Concours d'accès au cycle de préparation à l'Agrégation de Mathématiques

Algèbre et Géométrie

Marrakech-Safi 2017

Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice est interdit.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il amené à prendre.
L'épreuve est composée de deux problèmes qui doivent être composés dans deux copies séparées.

Problème 1

Notations

E un espace euclidien de produit scalaire noté $(. \mid .)$ dont la norme associée $|| \, ||$. Si N est un sous espace vectoriel de E, on note $N^{\perp}$ sont orthogonal dans E.

Pour $u \in L(E)$, $sp(u)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de u. $S(E)$ désigne des endomorphismes de E autoadjoints (ou symétriques).

On rappelle que pour $u \in SL(E)$, u est dit positif (resp. défini positif) si :

$$\forall x \in E, \quad (u(x) \mid x) \geq 0, \text{(resp. } \forall x \in E - \{0\}, \quad (u(x), x) > 0)$$

L'ensemble $S^{+}(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) désigne l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E positifs (resp. définis positifs).

Si $u \in S^{++}(E)$, alors $\phi_u : (x, y) \mapsto (u(x) \mid y)$ est un produit scalaire de E.

Objectif. Dans ce petit problème on se propose de montrer que si u et v deux éléments de $S^{+}(E)$, alors $u \circ v$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^{+}$.

1. **Généralités** Dans cette question, $l \in S(E)$.
   (a) Justifier que E admet une base orthonormée formée de vecteurs propres de l.
   (b) Montrer que $\sup\limits_{x \in E-\{0\}} \dfrac{(l(x) \mid x)}{|| \, x \, ||^2} = \max\limits_{x \in E-\{0\}} \dfrac{(l(x) \mid x)}{|| \, x \, ||^2}$, puis calculer $\max_{x \in E-\{0\}} \dfrac{(l(x) \mid x)}{|| \, x \, ||^2}$ en fonction des valeurs propres de l.

(c) Montrer que
   i. $l \in S^+(E)$ si et seulement si $sp(l) \subset \mathbb{R}^+$.
   ii. $l \in S^{++}(E)$ si et seulement si $sp(l) \subset \mathbb{R}^{*+}$ si et seulement si $l \in S^+(E)$ et l est inversible.

(d) Montrer que si $l \in S^{++}(E)$ alors $l^{-1} \in S^{++}(E)$.

(e) Soit $l \in S^+(E)$,
   i. Montrer l'existence d'un élément $s \in S^+(E)$ tel que $l = s^2$.
   ii. Soit $y \in E$. En déduire que $(l(y) \mid y) = 0 \Longrightarrow l(y) = 0. \quad (*)$

(f) Soit f un endomorphisme de E, on note f^* son adjoint.
   i. Montrer que $\ker f^* = (\mathrm{Im}(f))^\perp$
   ii. Soit une suite $(z_k)_k$ de $\mathrm{Im}(f)$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty} f^*(z_k) = 0$, déduire que $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$.

2. **Preuve du résultat.** u et v désignent des éléments de $S^+(E)$.

   (a) Vérifier que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par les endomorphismes u et $u \circ v$. Dans la suite on note u_1 et w les endomorphismes de $\mathrm{Im}(u)$ induits par u et $u \circ v$ respectivement.

   (b) Montrer que $u_1 \in S^{++}(\mathrm{Im}(u))$.

   (c) Montrer que w est autoadjoint positif relativement à $\phi_{u^{-1}}$ où $\phi_{u_1^{-1}}$ est le produit scalaire sur $\mathrm{Im}(u)$ défini dans les notations.

   (d) Déduire que l'endomorphisme $u \circ v$ induit sur $\mathrm{Im}(u \circ v)$ un endomorphisme diagonalisable dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

   (e) Montrer à l'aide de $(*)$, que $E = \mathrm{Im}(u \circ v) \oplus \ker(u \circ v)$.

   (f) Conclure.

3. **Cas particulier.** Soient $a \in S^{++}(E)$ et f un endomorphisme de E.

