. Los precios duales de las restricciones respectivas son .158, -2.879, 0 y 1.36. El límite inferior impuesto a los anuncios en periódicos puede reducirse porque su precio dual es negativo (= -2.879). No hay ventaja al incrementar el límite superior de los minutos de radio, ya que su precio dual es cero (el límite actual ya es abundante).
 (c) Con TORA, $x_1 = 59.9091 + .00606D_1 \geq 0$, $x_3 = 5$, $x_2 = 29.54545 + .00303D_1 \geq 0$, $s_3 = 340.90909 - .00606D_1 \geq 0$. Por lo tanto, el precio dual = .158 en el intervalo $-9750 \leq D_1 \leq 56250$. Se recomienda un incremento de 50% en el presupuesto ($D_1 = \$5000$) porque el precio dual es positivo.

- 3-78.** (a) Escaso: Recurso del resistor y capacitor; abundante: recurso del chip.
 (b) Los valores por unidad de resistor, capacitor y chips son \$.125, \$.25 y \$.0.
 (e) Cambiar $D_3 = 350 - 800 = -450$ queda afuera del intervalo de factibilidad $D_3 \geq -400$. Por consiguiente, el problema debe resolverse de nuevo.

- 3-80.** (b) Solución $x_1 = x_2 = 2 + \frac{\Delta}{3}$ es factible para todas las $\Delta > 0$. Para $0 < \Delta \leq 3$, $r_1 + r_2 = \frac{\Delta}{3} \leq 1 \Rightarrow$ factibilidad confirmada. Para $3 \leq \Delta < 6$, $r_1 + r_2 = \frac{\Delta}{3} > 1 \Rightarrow$ factibilidad no confirmada. Para $\Delta > 6$, el cambio queda afuera de los intervalos de D_1 y D_2 .

- 3-82.** (a) x_1 = latas de A1, x_2 = latas de A2, x_3 = latas de BK.

Maximizar $z = 80x_1 + 70x_2 + 60x_3$ sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, x_1 \geq 100, 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq 0$$

Óptima: $x_1 = 166.67, x_2 = 333.33, x_3 = 0, z = 36666.67$.

- (b) Con TORA, el costo reducido por lata de BK = 10. El precio debería incrementarse más de 10 centavos.
 (c) $d_1 = d_2 = d_3 = -5$ centavos. Con TORA, los costos reducidos de las variables no básicas son

$$x_3: 10 + d_2 - d_3 \geq 0, \text{satisfecha}$$

$$s_1: 73.33 + .67d_2 + .33d_1 \geq 0, \text{satisfecha}$$

$$s_3: 1.67 - .17d_2 + .17d_1 \geq 0, \text{satisfecha}$$

La solución no cambia.

- 3-85.** (a) x_i = Cantidad de unidades del motor $i, i = 1, 2, 3, 4$.

Maximizar $z = 60x_1 + 40x_2 + 25x_3 + 30x_4$ sujeto a

$$8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 8000, x_1 \leq 500, x_2 \leq 500$$

$$x_3 \leq 800, x_4 \leq 750, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Óptima: $x_1 = 500, x_2 = 500, x_3 = 375, x_4 = 0, z = \$59,375$

- (b) Con TORA, $8.75 + d_2 \geq 0$. El precio del motor tipo 2 se puede reducir hasta en \$8.75.
 (c) $d_1 = -\$15, d_2 = -\$10, d_3 = -\$6.25, d_4 = -\7.50 . Con TORA,

$$x_4: 7.5 + 1.5d_3 - d_4 \geq 0, \text{satisfecha}$$

$$s_1: 6.25 + .25d_3 \geq 0, \text{satisfecha}$$

$$s_2: 10 - 2d_3 + d_1 \geq 0, \text{satisfecha}$$

$$s_3: 8.75 - 1.25d_3 + d_2 \geq 0, \text{satisfecha}$$

La solución no cambia, pero z se reducirá en 25%.

- (d) Costo reducido de $x_4 = 7.5$. El precio aumenta más de \$7.50.

- 3-93.** El precio dual para la restricción de inversión $x_{1A} + x_{1B} \leq 100$ es de \$5.10 por dólar invertido para cualquier cantidad de inversión.

- 3-97.** (a) El precio dual de la materia prima A es de \$10.27 por lb. El costo de \$12.00 por lb excede el ingreso esperado. Por consiguiente, no se recomienda la compra de materia prima A adicional.

- (b) El precio dual de la materia prima B es de \$0. El recurso ya es abundante y no se justifica ninguna compra adicional.

CAPÍTULO 4

- 4-2.** Sean y_1, y_2 y y_3 las variables duales.

Maximizar $w = 3y_1 + 5y_2 + 4y_3$ sujeto a

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 15, 2y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 12$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{ no restringidas}$$

- 4-4. (c)** Sean y_1 y y_2 las variables duales.

Maximizar $z = 5y_1 + 6y_2$ sujeto a

$$2y_1 + 3y_2 = 1, y_1 - y_2 = 1$$

$$y_1, y_2 \text{ no restringidas}$$

- 4-5.** La restricción dual asociada con las variables artificiales es $y_2 \geq -M$. Matemáticamente, $M \rightarrow \infty \Rightarrow y \geq -\infty$, lo cual equivale a que y_2 no esté restringida.

- 4-7. (a)** \mathbf{AV}_1 no está definida.

$$(e) \mathbf{V}_2\mathbf{A} = (-14 \ -32)$$

- 4-8.**

$$(a) \text{ Inversa} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 4-12.** Sean y_1 y y_2 las variables duales.

Minimizar $w = 30y_1 + 40y_2$ sujeto a

$$y_1 + y_2 \geq 5, 5y_1 - 5y_2 \geq 2, 2y_1 - 6y_2 \geq 3$$

$$y_1 \geq -M (\Rightarrow y_1 \text{ no restringida}), y_2 \geq 0$$

Solución: $y_1 = 5, y_2 = 0, w = 150$.

- 4-15.** Sean y_1 y y_2 las variables duales.

Minimizar $w = 3y_1 + 4y_2$ sujeto a

$$y_1 + 2y_2 \geq 1, 2y_1 - y_2 \geq 5, y_1 \geq 3$$

$$y_2 \text{ no restringida}$$

Solución: $y_1 = 3, y_2 = -1, w = 5$

4-17. (a) $(x_1, x_2) = (3, 0)$, $z = 15$, $(y_1, y_2) = (3, 1)$, $w = 14$. Intervalo = $(14, 15)$

4-18. (a) Aun cuando $z = w = 17$, las soluciones no pueden ser óptimas porque no son factibles.

4-20. (a) Factibilidad: $(x_2, x_4) = (3, 15) \Rightarrow$ factible.

Optimalidad: costos reducidos de no básicos $(x_1, x_3) = (0, 2) \Rightarrow$ óptima.

4-22.

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{12}{5}$
x_1	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_5	0	0	-1	1	1	0

La solución es óptima y factible.

4-25. Valor objetivo: A partir del primal, $z = c_1x_1 + c_2x_2$ y a partir del dual, $w = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$, $b_1 = 4$, $b_2 = 8$, $c_1 = 2$, $c_2 = 5 \Rightarrow z = w = 34$.

4-29. (a) Sean (x_1, x_2, x_3, x_4) = unidades diarias de SC320, SC325, SC340 y SC370

Maximizar $z = 9.4x_1 + 10.8x_2 + 8.75x_3 + 7.8x_4$ sujeto a

$$10.5x_1 + 9.3x_2 + 11.6x_3 + 8.2x_4 \leq 4800$$

$$20.4x_1 + 24.6x_2 + 17.7x_3 + 26.5x_4 \leq 9600$$

$$3.2x_1 + 2.5x_2 + 3.6x_3 + 5.5x_4 \leq 4700$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 4500$$

$$x_1 \geq 100, x_2 \geq 100, x_3 \geq 100, x_4 \geq 100$$

- (b) Sólo se puede incrementar la capacidad del estañado porque su precio dual es positivo ($= .4944$).
- (c) Los precios duales correspondientes a las cotas inferiores son ≤ 0 ($-.6847, -1.361, 0$ y -5.3003), lo cual significa que las cotas tienen un efecto adverso en la rentabilidad.
- (d) El precio dual del estañado es de \$.4944/min válido en el intervalo $(8920, 10201.72)$, el cual corresponde a un incremento máximo de la capacidad de sólo 6.26%.

4-32. El nuevo camión de bomberos es rentable debido a su costo reducido = -2.

4-33. Las piezas PP3 y PP4 no forman parte de la solución óptima. Los costos reducidos actuales son .1429 y 1.1429. Por consiguiente, la tasa de deterioro del ingreso por unidad es de \$.1429 para PP3 y de \$1.1429 para PP4.

4-35. (b) No, porque el punto extremo E (intermedio) es factible, y las iteraciones simplex duales deben permanecer no factibles hasta que se alcance el punto extremo óptimo.

4-38. (c) Agregue la restricción artificial $x_1 \leq M$. El problema no tiene una solución factible.

4-45. Sea Q la cantidad de alimento semanal en lb (= 5200, 9600, 15000, 20000, 26000, 32000, 38000, 42000, correspondientes a las semanas 1, 2, ..., y 8). Solución óptima: piedra caliza = .028Q, maíz = .649Q y soya = .323Q. Costo = .81221Q.

4-48. (a) La restricción adicional es redundante.

4-51. (a) Nuevos valores duales = $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$. La solución actual permanece óptima.

$$(c) \text{ Nuevos valores duales} = \left(-\frac{1}{8}, \frac{11}{4}, 0, 0\right), z - .125s_1 + 2.75s_2 = 13.5.$$

Nueva solución: $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 4, z = 14$

4-53. $\frac{p}{100}(y_1 + 3y_2 + y_3) - 3 \geq 0$. Para $y_1 = 1, y_2 = 2$ y $y_3 = 0, p \geq 42.86\%$.

4-55. (a) Costo reducido de los camiones de bomberos = $3y_1 + 2y_2 + 4y_3 - 5 = 2 > 0$. Los camiones de bomberos no son rentables.

CAPÍTULO 5

5-4. Asigne un costo muy alto, M , a la ruta de Detroit al destino ficticio.

5-6. (a y b) Use $M = 10,000$. La solución se muestra en negritas. Costo total = \$49,710.

	1	2	3	Oferta
Planta 1	600	700	400	25
Planta 2	320	300	350	40
Planta 3	23	17		
Excede en planta 4	500	480	450	30
	1000	1000	M	13
Demanda	36	42	30	

(c) Costo excedente en la ciudad 1 = \$13,000.

5-9. La solución (en millones de galones) se muestra en negritas. En el área 2 habrá un faltante de 2 millones de galones. Costo total = \$304,000.

	A1	A2	A3	Oferta
Refinería 1	12	18	M	6
Refinería 2	4	2		
Refinería 3	30	10	8	5
Ficticia	20	25	12	6
	M	50	50	2
Demanda	4	8	7	

5-15. Costo total = \$804. El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

Día	Servicio de afilado				
	Nuevas	Nocturno	a 2 días	a 3 días	Desecho
Lunes	24	0	6	18	0
Martes	12	12	0	0	0
Miércoles	2	14	0	0	0
Jueves	0	0	20	0	0
Viernes	0	14	0	0	4
Sábado	0	2	0	0	12
Domingo	0	0	0	0	22

5-18. Costo total = \$190,040. El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

Periodo	Capacidad	Cantidad producida	Entrega
1	500	500	400 para el (periodo) 1 y 100 para el 2
2	600	600	200 para el 2, 220 para el 3 y 180 para el 4
3	200	200	200 para el 3
4	300	200	200 para el 4

5-22. (a) Noroeste: costo = \$42. Costo mínimo = costo \$37. Vogel: costo = \$37.

