المباراة العامة للعلوم والتقنيات 2016

موضوع الرياضيات

يوليوز 2016	موضوع الرياضيات	مدة الإنجاز: 4 س.

يشتمل موضوع مادة الرياضيات لهذه المباراة على تمرين ومسألة مستقلان فيما بينهما ؛ ويمكن لأي مترشح، من أجل الإجابة على سؤال ما من التمرين أو المسألة، أن يقبل نتائج الأسئلة السابقة، من التمرين أو المسألة، ولو لم يُجِب عنها، وأن يستعمل هذه النتائج شريطة الإشارة بدقّة إلى أرقام الأسئلة المعنية.

وتجدر الإشارة إلى أنّ مدى حرص المترشح على اعتماد الوضوح والضبط في تقديم الأجوبة وفي تحريرها، ومدى التزامه بالدّقة في الاستدلال والبرهان تعتبر من العناصر المهمّة التي سيتمّ أخذها بعين الاعتبار أثناء القيام بعملية التصحيح. وفي هذا الاطار، **يجب ضبط أرقام الأسئلة التي تتم الإجابة عنها بكل دقّة** .

لا يسمح باستعمال حاسوب أو آلة حاسبة أو لوحة إلكترونية.

إذا بدا لأحد المترشحين أثناء الاختبار على أنّ هناك خطأً ما في موضوع المباراة فَلْيُشِر إلى ذلك على ورقة تحريره وليواصل اختباره مبرزا أسباب المبادرات التي قد يُقدم على اتخاذها.

التمريـــن

حســاب تكــامل بـواصـون[1]

الهدف من هذا التمرين هو حساب تكامل بواصون التالي :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1)\, \mathrm{d}\theta\,,\ \ r \in]-1,1[.$$

الجــزء الأول
حســاب تكــامل أولي

لكل عنصر r من المجال $]-1,1[$ نعتبر الدالة العددية P_r المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\qquad P_r(\theta) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right).$$

$A.1$. بيّن أنّ لكل عدد حقيقي θ لدينا $P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos\theta + 1}$.

[1] POISSON, math. et phy. fran. (1623-1662)

A.2. بيّن أنّ لكل زوج (a,b) من أعداد حقيقية تحقق $-\pi < a < b < \pi$ ، لدينا

$$\int_a^b P_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_{\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} \frac{1-r^2}{(1-r)^2+t^2(1+r)^2}\,\mathrm{d}t.$$

A.3. استنتج أنّ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$.

الجــزء الثــاني
حــســاب تكــامل بــواصــون

لكل عنصر θ من المجال $\mathbb{R}$ نعتبر الدالة العددية f_θ المعرفة على المجال $]-1,1[$ بـ

$$\forall r \in]-1,1[, \quad f_\theta(r) = \ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1).$$

B.1. بيّن أنّ الدالة f_θ قابلة للإشتقاق مرتين على المجال $]-1,1[$ وأنّ

$$\forall r \in]-1,1[, \quad |f''_\theta(r)| \leq \frac{12}{(1-|r|)^4}.$$

B.2. ليكن R عنصرا من المجال $]0,1[$. استنتج مما سبق أنّ لكل عنصر r من المجال $]-R,R[$ وكل عدد حقيقي $h \neq 0$ بحيث $r+h \in]-R,R[$ ، لدينا $\left|f_\theta(r+h) - f_\theta(r) - hf'_\theta(r)\right| \leq \dfrac{h^2}{2} \times \dfrac{12}{(1-R)^4}$.

إشارة : يمكن استعمال مكاملة بالأجزاء.

B.3. لتكن ψ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,1[$ بـ

$$\forall r \in]-1,1[, \quad \psi(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta.$$

B.3.1. بيّن أنّ الدالة ψ قابلة للإشتقاق على المجال $]-1,1[$ وأنّ

$$\forall r \in]-1,1[, \quad \psi'(r) = 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r-\cos\theta}{r^2-2r\cos\theta+1}\,\mathrm{d}\theta.$$

B.3.2. أحسب التكامل $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{r^2-2r\cos\theta+1}\,\mathrm{d}\theta$ ، و استنتج أنّ الدالة ψ ثابتة.

B.4. أوجد قيمة تكامل بواصون.

نهــاية التمريــن

المســألــة

دراسة المتتاليات الترجعية الخطية

تــعــاريف ورموز

1ـ لكل r و k من $\mathbb{N}$ حيث $k \leqslant r$ ، نرمز بـ $\binom{r}{k}$ للمعامل الحدّاني المعرّف بـ $\displaystyle\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!}$.

