المباراة العامة للعلوم والتقنيات 2010

موضوع الرياضيات

المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي	المباراة العامة الأولى للعلوم والتقنيات	أكاديمية الحسن الثاني للعلوم والتقنيات
الجمعة 16 يوليوز 2010	التخصص : رياضيات	مدة الإنجاز: 4 ساعات

التمرين الأول

نرمز ب I إلى أحد المجالات الأربعة $[a,b]$ أو $[a,+\infty[$ أو $]-\infty,a]$ أو IR بحيث a و b عددان حقيقيان يحققان $a<b$.

ليكن f تطبيقا معرفا من I إلى I بحيث يوجد عدد حقيقي k، ينتمي إلى المجال المفتوح $]0,1[$ ، يحقق ما يلي :

$$\forall x \in I, \ |f(x)-f(y)| \le k|x-y|.$$

تعريف : كل عنصر x من I حيث $f(x)=x$ يسمى نقطة ثابتة للدالة f في المجال I .

نهدف من هذا التمرين البرهنة على أن الدالة f تقبل نقطة ثابتة وحيدة في المجال I و نعطي طريقة لحساب قيمة مقربة لهذه النقطة بدقة معلومة.

A. وحدانية النقطة الثابتة

1. نفترض أن f تقبل نقطتين ثابتتين مختلفتين x و y في المجال I، بين أن $|x-y| \le k|x-y|$.
2. استنتج !

B. وجود النقطة الثابتة

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in IN. \end{cases}$$

I. نفترض في هذه الفقرة أن $I=[a,b]$

1. بين أن لكل n لدينا $|u_{n+1}-u_n| \le k^n|u_1-u_0|$ ، ثم استنتج أن $u_n - k^n(b-a) \le u_{n+1} \le u_n + k^n(b-a)$.

نعتبر فيما يلي المتتاليتين العدديتين $(v_n)_{n\in IN}$ و $(w_n)_{n\in IN}$ المعرفتين، بدلالة البارامتر الحقيقي α ، كما يلي :

$$v_n = u_n + \alpha k^n(b-a), w_n = u_n - \alpha k^n(b-a), n \in IN.$$

2. ما هو الشرط الذي يجب أن يحققه العدد α كي تكون المتتاليتان $(v_n)_{n\in IN}$ و $(w_n)_{n\in IN}$ متحاديتان.
3. ليكن α عددا يحقق الشرط أعلاه.
   - أ - بين أن $(u_n)_{n\in IN}$ متتالية متقاربة وأن نهايتها ℓ تنتمي إلى المجال $[a,b]$.
   - ب - بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا $|u_n - f(\ell)| \le k^n|u_0-\ell|$.
   - ت - استنتج أن ℓ نقطة ثابتة للدالة f في المجال $[a,b]$.

II. نفترض في هذه الفقرة أن $I=[a,+\infty[$ و أن $f(a)$ يخالف a.

نعتبر المستقيمين (D) و (Δ) الذين معادلتاهما، على التوالي، هما $y=f(a)+k(x-a)$ و $y=x$.

1. ارسم المستقيمين (D) و (Δ) ثم بين أنه يوجد عدد حقيقي b، ينتمي إلى المجال I، بحيث $a<b$ و $b=f(a)+k(b-a)$.

2. بين أن لكل عنصر x من المجال $[a,b]$ لدينا $a \leq f(x) \leq b$.
3. استنتج أن الدالة f تقبل نقطة ثابتة في المجال I.

III. نفترض في هذه الفقرة أن $I =]-\infty, b]$

نضع $J = \{-x / x \in I\}$ و نعتبر التطبيق g المعرف على المجال J كما يلي :

$$g(x) = -f(-x)$$

بين أن التطبيق g يحقق

$$\forall x \in J \ , |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$$

ثم بين أن f تقبل نقطة ثابتة في I.

IV. نفترض أخيرا أن $I = IR$

1. تحقق أنه إذا كان $f(0) = 0$ فإن 0 هو النقطة الثابتة الوحيدة للدالة f.
2. نفترض فيما يلي أن $f(0) > 0$.

أ - بين أنه يوجد عددان a و b، ينتميان إلى المجال I، بحيث

$$a = f(0) - ka \text{ و } b = f(0) + kb \text{ و } a < b$$

ب - بين أن القطعة $[a,b]$ مستقرة بالدالة f ثم استنتج أن لها نقطة ثابتة في IR.

3. ادرس الحالة المتبقية

C. طريقة لحساب قيمة مقربة لنقطة ثابتة

I. نحتفظ بنفس المعطيات الواردة في بداية هذا التمرين و نرمز ب ℓ إلى النقطة الثابتة للدالة f في المجال I،

و نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in IN}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 \in I, \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in IN. \end{cases}$

1. بين أن لكل n و p لدينا $|u_{n+p} - u_n| \leq |u_1 - u_0| k^n \dfrac{1-k^p}{1-k}$.
2. استنتج أن لكل n لدينا $|u_n - \ell| \leq |u_1 - u_0| \dfrac{k^n}{1-k}$.