5-27. (a) Costo = \$1475.

$$(e) c_{12} \geq 3, c_{13} \geq 8, c_{23} \geq 13, c_{31} \geq 7.$$

5-36. Use el código (ciudad, fecha) para definir las filas y columnas del problema de asignación. Ejemplo: La asignación (D, 3)-(A, 7) significa salir de Dallas el 3 de junio y regresar de Atlanta el 7 de junio a un costo de \$400. La solución se muestra en negritas. (6/3: D → A y 6/28: A → D 6/7: A → D y 6/10: D → A 6/12: A → D y 6/17: D → A, 6/21: A → D y 6/25: D → A). Todos los boletos cubren un fin de semana, costo = \$1180. El problema tiene soluciones óptimas alternativas (por ejemplo, las asignaciones en diagonal subrayadas).

	(A, 7)	(A, 12)	(A, 21)	(A, 28)
(D, 3)	400	300	300	<u>280</u>
(D, 10)	<u>300</u>	400	<u>300</u>	300
(D, 17)	300	<u>300</u>	400	300
(D, 25)	<u>300</u>	300	<u>300</u>	400

5-37. Asignación óptima: I-d, II-c, III-a, IV-b.

CAPÍTULO 6

6-1. Para la red (i): (a) 1-3-4-2. (b) 1-5-4-3-1. (c y d) Vea la figura B.5.

6-5. Nombre los cuadrados en secuencia como A, B, ..., H comenzando en el cuadrado superior izquierdo en la primera fila. Cada cuadrado es un nodo con los cuadrados adyacentes conectados por arcos. Cada uno de los nodos D y E tiene el máximo de arcos que emanan y, por consiguiente, deben ser reemplazados con los dos números que tienen más números no adyacentes —a saber, los números 1 y 8. Este problema tiene más de una solución. Vea la figura B.6.

6-8. (a) 1-2, 2-5, 5-6, 6-4, 4-3. Longitud total = 14 millas.

6-11. Alta presión: 1-2-3-4-6. Baja presión: 1-5-7 y 5-9-8.

6-13. Comprar un automóvil nuevo en los años 1 y 4. Costo total = \$8900. Vea la figura B.7.

6-16. Para el arco $(i, v_i) - (i + 1, v_{i+1})$, defina $p(q)$ = valor (unidades del artículo i). Solución: Seleccione una unidad de cada uno de los artículos 1 y 2, valor total = \$80. Vea la figura B.8.

6-18. (c) Elimine todos los nodos excepto 4, 5, 6, 7 y 8. Distancia más corta = 8 asociada con las rutas alternativas 4-5-6-8 y 4-6-8.

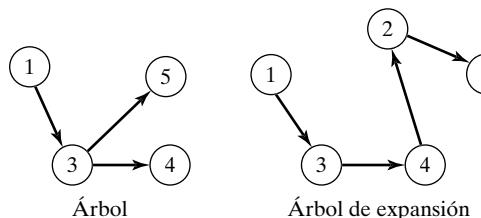


FIGURA B.5

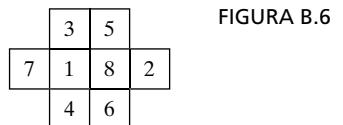


FIGURA B.6

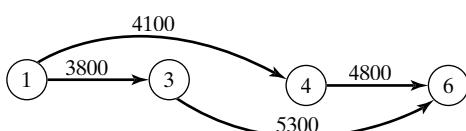


FIGURA B.7

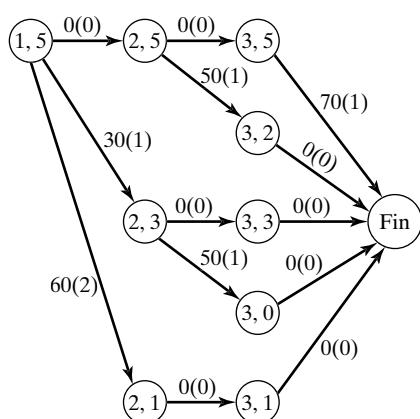


FIGURA B.8

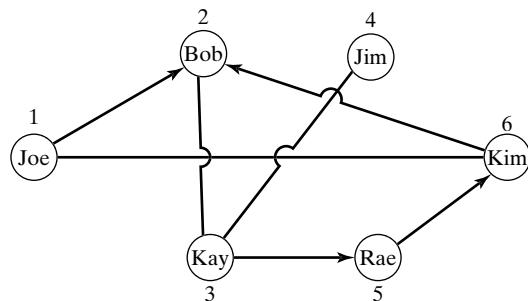


FIGURA B.9

- 6-21.** (a) 5-4-2-1, distancia = 12.
- 6-24.** En la figura B.9 se resume la solución. Cada arco tiene longitud unitaria. Las flechas indican las rutas en una dirección. Solución del ejemplo: Bob a Joe: Bob-Kay-Rae-Kim-Joe. Mayor cantidad de contactos = 4.
- 6-25.** (a) El lado derecho de las ecuaciones correspondientes a los nodos 1 y 5 son 1 y -1, respectivamente, todos los demás = 0. Solución óptima: 1-3-5 o 1-3-4-5, distancia = 90.
- 6-28.** Corte 1:1-2, 1-4, 3-4, 3-5, capacidad = 60.
- 6-29.** (a) Capacidades excedentes: arco (2-3) = 40, arco (2-5) = 10, arco (4-3) = 5.
 (b) Nodo 2: 20 unidades, nodo 3: 30 unidades, nodo 4: 20 unidades.
 (c) No, porque no hay capacidad excedente en fuera del nodo 1.
- 6-35.** La máxima cantidad de tareas es 4. Rif-3, Mai-1, Ben-2, Kim-5. Ken no tiene actividad alguna.
- 6-44.** Vea la figura B.10.
- 6-52.** Ruta crítica: 1-3-4-5-6-7. Duración = 19.
- 6-60.** (a) 10. (b) 5. (c) 0.
- 6-62.** (a) Ruta crítica: 1-3-6 (B-F), duración = 45 días.
 (b) A, D y E.
 (c) Cada una de las actividades C, D y G se demorarán 5 días. E no se verá afectada.
 (d) Equipo mínimo = 2 unidades.

CAPÍTULO 7

- 7-2.** Los puntos $(1, 0)$ y $(0, 2)$ están en Q , pero $\lambda(1, 0) + (1 - \lambda)(0, 2) = (\lambda, 2 - 2\lambda)$ no quedan en Q para $0 < \lambda < 1$.

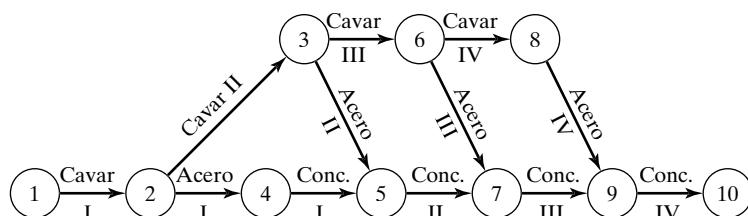


FIGURA B.10

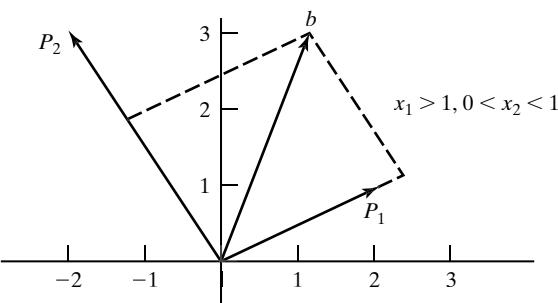


FIGURA B.11

- 7-6.** (b) Solución única con $x_1 > 1$ y $0 < x_2 < 1$. Vea la figura B.11.
 (d) Una cantidad infinita de soluciones.
 (f) Ninguna solución.
- 7-7.** (a) Base porque $\det \mathbf{N} = -4$.
 (d) No es una base porque una base debe incluir exactamente 3 vectores independientes.

7-9.

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} .3 & -.2 \\ .1 & .1 \end{pmatrix}$$

Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	1.5	-.5	0	0	21.5
x_3	0	.5	1	0	2
x_4	.5	0	0	1	1.5

La solución es factible pero no óptima.

- 7-12.** $z = c_1x_1 + c_2x_2$, $c_1 = 2$, $c_2 = 5$ a partir de la tabla, óptimo $z = 34$. Determine la RHS $(b_1, b_2, b_3) = (4, 6, 8)$.

Maximizar $z = 2x_1 + 5x_2$ sujeto a $x_1 \leq 4$, $x_2 \leq 6$, $x_1 + x_2 \leq 8$, $x_1, x_2 \geq 0$

- 7-14.** (a) \mathbf{P}_1 debe salir.
 (b) $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4)$ es una base factible.

- 7-15.** Para el vector básico \mathbf{X}_B , se tiene

$$\{z_j - c_j\} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{c}_B = \mathbf{c}_B \mathbf{I} - \mathbf{c}_B = \mathbf{c}_B - \mathbf{c}_B = \mathbf{0}$$

- 7-20.** El número de puntos extremos adyacentes es $n - m$, suponiendo que no hay degeneración.

- 7-23.** En el caso de degeneración, la cantidad de puntos extremos es menor que la de soluciones básicas, de lo contrario son iguales.

- 7-24.** (a) nueva $x_j = \frac{1}{\alpha}$ antigua x_j .
 (b) nueva $x_j = \frac{\beta}{\alpha}$ antigua x_j .

- 7-28.** (b) $(x_1, x_2, x_3) = (1.5, 2, 0)$, $z = 5$.

- 7-33.** $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 1, .75, 1, 0, 1)$, $z = 22$.

- 7-41.** Maximizar $w = \mathbf{Y}\mathbf{b}$ sujeto a $\mathbf{YA} \leq \mathbf{c}$, $\mathbf{Y} \geq \mathbf{0}$.

- 7-46.** Método 1: $(b_1, b_2, b_3) = (4, 6, 8) \Rightarrow$ valor objetivo dual = 34.
 Método 2: $(c_1, c_2) = (2, 5) \Rightarrow$ valor objetivo primal = 34.

- 7-47.** Minimizar $w = \mathbf{Y}\mathbf{b}$ sujeto a $\mathbf{YA} = \mathbf{C}$, \mathbf{Y} no restringida.

7-49. $-\frac{2}{7} \leq t \leq 1$

- 7-50.** (a)

Solución básica	Intervalo aplicable de t
$(x_2, x_3, x_6) = (5, 30, 10)$	$0 \leq t \leq \frac{1}{3}$
$(x_2, x_3, x_1) = \left(\frac{25}{4}, \frac{90}{4}, 5\right)$	$\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{5}{12}$
$(x_2, x_4, x_1) = \left(\frac{5}{2}, 15, 20\right)$	$\frac{5}{12} \leq t \leq \infty$

- 7-53.** $\{z_j - c_j\}_{j=1,4,5} = (4 - \frac{3t}{2} - \frac{3t^2}{2}, 1 - t^2, 2 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2})$. La base permanece óptima en $0 \leq t \leq 1$.

- 7-54.** (a) $t_1 = 10$, $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$

- 7-55.** En $t = 0$, $(x_1, x_2, x_4) = (.4, 1.8, 1)$. Permanece básica en $0 \leq t \leq 1.5$. Ninguna solución factible con $t > 1.5$.

CAPÍTULO 8

- 8-1.** G_5 : Minimizar s_5^+ , $55x_p + 3.5x_f + 5.5x_s - .0675x_g + s_5^- - s_5^+ = 0$.

- 8-3.** Sea x_1 = Cantidad de estudiantes del primer año en el estado, x_2 = estudiantes de primer año de fuera del estado, x_3 = estudiantes de primer año internacionales.

$$G_i: \text{Minimizar } s_i^-, i = 1, 2, \dots, 5, \text{ sujeto a } x_1 + x_2 + x_3 + s_1^- - s_1^+ = 1200,$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + s_2^- - s_2^+ = 0, -.1x_1 - .1x_2 + .9x_3 + s_3^- - s_3^+ = 0,$$

$$.125x_1 - .05x_2 - .556x_3 + s_4^- - s_4^+ = 0, -.2x_1 + .8x_2 - .2x_3 + s_5^- - s_5^+ = 0$$

Todas las variables son no negativas.