   (a) Montrer que $a^{-1} \circ f^* \circ f$ est un endomorphisme diagonalisable de E et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

   (b) Montrer que $a^{-1} \circ f^* \circ f$ est autoadjoint positif de E pour le produit scalaire ϕ_a.

   (c) On note $\rho = \max sp(a^{-1} \circ f^* \circ f)$. Déduire que

$$\forall x \in E, \quad \| f(x) \|^2 \leq \rho \times (a(x) \mid x)$$

Problème 2

Ce problème est formé de quatre parties indépendantes.

Partie 1 : Commutant d'une matrice diagonalisable et applications

1. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, canoniquement associé à la matrice

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Déterminer une base ϵ de $\mathbb{R}^3$ de la forme $\epsilon_1 = (1, 0, c_1)$, $\epsilon_2 = (0, 1, c_2)$, $\epsilon_3 = (1, b_3, c_3)$ et des réels $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ tel que $Mat_\epsilon(u) = D$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

2. Soit P la matrice de passage de la base canonique e à la base ϵ. Déterminer les matrices Δ d'ordre 3 tel que $P\Delta P^{-1}$ commute avec F.

3.(a) Soit $m \in M_2(\mathbb{R})$, montrer que $m^2 - m + I_2 = 0$ si et seulement si $\mathrm{tr}(m) = \det(m) = 1$.

   (b) Résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$ l'équation $m^3 = -I_2$.

(c) Déduire la résolution dans $M_3(\mathbb{R})$ de l'équation $M^3 = F$.
On donnera les solutions sous la forme $M = PNP^{-1}$ où N est à calculer (Le calcul du produit PNP^{-1} n'est pas demandé).

Partie 2 : Lien entre la réduction de AB et BA

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ tels que AB diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

1. Donner un exemple où BA n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que si un endomorphisme u est diagonalisable alors pour tout entier $k \geq 1$, $\mathrm{rg}(u^k) = \mathrm{rg}(u)$.

3.(a) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $(BA)Q(BA) = BQ(AB)A$.

(b) Montrer que BA est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}(BA)^2$.

(c) En déduire que BA est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}(AB)$.

4. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\chi_M(X) = \det(M - XI_n)$ désigne le polynôme caractéristique.

(a) Montrer que $(-X)^p\chi_{AB} = (-X)^n\chi_{BA}$ (Dans cette question AB n'est pas supposée diagonalisable).

(b) Soient $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = F$, calculer BA.

Partie 3 : Diagonalisation simultanée

1. $(u_i)_{i\in I}$ famille commutative d'endomorphismes de E, diagonalisables.
Montrer par récurrence sur $\dim E$ qu'on peut diagonaliser les u_i les u_i dans la même base.
2. Soit G un groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $M \in G$, $M^2 = I_n$.

(a) Montrer que G est commutatif.

(b) Montrer que G est isomorphe à un sous groupe de $\mathbb{U}_2^n$ où $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$.

(c) Si $n \neq m$ les groupes $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_m(\mathbb{R})$ sont ils isomorphes ?

Partie 4 : Noyaux d'éléments de $\mathbb{K}[u]$

E un $\mathbb{K}$ espace de dimension finie, $u \in L(E)$, pour $P \in \mathbb{K}[X]$ on note $N_p = \ker P(u)$. Dans la suite $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on note $P \wedge Q$ le plus grand diviseur commun de P et Q et $P \vee Q$ le plus petit commun multiple de P et Q. π_u désigne le polynôme minimal de u.

1.(a) Montrer que $N_P \cap N_Q = N_D$ où $D = P \wedge Q$.

(b) Montrer que $N_P + N_Q = N_M$ où $M = P \vee Q$.

2. Soit A un diviseur unitaire de π_u. On pose $\pi_u = AC$.

(a) Montrer que si $N_A \subset N_P$ alors A divise P.

(b) En déduire que si A_1, A_2 diviseurs unitaires de π_u et $N_{A_1} = N_{A_2}$ alors $A_1 = A_2$.

(c) Montrer que, $N_P = N_Q$ si et seulement si $P \wedge \pi_u = Q \wedge \pi_u$.