يوليوز 2017	موضوع الرياضيات	مدة الإنجاز: 4 س.

يشتمل موضوع مادة الرياضيات لهذه المباراة على مسألة تتعلق بدراسة تسام ولاجذرية بعض الأعداد الحقيقية ؛ ويمكن لأي مترشح ، من أجل الإجابة على سؤال ما من المسألة، أن يقبل نتائج الأسئلة السابقة ولو لم يُجِب عنها، وأن يستعمل هذه النتائج شريطة الإشارة بدقّة إلى أرقام الأسئلة المعنية.

وتجدر الإشارة إلى أنّ مدى حرص المترشح على اعتماد الوضوح والضبط في تقديم الأجوبة وفي تحريرها، ومدى التزامه بالدّقة في الاستدلال والبرهان تعتبر من العناصر المهمّة التي سيتمّ أخذها بعين الاعتبار أثناء القيام بعملية التصحيح. وفي هذا الاطار، **يجب ضبط أرقام الأسئلة التي تتم الإجابة عنها بكل دقّة** .

لا يسمح باستعمال حاسوب أو آلة حاسبة أو لوحة إلكترونية.

إذا بدا لأحد المترشحين أثناء الاختبار على أنّ هناك خطأً ما في موضوع المباراة فَلْيُشِر إلى ذلك على ورقة تحريره وليواصل اختباره مبرزا أسباب المبادرات التي قد يُقدم على اتخاذها.

المسألة

دراسة لاجذرية وتسام بعض الأعداد الحقيقية

تعاريف ورموز

1ـ لكل r و k من $\mathbb{N}$ حيث $k \leqslant r$ ، نرمز بـ $\binom{r}{k}$ للمعامل الحدّاني المعرّف بـ $\binom{r}{k} = \dfrac{r!}{k!(r-k)!}$.

بالتوافق نضع $\binom{r}{k} = 0$ إذا كان $r < k$.

2ـ **المشتقات المتتالية لدالة**

ليكن I مجالا غير تافه من المجموعة $\mathbb{R}$ ولتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة عددية معرفة على I ، وليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم. نضع بالتوافق $f^{(0)} = f$.

✓ نقول إنّ f قابلة للإشتقاق مرّة واحدة على I إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على I ؛ في هذه الحالة نضع $f^{(1)} = f'$ حيث f' الدالة المشتقة للدالة f ، وتسمى $f^{(1)}$ بالدالة المشتقة رتبة 1 للدالة f .

✓ نقول إنّ f قابلة للإشتقاق مرّتين على I إذا كانت الدالة $f^{(1)}$ قابلة للإشتقاق على I ؛ في هذه الحالة نضع $f^{(2)} = \left(f^{(1)}\right)'$ حيث $\left(f^{(1)}\right)'$ الدالة المشتقة للدالة $f^{(1)}$ ، وتسمى $f^{(2)}$ بالدالة المشتقة رتبة 2 للدالة f .

✓ بالترجع، نقول إنّ f قابلة للإشتقاق n مرّة على I إذا كانت الدالة $f^{(n-1)}$ قابلة للإشتقاق على I ؛ في هذه الحالة نضع $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ حيث $\left(f^{(n-1)}\right)'$ الدالة المشتقة للدالة $f^{(n-1)}$ ، وتسمى $f^{(n)}$ بالدالة المشتقة رتبة n للدالة f .

3ـ نرمز بـ $\mathscr{P}$ لمجموعة الدوال الحدودية المعرفة على $\mathbb{R}$ والتي معاملاتها أعداد حقيقية؛ ولكل عدد صحيح طبيعي n ، نرمز بـ $\mathscr{P}_n$ لمجموعة الدوال الحدودية المنتمية إلى $\mathscr{P}$ والتي لا تتعدى درجتها n .

نذكّر بما يلي:

✓ كل الدوال الحدودية من $\mathscr{P}$ قابلة للإشتقاق n مرّة على $\mathbb{R}$ وذلك لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n .

✓ لكل n من $\mathbb{N}$ وكل P من $\mathscr{P}_n$ فإنّ $P^{(k)} = 0$ لكل عدد صحيح طبيعي $k \geq n+1$.

✓ لكل P و Q من $\mathscr{P}$ لدينا $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ بحيث يُرمَزُ بـ $\deg(R)$ لدرجة الدالة الحدودية R .