- 8-5.** Sea x_j = Cantidad de corridas de producción en el turno j , $j = 1, 2, 3$.

$$\text{Minimizar } z = s_1^- + s_1^+, \text{ sujeto a } -100x_1 + 40x_2 - 80x_3 + s_1^- - s_1^+ = 0$$

$$4 \leq x_1 \leq 5, 10 \leq x_2 \leq 20, 3 \leq x_3 \leq 20$$

- 8-12.** Función objetivo: Minimizar $z = s_1^- + s_2^- + s_3^- + s_4^+ + s_5^+$

Solución: $x_p = .0201$, $x_f = .0457$, $x_s = .0582$, $x_g = 2$ centavos, $s_5^+ = 1.45$

El impuesto sobre la gasolina se queda a \$1.45 millones del objetivo.

- 8-15.** x_1 = lb de piedra caliza/día, x_2 = libra de maíz/día, x_3 = lb de soya/día.

Función objetivo: Minimizar $z = s_1^- + s_2^+ + s_3^- + s_4^- + s_5^+$

Solución: $x_1 = 166.08$ lb, $x_2 = 2778.56$ lb, $x_3 = 3055.36$ lb, $z = 0$. El problema tiene soluciones óptimas alternativas. Se satisfacen todos los objetivos, pero los objetivos 3 y 4 se sobresatisfacen.

- 8-18.** x_j = Cantidad de unidades del producto j , $j = 1, 2$.

Asigne un peso relativamente alto a las restricciones de cuota.

Función objetivo: Minimizar $z = 100s_1^- + 100s_2^- + s_3^+ + s_4^+$

Solución: $x_1 = 80, x_2 = 60, s_3^+ = 100 \text{ min}, s_4^+ = 120 \text{ min}$.

Las cuotas de producción se pueden satisfacer con 100 minutos de tiempo extra para la máquina 1 y 120 minutos de tiempo extra para la máquina 2.

- 8-23.** Solución de $G_1: x_p = .01745, x_f = .0457, x_s = .0582, x_g = 21.33,$

$s_4^+ = 19.33$, todas las demás = 0. Los objetivos G_1, G_2 y G_3 se satisfacen; G_4 no.

Problema G_4 : Las mismas restricciones que G_1 más $s_1^- = 0, s_2^- = 0, s_3^- = 0$.

Solución de $G_4: x_p = .0201, x_f = .0457, x_s = .0582, x_g = 2, s_5^+ = 1.45$. Todas las demás variables = 0.

El objetivo de G_5 no se satisface.

Problema G_5 : Igual que G_4 más $s_4^+ = 0$.

Solución de G_5 : Igual que G_4 , lo cual significa que el objetivo 5 no se puede satisfacer ($s_5^+ = 1.45$).

CAPÍTULO 9

- 9-3.** x_{ij} = Cantidad de botellas de tipo i asignadas al individuo j , donde $i = 1$ (llena), 2 (medio llena), 3 (vacía).

Restricciones:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 7, x_{21} + x_{22} + x_{23} = 7, x_{31} + x_{32} + x_{33} = 7$$

$$x_{11} + .5x_{21} = 3.5, x_{12} + .5x_{22} = 3.5, x_{13} + .5x_{23} = 3.5$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7, x_{12} + x_{22} + x_{32} = 7, x_{13} + x_{23} + x_{33} = 7$$

Todas las x_{ij} son enteros no negativos.

Solución: Use una función objetivo ficticia.

Estado	Cantidad de botellas asignadas al individuo		
	1	2	3
Llena	1	3	3
Medio llena	5	1	1
Vacía	1	3	3

- 9-6.** y = Suma original de dinero. x_j = Cantidad tomada en la noche $j, j = 1, 2, 3$.

x_4 = Cantidad entregada a cada marinero por el primer oficial.

Minimizar $z = y$ sujeto a $3x_1 - y = 2, x_1 + 3x_2 - y = 2, x_1 + x_2 + 3x_3 - y = 2$

$y - x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 1$. Todas las variables son enteros no negativos.

Solución: $y = 79 + 81n, n = 0, 1, 2, \dots$ Mínima $y = 79$.

- 9-10.** CD1: 5, 6 y 8 (27 MB). CD2: 1, 2, 3, 4 y 7 (28 MB). El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

- 9-12.** $x_{ij} = 1$ si el estudiante i selecciona el curso j , y cero si no es así; c_{ij} = calificación de preferencia

asociada; C_j = capacidad del curso j . Maximizar $z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^6 c_{ij} x_{ij}$ sujeto a

$$\sum_{j=1}^6 x_{ij} = 2, i = 1, 2, \dots, 10, \sum_{i=1}^{10} x_{ij} \leq C_j, j = 1, 2, \dots, 6$$

Solución: Curso 1: estudiantes (2, 4, 9), 2: (2, 8), 3: (5, 6, 7, 9), 4: (4, 5, 7, 10), 5: (1, 3, 6, 8, 10), 6: (1, 3). Puntuación total = 1775.

- 9-19.** Sea $x_j = 1$ si se selecciona la ruta j y 0 si no es así. Distancia total de la ruta (ABC, 1, 2, 3, 4, ABC) = $10 + 32 + 4 + 15 + 9 = 80$ millas.

Minimizar $z = 80x_1 + 50x_2 + 70x_3 + 52x_4 + 60x_5 + 44x_6$ sujeto a

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_6 \geq 1, x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 1, x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_5 \geq 1, x_2 + x_3 + x_4 + x_6 \geq 1, x_j = (0, 1), \text{ para toda } i \text{ y } j$$

Solución: Seleccione las rutas (1, 4, 2) y (1, 3, 5), $z = 104$. El cliente 1 debería descartarse en una de las dos rutas.

- 9-20.** Solución: el comité de 3 miembros se forma con los individuos a, d y f . El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

- 9-25.** $x_t = 1$ si se selecciona el transmisor t , 0 si no es así. $x_c = 1$ si se atiende a la comunidad c , 0 si no es así. c_t = costo del transmisor t . S_c = conjunto de transmisores que atienden a la comunidad c . P_j = población de la comunidad j .

Maximizar $z = \sum_{c=1}^{15} P_c x_c$ sujeto a

$$\sum_{t \in S_c} x_t \geq x_c, c = 1, 2, \dots, 15, \sum_{t=1}^7 c_t x_t \leq 15$$

Solución: Construir los transmisores 2, 4, 5, 6 y 7. Se atiende a todas las comunidades excepto a la 1.

- 9-29.** Sea x_j = cantidad de artefactos producidos en la máquina j , $j = 1, 2, 3$. $y_j = 1$ si se utiliza la máquina j y 0 si no es así. Minimizar $z = 2x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 300y_1 + 100y_2 + 200y_3$ sujeto a $x_1 + x_2 + x_3 \geq 2000$, $x_1 - 600y_1 \leq 0$, $x_2 - 800y_2 \leq 0$, $x_3 - 1200y_3 \leq 0$, $x_1, x_2, x_3 \geq 500$ y entero, $y_1, y_2, y_3 = (0, 1)$.

Solución: $x_1 = 600$, $x_2 = 500$, $x_3 = 900$, $z = \$11,300$.

- 9-30.** Solución: El sitio 1 se asigna a los destinos 1 y 2, y el sitio 2 se asigna a los destinos 3 y 4. $z = 18$.

- 9-37.** x_e = cantidad de boletos (sencillos) de Eastern, x_u = cantidad de boletos de US Air, x_c = cantidad de boletos de Continental. e_1 y e_2 son variables binarias. u y c son enteros no negativos. Maximizar $z = 1000(x_e + 1.5x_u + 1.8x_c + 5e_1 + 5e_2 + 10u + 7c)$ sujeto a $e_1 \leq x_e/2$, $e_2 \leq x_e/6$, $u \leq x_u/6$ y $c \leq x_c/5$, $x_e + x_u + x_c = 12$.

Solución: Comprar 2 boletos en Eastern y 10 boletos en Continental. Bonificación = 39,000 millas.

- 9-38.** Sea x_{ij} = cantidad entera asignada al cuadrado (i, j) . Use una función objetivo ficticia con todos los coeficientes cero.

Restricciones:

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = 15, i = 1, 2, 3, \sum_{i=1}^3 x_{ij} = 15, j = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned}
& x_{11} + x_{22} + x_{33} = 15, x_{31} + x_{22} + x_{13} = 15, \\
& (x_{11} \geq x_{12} + 1 \text{ o } x_{11} \leq x_{12} - 1), (x_{11} \geq x_{13} + 1 \text{ o } x_{11} \leq x_{13} - 1), \\
& (x_{12} \geq x_{13} + 1 \text{ o } x_{12} \leq x_{13} - 1), (x_{11} \geq x_{21} + 1 \text{ o } x_{11} \leq x_{21} - 1), \\
& (x_{11} \geq x_{31} + 1 \text{ o } x_{11} \leq x_{31} - 1), (x_{21} \geq x_{31} + 1 \text{ o } x_{21} \leq x_{31} - 1), \\
& x_{ij} = 1, 2, \dots, 9, \text{ para toda } i \text{ y } j
\end{aligned}$$

Solución:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Soluciones alternativas: Intercambie las filas 1 y 3, o las columnas 1 y 3.

- 9-40.** x_j = Cantidad de unidades diarias del producto j .

Maximizar $z = 25x_1 + 30x_2 + 22x_3$ sujeto a

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 100 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 90 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 120 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ y enteros}$$

Solución: Producir 26 unidades del producto 1, 3 del producto 2, ninguna del producto 3, y utilizar la ubicación 2.

- 9-49.** Defina $v = zw$, $v \leq z$, $v \leq w$, $v \geq z + w - 1$, $0 \leq v \leq 1$, z y w binarias.

- 9-56.²** (a) $z = 6$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.
(d) $z = 12$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

- 9-57.** (a) $z = 7.25$, $x_1 = 1.75$, $x_2 = 1$.
(d) $z = 10.5$, $x_1 = .5$, $x_2 = 2$.

- 9-63.** PLE equivalente 0-1:

Maximizar $z = 18y_{11} + 36y_{12} + 14y_{21} + 28y_{22} + 8y_{31} + 16y_{32} + 32y_{33}$
sujeto a $15y_{11} + 30y_{12} + 12y_{21} + 24y_{22} + 7y_{31} + 14y_{32} + 28y_{33} \leq 43$

Todas las variables son binarias.

Solución: $z = 50$, $y_{12} = 1$, $y_{21} = 1$, todas las demás = 0. De forma equivalente, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. La versión 0-1 requirió 41 nodos. La original requiere 29.

- 9-65.** (a) Corte legítimo porque pasa por un punto entero y no elimina a ningún punto entero factible. Puede verificar este resultado trazando el corte en el espacio de soluciones de PL.

- 9-70.** (a) Solución entera óptima: $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 6)$, $z = 26$.
Solución redondeada: $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 6)$ – no factible.

² Use el módulo de programación entera de TORA para generar el árbol de B&B para los problemas 9-56 y 9-57.

CAPÍTULO 10

- 10-6.** Maximizar $z = 15(t/100)(53 - 100(t/100))$, $10 \leq t \leq 60$

La demanda será cero en $t = 53$. Por lo tanto, la búsqueda se puede limitar al intervalo $(10, 53)$. Inicie la búsqueda en $t = 10\%$. (Como comparación, la solución exacta utilizando cálculo es $t = 26.5\%$, impuestos = 105.34).

- 10-27.** Represente un cromosoma con una cadena de diez elementos binarios generados al azar, de modo que la carta $i = 0(1)$ signifique que pertenece a la pila 1(2).

Aptitud = $|36 - \text{suma de cartas en la pila 1}| + |36 - \text{producto de cartas en la pila 2}|$.

Iteración 0:

P1: 1011011010, Pila 1: (2, 5, 8, 10), Pila 2: (1, 3, 4, 6, 7, 9),

$$z = |36 - 25| + |36 - 4536| = 11 + 4500 = 4511$$

P2: 0011011111, P3: 0100110101, P4: 11001101111

CAPÍTULO 11

- 11-1.** (c). Cada sitio/hotel representa una ciudad. La tarifa del taxi entre ubicaciones representa la distancia.

