Introduction aux équations fonctionnelles

Choukri Saâd, Mohammed Jamal

13 Août 2018

Table des matières

1 Généralités

1.1 Comprendre la notion de fonction, équation fonctionnelle

Une *fonction* décrit une relation entre un ensemble de départ qu'on notera $\mathbb{A}$ et un ensemble d'arrivée noté $\mathbb{B}$. Elle associe à chaque élément a dans $\mathbb{A}$ un unique élément b dans $\mathbb{B}$ appelé image de a par f. On note alors $b = f(a)$ et on dit que b est l'image de a par la fonction f. On utilise la notation suivante pour définir une fonction :

$$f\begin{cases}\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}\\ a \longmapsto f(a)\end{cases}$$

On peut avoir une forme explicite de la fonction f qui permet de calculer l'image de chaque élément, par exemple $f(x) = 3x^2 + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais dans certains cas ceci est impossible comme le montre l'exemple suivant :

$$p\begin{cases}\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\\ n \longmapsto p_n\end{cases}$$

avec p_n est le n-ième nombre premier.

Il faut noter aussi que les ensemble $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ utilisés ci haut peuvent avoir une dimension supérieure à 2. Une telle fonction est appelée une fonction multi-variable. Un élément a dans $\mathbb{A}$ s'appelle un n-uplet avec n la dimension de $\mathbb{A}$. L'exemple suivant illustre un cas ou $\mathbb{A}$ est de dimension 2, les éléments qui appartiennent à cet ensemble s'appellent des 2-uplets (ou doublets).

$$f\begin{cases}\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\\ (x, y) \longmapsto xy + 1\end{cases}$$

Pour les fonctions d'une variable réelle, il existe une manière géométrique de les décrire que l'on appelle le graphe de la fonction. Il s'agit de représenter dans un système d'axes tous les points $(x, f(x))$ pour tout x dans l'ensemble de départ. Les propriétés que nous énoncerons plus tard pourront être interprétées et exploitées de manière géométrique (i.e. visuelle).

Passons maintenant au vif sujet, c'est quoi une équation fonctionnelle ? c'est tout simplement une équation dont l'inconnue est une fonction, on s'intéresse alors à déterminer l'ensemble des fonctions qui vérifient une égalité (parfois inégalité) algébrique ou une relation particulière. Par exemple, cherchons à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient la relation suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y)^2 = f(x) + f(y) + 2xy$$

On peut remarquer que la fonction $f(x) = x$ est une solution du problème, mais est ce l'unique solution ? Dans la suite, on discutera quelques techniques élémentaires de résolution des problèmes des équations fonctionnelles comme les substitutions, la symétrie, l'injection, surjection ...

2 Méthodes élémentaires de résolution

2.1 Substitutions de base

Lorsqu'on cherche à résoudre une équation fonctionnelle, il faut commencer par des substitutions de bases et si c'est possible, on essaie de déterminer des valeurs clefs de quelques images, souvent $f(0), f(1)$... Parfois, une suite de substitutions peut amener à la résolution du problème.

Exemples.

> *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$*
>
> $$f(x - 2f(y)) = x + y - 3f(y)$$

Généralement, lorsqu'on affronte une équation fonctionnelle, il faut commencer par des substitutions simples, bien choisies ! On peut par exemple essayer de trouver quelques valeurs comme $f(0), f(1), f(-1), \ldots$, ou essayer de trouver des conditions sur cette fonction. L'exercice ci-dessus aborde une équation fonctionnelle simple dont l'idée très basique, il suffit de se débarrasser de y dans l'expression $f(x-2f(y))$. Le raisonnement qu'on propose est le suivant : Posons $y = 0$, cela donne $f(x - 2f(0)) = x - 3f(0)$. Par la suite, on pose $z = x - 2f(0)$ alors $f(z) = z + 2f(0) - 3f(0) = z - f(0)$. En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve $f(0) = 0$ d'où la seule fonction qui vérifie les conditions de l'exercice est $f(x) = x$ pour tout réel x. Réciproquement la fonction identité vérifie l'équation initiale.

Il faut noter que la vérification est une étape très importante pour chaque problème, on peut perdre des points dans les compétitions olympiques si le candidat l'oublie ! Donc attention !!

> *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a*
>
> $$f(xy) = xf(x) + yf(y)$$

Soit f une solution du problème. La recherche de $f(0)$ semble judicieuse. On commence par substituer $x = 0$ et $y = 0$, on trouve $f(0) = 0$. Ainsi toute solution du problème doit vérifier $f(0) = 0$. Par la suite, en substituant $y = 0$, on obtient $xf(x) = f(0) = 0$, ce qui donne $f(x) = 0$. La dernière étape consiste à vérifier que la fonction nulle vérifie bien l'équation initiale, ce qui est immédiat.

> *La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifie $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et pour tous $x, y \in [0,1]$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$. Calculer $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$.*

Il est facile de trouver la valeur de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. En effet, en substituant $x = 1$ et $y = 0$, on trouve

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1+0}{2}\right) = \frac{f(1)+f(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

puis on a

$$\frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{2}\right) = \frac{f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})}{2} \qquad (*)$$

On a besoin donc de calculer $f(\frac{2}{3})$, en substituant $x = y = \dfrac{1}{3}$, on trouve

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = 2 \times \frac{f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)}{2} = 2f\left(\frac{1}{3}\right)$$

Donc d'après $(*)$ on retrouve $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$.

> *Trouver toutes les fonctions réelles f qui vérifient pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*
>
> $$f(x+y) - f(x-y) = 4xy$$

En substituant $x = y = 0$, on tombe sur $0 = 0$ (rien de nouveau). En substituant $x = y$, on trouve $f(2x) - f(0) = 4x^2$, en prenant $t = 2x$ et en posant $f(0) = c$, avec c une constante, on a $f(t) = t^2 + c$. Réciproquement les fonctions $t \mapsto t^2 + c$ vérifient l'équation initiale.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ qui pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ vérifient

$$xf(xy) = f(y)$$

Soit f une solution de l'équation ci-dessus. Comme la valeur 0 n'est pas autorisée ici, la première substitution à essayer est $x = 1$ et/ou $y = 1$. On voit que la substitution $x = 1$ mène à une trivialité, donc inintéressante. Posons $y = 1$ dans l'équation de base. On obtient $xf(x) = f(1)$ pour tout $x > 0$, i.e. $f(x) = \frac{f(1)}{x}$. Comme $f(1)$ n'est qu'une constante on pose $f(1) = c$, on obtient par la suite $f(x) = \frac{c}{x}$ pour tout $x > 0$. La réciproque est évidente. Donc l'équation de base admet une infinité de solutions de la forme $x \mapsto \frac{c}{x}$ avec c une constante strictement positive.

(Suisse 2005) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f(yf(x)) \times (x + y) = x^2(f(x) + f(y))$$

Soit f une solution de l'équation ci-dessus. À nouveau, nous travaillons dans $\mathbb{R}^{+*}$, donc nous allons plutôt nous orienter vers la valeur 1 pour les premières substitutions. Essayons de substituer $x = y = 1$ dans l'équation de base. Nous obtenons après calculs $f(f(1)) = f(1)$ $(*)$ Nous ne pouvons donc pas immédiatement trouver la valeur de $f(1)$. Par contre, nous avons établi une propriété intéressante à propos de $f(1)$. Il est bon à présent de ne pas baisser les bras et de poursuivre les substitutions pour obtenir plus d'informations à propos de $f(1)$. Rappelons ici que $f(1)$ n'est rien d'autre qu'une constante, ainsi, il est parfaitement possible (et même souhaitable !) de tenter des substitutions de la forme $(x, y) = (1, f(1)), (x, y) = (f(1), 1)$ ou encore $(x, y) = (f(1), f(1))$ et d'utiliser la propriété $(*)$ pour simplifier le résultat. Dans notre cas, substituer $x = f(1)$ et $y = 1$ donne, en utilisant la propriété $(*)$ pour simplifier les doubles f et en factorisant l'équation résultante, $(f(1)-1)(2f(1)+1) = 0$. Donc $f(1) = 1$ ou $f(1) = -1/2$. Comme le domaine d'arrivée est $\mathbb{R}^{+*}$, on exclut la seconde possibilité. On conclut que $f(1) = 1$. Afin d'utiliser cette information pour f, on substitue $x = 1$. Un simple réarrangement des termes donne $yf(y) = 1$, i.e. $f(y) = 1/y$. Réciproquement, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ vérifie l'équation de base.

(Ukraine 2017) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, :

$$f(x + f(f(y))) = y + f(f(x))$$

Un lecteur attentif remarquera que si on compose les deux termes de l'équation, on trouve

$$f(f(x + f(f(y)))) = f(y + f(f(x))) = x + f(f(y))$$

On fixe y et on pose $t = x + f(f(y))$ avec t un réel quelconque (puisque x parcourt $\mathbb{R}$) , donc $f(f(t)) = t$. En remplaçant dans l'équation de base, on trouve que $f(x + y) = x + y$. On prend $y = 0$. D'où la seule fonction qui vérifie notre équation fonctionnelle est $f(x) = x$ pour tout réel x. N'hésitez pas à composer par f lorsque l'équation vous parait symétrique ! Un autre exemple qui porte sur une inégalité fonctionnelle dans $\mathbb{N}^*$, qui semble un peu difficile mais pas de panique, vous allez voir que c'est simple !

