Programme du concours daccès au cycle de préparation à l'Agrégation de Mathématiques

Ce programme regroupe les principales axes et leçons que tout candidat se présentant au concours de l'agrégation interne marocain doit les connaître. Ce programme englobe en gros deux grands axes *Algèbre et géométrie* et *Analyse et probabilités*. Les épreuves écrites et orales portent sur les notions et les résultats indiqués dans les deux sections suivantes.

1 Algèbre et géométrie

1. Structures algébriques : Groupes, Sous-groupes, Sous-groupe engendré par une partie, Groupe cyclique, Morphisme de groupes, Ordre dun groupe, Ordre dun élément, Théorème de Lagrange. Groupe symétrique et Groupe alterné : Décomposition dune permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints : Signature. Anneaux et corps, Sous-anneaux (au sens des anneaux unitaires), Morphisme danneaux, Caractéristique dun anneau, Corps, Sous-corps, Corps premier, Corps de fractions dun anneau intègre. Idéaux, Idéaux premiers et idéaux Maximaux. Divisibilité dans les anneaux intègres, Éléments associés, Éléments irréductibles et éléments premiers, PGCD et PPCM, Cas des anneaux principaux : Algorithme dEuclide. Congruences dans $\mathbb{Z}$, Nombres premiers, Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, Théorèmes de Bezout et de Gauss. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, Théorème de DAlembert-Gauss.
2. Anneaux de polynômes à une indéterminée à coefficients dans un sous anneau A de $\mathbb{C}$, Construction de $A[X]$, Algorithme de la division euclidienne. Fonction polynôme, Racines et multiplicités, Polynôme dérivé, Formule de Taylor. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$), Algorithme dEuclide, Théorème de Bezout et de Gauss, Polynômes irréductibles, Contenu dun polynôme, Polynôme primitif, Critère dEisenstein. Relations entre les coefficients et les racines dun polynôme scindé, Sommes de Newton. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur $\mathbb{K}$, Décomposition en éléments simples. Définition dun polynômes à plusieurs indéterminées à coefficients dans $\mathbb{K}$, Définition de polynômes symétriques.
3. Algèbre linéaire : Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit despaces vectoriels. Sous espaces vectoriels et sous espaces affines, Espaces quotients, Somme de sous-espaces, Somme directe, Supplémentaires. Familles libres, génératrices et bases, Applications linéaires, Image et noyau, Algèbre des endomorphismes dun espace vectoriel E, Groupe linéaire $GL(E)$, Sous espaces stables dun endomorphisme, Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.
4. Espaces vectoriels de dimension finie : Existence de bases, Isomorphisme avec $\mathbb{K}^n$, Existence de supplémentaires dun sous-espace, Rang dune application linéaire, Rang dun système de vecteurs, Espace dual, Rang dun système déquations linéaires, Base duale.
5. Applications multilinéaires : Déterminant dun système de vecteurs, dun endomorphisme, Groupe spécial linéaire $SL(E)$, Orientation dun $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

6. Matrices à coefficients dans un sous-corps de $\mathbb{C}$: Opérations matricielles, Rang dune matrice, Représentations matricielles dune application linéaire, Changement de base, Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes dune matrice, Méthode du pivot de Gauss. Application à la résolution de systèmes déquations linéaires, au calcul de déterminants, à linversion des matrices carrées, à la détermination du rang dune matrice, à la détermination déquations définissant un sous-espace vectoriel.
7. Réduction dun endomorphisme en dimension finie : Sous-espaces stables dun endomorphisme, Lemme des noyaux, Polynôme caractéristique, polynômes annulateurs dun endomorphisme, Polynôme minimal, Théorème de Cayley-Hamilton. Diagonalisation, trigonalisation.
8. Géométrie affine du plan complexe : Isométries du plan affine euclidien, Similitudes directes et indirectes du plan, Classification des isométries en dimension 2, Écriture complexe des similitudes directes et indirectes.
9. Algèbre bilinéaire sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel : Formes bilinéaires, Formes bilinéaires alternées, Formes bilinéaires symétriques, Formes quadratiques, Forme polaire dune forme quadratique, Éléments orthogonaux : Interprétation géométrique, Formes non dégénérées, Représentation matricielle, Changement de base, Rang dune forme bilinéaire, Décomposition dune forme quadratique en somme de carrés, Théorème dinertie de Sylvester.
10. Espaces vectoriels euclidiens : Isomorphisme dun espace vectoriel euclidien avec son dual, Supplémentaire orthogonal, Caractérisation de la projection orthogonale, Inégalité de Cauchy-Schwarz, Norme euclidienne, Bases orthonormales, Procédé dorthonormalisation de Schmidt, Groupe orthogonal, Groupe spécial orthogonal, Décomposition dun automorphisme orthogonal en produit de réflexions, Endomorphismes symétriques, Diagonalisation dun endomorphisme symé- trique, Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles lune étant définie positive, Décomposition polaire dans $GL_n(\mathbb{R})$, Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3, Groupe des rotations, Produit mixte, produit vectoriel. Angles en dimension 2 : Angles de vecteurs, Angles de droites, Théorème de langle inscrit, Cocyclicité.

