# المباراة العامة للعلوم والتقنيات 2015

# موضوع الرياضيات

| يوليوز 2015 | موضوع الرياضيات | مدة الإنجاز: 4 س. |
|---|---|---|

يشتمل موضوع مادة الرياضيات لهذه المباراة على تمرين ومسألة مستقلين فيما بينهما ؛ ويمكن لأي مترشح، من أجل الإجابة على سؤال ما من التمرين أو المسألة، أن يقبل نتائج الأسئلة السابقة، من التمرين أو المسألة، ولو لم يُجِب عنها، وأن يستعمل هذه النتائج شريطة الإشارة بدقّة إلى أرقام الأسئلة المعنية.

وتجدر الإشارة إلى أنّ مدى حرص المترشح على اعتماد الوضوح والضبط في تقديم الأجوبة وفي تحريرها، ومدى التزامه بالدّقة في الاستدلال والبرهان تعتبر من العناصر المهمّة التي سيتمّ أخذها بعين الاعتبار أثناء القيام بعملية التصحيح. وفي هذا الاطار، **يجب ضبط أرقام الأسئلة التي تتم الإجابة عنها بكل دقّة** .

**لا يسمح باستعمال حاسوب أو آلة حاسبة أو لوحة إلكترونية.**

إذا بدا لأحد المترشحين أثناء الاختبار على أنّ هناك خطأً ما في موضوع المباراة فَلْيُشِر إلى ذلك على ورقة تحريره وليواصل اختباره مبرزا أسباب المبادرات التي قد يقوم باتخاذها.

# التمريـــن

## دراســة متتاليــة من أعداد صحيحة طبيــعية

في هذا التمرين نرمز بـ $\mathrm{pgcd}(a,b)$ و $\mathrm{ppcm}(a,b)$ على التوالي للقاسم المشترك الأكبر وللمضاعف المشترك الأصغر للعددين الصحيحين $a$ و $b$ .

لتكن $(p_n)_{n\geq 0}$ و $(q_n)_{n\geq 0}$ متتاليتين من أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة تحقق حدودهما ما يلي :

$$\begin{cases} p_0 \geq 2,\ \ q_0 \geq 2\ ; \\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \ p_{n+1} = \mathrm{pgcd}(p_n, q_n) + 1,\ \ q_{n+1} = \mathrm{ppcm}(p_n, q_n) - 1. \end{cases}$$

**الهدف من هذا التمرين هو أن نبين وجود عددين صحيحين طبيعيين $N$ و $c > 0$ بحيث :**

$$\forall\ n \geq N, \qquad p_{n+c} = p_n.$$

**من أجل ذلك نضع، لكل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $s_n = p_n + q_n$ ونعتبر المجموعة**

$$\mathcal{R}_n = \{m \in \mathbb{N}^*;\ \ m \geq p_n\ \&\ m \not| s_n\}.$$

## الجــزء الأول
## إنشــاء متتاليــة تناقصــية من أعداد صحيحة طبيــعية

$A.1$. بيّن أنّ $\mathcal{R}_n \neq \emptyset$ لكل عدد صحيح طبيعي $n$ .

**لكل عدد صحيح طبيعي $n$ ، نرمز بـ $r_n$ إلى أصغر عناصر المجموعة $\mathcal{R}_n$ :** $r_n = \min\mathcal{R}_n$ .

$A.2$. ليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم بحيث $p_n|q_n$ . حدد $p_{n+1}$ و $q_{n+1}$ بدلالة $p_n$ و $q_n$ ثم حدد كذلك $s_{n+1}$ بدلالة $s_n$ .

**نهدف فيما يلي إلى إثبات تناقصية المتتالية $(r_k)_{k\geq 1}$ فنعتبر من أجل ذلك عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم $n$ .**

$A.3$. نفترض أنّ $p_n|q_n$ . بيّن أنّ $p_n \notin \mathcal{R}_n$ ثم استنتج أنّ $r_{n+1} = r_n$ .

$A.4$. نفترض أنّ $p_n \nmid q_n$ .

$A.4.1$. نيّن أنّ $r_n = p_n$ .

$A.4.2$. بيّن أنّ $p_{n+1} \leq p_n$ .

$A.4.3$. بيّن أنّ $p_n \in \mathcal{R}_{n+1}$ ثم استنتج أنّ $r_{n+1} \leq r_n$ .

## الجــزء الثــاني
## إنشــاء ودراســة متتاليــة تناقصــية من أعداد صحيـحة طبيــعية

$B.1$. بيّن أنّ المتتالية $(r_k)_{k\geq 1}$ متقاربة وحدد نهايتيا.

$B.2$. بيّن أنّه يوجد عدد صحيح طبيعي $n_0$ بحيث $r_n = r_{n_0}$ لكل $n \geq n_0$ .