- 11-2.** (a) PL para cota inferior:

Minimizar $z = 2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 2r_4 + 2r_5$ sujeto a

$$r_1 + r_2 \leq 120, r_1 + r_3 \leq 220, r_1 + r_4 \leq 150, r_1 + r_5 \leq 210$$

$$r_2 + r_3 \leq 80, r_2 + r_4 \leq 110, r_2 + r_5 \leq 130$$

$$r_3 + r_4 \leq 160, r_3 + r_5 \leq 185$$

$$r_4 + r_5 \leq 190, \text{ todas las } r_i \text{ son no negativas}$$

- (b) Tanto *amplAssign.txt* como *amplLP.txt* dan una cota inferior de 695 millas. La solución del modelo de asignación incluye subrecorridos (1-4-1, 2-5-3-2), por lo que no es óptima.

- 11-7.** (a) Cada proyecto representa una ciudad. La tabla siguiente da el número de *distintos* empleados que entran a la oficina del gerente y salen de ella, cuando se cambia del proyecto i al proyecto j (es decir, la cantidad de “x” que no emparejan entre la columna i y la columna j). El objetivo es encontrar un “recorrido” a través de todos los proyectos que minimice el tránsito total.

	1	2	3	4	5	6
1		4	4	6	6	5
2	4		6	4	6	3
3	4	6		4	8	7
4	6	4	4		6	5
5	6	6	8	6		5
6	5	3	7	5	5	

- (b) La cota inferior obtenida con *solutionAssign.txt* es 26. Aun cuando la cota inferior resultó ser exactamente igual al recorrido mínimo verdadero, la solución de asignación asociada in-

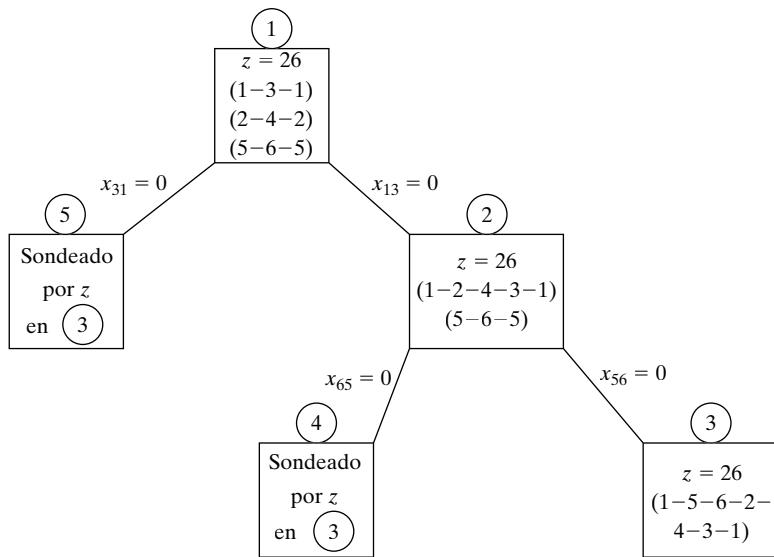


FIGURA B.12

cluye subrecorridos; a saber, 1-3-1, 2-4-5-6-2. El recorrido óptimo obtenido con *amplCut.txt* es 1-2-6-5-4-3-1.

- 11-17.** Vea la figura B.12. El problema tiene una solución óptima alternativa; por ejemplo, 1-2-6-5-4-3-1, $z = 26$.

CAPÍTULO 12

12-1. Solución: Distancia más corta = 21 millas. Ruta: 1-3-5-7.

12-5. Solución: Distancia más corta = 17. Ruta: 1-2-3-5-7.

12-7. (a) Solución: Valor = 120. $(m_1, m_2, m_3) = (0, 0, 3), (0, 4, 1), (0, 2, 2)$ o $(0, 6, 0)$.

12-10. Solución: Puntos totales = 250. Seleccione 2 cursos a partir de I, 3 a partir de II, 4 a partir de III y 1 a partir de IV.

12-12. Sea $x_j = 1$ si se acepta la solicitud j , y 0 si no. El modelo de la mochila equivalente es

Maximizar $z = 78x_1 + 64x_2 + 68x_3 + 62x_4 + 85x_5$ sujeto a

$$7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 8x_5 \leq 23, x_j = (0, 1), j = 1, 2, \dots, 5$$

Solución: Aceptar todas excepto la primera solicitud. Valor = 279.

Nota: La programación entera (capítulo 9) resuelve el problema de un modo mucho más eficiente que con la programación dinámica.

- 12-19.** (a) Solución: Contratar 6 para la semana 1, despedir 1 para la semana 2, despedir 2 para la semana 3, contratar 3 para la semana 4 y contratar 2 para la semana 5. Costo = \$3,400.

- 12-21.** Solución: Rentar 7 automóviles en la semana 1, devolver 3 para la semana 2, rentar 4 para la semana 3, y ninguna acción durante la semana 4. Costo = \$6,940.
- 12-24.** Decisiones para los siguientes 4 años: Conservar, conservar, reemplazar, conservar. Costo total = \$458.
- 12-30.** (a) Sean x_i y y_i la cantidad de ovejas conservadas y vendidas al final del periodo i , y defina $z_i = x_i + y_i$.

$$f_n(z_n) = \max_{y_n=z_n} \{ p_n y_n \}$$

$$f_i(z_i) = \max_{y_i \leq z_i} \{ p_i y_i + f_{i+1}(2z_i - 2y_i) \}, i = 1, 2, \dots, n-1$$

CAPÍTULO 13

- 13-1.** El reporte es falso porque los días promedio en el inventario son 183.57 días, o alrededor de 6 meses.
- 13-4.** (a) Costo total por semana = \$51.50
(b) Costo total por semana = \$50.20, $y^* = 239.05$ lb.
- 13-6.** (a) Seleccionar la política 1 porque su costo por día es de \$2.17 en contraste con \$2.50 para la política 2.
(c) Política óptima: Pedir 100 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 10 unidades.
- 13-14.** Política óptima: Pedir 500 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 130 unidades. Costo por día = \$258.50.
- 13-16.** No hay ventaja alguna si $\text{TCU}_1(y_m) \leq \text{TCU}_2(q)$, lo cual se traduce en ninguna ventaja, si el factor de descuento no excede de .9344%.
- 13-18.** Solución obtenida con AMPL/Solver: $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (4.42, 6.87, 4.12, 7.2, 5.8)$, costo = \$568.12.
- 13-21.** Restricción: $\sum_{i=1}^4 \frac{365D_i}{y_i} \leq 150$.
Solución obtenida con Solver/AMPL: $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (155.3, 118.81, 74.36, 90.09)$, costo = \$54.71.
- 13-22.** (a) 500 unidades requeridas al inicio de los periodos 1, 4, 7 y 10.
- 13-25.** Producir 173 unidades en el periodo 1, 180 en el periodo 2, 240 en el periodo 3, 110 en el periodo 4 y 203 en el periodo 5.
- 13-26.** (a) No, porque el exceso de inventario no debe mantenerse innecesariamente al final del horizonte.
(b) (i) $0 \leq z_1 \leq 5, 1 \leq z_2 \leq 5, 0 \leq z_3 \leq 4; x_1 = 4, 1 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 4$.
(ii) $5 \leq z_1 \leq 12, 0 \leq z_2 \leq 7, 0 \leq z_3 \leq 4; x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 7, 0 \leq x_3 \leq 4$.
- 13-27.** (a) $z_1 = 7, z_2 = 0, z_3 = 6, z_4 = 0$. Costo total = \$33.
- 13-31.** Utilizar el inventario inicial para satisfacer toda la demanda del periodo 1 y 4 unidades del periodo 2, y así se reduce la demanda en los cuatro periodos a 0, 22, 90 y 67, respectivamente. Solución óptima: Pedir 112 unidades en el periodo 2 y 67 unidades en el periodo 4. Costo total = \$632.
- 13-35.** Solución: Producir 210 unidades en enero, 255 en abril, 210 en julio y 165 en octubre.

CAPÍTULO 14**14-1.** (a) .15 y .25, respectivamente. (b) .571. (c) .821.**14-2.** $n \geq 23$.**14-3.** $n > 253$.**14-6.** $\frac{5}{32}$.**14-7.** Sea p = probabilidad de que Nancy gane. La probabilidad de que John gane es $3p$, que es igual a la probabilidad de que Jim gane. La probabilidad de que Ann gane es $6p$. Por lo tanto, $p + 3p + 3p + 3p + 6p = 1$.(a) $\frac{3}{13}$.(b) $\frac{7}{13}$.(c) $\frac{6}{13}$.**14-10.** (a) .375. (b) .6.**14-14.** .9545.**14-16.** (a) $K = 20$ **14-17.** $P\{\text{Demanda} \geq 1100\} = .3$.**14-20.** (a) $P\{50 \leq \text{ejemplares vendidos} \leq 70\} = .6667$

(b) Cantidad esperada de ejemplares no vendidos = 2.67

(c) Utilidad neta esperada = \$22.33

14-21. Media = 3.667, varianza = 1.556.**14-26.** (a) $P(x_1 = 1) = P(x_2 = 1) = .4, P(x_1 = 2) = P(x_2 = 2) = .2, P(x_1 = 3) = P(x_2 = 3) = .4$.(b) No, porque $P(x_1, x_2) \neq P(x_1)P(x_2)$.**14-27.** $P\{\text{número par}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.**14-29.** $P\{\text{correcto}\} = .0547$.**14-33.** .8646.**14-35.** (a) $P\{n = 0\} \approx 0$.(c) $P\{n \geq (2 + 1)\} = P\{n \geq 3\} \approx 1$.**14-37.** $\lambda = 12 \text{ llegadas/min. } P\{t \leq \frac{5}{60} \text{ min}\} = .632$.**14-40.** .001435.**CAPÍTULO 15****15-1.** Pesos para A, B y $C = (.44214, .25184, .30602)$. Seleccionar A .**15-3.** CR $> .1$ para todas las matrices excepto \mathbf{A} . $(w_S, w_J, w_M) = (.331, .292, .377)$. Seleccione a Maisa.**15-5.** Todas las matrices son consistentes. $(w_H, w_P) = (.502, .498)$. Seleccione H .**15-10.** (a) Vea la figura B.13.(b) EV (maíz) = $-\$8250$, EV (soya) = \$250. Seleccione la soya.

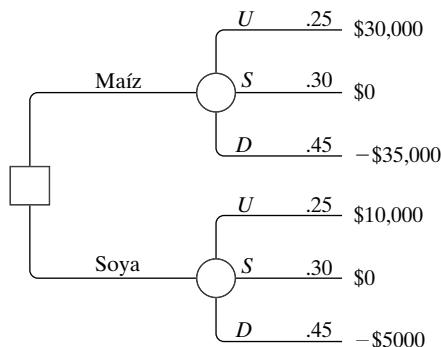


FIGURA B.13

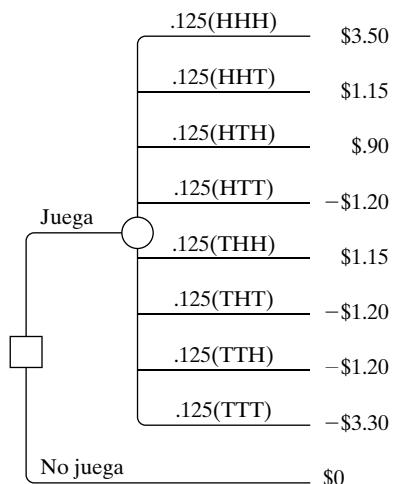


FIGURA B.14

- 15-14.** (a) Vea la figura B.14.
 (b) $EV(\text{juego}) = -\$0.025$. No participar en el juego.
- 15-20.** (a) Costo de desglose esperado en el año $t = \$4000p_t + \$0(1 - p_t)$.
 Costo de mantenimiento preventivo en cualquier año $= 20 \times 75 = \$1500$.
 (b) Ciclo de mantenimiento óptimo = 8 años. Costo por año = \$397.50.
- 15-23.** (a) Utilidad esperada dada $\alpha = \alpha(r - cp - rp)$.
 (b) Tasa de producción óptima = 49 piezas por día.
- 15-27.** El nivel debe estar entre 99 y 151 galones.
- 15-29.** Sea z el evento de tener un artículo defectuoso en una muestra de tamaño 5.
 $P\{A|z\} = .6097, P\{B|z\} = .3903$.
- 15-31.** (a) Ingreso esperado si usted publica el libro = \$196,000.
 Ingreso esperado si utiliza un editor = \$163,000.
 (b) Si la encuesta predice éxito, publique usted el libro, de lo contrario acuda a un editor.
- 15-34.** (b) Envíe el lote a B si ambos artículos están defectuosos, de lo contrario envíelo a A .
- 15-35.** (a) Valor esperado = \$5; por consiguiente, no hay ventaja alguna.
 (b) Para $0 \leq x < 10$, $U(x) = 0$, y para $x = 10$, $U(x) = 100$.
 (c) Participe en el juego.

