المباراة العامة للعلوم والتقنيات 2011

موضوع الرياضيات

حلول معادلة تفاضلية خطية متجانسة

تعاريف ورموز

تعريف 1

نعتبر دالة f معرفة على $\mathbb{R}$، وعددا صحيحا طبيعيا n يخالف الصفر.

نضع بالتوافق $f^{(0)} = f$.

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق مرة واحدة على $\mathbb{R}$ إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؛ في هذه الحالة نضع $f^{(1)} = f'$ حيث f' الدالة المشتقة للدالة f، ونسمى $f^{(1)}$ الدالة المشتقة رتبة 1 للدالة f.

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ إذا كانت الدالة $f^{(1)}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؛ في هذه الحالة نضع $f^{(2)} = (f^{(1)})'$ حيث $(f^{(1)})'$ الدالة المشتقة للدالة $f^{(1)}$، ونسمى $f^{(2)}$ الدالة المشتقة رتبة 2 للدالة f.

بالترجع، نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة على $\mathbb{R}$ إذا كانت الدالة $f^{(n-1)}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$؛ في هذه الحالة نضع $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ حيث $(f^{(n-1)})'$ الدالة المشتقة للدالة $f^{(n-1)}$، ونسمى $f^{(n)}$ الدالة المشتقة رتبة n للدالة f.

نرمز ب $\mathcal{F}$ لمجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق n مرة على $\mathbb{R}$ لكل عدد طبيعي n غير منعدم ؛ ونرمز ب $\mathcal{P}$ لمجموعة الدوال الحدودية المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي معاملاتها أعداد حقيقية.

نتائج مقبولة يمكن استعمالها

أ- لتكن f و g دالتين من $\mathcal{F}$، وليكن α عددا حقيقيا. لدينا $f+g \in \mathcal{F}$ و $\alpha f \in \mathcal{F}$ ، ولكل عدد صحيح طبيعي n لدينا كذلك

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}, \qquad (\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}.$$

ب- كل الدوال الحدودية المنتمية إلى المجموعة $\mathcal{P}$ تنتمى إلى المجموعة $\mathcal{F}$.

تعريف 2

لتكن P دالة حدودية من $\mathcal{P}$ معرفة، لكل x من $\mathbb{R}$، بما يلى

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

بحيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم. نعتبر المعادلة التفاضلية التالية (E_P)

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \qquad (E_P)$$

تسمى هذه المعادلة التفاضلية بالمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة المرتبطة بالدالة الحدودية P، وتسمى P بالدالة الحدودية المميزة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P).
نقول أن دالة f من المجموعة $\mathcal{F}$ حل للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) إذا كانت f تحقق

$$a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f^{(1)} + a_0 f = 0$$

أي أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$.a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f^{(1)}(x) + a_0 f(x) = 0$$

مثـــــال وتذكير

ليكن λ عدداً حقيقياً ؛ نعتبر الدالة الحدودية P المنتمية إلى $\mathcal{P}$ والمعرفة، لكل x من $\mathbb{R}$، بما يلي

$$.P(x) = x - \lambda$$

P هي الدالة الحدودية المميزة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$.y' - \lambda y = 0 \qquad (E_P)$$

f من $\mathcal{F}$ حل للمعادلة التفاضلية (E_P) إذا كانت f تحقق

$$f'(x) - \lambda f(x) = 0$$

لكل x من $\mathbb{R}$.

نُذَكر أن حلول هذه المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة هي الدوال $x \longmapsto ae^{\lambda x}$، حيث a عدد حقيقي.

الجزء الأول : نتــــائـــج أولـــية تخص الـــــدوال الحـــدودية

1- لكل عدد صحيح طبيعي $r \geq 1$ نعتبر الدالة الحدودية ε_r المعرفة، لكل x من $\mathbb{R}$، بما يلي

$$\varepsilon_r(x) = x^r.$$

أ- تحقق من أن لكل عدد صحيح طبيعي k، ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{(k)}(x) = r(r-1)\ldots(r-k+1)x^{r-k}, & 1 \leq k \leq r \ ; \\ \varepsilon_r^{(k)}(x) = 0, & k \geq r+1. \end{cases}$$

ب- استنتج قيمة العدد $\varepsilon_r^{(k)}(0)$ لكل عدد صحيح طبيعي k.

2- لتكن P دالة حدودية من $\mathcal{P}$ معرفة، لكل x من $\mathbb{R}$، بمايلي

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

بحيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

أ- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي k، محصور بين 0 و n، لدينا $.a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

ب- استنتج أن دالتين حدوديتين Q و R من $\mathcal{P}$ متساويتان إذا، وفقط إذا، كانت معاملاتهما متساوية.