**نضع فيما يلي** $r = \min\{r_k; k \geq 1\}$ **و** $y_n = \text{pgcd}(r, s_n)$ **لكل** $n \geq 0$ .

$B.3$. أثبت وجود العدد $r$ ثم بيّن أنّه يوجد عدد صحيح طبيعي $N$ بحيث $r = r_N$ .

$B.4$. بيّن أنّ $r = r_n$ لكل $n \geq N$ .

$B.5$. **المتتالية** $(y_n)_{n\geq N}$ **ثابتة :** ليكن $n$ من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq N$ .

$B.5.1$. نفترض أنّ $p_n|q_n$ . بيّن أنّ $y_{n+1} = y_n$ .

$B.5.2$. نفترض أنّ $p_n \nmid q_n$ . بيّن أنّ $s_{n+1} = y_n + \frac{p_n q_n}{y_n}$ ثم استنتج أنّ $y_{n+1} = y_n$ .

$B.6$. أثبت ما هو مطلوب في هذا التمرين.

نهــاية التمريــن

# المسألة

## مقارنة بين المَنْظَمات المُنْتَظِمَة للمشتقات المتتالية لدالة

## تعاريف ورموز

1ـ لكل $r$ و $k$ من $\mathbb{N}$ حيث $k \leqslant r$ ، نرمز بـ $\binom{r}{k}$ للمعامل الحدّاني المعرّف بـ $\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!}$.
بالتوافق نضع $\binom{r}{k} = 0$ إذا كان $r < k$ .

2ـ **المشتقات المتتالية لدالة ـ صنف دالة**

ليكن $I$ مجالا غير فارغ من المجموعة $\mathbb{R}$ ولتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة عددية معرفة على $I$ ، وليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم. نضع بالتوافق $f^{(0)} = f$.

✓ نقول إنّ $f$ قابلة للإشتقاق مرّة واحدة على $I$ إذا كانت الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $I$ ؛ في هذه الحالة نضع $f^{(1)} = f'$ حيث $f'$ الدالة المشتقة للدالة $f$ ، وتسمى $f^{(1)}$ بالدالة المشتقة رتبة 1 للدالة $f$ .

✓ نقول إنّ $f$ قابلة للإشتقاق مرّتين على $I$ إذا كانت الدالة $f^{(1)}$ قابلة للإشتقاق على $I$ ؛ في هذه الحالة نضع $f^{(2)} = \left(f^{(1)}\right)'$ حيث $\left(f^{(1)}\right)'$ الدالة المشتقة للدالة $f^{(1)}$ ، وتسمى $f^{(2)}$ بالدالة المشتقة رتبة 2 للدالة $f$ .

✓ بالترجع، نقول إنّ $f$ قابلة للإشتقاق $n$ مرّة على $I$ إذا كانت الدالة $f^{(n-1)}$ قابلة للإشتقاق على $I$ ؛ في هذه الحالة نضع $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ حيث $\left(f^{(n-1)}\right)'$ الدالة المشتقة للدالة $f^{(n-1)}$ ، وتسمى $f^{(n)}$ بالدالة المشتقة رتبة $n$ للدالة $f$ .

✓ نقول إنّ $f$ دالة من **الصنف** $\mathcal{C}^n$ على $I$ إذا كانت $f$ قابلة للإشتقاق $n$ مرّة على $I$ وكانت الدالة $f^{(n)}$ متصلة على $I$ . نرمز بـ $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ لمجموعة الدوال العددية من الصنف $\mathcal{C}^n$ على $I$ .

3ـ **اَلمَنْظَمة المُنْتَظِمَة لدالة محدودة**

ليكن $I$ مجالا غير فارغ من المجموعة $\mathbb{R}$ ولتكن $g : I \to \mathbb{R}$ دالة عددية معرفة على $I$ . نقول إنّ $g$ دالة محدودة على $I$ إذا وجد عدد حقيقي $M \geq 0$ يحقق المتفاوتة

$$\forall x \in I, \ |g(x)| \leq M. \tag{1}$$

في هذه الحالة نرمز بـ $\| g \|_\infty$ لأصغر عدد $M$ يحقق المتفاوتة (1) ، ويسمّى العدد $\| g \|_\infty$ **بالمَنْظَمة المُنْتَظِمَة** للدالة المحدودة $g$ .

**خاصية :** تتميز المَنْظَمة المُنْتَظِمَة $\| g \|_\infty$ للدالة المحدودة $g$ بما يلي :

$(i)$ لكل $x$ من $I$ لدينا $|g(x)| \leq \| g \|_\infty$ ؛

$(ii)$ لكل عدد حقيقي $M \geq 0$ يحقق المتفاوتة (1) أعلاه لدينا $\| g \|_\infty \leq M$ .