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x) + yf(f(x)) \leq x(1 + f(y))$$

Il est vivement conseillé dans ce cas d'essayer de trouver la valeur de $f(1), f(f(1))$...
En prenant $x = y = 1$, on trouve $f(f(1)) \leq 1$ et puisque $f(f(1)) \neq 0$ car l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{N}^*$, alors $f(f(1)) = 1$. En prenant $x = 1, y = f(1)$, on trouve $f(1) \leq 1$ donc $f(1) = 1$. Pour $x = 1$, on obtient : $f(y) \geq y$ pour tout entier naturel non nul y. On remarque que $f(x) = x$ est solution, essayons de montrer que $f(x) \leq x$

pour conclure. En effet, pour $y = 1$, $x + f(x) \leq f(x) + f(f(x)) \leq 2x$ alors $f(x) \leq x$ d'après ce qui précède, on a $f(x) = x$ pour tout entier naturel non nul. Réciproquement, cette fonction vérifie les conditions de l'exercice.

➢ *On laisse au lecteur le soin de traiter cette question lorsque $\mathbb{N}$ est remplacé par $\mathbb{R}$, c'est le même principe de raisonnement !*

> *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:*
>
> $$f(x + f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + x^2$$
>
> *Un petit problème ! Une seule substitution permet de le résoudre, essayer de la trouver avant de voir la solution !!!*

On remplace x par $x - f(0)$ et y par $f(0)$, on trouve $f(x) = ax^2 + bx + c$. Reste à déterminer les constantes a, bet c.

> *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :*
>
> $$f(x + y) = \max(f(x), y) + \min(f(y), x)$$
>
> *pour tous les réels x, y*

Soit $P(x, y)$ l'assertion donnée. Notons que pour tous : $a, b \in \mathbb{R}$, on a :$\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$. Or

$$\begin{aligned}
P(x,0) + P(0,x) \implies 2f(x) &= (\max(f(x), 0) + \min(f(x), 0)) + (\max(f(0) + x) + \min(f(0) + x)) \\
&= (f(x) + 0) + (f(0) + x) \\
\implies f(x) &= f(0) + x.
\end{aligned}$$

Soit $f(0) = c$, alors : $f(x) = x + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Or $P(2c, 0)$ implique $2c + 0 + c = \max(3c, 0) + \min(c, 2c)$. Si $c > 0$, alors $3c = 3c + c$, ce qui est impossible ; si $c < 0$, alors $3c = 0 + 2c$, impossible aussi. On conclut que : $c = 0$, donc $f(x) = x$ pour tout réel x.

2.2 Substituons fonctionnelles

Dans le monde des mathématiques olympiques, les substitutions de base ne sont pas suffisantes pour résoudre une équation fonctionnelle. Cependant, il existe d'autres techniques qui permettent d'avoir des renseignements sur les fonctions recherchées. Les substitutions fonctionnelles sont largement utilisées pour résoudre certaines équations fonctionnelles.

Une substitution fonctionnelle consiste à remplacer une expression algébrique ou une fonction par une forme simple afin de simplifier l'équation fonctionnelle. Dans la suite, nous donnerons plusieurs exemples qui permettent de bien comprendre cette technique.

Exemples.

> *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ qui vérifient pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$*
>
> $$y^2 f(x) - x^2 f(y) = y^2 - x^2$$

Soit f une fonction vérifiant la relation ci-dessus. En divisant les deux membres de l'équation par x^2y^2 (on peut car x et y sont non nuls), on trouve

$$\frac{f(x)}{x^2} - \frac{f(y)}{y^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{f(y)}{y^2} - \frac{1}{y^2}$$

On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}$, on obtient par la suite $g(x) = g(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$. Donc la fonction g est constante, i.e. $g(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc $f(x) = cx^2 + 1$. On vérifie aisément que toutes les fonctions $x \mapsto cx^2 + 1$ vérifient l'équation de base.

> *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*
>
> $$x + 2f(x) + f(f(y) - x) = y$$

Soit f une solution de l'équation ci-dessus. Comme à notre habitude, commençons par quelques substitutions de base. Avec $x = 0$, nous obtenons $f(f(y)) = y - 2f(0)$.

Le terme le plus compliqué de l'équation de base est $f(f(y) - x)$. Il peut donc être judicieux d'essayer de s'en débarrasser. Le moyen le plus facile de fixer ce terme est de substituer $x = f(y)$. On obtient ainsi, après simplification des doubles f,

$$f(y) = -y + 3f(0)$$

Substituons encore $y = 0$ dans cette dernière équation, on obtient $f(0) = 0$. L'équation ci-dessus devient donc $f(y) = -y$. Réciproquement cette fonction vérifie l'équation de base.

➛ *Voyons à présent un exemple un peu moins habituel. Il s'agit d'une inéquation fonctionnelle. Pas de panique ! Le procédé pour résoudre un tel problème reste fondamentalement le même*

> *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*
>
> $$f(x + y) \geq f(xy)$$

Soit f une solution de l'inéquation ci-dessus. Il est toujours bon de commencer un problème d'équation fonctionnelle en identifiant les potentielles solutions. Pour ce faire, passez en revue les fonctions usuelles (les fonctions constantes $x \mapsto c$, les fonctions linéaires $x \mapsto ax + b$, en particulier $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$, $x \mapsto x^2, x \mapsto -x^2$, $x \mapsto c/x$, etc). Dans cet exemple, seules les fonctions constantes dans la liste ci-dessus satisfont l'inéquation. On va donc essayer de montrer que les solutions sont les fonctions constantes. Commençons naturellement par substituer $y = 0$. On obtient $f(x) \geq f(0)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Ainsi, si on arrive à établir l'inégalité inverse, c'est-à-dire $f(x) \leq f(0)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$, alors on pourrait déduire l'égalité $f(x) = f(0)$ et on aura résolu le problème. Essayons donc de faire apparaître un $f(0)$ du côté gauche du signe $\geq$. La substitution naturelle est donc $y = -x$. Elle mène à

$$f(0) \geq f(-x^2)$$

Le problème à présent est que les nombres réels ne peuvent pas tous s'exprimer comme "moins le carré d'un autre". Ainsi, on peut conclure l'égalité $f(t) = f(0)$ à ce stade seulement pour les t qui peuvent s'écrire $t = -x^2$ pour un certain x dans $\mathbb{R}$. Il est facile de voir dans ce cas que si $t \leq 0$, alors $t = -\sqrt{t^2}$ et que cette même expression n'est pas dénie pour $t > 0$. Étant donné $t \leq 0$, on pose $x = \sqrt{-t}$ dans l'équation ci-dessus et on déduit que $f(0) \geq f(t)$. Combiné avec notre premier résultat, on a $f(t) = f(0)$ pour tout $t \leq 0$ dans $\mathbb{R}$. Une autre substitution qu'il est toujours bon d'envisager est le classique $x = y$. Dans ce cas, cela donne $f(2x) \geq f(x^2)$. En posant $x = -\sqrt{t}$, on obtient $f(0) = f(-2\sqrt{t}) \geq f(t)$. De la double inégalité et des résultats précédents, on peut finalement conclure que $f(t) = f(0)$ pour tout t réel. On vérifie aisément que toutes les fonctions constantes $x \mapsto c$ satisfont l'inégalité de départ.

> *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ qui vérifient*
>
> $$2f(x) + 3f\left(\frac{2x + 29}{x - 2}\right) = 100x + 80$$
>
> *pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.*

Pour tout $x \neq 2$, on pose $r(x) = \dfrac{2x+29}{x-2}$. On commence par remarquer que $r(x) \neq 2$ pour tout $x \neq 2$ et que $r(r(x)) = x$ on substitue x par $r(x)$ dans l'équation de base. Ainsi on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} 2f(x) + 3f(r(x)) = 100x + 80 \\ 2f(r(x)) + 3f(x) = 100r(x) + 80 \end{cases}$$

En éliminant $f(r(x))$, on obtient $f(x) = 60r(x) - 40x + 16$. Donc

$$f(x) = \frac{40x^2 - 216x - 1708}{2 - x}$$

On vérifie réciproquement que cette fonction vérifie l'équation de base.

> *(Suisse 2004) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*
>
> $$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

Soit f une solution de l'équation ci-dessus. La première partie, comme très souvent, consiste à calculer la valeur de $f(0)$. Vous pouvez omettre cette partie dans un premier temps et y revenir quand on aura abordé le chapitre sur la *surjectivité*. Le schéma paraîtra alors beaucoup plus clair.
La substitution $x = y = 0$ nous donne $f(f(0)) = f(0)^2$. En substituant $x = 0$ et $y = -f(0)^2$, on obtient $f(f(-f(0)^2)) = 0$. Autrement dit, si l'on pose $a := f(f(-f(0)^2))$, alors $f(a) = 0$. Ce genre d'argument paraîtra beaucoup plus naturel après avoir abordé la surjectivité. Posons à présent $x = y = a$ pour obtenir $f(0) = a$. En appliquant f des deux côtés, on obtient $f(f(0)) = f(a) = 0$, sachant que $f(f(0)) = f(0)^2$, on obtient $f(0) = 0$. Ce résultat nous permet de trouver plus de condtions et de relations sur cette fonction. On obtient tour à tour $f(f(y)) = y$ et $f(xf(x)) = f(x)^2$. Utilisons la première égalité pour simplifier la seconde Comment faire apparaître des doubles f dans la seconde égalité ? L'idée est d'introduire une nouvelle variable grâce à la substitution $x = f(t)$, où t est un réel quelconque. Pour s'économiser une nouvelle variable, on effectue la manipulation suivante : on remplace tous les x par des $f(x)$ (à la place de remplacer les x par des $f(t)$). On obtient ainsi