15-36. Lotería: $U(x) = 100 - 100p$, con $U(-\$1,250,000) = 0$ y $U(\$900,000) = 100$.

- 15-38.** (a) Todos los métodos: Estudiar toda la noche (acción a_1).
 (b) Todos los métodos: Elija las acciones a_2 o a_3 .

15-41. (a) Solución de punto de silla en $(2, 3)$. Valor del juego = 4.

15-43. (a) $2 < v < 4$.

15-46. Cada jugador debería combinar las estrategias 50-50. Valor del juego = 0.

15-47. Matriz de pagos de la policía:

	100% A	50% A–50% B	100% B
A	100	50	0
B	0	30	100

Estrategia de la policía: Combinar las estrategias 100% A y 100% B al 50-50.

Estrategia de Robin: Combinar las estrategias A y B al 50-50. Valor del juego = \$50 (= multa esperada pagada por Robin).

15-50. (a) Matriz de pagos para el equipo 1:

	AB	AC	AD	BC	BD	CD
AB	1	0	0	0	0	-1
AC	0	1	0	0	-1	0
AD	0	0	1	-1	0	0
BC	0	0	-1	1	0	0
BD	0	-1	0	0	1	0
CD	-1	0	0	0	0	1

Estrategias óptimas de ambos equipos: Combinar AB y CD al 50-50. Valor del juego = 0.

15-52. (a) $(m, n) = (\text{Cantidad de regimientos en la ubicación 1}, \text{regimientos en la ubicación 2})$. Cada ubicación tiene un pago de 1 si ganó y de -1 si perdió. Por ejemplo, la estrategia de Blotto $(1, 1)$ contra la del enemigo $(0, 3)$ ganará el lugar 1 y perderá el lugar 2, con un pago neto de $1 + (-1) = 0$. La matriz de pagos para el coronel Blotto:

	3, 0	2, 1	1, 2	0, 3
2, 0	-1	-1	0	0
1, 1	0	-1	-1	0
0, 2	0	0	-1	-1

Estrategia óptima de Blotto: Blotto combina las estrategias $(2-0)$ y $(0-2)$ al 50-50 y el enemigo combina las estrategias $(3-0)$ y $(1-2)$ al 50-50. Valor del juego = -.5, y Blotto pierde. El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

CAPÍTULO 16

- 16-1.** (a) Pedir 1000 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 537 unidades.
- 16-5.** Solución: $y^* = 317.82$ galones, $R^* = 46.82$ galones.
- 16-6.** Solución: $y^* = 316.85$ galones, $R^* = 58.73$ galones. En el ejemplo 16.1-2, $y^* = 319.44$ galones, $R^* = 93.61$ galones. La cantidad de pedido no cambia como en el ejemplo 16.1-2 pero R^* es menor porque la fdp de la demanda tiene una varianza menor.
- 16-10.** $.82 \leq p \leq 2.33$
- 16-13.** 32 abrigos.
- 16-16.** Pedir $9 - x$ si $x < 4.53$, de lo contrario no pedir.
- 16-20.** Pedir $4.61 - x$ si $x < 4.61$, de lo contrario no pedir.

CAPÍTULO 17

- 17-2.** S1: Patrulla en vigilancia
 S2: Patrulla que responde a una llamada
 S3: Patrulla en la escena de la llamada
 S4: Aprehensión realizada
 S5: Transporte a la estación de policía

	S1	S2	S3	S4	S5
S1	0.4	0.6	0	0	0
S2	0.1	0.3	0.6	0	0
S3	0.1	0	0.5	0.4	0
S4	0.4	0	0	0	0.6
S5	1	0	0	0	0

- 17-6.** Probabilidades iniciales:

S1	S2	S3	S4	S5
0	0	1	0	0

Cadena de Markov de entrada:

	S1	S2	S3	S4	S5
S1	0.4	0.6	0	0	0
S2	0.1	0.3	0.6	0	0
S3	0.1	0	0.5	0.4	0
S4	0.4	0	0	0	0.6
S5	1	0	0	0	0

Matriz de transición de salida (2 pasos o 2 patrullajes) \mathbf{P}^2

	S1	S2	S3	S4	S5
S1	0.22	0.42	0.36	0	0
S2	0.13	0.15	0.48	0.24	0
S3	0.25	0.06	0.25	0.2	0.24
S4	0.76	0.24	0	0	0
S5	0.4	0.6	0	0	0

Probabilidades absolutas de 2 pasos = $(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)\mathbf{P}^2$

Estado	Absoluta (2 pasos)
S1	0.25
S2	0.06
S3	0.25
S4	0.20
S5	0.24

$P\{\text{aprehensión, S4, en 2 patrullajes}\} = .2$

- 17-10.** (a) Utilizando *excelMarkovChains.xls*, la cadena es periódica con periodo de 3.
 (b) Los estados 1, 2 y 3 son transitorios, el estado 4 es absorbente.

- 17-13.** (a) Cadena de Markov de entrada:

	S	C	R
S	0.8	0.2	0
C	0.3	0.5	0.2
R	0.1	0.1	0.8

Resultados de salida

Estado	Estado estable	Tiempo de regreso medio
S	0.50	2.0
C	0.25	4.0
R	0.25	4.0

Ingresos esperados = $2000(1 \times .5 + .8 \times .25 + .2 \times .25) = \$1,500$

- (b) Los días soleados regresarán cada $\mu_{SS} = 2$ días, es decir, dos días sin sol.

- 17-17.** (a) Cadena de Markov de entrada:

	Nunca	A veces	Siempre
Nunca	0.95	0.04	0.01
A veces	0.06	0.9	0.04
Siempre	0	0.1	0.9

- (b) 44.12% nunca, 36.76% a veces, 19.11% siempre
 (c) Impuestos no recaudados esperados/año = $.12(\$5000 \times .3676 + \$12,000 \times .1911) \times 70,000,000 \approx \$34,711,641,000$

17-29. (a) Cadena de Markov de entrada:

1	2	3	4	5
0	.3333	.3333	.3333	0
.3333	0	.3333	0	.3333
.3333	.3333	0	0	.3333
.5	0	0	0	.5
0	.3333	.3333	.3333	0

- (b) $a_5 = .07407$
 (c) $\pi_5 = .214286$
 (d) $\mu_{15} = 4.6666$

17-33. (a) Cadena de Markov de entrada:

	A	B	C
A	.75	.1	.15
B	.20	.75	.05
C	.125	.125	.75

- (b) A: 39.5%, B: 30.7%, C: 29.8%
 (c) A → B: 9.14 años, A → C: 8.23 años

17-35. (a) Estados: 1 semana, 2 semanas, 3 semanas, biblioteca

Matriz \mathbf{P} :

	1	2	3	bib.
1	0	0.3	0	0.7
2	0	0	0.1	0.9
3	0	0	0	1
bib.	0	0	0	1

- (b) En promedio, conservo el libro 1.33 semanas.

17-41. (a)Matriz \mathbf{P} :

	1	2	3	4	F
1	0.2	0.8	0	0	0
2	0	0.22	0.78	0	0
3	0	0	0.25	0.75	0
4	0	0	0	0.3	0.7
F	0	0	0	0	1

(b)

	$(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$				Mu
	1	2	3	4	F
1	1.25	1.282	1.333	1.429	1 5.29
2	0	1.282	1.333	1.429	2 4.04
3	0	0	1.333	1.429	3 2.76
4	0	0	0	1.429	4 1.43

- (c) Para llevar Cál. II, el estudiante debe terminar en 16 semanas (4 transiciones) o menos. Promedio de transiciones necesarias = 5.29. Por consiguiente, un estudiante promedio no será capaz de terminar Cál. I a tiempo.
 (d) No, según la respuesta en (c).

CAPÍTULO 18

- 18-1.** (a) Productividad = 71%.
 (b) Los dos requisitos no pueden satisfacerse al mismo tiempo.

18-3.

Situación	Cliente	Servidor
(a)	Avión	Pista de aterrizaje
(b)	Pasajero	Taxi
(h)	Automóvil	Espacio de estacionamiento

- 18-8.** (b) (i) $\lambda = 6$ llegadas por hora, tiempo entre llegadas promedio = $\frac{1}{6}$ horas.
 (c) (i) $\mu = 5$ servicios por hora, tiempo de servicio promedio = .2 horas.

- 18-10.** (a) $f(t) = 20e^{-20t}, t > 0$.

$$(b) P\left\{t > \frac{15}{60}\right\} = .00674.$$

- 18-14.** El pago de Jim es de 2 centavos con probabilidad $P\{t \leq 1\} = .4866$ y -2 centavos con probabilidad $P\{t \geq 1\} = .5134$. En 8 horas, Jim paga a Ann = 17.15 centavos.
- 18-17.** (a) $P\{t \leq 4 \text{ minutos}\} = .4866$.
 (b) Porcentaje de descuento promedio = 6.208.
- 18-21.** $p_{n \geq 5}(1 \text{ hora}) = .55951$.
- 18-24.** (a) $p_2(t = 7) = .24167$.
- 18-26.** (a) λ combinada = $\frac{1}{10} + \frac{1}{7}$, $p_2(t = 5) = .219$.
- 18-30.** (a) $p_0(t = 3) = .00532$.
 (c) $p_{n \leq 17}(t = 1) = .9502$.
- 18-33.** $p_0(4) = .37116$.
- 18-36.** (a) Tamaño de pedido promedio = $25 - 7.11 = 17.89$ artículos.
 (b) $p_0(t = 4) = .00069$.
- 18-41.** (a) $p_{n \geq 3} = .4445$.
 (b) $p_{n \leq 2} = .5555$.
- 18-44.** (a) $p_j = .2, j = 0, 1, 2, 3, 4$.
 (b) Cantidad esperada en el taller = 2 clientes.
 (c) $p_4 = .2$.
- 18-48.** (a) $L_q = 1p_6 + 2p_7 + 3p_8 = .1918$ automóviles.
 (c) $\lambda_{\text{perdida}} = .1263$ autos por hora. Cantidad promedio perdida en 8 horas = 1.01 autos.
 (d) Cantidad de espacios vacíos = $c - (L_s - L_q) = c - \sum_{n=0}^8 np_n + \sum_{n=c+1}^8 (n - c)p_n$.
 Realice manipulaciones algebraicas adicionales para obtener el resultado deseado.
- 18-51.** (a) $p_0 = .2$.
 (b) Ingreso mensual promedio = $\$50 \times \mu t = \375 .
 (c) Pago esperado = $\$40 \times L_q = \128 .
- 18-54.** (a) $p_0 = .4$.
 (b) $L_q = .9$ automóviles.
 (c) $W_q = 2.25$ min.
 (d) $p_{n \geq 11} = .0036$.
- 18-55.** (d) El número de espacios es al menos de 13.
- 18-59.** (a) $p_0 = .3654$.
 (b) $W_q = .207$ horas.
 (c) Cantidad esperada de espacios vacíos = $4 - L_q = 3.212$.
 (d) $p_5 = .04812$.
 (e) Una reducción de 40% disminuye W_s a aproximadamente 9.6 minutos ($\mu = 10$ autos/h).
- 18-62.** (a) $p_8 = .6$.
 (b) $L_q = 6.34$ generadores.
 (c) La probabilidad de encontrar un espacio vacío ($= p_0 + p_1 + \dots + p_c$) no puede exceder de .4, independientemente de la capacidad c de la banda [verifique que el límite de $(p_0 + \dots + p_c)$ conforme c tiende a infinito es .4]. Esto significa que la mejor utilización del departamento de ensamble es de 60%.

