Logique, ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$, sommes et produits et éléments de la combinatoire

Choukri Saâd

Stage de Juillet 2018

Résumé

Ce cours est destiné aux élèves du tronc commun qui ont été sélectionnés à l'échelle nationale à la base de 6 tests d'olympiades de mathématiques pour participer au premier stage de Juillet 2018. Ce cours comporte les stratégies que tout candidat souhaitant participer aux olympiades de mathématiques doit les connaître.

0- Table des matières

1- Éléments de logique

1.1- Assertion, proposition

On appelle assertion, toute expression mathématique pour laquelle on peut décider qu'elle est vraie ou fausse. Une assertion possède donc deux valeurs de vérité **V**(Vraie) et **F**(Fausse). Une assertion qui est vraie est dite une *proposition*.

1.2- Négation, disjonction, conjonction

1.2.1 La négation

Etant donné une proposition P, sa négation est la proposition notée $\neg P$ qui est fausse lorsque l'assertion P est vraie, et qui est fausse lorsque P est vraie.

1.2.2 La disjonction

La disjonction de 2 assertions P et Q est la proposition noté $(P$ ou $Q)$ ou $(P \vee Q)$ qui est fausse si et seulement si P est fausse et Q est fausse.

1.2.3 La conjonction

La conjonction de 2 assertions P et Q est l'assertion $(P$ et $Q)$ ou $(P \wedge Q)$ qui est vraie si et seulement si P et Q sont tous les deux vraies.

Soient P_1, P_2,..., P_n des assertions. Soient P et Q deux propositions construites à partir de P_1, P_2, ..., P_n. Si P et Q ont les même valeur de vérité, ont dit qu'elles sont synonymes, et on note $P \equiv Q$. Dans ce qui suit, on donnera les propriétés, soient P, Q et R trois assertions, on a

1. $(P \vee P) \equiv P$ et $(P \wedge P) \equiv P$
2. $(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P)$ et $(P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$. On dit que $\wedge$ et $\vee$ sont commutatives.
3. $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$ et $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$. On dit que $\wedge$ et $\vee$ sont associatives.
4. $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ et $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$. On dit que $\wedge$ est distributive par rapport à $\vee$, et que $\vee$ est distributive par rapport à $\wedge$.
5. $\neg(\neg P) \equiv P$.
6. (Lois de Morgan) $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$, et $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$.

Démonstration. On va démontrer par exemple démontré la partie 2 de (4). La démarche de démonstration des autres propriétés est la même. On va utilisé le tableau de vérité !

P	Q	R	P ∧ Q	(P ∧ Q) ∨ R	P ∨ R	Q ∨ R	(P ∨ R) ∧ (Q ∨ R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

On remarque que les deux assertions mises en question ont les mêmes valeurs de vérités, donc elles sont synonymes.

1.3- L'implication, équivalence

La proposition $\neg P \vee Q$ est notée $P \Longrightarrow Q$ et se lit P implique Q. Ainsi on a,

P	Q	P ⇒ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Si $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on dit que Q est une condition nécessaire pour P, et on dit que P est une condition nécessaire pour Q. Donnons une propriété très importante,

Proposition (Transitivité de l'implication). Soient P, Q et R trois assertions, alors

$$((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$$

Démonstration. On démontre cette proposition à l'aide d'un tableau de vérité à 8 lignes.

Exemples.

Soient a et b deux entiers relatifs. On a l'implication vraie,

$$(a\,\text{pair}) \Longrightarrow (ab\,\text{pair})$$

En effet, si a pair, on a l'existence $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$, donc $ab = 2kb = 2(kb)$ et par suite ab est pair. Pour ab est pair, il est suffisant d'avoir a pair mais pas nécessaire car on peut avoir ab pair pour a impair.

Soient P et Q deux assertions. On dit que P et Q sont équivalentes si elles sont simultanément vraies et simultanément fausses. On dira par la suite que deux propositions équivalentes sont deux propositions ayant les mêmes valeurs de vérité. Cette phrase peut se visualiser dans un tableau appelé table de vérité dans lequel on fait apparaître les différentes valeurs de vérité possibles pour le couple (P, Q) (Vrai et Vrai, Vrai et Faux, ...) et, en correspondance, les valeurs de vérité de la proposition $P \iff Q$. Ainsi, la table de vérité de l'équivalence logique $P \iff Q$ est

P	Q	P ⇔ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Proposition. Soient P et Q deux assertions, on a

$$(P \iff Q) \equiv (P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$$

Ainsi, pour démontrer que deux assertions sont équivalentes, il suffit de démontrer l'implication directe et l'implication réciproque.
Démonstration. Il s'agit de vérifier que $(P \iff Q)$ et $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$ ont les mêmes valeurs de vérité. On utulise donc un tableau de vérité.

P	Q	P ⇔ Q	P ⇒ Q	Q ⇒ P	(P ⇒ Q) ∧ (Q ⇒ P)
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Donnons dans ce qui suit quelques propriétés qu'on peut tous les démontrer en utulisant des tableaux de vérité.

Proposition. Soient P et Q deux assertions. On a

$$\neg(P \Longrightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$$

$$(P \Longrightarrow Q) \equiv (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$$

1.4- Quantificateurs

Soit P une propriété définie sur un ensemble non vide E.

Pour $x \in E$, on note $P(x)$ si x vérifie la propriété P. Si $P(x)$ est vérifiée pour tout $x \in E$, on pose $\forall x \in E$, $P(x)$, et se lit pour tout $x \in E$ la propriété $P(x)$.

Si P est vérifiée pour un certain $x \in E$, on pose $\exists x \in E,\ P(x)$, et se lit il existe un $x \in E$ tel que $P(x)$.

Proposition. On a

$$\neg(\forall x \in E,\ P(x)) \equiv (\exists x \in E,\ \neg P(x))$$
$$\neg(\exists x \in E,\ P(x)) \equiv (\forall x \in E,\ \neg P(x))$$

Exemples.

Exprimer les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs.

1. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.*
2. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire.*
3. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas impaire.*
4. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas strictement croissante.*

On a

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R}),\ x \geq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R}),\ f(-x) = f(x)$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(-x) \neq -f(x)$
4. Pour exprimer cette assertion à l'aide des quantificateurs, on va exprimer sa négation à l'aide des quantificateurs puis on va déduire l'expression de l'assertion mise en question. La fonction f est strictement croissante si et seulement si
$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2),\ x > y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$
Et ceci est équivalent à
$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2),\ x \leq y \,\text{ou}\, f(x) > f(y)$$
Donc f n'est pas strictement croissante si et seulement si
$$(\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2),\ x > y \,\text{et}\, f(x) \leq f(y)$$
➛ *Cet exemple montre l'importance de la proposition $(P \Longrightarrow Q) \iff (\neg P\ ou Q)$. On l'utilise souvent quand il s'agit de donner la négation d'une assertion faisant intervenir des implications.*

1.5- Raisonnement par déduction

Le raisonnement par déduction est un raisonnement basé sur une succession d'implications à partir d'une proposition qu'on suppose vraie. Dans la suite on donnera des exemples.