$$f(f(x)f(f(x))) = f(f(x))^2$$

L'expression obtenue semble bien plus compliquée que l'originale, mais elle se laisse simplifier si l'on utilise le fait que $f(f(y)) = y$. On obtient

$$f(xf(x)) = x^2$$

Combiné avec l'égalité que l'on a transformée, on a $f(x)^2 = x^2$. Attention, cela ne signifie pas que l'on obtient deux fonctions solutions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$! On sait seulement que si f est une solution de l'équation de base, alors $f(x) = x$ pour certaines valeurs de x et $f(x) = -x$ pour les autres.
Rappelons que l'on sait que $f(0) = 0$. Donnons-nous donc $x_1 \neq 0$ tel que $f(x_1) = x_1$ et $x_2 \neq 0$ tel que $f(x_2) = -x_2$ et voyons si une combinaison des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ est une solution possible de l'équation.
Avec $x = x_1$ et $y = x_2$, on obtient $f(x_1^2 - x_2) = x_1^2 + x_2$. D'autre part on sait que $f(x_1^2 - x_2) = x_1^2 - x_2$ ou $f(x_1^2 - x_2) = -x_1^2 + x_2$. En combinant on obtient $x_2 = 0$ ou $x_1 = 0$. Ce qui contredit le fait que $x_1, x_2 \neq 0$. Ainsi, on a prouvé que f ne peut pas être une combinaison des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x$. Il ne nous reste donc que deux candidats pour être solution : les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$. Un calcul simple montre que ces deux fonctions vérifient l'équation de base.

> *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*
>
> $$xf(x) - yf(y) = (x - y)(f(x + y) - xy)$$

En manipulant un peu cette expression, on tombe sur $x(f(x)-x^2)+y(f(y)-y^2) = (x-y)((f(x+y)-(x+y)^2)$. On remarque qu'il faut introduire la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x^2$. D'où, on se ramène à l'égalité suivante : $xg(x) - yg(y) = (x - y)g(x + y)$. C'est plus pratique et plus simple à manipuler ! on remarque que si $g(x)$ est solution alors $g(x) - f(0)$ est solution alors sans perte de généralité, on peut supposer que $g(0) = 0$. A ce stade, on trouve en substituant x par $-x$ que g est impaire , puis en prenant $y \to -y$, on obtient : $(x-y)g(x+y) = (x+y)g(x-y)$ On pose $u = x - y$ et $v = x + y$, on obtient $ug(v) = vg(u)$ pour u, v non nuls, on trouve $\frac{g(u)}{u} = \frac{g(v)}{v} = cte$ donc $g(x) = ax + g(0)$. Finalement, $f(x) = x^2 + ax + b$ avec $b = g(0)$. On laisse le lecteur vérifier si cette fonction est valable !

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $\in \mathbb{N}^*$ et pour tous $x, y \in \mathbb{N}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Avant d'attaquer cet exercice, on voit qu'il est nécessaire de rappeler le binôme de Newton, une formule très utile.

Rappel. (Binôme de Newton) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

On pose $g(x) = f(x) - x^n$, d'après le binôme de Newton, on a la relation suivante :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + (x+y)^n - x^n - y^n \implies g(x+y) = g(x) + g(y)$$

Par récurrence $g(x) = xg(1), \forall x \in \mathbb{N}^*$. On pose $g(1) = f(1) - 1 = c \geq 0$, alors $f(x) = cx + x^n$.

Déterminer toutes les paires de fonctions (f, g) définies de $\mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ telle que pour tous $x, y > 0$,

$$(f(x) + y - 1)(g(y) + x - 1) = (x+y)^2$$

et

$$(-f(x) + y)(g(y) + x) = (x + y + 1)(y - x - 1)$$

On introduit la fonction h à deux variables définie par $h(x, y) = \dfrac{g(y) + x}{x + y + 1}$ alors les deux équations donnent :

$$(x + 1 + y)h(x, y) = f(x+1) + y - 1$$

$$(x + 1 - y)h(x, y) = f(x) - y$$

On somme les deux égalités , on obtient : $(2x+2)\ h(x, y) = f(x+1) + f(x) - 1$. Cela montre que $h(x, y)$ ne dépend que de x , on prend dans la première équation $y = 1$ et $y = 2$ respectivement , on trouve que $\frac{f(x+1)}{x+2} = \frac{f(x+1)+1}{x+3}$. d'où $f(x+1) = x + 2$ implique $f(x) = x + 1$ pour tout $x > 1$. En remplaçant dans la première équation ,on trouve que $g(y) = y + 1$ pour tout $y > 0$. On remplace une deuxième fois, on obtient : $f(x) = x + 1$ pour tout $x > 0$. Réciproquement , ces fonctions sont valables.

(Maroc 2015) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} - \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ on a

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{x}$$

On remplace $x \to \dfrac{1}{1-x}$ puis $x \to \dfrac{x-1}{x}$, on obtient le système d'équations

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{x}$$

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1-x$$
$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x)=\frac{x}{x-1}$$

Après résolution, on aboutit au résultat suivant $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+2x-1}{2x(x-1)}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette fonction est bien solution du problème.

2.3 Égalisation de termes fonctionnels

Parfois, lorsqu'une équation fonctionnelle paraît plutôt robuste, il est bon de chercher certaines substitutions sophistiquées qui permettent d'égaler deux termes fonctionnels. En clair, si par une substitution astucieuse, on arrive à égaler deux membres additifs ou multiplicatifs de l'équation, alors cette dernière peut se simplifier de manière décisive. Étudions tout de suite un exemple pour éclaircir ces propos.

Exemples.

> *(Suisse 1998) Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$,*
>
> $$f(f(x)+y)=f(x^2-y)+4f(x)y$$

Soit f une fonction qui vérifie l'équation ci-dessus. Une démarche standard suggérerait de tenter les substitutions qui annuleraient les arguments des deux gros termes fonctionnels, à savoir $y=x^2$ et $y=f(x)$. Mais voyons ici une méthode plus directe. Existe-t-il une substitution qui égalerait les termes $f(f(x)+y)$ et $f(x^2-y)$, de manière à ce qu'ils se simplifient mutuellement dans l'équation ? Pour cela, on doit avoir $f(x)+y=x^2-y$. On peut donc prendre $y=(x^2-f(x))/2$. Cette substitution donne

$$4f(x)\times\frac{x^2-f(x)}{2}=0$$

et cela pour tout $x\in\mathbb{R}$. Il s'ensuit directement qu'étant donné une valeur x dans $\mathbb{R}$, alors on a soit $f(x)=0$, soit $f(x)=x^2$. En particulier, $f(0)=0$. Attention à nouveau, cela ne signifie pas que l'on a soit $f(x)=0$ pour tout x, soit $f(x)=x^2$ pour tout x, mais bien que n'importe quel mélange de ces deux fonctions est potentiellement une solution ! Supposons qu'il existe deux réels distincts $x_1,x_2\neq 0$ avec $f(x_1)=0$ et $f(x_2)=x_2^2$. En substituant $x=x_1$ et $y=x_2$ dans l'équation de base, on obtient $f(x_1^2-x_2)=x_2^2$. D'autre part, on a soit $f(x_1^2-x_2)=0$, soit $f(x_1^2-x_2)=(x_1^2-x_2)^2$. En combinant, on trouve deux cas ; le premier est $x_2=0$ (Absurde) et le second cas est $x_1^2(x_1^2-2x_2)=0$. Comme $x_1\neq 0$, on a alors $x_1^2=2x_2$. Substituer $x=0$ et $y=x_2$ nous donne $f(-x_2)=f(x_2)=x_2^2$. Si l'on répète l'argument ci-dessus avec la substitution $x=x_1$ et $y=-x_2$, alors on obtient de manière similaire $x_1^2=2x_2$ et donc $x_1=x_2=0$ qui est également contradictoire.

> *Trouver toutes les fonctions $\mathbb{R}^{*+}\to\mathbb{R}^{*+}$ telles que pour tous $x,y\in\mathbb{R}^{*+}$,*
>
> $$f(x^2f(f(y)))x=f(x)f(y)$$

Ce problème, après quelques tentatives, se révèle hermétique aux méthodes de substitutions élémentaires. Nous travaillons ici avec un produit de termes fonctionnels. On peut tenter d'égaler ces termes fonctionnels, dans le but de pouvoir simplifier un peu cette équation. En substituant $x=\dfrac{1}{f(f(y))}$, alors $f(x^2f(f(y)))=f(x)$, après simplification, on obtient $f(y)\times f(f(y))=1$ Notez que cette manipulation est licite parce que le domaine d'arrivée de f ne contient pas zéro. De manière similaire, avec $x=\sqrt{\dfrac{y}{f(f(y))}}$, on obtient $f(x^2f(f(y)))=f(y)$. Ainsi après simplification

$$f\left(\sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}\right)=\sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}\qquad(*)$$

Une telle équation devrait vous faire bondir de votre chaise. L'étudiant qui aura pris le temps de chercher d'éventuelles solutions à l'équation de départ aura abouti à la conclusion que probablement seule la fonction $x \mapsto 1/x$ satisfait l'équation. Or, l'unique valeur positive z qui satisfait $z = 1/z$ est la valeur $z = 1$. Ainsi, il est probable qu'on puisse déduire quelque chose de décisif à ce niveau-là. Reprenons l'équation $f(y) \times f(f(y)) = 1$ et appliquons-la aux valeurs z telles que $f(z) = z$. L'équation devient $zf(z) = 1$. En utilisant à nouveau que $f(z) = z$, on en déduit $z^2 = 1$ et donc $z = 1$. Ainsi on a montré que si une valeur z satisfait $f(z) = z$, où f est une solution de l'équation de départ, alors $z = 1$. Si l'on combine ce résultat avec l'égalité $(*)$, on obtient $\sqrt{\dfrac{y}{f(f(y))}} = 1$ et donc $f(f(y)) = y$ pour tout y dans $\mathbb{R}^{*+}$ Finalement, en utilisant l'égalité précédente, l'équation $f(y)f(f(y)) = 1$ devient $f(y) = 1/y$. On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une solution de l'équation initiale.