بالتوافق نضع $\binom{r}{k} = 0$ إذا كان $r < k$.

2ـ نرمز بـ $\mathscr{F}$ لمجموعة الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$، و بـ Δ للدالة المعرفة على المجموعة $\mathscr{F}$ بـ

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{F} \\ & f & \longmapsto & \Delta(f) \end{array}$$

حيث ترتبط كل دالة f من $\mathscr{F}$ بالدالة العددية $\Delta(f)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

3ـ نرمز بـ $\mathscr{P}$ لمجموعة الدوال الحدودية المعرفة على $\mathbb{R}$ والتي معاملاتها أعداد حقيقية؛ ولكل عدد صحيح طبيعي n ، نرمز بـ $\mathscr{P}_n$ لمجموعة الدوال الحدودية المنتمية إلى $\mathscr{P}$ والتي لا تتعدى درجتها n .

4ـ لكل دالة حدودية P من $\mathscr{P}$ ، درجتها $r \geq 1$ ومعرفة بـ

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ P(x) = x^r - \sum_{q=0}^{r-1} a_q x^q = x^r - a_{r-1}x^{r-1} - \cdots - a_1 x - a_0$$

نعتبر المجموعة $\mathscr{S}_P$ المكونة من المتتاليات العددية $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ التي تحقق العلاقة الترجعية الخطية $(\mathscr{E}_P)$ التالية :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+r} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{r-1} u_{n+r-1} = \sum_{q=0}^{r-1} a_q u_{n+q}\,. \qquad (\mathscr{E}_P)$$

الهدف من هذه المسألة هو دراسة المجموعة $\mathscr{S}_P$ وتحديد تعبير عام لعناصرها بدلالة جذور الدالة الحدودية P .

الجـــزء الأول
دراســة بعض خــاصيــات الدالــة Δ

لتكن f دالة من $\mathscr{F}$ ؛ نذكر أنّ الدالة العددية $\Delta(f)$ معرفة بـ

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

نُعرّف كذلك الدالة العددية $\Delta^2(f)$ بـ $\Delta^2(f) = \Delta(\Delta(f))$ ، وبالترجع نُعرّف الدالة العددية $\Delta^n(f)$ بـ

$$\Delta^n(f) = \Delta(\Delta^{n-1}(f))$$

لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$.

1.1. لتكن f دالة من $\mathscr{F}$ و ليكن x عددا حقيقيا . أحسب $\Delta^2(f)(x)$ بدلالة الأعداد الحقيقية $f(x)$ و $f(x+1)$ و $f(x+2)$.

2.1. لتكن f دالة من $\mathscr{F}$ وليكن x عددا حقيقيا . بيّن أنّ لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ لدينا

$$\Delta^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k). \qquad (1)$$

إشارة : يمكن استعمال صيغة باسكال[2] التالية :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k},\ \ 1 \leq k \leq n-1.$$

3.1. لتكن P دالة حدودية من $\mathscr{P}$ درجتها $n \geq 1$ ؛ نضع

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

1.3.1. بيّن أنّ $\Delta(P)$ دالة حدودية من $\mathscr{P}$ درجتها $(n-1)$ محدّدا معاملها المُهَيمِن .

[2] PASCAL, math. et phy. fran. (1623-1662)

2.3.1. حدّد درجة الدالة الحدودية $\Delta^n(P)$ ثم بيّن أنّ $\Delta^{n+1}(P)=0$.

4.1. لتكن P دالة حدودية من $\mathscr{P}_{r-1}$ حيث $r \geq 2$ ؛ بيّن أنّ $\Delta^r(P)=0$ واستنتج أنّ لكل عدد حقيقي x لدينا :

$$P(x+r)=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^{r-1-k}\binom{r}{k}P(x+k). \qquad (2)$$

5.1. ليكن $m \geq 1$ عددا صحيحا طبيعيا ؛ نستنتج من خلال السؤال 1.3.1 أعلاه أنّ $\Delta(\mathscr{P}_m) \subset \mathscr{P}_{m-1}$.

نهدف فيما يلي إلى إثبات التظمين العكسي $\mathscr{P}_{m-1} \subset \Delta(\mathscr{P}_m)$ فنعتبر من أجل ذلك دالة حدودية B من $\mathscr{P}_{m-1}$ ، معرفة بـ

$$\forall x \in \mathbb{R},\ B(x)=\sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k.$$

1.5.1. لتكن A دالة حدودية من $\mathscr{P}_m$ ؛ نضع $A(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ لكل عدد حقيقي x . أثبت التكافئة :

$$\Delta(A)=B \iff (3)\begin{cases} b_r=\displaystyle\sum_{k=r+1}^{m} a_k\binom{k}{r} \\ 0 \leq r \leq m-1. \end{cases}$$

2.5.1. نفترض في هذا السؤال أنّ $m=3$. بين أنّ النظمة (3) أعلاه، ذات المجهول (a_1,a_2,a_3) ، تقبل حلا وحيدا.