Exemples.

Soit x un réel vérifiant $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=1$. Montrer que $x=0$.

On va vous proposer deux méthodes. Soit x vérifiant l'égalité $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=1$, on a d'une part $x \geq 0$ et d'autre part $\sqrt{x+1} \leq 1$, i.e. $x \leq 0$. Donc $0 \leq x \leq 0$ et par suite $x=0$. La seconde méthode consiste à voir que

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=1 \Longrightarrow \sqrt{x+1}=1-\sqrt{x} \Longrightarrow x+1=x+1-2\sqrt{x} \Longrightarrow x=0$$

Alors, par transitiviré des implications, on déduit $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=1 \Longrightarrow x=0$. D'où le résultat.

Soit n un entier naturel. Montrer l'implication suivante,

$$9 \mid 10^n-1 \Longrightarrow 9 \mid 10^{n+1}-1$$

On va utuliser un raisonnement par déduction. Soit n un entier naturel tel que 9 divise 10^n-1, on a

$$9 \mid 10^n-1 \Longrightarrow 10^n-1=9K \Longrightarrow 10^{n+1}-10=90K \Longrightarrow 10^{n+1}-1=9(10K+1) \Longrightarrow 9 \mid 10^{n+1}-1$$

D'où le résultat.

1.6- Raisonnement par contra-position

Soient P et Q deux assertions. Parfois il est difficile de montrer que P implique Q directement. Vu l'équivalence donnée précédemment $(P \Longrightarrow Q) \iff (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$, on peut montrer que $\neg Q$ implique $\neg Q$. Pour illustrer ce raisonnement, on va s'appuyer sur des exemples précis.

Exemples.

Soient a et b deux entiers naturels. Montrer que

$$ab \text{ est pair} \iff a \text{ est pair ou } b \text{ est pair}$$

Condition nécessaire. Supposons a pair ou b pair. Par symétrie des rôles, on suppose que a est pair, par suite il existe k entier naturel tel que $a=2k$ et alors $ab=2kb$. Donc ab est pair.
Condition suffisante. On veut montrer l'implication suivante

$$ab \text{ est pair} \Longrightarrow a \text{ est pair ou } b \text{ est pair}$$

On va utiliser un raisonnement par contra-posé. Supposons a impair et b impair et montrons que ab est impair. Si a et b sont impairs, on a alors l'existence de k et k' deux entiers naturels tels que $a=2k+1$ et $b=2k'+1$. Il s'en suit que

$$ab=(2k+1)(2k'+1)=4kk'+2k+2k'+1=2(2kk'+k+k')+1$$

Donc ab est impair, et c'est ce qu'il fallait démontrer.

➛*Avant de passer à l'exemple suivant, rappelons l'identité suivante qui sera démontrée prochainement dans la partie du raisonnement par récurrence. Pour tous a et b réels et pour tout entier $n \geq 1$, on a $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$. Il s'en suit que pour tous entiers a et b relatifs, on a $a-b$ divise a^n-b^n où $n \geq 1$ un entier naturel.*

Soit p un entier naturel. Montrer que si $2^p - 1$ est un nombre premier, alors il en est de même pour p.

Il s'agit de montrer que $2^p - 1$ premier implique que p est premier. On va utiliser un raisonnement par contra-posé. Supposons que p n'est pas premier, i.e. p composé. Alors il existe deux entiers a, b compris entre 2 et $p - 1$ tels que $p = ab$. Il s'en suit que

$$2^p - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$$

et puisque $2^a - 1$ divise $(2^a)^b - 1$ en vertu du lemme précédent, alors $2^a - 1$ divise $2^p - 1$. Sachant que $2^a - 1 \geq 2$, alors $2^p - 1$ n'est pas premier. D'où le résultat.

Soient α et β deux nombres réels positifs. Montrer l'implication,

$$\sqrt{\alpha + 1} - \sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta + 1} - \sqrt{\beta} \Longrightarrow \alpha > \beta$$

Il parait un peu compliqué de montrer l'implication en utilisant un raisonnement par déduction. On va raisonner par contre-apposition. Supposons que $\alpha \leq \beta$, il s'en suit que $\sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta+1} + \sqrt{\beta}$, mais $\sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha+1} - \sqrt{\alpha}} > 0$, donc un passage à l'inverse fournit $\sqrt{\alpha+1} - \sqrt{\alpha} \geq \sqrt{\beta+1} - \sqrt{\beta}$. D'ou le résultat.

1.7- Raisonnement par absurde

Le *raisonnement par l'absurde* (du latin reductio ad absurdum) ou apagogie est une forme de raisonnement logique, philosophique, scientifique consistant soit à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition complémentaire (ou « contraire »), soit à montrer la fausseté d'une proposition en déduisant logiquement d'elle des conséquences absurdes. Dans la suite de cette section on donnera de nombreux exemples permettant d'illustrer ce raisonnement.

Exemples.

Montrer que $1/3$ n'est pas un nombre décimal.

Supposons que $1/3$ est un nombre décimal. Donc, il existe $a, n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$. Il s'en suit que $10^n = 3a$, donc 3 divise 10^n, ce qui est impossible.

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Il s'en suit qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, tels que $\sqrt{2} = p/q$ puisque $\sqrt{2} > 0$. Donc $p^2 = 2q^2$, par suite 2 divise p^2, et alors 2 divise p en vertu de l'exemple (1) de (1.6). Ceci est équivalent à l'existence d'un entier naturel k tel que $p = 2k$, en substituant dans la relation $p^2 = 2q^2$, il vient $q^2 = 2k^2$, donc 2 divise q^2,i.e. 2 divise q. En conclusion 2 divise p et q, et ceci contredit le fait que p et q sont premiers entre eux. Finalement $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Les points du plan sont coloriés par le blanc ou le noir, montrer qu'il existe deux points du plan de la même couleur distants de 1 mètre exactement.

