Concours d'accès au cycle de préparation à l'Agrégation de Mathématiques

Algèbre et Géométrie

Rabat 2018

Durée : 4 heures

Important

L'épreuve est constituée d'un exercice et deux problèmes. Le candidat est invité à bien mentionner les références complètes de chaque question traitée.

Les candidats sont tenus à rendre deux copies séparés mêmes si elles sont vierges. La première contenant la résolution de l'exercice et du problème 1 et la seconde contenant celle du problème 2. Dans chacune des deux copies on indiquera les références du candidat et le nombre d'intercalaires utilisés.

Il sera tenu en compte dans l'appréciation des copies de la rigueur de votre raisonnement, de la clarté de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la présentation de votre copie. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toute fois à mentionner la référence du résultat utilisé.

Si le candidat repère ce qu'il pense être une erreur de l'énoncé, il le signale sur sa copie en expliquant les raisons qui l'ont amené à le penser. Ceci doit pas l'empêcher de finir son épreuve et il a le choix d'adopter les rectifications qu'il croit nécessaire ou pas.

Les calculatrices et tout matériel électronique ainsi que les documents sont interdits lors de cette épreuve.

* * * * * *

Notations

- Dans toute l'épreuve on utilise les notations habituelles des ensembles usuels $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
- Si E désigne un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. L'identité de E est noté Id_E. Si $\phi \in \mathcal{L}(E)$, on note $\mathrm{Tr}(\phi)$ la trace de ϕ et $\det(\phi)$ le déterminant de ϕ.

- On note $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des endomorphismes inversibles de E.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,(\mathbb{K}=\mathbb{R}\,\text{ou}\,\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées de taille n à coefficients dan $\mathbb{K}$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice

1. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^* : (n,m) \mapsto 2^n \times (2m+1)$ est bijective.
2. En déduire une application bijective de $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ puis de $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$.
3. Montrer qu'en général, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, il existe une bijection $\mathbb{N}^d \to \mathbb{N}$.

Problème 1

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit qu'un sous espace vectoriel F de E est stable par f, si $f(F) \subset F$, c'est à dire pour tout $x \in F$, on a $f(x) \in F$.

1. Soit F un sous espace vectoriel de E ayant une famille génératrice finie $(e_1, ..., e_p)$. Montrer que F est stable par f si et seulement si pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, $f(e_i) \in F$.
2. Montrer que toute somme finie de sous espaces vectoriels de E stables par f est aussi stable par f.

Un premier exemple

Dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$, on note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de u avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Déterminer, pour chaque $i \in \{1,2,3\}$, le vecteur ϵ_i de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième composante vaut 1 et vérifiant $u(e_i) = \lambda_i \epsilon_i$.
3. Si $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant $B^2 = A$, on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé. Montrer que la matrice V de v relativement à la base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est diagonale.
4. Trouver alors toutes les solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $X^2 = A$.

Cas d'endomorphisme nilpotent

On considère un endomorphisme nilpotent u de E, c'est à dire un endomorphisme tel qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ avec $u^r = 0$ (par convention on pose $u^0 = \mathrm{Id}_E$), on pose alors $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* / u^k = 0\}$.

1.(a) Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

(b) Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), ..., u^{p-1}(x_0))$ est libre.

(c) En déduire que $p \leq n$ et que $u^n = 0$.

2. On suppose qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = u$.

(a) Calculer v^{2p} et $v^{2(p-1)}$, puis en déduire que $p \leq \dfrac{n+1}{2}$.

(b) Donner alors un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que l'équation $X^2 = M$ n'ait pas de solution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Cas d'homothétie

Soit α un réel *strictement négatif.* Dans ce qui suit, on suppose qu'il existe une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = \alpha I_n$ et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

1. Montrer que n est pair.
   On posera dans toute la suite $n = 2p$ où p un entier naturel ≥ 1.
2. Montrer que la famille $(a, u(a))$ est libre et que le sous espace $\mathrm{Vect}(a, u(a))$ est stable par u.
   On posera $F_a = \mathrm{Vect}(a, u(a))$ (désigne le sous espace vectoriel de E engendré par la famille $(a, u(a))$.
3. (a) Montrer que si G est un sous espace vectoriel de E stable par u et $a \in E$, tel que $a \notin G$, alors la somme $G + F_a$ est directe.
   (b) En déduire qu'ils existent $a_1, ..., a_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{R}^n = F_{a_1} \oplus ... \oplus F_{a_p}$ (ind. récurrence !).
4. En utilisant la décomposition précédente, montrer que la matrice M est semblable à la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(A, ..., A)$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.
5. Réciproquement, vérifier que toute matrice semblable à une matrice de la forme précédente est solution de l'équation $M^2 = \alpha I_n$.
6. Donner trois solutions dans $M_2(\mathbb{R})$ de l'équation $M^2 = -I_2$.