الجــزء الأول
بـعـض النـتـائـج الأولـيـة المـهـمـة

1.1. صيغة طـايـلور[1] للحدوديات

بين أنّ لكل عدد صحيح طبيعي n وكل دالّة حدودية $P \in \mathscr{P}$ ، من الدرجة n ، لدينا صيغة طـايـلور التالية:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (1)$$

2.1. تطبيق أول

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم ؛ نعتبر الدالّة الحدودية U_n المعرّفة بـ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad U_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

1.2.1. بين أنّ لكل k من $\{0, \ldots, n-1\}$ لدينا $U_n^{(k)}(0) = 0$ و $U_n^{(k)}(1) = 0$.

2.2.1. حدّد بدلالة n و k قيمة كل من العددين $U_n^{(n+k)}(0)$ و $U_n^{(n+k)}(1)$ لكل k من $\{0, \ldots, n\}$ ، ثم تحقق أنّ كل هذه الأعداد صحيحة.

3.1. تطبيق ثاني : رتبة التعددية لجذر دالة حدودية

لتكن P دالة حدودية من $\mathscr{P}$ ، و x_0 عددا حقيقيا، و r عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

تعريف : نقول إنّ x_0 جذر للدالة P من الدرجة r إذا وجدت دالة حدودية Q من $\mathscr{P}$ تحقق:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \ P(x) = (x-x_0)^r Q(x), \\ Q(x_0) \neq 0. \end{cases}$$

بين أنّ x_0 جذر للدالة P من الدرجة r إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} P^{(k)}(x_0) = 0, \ 0 \leq k \leq r-1, \\ P^{(r)}(x_0) \neq 0. \end{cases}$$

4.1. صيغة ليبنز[2] لإشتقاق جداء

ليكن I مجالا غير تافه من المجموعة $\mathbb{R}$ ، وليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم. نعتبر دالتين عدديتين $f : I \to \mathbb{R}$ و $g : I \to \mathbb{R}$ قابلتين للإشتقاق n مرة على I . بين أنّ الدالة fg قابلة للإشتقاق n مرة على I وأنّ

[1] TAYLOR, math. angl. (1685-1731)
[2] LEIBNIZ, philo. et math. allemand. (1646-1716)

$$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x). \tag{2}$$

إشارة : يمكن الإستدلال بالترجع واستعمال صيغة باسكال[3] التالية :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}, \ 1 \leq k \leq n-1.$$

5.1. **صيغة التكامل بالأجزاء المعادة**

ليكن a و b عددين حقيقيّن بحيث $a < b$ ، وليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم. نعتبر دالتين عدديتين $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ و $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ قابلتين للإشتقاق n مرة على $[a,b]$ بحيث تكون الدالتان $f^{(n)}$ و $g^{(n)}$ متصلتين على $[a,b]$. بين صيغة التكامل بالأجزاء المعادة التالية:

$$\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(f^{(n-k)}(b)g^{(k-1)}(b) - f^{(n-k)}(a)g^{(k-1)}(a)\right). \tag{3}$$

6.1. **دراسة بعض المتتاليات**

1.6.1. لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث تكون المتتالية $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ونهايتها 0 . بين أنّ المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ونهايتها 0 .

2.6.1. ليكن λ عددا حقيقيا غير منعدم. بين أنّ المتتالية $\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ونهايتها 0 .

7.1. **شرط كاف للاجذرية عدد**

لكل عدد حقيقي غير منعدم θ نضع

$$\theta\mathbb{Z} = \{k\theta \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \{k + k'\theta \ ; \ (k,k') \in \mathbb{Z}^2\}.$$

1.7.1. نفترض أنّ $\theta = \frac{p}{q}$ بحيث $(p,q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ و $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$. بين أنّ $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.

2.7.1. لتكن $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة من أعداد صحيحة، نهايتها 0 . بين وجود عدد $N \in \mathbb{N}^*$ بحيث
$$\forall n \geq N, \quad k_n = 0.$$

3.7.1. ليكن φ عددا حقيقيا غير منعدم، ولتكن $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتاليتين من أعداد صحيحة تحقق:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n\varphi - q_n \neq 0.$$

نفترض أنّ المتتالية $(p_n\varphi - q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ونهايتها 0 . بين أنّ العدد φ لاجذري.