إشارة : يمكن اعتبار الدالة الحدودية $.P = R - Q$

3- لتكن P و Q دالتين حدوديتين من $\mathcal{P}$ وليكن λ عددا حقيقيا حيث $P(x)=(x-\lambda)Q(x)$ لكل عدد حقيقي x. نضع

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\qquad Q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0.$$

بين أن معاملات الدالتين الحدوديتين P و Q تحقق العلاقات التالية

$$\begin{cases} a_0=-\lambda b_0\ ; \\ a_k=b_{k-1}-\lambda b_k,\quad 1\le k\le n-1\ ; \\ a_n=b_{n-1}. \end{cases}$$

الجزء الثاني : دراسة معادلات تفاضلية خطية من الدرجة الأولى

ليكن λ عددا حقيقيا و g دالة من المجموعة $\mathcal{F}$. نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية التالية

$$y'-\lambda y=g\qquad (F_g).$$

نقول أن دالة f من $\mathcal{F}$ حل للمعادلة التفاضلية (F_g) إذا كانت f تحقق $f'(x)-\lambda f(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

1- لتكن f من $\mathcal{F}$ حلا للمعادلة التفاضلية (F_g).

أ- أحسب الدالة المشتقة للدالة $x\longmapsto f(x)e^{-\lambda x}$ بدلالة الدالة g.

ب- استنتج أن الدالة f يمكن كتابتها على الشكل التالي

$$f(x)=G(x)e^{\lambda x},\qquad x\in\mathbb{R}$$

حيث G دالة أصلية للدالة $x\longmapsto g(x)e^{-\lambda x}$، المعرفة على $\mathbb{R}$.

ج- تحقق أن كل دالة

$$h:x\longmapsto G(x)e^{\lambda x}$$

حيث G دالة أصلية للدالة $x\longmapsto g(x)e^{-\lambda x}$، حل للمعادلة التفاضلية الخطية (F_g).

2- لتكن R دالة حدودية من $\mathcal{P}$. في هذا السؤال، نضع $g(x)=R(x)e^{\lambda x}$ لكل x من $\mathbb{R}$. بين أن حلول المعادلة التفاضلية الخطية (F_g) هي الدوال $x\longmapsto S(x)e^{\lambda x}$ حيث S دالة حدودية من $\mathcal{P}$ تحقق

$$S'(x)=R(x),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

3- لتكن R دالة حدودية من $\mathcal{P}$، و ليكن α عددا حقيقيا يخالف العدد λ. في هذا السؤال، نضع $g(x)=R(x)e^{\alpha x}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

أ- ليكن μ عددا حقيقيا غير منعدم. بين أن الدوال الأصلية للدالة $x\longmapsto R(x)e^{\mu x}$ هي الدوال $x\longmapsto R_1(x)e^{\mu x}+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$، و R_1 دالة حدودية من $\mathcal{P}$ تحقق

$$R_1'(x)+\mu R_1(x)=R(x),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

بين وحدانية الدالة الحدودية R_1.

إشارة : يمكن استعمال مكاملة بالأجزاء.

ب- بين أن حلول المعادلة التفاضلية الخطية (F_g) هي الدوال $x\longmapsto S(x)e^{\alpha x}+ce^{\lambda x}$ حيث $c\in\mathbb{R}$، و S الدالة الحدودية الوحيدة من $\mathcal{P}$ التي تحقق

$$S'(x)+(\alpha-\lambda)S(x)=R(x),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

الجزء الثالث : دراسة بعض المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من نوع (E_P)

لتكن P دالة حدودية من $\mathcal{P}$ معرفة لكل x من $\mathbb{R}$ كما يلي

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

بحيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم. نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) التالية

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \qquad (E_P)$$

1- بين أنه إذا كانت الدالتان f و g من $\mathcal{F}$ حلين للمعادلة (E_P)، و α عددا حقيقيا، فإن الدالة $\alpha f + g$ هي كذلك حل لنفس المعادلة (E_P).

2- **الحالة الأولى : $P(x) = x^n$ لكل x من $\mathbb{R}$**

نفترض في هذا السؤال أن $P(x) = x^n$ لكل x من $\mathbb{R}$. بين أن حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) هي الدوال الحدودية التي تنتمي إلى $\mathcal{P}$ والتي لا تتعدى درجتها $(n-1)$.

3- **الحالة الثانية : $P(x) = (x-\lambda)^n$ لكل x من $\mathbb{R}$**

ليكن λ عددا حقيقيا، و n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم حيث $P(x) = (x-\lambda)^n$ لكل x من $\mathbb{R}$.