3.5.1. بيّن أنّ $B \in \Delta(\mathscr{P}_m)$.

إشارة : يمكنك الإستدلال بالترجع لتبين أنّ النظمة (3) أعلاه، ذات المجهول $(a_1,\ldots,a_m)$ ، تقبل حلا، وذلك بالبدء بتحديد قيمة العدد a_m .

6.1. ليكن $m \geq 1$ عددا صحيحا طبيعيا و α عددا حقيقيا يخالف 1 $(\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\})$.

بيّن أنّ

$$\forall Q \in \mathscr{P}_m,\ \exists S \in \mathscr{P}_m,\ \forall x \in \mathbb{R},\ Q(x)=\alpha S(x+1)-S(x).$$

إشارة : يمكنك الإستعانة بالطريقة المعتمدة في السؤال 5.1 أعلاه.

الجــزء الثــاني

دراســة المجـموعة $\mathscr{S}_P$ في حــالة

$$P(x)=(x-1)^r,\ r \geq 2$$

ليكن r عددا صحيحا طبيعيا بحيث $r \geq 2$ ؛ نرمز بـ P_r للدالة الحدودية المعرفة بـ

$$P_r(x)=(x-1)^r,\quad x \in \mathbb{R}.$$

1.2. لتكن $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية. بيّن أنّ $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ تنتمي إلى المجموعة $\mathscr{S}_{P_r}$ إذا وفقط إذا كانت تحقق العلاقة الترجعية :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+r}=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^{r-1-k}\binom{r}{k}u_{n+k}. \qquad (\mathscr{E}_{P_r})$$

2.2. لتكن Q دالة حدودية من $\mathscr{P}_{r-1}$ ؛ بيّن أنّ المتتالية $(Q(k))_{k\in\mathbb{N}}$ تنتمي إلى المجموعة $\mathscr{S}_{P_r}$.

3.2. لتكن $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية تنتمي إلى المجموعة $\mathscr{S}_{P_r}$ ؛ نعتبر الدالة الحدودية Q_u المعرفة بـ

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q_u(x) = \sum_{k=0}^{r-1} u_k L_k(x)$$

بحيث يُرمز بـ L_k للدالة الحدودية المعرفة، لكل عدد k من المجموعة $\{0,\dots,r-1\}$ ، بـ

$$\forall x \in \mathbb{R},\ L_k(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{r-1} \frac{(x-j)}{(k-j)}.$$

1.3.2. ليكن k عددا من المجموعة $\{0,\dots,r-1\}$. بيّن أنّ L_k حدودية من $\mathscr{P}$ درجتها $(r-1)$ وتَحقّق أنّ

$$\forall i \in \{0,\dots,r-1\},\ L_k(i) = \begin{cases} 1\ , & i = k\ ; \\ 0\ , & i \neq k\ . \end{cases}$$

2.3.2. تحقق أنّ $Q_u(i) = u_i$ لكل عدد i من المجموعة $\{0,\dots,r-1\}$.

3.3.2. بيّن أنّ Q_u دالة حدودية من $\mathscr{P}_{r-1}$ تُحقِق $Q_u(k) = u_k$ لكل عدد صحيح طبيعي k .

4.2. بيّن أنّ $\mathscr{S}_{P_r} = \left\{ \left(Q(k)\right)_{k\in\mathbb{N}}\ ;\ Q \in \mathscr{P}_{r-1} \right\}$.

الجــزء الثــالث

دراسـة المجـموعة $\mathscr{S}_P$ في الحـالة لعـامة

الهدف من هذا الجزء هو تحديد تعبير عام لعناصر المجموعة $\mathscr{S}_P$ بدلالة جذور الدالة الحدودية P .