الجـزء الثـاني

لاجذرية العـدد e^r لكل عدد جذري غير منعدم r

الهدف من هذا الجزء هو تبيان لاجذرية العدد e^r لكل عدد جذري غير منعدم r .

1.2. **إنشاء العدد e ، أساس اللوغاريتم النبيري**

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفتين بما يلي:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

1.1.2. بين أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متحاديتان. نرمز فيما يلي بـ e لنهايتهما المشتركة.

[3] PASCAL, math. et phy. fran. (1623-1662)

2.1.2. بيّن انّ $u_n < e < v_n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ واستنتج أنّ $2.66 < e < 2.71$.

3.1.2. **لاجذرية العدد** e

نستدل بالخلف ونفترض أنّ العدد e جذري ثم نضع $e = \dfrac{p}{q}$ بحيث $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$. بيّن أنّ $q!u_q$ عدد صحيح واخلص إلى تناقض.

نعتبر، فيما تبقى من هذا الجزء، الدالتين الحدوديتين U_n **و** L_n **المعرفتين، لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم** n ، بـ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}, \;\; L_n(x) = U_n^{(n)}(x)$$

و نضع

$$T_n(x) = \int_0^1 e^{xt}\, L_n(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

2.2. بين أنّ لكل n من $\mathbb{N}^*$ وكل عدد حقيقي غير منعدم x لدينا

$$T_n(x) = (-1)^n x^n \int_0^1 e^{xt}\, U_n(t)\,\mathrm{d}t$$

وأنّ $T_n(x) \neq 0$.

3.2. بين أنّ لكل n من $\mathbb{N}^*$ وكل عدد حقيقي غير منعدم x لدينا

$$|x^n T_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{4^n n!} \max(1, e^x)$$

ثم استنتج أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n T_n(x) = 0$.

4.2. بين أنّ لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n ، توجد دالتين حدوديتين Q_n و P_n ، عواملها أعداد صحيحة ودرجتهما n ، بحيث

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^{n+1}\, T_n(x) = Q_n(x)\, e^x - P_n(x).$$

إشارة : يمكن استعمال صيغة التكامل بالأجزاء المعادة (3) ونتيجة السؤال 2.2.1. من الجزء الأول .

5.2. بين لاجذرية العدد e^r لكل عدد صحيح غير منعدم r .

6.2. بين لاجذرية العدد e^r لكل عدد جذري غير منعدم r ، ثم استنتج لاجذرية العدد $\ln \alpha$ لكل عدد جذري α موجب قطعا ويخالف 1 .

الجزء الثالث
بعض النتائج حول الحدوديات

نربط كل دالة حدودية P من $\mathscr{P}$ ، **درجتها** $n \geq 1$ ، بالدالة الحدودية Q_P المعرفة بما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_P(x) = P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x).$$

1.3. تحقق أنّ لكل دالة حدودية P من $\mathscr{P}$ ، درجتها $n \geq 1$ ، لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_P(x) = P(x) + Q_{P'}(x).$$

2.3. نريد أن نبين هنا أنّ لكل دالة حدودية P من $\mathscr{P}$ ، درجتها $n \geq 0$ ، لدينا:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad a\int_0^1 e^{a(1-t)}P(at)\,\mathrm{d}t = e^a\,Q_P(0) - Q_P(a). \tag{4}$$

.1.2.3 تحقق أنّ الصيغة (4) صحيحة لكل دالة حدودية ثابتة.

.2.2.3 بين بالترجع أنّ الصيغة (4) صحيحة لكل عدد صحيح طبيعي n وكل دالة حدودية P من $\mathscr{P}$ درجتها n.

إشارة : يمكن استعمال مكاملة بالأجزاء.

.3.3 لتكن V دالة حدودية معاملاتها أعداد صحيحة ودرجتها $n \geq 1$ ؛ نعتبر أنّ الدالة V معرفة بما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad V(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

بحيث $b_0, b_1, \ldots, b_n$ أعداد صحيحة.

نعتبر عددا صحيحا طبيعيا $p \geq 2$ ونعرف الدالة الحدودية F بما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \frac{1}{(p-1)!}\,x^{p-1}V(x).$$

.1.3.3 حدد درجة الدالة الحدودية F .