➛ *Ce dernier exemple vous montre qu'il ne faut pas craindre les vilaines substitutions. Après avoir essayé les substitutions de base, tentez toujours d'égaler les termes fonctionnels de part et d'autre de l'équation. C'est un bon réflexe en matière d'équations fonctionnelles.*

2.4 Calcul double et multiple

Il existe des cas où l'on n'arrive pas à simplifier l'équation de manière significative. On tourne alors en rond avec des gros termes fonctionnels compliqués. On peut alors essayer de calculer une expression de deux façons fondamentalement différentes, un peu comme on s'est surpris à calculer $f(xf(x))$ de deux manières dans un exemple précédent. En combinant les résultats, on obtient souvent de nouvelles équations plus utiles que les précédentes.

De manière plus générale, on peut parfois construire un système d'équations dont les inconnues sont des termes fonctionnels que l'on souhaite calculer. Il faut alors faire apparaître ces termes de manière significativement différente pour ne pas obtenir de résultats triviaux en résolvant le système engendré.
Voyons quelques exemples permettant de bien découvrir cette technique.

Exemples.

Trouver toutes les fonctions $f : [-1, +\infty[\to [-1, +\infty[$ *telles que pour tous* $x, y > 0$

$$f(xf(x-1) + yf(y-1)) = xf(3x-1)$$

Soit f une solution de l'équation ci-dessus. Si l'on substitue naturellement $x = 1$, on trouve $f(f(0)+yf(y-1)) = f(2)$ pour tout $y > 0$. En parallèle la sustitution $y = 1$ mène à $f(xf(x-1)+f(0)) = xf(3x-1)$ pour tout $x > 0$. Ainsi en faisant une égalisation on trouve $xf(3x-1) = f(2)$, i.e. $f(3x-1) = f(2)/x$. Étant donné $t > -1$, on substitue $x = (t+1)/3$ et on obtient par la suite $f(t) = \dfrac{3f(2)}{t+1}$. Réciproquement et aprés un calcul on tombe sur $\dfrac{c}{2c+1} = \dfrac{c}{3}$. On tire que $c \in \{0, 1\}$. Donc les fonctions qui vérifient l'équation de base sont la fonction nulle et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$. . On n'a pas besoin ici de vérifier que ces deux fonctions sont solutions car on les a trouvées en essayant quelles valeurs de c sont effectivement solutions de l'équation de départ. Si vous n'êtes pas sûrs, mieux vaut vérifier une fois de trop ses solutions qu'oublier de le faire.

➛ *L'équation fonctionnelle de l'exemple suivant n'a qu'une seule variable libre. De telles équations sont en principe difficiles car il y a peu de substitutions raisonnables à faire et moins de degrés de liberté.*

Trouver toutes les fonctions réelles f *satisfaisant les trois conditions suivantes*

1. $f(-x) = -f(x)$ *pour tout* x *dans* $\mathbb{R}$ *;*

2. $f(x+1) = f(x) + 1$ *pour tout* x *dans* $\mathbb{R}$ *;*

3. $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.

Soit f une fonction qui vérifie le système d'équations ci-dessus. En substituant $x = 0$ dans (a) il s'en suit directement que $f(0) = 0$. L'équation (b) fournit la relation de récurrence (Voir le principe de récurrence dans le cours des stratégies de base) $f(n+1) = f(n) + 1$ qui, combiné à $f(0) = 0$, nous permet de conclure que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Il nous faut maintenant une idée pour avancer, car on ne conclura rien de plus avec des substitutions de base. L'idée est de combiner les équations (b) et (c) pour calculer un même terme fonctionnel de deux manières différentes. On cherche donc une grandeur que l'on peut écrire à la fois sous la forme $a + 1$ et $1/b$. Il y a bien sûr beaucoup de possibilités, mais les différentes expressions qui apparaissent dans les conditions de base suggèrent de s'intéresser à $1 + 1/x$ pour $x \neq 0, -1$. D'une part on obtient avec (b) et en utilisant ensuite (c),

$$f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = \frac{f(x)}{x^2} + 1 \qquad (*)$$

D'autre part, avec (c), on a aussi

$$f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = f\left(\frac{1}{\frac{x}{1+x}}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)(x+1)^2}{x^2}$$

Continuons nos calculs, il faut calculer le terme $\dfrac{x}{1+x}$, pour s'en sortir on le met sous sa forme canonique, on obtient

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = f\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{x+1}\right) = 1 - \frac{f(x+1)}{(x+1)^2} = 1 - \frac{f(x)+1}{(x+1)^2}$$

En somme on a ainsi

$$f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{(x+1)^2 - 1 - f(x)}{x^2}$$

Une comparaison avec $(*)$ donne immédiatement $f(x) = x$ pour tout $x \neq 0, -1$. Cependant on connaît déjà que $f(0) = 0$ et $f(-1) = -1$. Donc $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction remplit tous les équations du système proposé.

(CSO 2001) Trouver toutes les fonctions réelles f telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2 + f(y)) = (x-y)^2 f(x+y)$$

Soit f une fonction solution de l'équation ci-dessus. Le côté gauche est invariant si l'on remplace x par $-x$. Il en va donc de même pour le côté droit. Cela fournit l'équation

$$(x-y)^2 f(x+y) = (x+y)^2 f(y-x)$$

On aimerait maintenant substituer x et y de telle manière que $x + y$ prenne toutes les valeurs réelles pendant que xy reste constant, par exemple égal à 1. On y arrive en posant $x = (t-1)/2$ et $y = (t+1)/2$ avec t un nombre réel arbitraire. L'équation devient $f(t) = f(1)t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Toutes les solutions sont donc de la forme $x \mapsto cx^2$ avec c une constante réelle. Remplaçons dans l'équation de base pour déterminer d'éventuelles contraintes sur c. L'équation devient

$$c(x^2 + cy^2)^2 = c(x^2 - y^2)^2$$

pour tous x, y dans $\mathbb{R}$. Avec $x = y = 1$ on obtient $c(c+1)^2 = 0$ et donc $c = 0$ ou $c = -1$. Réciproquement on a bien l'égalité $c(x^2 + cy^2)^2 = c(x^2 - y^2)^2$ pour tous x et y dans $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation fonctionnelle sont donc la fonction nulle et la fonction $x \mapsto -x^2$.

(APMO 2014) Soit $S = \{2, 3, 4, 5, ...\}$ l'ensemble des entiers ≥ 2. Existe t-il une fonction $f : S \to S$ telle que pour tous $a, b \in S$ avec $a \neq b$,

$$f(a)f(b) = f(a^2b^2)$$

Pour résoudre cet exercice nous allons compter de deux manières différentes la même quantité. Notons qu'on a

$$\begin{aligned} f(2)f(2^2)f(2^3)f(2^4)f(2^5) &= f(2^3)f(2^4)f(2^5)f(2^6) \\ &= f(2^5)f(2^6)f(2^14) \\ &= f(2^{14})f(2^{22}) \\ &= f(2^{72}) \end{aligned}$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned} f(2)f(2^2)f(2^3)f(2^4)f(2^5) &= f(2^1)f(2^2)f(2^4)f(2^{16}) \\ &= f(2^2)f(2^4)f(2^34) \\ &= f(2^4)f(2^{72}) \end{aligned}$$

Donc par comparaison des deux égalités obtenus on trouve $f(2^4) = 1$, ce qui est impossible.

2.5 Symétries et variables additionnelles

Parfois on est face à une équation fonctionnelle dont l'un de ses deux membres est symétrique par rapport à ses variables, ou nous pouvons après une certaine démarche obtenir une symétrie. En échangeant x par y nous obtenons une nouvelle condition, ce qui pourrait savérer utile.
Dans d'autres cas, nous pourrions avoir besoin d'ajouter une variable supplémentaire pour obtenir une symétrie. Dans la suite nous donnerons plusieurs exemples permettant d'illustrer cette technique.

