Restriction d'une fonction mesurable

Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in E$ et $g(x) = 0$ sinon. Prouver que f est mesurable si et seulement si g mesurable.

Soit B une partie mesurable de $\mathbb{R}$, deux cas se présentent. Ou bien $0 \in B$, dans ce cas $g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cup E^c$, il s'en suit que si f est mesurable alors la partie $f^{-1}(B)$ est mesurable, puis il en est de même pour $g^{-1}(B)$ et alors g est mesurable, d'autre part $f^{-1}(B) = g^{-1}(B) \cap E$, donc par un argument similaire au précédent si g est mesurable il en est de même pour f. Ou bien $0 \notin B$, dans ce cas on a $g^{-1}(B) = f^{-1}(B)$, donc f est mesurable si et seulement si g est mesurable. En conclusion, f est mesurable si et seulement si g l'est.