Absolue Continuité d'une mesure par rapport à une autre

Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable et λ, μ deux mesures finis sur $(X, \mathcal{B})$. On suppose que, pour tout $A \in \mathcal{B}$, on a $\lambda(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0$. Démontrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, $\forall A \in \mathcal{B}$, $\lambda(A) < \eta \Longrightarrow \mu(A) < \epsilon$.

Procédons par absurde en supposant l'existence de $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ tel qu'il existe $A_\eta \in \mathcal{B}$, $\lambda(A_\eta) < \eta$ et $\mu(A_\eta) \geq \epsilon$. Fixons un tel $\epsilon > 0$, et prenant $\eta = 2^{-n}$, il existe $A_n \in \mathcal{B}$ tel que $\lambda(A_n) < 2^{-n}$ et $\mu(A_n) \geq \epsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$. Il est clair que

$$\lambda(B_n) \leq \sum_{k \geq n} \lambda(A_k) = \sum_{k \geq n} 2^{-k} = 2^{-n+1}$$

De plus la suite des parties mesurables (B_n) est décroissante, il vient

$$\lambda\left(\bigcap_{n \geq 0} B_n\right) = \lim_{n \to \infty} \lambda(B_n) = 0$$

Mais

$$\mu\left(\bigcap_{n \geq 0} B_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n) \geq \epsilon$$

Et ceci contredit l'hypothèse initiale.