Exemples.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xy) = f(x)y^2 + f(y) - 1$$

Le membre de gauche est symétrique par rapport aux variables a et y, alors il en est de même pour le membre de droite. On en déduit $f(x)y^2 + f(y) - 1 = f(y)x^2 + f(x) - 1$. Alors, $f(x)(y^2 - 1) = f(y)(x^2 - 1)$ et alors pour $x, y \neq \pm 1$ on a $\dfrac{f(x)}{x^2 - 1} = \dfrac{f(y)}{y^2 - 1}$. Ainsi, $f(x) = c(x^2 - 1)$ pour tout $x \neq \pm 1$. C'est encore vrai pour $x = \pm 1$ puisque $f(\pm 1)(y^2 - 1) = f(y)((\pm 1)^2 - 1) = 0$, . En remplaçant dans l'équation de base on trouve après un calcul $c = 1$, par la suite la seule solution de l'équation fonctionnelle mise en question est $x \mapsto x^2 - 1$.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient

$$f(x)f(y - f(x)) = 4xy - 2f(x^2)$$

On peut aisément rendre le membre de gauche symétrique en deux variables, il suffit de substituer y par $y + f(x)$. On obtient

$$f(x)f(y) = 4x(y + f(x)) - 2f(x^2) = 4xy + 4xf(x) - 2f(x^2)$$

Le membre de gauche étant symétrique, il en est de même pour le membre de droite, on obtient ainsi $4xf(x) - 2f(x^2) = 4yf(y) - 2f(y^2)$; i.e. la fonction $x \mapsto 4xf(x) - 2f(x^2)$ est constante, on a alors l'existence d'une constante a telle que $4xf(x) - 2f(x^2) = a$. En particulier, on a $f(x)f(y) = 4xy + a$. On va montrer que $a = 0$. Si on suppose que $a \neq 0$, alors $f(x)f(-\frac{a}{4x}) = 0$ donc si $f(x) \neq 0$ alors $f(-\frac{a}{4x}) = 0$. En particulier $f(y_0) = 0$ pour un certain y_0, ceci est impossible puisque $4xy_0 + a = f(x)f(y_0)$ pour tout x si $a \neq 0$. On conclut que $f(x)^2 = 4x^2$, doù $f(x) = \pm 2x$. L'identité $f(x)f(y) = 4xy$ implique immédiatement que $f(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou $f(x) = -2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La réciproque est immédiate.

Déterminer les fonctions réelles f telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(y + f(x)) = f(x)f(y) + f(f(x)) + f(y) - xy$$

On substitue $y = 0$, on obtient $f(x)f(0) + f(0) = 0$, donc soit $f(0) = 0$ ou $f(x) = -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le second cas est impossible en remplaçant dans l'équation de base. On substitue y par $f(y)$ dans l'équation de base de sorte que le membre gauche soit symétrique en x et y. Par suite le membre de droite est également symétrique. Un réarrangement donne

$$\frac{f(f(x)) + x}{x} = \frac{f(f(y)) + y}{y} = \lambda$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = kf(x) - x$. Ainsi, l'équation de base devient $f(y + f(x)) = f(x)f(y) + kf(x) - x + f(y) - xy$. On note $f(-1) = b$, alors en prenant $y = -1$ dans la dernière équation, on trouve $f(f(x) - 1) = (b + k)f(x) + b$ et en substituant y par $f(y) - 1$ on obtient

$$\begin{aligned} f(f(x) + f(y) - 1) &= ((k + b)f(y) + b)f(x) + kf(x) - x + (k + b)f(y) + b - xf(y) + x \\ &= (k + b)[f(x)f(y) + f(x) + f(y)] + b - xf(y) \end{aligned}$$

Cette équation implique que $xf(y) = yf(x)$, doù $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(y)}{y}$ pour tout $x, y \neq 0$, par suite $f(x) = cx$ qui est vrai aussi pour $x = 0$ en vertu de $xf(y) = yf(x)$ (en prenant $y = 0$ et en laissant x libre). Maintenant en prenant $f(x) = cx$ dans l'équation de base on obtient facilement $c = 1$ ou $c = -1$. En conclusion, les deux seules solutions sont l'identité et la fonction $x \mapsto -x$.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$:

$$f(f(x) + f(y)) = f(x^2) + 2x^2 f(y) + f(y^2)$$

Le côté de gauche est symétrique, donc

$$f(x^2) + 2x^2 f(y) + f(y^2) = f(y^2) + 2y^2 f(x) + f(x^2)$$

alors

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(y)}{y^2}$$

doù $f(x) = cx^2$.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x) + f(y)) = f(x^2) + 2x^2 f(y) + f(y)^2$$

De la même façon que l'exercice qui précède, on obtient :

$$f(x^2) + 2x^2 f(y) + f(y)^2 = f(y^2) + 2y^2 f(x) + f(x)^2$$

En prenant $y = 0$ et $y = 1$ respectivement, on trouve le système suivant :

$$\begin{aligned} f(x^2) + x^2 f(0) + f(0)^2 &= f(0) + f(x)^2 \\ f(x^2) + 2x^2 f(1) + f(1)^2 &= f(1) + 2f(x) + f(x)^2 \end{aligned}$$

doù $f(x) = 0$ ou $f(x) = x^2$ pour tout réel x. On laisse au lecteur le soin de vérifier que les deux égalités ne peuvent plus occurer en même temps !

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(xf(y)) - x = f(xy)$$

Malheureusement l'égalité $f(xf(y)) - x = f(yf(x) - y$ n'est pas intéressante ! Or, si on remplace x par $f(x)$, on trouve :

$$f(f(x)f(y)) = f(x) + f(yf(x)) = f(x) + y + f(xy)$$

Donc, cette expression est symétrique . Alors :

$$f(x) + y + f(xy) = f(y) + x + f(yx)$$

doù $f(x) - x = f(y) - y = c$, alors $f(x) = x + c$ En remplaçant dans léquation de base, on trouve $c = 1$.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{N}$:

$$f(f(x) + y) = x + f(f(y))$$

En remplaçant y par $f(y)$, on tombe sur une relation symétrique :

$$f(f(x) + f(y)) = x + f(f(y)) = y + f(f(x))$$

Donc $f(f(x)) = x + c$, exploitons cette relation dans l'équation de base avec $x \to f(x)$ alors, on obtient $f(x + y + c) = x + y + c$ d'où :$f(x) = x$.

➛*Dans la suite, on discutera un truc important : la méthode des trois variables. Cette méthode consiste à introduire une nouvelle variable libre pour se débarrasser des restrictions de l'équation fonctionnelle. Dans certains cas, cette méthode est très puissante !*

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$f(x + y)^2 = f(x)^2 + 2f(xy) + f(y)^2$$

On introduit la variable z, comme ce qui suit :

$$f(x + y + z)^2 = f(x)^2 + 2f(x(y + z)) + f(y + z)^2$$

et puisque $f(y + z)^2 = f(y)^2 + 2f(yz) + f(z)^2$ alors ,on obtient :

$$f(x + y + z)^2 = f(x)^2 + f(y)^2 + f(z)^2 + 2f(x(y + z)) + 2f(yz)$$

et par symétrie du côté gauche , on déduit que :

$$f(yz) + f(xy + zx) = f(xz) + f(yx + yz) = f(yz) + f(xy + yz)$$

Or, il est évident que le système déquations : $a = yz, b = xz, c = xy$ admet des solutions . Alors :

$$f(a) + f(b + c) = f(b) + f(a + c) = f(c) + f(a + b)$$

Fixons b, c , on obtient :

$$f(a + c) - f(a) = f(a + b) - f(b)$$

Autrement dit

$$f(x + c) = f(x) + f(b + c) - f(b)$$

Soit la fonction $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$, telle que $g(c) = f(b + c) - f(b)$ Alors $f(x + y) = x + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ Le reste de l'exercice est laissé comme exercice pour le lecteur !

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$f(x + 3f(y)) = f(x) + f(y) + 2y$$

On a $f(x + 3f(y + z)) = f(x) + f(y + z) + 2(y + z)$. Mais, on veut calculer le côté gauche de deux façons différentes .Pour cela , on remplace z par $3f(z)$. D'où

$$f(x+3f(y+3f(z))) = f(x+3f(y)+3f(z)+6z) = f(x+3f(y)+6z)+f(z)+2z = f(x+6z)+f(y)+2y+f(z)+2z$$

D'autre part, le côté droit est équivalent à

$$f(x) + f(y + 3f(z)) + 2y + 6f(z) = f(x) + f(y) + f(z) + 2z + 2y + 6f(z)$$

Alors $f(x + 6z) = f(x) + 6f(z)$. On remplace x par $6x$:$f(6x + 6z) = f(6x) + 6f(z) \implies 6f(z) = f(6z) + c$ avec c une constante. Alors $f(x + z) = f(x) + f(z) + c$.

Dans la suite des chapitres, on verra que cette fonction est linéaire (voir le chapitre 3).
➛*Si on affronte une équation du genre*

$$f(x + g(y)) = g(y) + h(x, y)$$

Il est vivement conseillé de comparer les expressions $P(x, y + g(z))$ et $P(x + h(x, z), y)$

2.6 Itérées d'une fonction

Exemples.

(Proposé OIM 1992) Soient a et b deux réels strictement positifs. Prouver qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout réel $x \geq 0$,

$$f(f(x)) + af(x) = b(a + b)x$$

Soit f une solution éventuelle. L'équation fonctionnelle portant sur des itérées, il peut être judicieux de considérer la suite (x_n) définie par $x_0 = x$ un réel donné, et pour tout entier $n \geq 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$. On obtient $x_{n+2} + ax_{n+1} - b(a + b)x_n = 0$. C'est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Léquation $X^2 + aX - b(a+b) = 0$ admet donc deux solutions distinctes qui sont b et $-(a+b)$. Il existe donc deux constantes λ et μ telles que pour tout $n \geq 0$, $x_n = \lambda b^n + \mu(-1)^n(a+b)^n$. On va prouver que $\mu = 0$, supposons le contraire, puisque $a, b > 0$, on a $| \ b^n \ |\leq| \ (-1)^n(a + b)^n \ |$ et donc pour n suffisamment grand il serait possible d'avoir $x_n < 0$, ce qui contredit le fait f est à valeurs positives. Donc $\mu = 0$. Mais alors, pour $n = 0$ et $n = 1$, il vient respectivement $x_0 = x = \lambda$ et $x_1 = f(x) = \lambda b$. Doù $f(x) = bx$, ceci assure l'unicité. On vérifie aisément que la fonction $x \mapsto bx$ est solution du problème.