- 18-65.** (a) $1 - p_5 = .962$.
 (b) $\lambda_{\text{perdida}} = \lambda p_5 = .19$ clientes por hora.
- 18-69.** Para $c = 2$, $W_q = 3.446$ horas y para $c = 4$, $W_q = 1.681$ horas, una mejora de más de 51%.
- 18-72.** Sea K la cantidad de espacios en la sala de espera. Mediante el uso de TORA, $p_0 + p_1 + \dots + p_{K+2} \geq .999$ produce $K \geq 10$.
- 18-74.** (a) $p_{n \geq 4} = .65772$.
 (e) Cantidad promedio de computadoras ociosas = .667 computadoras.
- 18-84.** (c) Utilización = 81.8%.
 (d) $p_2 + p_3 + p_4 = .545$.
- 18-86.** (a) $p_{40} = .00014$.
 (d) $p_{30} + p_{31} + \dots + p_{39} = .02453$.
 (e) Cantidad esperada de espacios ocupados = $L_s - L_q = 20.043 - .046 \approx 20$.
 (f) Probabilidad de no encontrar un espacio de estacionamiento = $1 - p_{n \leq 29} = .02467$. La cantidad de estudiantes que no pueden estacionarse en un periodo de 8 horas es aproximadamente de 4.
- 18-92.** (a) Aproximadamente 7 asientos.
 (b) $p_{n \geq 8} = .2911$.
- 18-95.** (a) Promedio de técnicos ociosos = 2.01.
 (d) $P(2 \text{ o } 3 \text{ servidores ociosos}) = p_0 + p_1 = .34492$.
- 18-98.** (a) $L_s = 1.25$ máquinas.
 (b) $p_0 = .33342$.
 (c) $W_s = .25$ horas.
- 18-100.** $\lambda = 2$ llamadas por hora por bebé, $\mu = .5$ bebés por hora, $R = 5$, $K = 5$.
 (a) Cantidad de bebés despiertos = $5 - L_s = 1$ bebé.
 (b) $p_5 = .32768$.
 (c) $p_{n \leq 2} = .05792$.
- 18-105.** (a) $E\{t\} = 14$ minutos y $\text{var}\{t\} = 12$ minutos². $L_s = 7.8672$ autos.
- 18-107.** $\lambda = .0625$ prescripciones por minuto, $E\{t\} = 15$ minutos, $\text{var}\{t\} = 9.33$ minutos².
 (a) $p_0 = .0625$.
 (b) $L_q = 7.3$ prescripciones
 (c) $W_s = 132.17$ minutos
- 18-114.** Use $(M/M/1):(GD/10/10)$. El costo por hora es de \$431.50 para el técnico 1 y de \$386.50 para el técnico 2.
- 18-116.** (b) $\mu = \lambda + \sqrt{\frac{c_2 \lambda}{c_1}}$
 (c) Tasa de producción óptima = 2725 piezas por hora.
- 18-122.** (a) No, el costo por hora es de \$86.4 con dos técnicos y de \$94.80 con tres.
 (b) Programa de pérdida por descompostura = $\$30 \times W_s = \121.11 con dos técnicos y \$94.62 con tres.
- 18-124.** Tasa de descomposturas por máquina, $\lambda = .36125$ por hora, $\mu = 10$ por hora. El modelo $(M/M/3):(GD/20/20)$ resulta en $L_s = .70529$ máquinas. Ingreso perdido = \$36.60 y el costo de tres técnicos = \$60.

- 18-126.** (a) Número de técnicos ≥ 5 .
 (b) Número de técnicos ≥ 4 .

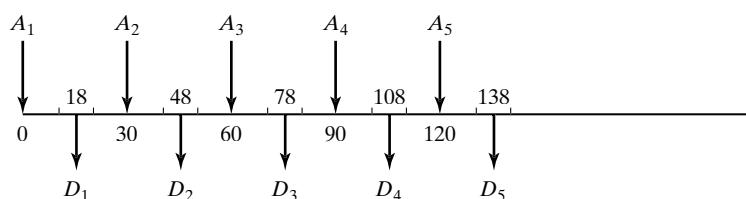
CAPÍTULO 19

- 19-4.** (a) $P\{H\} = P\{T\} = .5$. Si $0 \leq R \leq .5$, Jim obtiene \$10.00. Si $.5 < R \leq 1$, Jan obtiene \$10.00.
- 19-7.** Muestreo del tiempo de espera: Si $0 \leq R \leq .5$, $L = 1$ día. Si $.5 < R \leq 1$, $L = 2$ días.
 Muestreo de la demanda diaria: Si $0 \leq R \leq .2$, demanda = 0 unidades. Si $.2 < R \leq .9$, demanda = 1 unidad. Si $.9 < R \leq 1$, demanda = 2 unidades. Use una R para muestrear L . Si $L = 1$, use otra R para muestrear la demanda de un día, de lo contrario si $L = 2$, use una R para generar la demanda del día 1 y luego otra R para generar la demanda del día 2.
- 19-10.** (a) Discreta.
- 19-15.** Vea la figura B.15.
- 19-16.** $t = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - R)$, $\lambda = 4$ clientes por hora.

Cliente	R	t (horas)	Tiempo de llegada
1	—	—	0
2	0.0589	0.015176	0.015176
3	0.6733	0.279678	0.294855
4	0.4799	0.163434	0.458288

- 19-17.** $t = a + (b - a)R$.
- 19-19.** (a) $0 \leq R < .2 : d = 0$, $.2 \leq R < .5 : d = 1$, $.5 \leq R < .9 : d = 2$,
 $.9 \leq R \leq 1 : d = 3$.
- 19-24.** Si $0 \leq R \leq p$, entonces $x = 0$, de lo contrario $x = \left(\text{mayor entero} \leq \frac{\ln(1 - R)}{\ln q}\right)$.
- 19-26.** $y = -\frac{1}{10} \ln(0.0589 \times 0.6733 \times 0.4799 \times 0.9486) = .401$ horas.
- 19-31.** $t = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, donde $x_i = 10 + 10R_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.
- 19-34.** En el ejemplo 19.4-1, la longitud del ciclo = 4. Con los nuevos parámetros el ciclado no fue evidente después de que se generaron 50 números aleatorios. La conclusión es que la selección juiciosa de los parámetros es importante.
- 19-37.** (a) Basado en observaciones.
 (b) Basado en el tiempo.

FIGURA B.15



- 19-38.** (a) 1.48 clientes.
 (b) 7.4 horas.

19-44. Intervalo de confianza: $15.07 \leq \mu \leq 23.27$.

CAPÍTULO 20

- 20-1.** (a) Sin puntos estacionarios.
 (b) Mínimo en $x = 0$.
 (e) Punto de inflexión en $x = 0$, mínimo en $x = .63$ y máximo en $x = -.63$.

20-4. $(x_1, x_2) = (-1, 1)$ o $(2, 4)$.

20-7. (b) $(\partial x_1, \partial x_3) = (2.83, -2.5)\partial x_2$

20-10. Condiciones necesarias: $2\left(x_i - \frac{x_n^2}{x_i}\right) = 0, i = 1, 2, \dots, n - 1$. La solución es

$$x_i = \sqrt[n]{C}, i = 1, 2, \dots, n. \quad \partial f = 2\sqrt[n]{C^{2-n}}.$$

20-13. (b) Solución $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{5}{74}, -\frac{10}{74}, \frac{155}{74}, \frac{60}{74}\right)$, la cual es un punto mínimo.

20-15. Puntos mínimos: $(x_1, x_2, x_3) = (-14.4, 4.56, -1.44)$ y $(4.4, .44, .44)$.

CAPÍTULO 21

- 21-2.** (c) $x = 2.5$, logrado con $\Delta = .000001$.
 (e) $x = 2$, logrado con $\Delta = .000001$.

21-3. De acuerdo con la expansión de Taylor $\nabla f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X}^0) + \mathbf{H}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^0)$. La \mathbf{H} hessiana es independiente de \mathbf{X} porque $f(\mathbf{X})$ es cuadrática. Además, la expansión dada es exacta porque las derivadas de mayor orden son cero. Por consiguiente, $\nabla f(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ produce $\mathbf{X} = \mathbf{X}^0 - \mathbf{H}^{-1}\nabla f(\mathbf{X}^0)$. Debido a que \mathbf{X} satisface $\nabla f(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, \mathbf{X} debe ser óptima independientemente de la elección de la \mathbf{X}^0 inicial.

21-6. Solución óptima: $x_1 = 0, x_2 = 3, z = 17$.

21-8. Sea $w_j = x_j + 1, j = 1, 2, 3, v_1 = w_1 w_2, v_2 = w_1 w_3$. Entonces,

$$\text{Maximizar } z = v_1 + v_2 - 2w_1 - w_2 + 1$$

$$\text{Sujeto a } v_1 + v_2 - 2w_1 - w_2 \leq 9, \ln v_1 - \ln w_1 - \ln w_2 = 0,$$

$$\ln v_2 - \ln w_1 - \ln w_3 = 0, \text{ todas las variables son no negativas.}$$

21-14. Solución: $x_1 = 1, x_2 = 0, z = 4$.

21-15. Solución: $x_1 = 0, x_2 = .4, x_3 = .7, z = -2.35$.

21-16. Maximizar $z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$

$$\text{Sujeto a } 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 1.28y \leq 10$$

$$9x_1^2 + 16x_3^2 - y^2 = 0$$

$$7x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12.4$$

$$x_1, x_2, x_3, y \geq 0$$

Índice

A

- Abastecimiento (de combustible), 15
- Actividad crítica en CPM
- definición de, 246
 - determinación de la, 247-248
- Algoritmo(s)
- aditivo 0-1, 337
 - de barrera, 111
 - de búsqueda tabú, 374-378
 - aplicación al TSP, 419-421
 - aplicación de la PLE, 385-388
 - criterio de aspiración, 377
 - intensificación y diversificación, 377
 - lista tabú, 374
 - periodo de tenencia tabú, 374
 - de Dijkstra, 225-228. *Vea también Algoritmo de Floyd*
 - de Floyd, 228-231. *Vea también Algoritmo de Dijkstra*
 - de programación entera
 - agente viajero, 411-415
 - enumeración implícita. *Vea Algoritmo aditivo*
 - plano de corte, 343-348
- ramificación y acotamiento, 337-343
- de programación no lineal, 733-758
- de ramificación y acotamiento
- para el agente viajero (TSP), 411-414
 - programación entera, 337-343
- de recocido simulado, 378-380
- aplicación al TSP, 405-406
 - aplicación de PLE, 329-336
 - condición de aceptación, 378
 - programa de temperatura, 378
- definición de, 4
- del árbol de mínima expansión, 220-221
- restringido, 398
- del método simplex
- dual, 152-154, 279
 - generalizado, 152
 - primal, 110, 119, 148, 282-283
- del plano de corte
- PLE, 343-348
 - TSP, 414-415
- genético, 381-385
- aplicación a PLE, 390-393
 - aplicación al TSP, 424-427
 - codificación de genes, 381
 - de cruce, 381, 382

