Mini-projet

Exercice 1 – Problème du mini-projet

On considère un groupe de 7 étudiants notés A, B, C, D, E, F et G. Pour un mini-projet, les étudiants se mettent en équipes mais il faut respecter les incompatibilités entre les étudiants. Dans le tableau ci-dessous, chaque croix indique une incompatibilité entre les étudiants correspondants.

•	A	B	C	D	E	F	G
A	•	X	•	•	X	X	•
B	X	•	X	•	•	•	•
C	•	X	•	X	X	X	•
D	•	•	X	•	X	X	X
E	X	•	X	X	•	X	X
F	X	•	X	X	X	•	•
G	•	•	•	X	X	•	•

1. Modéliser ce problème par un programme linéaire (PL).
2. Donner le modèle `AMPL` associé à (PL).
3. Résoudre ce problème avec le solveur `CPLEX` pour trouver le nombre minimal d'équipes qu'il faut créer.

Exercice 2 – Problème d'affectation des équipages

Un problème important des compagnies aériennes consiste à constituer de façon efficace des équipages pour ses vols. Pour un équipage donné, une rotation consiste en une succession de services de vol débutant et se terminant en une même ville. Comme il y a un coût associé à chaque séquence de vols, la compagnie cherche à minimiser les coûts d'affectation des équipages aux séquences tout en assurant le service sur chacun des vols.
Considérons par exemple un problème avec 11 vols et 12 séquences de vols, dont les données sont décrites dans la Table 1. Les variables sont

Vol | Séquence	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1			1			1			1		
2		1			1			1			1	
3			1			1			1			1
4				1			1		1	1		1
5	1					1				1	1	
6				1	1				1			
7							1	1		1	1	1
8		1		1	1				1			
9					1			1			1	
10			1				1	1				1
11						1			1	1	1	1
Coût	2	3	4	6	7	5	7	8	9	9	8	9

Table 1: Affectation d'équipages.

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si la séquence de vols } j \text{ est affectée;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'objectif est

$$\min z = ...$$

Nous devons affecter trois équipages

$$\sum_{j=1}^{12} x_j = 3.$$

Le service doit être assuré sur chacun des vols:

$$\ldots$$

En pratique, il faut tenir compte des contraintes imposées par les conventions collectives, ce qui complique singulièrement le problème.
Un problème de recouvrement d'ensemble met en oeuvre

- I: un ensemble d'objets (les vols dans l'exemple précédent);
- $\mathcal{J}$: une collection de sous-ensembles de I (e.g. les séquences de vols);
- J_i, $i \in I$: les sous-ensembles dans $\mathcal{J}$ qui contiennent i.

Nous avons les variables binaires x_j, prenant la valeur 1 si le sous-ensemble j est choisi, et 0 sinon. En considérant un objectif linéaire, avec c_j le coût associé au sous-ensemble j. Nous obtenons le programme

$$\begin{aligned}
\min_x \ & \sum_{j \in \mathcal{J}} c_j x_j \\
\text{s.c.} \ & \sum_{j \in J_i} x_j \geq 1, \ i \in I; \\
& x_j \in \{0, 1\}, \ j \in \mathcal{J}.
\end{aligned}$$

1. Modéliser ce problème par un programme linéaire (PL).
2. Donner le modèle `AMPL` associé à (PL).
3. Résoudre ce problème avec le solveur `CPLEX` pour trouver l'affectation optimale.

Exercice 3 – Problème de linéarisation

On considère le programme mathématique suivant :

$$\begin{array}{ll}
\text{Min Z} = max(7x_1 \ + 4x_2 \ + x_3, \ x_1 \ - 3x_3) & \\
\text{s.c.} \left\{ \begin{array}{rrrcl}
6x_1 & +3x_2 & +4x_3 & \geq & 2 \\
3x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 7 \\
x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array} \right. &
\end{array} \tag{1}$$

1. Linéariser la fonction objectif.
2. Modéliser le programme (PL 1) avec `AMPL`.
3. Résoudre (PL 1) avec `CPLEX`.