Déterminer toutes les fonctions $f : [0, 1] \to [0, 1]$ telles que pour tout réel $x \in [0, 1]$,

$$f(2x - f(x)) = x$$

Soit f une solution éventuelle. Puisque f est définie sur $[0, 1]$, on note alors que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $2x - f(x) \in [0, 1]$. Posons $g : x \mapsto 2x - f(x)$. La fonction g est définit et à valeurs dans $[0, 1]$. De plus pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(g(x)) = x$. Pour tout entier $n \geq 0$, on note g^n la n-ième itérée de g. Pour $x \in [0, 1]$, on a $g(g(x)) = 2g(x) - f(g(x)) = 2g(x) - x$. Par une récurrence sans difficulté on prouve alors que pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^n(x) = ng(x) - (n - 1)x$. Supposons qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $g(x_0) \neq x_0$. D'après ci-dessus, on déduit que $\lim_{n\to\infty} g^n(x_0) = \infty$ et ceci contredit le fait que g est bornée. Donc $g(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$, i.e. $f(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$. On laisse le soin au lecteur pour vérifier que cette fonction est bien solution du problème.

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ un entier. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $n \geq m \geq 0$,

$$f(n+m) + f(n-m) = f(an)$$

Avec $m = 0$ on obtient $2f(n) = f(an)$, en particulier $f(0) = 0$. En prenant maintenant $m = 1$ on obtient la relation de récurrence $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0$, avec $a_n = f(n)$, $n \geq 0$. L'équation caractéristique $x^2 - 2x + 1 = 0$ admet une racine double $x_1 = x_2 = 1$, et par suite $f(n) = \alpha + \beta n$. Comme $0 = f(0) = \alpha$ alors on voit que $f(n) = \beta n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par la suite, pour tous $n \geq m$, $\beta(n+m) + \beta(n-m) = \beta a n$. On en déduit que $\beta(a-2) = 0$. Alors pour $a \neq 2$, l'unique solution est la fonction nulle, et pour $a = 2$ les solutions sont les fonctions $f(n) = \beta n$ avec β une constante.

(Bulgarie 1996) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$3f(n) - 2f(f(n)) = n$$

Pour n fixé on pose $a_0 = n$ et $a_{k+1} = f(a_k)$ avec $k \in \mathbb{N}$. L'équation fonctionnelle implique que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $3a_{k+1} - 2a_{k+2} = a_k$. L'équation caractéristique $2x^2 - 3x + 1 = 0$ admet pour racines 1 et $1/2$, par suite $a_k = c_0 + c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Comme a_k et c_0 sont des entiers, il s'en suit que 2^k divise c_1 pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier $a_1 = a_0$, i.e. $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.7 Savoir exploiter des particularités

On l'a déjà dit, toute information sur la fonction cherchée est bonne et certaines d'elles peuvent même indiquer les démarches à suivre vers la solution : fonctions définies et/ou à valeurs sur les entiers, continuité, monotonie, polynômes... Dans ce dernier cas il faut surtout pas oublier qu'une fonction polynômiale n'admet qu'une infinité de racines.

Exemples.

(Maroc 2012) Déterminer toutes les fonctions polynômiales qui vérifient pour tous $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1$$

Le lecteur attentif remarquera que si P est une solution, alors il en est de même pour $P + c$ avec c une constante réelle. On remarque aussi que la fonction $x \mapsto x^2$ est une solution. On va alors montrer que les seules solutions de l'équation fonctionnelle mise en question sont les fonctions $x \mapsto x^2 + c$ où c est une constante réelle. L'idée clé est de montrer que la fonction polynômiale $P(x) - x^2$ est constante. Pour s'en sortir on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = P(x) - x^2$. On obtient

$$Q(x+1) + (x+1)^2 = P(x+1) = P(x) + 2x + 1 = Q(x) + x^2 + 2x + 1$$

Par suite, $Q(x+1) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc la fonction polynômiale Q est constante (le polynôme $Q(x) - Q(0)$ admet une infinité de racines) et c'est ce qu'il fallait démontrer.

(Putnam 1971) Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x^2+1) = (P(x))^2 + 1$$

Puisque $P(0) = 0$, on déduit que $P(1) = 1$ puis $P(5) = 5$,... L'idée est donc de considérer la suite (a_n) définie par $a_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$. Une récurrence immédiate montre que la suite (a_n) est strictement croissante et que pour tout entier $n \geq 0$, $P(a_n) = a_n$. Cela entraîne que le polynôme Q, défini par $Q(x) = P(x) - x$ admet une infinité de racines distinctes, et est donc le polynôme nul. Donc $P(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La réciproque est immédiate.

Déterminer les fonctions $f : [0, +\infty[$ telles que $f(0) = 0$ et pour tout $x > 0$,

$$f(x) = 1 + 5f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) - 6f\left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor\right)$$

Si $0 < x < 2$, alors $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor = 0$ et par la suite $f(x) = 1 + 5f(0) - 6f(0) = 1$. Si $2 \leq x < 4$, alors $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1$ et $\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor = 0$. D'où $f(x) = 1 + 5f(1) - 6f(0) = 6$. Il s'en suit par une simple récurrence sur n, que pour $x \in [2^n, 2^{n+1}[, n \geq 0$ où $(a_n)_n$ est la suite définie par

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 6, \quad a_n = 1 + 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

pour $n \geq 2$. Pour résoudre cette relation de récurence, doit modifier la suite $(a_n)_n$ afin de tomber sur une relation de récurence habituelle, pour s'en sortir, on pose $b_n = a_n + \lambda$ et on cherche λ de façon à ce qu'on a $b_n = 5b_{n-1} - 6b_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$. i.e. $a_n + \lambda = 5a_{n-1} + 5\lambda - 6a_{n-2} - 6\lambda$, i.e. $\lambda = -1/2$. Donc en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - \frac{1}{2}$, on retrouve

$$b_0 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{11}{2}, \quad b_n - 5b_{n-1} + 6b_{n-2} = 0$$

pour $n \geq 2$. L'equation caractéristique admet deux racines $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$, donc $b_n = \alpha 3^n + \beta 2^n$. Aprés détermination de α et β par les conditions initiales $b_0 = 1/2$ et $b_1 = 11/2$, on trouve $b_n = \dfrac{3^{n+1} - 2^{n+3}}{2}$ et par la suite $a_n = b_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1 + 3^{n+2} - 2^{n+3}}{2}$. En conclusion et après vérification l'unique solution du problème est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \\ 1 \quad \text{si} \quad x \in]0, 2[\\ \dfrac{1 + 3^{n+2} - 2^{n+3}}{2} \quad \text{si} \quad x \in [2^n, 2^{n+1}[, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

3 Exercices

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + f(x+y) + f(x+2y) = 6(x+y)$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$$

   Trouver le nombre des solutions non nulles de l'équation $f(x) = f(-x)$.

3. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $f(1) = 1$ et pour tous $a, b \in \mathbb{N}$,

$$f(a+b) = f(a) + f(b) - 2f(ab)$$

   Calculer $f(1431)$.

4. Trouver toutes les fonctions réelles f telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$

5. Trouver toutes les fonctions réelles f vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$yf(2x) - xf(2y) = 8xy(x^2 - y^2)$$
6. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$xf(x) + 2xf(-x) = -1$$
7. Trouver toutes les fonctions réelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x + y) = f(x) + y$$
8. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(xy) + f(y) = f(xf(y)) + y$$
9. Déterminer toutes les fonctions réelles tel que pour tous $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x + f(1)) = x + 1$$
10. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}^{*+}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{*+}$,
$$f(xf(y^2)) = xyf(x)^2 f(f(y))$$
11. Montrer qu'il n'existe pas une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f(x) = f(-x) + 1$$
12. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x)f(y) = f(x - y)$$
13. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$(x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2)$$
pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
14. (Slovénie 1999) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$
15. (Suisse 2010) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x - y)$$
16. (Japon 2012) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(f(x + y)f(x - y)) = x^2 - yf(y)$$
17. (Maroc 1987) Soient a et b deux réels distincts tels que $a + b \neq 0$. Trouver l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$af(x) + bf(1 - x) = x$$
18. (Maroc 1998) Déterminer toutes les fonctions réelles f telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x^2 + y) = f(x) + f(y^2)$$
19. (Maroc 2005) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{*+}$,
$$f(x)f(y) = f(xy) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$
20. (OIM 2008) Déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ telles que pour tous $x, y, z, t > 0$ avec $xy = zt$,
$$\frac{f(x)^2 + f(y)^2}{f(z^2) + f(t^2)} = \frac{x^2 + y^2}{z^2 + t^2}$$

21. (OIM 2010) Déterminer toutes réelles f telles que l'égalité
$$f(\lfloor x\rfloor y) = f(x)\lfloor f(y)\rfloor$$
est vraie pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
22. (Maroc 2018) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$,
$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{x-1}\right) = x$$
23. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + n = 3f(n)$$
24. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$2n + 2016 \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2017$$
25. (A4, 2007) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$,
$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$$
26. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$
$$f(x^3) - f(y^3) = (x - y)(f(x^2) + f(xy) + f(y^2))$$
27. On dit qu'un entier naturel n est **Intéressant** s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
$$f(x) - f(x + y) \leq y^n \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
Déterminer tous les entiers intéressants.
28. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x + y) \geq f(x).f(y) \geq 2018^{x+y}$$
29. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+}$
$$x(f(x) + f(y)) = f(x)f(x + y),$$
30. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$$
31. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2$$
32. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x + f(y + z)) + f(f(x + y) + z) = 2y.$$
33. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(f(x) - y) \leq xf(x) + f(y)$$
34. Montrer quil n'existe pas de fonctions $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+}$
$$f(x + f(y + z)) + f(f(x + y) + z) = 2z.$$
35. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que pour tous $x, y > 0$
$$f(f(x) + y) + f(x + y) = 2x + 2f(y),$$
36. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(f(x + y)) \geq f(f(y)) + yf(x)$$
37. (Bulgarie 2004) Déterminer tous les réels $k > 0$ pour lesquels, il existe une fonction à valeurs réels $f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ qui vérifie les conditions suivantes :
$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$;
$f(x, y) = f(y, x)$;
$f(x, 1) = x$;
$f(zx, zy) = z^k f(x, y)$, pour tous $x, y, z \in [0, 1]$

