المباراة العامة للعلوم والتقنيات 2013

موضوع الرياضيات

المملكة المغربية

أكاديمية الحسن الثاني للعلـــوم والتقنـــيات

وزارة التربية الوطنيـــة

المباراة العامة للعلوم والتقنيات 2013

يوليوز 2013	الرياضيات	مدة الإنجاز: 4 ساعات

يشتمل موضوع مادة الرّياضيات لهذه المباراة على تمرينين مستقلين فيما بينهما ويتعلقان بجذور الدوال الحدودية

لا يسمح باستعمال حاسوب أو آلة حاسبة أو لوحة إلكترونية

إذا بدا لأحد المترشحين أثناء الإختبار على أنّ هناك خطأ ما في موضوع المباراة فَلْيُشِر إلى ذلك على ورقة تحريره وليواصل اختباره مبرزا أسباب المبادرات التي قد يقوم باتخاذها.

تــعـــاريف ورموز

- يرمز بـ $\mathbb{C}$ لمجموعة الأعداد العقدية. لكل عدد عقدي z نرمز بـ $\mathrm{Re}(z)$ للجزء الحقيقي للعدد z ، وبـ $\mathrm{Im}(z)$ للجزء التخيّلي للعدد z ، وبـ $|z|$ لمعيار العدد z ، وبـ $\bar{z}$ لمرافق العدد z ؛ ونذكّر أنّ

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z),\ \ \bar{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z),\ \ |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$$

و أنّه لكل زوج (u,v) من $\mathbb{C}^2$ لدينا $\Big||u| - |v|\Big| \leqslant |u - v| \leqslant |u| + |v|$.

- نسمي دالة حدودية من الدرجة n ($n \in \mathbb{N}$) ذات المتغير العقدي z كل دالة $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$، معرّفة بـ:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ \ z \in \mathbb{C}$$

حيث a_0 ، a_1 ، $\ldots$ ، a_n أعداد عقدية و $a_n \neq 0$ ؛ وتسمّى هذه الأعداد بمعاملات الدالة الحدودية P .

- نسمي الدالة الحدوديّة المشتقّة للدالة P الدالة الحدودية التي نرمز لها بـ P' والمعرفة بـ:

$$P'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + 2a_2 z + a_1 = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1},\ \ z \in \mathbb{C}.$$

- لكل دالة حدودية P وكل دالة حدودية Q ، لدينا الخاصيات التالية:

$$(P+Q)' = P' + Q',\ \ (PQ)' = P'Q + PQ',\ \ (P^r)' = rP'P^{r-1},\ \ r \in \mathbb{N}^*.$$

- لكل α و β من $\mathbb{R}$ ، وكل دالة حدودية R معاملاتها أعداد عقدية نُعَرِّفُ التكامل $\int_\alpha^\beta R(t)\,dt$ بـ

$$\int_\alpha^\beta R(t)\,dt = R_1(\beta) - R_1(\alpha)$$

حيث R_1 دالة حدودية تحقّق $R_1' = R$.

- لكل عدد صحيح طبيعي n ، نرمز بـ $\mathcal{P}_n$ لمجموعة الدوال الحدودية التي معاملاتها أعداد عقدية وذات درجة أصغر أو تساوي n.

- لكل r و k من $\mathbb{N}$ حيث $k \leqslant r$ ، نرمز بـ $\binom{r}{k}$ إلى المعامل الحدّاني المعرّف بـ $\binom{r}{k} = \dfrac{r!}{k!(r-k)!}$.

نقبل المبرهنة الأساسية للجبر التالية

دالومبير[1]ـكوص[2]

كل دالة حدودية معاملاتها أعداد عقدية ودرجتها $n \geqslant 1$ تقبل جذرا في $\mathbb{C}$ ؛ ومنه نستنتج أنّ عدد جذور هذه الحدودية يساوي n، مع الإشارة إلي أنّ هذه الجذور يتم تعدادها حسب رُتَبِهَا .