في هذه المسألة نعتبر عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم $n$ ونرمز بـ $\mathcal{F}_n$ لمجموعة الدوال العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ التي هي من **الصنف** $\mathcal{C}^n$ على $\mathbb{R}$ بحيث تكون الدالتان $f$ و $f^{(n)}$ **محدودتين** على $\mathbb{R}$ .

الهدف من هذه المسألة هو أن نبين أنّ المجموعة $\mathcal{F}_n$ جزء من المجموعة $\mathcal{F}_k$ لكل عدد $k$ من $\{1,\ldots,n\}$ :

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\},\ \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_k$$

كما نتغيا كذلك إيجاد إكبار للعدد $M_k = \| f^{(k)} \|_\infty$ ، $1 \leq k \leq n$ ، بدلالة العددين $M_0 = \| f \|_\infty$ و $M_n = \| f^{(n)} \|_\infty$ لكل دالة $f$ من $\mathcal{F}_n$ .

## الجــزء الأول
## صيغة طــايلور[1] ذات الباقي على شــكل تكامـــل
## متفـاوتة طـائِلُور-لَاكْرَانْج[2]

ليكن $I$ مجالا غير فارغ من المجموعة $\mathbb{R}$ ولتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة من الصنف $\mathcal{C}^n$ على $I$ . ليكن $a$ و $b$ عددين حقيقيين مختلفين من $I$ . لكل عدد $k$ من المجموعة $\{0,1,\ldots,n-1\}$ نضع

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.1. بيّن أنّ لكل عدد $k$ من المجموعة $\{1,\ldots,n-1\}$ لدينا

$$R_{k-1} = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k.$$

2.1. استنتج صيغة طايلور من الرتبة $(n-1)$ ذات الباقي على شكل تكامل التالية :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

3.1. **متفاوتة طايلور-لاكْرانج من الرتبة** $(n-1)$ : نفترض أنّ الدالة $f^{(n)}$ محدودة على $I$ ونعتبر عددا حقيقيا $M \geq 0$ يحقق المتفاوتة

$$\forall x \in I,\ |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

بيّن أنّ

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^n}{n!} M. \tag{3}$$

4.1. **تطبيــق**

نعتبر الدالة العددية $h$ المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يلي :

$$\forall t > -1,\ h(t) = \ln(1+t)$$

ونضع $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ، لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 1$ .

1.4.1. بيّن أنّ الدالة $h$ من الصنف $\mathcal{C}^n$ على $]-1,+\infty[$ لكل عدد صحيح طبيعي $n > 0$ ، و أنّ

$$\forall t > -1,\ h^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}.$$

2.4.1. بيّن أنّ المتتاليتين $(S_{2n})_{n\geq 1}$ و $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ متحاديتان.

3.4.1. استنتج أنّ المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

4.4.1. باستعمال متفاوتة طايلور-لاكْرانج بيّن أنّ نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ هي العدد $\ln 2$ .

[1] TAYLOR, math. angl. (1685-1731)
[2] LAGRANGE, math. fran. (1739-1813)

# الجـــزء الثـــاني

## دراسة التظمينات $E_3 \subset E_2 \subset E_1$

.1.2 **دراسة الحالة** $n=2$

لتكن $f$ دالة **غير ثابتة** من المجموعة $\mathcal{F}_2$ . نذكر أنّ الدالتين $f$ و $f^{(2)}$ محدودتين ونضع
$M_0 = \| f \|_\infty \ , \ M_2 = \| f^{(2)} \|_\infty$ .

.1.1.2 ليكن $x$ عددا حقيقيا و $h>0$. باستعمال متفاوتة طايلور-لاكْرانج أوجد إكبارا للكميتين $|f(x+h)-f(x)-hf'(x)|$ و $|f(x-h)-f(x)+hf'(x)|$ .

استنتج أنّ

$$|f'(x)| \le \frac{M_0}{h} + \frac{M_2\, h}{2}.$$

.2.1.2 بيّن أنّ $M_2 > 0$ و $M_0 > 0$ .

.3.1.2 بيّن أنّ الدالة $f'$ محدودة و أنّ $M_1 \le \sqrt{2M_0M_2}$ .

.2.2 **دراسة الحالة** $n=3$

لتكن $f$ دالة **غير ثابتة** من المجموعة $\mathcal{F}_3$ . نذكر أنّ الدالتين $f$ و $f^{(3)}$ محدودتين ونضع
$M_0 = \| f \|_\infty \ , \ M_3 = \| f^{(3)} \|_\infty$ .

.1.2.2 ليكن $x$ عددا حقيقيا و $h>0$. باستعمال متفاوتة طايلور-لاكْرانج أوجد تكبيرا للكميتين $|f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f^{(2)}(x)|$ و $|f(x-h)-f(x)+hf'(x)-\frac{h^2}{2}f^{(2)}(x)|$ .