2 Analyse et probabilités

1. Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles : Topologie de $\mathbb{R}$, Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, Droite numérique achevée, Limite, Continuité à droite et à gauche, Continuité, Théorème des valeurs intermédiaires, Parties connexes de $\mathbb{R}$, Image dun intervalle par une fonction continue, Image continu dun segment, Étude de la continuité des fonctions monotones, Continuité dune fonction réciproque. Fonctions Lipschitziennes, Fonctions uniformément continues, Théorème de Heine. Fonctions dérivables, Dérivée dune fonction composée, Dérivabilité dune fonction réciproque, Théorèmes de Rolle et des accroissements finis : Application au sens de variation dune fonction. Dérivées dordre supérieur, Applications de classe $\mathcal{C}^k$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, Formule de Leibniz, Formule de Taylor avec reste intégral, Formule de Taylor-Lagrange, Formule de Taylor-Young, Calcul des développements limités et des développements limités généralisés : Application à létude locale des fonctions. Fonctions usuelles polynômes, Fonctions rationnelles, Fonctions Logarithmes, Fonctions Exponentielles, Fonctions puissances, Fonctions circulaires et hyperboliques, Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques. Comparaison locale des fonctions : Notations de Landau. Fonctions convexes dune variable réelle, Continuité et dérivabilité des fonctions convexes, Caractérisations de la convexité.
2. Suites réelles et complexes : Convergence, Valeur dadhérence, Suites de Cauchy, Complétude de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$, Théorème de Bolzano-Weierstrass, Parties compactes de $\mathbb{R}$. Critères de convergence dune suite réelle, Comparaison des suites. Suites réelles définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$: Étude graphique, Points fixes attractifs et Points fixes répulsifs.