- mutación, 381
- simplex
 - condición de factibilidad, 81, 84, 282
 - condición de optimalidad, 81, 89, 151, 282
 - generalizado, 154-155
 - operaciones con filas de Gauss-Jordan, 78-81
 - pasos del, 87, 282-283
 - primal. *Vea Algoritmo simplex razones, 77*
 - variable de salida, 80, 289
 - variable entrante, 77-79, 81, 282
- SUMT, 757-758
- Al-Khwarizmi, Muhammad Ibn-Musa. *Vea también Algoritmo*
- AMPL, 27, 31-35, 129
 - análisis de sensibilidad en PL, 108
- Análisis
 - de casos
 - agente viajero, 405
 - cadenas de Markov, 599
 - heurística, 367
 - inventario, 471, 501-505
 - de regresión, usando la programación matemática, 64-65, 326
 - de sensibilidad en
 - programación dinámica, 447
 - programación lineal. *Vea Programación lineal*
 - método jacobiano, 722-723
 - postóptimo, 155-162. *Vea también Programación paramétrica*
- Aplicaciones de IO seleccionadas. *Vea Análisis de casos*
- Árbol(es)
 - de decisión, 544-545
 - de expansión, definición de, 218
 - definición de, 218
- Arte del modelado, 11
- Aspectos de cálculo en PL, 108-112
- Atributo en simulación, 686
- B**
- Babbage, Charles, 5
- Base(s), 277
 - representación vectorial de, 277-278
 - restringida, 742-744, 749
- Bernoulli, Daniel, 549
- Bernoulli, Nicolas, 549
- Borde en el espacio de soluciones de PL, 74
- Búsqueda dicótoma, 758
- C**
- Cadena(s)
 - de Markov, 599-612
 - absorción, probabilidad de, 610
 - clasificación de estado en cadenas de Markov, 603-604
 - conjunto cerrado, 603
 - ergódica, 604
 - filtro antispam, uso en, probabilidades de estado estable, 601
 - matriz de transición de n pasos, 602-603
 - modelo de decisión basado en costos, 606
 - probabilidades absolutas, 602-603
 - probabilidades iniciales, 602
 - tiempo de la primera visita, 606-608
 - tiempo medio de retorno, 604-606
 - de suministro, 471
 - Cálculos en el método de la ruta crítica (CPM). 246-248
 - Cambiar de cola, 625
 - Cantidad económica de pedido. *Vea EOQ*
 - Ciclaje en PL, 88-89, 111
 - Ciclo en una red, 218
 - Circulado en PL. *Vea Ciclaje en PL*
 - Clasificación de estados. *Vea Cadenas de Markov*

Cola(s)
 cambiar de, 625
M/D/1. Vea Fórmula de Pollaczek-Khintchine
M/M/1, 640-642
M/M/c, 645-650
M/M/R, 650-651
 que no son de Poisson, 652

Combinación convexa, 276

Combustible, abastecimiento de, 15

Condiciones de Karush-Khun-Tucker (KKT), 724-728

Conjunto convexo, 275

Control
 de producción-inventario
 con suavización de la producción, 35
 modelo de la ruta más corta, visto como periodo único, 32-33
 períodos múltiples, 34
 de semáforos, 65

Corte(s)
 combinado, 347
 en problema del agente viajero, 414-415
 en programación entera, 343-348
 en red de flujo máximo, 236-237
 fraccionario, 345

Costo
 imputado, 150. *Vea también* Precio dual
 reducido, 102-110, 114-115, 160-161, 281

Covarianza, 519

CPM. *Vea* Método de la ruta crítica

Criterio(s)
 de arrepentimiento (Savage), 552
 de aspiración en la búsqueda tabú, 377
 de Hurwicz, 553, 554
 de Laplace, 552
 de Savage. *Vea* Criterio de arrepentimiento
 del nivel de aspiración en colas, 656
 maximin, 552

Cuadro estadístico de la ji cuadrada, 765

D

Da Vinci, Leonardo, 418

Dantzig, George B., 75, 220, 287, 348, 418, 560

Definiciones de red, 217-220

Degeneración, 88, 111. *Vea también* Ciclaje en PL

Desigualdades, conversión a ecuaciones, 69

Desistir en colas (abandonar), 625

Diagrama de la tasa de transición en colas, 632

Dilema del prisionero, 559-560

Disciplina de la cola, 625
 FIFO, 625, 636
 GD, 636
 LIFO, 625, 636
 SIRO, 625, 636

Distancia de Hamming, 407

Distribución
 binomial, 521
 aproximación de Poisson, 521-522
 cálculos de probabilidad con *excelStatTables.xls*, 521
 de Poisson, 521-522, 628-629
 aproximación de la binomial, 521
 cálculos con *excelStatTables.xls*, 518
 truncada, 631
 de probabilidad
 conjunta, 518-521
 continua, 515
 marginal, 519
 del tiempo de espera, primero en llegar
 primero en ser atendido, 625
 discreta, 517
 empírica, 525-530
 exponencial (negativa), 522-523, 626-627
 cálculos de probabilidad con *excelStatTables.xls*, 523
 propiedad de olvido, 626
 normal, 523-525
 cálculos con *excelStatTables.xls*, 524-525
 tablas estadísticas, 751-752
 uniforme, 516, 681, 705

E

Ecuación(es)
 de balance en colas, 633
 de Chapman-Kolomogorov, 602
 lineales simultáneas, tipos de soluciones, 276-277
 recursiva de retroceso en PD, 443

EOQ

dinámica
 modelo con costo de preparación, 491-500
 modelo sin costo de preparación, 488-490
 estática
 clásica, 477-481
 con limitación de almacenamiento, 484-488
 con reducciones de precios, 481-484
 probabilística, 581-587
 restringida, 485

Equilibrio de Nash. *Vea Teoría de juegos, no cooperativos*

Error de redondeo en el método simplex, 82, 83, 85

Espacio muestral en probabilidad, 513-514

Estado

absorbente. *Vea Cadenas de Markov*
 en la PD, definición de, 442
 estable en
 cadenas de Markov. *Vea Cadenas de Markov*
 colas. *Vea Modelos de colas*
 simulación. *Vea Simulación de eventos discretos*

Estrategias en juegos, mixtos y puros, 556-557

Estudio de IO, fases de un, 7, 9, 10

Etapa en la PD, definición de, 440

Euler, Leonard, 219, 220

Evento en

probabilidad, 513
 simulación, 685

Experimento(s)

de la rotación de la aguja, 518
 del lanzamiento de dados, 515, 518
 estadística, 513

F

FDA. *Vea Función de distribución acumulada fdp.* *Vea Función de densidad de probabilidad FIFO.* *Vea Disciplina de la cola*
 Flotantes en CPM, 250

Forma(s)
 cuadráticas, 748
 de ecuación de PL, 69-70
 del producto de la inversa, 287
 en el método simplex revisado, 286

Fórmula(s)

de colas de Little, 637
 de la EOQ de Harris. *Vea Inventario, modelos deterministas*
 de Pollaczek-Khintchine, 652

Franklin, Benjamin, 368

Función(es)

convexa, D.15
 de densidad de probabilidad
 conjunta, 518-519
 definición de, 515
 marginal, 518-520
 de distribución acumulada (FDA), 515
 de utilidad, 550-551

G

Generador de números aleatorios, 683, 692
 Gestión de la calidad del agua, 66
 Gradiente restringido, 719

H

Hamming, Richard, 407

Harris, Ford, 481

Heurística

de la búsqueda codiciosa, 368-373
 de Silver-Meal, 497-499
 definición, 4

tipos de
codiciosa, 368-373
metaheurística, 374-385
TSP, 415-418

Histogramas, 526
Hitchcock, Frank, 181

I

Independencia lineal de vectores, 277
Índice de optimismo, 553
Intensificación y diversificación en la búsqueda tabú, 377

Intervalo de incertidumbre, 733
ubicación en la tabla simplex, 147

Inventario, estudio de caso

modelos deterministas
dinámicos, solución en hoja de cálculo de, 493-494
EOQ, 477-486
estáticos, 477-478
heurística (de Silver-Meal), solución en hoja de cálculo de, 499-500
modelos probabilísticos
EOQ, 581-587
periodos múltiples, 593-594
política $s-S$, 590-593
problema del vendedor de periódicos, 588-590
simulación en hoja de cálculo, 587, 590

Iteración, definición de, 4

J

Juego de suma cero, 555
con dos personas, 555

K

Kantorovich, Leonid, 75, 181
Kepler, Johannes, 442-443
Koopmans, Tjalling, 181

L

Leonardo da Vinci, 418
Leontief, Wassily, 75
Leyes de probabilidad de la adición, 514
condicional, 514-515

LIFO. *Vea* Disciplina de la cola

Límites 6-sigma, 524
Lista de pros y contras. *Vea* Regla de Franklin
Lotería en una función de utilidad, 549
Lovelace, Ada, 5

M

Maldición de la dimensionalidad en PD, 459
Mark Twain, 529
Matriz(es)
de rango completo. *Vea* Matriz no singular
no singular, 277
operaciones aritméticas simples, repaso de, 142-143
particionadas
inversa(s), 143
producto de, 146
Maximización, conversión a minimización, 81
Metaheurística, 374-385
algoritmo(s)
de recocido simulado, 378-380
genético, 381-385
tabú, 374-378
aplicaciones

árbol de mínima expansión, restringido, 398
asignación de almacenes, 397
colocación de rótulos cartográficos, 398-399
coloreado de mapas, 400-402
programación de horarios, 400
secuenciación de trabajos, 375-377, 379-380

Método(s)
congruencial multiplicativo para números aleatorios, 690

- de aproximación de Vogel (VAM), 188
- de búsqueda de la sección dorada, 733
- de búsqueda directa, 733-736
- de combinaciones lineales, 740
- de Gauss-Jordan, 78, 81
- de las dos fases, 85-87. *Vea también* Método *M*
- de los pesos en la programación de metas, 313-315
- de muestreo de Box-Muller para la distribución normal, 689-690
- de Newton-Raphson, 714-716
- de penalización en PL. *Vea* Método *M*
- del ascenso más pronunciado. *Vea* Método de gradiente
- del gradiente, 703-706
- húngaro. *Vea* Modelo de asignación jacobiano, 717-723
 - relación con el método lagrangeano, 723
- lagrangeano, 723
- M*, 82-85. *Vea también* Método de las dos fases preventivo en la programación de metas, 315-317
- simplex dual, 110, 152-154, 294. *Vea también* Algoritmo simplex generalizado
 - forma matricial revisada, 287-292
 - motivación para el, 294
 - restricciones artificiales en, 154, 155
 - variables acotadas, 307
- simplex revisado
 - dual, 292-295
 - primal, 292-295
- Modelado
 - arte del, 6-7, 11
 - niveles de abstracción en el, 6
- Modelo(s)
 - de afilado de herramientas, 181-184
 - de asignación, 197-201
 - problema del agente viajero, uso en, 408
 - relación con el método simplex, 200
- de carga. *Vea* Problema de la mochila
- de Chebyshev para el análisis de regresiones, 326
- de colas, 625-654
 - de autoservicio, 649
 - de decisión, 624, 654-656
 - de Poisson, generalizado, 635
 - de servicio a máquinas, 650-651
 - de un solo servidor, 640-644, 696-698
 - de varios servidores, 644-646
 - generalizado, 632-635
 - para la reparación de máquinas, 650-651
 - que no son de Poisson, 652-653
- de equipo de vuelo. *Vea* Problema de la mochila
- de flujo máximo, 235-243
 - algoritmo de, 237-242
 - cortes en, 237
 - formulación de PL, 242-243
 - solución con AMPL de, 243
 - solución con Solver de, 242-243
- de inversión, 30-32, 455-458
- de IO, elementos de un, 4
 - niveles de abstracción, 6
- de línea de espera. *Vea* Modelos de colas de mezcla y refinado, 43-46
- de muerte pura, 631-632
- de nacimiento puro, 627-630
- de planeación de la mano de obra, 38-40
- de programación
 - de autobuses, 38-40
- de Reddy Mikks, 15-23, 25-28
- de reemplazo de equipo, 222-223, 452-455
- de renovación urbana, 40-42
- de secuenciación de trabajos, 334-336
- de transporte
 - algoritmo, 184-197
 - aplicaciones, 177, 181-184
 - definición de, 177