On suppose que chaque fois qu'on choisit deux points du plan distants de 1 mètre, on trouve leurs couleurs différentes. Traçons un triangle équilatéral ABC dans le plan de côté de 1 mètre. D'après l'hypothèse les deux sommets A et B sont de couleurs différentes, sans perte de généralité, on suppose que A est colorié par le blanc et que B est colorié par le noir. Puisque les deux sommet B et C sont de couleurs différentes, alors C est colorié par le blanc. Donc A et C ont la même couleur et ceci contredit notre supposition. D'où le résultat par absurde.

Montrer que l'ensemble des nombres premiers positifs $\mathbb{P}$ est infini.

Par absurde, supposons que l'ensemble des nombres premiers positifs $\mathbb{P}$ est fini, on peut écrire alors $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ où $n \geq 1$ un entier. On pose $N = p_1 p_2 ... p_n + 1$, l'entier $N > 1$ admet un diviseur premier p, donc p divise $p_1 p_2 ... p_n + 1$, mais p divise aussi $p_1 p_2 ... p_n$ car $p \in \{p_1, ..., p_n\}$. Il s'en suit que p divise 1 et ceci n'est pas possible car p est premier. En conclusion l'ensemble des nombres premiers est infini.

➛ *Cet ingénieux raisonnement est dû à Euclide (300 avant J-C).*
➛ *On a utilisé le fait que tout entier ≥ 2 admet un diviseur premier, résultat qu'on va démontrer prochainement par deux méthodes.*

1.8- Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse appelé parfois *raisonnement par condition nécessaire* est un type de raisonnement mathématique permettant de démontrer l'existence et l'unicité d'un objet vérifiant des propriétés données. Il se décompose en deux parties :

1. **l'analyse.** on suppose que l'objet existe et on essaie de trouver des conditions nécessaires que doit vérifier cet objet. Ce faisant, on prouve que si l'objet existe, alors il est nécessairement égal à une certain objet O_0 (ceci assure l'unicité).
2. **la synthèse.** on considère l'objet O_0 identifié dans la partie analyse, et on vérifie qu'il a bien les propriétés voulues (ceci assure l'existence).

Voici un exemple très classique de raisonnement par analyse-synthèse, on souhaite prouver que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. A première vue, cela semble être un problème difficile, on ne voit vraiment par comment choisir p et i en fonction de f. On va traiter ce problème par analyse-synthèse.
Exemples.

Montrer que toute fonction s'ecrit d'une manière unique sous la forme d'une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Analyse. On suppose que $f = p + i$, où p est paire et i est impaire. Fixons x dans $\mathbb{R}$ et calculons $f(-x)$, $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$ comme p est paire et i est impaire. Mais $f(x) = p(x) + i(x)$. On aboutit à un système d'équations d'inconnus p et i, il s'en suit que

$$\begin{cases} p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$$

Ainsi, si p et i existent, ils s'écrivent nécessairement comme ci-dessus. Ceci montre l'unicité d'une décomposition, si elle existe, mais on n'a pas encore prouvé l'existence (d'ailleurs, notre raisomment a commencé par "On suppose qu'une décomposition existe..."). Pour prouver l'existence, on doit encore faire la synthèse.
Synthèse. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{cases} p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$$

Il est clair que p paire et que i est impaire et que pour tout x, on a $f(x) = p(x) + i(x)$. Ceci prouve l'existence de la décomposition.

➛ *Notons que le raisonnement par analyse-synthèse est largement utulisé dans la recherche des maxima et minima d'une expression algébrique (On va voir cela dans le cours des inégalités).*

1.9- Raisonnement par équivalences successives

Pour montrer qu'une proposition est vraie, on peut parfois supposer que cette proposition est vraie, puis par des équivalences successives, on aboutit à une proposition évidente. Donnons quelques exemples dont la résolution est faite par un tel raisonnement.

Exemples.

Soit n un entier ≥ 3, montrer que

$$n^{n+1} > (n+1)^n$$

On a

$$n^{n+1} > (n+1)^n \iff n > \frac{(n+1)^n}{n^n} \iff n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Mais on sait que pour tout entier $n \geq 3$, on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ (inégalité qu'on démontrera par récurrence), donc $n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et puisque $n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \iff n^{n+1} > (n+1)^n$, on a bien $n^{n+1} > (n+1)^n$ pour tout entier $n \geq 3$.

➛*Dans l'exemple qui suit, on va voir comment un tel raisonnement permet de résoudre des inégalités compliquées.*

(Maroc 2012) Soient a, b et c trois réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

Regardons 8 comme $8 = 2 \times 2 \times 2$, l'inégalité souhaitée est équivalente à

$$\frac{a + \frac{1}{b}}{2} \times \frac{b + \frac{1}{c}}{2} \times \frac{c + \frac{1}{a}}{2} \geq 1 = \sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{a}}$$

Ceci est vrai en vertu de l'inégalité *arithmético-géometrique.*

(Maroc 1990) Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que $a + b + c = 1$. Montrer que

$$\frac{b(1-b)}{ac} + \frac{c(1-c)}{ab} + \frac{a(1-a)}{bc} \geq 6$$

Utilisons des équivalences successives pour prouver cette inégalité. On a

$$\begin{aligned}
\frac{b(1-b)}{ac} + \frac{c(1-c)}{ab} + \frac{a(1-a)}{bc} \geq 6 &\iff \frac{b(a+c)}{ac} + \frac{c(a+b)}{ab} + \frac{a(b+c)}{bc} \geq 6 \\
&\iff b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 6 \\
&\iff \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 2\right) \geq 0
\end{aligned}$$

Ce qui est évident.

1.10- Raisonnement par distinction de cas

oient P et Q deux assertions. Pour montrer que $P \Longrightarrow Q$, on sépare l'hypothèse de départ en différents cas possibles et on montre que l'implication est vraie dans chacun des cas.

Exemples.

Montrer que pour tout entier n, 6 divise $n^3 - n$.

On sait déja que $n^3 - n$ est toujours pair puisque n^3 et n ont la même parité. Il reste à montrer que 3 divise $n^3 - n$ pour conclure. On va montrer que 3 divise $n^3 - n$ par une disjonction de cas. Trois cas se présentent.

1. 1^{er} cas, $n = 3K$, il vient $n^3 - n = 27K^2 - 3K = 3(9K^2 - K)$. Ainsi dans ce cas 3 divise $n^3 - n$.
2. $2^{\text{ème}}$ cas, $n = 3K+1$, il vient $n^3 - n = 27K^3 + 18K + 6K^2 - 3K = 3(9K^3 + 5K + 2K^2)$. Ainsi 3 divise $n^3 - n$ dans ce cas.
3. $3^{\text{ème}}$ cas, $n = 3K+2$. Un développement de $n^3 - n$ *(Laissé au lecteur)* fournit 3 divise $n^3 - n$ dans ce cas.