1.3. **الحالة الأولى :** $P(x) = x - \lambda$ حيث λ عدد حقيقي

بيّن في هذه الحالة أنّ المجموعة $\mathscr{S}_P$ تتكون من المتتاليات العددية الهندسية التي أساسها λ :

$$\mathscr{S}_P = \left\{ \left(a\lambda^k\right)_{k\in\mathbb{N}}\ ;\ a \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.3. **الحالة الثانية :** $P(x) = x^r$ حيث $r \geq 2$

بيّن في هذه الحالة أنّ المجموعة $\mathscr{S}_P$ تتكون من المتتاليات العددية $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ التي تحقق

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+r} = 0.$$

3.3. **الحالة الثالثة :** $P(x) = (x-\lambda)^r$ حيث λ عدد حقيقي غير منعدم، و $r \geq 2$

نعتبر الدالة الحدودية P_r المعرفة بـ

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_r(x) = (x-1)^r.$$

1.3.3. لتكن $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية. أثبت التكافئة :

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}_P \iff \left(\frac{u_k}{\lambda^k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}_{P_r}.$$

2.3.3. استنتج أنّ $\mathscr{S}_P = \left\{ \left(\lambda^k Q(k)\right)_{k\in\mathbb{N}}\ ;\ Q \in \mathscr{P}_{r-1} \right\}$.

4.3. **خـاصية هـامة**

ليكن λ عددا حقيقيا، و لتكن P و R دالتين حدوديتين من $\mathscr{P}$ بحيث

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-\lambda)R(x).$$

.1.4.3 نضع $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ و $R(x)=\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ لكل x من المجموعة $\mathbb{R}$ ، و نفترض أنّ $n \geq 2$. بيّن أن

$$\begin{cases} a_0 = -\lambda b_0 \ ; \\ a_n = b_{n-1} \ ; \\ a_k = b_{k-1} - \lambda b_k, \quad 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

.2.4.3 لتكن $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية. أثبت التكافئة :

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}_P \Longleftrightarrow (u_{k+1}-\lambda u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}_R.$$

.5.3 **الحالة الرابعة :** $P(x)=(x-\lambda)(x-\mu)^r$ **حيث** λ **و** μ **عددان حقيقيان يحققان** $\lambda \neq \mu$ **و** $\lambda \neq 0$ ، **و** $r \geq 2$

بيّن أنّ

$$\mathscr{S}_P = \left\{ \left(a\,\lambda^k + \mu^k R(k)\right)_{k\in\mathbb{N}} \ ; a \in \mathbb{R}, \ R \in \mathscr{P}_{r-1} \right\}.$$

إشارة : يمكن استعمال نتيجة السؤال 2.3.3. أعلاه ثم نتيجة السؤل 6.1. من الجزء الأول بحيث $\alpha = \frac{\mu}{\lambda}$.

.6.3 **الحالة الخامسة :** دون استعمال نتيجة السؤال 2.2.3. أعلاه، أوجد طريقة أخرى للإجابة على السؤال 4.3. أعلاه في حالة ما إذا كان العددان μ و λ متساويين، وبيّن أنّ $\mathscr{S}_P = \left\{ (\lambda^k Q(k))_{k\in\mathbb{N}} \ ; \ Q \in \mathscr{P}_r \right\}$.

إشارة : يمكن استعمال نتيجة السؤال 5.1. من الجزء الأول.

.7.3 **الحالة العامة :** $P(x)=\prod_{k=1}^{r}(x-\lambda_k)^{m_k}$ ، حيث $r \geq 2$ عدد صحيح طبيعي، و $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ أعداد حقيقية مختلفة مثنى مثنى، و $m_1, m_2, \ldots, m_r$ أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة.

بيّن أنّ عناصر المجموعة $\mathscr{S}_P$ هي المتتاليات العددية التي تكتب على شكل $\left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k^n R_k(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث، لكل عدد k من المجموعة $\{1,\ldots,r\}$ ، تكون R_k دالة حدودية من المجموعة $\mathscr{P}_{m_k-1}$.

الجــزء الرابــع

تطـبيـقـات

.1.4 نعتبر الدالة الحدودية P المعرفة بـ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ P(x) = x^5 - 12\,x^4 + 57\,x^3 - 134\,x^2 + 156\,x - 72.$$

.1.1.4 عَمِّل الحدودية P إذا علمت أنّ العدد 2 جذر متعدّد لـ P رتبته 3 .

.2.1.4 حَدِّد جميع المتتاليات العددية $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ التي تحقق العلاقة الترجعية الخطية التالية :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+5} = 12\,u_{n+4} - 57\,u_{n+3} + 134\,u_{n+2} - 156\,u_{n+1} + 72\,u_n.$$

.2.4 ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \neq 1$ و $b \neq 0$. حَدِّد جميع المتتاليات العددية $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ التي تحقق العلاقة الترجعية التالية :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} - (a+1)\,u_{n+1} + a\,u_n = b^n.$$

إشارة : يمكن دراسة الحالات $b=1$ ، $b=a$ ، $b \notin \{1,a\}$.

نهـاية المسـألة

نهـايـة المـوضـوع