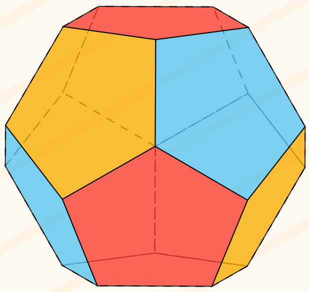
تمارين وحلول

أولمبياد الرياضيات



يونس الشيهي

الهندسة

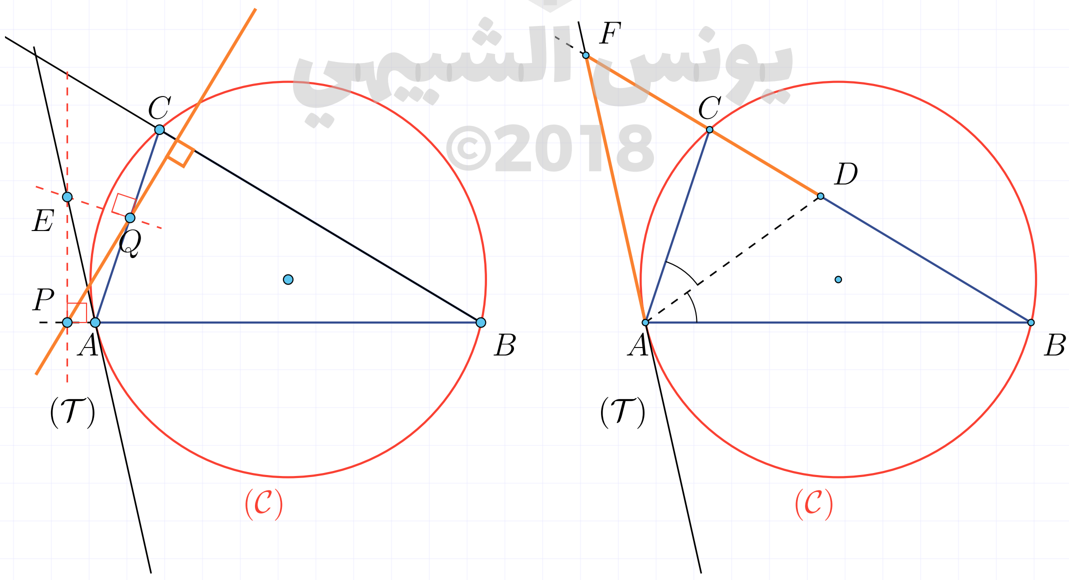
التمرين 1 جذع مشترك 2017

ليكن ABC مثلثا و $(\mathcal{C})$ دائرته المحيطة به. نعتبر نقطة E من المماس $(\mathcal{T})$ للدائرة $(\mathcal{C})$ في النقطة A. النقطتين P و Q هما على التوالي المسقطين العموديين للنقطة E على المستقيمين (AB) و (AC).

1. بين أن المستقيمين (PQ) و (BC) متعامدين.
2. المماس $(\mathcal{T})$ و المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{BAC}$ يقطعان المستقيم (BC) في النقطتين F و D على التوالي. بين أن $FD = FA$.

إشارة

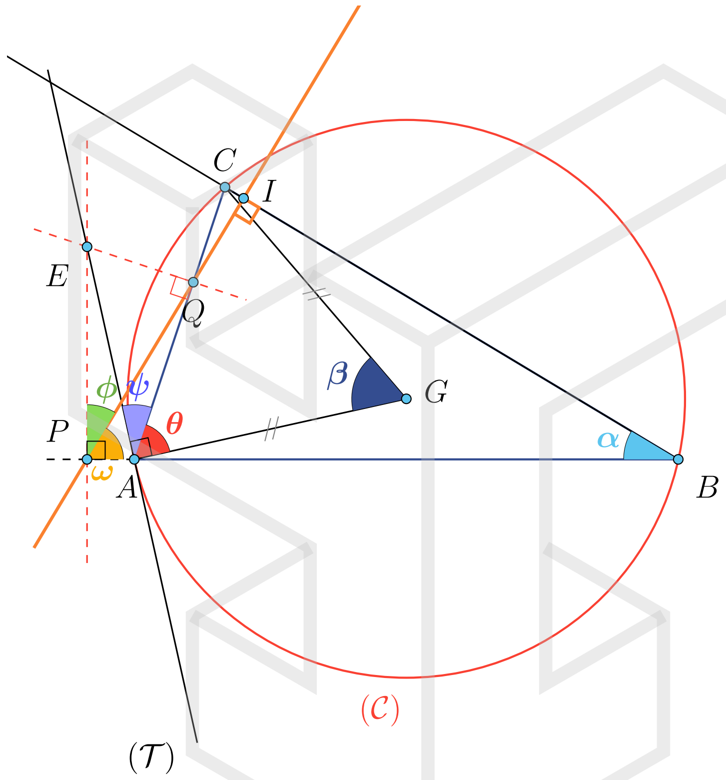
في ما يلي، الأشكال الهندسية المحصل عليها من خلال معطيات التمرين:



الحل

1. لنبين أن المستقيمين (PQ) و (BC) متعامدين:

كما جاء في الإشارة، سوف نستعمل خصائص الزوايا في البرهان، سنقوم إذا بتسمية بعض الزوايا و نقط التقاطع:



بحيث:

- I نقطة تقاطع المستقيمين (PQ) و (BC)
- G مركز الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث ABC
- $\widehat{CGA} = \beta$ $\widehat{CBA} = \widehat{IBP} = \alpha$
- $\widehat{QAE} = \psi$ $\widehat{QAG} = \theta$
- $\widehat{QPE} = \phi$ $\widehat{BPI} = \omega$

بهذا الشكل يسهل كتابة العلاقات و التعرف على الزوايا، يكفي إذا أن نبين أن في المثلث PIB، الزاويتين $\widehat{IPB}$ و $\widehat{IBP}$ متتامتين يعني أن $\boxed{\alpha + \omega = 90^\circ}$، لنستنتج بعد ذلك أن المثلث PIB قائم الزاوية في I.

يجب الآن ترجمة معطيات التمرين إلى معادلات تخص الزوايا:

- $(\mathcal{C})$ الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و G مركزها:

إذا فالزاويتين $\widehat{CBA} = \alpha$ المحيطية و $\widehat{CGA} = \beta$ المركزية يحصران نفس القوس، إذا:

$$\boxed{\beta = 2 \times \alpha} \qquad (1)$$

يمكن أيضا القول أن المثلث AGC متساوي الساقين في G، و بالإستعانة بالشكل يمكن كتابة العلاقة التالية:

$$\boxed{\beta + 2 \times \theta = 180^\circ} \tag{2}$$

نلخص إذا المعطى الأول للتمرين بالنتيجة المستخلصة من (1) و (2) :

$$\boxed{\alpha + \theta = 90^\circ} \tag{3}$$

- $(\mathcal{T})$ المماس للدائرة $(\mathcal{C})$ في النقطة A و E نقطة من المماس:

إذا فالزاوية $\widehat{EAG}$ زاوية قائمة و بالإستعانة بالشكل يمكن كتابة ما يلي:

$$\boxed{\psi + \theta = 90^\circ} \tag{4}$$

يمكن إذا القول من (3) و (4):

$$\boxed{\alpha = \psi} \tag{5}$$

- النقطتين P و Q هما على التوالي المسقطين العموديين للنقطة E على المستقيمين (AB) و (AC):

إذا فالمثلثين EPA و EQA قائما الزاوية في P و Q على التوالي، و بما أنهما يشاركان نفس القطر EA، فإن النقط E، P، Q و A متداورة، إذا:

– الزاوية $\widehat{EPA}$ قائمة:

$$\boxed{\phi + \omega = 90^\circ} \tag{6}$$

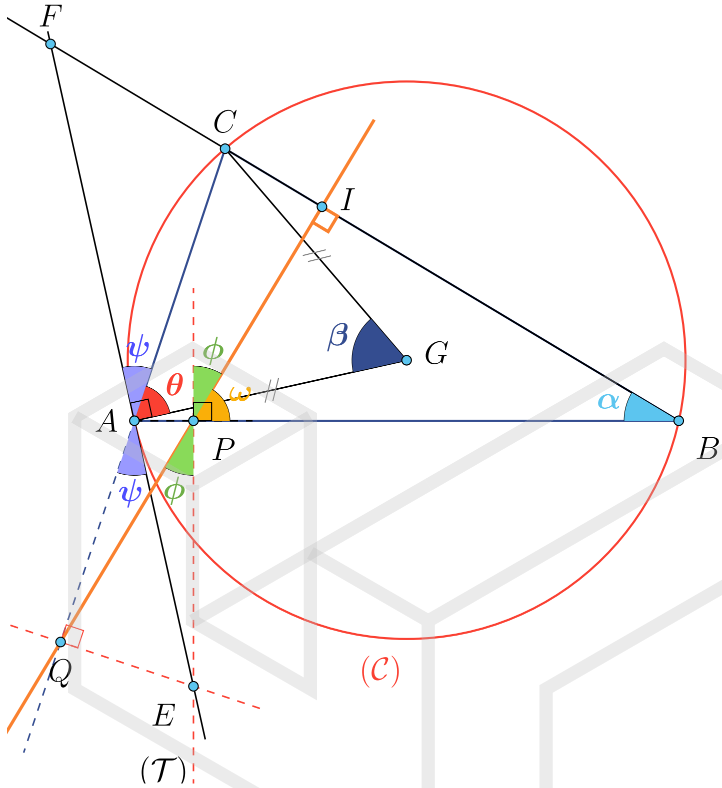
– $\widehat{EAQ}$ و $\widehat{EPQ}$ زاويتين محيطيتان تحصران نفس القوس:

$$\boxed{\phi = \psi} \tag{7}$$

الآن و قد استعملنا جميع معطيات التمرين، يمكن استنتاج من (5)، (6) و (7):

$$\boxed{\alpha + \omega = 90^\circ}$$

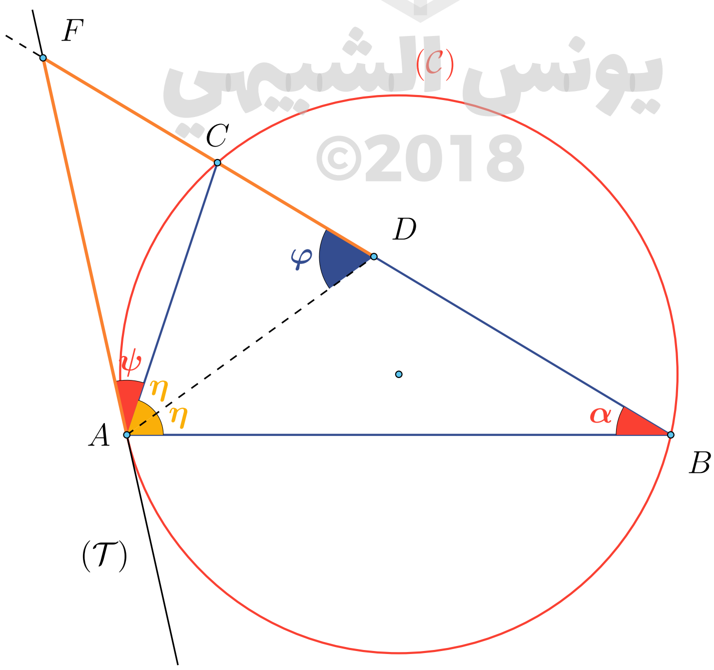
و بهذا نصل إلى النتيجة المطلوبة، نلاحظ أننا اعتمدنا على الشكل في البرهان، فهل هذا البرهان صالح في حالة تواجد النقطة E في الجزء السفلي من الشكل؟



فمن خلال الشكل، وجب الإشارة أن البرهان لا زال صالحا باتخاذ الزوايا المتقابلة بالرأس لكل من الزاويتين ϕ و ψ.

2. لنبين أن $FD = FA$.

كما جاء في الإشارة أيضا، سوف نستعمل خصائص الزوايا في البرهان، سنقوم إذا بتسمية بعض الزوايا:



بحيث: $\widehat{\mathsf{CDA}} = \varphi$ $\quad \widehat{\mathsf{CAD}} = \widehat{\mathsf{DAB}} = \eta$ (المعطى) $\quad \widehat{\mathsf{CAF}} = \psi$ $\quad \widehat{\mathsf{CBA}} = \widehat{\mathsf{DBA}} = \alpha$

كبداية، يمكن القول من خلال السؤال الأول أنه بما أن $(\mathcal{C})$ الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و $(\mathcal{T})$ المماس للدائرة $(\mathcal{C})$ في النقطة A، فإن:

$$\boxed{\alpha = \psi} \tag{8}$$

من خلال الشكل، الزاوية φ زاوية خارجية للمثلث DBA إذا:

$$\boxed{\varphi = \eta + \alpha} \tag{9}$$

نستنتج من (8) و (9) أن:

$$\widehat{\mathsf{FAD}} = \eta + \psi = \eta + \alpha = \varphi = \widehat{\mathsf{FDA}}$$

و هذا يعني أن المثلث FAD مثلث متساوي الساقين في F، و منه $\mathsf{FD} = \mathsf{FA}$.