➛*Notons qu'on peut distinguer les cas plusieurs fois. L'exemple suivant montre qu'on peut distinguer les cas sur un des cas.*

Montrer que pour tout entier relatif k, on a $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

On distingue deux cas $k \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}^-$. Commençons par le premier cas. Soit $k \in \mathbb{N}$, alors si k est pair, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2n$, par suite

$$\cos(k\pi) = \cos(2n\pi) = \cos(2n\pi + 0) = \cos 0 = 1 = (-1)^{2n} = (-1)^k$$

Supposons maintenant que k est impair, il vient $k = 2n+1$ où n un entier naturel, par suite

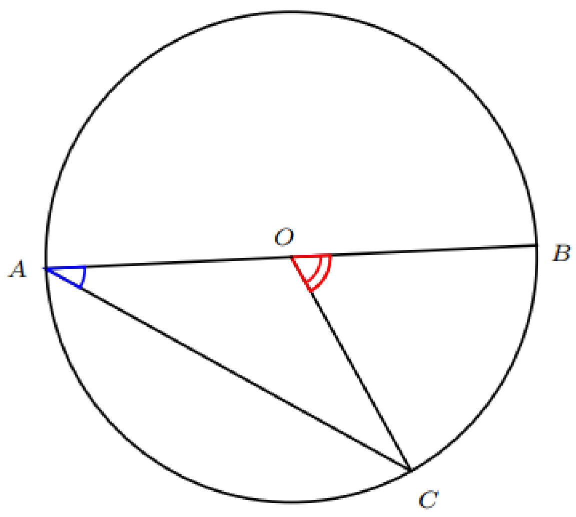
$$\cos(k\pi) = \cos((2n+1)\pi) = \cos(2n\pi + \pi) = \cos\pi = -1 = (-1)^{2n+1} = (-1)^k$$

Donc pour tout entier naturel k, on a $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Supposons maintenant que $k \in \mathbb{Z}^-$, donc $-k$ est un entier naturel, donc d'après ce qui précède $\cos(-k\pi) = (-1) - k = (-1)^k$. La fonction $x \mapsto \cos x$ étant paire, il vient $\cos(k\pi) = (-1)^k$. En conclusion dans tous les cas portant sur $k \in \mathbb{Z}$, on a $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

➛*En utilisant la même méthode que dans cet exemple, montrer que* $\sin\left(k\dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$.

(Théorème de l'angle inscrit) Dans tout cercle, tout angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit.

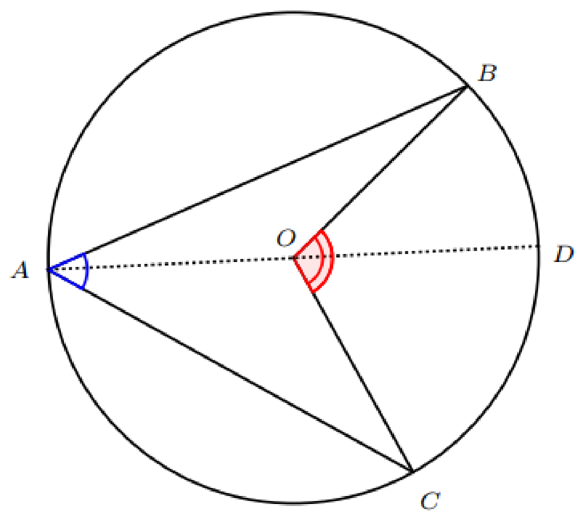
Pour démontrer ce théorème, on considère trois cas, selon la position du centre du cercle par rapport aux côtés de l'angle inscrit.
Premier cas. le centre est situé sur un des côtés de l'angle inscrit.



Le triangle OAC est isocèle en O, donc $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$. Par suite

$$\widehat{BOC} = \pi - \widehat{AOC} = \pi - (\pi - 2\widehat{OAC}) = 2\widehat{OAC}$$

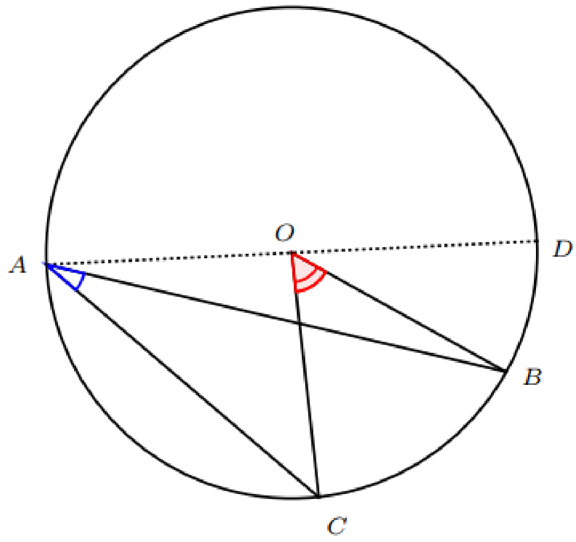
D'ou le résultat.
Second cas. le centre est situé à l'intérieur de l'angle inscrit.



On construit le point D diamétralement opposé à A sur le cercle. On a

$$\widehat{BOC} = \widehat{BOD} + \widehat{BOC} = 2\widehat{BAD} + 2\widehat{BAC} = 2(\widehat{BAD} + \widehat{BAC}) = 2\widehat{BAC}$$

D'après le premier cas.
Troisième cas. le centre est situé à l'extérieur de l'angle inscrit.



On construit le point D diamétralement opposé à A sur le cercle.
On a

$$\widehat{BOC} = \widehat{DOC} - \widehat{DOB} = 2\widehat{DAC} - 2\widehat{DAB} = 2(\widehat{DAC} - \widehat{DAB}) = 2\widehat{BAC}$$

D'après le premier cas.
Finissons cette section par mentionner que vous affronterez des exercices ou vous êtes invités à utiliser une composition de raisonnement pour résoudre la question. Nous verrons plusieurs cas dans la suite de ce cours.

2- Propriétés de $\mathbb{N}$

L'ensemble des entiers naturels $1, 2, 3, ...$ est noté $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. L'addition et la multiplication sont des lois commutatives et associatives possédant respectivement 0 et 1 comme éléments neutres. La multiplication est distributive par rapport à l'addition. L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni d'un ordre usuel $\leq$. L'ordre dans $\mathbb{N}$ est compatible avec l'addition et la multiplication.

2.1- Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un raisonnement très puissant qui permet des résultats non-évidents. On verra dans cette section les différents raisonnement par récurrence. Nous donnerons également plusieurs exemples dont la résolution est par un raisonnement de récurrence.