3. Séries réelles et complexes : Convergence des séries à termes réels ou complexes, Séries géométriques, séries de Riemann, Séries à termes positifs. Convergence absolue, Critères de convergence, Estimations des restes. Séries alternées, Critère Spécial des séries alternées. Produit de deux séries.
4. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux : Propriétés de lintégrale, Linéarité, Relation de Chasles, Positivité, Sommes de Riemann, Primitives dune fonction continue, Calcul de primitives et dintégrales : Changement de variable, Intégration par parties. Méthodes de calcul des primitives usuelles.
5. Intégrales généralisées : Intégrales absolument convergentes, Exemples de Riemann, Intégrales semi-convergentes, Critères de comparaisons, Comparaison dune série et dune intégrale.
6. Suites et séries de fonctions : Convergence simple, Convergence uniforme, Continuité, dérivabilité et intégration de la fonction limite. Cas des séries de fonctions, Convergence normale, Théorèmes dapproximation de Weierstrass polynomial.
7. Séries entières : Rayon de convergence, Propriétés de la somme dune série entière sur son disque de convergence, Continuité, Dérivabilité par rapport à la variable complexe, Fonctions analytiques sur un ouvert, Principe des zéros isolés, Opérations algébriques sur les fonctions analytiques, Composition, Exponentielle complexe, Propriétés, Extension des fonctions circulaires au domaine complexe, Développement en série entière des fonctions usuelles.
8. Séries de Fourier des fonctions continues par morceaux dune variable réelle : Lemme de Riemann-Lebesgue, Théorèmes de Dirichlet, Convergence en moyenne quadratique, Formule de Parseval.
9. Méthodes dapproximation : Méthodes de résolution approchée des équations $f(x) = 0$ par dichotomie, Méthode de Newton, Estimation de lerreur pour la méthode de Newton, Polynôme dinterpolation de Lagrange, Méthodes dintégration des trapèzes et de Simpson, Estimation de lerreur, Approximation quadratique, Polynômes orthogonaux.
10. Calcul différentiel : Topologie de $\mathbb{R}^n$, Parties ouvertes et parties fermées, Voisinages, Parties compactes, Théorème de Bolzano-Weierstrass, Complétude de $\mathbb{R}^n$. Parties connexes. Normes usuelles, Limites et continuité. Fonctions différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$: Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur, Dérivées partielles, Opérations algébriques sur les applications différentiables, Composition dapplications différentiables. Applications de classe $\mathcal{C}^1$, Matrice jacobienne, Inégalité des accroissements finis. Applications de classe $\mathcal{C}^k$: Dérivées partielles dordre k, Interversion de lordre des dérivations. Formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Young. Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$: Développements limités, Recherche des extremums locaux. Difféomorphismes, Théorème dinversion locale, Théorème des fonctions implicites.
11. Équations différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$: de la forme $X = f(t, X)$. Théorème de CauchyLipschitz, Solutions maximales, Problème de lexistence globale. Dépendance par rapport aux conditions initiales, Trajectoires dune équation différentielle, comportement qualitatif. Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation de la constante, Cas des coefficients constants. Équations différentielles linéaires dordre supérieur à un.
12. Théorie de la Mesure de Lebesgue : Concept de la mesure, Ensembles mesurables, Mesure de Lebesgue, Théorèmes sur les ensembles mesurables au sens de Lebesgue, Ensembles de Borel, Caractérisation de la mesurabilité, Théorème de Carathéodory. Lintégrale de Lebesgue dune fonction mesurable positive : Définition de lintégrale pour une fonction positive, Théorèmes de la convergence monotone, Inégalité de Tchebyschev, Lemme de Fatou, Théorème de la convergence dominée. Lintégrale dune fonction mesurable quelconque : Théorèmes de la Convergence (monotone, uniforme, dominée, majorée), Lemme de Fatou, Relation entre Intégrales de Lebesgue et de Riemann. Définition des espaces L^p, Inégalités de Hölder, de Young, de Minkowski et de Schwarz. Calcul dintégrales doubles et triples : Théorème de Fubini. Intégrale dé- pendant dun paramètre : Continuité et dérivation.
13. Statistique descriptive univariée et bivariée, Covariance.

14. <u>Probabilités :</u> Espace probabilisé, Définition dun espace probabilisé : Événements, Tribus, Mesure de probabilité. Indépendance dévénements et de tribus, Probabilités conditionnelles : Définition, Formule des probabilités totales et théorème de Bayes, Variables aléatoires, Loi dune variable aléatoire, Probabilité discrète, Densité de probabilité. Lois classiques : Loi discrète et Loi absolument continue, Fonction de répartition et densité, Exemples de variables aléatoires : variable de Bernoulli, Loi Binomiale, Loi de Poisson, Loi normale centrée, Loi uniforme, Loi exponentielle, Loi de Gauss, Espérance et variance dune variable aléatoire à valeurs réelles, Théorème de transfert. Indépendance de variables aléatoires. Loi conditionnelle dune variable par rapport à une autre.
15. <u>Analyse fonctionnelle :</u> Topologie des espaces métriques, Topologie induite, Suites, Valeurs dadhé- rence, Limites dapplications et continuité, Homéomorphismes, Produit fini despaces métriques, Compacité, Connexité, Composantes connexes, Connexité par arcs, Propriétés métriques, Applications lipschitziennes, Applications uniformément continues, Espaces métriques complets, Théorème du point fixe pour les applications contractantes, Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Topologie dun espace vectoriel normé, Normes équivalentes, Cas des espaces de dimension finie, Espaces de Banach, Séries absolument convergentes dans un espace de Banach, Norme de la convergence uniforme, Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace de Banach, Complétude des espaces L^p, où $1 \leq p \leq +\infty$, Étude de la compacité de parties dun espace vectoriel normé, Théorème de Riesz, Théorème dAscoli, Applications linéaires continues, Norme subordonnée.