4 Solutions des exercices

1. On substitue $y=0$ pour obtenir $f(x)=2x$. On vérifie facilement la réciproque.
2. On remplace x par $1/x$ pour obtenir $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3}{x}$. On élimine $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour obtenir $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x}$. Réciproquement cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle. Maintenant $f(x)=f(-x)$ équivaut à $x=\pm\sqrt{2}$. Donc le nombre de solutions de l'équation $f(x)=f(-x)$ est 2.
3. En substituant $b=1$, on trouve $f(a+1)=f(a)+f(1)-2f(a)=1-f(a)$. Donc $f(2)=1-f(1)=0$ et $f(3)=1-f(2)=1$ et $f(4)=1-f(3)=0$... par la suite $f(1431)=1$.
4. On remplace x par $1-x$ dans l'équation de base pour obtenir $f(1-x)+(1-x)f(x)=1+(1-x)$. En éliminant $f(1-x)$ du système des équations, il vient $f(x)=1$, la réciproque est immédiate.
5. En substituant $y=0$, il vient $f(0)=0$. On divise les deux membres de l'équation fonctionnelle par xy pour obtenir $\dfrac{f(2x)}{2x}-\dfrac{f(2y)}{2y}=4x^2-4y^2$. D'ou $\dfrac{f(2x)}{2x}-4x^2=c$. Donc pour tout $x\neq 0$ on a $f(x)=x^3+cw$, cette égalité reste vraie pour $x=0$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+cx$. On laisse le lecteur vérifier la réciproque.
6. On procède comme dans ce qui précède pour résoudre ce genre d'équations fonctionnelles. Aprés un remplacement de x par $-x$ et une élimination du terme $f(-x)$, on tombe sur $f(x)=1/x$. Il est facile de vérifier que cette fonction est bien une solution.
7. C'est immédiat en donnant à x la valeur 0. On obtient $f(y)=y+c$ pour tout $y\in\mathbb{R}$ où c est une constante. La réciproque est immédiate.
8. En substituant $x=y=0$, on trouve $f(0)=0$. En substituant $x=0$ et en gardant y libre, on trouve $f(y)=y+f(0)=y$. La réciproque est facile à vérifier.
9. En remplaçant x par $x-f(1)$, on trouve que les fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle proposée sont $x\mapsto x+c$ où c est une constante réelle. On laisse au lecteur le soin de vérifier.
10. On pose $x=y=1$, on trouve $f(1)=1$. Puis, pour $y=1$ on obtient $f(x)=xf(x)^2$. Donc $f(x)=x$ pour tout $x>0$.
11. On remplace x par $-x$, on trouve $f(-x)=f(x)+1$ .Or $f(x)=f(-x)+1$,on somme les deux égalités et on obtient 0=2. Absurde !
12. on pose $x=y=0$ alors $f(0)^2=f(0)$ .Donc $f(0)=1$ ou $f(0)=0$. Pour $x=y$: $f(x)^2=f(0)$ si $f(0)=0$, alors f est la fonction nulle et si $f(0)=1$, on trouve $f(x)^2=1$. Reste à montrer qu'il n'existe pas deux réels x,y telle que $f(x)=1$ et $f(y)=-1$ pour conclure .
13. pour x non nul, on pose $g(x)=\frac{f(x)}{x}$. En divisant l'égalité par x^2-y^2 pour x,y différent. On trouve : $g(x+y)-g(x-y)=4xy$ Pour $(x,y)\to(\frac{x}{2},\frac{x}{2})$, on trouve $g(x)=x^2+g(0)$, puis conclure.
14. prendre $(x,y)\to(x+f(0),0)$ puis conclure !
15. On prend $x=y=0$ alors $f(2f(0))=f(0)$, pour $x=y=2f(0)$, on trouve $f(2f(2f(0)))=5f(0)=f(2f(0))=f(0)$ alors $f(0)=0$ Pour $y=0$, on trouve : $f(f(x))=f(x)$ Par injection (voir Chapitre) : $f(x)=x$ est la seule solution !
16. Pour $x=y$: $f(f(x)f(0))=x^2-xf(x)$ pour $x=y=0$; $f(f(0)^2)=0$ et pour : $x=f(0)^2$ et $y=0$, on trouve : $f(0)^4=f(f(f(0)^2)^2)=f(f(0)^2)=0$ donc $f(0)=00$. Puis conclure .
17. Remplacer x par $1-x$ puis résoudre le système pour aboutir à l'expression de $f(x)$.
18. Montrer que $f(x^2+y)=f(y^2+x)=f(x)+f(y)$ puis conclure que f est constante .
19. on pose $x=y=1$ et on obtient $f(1)=1$ .Puis pour $y=1$, on trouve $f(x)=\frac{2}{x}$
20. pour $x=y=z=t=1$, on trouve $f(1)=1$ et pour $z=t=\sqrt{x}$ et $y=1$, on obtient $\frac{f(x)^2+1}{f(x)}=\frac{x^2+1}{x}$. puis conclure !
21. On pose $x=y=0$, alors : $f(0)=0$ ou $\lfloor f(0)\rfloor=1$
    • Si $\lfloor f(0)\rfloor=1$, on pose : $y=0$, on trouve : $f(x)=f(0)$, alors f est constante. En remplaçant dans l'équation d'origine :$f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ or $f(x)=c,\ \forall x\in\mathbb{R}$, avec $c\in\{1,2\}$.
    • Si $f(0)=0$, pour $x=y=1$ on trouve $f(1)=0$ or $\lfloor f(1)\rfloor=1$.
    Pour $f(1)=0$, on pose $x=1$ pour $f(y)=0\ \forall y$, est une solution.
    Pour $\lfloor f(1)\rfloor=1$, la substitution : $y=1$ implique $f(\lfloor x\rfloor)=f(x),\ (*)$.
    on pose : $x=2, y=\frac{1}{2}$ dans l'équation de base : $f(1)=f(2)\lfloor f(\frac{1}{2})\rfloor$. Or, daprès : $(*)$ on a : $f(\frac{1}{2})=f(0)=0$, donc $f(1)=0$ contradiction avec : $\lfloor f(1)\rfloor=1$.
    Doù $f(x)=0,\ \forall x$ or $f(x)=c,\ \forall x,\ c\in[1,2]$.

22. Les fonctions $\dfrac{x-3}{x+1}$ et $\dfrac{x+3}{1-x}$ sont bijectives.
Soit $y = \dfrac{x-3}{x+1} \Rightarrow \dfrac{x+3}{1-x} = \dfrac{y+3}{1-y}$, alors $f(y) + f\left(\dfrac{y-3}{y+1}\right) = \frac{y+3}{1-y}$,
De la même façon, pour $y = \frac{x+3}{1-x}$, donc : $f((y) + f(\left(\frac{y+3}{1-y}\right) = \frac{y-3}{y+1}$,$\forall y \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$. On déduit que $2f(y) + y = \dfrac{y+3}{1-y} + \dfrac{y-3}{y+1}$. D'oû $f(y) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y+3}{1-y} + \dfrac{y-3}{y+1} - y\right)$,$\forall y \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

23. Comme dans les exemples précédents, on considère la suite (a_k) définie par $a_0 = n$ et $a_k = f^k(n)$.On obtient la relation récurrente suivante :

$$a_k + a_{k-1} + a_{k-3} = 3a_{k-2}$$

Considérons l'ensemble $S = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$, puisque S est une partie de $\mathbb{N}$,alors elle admet un minimum a_j.
On a

$$a_k + a_{k-1} + a_{k-3} = 3a_{k-2} \geq 3a_j$$

avec égalité si et seulement si $a_k = a_{k-1} = a_{k-3}$
Or, pour $k = j+3$, on obtient l'égalité. Donc $a_j = a_{j+1} = a_{j+2} = a_{j+3}$.
Par une double récurrence, on obtient : $a_k = a_j, \forall k \geq j$ et $a_k = a_j \forall k < j$.
Il s'en suit que : $a_n = a_0 = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dans les chapitres suivants, notamment le chapitre de l'injectivité, on verra une autre méthode pour résoudre ce problème.