2.1.1 Axiome de récurrence

Soit S une partie de $\mathbb{N}$. Si $0 \in S$ et pour tout x, $x \in S \Longrightarrow (x+1) \in S$, alors $S = \mathbb{N}$.Autrement dit

$$[(0 \in S) \wedge (\forall x, x \in S \Longrightarrow (x+1) \in S)] \Longrightarrow S = \mathbb{N}$$

2.1.2 Récurrence simple

Soit P une proposition sur $\mathbb{N}$. Si $P(0)$ est vraie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration. Considérons l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{N} \mid P(x) \text{ est vraie }\}$. On a $0 \in S$ et pour tout entier naturel n on a $n \in S \Longrightarrow n+1 \in S$. Donc $S = \mathbb{N}$. i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

➛*La récurrence peut être initialisée à partir d'un rang $n_0 \geq 0$.*

Donnons quelques exemples permettant d'illustrer le raisonnement par récurrence simple.
Exemples.

Soit $n \geq 1$ un entier naturel, montrer que

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour $n = 1$, l'égalité est vraie. Supposons que l'égalité est vraie pour un rang n et montrons la pour le rang $n+1$, on a

$$1 + 2 + ... + (n+1) = (1 + 2 + ... + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc l'égalité est vraie pour le rang $n+1$. Donc d'après le principe de récurrence simple, on a $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$$

En comparant avec l'exemple précédent, il suffit de montrer que

$$1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

On va montrer cela par une récurrence. Pour $n = 1$, c'est évident, supposons que le résultat est vrai pour le rang n et montrons le pour le rang $n+1$. On a

$$1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

D'où le résultat est vrai pour le rang $n+1$. Il s'en suit par principe de récurrence que l'égalité souhaitée est vraie pour tout entier naturel ≥ 1.
➛*Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$ que*

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$$

➛*Nous verrons dans la suite de ce cours dans la section qui étudie les sommes et les produits d'autres méthodes pour évaluer ces sommes sans avoir besoin du second terme de l'égalité.*

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $n^3 - n$.

Pour $n = 0$, on a évidemment 3 divise 0. Supposons que le résultat est vraie pour le rang n et montrons qu'il est vraie également pour l'ordre $n+1$. On a

$$(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 - n) + 3n^2 + 3n = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

Puisque 3 divise $n^3 - n$, il divise alors $(n+1)^3 - (n+1)$. D'où le résultat par récurrence.

➛*Remarquer que par une simple récurrence, on peut montrer que 6 divise $n^3 - n$*
➛*Par une méthode analogue, établir que 5 divise $n^5 - n$ pour tout entier naturel n*

(Inégalité de Bernoulli) Soit $x > 0$ un nombre réel. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'inégalité suivante,

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Pour $n = 0$, l'inégalité est vraie. Supposons que l'inégalité est vraie pour le rang n. On a

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

Donc l'inégalité pour le rang $n+1$. Donc l'inégalité de Bernoulli est vraie pour tout entier naturel n par principe de récurrence.

On trace n droites dans le plan, deux jamais parallèles, trois jamais concourantes. En combien de parties le plan est-il découpé ?

Lorsqu'il n'y a aucune droites, il y a 1 secteur, avec une droite il y a 2 secteurs. Soit u_n le nombre de secteurs lorsqu'il y a n droites. Lorsqu'on rajoute la $n+1$-ème droite, elle va couper les n autres droites, ce qui signifie qu'elle passera par $n+1$ secteurs. Elle coupera chacun de ces secteurs en deux, donc elle rajoute $n+1$ régions. Nous obtenons la relation de récurrence suivante : $u_{n+1} = u_n + n + 1$. Il est facile de démontrer par récurrence qu'alors

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

On laisse le lecteur démontrer ce résultat par récurrence.

2.1.3 Récurrence multiple

Il peut arriver que, pour l'hérédité, quand il s'agit de démontrer $P(n+1)$, on ait besoin de supposer la propriété aux deux rangs précédents, c'est-à-dire non seulement pour n, mais aussi pour $n-1$. On est amené à utiliser le principe de récurrence suivant.

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$, si :
i) $P(0), P(1)$ sont vraies ;
ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($P(n)$ vraie et $P(n+1)$ vraie) $\Longrightarrow P(n+2)$ vraie.
Alors, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous donnerons par la suite des exemples.
Exemples.

(Suite de Fibonacci) On définit la suite (f_n) de «Fibonacci» par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \geq 0$, pour $n = 0, 1$ on a bien le résultat. Supposons le résultat vrai pour le rang n et $n+1$ et montrons le pour le rang $n+2$, on a $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ le résultat est vrai d'après le principe de récurrence.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ un entier. Montrer que pour tout entier k relatif $\alpha^k + \dfrac{1}{\alpha^k}$ est un entier.

Montrons d'abord le résultat pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $P(n)$« le réel $\alpha^n + \dfrac{1}{\alpha^n}$ est un entier». On sait que $P(0), P(1)$ sont vraies. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies et montrons que $P(n+2)$ est vraie. On a

$$\underbrace{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \times \left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right)}_{\in \mathbb{Z}} = \alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} + \underbrace{\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}}_{\in \mathbb{Z}}$$

Donc $\alpha^{n+1} + \dfrac{1}{\alpha^{n+1}} \in \mathbb{Z}$, d'où $\alpha^n + \dfrac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

Si $k \in \mathbb{Z}^-$, écrivons $k = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$, d'après ce qui précède on a $\alpha^n + \dfrac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$, i.e. $\dfrac{1}{\alpha^{-n}} + \alpha^{-n} = \alpha^k + \dfrac{1}{\alpha^k} \in \mathbb{Z}$, d'où le résultat.

➛*Il peut arriver que lorsqu'on veut montrer $P(n+1)$, on ait besoin de supposer la propriété aux trois rangs précédents, c'est ce qu'on appelle la récurrence triple.*

2.1.4 Récurrence forte

La récurrence précédente peut être généralisée à plus d'hypothèses, 3, 4, etc. Mais tous ces principes apparaissent comme des cas particuliers du principe de récurrence suivant, parfois appelé récurrence forte, qui permet, pour démontrer la propriété au rang suivant de la supposer vraie pour tous les rangs inférieurs (pour cette raison, cette forme de récurrence est aussi appelée récurrence cumulative). On a une version plus forte de l'hérédité.

Soit $P(n)$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$, si :
i) $P(0)$ est vraie ;
ii) Pour tout entier naturel n, on a $[\forall k \leq n, P(k)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie$]$.
Alors pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.