أ- **صيغة ليبنيتز لاشتقاق جداء**

لتكن f و g دالتين من $\mathcal{F}$. بين بالترجع أن الدالة fg تنتمي إلى $\mathcal{F}$ و أن لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم r لدينا

$$(fg)^{(r)} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f^{(k)} g^{(r-k)}$$

حيث نرمز ب $\binom{r}{k}$ الى العدد الصحيح الطبيعي المعرف كما يلي

$$\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!}, \qquad 0 \le k \le r.$$

إشارة : يمكن استعمال صيغة باسكال التالية

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k-1} + \binom{r-1}{k}, \qquad 1 \le k \le r.$$

ب- بين أن المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) هي المعادلة التفاضلية

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-\lambda)^{n-r} y^{(r)} = 0.$$

ج- لتكن f دالة من $\mathcal{F}$. نضع $h(x) = f(x)e^{-\lambda x}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

أحسب الدالة $h^{(n)}$، المشتقة رتبة n للدالة h، واستنتج أن الدالة f حل للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) إذا، وفقط إذا، وُجدت دالة حدودية R، تنتمي إلى $\mathcal{P}$ ولا تتعدى درجتها $(n-1)$، وتحقق

$$f(x) = R(x)e^{\lambda x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

4- نفترض في هذا السؤال أن هناك دالة حدودية Q من $\mathcal{P}$ ، وعددا حقيقيا λ يحققان

$$P(x) = (x-\lambda)Q(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

أ- بين أن دالة f من $\mathcal{F}$ حل للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) إذا، و فقط إذا، كانت الدالة $f_1 = f' - \lambda f$ حلا للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_Q).

إشارة : يمكن استعمال نتائج السؤال 3 من الجزء الأول.

ب- باعتماد مبدأ الترجع، أوجد طريقة أخرى للإجابة عن الاستنتاج المطلوب فى السؤال 3-ج أعلاه دون اللجوء إلى استعمال صيغة ليبنيتز لاشتقاق جداء.

5- **تطبيــــيق 1**

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$y^{(4)} + y^{(3)} - 3y^{(2)} - 5y^{(1)} - 2y = 0, \qquad (E_P).$$

أ- تحقق أن الدالة الحدودية المميزة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) هى الدالة الحدودية المعرفة، لكل x من $\mathbb{R}$، بما يلى

$$P(x) = (x-2)(x+1)^3.$$

ب- باستعمال النتائج السابقة، بين أن حلـول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) هى الدوال $x \longmapsto S(x)e^{-x} + ce^{2x}$ حيث $c \in \mathbb{R}$، و S دالة حدودية من $\mathcal{P}$ لا تتعدى درجتها 2.

6- ليكن r عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم، و لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ أعدادا حقيقية مختلفة مثنى مثنى، و $n_1, n_2, \ldots, n_r$ أعدادا صحيحة طبيعية غير منعدمة ؛ نضع $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ ونرمز ب P الى الدالة الحدودية المعرفة، لكل x من $\mathbb{R}$، بما يلى

$$P(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r}.$$

بين بالترجع على n أن حلـول المعـادلة التفـاضلية الخطـية المتجانسة (E_P) هى الدوال

$$x \longmapsto P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \cdots + P_r(x)e^{\lambda_r x}$$

حيث لكل عدد k من المجموعة $\{1, \ldots, r\}$، P_k دالة حدودية من $\mathcal{P}$ لا تتعدى درجتها $n_k - 1$.

إشارة : يمكن استعمال نتائج السؤال 4-أ من الجزء الثالث.

7- **تطبيــــيق 2**

أ- نعتبر دالة حدودية P معرفة، لكل x من $\mathbb{R}$، بما يلى

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ أعداد صحيحة نسبية و a_0 يخالف الصفر.

بين أنه إذا كان عدد صحيح نسبى u جذرا للدالة الحدودية P فإن u قاسم للعدد a_0.

ب- نأخذ P بحيث

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

حدد الحلول الصحيحة النسبية للمعادلة $P(x) = 0$ ثم عمل الحدودية P.

ج- نعتبر الدالة الحدودية R المعرفة، لكل x من $\mathbb{R}$، بما يلى

$$R(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

- ليكن x عددا حقيقيا غير منعدم ؛ نضع $y = (x + \frac{1}{x})$. بين أن $\frac{R(x)}{x^3} = P(y)$ ثم استنتج أن

$$R(x) = (x+1)^2(x-1)^4.$$

- أعط الحل العام فى $\mathcal{F}$ للمعادلة الخطية المتجانسة

$$y^{(6)} - 2y^5 - y^{(4)} + 4y^3 - y^{(2)} - 2y' + y = 0.$$

****