التمــرين الأول

مبرهنة رول[3] بالنسبة لدالة حدودية ذات المتغيّر العقدي

ـ نعتبر فيما يلي أنّ المستوى العقدي $\mathbb{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. لكل عدد عقدي z نرمز بـ $M(z)$ للنقطة ذات اللحق z (لدينا $O = M(0)$).

ـ ليكن z_0 عددا عقديا و $R > 0$ ؛ نرمز بـ $\mathcal{C}(z_0, R)$ (أو فقط بـ $\mathcal{C}$) إلى الدائرة التي مركزها $M(z_0)$ و شعاعها R :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(z_0, R) = \{M(z) \in \mathbb{P} \; ; \; |z - z_0| = R\}.$$

ـ نسمّي المجموعة $\{M(z) \in \mathbb{P} \; ; \; |z - z_0| > R\}$ بخارج الدائرة $\mathcal{C}(z_0, R)$ (أو $\mathcal{C}$)، و نرمز لها بـ $\mathcal{C}^+$ ؛ ونسمّي المجموعة $\{M(z) \in \mathbb{P} \; ; \; |z - z_0| < R\}$ بداخل الدائرة $\mathcal{C}(z_0, R)$ (أو $\mathcal{C}$)، و نرمز لها بـ $\mathcal{C}^-$.

ـ ليكن a و b عددين عقديين مختلفين ؛ نرمز بـ $D_{a,b}$ للمستقيم المحدد بالنقطتين $M(a)$ و $M(b)$.

الجــزء الأول

أسئــــلة تمـــــــهيدية

نعتبر التحويل $f : \mathbb{P} \setminus \{O\} \to \mathbb{P} \setminus \{O\}$ المعرّف بـ $f(M(z)) = M(\frac{1}{z})$.

1.1. بيّن أنّ f تقابل و حدد تقابله العكسي.

2.1. ليكن a و b عددين عقديين مختلفين.

1.2.1. بيّن أنّ

$$M(z) \in D_{a,b} \iff z(\bar{a} - \bar{b}) - \bar{z}(a - b) = b\bar{a} - a\bar{b}.$$

2.2.1. استنتج أنّ لكل عدد عقدي غير منعدم u و لكل $z \neq 0$ ، لدينا

$$\frac{1}{u\bar{z}} - \frac{1}{z\bar{u}} = 0 \iff M(z) \in D_{u,0}.$$

3.2.1. ليكن u عددا عقديا غير منعدم ؛ أثبت أنّ $f(D_{u,0} \setminus \{O\}) = D_{\frac{1}{u},0} \setminus \{O\}$.

3.1. ليكن z_0 عددا عقديا غير منعدم و $R > 0$ ؛ نضع $z_0 = re^{i\theta}$ حيث $0 < r$ و $\theta \in \mathbb{R}$ ، و نضع $\mathcal{C} = \mathcal{C}(z_0, R)$

[1] d'Alembert, math. fr. (1717-1783)
[2] Gauss, math. allemand (1777-1855)
[3] Rolle, math. fr. (1652-1719)

1.3.1. بيّن أنّ

$$.M(z)\in\mathcal{C} \iff z\bar{z}-z_0\bar{z}-z\bar{z_0}+z_0\bar{z_0}=R^2$$

2.3.1. نفترض أنّ $O\in\mathcal{C}^+$ ؛ أثبت أنّ $R<r$ و أنّ

$$.M(z)\in\mathcal{C} \iff z\neq 0,\ \left|\frac{1}{z}-\frac{\bar{z_0}}{r^2-R^2}\right|=\frac{R}{r^2-R^2}$$

3.3.1. استنتج أنّ $f(\mathcal{C})=\mathcal{C}_1=\mathcal{C}(z_1,R_1)$ محدّدا z_1 و R_1 ، ثمّ تحقّق أنّ $O\in\mathcal{C}_1^+$.

4.3.1. بيّن أنّ $f(\mathcal{C}^-)=\mathcal{C}_1^-=f(\mathcal{C})^-$.