L'initialisation reste identique, mais l'hérédité est modifiée. Pour démontrer la propriété au rang $n+1$, on peut supposer la propriété vraie non seulement pour n mais aussi pour tous les entiers inférieurs à n.

Donnons quelques exemples à propos.
Exemples.

Montrer que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

Soit $n \geq 2$ un entier, pour $n = 2$ le résultat est immédiat. Supposons que le résultat est vrai jusqu'au l'ordre n et montrons le pour le rang $n+1$. Si $n+1$ est premier, on a bien le résultat car $n+1 \mid n+1$, sinon $n+1$ est composé i.e. il existe $2 \leq a \leq n$ tel que $a \mid n+1$, puisque $a \leq n$ alors, il existe un nombre premier p divisant a, a étant un diviseur de $n+1$, on alors p divise $n+1$. Ce qui achève la récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, le réel H_n ne peut pas être un entier naturel.

On a $H_2 = \dfrac{3}{2}$ et $H_3 = H_2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ il existe P_n, Q_n avec P_n impair et Q_n pair et tels que $H_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$, ce qui permettra de conclure. Pour $n = 2$, le résultat est vérifié. Supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre n et montrons le pour le rang $n+1$. On a

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} = \frac{P_n}{Q_n} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)P_n + Q_n}{(n+1)Q_n}$$

Si $n+1$ est impair, on prend $P_{n+1} = (n+1)P_n + Q_n$ et $Q_{n+1} = (n+1)Q_n$ et on achève la récurence. Sinon si $n+1$ est pair, on peut poser $n+1 = 2m$, on a alors

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= H_{2m} \\ &= \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{H_m}_{P_m/Q_m} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1}}_{\frac{K}{2L+1}} \\ &= \frac{P_m}{2Q_m} + \frac{K}{2L+1} \\ &= \frac{(2L+1)P_m + 2KQ_m}{2(2L+1)Q_m} \end{aligned}$$

Sachant que $(2L+1)P_m + 2KQ_m$ (resp. $2(2L+1)Q_m$) est impair (resp. pair) on obtient le résultat.

2.2- Propriétés relatives à l'ordre dans $\mathbb{N}$

Proposition. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Démonstration. Malgré que cette proposition semble évidente, sa démonstration ne l'est pas. Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$, et soit B l'ensemble des minorants de A, alors $0 \in B$. L'ensemble A étant non vide, soit alors $a \in A$, alors $a+1$ n'est pas minorant de A. Donc $a+1 \notin B$. On en déduit que $B \neq \mathbb{N}$, donc d'après l'axiome de récurrence il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \in B$ et $n_0 + 1 \notin B$. On va montrer que n_0 est le plus petit élément de A. Puisque $n_0 \in B$, alors n_0 est un minorant de A, par suite pour tout $x \in A$, on a $x \geq n_0$. Il suffit donc de montrer que $n_0 \in A$. Supposons par absurde que $n_0 \notin A$. Donc pour tout $x \in A$, on a $x > n$, i.e. pour tout $x \in A$, on a $x \geq n_0 + 1$. Donc $n_0 + 1 \in B$, et ceci contredit ce qui précède. En conclusion, toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

➛ *Cette propriété est d'une importance capitale, on verra par la suite un exemple d'application.*
Exemples

Montrer que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

Soit $n \geq 2$ un entier. Notons D_n l'ensemble des diviseurs de n qui sont différents de 1, $D_n = \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n,\ d \neq 1\}$. L'ensemble D_n est non vide puisque n divise n, l'ensemble D_n étant une partie de $\mathbb{N}$, il admet alors un plus petit élément qu'on notera p. Montrons que p est nombre premier. Supposons que p admet un diviseur q, $1 < q < p$, alors q divise n par transitivité. Il vient que $q \in D_n$. Donc $q \geq p$ par construction de p. Et cela contredit le fait que q est compris entre 2 et $p-1$.

Proposition. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Démonstration. Soit A une partie de $\mathbb{N}$ non vide majorée de $\mathbb{N}$. Soit B l'ensemble des majorants entiers de A , B est non vide. L'ensemble B étant une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus petit élément noté n_0. Si $n_0 = 0$, alors $A = \{0\}$ admet un plus grand élément. Si $n_0 \geq 1$, alors $n_0 - 1 \notin B$. n_0 est un majorant de A, donc pour tout $x \in A$, on a $x < n_0$. Par suite, pour tout $x \in A$, on a $x \leq n_0 - 1$, donc $n_0 - 1 \in B$, ce qui n'est pas possible. En conclusion, toute partie de $\mathbb{N}$ non vide majorée admet un plus grand élément.

2.2.1 Maximum, minimum d'une partie de $\mathbb{Z}$

Si A une partie de $\mathbb{Z}$, on note $-A$ l'ensemble $-A = \{-x \mid x \in A\}$. On remarque que $\max(-A) = -\min A$ et que $\min(-A) = -\max A$.
Soit A une partie de $\mathbb{Z}$ minorée, alors A admet un plus petit élément. On remarque aussi que si $K = \max A$, alors $K+1 \notin A$, et que si $K = \min A$, alors $K-1 \notin A$. Voyons par la suite des exemples.
Exemples.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$2^n \leq x < 2^{n+1}$$

On pose $A = \{p \in \mathbb{N} \mid 2^p \leq x\}$. On a $2^0 = 1 \in A$, donc $0 \in A$, par suite A est non vide. L'ensemble A est une partie de $\mathbb{N}$ majorée par x car $p \leq 2^p \leq x$, elle admet par conséquent, un plus grand élément $p = \max A$. On va démontrer que p est l'entier qu'on cherche. Puisque $p \in A$ le maximum de A, alors $p+1 \notin A$. Il vient $2^p \leq x < 2^{p+1}$. Montrons que p est unique. Supposons l'existence d'un autre q vérifiant $2^q \leq x < 2^{q+1}$. Par transitivité, on obtient $2^q < 2^{p+1}$ et $2^p < 2^{q+1}$. La fonction $x \mapsto 2^x$ étant croissante sur $\mathbb{N}$, il vient $q < p+1$ et $p < q+1$, i.e. $q \leq p$ et $p \leq q$. Finalement $p = q$, d'où l'unicité de p.

2.2.2 Propriété d'Archimède

La propriété d'Archimède affirme que pour tout réel, il existe un entier qui est supérieur à ce réel.