Problème 2

Si G est groupe fini (noté multiplicativement) on note $\mid G \mid$ son cardinal et $\mathbf{1}_G$ son élément neutre. On rappelle que tout élément g de G vérifie $g^{|G|} = \mathbf{1}_G$ et on admet que si p est un diviseur premier de $\mid G \mid$, alors il existe $g \in G$ différent de $\mathbf{1}_G$ tel que $g^p = \mathbf{1}_G$.

1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et soit G un sous groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$. Démontrer que, pour tout $g \in G$, g est diagonalisable et que, si G est commutatif, tous les éléments de G sont diagonalisables dans une même base.

   Si G est un sous-s-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$ et V un sous-espace vectoriel de E, on note V^G l'ensemble des vecteurs fixés par G :

$$V^G = \{v \in V / \forall g \in G, g(v) = v\}$$

   On dit que V est **stable** par G si quels que soient $g \in G$, $v \in V$, on a $g(v) \in V$ et on dit que E est **irréductible** pour G si ses seuls sous-espaces stables par G sont E et $\{0\}$.

   Dans se problème, on identifie matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ (ou $\mathcal{M}_{\backslash,\infty}(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}$) qui lui est canoniquement associé. Notons $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $E = \mathbb{C}^n$. On appelle homothétie une matrice de la forme $\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{C}$.

   Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $B \in G$, on note $i(B)$ l'application :

$$i(B) : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ M \mapsto BMB^{-1}$$

2. Montrer que $i : B \mapsto i(B)$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$, et déterminer $\ker i$.

   On note $H = i(G)$, l'image par i de G, et $\mathcal{A}^H$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{A}$ fixées par H :
$$\mathcal{A}^H = \{M \in \mathcal{A} \mid \forall B \in G, i(B)(M) = M\}$$
3. Soit $M \in \mathcal{A}^H$. Démontrer que $\ker M$ et $\operatorname{Im} M$ sont des sous-espaces stables par G.
4. On suppose que E est irréductible pour G. Soit $M \in \mathcal{A}^H$, démontrer que M soit nulle, soit inversible. En déduire que $\mathcal{A}^H$ est de dimension 1.
5. Soient $M, N \in \mathcal{A}$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{A}$ suivant, $\Phi : X \mapsto MXN$. Démontrer que $\mathrm{Tr}(\Phi) = \mathrm{Tr}(M) \times \mathrm{Tr}(N)$.
6. Soit $P = \dfrac{1}{\mid G \mid} \displaystyle\sum_{B \in G} B$
   (a) Démontrer que $P^2 = P$. En déduire que P est diagonalisable.
   (b) Démontrer $\operatorname{Im} P = E^G$ et en déduire que $\dim E^G = \dfrac{1}{\mid G \mid} \displaystyle\sum_{B \in G} \operatorname{Tr} B$.
7. Démontrer que $\dim \mathcal{A}^H = \dfrac{1}{\mid G \mid} \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{Tr}(B^{-1}) \times \mathrm{Tr}(B)$.(Ind. on pourra considérer d'abord le cas où i est injectif)

   On suppose, par la suite, que E est irréductible pour G.

8. Soit X dans $\mathcal{A}$ une matrice qui commute avec toutes les matrices de G. Démontrer que
$$X = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(X)I_n$$
   On pose $Y = \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{Tr}(B^{-1})B$.
9. Soit $\zeta = e^{2i\pi/|G|}$ (le nombre complexe de module 1 et d'argument $2\pi/\mid G \mid$), on note
$$\mathbb{Z}_G = \{a_0\zeta^0 + a_1\zeta^1 + ... + a_{|G|-1}\zeta^{|G|-1},\ a_i \in \mathbb{Z}\}$$
   et $\mathbb{Z}_G[G]$ les combinaisons linéaires, à coefficients dans $\mathbb{Z}_G$, de matrices G.
10. Démontrer que pour tout $B \in G$, $\operatorname{Tr} B$ est dans $\mathbb{Z}_G$, puis que Y est dans $\mathbb{Z}_G[G]$.
11. On note $(C_k)_{1 \leq k \leq |G|^2}$ les $\mid G \mid^2$ matrices $\zeta^i B$ (où $1 \leq i \leq\mid G \mid$ et $B \in G$) de $\mathbb{Z}_G[G]$. Démontrer que pour tous $1 \leq k \leq\mid G \mid^2$, on peut trouver des coefficients $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq |G|^2}$ dans $\mathbb{Z}$ tels que $YC_k = \displaystyle\sum_{1 \leq l \leq |G|^2} a_{l,k}C_l$.
12. On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq |G|^2}$ et $R = \dfrac{\mid G \mid}{n} I_{|G|^2} - A$. Démontrer que $\det R = 0$.
13. Démontrer que $\dfrac{\mid G \mid}{n}$ est racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré $\mid G \mid^2$ et de terme dominant égal à 1. En déduire que n divise $\mid G \mid$.