يمكن استعمال الخاصية المقبولة التالية: لتكن $\mathcal{C}$ دائرة بحث $O\in\mathcal{C}^+$ ، و ليكن $u\neq 0$. النقطة $M(u)\in\mathcal{C}^-$ إذا وفقط إذا كان المستقيم المار من أصل المعلم ومن النقطة $M(u)$ يقطع الدائرة $\mathcal{C}$ في نقطتين مختلفتين $M(a)$ و $M(b)$ بحيث يوجد عدد t من المجال $]0,1[$ يحقّق $u=ta+(1-t)b$.

الجــزء الثــاني

دراسة حول تموقع جذور دالة حدودية بالنسبة لجذور دالة حدودية أخرى

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحث $2\leqslant n$ ، و z_1 ، ... ، z_n اعددا عقدية(ليس ضروريا أن تكون هذه الأعداد مختلفة مثنى مثنى). نعتبر الدالة الحدودية P المعرّفة لكل عدد عقدي z بـ $P(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$.

1.2. بيّن أنّ لكل عدد عقدي ξ يخالف z_k، لكل k من $\{1,\ldots,n\}$ ، لدينا $\frac{P'(\xi)}{P(\xi)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\xi-z_k}$.

2.2. لكل عدد عقدي ξ يخالف z_k لكل k من $\{1,\ldots,n\}$ ويحقّق $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\xi-z_k}\neq 0$ ، نعتبر العدد العقدي Δ_ξ المعرّف بالعلاقة (1) $\frac{1}{\Delta_\xi-\xi}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k-\xi}$. بيّن أنّ $\Delta_\xi=\xi-n\frac{P(\xi)}{P'(\xi)}$.

3.2. **تعريف:** ليكن m من $\mathbb{N}$ ؛ لكل عدد عقدي z وكل دالة حدودية Q من $\mathcal{P}_m$ ، نُعَرِّفُ الدالة الحدودية A_zQ بما يلي:

$$.A_zQ(t)=(z-t)Q'(t)+mQ(t),\ \ t\in\mathbb{C}$$

1.3.2. ليكن m من $\mathbb{N}^*$. بيّن أنّه لكل عدد عقدي z وكل دالة حدودية Q من $\mathcal{P}_m$ ، فإنّ $A_zQ\in\mathcal{P}_{m-1}$

2.3.2. نحتفظ بالمعطيات أعلاه وخصوصا تلك الواردة في العلاقة (1) للسؤال 2.2 . ليكن z عددا عقديا يخالف z_k لكل k من $\{1,\ldots,n\}$ ؛ نرمز بـ E و F للمجموعتين المعرّفتين بـ

$$E=\{z_k\ ;\ 1\leqslant k\leqslant n,\ P'(z_k)=0\}\ ;\ F=\{\xi\in\mathbb{C}\setminus\{z_k\ ;\ 1\leqslant k\leqslant n\}\ ;\ P'(\xi)\neq 0\ ,\ \Delta_\xi=z\}$$

بيّن أنّ

$$.A_zP(\xi)=0 \iff \xi\in E\cup F$$

تنبيه : نُذَكِّرُ هنا أنّ الدالة الحدودية A_zP معرّفة بـ $A_zP(t)=(z-t)P'(t)+nP(t)$ ، لكل t من $\mathbb{C}$ ، لكون $P\in\mathcal{P}_n$.

4.2. بيّن أنّ لكل عدد عقدي z فإنّه توجد دالة حدودية $P_z \in \mathcal{P}_{n-2}$ بحيث

$$A_zP(t) = \Big(nz - \sum_{k=1}^{n} z_k\Big)t^{n-1} + P_z(t), \ \ t \in \mathbb{C}$$

واستنتج أنّ $A_zP \in \mathcal{P}_{n-2} \Longleftrightarrow z = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k$.

5.2. نفترض أنّه توجد دائرة $\mathcal{C}$ في المستوى العقدي بحيث $O = M(0) \in \mathcal{C}^+$ و $M(z_k) \in \mathcal{C}^-$ لكل k من $\{1, \ldots, n\}$.

1.5.2. بيّن أنّ نقطة المستوى العقدي ذات اللحق $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k$ تنتمي إلى المجموعة $\mathcal{C}^-$.

2.5.2. بيّن أنّ نقطة المستوى العقدي ذات اللحق $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}$ تنتمي إلى المجموعة $f(\mathcal{C})^-$.