- equilibrio de, 179-180
- equivalencia en PL, 178
- solución con AMPL, 196
- solución inicial, 184-189
- Solver, 195
- tabla de, 179
- del tamaño de la fuerza de trabajo usando PD, 450-452
- matemático, definición de, 4, 10-11
- TOYCO, 98
- Monge, Gaspard, 181
- Motor**
 - analítico de Babbage, 5
 - de diferencias de Babbage, 5
- Muestreo**
 - en simulación, métodos de
 - aceptación-rechazo, 686-687
 - convolución, 686, 688-689
 - inverso, 687-688
 - transformación de la distribución normal, Box-Muller, 689-690
 - en una distribución
 - de Erlang (gamma), 688
 - de Poisson, 688-689
 - discreta, 692-698
 - exponencial, 687-688
 - normal, 689
 - triangular, 697-698
 - uniforme, 697
- Multiplicador(es)**
 - lagrangeanos, 723
 - método de, 190. *Vea también Algoritmo de transporte*
 - simplex, 190. *Vea también Precio dual*
- N**
 - Nash, John, 559
 - Notación de Kendall, 636
- Números**
 - aleatorios, generador de, 683, 692
 - seudoaleatorios, 690
- O**
 - Olvido de la exponencial, 626
 - Operación triple (algoritmo de Floyd), 228
 - Optimización clásica
 - restringida, 716-728
 - condiciones de Karush-Khun-Tucker, 724-728
 - método jacobiano, 717-723
 - método lagrangeano, 723-724
 - sin restricciones, 711-716
 - método de Newton-Raphson, 714-716
 - Óptimos alternativos en PL, 89
- P**
 - Paradoja de Petersburgo, 549
 - Paso**
 - adelante en CPM, 246-247
 - atrás en CPM, 246
 - Periodo(s)**
 - de calentamiento. *Vea Periodo transitorio transitorio en simulación*, 699
 - PERT.** *Vea Técnica de evaluación y revisión del programa*
 - Petrie, Flinders**, 406-407
 - Planeación**
 - de necesidades de materiales, 487-488
 - militar, 66
 - Política**
 - de inventarios, 474
 - s-S, 590-593
 - Precio(s)**
 - dual
 - determinación algebraica del, 99, 293

- determinación gráfica del, 95
- relación con las variables duales, 150
- en PL, híbridos, 109
- sombra. *Vea* Precio dual
- Presolucionador, 112
- Presupuestación de capital, 330-331
- Principio de optimalidad en la PD, 442
- Probabilidad(es)
 - condicional, 514-515
 - de Bayes, 532, 546-549
 - de transición. *Vea* Cadenas de Markov
 - posteriores. *Vea* Probabilidades de Bayes
 - previas, 546. *Vea* Probabilidades de Bayes
- Problema(s)
 - de carga fija, 332-334
 - de cobertura de conjunto, 332
 - de la dieta, 20-22
 - de la mochila, 262, 445-450
 - de la ruta más corta
 - algoritmos, 194, 225-228, 231-233, 448
 - aplicaciones, 222-225
 - solución por computadora usando, 228, 231, 233-235
 - de la secretaria. *Vea* Problema del matrimonio
 - de N reinas como PLE, 360
 - del agente viajero, 405-438
 - algoritmos exactos, 411-415
 - algoritmos heurísticos, 415-418
 - algoritmos metaheurísticos, 419-427
 - aplicaciones del, 408, 429, 430-435, 405, 429, 432
 - cota inferior, 410-411
 - matriz de distancia asimétrica, 407
 - matriz de distancia simétrica, 407
 - modelo de asignación, relación con, 408, 410
 - solución de, 409
 - solución de recorrido abierto, 410
 - subrecorridos, 407
 - del cumpleaños, 513-514
- del elevador, 9
- del matrimonio, 442-443
- del vendedor de periódicos, 588-590
- dual en PL
 - definición de, 139-142, 292
 - interpretación económica, 149-152
 - solución óptima, 144-147, 290-294
 - teoría de la dualidad débil, 292
 - uso en el algoritmo de transporte, 196-197
- entero
 - cero-uno, conversión a, 330
 - combinado, 330
 - puro, 330
- Proceso
 - de jerarquía analítica (PJA), 537-544
 - consistencia, 541-542
 - matriz de comparación, 539
 - normalización de una matriz de comparación, 541
- de Markov, definición de, 600
- Programación
 - cuadrática, 747-748, 751, 756, 760
 - de metas, 311-320
 - método de los pesos, 313-315
 - método preventivo, 313, 315-320
 - regla de eliminación de columnas, 315-316, 317-320
 - variables de desviación, 312
- de restricciones, 393-395
 - propagación de restricciones, 394
- dinámica, 439-470
 - aplicaciones, 439-443, 445-450, 450-452, 452-458, 491-497, 557-559
 - ecuación recursiva, 442
 - estado en la PD, 442, 445
 - etapa en la PD, 440, 445
 - modelos deterministas, 439-470
 - principio de optimalidad, 443
 - problema de dimensionalidad, 458

- recursividad de avance, 443
- recursividad de retroceso, 443
- estocástica, 751-754
- lineal
 - análisis de sensibilidad, 94-106, 107-114, 147, 150-154, 159, 170, 281, 347
 - análisis postóptimo, 139-162. *Vea también Programación lineal; análisis de sensibilidad*
 - aplicaciones, 37-46. *Vea también Análisis de casos*
 - cambios en la factibilidad (lado derecho), 156-157
 - cambios en la optimalidad (función objetivo), 152-154
 - restricción adicional, 158-159
 - solución de punto de esquina, 111. *Vea también Punto extremo*
 - solución factible, 17
 - solución factible óptima, 154
 - solución gráfica de un modelo de dos variables, 18, 20
 - solución no factible, 19
 - variable adicional, 152
 - paramétrica, 295-299. *Vea también Programación lineal; análisis de sensibilidad*
 - separable, 740-747
 - convexa, 744-747
- Propiedad de la falta de memoria.
 - Vea Distribución exponencial, propiedad de olvido*
- Prueba(s)
 - de bondad del ajuste, 527-530
 - de Kolmogorov-Smirnov, 528
 - de la ji-cuadrada. *Vea Prueba de bondad del ajuste*
- Puentes de Königsberg, 219
- Punta de silla, 556
- Punto(s)
 - de esquina en PL, 20. *Vea también Punto extremo en PL*
 - relación con el punto extremo en PL, 275
 - relación con la solución básica, 71
 - de reorden en inventarios, 475, 478-479
 - extremo en PL
 - definición del, 275
 - relación con la solución básica, 276-278
 - visto gráficamente como punto de esquina, 20
- R**
- Razón insuficiente, principio de la, 552
- Recursividad hacia adelante en PD, 443
- Recurso, tipos de, 80
- Red(es)
 - ciclo en una, 218
 - conectada, 218
 - residuos en, 237
- Redondeo en el método simplex, error de, 82, 83, 85
- Reducción de precios en inventarios, 480-484
- Regla(s)
 - de eliminación de columnas en la programación de metas, 315-320
 - de factibilidad del 100% en PL, 135
 - de Franklin, 368
 - de optimalidad del 100% en PL, 137
- Relaciones primal-dual en PL, 142-148, 279
- Representación de redes en PL
 - flujo máximo, 242
 - método de la ruta crítica, 243-244
 - red capacitada, 236
 - ruta más corta, 252-253
- Residuos en redes, 237
- Restricción(es)
 - artificiales en el método dual simplex, 172
 - de no negatividad, 24
 - secundarias, 175

- si-entonces, 334
- uno-u-otro, 334-336
- Revisión
 - continua en inventarios, 475
 - periódica en inventario, 475
- Riesgo, tipos de, 544
- Rotación de inventarios, 472-473
- Ruta en redes, 218

- S**
- Salir de la cola, 625
- Semilla de un generador de números aleatorios, 683
- Simon, Herbert, 314
- Simulación
 - de eventos discretos
 - animación, 702
 - estado estable, 698
 - estado transitorio, 698-700
 - hoja de cálculo, 696-698
 - lenguajes, 701
 - mecánica de, 692-698
 - muestreo, 686-690
 - observaciones estadísticas, recopilación de, 698-701
 - de Monte Carlo, 681-702
- Solución
 - básica, 71-72, 276-278
 - de sondeo a fondo en el algoritmo de ramificación y acotamiento, 339, 343
 - relación con un punto de esquina (extremo), 71, 276
 - factible, 4
 - gráfica
 - juegos, 557-560
 - maximización de PL, 17
 - minimización de PL, 20
 - inicial
 - de la esquina noroeste, 186-187, 189
 - del transporte a menor costo, 186-187
- no acotada en PL, 91-92, 283, 293
- no factible en PL, 92
- óptima, 29, 151
- subóptima, 4
- Solver
 - basado en Excel, 22-26
 - comercial, 111-112
- Sudoku, juego como PLE, 352

- T**
- Tabla(s)
 - estadísticas, 763-765
 - basadas en Excel (16 fdp), 518, 521, 522, 523, 525
 - ji cuadrada, 765
 - normal, 763-764
 - t de Student, 764-765
 - simplex, 76, 142
 - cálculo matricial de la, 145-146
 - distribución de la, 143-144
 - forma matricial de la, 142, 279-281
- Técnica
 - de evaluación y revisión del programa (PERT), 243-255
 - de IO, 4
- Teorema del límite central, 524
- Teoría(s)
 - de juegos, suma cero, 541-547
 - no cooperativos, (¡ajá!), 559
 - solución óptima, 555-562
 - de la dualidad débil, 292
 - de probabilidad, repaso de, 443
- Tiempo
 - de espera en los modelos de inventario, 478
 - del primer paso. Vea Cadenas de Markov
 - medio de retorno. Vea Cadenas de Markov
- Toma de decisiones, tipos de, 537-579
 - con certidumbre, 537-544

- con incertidumbre, 551-554
 - con riesgo, 544-551
 - TSP. *Vea Problema del agente viajero*
 - Twain, Mark, 529
- V**
- Valor(es)
 - de un juego, 556
 - esperado, definición de, 517
 - variables aleatorias conjuntas, 518-520
 - medio, 517. *Vea también* Valor esperado, definición de
 - unitario de un recurso. *Vea Precio dual*
 - VAM. *Vea Método de aproximación de Vogel*
 - Variable(s)
 - acotadas
 - algoritmo primal simplex para, 287-292
 - algoritmo simplex dual para, 294
 - definición de, 288
 - aleatorias
 - definición de, 516
 - desviación estándar, 517-518
 - valor esperado, 517
 - varianza, 517-518
 - artificial en el método simplex, 82. *Vea también Método M*
 - básica, 73, 277
 - de cota superior, 288
 - de desviación en la programación de metas, 312
 - de excedencia, 70
 - de holgura, 69
 - de simulación basada
 - en el tiempo, 695
 - en la observación, 696
 - dual
 - relación con precio dual, 149
 - valor óptimo de, 144-147
 - no básica, 73, 279
 - no restringida, 27, 36
 - en la programación de metas
 - tipos de
 - acotada, 287-289
 - artificial, 82
 - básica, 73
 - binaria, 329, 330
 - de desviación, 312
 - de excedencia, 70
 - de holgura, 69-70
 - entera, 329
 - no básica, 73
 - no restringida, 27, 36
 - Varianza de una variable aleatoria, 517-518
 - Vecindad en heurística, definición de, 386
 - Vectores, independencia lineal, 277

Esta nueva edición de *Investigación de operaciones* revisa los aspectos teóricos del área con un enfoque en la implementación algorítmica y práctica de las técnicas de la investigación de operaciones, y énfasis en el desarrollo de algoritmos en diversos escenarios, con apoyo en anécdotas, hechos históricos y sugerencias para una mejor comprensión de los conceptos revisados.

Entre las novedades más importantes de esta edición destacan las siguientes:

- Secciones con anécdotas, historias y consejos didácticos para profesores y estudiantes.
- Presentación del modelo de inventarios en el contexto de las cadenas de suministro.
- Nuevas secciones de temas computacionales sobre el método simplex revisado y el modelo de inventarios.
- Lista de problemas al final de cada capítulo con referencia a la sección a la que pertenecen.
- Problemas inéditos a lo largo de todos los capítulos.
- Aplicaciones de la vida real totalmente desarrolladas.
- Actividades para desarrollar en Excel Solver, TORA y AMPL.

Para más información sobre este libro y los recursos adicionales visite:

www.pearsonenespañol.com/taha

www.pearsonenespañol.com

ISBN 978-607-32-4121-2



A standard linear barcode representing the ISBN 9786073241212. The barcode is composed of vertical black lines of varying widths on a white background. To the left of the barcode, the numbers "9 786073 241212" are printed vertically, and to the right, the numbers "9 0 0 0 0" are printed vertically.