En effet, soit x un réel. Si $x \leq 0$, alors 0 convient. Supposons maintenant que $x > 0$. Considérons l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$. Puisque $0 \in A$, alors A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ qui est majorée. Donc d'après les propriétés de $\mathbb{N}$, l'ensemble A admet un plus grand élément qu'on notera m. On a $m+1 \notin A$. Donc $m+1 > x$ et alors $m+1$ convient.

Nous verrons par la suite une propriété d'une importance capitale, *la densité* de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

2.2.3 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres rationnels est dense dans l'ensemble des nombres réels. Ainsi, entre deux réels distincts, il existe un nombre rationnel.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que : $x < y$. D'après la propriété d'Archimède il existe un $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{y-x} < q$. Donc $1 < qy - qx$, on en déduit qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $qx < p < py$, c-à-d : $x < \dfrac{p}{q} < y$, en posant $r = \dfrac{p}{q}$, on a $x < r < y$, ce qui permet de conclure.

➛ *On peut montrer à partir de ce résultat qu'entre deux réels distincts, il existe une infinité de nombres rationnels.*
➛ *En s'inspirant de cette démonstration, montrez que l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Ainsi entre deux nombres réels distincts, il existe toujours un nombre décimal.*

Voyons un corollaire de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, c'est la densité de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi entre deux réels distincts, il existe toujours un nombre irrationnel. En effet, soient alors $x, y \in \mathbb{R}$ tels que : $x < y$. D'après la propriété de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ on a l'existence d'un nombre rationnel r tel que $\dfrac{x}{\sqrt{2}} < r < \dfrac{y}{\sqrt{2}}$. Donc $x < r\sqrt{2} < y$. Puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *(Résultat déjà établi)* on a alors $r\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *(C'est simple par absurde)*. D'où le résultat.

2.3- La division euclidienne

Le théorème de la division euclidienne est à la base de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$. Il est d'une importance capitale, en effet il permet de fournir une relation entre deux entiers quelconques. Commençons par voir le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ qui est une conséquence des propriétés relatives à l'ordre dans $\mathbb{N}$

2.3.1 Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

> Soient a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$. Alors, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$, tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r \leq b - 1$. Déterminer le couple (q, r), c'est éffectuer la division euclidienne de a par b. L'entier q s'appelle le quotient de la division euclidienne de a par b. L'entier r s'appelle le reste de la division euclidienne de a par b.

Démonstration. Soit $A = \{p \in \mathbb{N} \mid pb \leq a\}$. On a $0 \in A$, donc A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide. De plus elle est majorée par a car $p \leq pb \leq a$. Elle admet donc un maximum qu'on notera q. Alors $q \in A$ et $q + 1 \notin A$, il vient $qb \leq a < (q + 1)b$ et par suite $0 \leq a - bq \leq b - 1$, on pose $r = a - bq$, on a alors $0 \leq r \leq b - 1$. D'où l'existence de (q, r). Passons à l'unicité. Soit (q_1, r_1) un couple vérifiant $a = bq_1 + r_1$. Sans perte de généralité, on suppose que $q \geq q_1$. Si $q > q_1$, alors $q - q_1 \geq 1$ et par suite $r_1 - r = b(q - q_1) \geq b$, mais $0 \leq r \leq r_1 \leq b$, donc $q = q_1$ et il vient $r_1 = r$. D'où l'unicité.

2.3.2 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

> Soient a un entier relatif et b un entier naturel non nul. Alors, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

Démonstration. Si $a \in \mathbb{N}$, c'est le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$. Si $a \in \mathbb{Z}^-$, alors $-a \in \mathbb{N}$, et d'après le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$, il existe $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $-a = qb + r$ avec $0 \leq r \leq b - 1$, il vient que $a = -bq - r$ où $0 \leq r \leq b - 1$, i.e. $a = (-q - 1)b + (b - r)$ et on a $0 \leq b - r < b$. Donc le couple $(-q - 1, b - r)$ convient.

➛*Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$, alors n divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par n est nul.*

2.3.3 Cardinal d'un ensemble fini

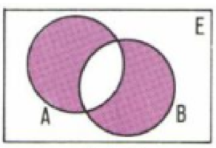
En mathématiques, la cardinalité est une notion de taille pour les ensembles. Lorsqu'un ensemble est fini, c'est-à-dire si ses éléments peuvent être listés par une suite finie, son cardinal est la longueur de cette suite, autrement dit il s'agit du nombre d'éléments de l'ensemble. En particulier, le cardinal de l'ensemble vide est zéro.

Pour un ensemble E fini, on désigne par $\mathrm{Card}(E)$ *le nombre des éléments de l'ensemble E.*

2.3.4 Principe d'inclusion exclusion

En combinatoire, le principe d'inclusion-exclusion permet d'exprimer le nombre d'éléments (ou cardinal) d'une réunion finie d'ensembles finis en fonction du nombre d'éléments de ces ensembles et de leurs intersections. Il se généralise en termes de probabilités. Il est attribué au mathématicien Abraham de Moivre, et connu également (lui ou sa version probabiliste) sous le nom de formule du crible de Poincaré, formule de Poincaré, ou formule du crible.
Soit E un ensemble de cardinal fini, et soient A et B deux parties de E, alors on a

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$



➛*Nous verrons une généralisation de cette formule dans la dernière section de ce cours, appelée formule du crible de Poincaré.*

2.4- Fonction partie entière

2.4.1 Partie entière inférieure

La notion de la partie entière a connu son apparition chez *Archimède d'Alexandrie* lors de la résolution de quelques problèmes arithmétiques. Notons que la notion de la partie entière faisait partie de l'ancien programme de mathématiques de la première année du lycée.
- La partie entière d'un nombre réel x est l'unique entier n qui vérifie

$$n \leq x < n+1$$

- La partie entière d'un réel x est noté $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.
- On appelle la différence : $x - \lfloor x \rfloor$ la partie rationnelle de x, on la note souvent $\{x\}$. Et on a $0 \leq \{x\} < 1$

Voyons quelques propriétés de la partie entière. On a pour tous $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$ si $x \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$ on a $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \epsilon$ avec $\epsilon \in \{0, 1\}$

2.4.2 Partie entière supérieure

On appelle partie entière sans excès ou partie entière supérieure de x l'unique entier n qui vérifie $x \leq n < x+1$ et on la note $\lceil x \rceil$.

Donnons des exemples d'application de la partie entière.
Exemples.