II. دراسة مثال

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR كما يلي : $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x + 1$.

1. بين أن f تحقق على المجال IR الشروط الواردة في التمرين.
2. استنتج أن f تقبل نقطة ثابتة وحيدة ℓ في IR.
3. حدد أصغر عدد صحيح طبيعي n بحيث u_n قيمة مقربة ل ℓ بدقة أقل من 10^{-2} .

التمرين الثاني

لتكن $(F_n)_{n\in IN}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \in IN. \end{cases}$$

تسمى المتتالية $(F_n)_{n\in IN}$ متتالية فيبوناتشي Fibonacci.

I. خصائص حسابياتية لحدود متتالية فيبوناتشي Fibonacci

1. تحقق أن جميع حدود هذه المتتالية هي أعداد صحيحة طبيعية.
2. ليكن n عددا صحيحا طبيعيا $n \geq 1$.

   أ -بين أن $F_n F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

   ب -استنتج أن العددان F_n و F_{n+1} أوليان فيما بينهما.
3. ليكن n و p من IN^*.

   أ - بين المتساوية $F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p$. (يمكن استعمال برهان بالترجع على p .)

   ب - استنتج أن للعددين F_{n+p} و F_p و العددين F_n و F_p نفس القاسم المشترك الأكبر.

   (أي أن $F_{n+p} \wedge F_p = F_n \wedge F_p$).
4. ليكن m و n عددين من IN^*. نرمز ب r لباقي القسمة الإقليدية للعدد m على n.
   بين أن العددين F_m و F_n و العددين F_n و F_r لهما نفس القاسم المشترك الأكبر.
5. ليكن m و n عددين من IN^*. بين أن القاسم المشترك الأكبر للعددين F_m و F_n يساوي F_d حيث d
   هو القاسم المشترك الأكبر للعدين m و n. (يمكن استعمال خوارزمية إقليدس.)

II. تفكيك فيبوناتشي لعدد صحيح طبيعي : مبرهنة زيكيندورف Zeckendorf

سنبرهن فيما يلي على أن كل عدد صحيح طبيعي N، مخالف لصفر، يكتب بطريقة وحيدة على الشكل :

$$N = \sum_{k=2}^{n} a_k F_k$$

حيث أن :

$$\begin{cases} n \text{ عدد من } IN \text{ أكبر أو يساوي } 2\text{ ،} \\ a_2\text{ ،...،} a_n \text{ أعداد من المجموعة } \{0,1\} \\ a_k a_{k+1} = 0 \text{ لكل عدد صحيح طبيعي } k \text{ ينتمي إلى المجموعة } \{2,\dots,n-1\} \text{ عندما يكون } n \geq 3 \text{ .} \end{cases}$$

تعريف : نسمي هذا التفكيك "تفكيك فيبوناتشي".

1. **نهاية المتتالية** $(F_n)_{n\in IN}$

أ - بين أن المتتالية $(F_n)_{n\in IN}$ تزايدية.

ب - نفترض أن المتتالية $(F_n)_{n\in IN}$ تؤول إلى عدد حقيقي ℓ. بين أن $\ell = 0$ ثم استنتج أن المتتالية $(F_n)_{n\in IN}$ متباعدة و نهايتها $+\infty$.

2. **قابلية تفكيك عدد صحيح طبيعي إلى تفكيك فيبوناتشي**

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 و نعتبر العبارة P_n التالية :

P_n : "كل عدد صحيح طبيعي N يحقق $1\le N < F_n$ فهو قابل لتفكيك فيبوناتشي."

لنبرهن بالترجع أن العبارة P_n صحيحة مهما كان n عدد صحيح طبيعي و $n\ge 2$.

أ - تحقق أن العبارتين P_2 و P_3 صحيحتان.

ب - نفترض أن العبارة P_k صحيحة لكل k حيث $2\le k\le n$ و نرمز ب N لعدد صحيح طبيعي يحقق $1\le N < F_{n+1}$. ادرس قابلية N لتفكيك فيبوناتشي في الحالتن التاليتين :

- $1\le N\le F_n$ ؛
- $F_n < N < F_{n+1}$ (لاحظ أن $1\le N - F_n < F_{n-1}$).

ت - باستعمال ما سبق بين أن كل عدد طبيعي $N\ge 1$ قابل لتفكيك فيبوناتشي.

3. **وحدانية التفكيك**

ليكن N عددا صحيحا طبيعيا مخالفا لصفر و نعتبر أن $N = \sum_{k=2}^{n} a_k F_k$ تفكيك فيبوناتشي للعدد N.

أ - بين بالترجع أن $\sum_{k=2}^{n-1} a_k F_k < F_n$.

ب - ماذا يمثل العدد a_n بالنسبة للعدد N ؟

ت - بين وحدانية تفكيك فيبوناتشي.

4. أعط حدود متتالية فيبوناتشي الأصغر من العدد 2010 ثم استنتج تفكيك فيبوناتشي للعدد 2010.