3.5.2. استنتج أنّ نقطة المستوى العقدي ذات اللحق $\displaystyle\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}}$ تنتمي إلى المجموعة $\mathcal{C}^-$.

6.2. نفترض أنّه توجد دائرة $\mathcal{C}$ في المستوى العقدي بحيث $M(z_k) \in \mathcal{C}^-$ لكل k من $\{1, \ldots, n\}$. أثبت أنّه إذا كان ξ عددا عقديا بحيث $M(\xi) \in \mathcal{C}^+$ ويحقّق $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\xi - z_k} \neq 0$ ، فإنّ $M(\Delta_\xi) \in \mathcal{C}^-$.

إشارة : يمكن استعمال إزاحة.

7.2. نفترض أنّه توجد دائرة $\mathcal{C}$ في المستوى العقدي بحيث $M(z_k) \in \mathcal{C}^-$ لكل k من $\{1, \ldots, n\}$. ليكن z عددا عقديا يخالف z_k لكل k من $\{1, \ldots, n\}$ ويحقّق $M(z) \notin \mathcal{C}^-$.

1.7.2. بيّن أنّ درجة الدالة الحدودية A_zP هي $n-1$.

2.7.2. ليكن ξ جذرا للدالة الحدودية A_zP. بيّن أنّ $M(\xi) \in \mathcal{C}^-$.

8.2. لتكن Q دالة حدودية من الدرجة n . نرمز بـ z'_1 ، ... ، z'_n إلى جذور Q في $\mathbb{C}$ (الأعداد z'_1 ، ... ، z'_n ليست بالضرورة مختلفة مثنى مثنى). نفترض أنّه توجد دائرة $\mathcal{C}$ في المستوى العقدي بحيث $M(z_k) \in \mathcal{C}^-$ لكل k من $\{1, \ldots, n\}$ وأنّ $A_{z'_1} \circ A_{z'_2} \circ \cdots \circ A_{z'_n}P = 0$ ؛ بيّن أنّه يوجد k من $\{1, \ldots, n\}$ بحيث $z'_k \in \mathcal{C}^-$.

نشير هنا إلى أنّ $A_{z'_1} \circ A_{z'_2} \circ \cdots \circ A_{z'_n}$ هو مركب الدوال $A_{z'_1}$ ، $A_{z'_2}$ ، ... ، $A_{z'_n}$ حيث
$A_{z'_n} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1} \ ; \ A_{z'_{n-1}} : \mathcal{P}_{n-1} \to \mathcal{P}_{n-2} \ ; \ \ldots \ ; \ A_{z'_1} : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{C} = \mathcal{P}_0$.

الجـــزء الثـــالث

مبرهنة رول بالنسبة لدالة حدودية ذات متغيّر عقدي

الهدف من هذا الجزء هو تبيان مبرهنة رول التالية:

إذا كانت P دالة حدودية من الدرجة $n \leqslant 2$ و a ، b عددين عقديين بحث $a \neq b$ و $P(a) = P(b)$ ، فإنّه يوجد عدد عقدي c يحقق:

$$\begin{cases} P'(c) = 0\,; \\ \left|c - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{|a-b|}{2}\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}. \end{cases}$$

1.3. بين أنّ المبرهنة صحيحة بالنسبة لدالة حدودية من الدرجة 2 .

2.3. ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحث $2<n$ ، و a و b عددين عقديّين **مختلفين** .

1.2.3. بين أنّه توجد اعداد عقدية b_0 ، ... ، b_{n-1} بحيث

$$\int_0^1 Q(a+t(b-a))\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k\binom{n-1}{k}b_{n-1-k}$$

لكل دالة حدودية Q معرّفة بـ

$$Q(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\binom{n-1}{k}z^k,\ \ z\in\mathbb{C}$$

وحَدِّد تعبير العدد b_k ، بدلالة a و b و n و k ، لكل عدد k من $\{0,\dots,n-1\}$.

