Concours d'accès au cycle de préparation à l'Agrégation de Mathématiques

Analyse et Probabilités

Rabat 2018

Durée : 4 heures

Important

L'épreuve est constituée de deux problèmes. Le candidat est invité à bien mentionner les références complètes de chaque question traitée.

Les candidats sont tenus à rendre deux copies séparées même si elles sont vierges. La première contenant la résolution du problème 1 et la seconde contenant celle du problème 2. Dans chacune des deux copies on indiquera les références du candidat et le nombre d'intercalaires utilisés.

Il sera tenu en compte dans l'appréciation des copies de la rigueur de votre raisonnement, de la clarté de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la présentation de votre copie. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toute fois à mentionner la référence du résultat utilisé.

Si le candidat repère ce qu'il pense être une erreur de l'énoncé, il le signale sur sa copie en expliquant les raisons qui l'ont amené à le penser. Ceci doit pas l'empêcher de finir son épreuve et il a le choix d'adopter les rectifications qu'il croit nécessaire ou pas.

Les calculatrices et tout matériel électronique ainsi que les documents sont interdits lors de cette épreuve.

* * * * * *

Notations

- Dans toute l'épreuve on utilise les notations habituelles des ensembles usuels $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Problème 1

Dans tout le problème, $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y,

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \times f\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Un résultat de densité

Posons

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{p}{2^q} \mid p, q \in \mathbb{N}\right\}$$

1. Soient $x \in \mathbb{R}$, et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs et considérons les suites $(x_n)_{n\in}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_n = \dfrac{\lfloor p_n x \rfloor}{p_n}$ et $y_n = \dfrac{\lfloor p_n x \rfloor + 1}{p_n}$, où pour $t \in \mathbb{R}$, $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière de t.
   (a) Que représente x_n et y_n *relativement* à x, pour $n \in \mathbb{N}$, dans le cas où $p_n = 10^n$?
   (b) Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x.
   (c) Montrer dans le cas où la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exemples de solutions du problème

1. Déterminer toutes les fonctions constantes appartenant à $\mathcal{E}$.
2. Montrer que les fonctions cosinus trigonométrique et cosinus hyperbolique appartiennent à $\mathcal{E}$.
3. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ est un élément de $\mathcal{E}$.
4. Déduire de la question précédente d'autres éléments de $\mathcal{E}$.

Propriétés des solutions

1. Soit $f \in \mathcal{E}$.
   (a) Montrer que f est une fonction paire.
   (b) Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$? Que dire de f si $f(0) = 0$?
   (c) Montrer que si f n'est pas identiquement nulle, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 + f(x) = 2\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

2. Dans cette question, on suppose que f et g sont deux fonctions non identiquement nulles appartenant à $\mathcal{E}$. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $f(a) = g(a)$, et que f et g sont positives sur $[0, a]$. On se propose de montrer que $f = g$.
   (a) Montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$,

$$f\left(\frac{pa}{2^q}\right) = g\left(\frac{pa}{2^q}\right)$$

(b) En déduire que $f = g$.

3. Soit f une fonction non identiquement nulle appartenant à $\mathcal{E}$.
   (a) Montrer l'existence d'un $c > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, c]$, $f(x) > 0$.
   (b) On suppose ici qu'il existe $x_0 \in [0, c]$ tel que $f(x_0) < 1$. On note $d = f(x_0)$ et $\alpha = \arccos(d)$.
      i. Justifier pourquoi l'ensemble $A = \{x \in [0, c] \mid f(x) = d\}$ admet une borne inférieure positive que l'on note a.
      ii. Montrer que $f(a) = d$, puis en déduire que $\alpha > 0$.
      iii. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \cos\left(\dfrac{\alpha}{a}x\right)$
   (c) Déterminer l'expression de f dans le cas où $f(x) \geq 1$ pour tout $x \in [0, c]$.