24. On définit la suite des entiers positifs $(a_n)_{n\geq 0}$ comme suit : $a_0 \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$,$\forall \in \mathbb{N}$.
Soit $c_n = a_n - a_{n-1} - 672$ pour tout $n \geq 1$. alors,

$$c_{n+1} + 2c_n = a_{n+1} + a_n - 2a_{n-1} - 2016$$

d'ou pour tout $n \geq 1$, $c_{n+1} + 2c_n$ est un entier telle que

$$0 \leq c_{n+1} + 2c_n \leq 1.$$

Supposons que $c_1 > 0$; alors $c_1 \geq 1$ et $c_2 \leq -2c_1 + 1 \leq -1$. De plus, $c_3 \geq -2c_2 \geq 2$. on montre que : $c_{2k+1} \geq 2^k$ on utilise la récurrence pour montrer cela . Si $c_{2k+1} \geq 2^k$ est vraie, alors $c_{2k+2} \leq -2c_{k+1} + 1 \leq -2^{k+1} + 1$ et $c_{2k+3} \geq -2c_{k+2} \geq 2^{k+2} - 2 \geq 2^{k+1}$, doù le résultat. Observons que :

$$a_{2k+2} - a_{2k} - 1334 = c_{2k+2} + c_{2k+1} \leq -2^k + 1,$$

donc, pour $k \geq 11$, on a

$$a_{2k+2} < a_{2k}.$$

Contradiction, puisque tous les a_k sont des entiers naturels non nuls.
Si $c_1 < 0$, alors $c_2 \geq -2c_1 > 0$ on répète cet argument jusquau ce qu'on obtient

$$a_{2k+3} < a_{2k+1},$$

pour tout $k \geq 11$, contradiction.
On conclut que $c_1 = 0$, or, $a_1 = a_0 + 672$. On déduit que

$$f(n) = n + 672,$$

25. pour tout $z > 0$ $f(x + f(y)) + z = f(x+y) + f(y) + z$ donc :$f(f(x + f(y)) + z) = f(f(x+y) + f(y) + z)$
Or , daprès l'équation de base :

$$f(x + f(y) + z) + f(x + f(y)) = f(x + y + f(y) + z) + f(x + y)$$

De plus ,

$$f(x + y + z) + f(y) + f(x + y) + f(y) = f(x + 2y + z) + f(y) + f(x + y)$$

On déduit que :

$$f(x + y + z) + f(y) = f(x + 2y + z)$$

Le reste est laissé comme exercice au lecteur, on pourra continuer avec l'équation de Cauchy pour compléter la résolution de l'exercice !

26. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(1)=1$. Remarquons que :

$$f(x^3)-f(z^3)=(f(x^3)-f(y^3))+(f(y^3)-f(z^3))$$

Alors, on obtient :

$$(x^2-1)(f(x^2)+f(x)+1)=(x^2-x)(f(x^4)+f(x^3)+f(x^2)+(x-1)(f(x^2)+f(x)+1)$$

Après simplifications simplification,

$$f(x^4)=x(x-1)f(x^2)+(x^2-x+1)f(x)+x(x-1)$$

Pour simplifier, soient g,h deux polynômes telle que : $f(x^3)=g(x;f(x),f(x^2))$ et $f(x^4)=h(x;f(x);f(x^2))$ En calculant $f(x^{12})$ de deux façons différentes ,on obtient la relation suivante :

$$f(x^2)+f(x)=x^2+x$$

pour tout $x>0$. Finalement :

$$f(x^3)=(x-1)(f(x^2)+f(x)+1)+1=(x-1)(x^2+x+1)+1=x^3$$

27. Soit n un entier naturel intéressant :
Pour n pair , la fonction nulle satisfait les conditions de l'exercice .
Pour n impair : $f(x+y)-f(x)=f(x+y)-f(x+y+(-y))\leq(-y)^n=-y^n$,donc :
$f(x)-f(x+y)\geq y^n \implies f(x)-f(x+y)=y^n$.
Or , $f(0)-f(x)=f(x)-f(2x)=x^n \implies f(0)-f(2x)=2x^n$ et $f(0)-f(2x)=(2x)^n=2^nx^n$
Finalement, on conclut que $n=1$ est intéressant .
28. La substitution $x=y=0$ nous permet de trouver $f(0)=1$.
Pour $y=-x$, on obtient $f(x).f(-x)=1$ et pour $y=0$, on trouve $f(x)\geq 2018^x$ et $f(-x)\geq 2018^{-x}$.
Alors $f(x).f(-x)\geq 1$. On a égalité si et seulement si $f(x)=2018^x$. Réciproquement, on peut facilement vérifier que c'est une solution .
29. Pour $x=y$, on obtient : $f(x)(f(2x)-2x)=0$. Reste à montrer que si $f(a)=0$ et $f(b)=b$ pour deux réels a,b, alors $a=b=0$. Puis conclure !
30. Soit $P(x,y)$ l'équation fonctionnelle proposée, le lecteur attentif remarquera que la détermination de $f(0)$ est une étape cruciale pour la résolution du probléme .Posons $c=f(0)$. Les substitutions $P(0,c)$ et $P(c,0)$ donnent $f(0)=0$. Or, $P(x,0)$ implique $f(f(x))=f(x)$. En retranchant $P(f(x),x)$ de $P(x,f(x))$,on trouve : $f(x)(f(x)-x)=0$. Le problème est presque résolu. Il nous reste de montrer que si : $f(a)=0$ et $f(b)=b$ pour a,b dans $\mathbb{R}$, alors $a=b=0$. (Cette partie est laissé au lecteur).
31. Pour $y=0$, on obtient $f(x^2)=f(f(x))$. Pour $y=f(x)-x^2$, on trouve $f(x^2)=f(f(x))+2(f(x)-x^2)^2$. En faisant la différence des deux égalités, on obtient $f(x)=x^2$. Il est facile de vérifier que c'est une solution !
32. Soit $P(x,y,z)$ l'assertion $f(x+f(y+z))+f(f(x+y)+z)=2y$ et posons $f(0)=c$
$P(x-c\frac{c-x}{2},\frac{x-c}{2})$ implique $f(x)+f(f(\frac{x-c}{2})+\frac{x-c}{2})=c-x$
$P(\frac{x-c}{2},0,\frac{x-c}{2})$ implique $f(\frac{x-c}{2}+f(\frac{x-c}{2}))=0$
Alors , $f(x)=c-x$
33. $y=0$, $f(f(x))\leq xf(x)+f(0)$
$y=f(x)$: $f(0)\leq xf(x)+f(f(x))$ donc $xf(x)\geq 0$
$x=0$: $f(f(0)-y)\leq f(y)$
$x=0y=f(0)-t$: $f(t)\leq f(f(0)-t)$, donc : $f(x)=f(f(0)-x)$
$0\leq(f(0)-x)f(f(0)-x)+xf(x)=f(0)f(x)$ donc $f(0)f(x)\geq 0$
Or, daprès $xf(x)\geq 0$, on déduit que $f(x)$ change de signe,il s'en suit que $f(0)=0$ et $f(x)=f(-x)$
$0\leq xf(x)-xf(-x)=0\rightarrow xf(x)=0$
Alors : $f(x)=0$
34. Il suffit de prendre $(x,t,z)\rightarrow(z,y,x)$ .Puis , on trouve $z=x$ pour tous $z,x>0$. Contradiction !
35. Soit $P(x,y)$ l'assertion $f(f(x)+y)+f(x+y)=2x+2f(y)$. Posons $a=f(1)$.
(a) : $P(x,f(1)) \implies f(f(x)+a)+f(x+a)=2x+2f(a)$
(b) : $P(1,x) \implies f(x+a)+f(x+1)=2+2f(x)$
(c) : $P(1,f(x)) \implies f(f(x)+a)+f(1+f(x))=2+2f(f(x))$

(d) : $P(x,1) \implies f(f(x)+1)+f(x+1)=2x+2a$
$a-b-c+d \implies$: $f(f(x))=2x-f(x)+c$ avec $c=f(a)-2+a$
Une simple récurrence permet de montrer que : $f^n(x)=\frac{1}{3}(f(x)+2x+nc-\frac{c}{3})+\frac{1}{3}(-2^n)(-f(x)+x+\frac{c}{3})$ $\forall n \geq 2$
Pour : $n \to +\infty$ et puisque $f^n(x)>0$, on obtient : $f(x)=x+\frac{c}{3}$ $\forall x$
En substituant dans l'équation de base , on trouve : $f(x)=x, \forall x>0$

36. Soit $P(x,y)$ l'assertion $f(f(x+y)) \geq f(f(y))+yf(x)$
$P(0,y) \Rightarrow f(0)=0$
$P(-y,y) \Rightarrow -yf(-y) \geq f(f(y))$ (1)
$P(x,0) \Rightarrow f(f(x)) \geq 0$ (2)
D'après : (1), (2), on obtient : $xf(x) \geq 0 \to f(-k^2) \leq 0 \leq f(k^2)$ $\forall k \in \mathbb{R}$
$P(-a^2,-b^2) \Rightarrow f(-b^2)=0$
$P(-(a+b)^2,b^2) \Rightarrow f(f(b^2))=0$
$P(a^2,b^2) \Rightarrow f(b^2)=0$
Finalement , $f(x)=0$ pour tout x réel.

37. $P(x,x) \implies f(x,x)=f(x\cdot 1, x\cdot 1)=x^k f(1,1)$.
Or, $f(1,1)=1$ (équation 2) $\implies f(x,x)=x^k$ $(*)$.
$P(f(x,x),f(x,x)) \implies f(f(x,x),f(x,x))=x^{k^2}$ (selon $*$).
Or : $f(f(x,x),f(x,x))=f(f(f(x,x),x),x)=f(f(x^k,x),x)=f(x^k\cdot f(x^{k-1},1),x)=f(x^k\cdot x^{k-1},x)=f(x^{2k-1},x)=x^k f(x^{2k-2},1)=x^{3k-2}$.
Alors : $k^2=3k-2 \implies k=1,2$.
Pour $k=2$, on prend : $f(x,y)=xy$ et pour $k=1$, on prend : $f(x,y)=min\{x,y\}$. Doù $k=1,2$.