2.2.3. بين أنّ لكل عدد عقدي z لدينا

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}b_kz^k=\frac{(z-a)^n-(z-b)^n}{n(b-a)}.$$

3.3. ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحث $2<n$ ، و a و b عددين عقديّين **مختلفين** .

1.3.3. حَدِّد درجة ومعاملات الدالة الحدودية $P_{a,b}$ المعرّفة، لكل z من $\mathbb{C}$، بـ: $P_{a,b}(z)=(z-a)^n-(z-b)^n$.

2.3.3. حَدِّد جذور الحدودية $P_{a,b}$ بدلالة a و b والعدد العقدي $w_n=e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

3.3.3. بيّن أنّ كل جذر u للدالة الحدودية $P_{a,b}$ يحقّق $\left|u-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{|a-b|}{2}\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$.

4.3. لتكن P دالة حدودية من الدرجة $2<n$ و a ، b عددين عقديين بحيث $a\neq b$ و $P(a)=P(b)$.

1.4.3. بيّن وجود اعداد عقدية a_0 ، ... ، a_{n-1} بحيث $P'(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\binom{n-1}{k}z^k$ لكل z من $\mathbb{C}$.

2.4.3. لتكن t_1 ، ... ، t_{n-1} جذور الدالة الحدودية P' في $\mathbb{C}$ ؛ **نقبل أن**

$$(-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{n!(b-a)}A_{t_1}A_{t_2}\dots A_{t_{n-1}}P_{a,b}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}a_kb_{n-1-k}.$$

احسب التكامل $\int_0^1 P'(a+t(b-a))\,dt$ ثمّ استنتج أنّ $A_{t_1}A_{t_2}\dots A_{t_{n-1}}P_{a,b}=0$.

3.4.3. باستعمال نتائج الجزء الثاني من هذا التمرين قَدِّم برهانا لمبرهنة رول المعلنة سلفا.

نهـــاية التمـــرين الأول

التمــرين الثــاني

حول تموقع جذور دالة حدودية في المستوي العقدي

الجـــزء الأول

دراسة حالة لتموقع جذور دالة حدودية

نعتبر دالة حدودية P من الدّرجة $n \geqslant 2$ ، ذات المتغير العقدي z والمعرّفة بما يلي:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \ \ z \in \mathbb{C}$$

حيث a_0 ، a_1 ، ... ، a_n أعداد حقيقية.

نفترض أنّه يوجد عدد حقيقي $M > 0$ بحيث تحقّق الأعداد a_0 ، a_1 ، ... ، a_n ما يلي:

$$\begin{cases} a_n \geqslant 1 \ ; \\ a_{n-1} \geqslant 0 \ ; \\ |a_k| \leqslant M, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-2. \end{cases}$$

1.1. ليكن z عددا عقديّا. بين أنّ $|z| < \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2} \Longleftrightarrow |z|^2 - |z| - M < 0$.

2.1. ليكن z عددا عقديّا بحيث $|z| > 1$ و $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$. بين أنّ

$$\left|\frac{P(z)}{z^n}\right| \geqslant \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z}\right| - \left(\frac{|a_{n-2}|}{|z|^2} + \cdots + \frac{|a_0|}{|z|^n}\right) > 1 - \frac{M}{|z|^2 - |z|}.$$

3.1. استنتج مما سبق أنّ كلّ جذر $z \in \mathbb{C}$ للدالة الحدودية P يحقق $\mathrm{Re}(z) < 0$ أو $\left(\mathrm{Re}(z) \geqslant 0 \text{ و } |z| < \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}\right)$.

الجـــزء الثــاني

مبرهنة كوص-لوكاس[4] حول تموقع جذور الدالة الحدودية P' بالنسبة لجذور الدالّة P

لتكن P دالة حدودية من الدّرجة $n \geqslant 1$ ومعاملاتها أعداد عقدية؛ نرمز بـ z_1 ، ... ، z_r لجذور الحدودية P في $\mathbb{C}$ (مختلفة مثنى مثنى)، وبـ α_1 ، ... ، α_r لرتب هذه الجذور على التوالي (نُذكّر أنّ $n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ وهو العدد الإجمالي لجذور P). نستنتج من هذا أنّه يوجد عدد عقدي غير منعدم λ بحيث

$$P(z) = \lambda \prod_{k=1}^{r} (z - z_k)^{\alpha_k}, \ \ z \in \mathbb{C}.$$

1.2. بيّن أنّ لكلّ عدد عقدي $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_r\}$ ، لدينا