Problème 2

Définitions et notations

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la série $\sum a_n$ est **A-convergente** si les conditions (i) et (ii) suivantes sont vérifiées :
(i) la série entière $\sum a_n z^n$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 ;
(ii) l'application $f_a : [0, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ possède une limite finie à gauche en 1. On pose alors $f_a(1) = \lim\limits_{x\to 1,\, x<1} f_a(x)$ qu'on appelle la A-somme de la série $\sum a_n$.

1. (Exemples) Étudier la convergence et la A-convergence de la série $\sum a_n$ dans chacun des cas suivants en précisant, quand elle existe, la valeur de la somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ainsi que la A-somme $f_a(1)$,

$$\text{(a) } a_n = (-1)^n, \quad \text{(b) } a_n = \frac{1}{n+1}, \quad \text{(c) } a_n = \frac{1}{n!}$$

2. (Cas de suite à termes positifs) On suppose dans cette question que pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$. Montrer que la série $\sum a_n$ est A-convergente si et seulement si elle est convergente et qu'on a dans le cas de convergence,

$$f_a(1) = \lim_{x\to 1,\, x<1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

La convergence implique la A-convergence

Quelques cas particuliers

1. Dans cette question, on suppose que $\sum a_n$ est absolument convergente.
   (a) Montrer que la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
   (b) En déduire que $\sum a_n$ est A-convergente et donner sa A-somme.
2. Dans cette question, on suppose que que $a = ((-1)^n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle.

(a) Montrer que la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

(b) En déduire que $\sum a_n$ est A-convergente et donner sa A-somme.

3. Montrer alors $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente et calculer sa somme.

Cas général

Soit $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telles que la série $\sum a_n$ soit convergente. Soit r le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

1. Justifier pourquoi $r \geq 1$.
2. Montrer que si $r>1$, alors la série $\sum a_n$ est A-convergente et on a $f_a(1)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
3. Dans cette question, on suppose que $r=1$, et on pose $S_n=\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   (a) Montrer que la série entière $S_n z^n$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et que pour tout $x\in[0,1]$,

   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

   (b) En déduire que la série $\sum a_n$ est A-convergente et qu'on a $f_a(1)=\sum_{n=0}^{\infty}$

Un cas où la A-convergence implique la convergence

1. (Résultat préliminaire) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite numérique convergeant vers 0. Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0.

   Soit $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que que la série $\sum a_n$ soit A-convergente et $na_n \to 0$ quand $n\to\infty$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$\alpha_n = \sup\{k \mid a_k \mid, k \geq n+1\}, \qquad \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k \mid a_k \mid$$

2. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1[$.

   (a) Montrer que

   $$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k(1-x^k)\right| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} \mid ka_k \mid$$

   (b) Montrer que

   $$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \leq \frac{\alpha_n}{(n+1)(1-x)}$$

3. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$,

   $$\left|f_a(x)-\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \sigma_n(n+1)(1-x)+\frac{\alpha_n}{(n+1)(1-x)}$$

4. Montrer que les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.
5. Conclure que la série $\sum a_n$ est convergente.

Fonction génératrice

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire X sur Ω à valeur dans $\mathbb{N}$, la fonction G_X définie, pour tout réel t pour lequel la série $\sum t^n \mathbb{P}(X = n)$ converge, par

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \mathbb{P}(X = n)$$

où $(X = n)$ désigne l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = n\}$.

1. Montrer que G_X est définie, au *moins* sur l'intervalle $[-1, 1]$ et donner la valeur de $G_X(1)$.
2. Donner l'expression de G_X, en précisant son domaine de définition, dans chacun des cas suivants :
   (a) X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
   (b) X suit la loi de binomiale de paramètres n, p avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
   (c) X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
3. En utilisant les résultats des parties précédentes, montrer que :
   (a) X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1.
   (b) X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

   Et donner les expressions de l'espérance et la variance de X en fonction des dérivées de G_X et 1.