استنتج أنّ

$$|f'(x)| \le \frac{M_0}{h} + \frac{M_3\, h^2}{6} \ , \ |f^{(2)}(x)| \le \frac{4M_0}{h^2} + \frac{M_3\, h}{3}.$$

.2.2.2 بيّن أنّ $M_3 > 0$ و $M_0 > 0$ .

.3.2.2 بيّن أنّ الدالة $f'$ محدودة و أنّ $M_1 \le \frac{1}{2}(9M_0^2M_3)^{\frac{1}{3}}$ .

.4.2.2 بيّن أنّ الدالة $f^{(2)}$ محدودة و أنّ $M_2 \le (3M_0M_3^2)^{\frac{1}{3}}$ .

# الجـــزء الثـــالث

## الصيغة التعاكسية لباسكال[3] ؛ تطبيقات

الهدف من هذا الجزء هو إثبات الصيغة التعاكسية لباسكال (4) ودراسة بعض التطبيقات.

.1.3 لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين عدديتين يحققان

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

بيّن أنّ لكل عدد صحيح طبيعي $m$ لدينا

$$a_m = (-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} b_k. \tag{4}$$

[3] PASCAL, math. et phy. fran. (1623-1662)

**2.3. تطبيقات**

1.2.3. بيّن أنّ لكل عددين صحيحين طبيعيين $k$ و $m$ لدينا

$$\sum_{p=0}^{m}(-1)^p p(p-1)\dots(p-k+1)\binom{m}{p}=(-1)^m m!\,\delta_{k,m} \tag{5}$$

حيث

$$\delta_{k,m}=\begin{cases}1\ , & k=m\ ;\\ 0\ , & k\neq m.\end{cases}$$

2.2.3. استنتج أنّ لكل عدد صحيح طبيعي $m$ و كل $k$ من $\{0,\dots,m\}$ لدينا

$$\sum_{p=0}^{m}(-1)^p p^k\binom{m}{p}=(-1)^m m!\,\delta_{k,m}. \tag{6}$$

إشارة : يمكن الاستدلال بالترجع.

# الجـــزء الرابـــع

## دراســة التظـمينـات $E_n\subset E_k$ لكل $k$ من $\{1,\dots,n\}$

لتكن $f$ دالة **غير ثابتة** من المجموعة $\mathcal{F}_n$ . نذكر أنّ الدالتين $f$ و $f^{(n)}$ محدودتين ونضع

$$M_0=\| f\|_\infty\ ,\ \ M_n=\| f^{(n)}\|_\infty\ .$$

1.4. ليكن $x$ عددا حقيقيا و $h>0$. باستعمال متفاوتة طايلور-لاكْرانج بيّن أنّ

$$\left|\sum_{j=1}^{n-1}\frac{h^j}{j!}f^{(j)}(x)\right|\le 2M_0+\frac{M_n h^n}{n!}. \tag{7}$$

2.4. باستعمال المتفاوتة (7) أعلاه لكل $h$ من $\{1,\dots,n-1\}$ وكذا نتيجة السؤال 2.2.3 (المتطابقة (6))، بيّن وجود ثابتتين $C_1>0$ و $C_2>0$ بحيث

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ |f^{(n-1)}(x)|\le C_1M_n+C_2M_0.$$

3.4. بيّن أنّ الدالة $f^{(k)}$ محدودة لكل $k$ من $\{1,\dots,n-1\}$ أو بمعنى آخر $E_n\subset E_k$ لكل $k$ من $\{1,\dots,n-1\}$ .

4.4. نضع $M_k=\| f^{(k)}\|_\infty$ لكل $k$ من $\{0,\dots,n\}$ .

1.4.4. بيّن أنّ $M_k>0$ لكل $k$ من $\{0,\dots,n\}$ وأنّ $M_k\le\sqrt{2M_{k-1}M_{k+1}}$ لكل $k$ من $\{1,\dots,n-1\}$ .

2.4.4. بيّن أنّ $M_k\le 2^{\frac{k(n-k)}{2}}M_0^{1-k/n}M_n^{k/n}$ لكل $k$ من $\{0,\dots,n\}$ . هل هذا الإكبار هو الأفضل ؟
إشارة : ضع $a_k=2^{k-1}\frac{M_k}{M_{k-1}}$ ، $1\le k\le n$ ، وأثبت أنّ $a_1\le\dots\le a_n$ و أنّ $(a_1\dots a_k)^n\le(a_1\dots a_n)^k$ ، لكل $k$ من $\{1,\dots,n\}$ .

نهـــاية المســـألة

---

نهـــايــة المــــوضـــوع