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{z - z_k}.$$

2.2. استنتج أنّ كلّ جذر w للدالة الحدودية P' في $\mathbb{C}$ يمكن كتابته على شكل $w = \sum_{k=1}^{r} t_k z_k$ بحيث t_1 ، ... ، t_r أعداد من المجال $[0,1]$ تُحَقّق $t_1 + \cdots + t_r = 1$.

[4] LUCAS, math. fr (1842-1891)

3.2. ليكن a عددا حقيقيا. بيّن أنّه إذا كانت كلّ جذور الدالة الحدودية P تنتمي إلى المجموعة $\Pi_a = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Re}(z) < a\}$(نصف المستوى العقدي)، فإنّ جذور الدالة الحدودية P' تنتمي كذلك إلى Π_a .

4.2. نفترض في هذا السؤال أنّ معاملات الدالة الحدودية P كلّها أعداد **حقيقيّة** و أنّ جذورها تنتمي إلى المجموعة $\Pi_b = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Re}(z) < b\}$ ، بحيث b عدد حقيقي. نرمز بـ g إلى الدالة العددية المعرّفة على المجال $I_b = [b, +\infty[$ بـ

$$g(x) = |P(x)|, \ \ x \in I_b.$$

1.4.2. بيّن أنّ الدالة الحدودية $x \longmapsto P(x)$ تحافظ على نفس الإشارة في المجال I_b ثم استنتج أنّ الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال I_b ، و حَدّد دالّتها المشتقّة.

2.4.2. بيّن أنّ الدالة g تزايدية قطعا على المجال I_b .

الجــزء الثــالث

حدودية غير قابلة للتعميل في الحلقة $\mathbb{Z}[X]$

ليكن q **عددا أوّليا** بحيث $q \geqslant 11$. نفترض أنّ العدد q يُكتَبُ في النِّظمَة العُشَرية على شكل

$$q = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k.$$

(نُذَكِّر هنا أنّ الأعداد a_0 ، … ، a_n تنتمي إلى المجموعة $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ وأنّ $a_n \neq 0$).

نرمز بـ P إلى الدالة الحدودية المعرّفة بما يلي:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \ \ z \in \mathbb{C}.$$

1.3. نعتبر المجموعتين D و Π_0 المعرّفتين بـ $D = \{z \in \mathbb{C} \ ; |z| < \frac{1+\sqrt{37}}{2}\}$ و $\Pi_0 = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Re}(z) < 0\}$. بيّن أنّ جذور الدالة الحدودية P تنتمي إلى اتّحاد المجموعتين D و Π_0 ، ثم ارسم صورة المجموعة $D \cup \Pi_0$ في المستوى العقدي.

2.3. نفترض أنّه توجد دالتان حدوديتان R و Q درجتاهما أكبر من 1 ومعاملاتهما **أعداد صحيحة** ، بحيث لكل z من $\mathbb{C}$ يكون لدينا $P(z) = R(z)Q(z)$.

1.2.3. بيّن أنّ جذور الدالتين الحدوديتين R و Q تنتمي إلى المجموعة Π_4 ثمّ استنتج المتفاوتتين $|R(4)| < |R(10)|$ و $|Q(4)| < |Q(10)|$.

إشارة : لاحظ أنّ $D \cup \Pi_0 \subset \Pi_4$.

2.2.3. بيّن أنّ $|R(10)| > 1$ و $|Q(10)| > 1$ ثمّ استنتج أنّ الدلة الحدودية P لا يمكن كتابتها على شكل جداء دالتين حدوديتين درجاتهما أكبر من 1 ومعاملاتهما أعداد صحيحة.

خلاصة : الحدودية P غير قابلة للتعميل في الحلقة $\mathbb{Z}[X]$.

نهــاية التمــرين الثــاني

نهــاية الموضوع