.2.3.3 نرمز بـ m لدرجة الدالة الحدودية F و بـ $a_0, a_1, \ldots, a_m$ لمعاملاتها:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m.$$

حدد قيم الأعداد $a_0, a_1, \ldots, a_m$ بدلالة الأعداد $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

.3.3.3 بيّن أنّ $Q_F(0)$ عدد صحيح .

إشارة : يمكن استعمال صيغة طايلور للحدوديات .

.4.3.3 بيّن أنّ العدد $Q_F(0) - V(0)$ قابل للقسمة على p .

.4.3 لتكن W دالة حدودية معاملاتها أعداد صحيحة ودرجتها $n \geq 1$ ؛ نعتبر عددا صحيحا طبيعيا $p \geq 2$ ونعرف الدالة الحدودية P بما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \frac{1}{(p-1)!}\,x^{p-1}(W(x))^p.$$

.1.4.3 بين أنّ لكل k من $\{1, \ldots, (n+1)p-1\}$ ، وكل عدد حقيقي x لدينا:

$$P^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{\min(k,p-1)} \binom{k}{j}\frac{1}{(p-j-1)!}x^{p-j-1}\,(W^p)^{(k-j)}(x)$$

و استنتج أنّ

$$P^{(p-1)}(0) = (W(0))^p.$$

.2.4.3 بين أنّ لكل r من $\{p, \ldots, (n+1)p-1\}$ فإنّ معاملات الدالة الحدودية $P^{(r)}$ أعداد صحيحة قابلة للقسمة على p .

الجـزء الرابـع

تـسـام العـدد e

تعريف

✓ نقول إنّ عددا حقيقيا a **جبري** إذا كان a جذرا لدالة حدودية غير ثابتة ومعاملاتها أعداد صحيحة .

✓ كل عدد غير جبري يسمى **متسام** .

1.4. يبين أنّ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ عدد جبري.

الهدف مما تبقى من أسئلة هذا الجزء هو تبيان تسام العدد e ، وذلك باعتماد برهان بالخلف.

نفترض إذن أنّ e عدد جبري فهو بذلك جذر لدالة حدودية، غير ثابتة ومعاملاتها أعداد صحيحة ؛ ونعتبر عددا صحيحا طبيعيا $n \geq 1$ وأعدادا صحيحة $a_0, a_1, \ldots, a_n$ بحيث $a_0 a_n \neq 0$ و $a_0 + a_1 e + \cdots + a_n e^n = 0$.

نعتبر عددا أوليا p ونعرف الدالة الحدودية P بـ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \frac{1}{(p-1)!}\, x^{p-1}(x-1)^p \cdots (x-n)^p$$

و نضع

$$R_P(\alpha) = \alpha \int_0^1 e^{\alpha(1-t)} P(\alpha t)\, \mathrm{d}t, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

2.4. تحقق أنّ $\sum_{j=0}^{n} a_j e^j Q_P(0) = 0$ ثم بين أنّ $\sum_{j=0}^{n} a_j \big(Q_P(j) + R_P(j)\big) = 0$.

إشارة : يمكن استعمال الصيغة (4) من الجزء الثالث.

3.4. بين أنّ

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad |R_P(j)| \leq \frac{(n!n)^p e^n}{(p-1)!}.$$

4.4 نضع $M = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$.

1.4.4. يبين أنّ

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_j R_P(j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_j R_P(j)\right| \leqslant M\, n^2 n!\, e^n \frac{(n!n)^{p-1}}{(p-1)!}.$$

2.4.4. بين أنّه يمكن اختيار العدد الأولي p بحث $\left|\sum_{j=1}^{n} a_j R_P(j)\right| < 1$.

5.4. بين أنّ الأعداد $Q_P(1), \ldots, Q_P(n)$ قابلة للقسمة على p .

6.4. بين أنّ العدد $Q_P(0) - (-1)^{np}(n!)^{np}$ قابل للقسمة على p .

7.4. بين أنّه إذا كان $p > \max(n, |a_0|)$ فإنّ العدد $a_0\, Q_P(0)$ غير قابل للقسمة على p ثم استنتج أنّ

$$\sum_{j=0}^{n} a_j Q_P(j) = a_0 Q_P(0) + \sum_{j=1}^{n} a_j Q_P(j) \neq 0.$$

8.4. بقيامك بإختيار محكم للعدد الأولي p اخلص إلى تناقض واستنتج تسام العدد e .

نهـاية المسـألة

نهـايــة المــوضــوع