Concours d'accès au cycle de préparation à l'Agrégation de Mathématiques

Analyse et Probabilités

Marrakech-Safi 2017

Durée : 4 heures

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la représentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les *références* des questions abordées.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales.
- L'épreuve se compose de deux exercices et un problème indépendants.
- Les deux exercices doivent être composés dans une copies à part.
- Le problème doit être composé dans une autre copie à part.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad x'(t) = \cos(2\pi(x(t) - t))$$

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz qui s'applique ici.
2. Soit x une solution de (E). Montrer que x est lipschitzienne.
3. Soit x une solution maximale de (E) et $I =]a, b[$ son intervalle de définition.
   Montrer que $I = \mathbb{R}$.
4. Si x est solution maximale de (E) et $k \in \mathbb{Z}$, vérifier que $t \mapsto x(t + k)$ et $k + x$ sont solutions.
   Trouver des solutions simples de (E). Trouver des solutions simples de (E).
5. On fixe une solution maximale de (E). Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) - t$ admet en $\pm\infty$ des limites finies et exprimer ces limites en fonction de $x(0)$.
6. On considère maintenant une solution maximale x de l'équation

$$(E_2): \quad x'(t) = \frac{1}{1 + x^2(t)} + \cos(2\pi(x(t) - t))$$

   Montrer que x est définie sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto x(t) - t$ est bornée.

Exercice 2

1. **Étude d'une intégrale à paramètre**
   Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose
   $$\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$
   (a) Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^\in$ sur $]0,+\infty[$.
   (b) Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.
   (c) Exprimer f'' sur $]0,+\infty[$ à l'aide des fonctions usuelles et en déduire que
   $$\forall x > 0,\ f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$
   (d) Montrer que $f(0) = \pi/2$ et que
   $$\forall x > 0,\ f(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$$
   (e) Montrer
   $$\forall s \in \mathbb{R},\ \mid s \mid = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
2. **Étude d'une suite d'intégrales**
   On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \int_0^\infty \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
   (a) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser la monotonie de la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Montrer que $u_1 = u_2 = \dfrac{\pi}{2}$.
3. **Calcul d'un équivalent de u_n**
   (a) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n \quad \text{avec} \quad v_n = \int_0^\infty \frac{1-\Big(\cos(\sqrt{2u/n}\Big)^n}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$
   (b) Montrer que
   $$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^*\times]0,1], \quad \mid 1-\Big(\cos(\sqrt{2u/n}\Big)^n \mid \leq u$$
   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie l vérifiant
   $$l = \int_0^\infty \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$
   (d) On admet la relation $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$. Montrer que $u_n \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}$.

Problème

On note $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. On note L^1 l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, intégrables sur $\mathbb{R}$ et L^∞ l'espace des fonctions bornées et continues par morceaux de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. L'application $||\ .\ ||_1$: $L^1 \to \mathbb{R}^+$ (respectivement $||\ .\ ||_\infty$: $L^\infty \to \mathbb{R}^+$) qui à f associe $||\ f\ ||_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mid f \mid$ (respectivement $||\ f\ ||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mid f(x) \mid$ est une norme sur L^1 (respectivement L^∞).

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. On appelle support de f l'ensemble $\overline{\{x \in \mathbb{R},\, f(x) \neq 0\}}$. On note $\mathcal{C}_c$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}$ dont le support est un compact de $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une fonction de $\mathcal{C}_c$ est uniformément continue.

Enfin on notera $\mathcal{C}_0 = \left\{ f \in \mathcal{C},\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = 0 \right\}$. C'est un sous espace de L^∞.

On pose pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$. On pourra utiliser sans démonstration que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ainsi que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Partie 1

Convolution

1.(a) Donner une suite de fonctions positives $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}_c$ convergeant simplement en croissant vers $1_{\mathbb{R}}$.

(b) Montrer que $\mathcal{C}_c$ est dense dans L^1. Quelle est l'adhérence de $\mathcal{C}_c$ dans L^∞ ?

2. Pour $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, on pose $\tau_a f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\, x \mapsto f(a+x)$ et $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\, x \mapsto f(-x)$.

(a) Vérifier que $(\tau_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est un groupe commutatif d'isométries de L^1 et de L^∞.

(b) Soit $f \in \mathcal{C}_c$. Montrer que l'application $\Phi_f : \mathbb{R} \to L^1,\, a \mapsto \tau_a f$ est continue en zéro puis qu'elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(c) En déduire que $\forall f \in L^1$, $\Phi_f : a \mapsto \tau_a f$ est uniformément continue.

3. Soit $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$.

(a) Montrer que l'on peut définir les applications

$$f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\, x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, \mathrm{d}y \quad \text{et} \quad g * f : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\, \mathrm{d}y$$

et qu'elles sont égales.

(b) Montrer que $f * g$ est uniformément continue et bornée et que

$$\| f * g \|_\infty \leq \| f \|_1 \| g \|_\infty$$

(c) On suppose que f et g sont tous deux dans $\mathcal{C}_c$. Montrer que $f * g \in \mathcal{C}_c$.

(d) On suppose seulement que $g \in \mathcal{C}_c$. Montrer que $f * g \in \mathcal{C}_0$. A-t-on le même résultat si $g \in \mathcal{C}_0$?

4. Soit $\phi \in L^1 \cap L^\infty$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\, \phi(x) \geq 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, \mathrm{d}x = 1$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(x) = n\phi(nx)$.

(a) Vérifier que la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède les propriétés suivantes :

i. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\, \phi_n(x) \geq 0$.

ii. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)\, \mathrm{d}x = 1$.

iii. $\forall \epsilon > 0,\, \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{\{|x|>\epsilon\}} \phi_n(x)\, \mathrm{d}x = 0$

On suppose en outre que la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie aussi

$$\forall \epsilon > 0,\, \lim_{n\to\infty} \sup_{\{|x|>\epsilon\}} \phi_n(x)$$

(b) Soit $f \in L^1$. Montrer que $(f * \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Partie 2

Transformé de Fourier

On pose $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\phi_n(x) = n\phi(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède les propriétés données dans la partie précédente.

2.(a) Soient n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Exprimer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^p \phi_n(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de n et p.

(b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto e^{zx}\phi_n(x)$ est dans L^1.

(c) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{zx}\phi_n(x)\,\mathrm{d}x = \exp\Big(\frac{z^2}{2n}\Big)$$

3. Soit $f \in L^1$,

(a) Montrer que la fonction $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx} f(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie, continue et bornée.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\widehat{\phi_n}(t) = e^{-2\pi^2 n^{-2} t^2}$.

(c) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{-2\pi^2 n^{-2} t^2} e^{2i\pi tx}\,\mathrm{d}t = f * \phi_n(x)$$

(d) En déduire que si f et g sont deux fonctions de L^1 qui vérifient $\widehat{f} = \widehat{g}$, alors $f = g$.