Soit x un réel, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Par une simple récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on montre les inégalités

$$n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

Alors

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$$

Donc

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Déterminer en fonction de $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, le nombre suivant

$$A = \sum_{k=2}^{n} \left\lfloor \frac{k+\sqrt{k}}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3+\sqrt{3}}{3} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{n+\sqrt{n}}{n} \right\rfloor$$

Soit $k \in \{2, ..., n\}$, on a

$$\left\lfloor \frac{k+\sqrt{k}}{k} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{\sqrt{k}}{k} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{\sqrt{k}}{k} \right\rfloor$$

Puisque $k \geq 2$, alors $0 < \dfrac{\sqrt{k}}{k} < 1$ et donc $\left\lfloor \dfrac{\sqrt{k}}{k} \right\rfloor = 0$, par suite $A = \underbrace{1 + ... + 1}_{n-1 \text{ fois}} = n - 1$.

Montrer que pour tout nombre réel x, on a

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

On pose $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, l'identité de l'énoncé est équivalente à $\lfloor 2r \rfloor = \left\lfloor r + \frac{1}{2} \right\rfloor$ où $r = \{x\}$. Deux cas se présentent, si $0 \leq r < 1/2$, alors $0 \leq 2r < 1$ et $0 < r + 1/2 < 1$, donc l'identité est vraie dans ce cas. Si $1/2 \leq r < 1$, alors $1 \leq 2r < 2$ et $1 \leq r + 1/2 < 2$, donc l'identité est vraie également dans ce cas.

Montrer que la fonction partie entière est croissante.

Soient x et y deus réels tels que $x < y$, on pose $\lfloor x \rfloor = n$, deux cas se présentent. Si $y < n + 1$, sachant que $y \geq n$, alors $n \leq y < n + 1$, par suite $\lfloor y \rfloor = n$ et donc $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$. Supposons maintenant que $y \geq n + 1$, donc $\lfloor y \rfloor \geq n + 1$ et par suite $\lfloor y \rfloor > \lfloor x \rfloor$. Dans tous les cas $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$ et donc la fonction partie entière est croissante.
➛ *Notons que la fonction partie entière n'est pas strictement croissante, bien-entendu, elle est constante sur chacun des intervalles $[k, k + 1[$ où k un entier relatif.*

3- Suites, sommes et produits

3.1- Suites

3.1.1 Généralités sur les suites

En mathématiques, une suite est une famille d'éléments — appelés ses « termes » — indexée par les entiers naturels. Une suite finie est une famille indexée par les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à un certain entier, ce dernier étant appelé « longueur » de la suite.

Lorsque tous les éléments d'une suite (infinie) appartiennent à un même ensemble E, cette suite peut être assimilée à une application de $\mathbb{N}$ dans E. On note souvent une suite : (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En particulier, on parle de suite « entière », suite « réelle » et suite « complexe », quand E est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, respectivement.

3.1.2 Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite dans laquelle chaque terme permet de déduire le suivant en lui ajoutant une constante appelée raison de cette suite.
Cette définition peut s'écrire sous la forme d'une relation de récurrence, pour chaque indice n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

D'après cette définition on peut déduire par une récurrence immédiate que le terme général de la suite (u_n) est donné par :

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r \text{ pour : } n_0 \leq n$$

En particulier pour $n_0 = 0$, on a :

$$u_n = u_0 + nr$$

On peut aussi trouver une forme de la somme des termes de la suite (u_n). En effet par une simple récurrence sur n, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(2u_0 + nr)$$

Cette formule permet de montrer le cas général pour $p \leq n$:

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = (n - p + 1)\frac{u_p + u_n}{2}$$

Exemples.

Calculez la somme suivante
$$S = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)$$

On remarque que la suite qui a pour terme géneral $(2n-1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique, donc
$$S = \frac{n}{2}(2 + (n-1)2) = n^2$$

3.1.3 Suites géométrique

En mathématiques, une suite géométrique est une suite de nombres dans laquelle chaque terme permet de déduire le suivant par multiplication par un facteur constant appelé raison (différent de 1). Ainsi, une suite géométrique a la forme suivante :
$$a, aq, aq^2, aq^3, ...$$

La définition peut s'écrire sous la forme d'une relation de récurrence, c'est-à-dire que pour chaque entier naturel n :
$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = qu_n$$

Comme pour les suites arithmétiques, d'après cette définition on peut montrez par une simple récurrence sur n que pour tout entier naturel n on a :
$$u_n = q^n a$$

On peut aussi trouver une forme de la somme des termes de la suite (u_n). En effet par une simple récurrence sur n, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_0 + u_1 + ... + u_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemples.

Soit $k \in \mathbb{N}$, pour tout $n \neq 1$ on a :
$$1 + n + ... + n^k = \frac{n^{k+1}-1}{n-1}$$
et pour n=1, on a :
$$1 + n + ... + n^k = k + 1$$

Si a, b, c, d sont des termes successifs d'une suite géometrique, montrez que
$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$$

On suppose la suite qui a pour termes a, b, c, d de raison r, on a alors : $b = ar$, $c = ar^2$ et $d = ar^3$:
$$\begin{aligned} LHS &= (ar - ar^2)^2 + (ar^2 - a)^2 + (ar^3 - ar)^2 \\ &= a^2[((r - r^2)^2) + (r^2 - 1)^2 + (r^3 - r)^2] \\ &= a^2[r^2 - 2r^3 + r^4 + r^4 - 2r^2 + 1 + r^6 - 2r^4 + r^2] \\ &= a^2(r^6 - 2r^3 + 1) = (a - ar^3)^2 \\ &= RHS \end{aligned}$$

On définit une suite (u_n) par
$$u_0 = 1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = 2u_n + 1$$
Trouvez le terme général de la suite (u_n) en fonction de n.

Soit n un entier naturel, on a

$$u_{n+1} + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1)$$

Ensuite on pose

$$v_n = u_n + 1$$

La détermination du terme général de la suite (v_n) permet de déduire celui de la suite (u_n), mais la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2, alors on a

$$v_n = 2^n v_0 = 2^n(u_0 + 1) = 2^{n+1}$$

On en déduit que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 2^{n+1} - 1$$

La réciproque est immédiate.

➛*La suite (u_n) est une suite arithmético-géometrique, on verra dans la suite de cette, comment on peut déterminer le terme général de ce type de suite.*

3.2- Suites arithmético-géometriques

En mathématiques, une suite arithmético-géométrique est une suite satisfaisant une relation de récurrence affine, généralisant ainsi les définitions des suites arithmétiques et géométriques.

On se place dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ quelconque, par exemple $\mathbb{R}$ (corps des réels) ou $\mathbb{C}$ (corps des complexes). Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite arithmético-géométrique s'il existe deux éléments a et b de $\mathbb{K}$ tels que la suite vérifie la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

3.2.1 Terme général

3.2.2 Cas $a = 1$

Pour le cas $a = 1$, on a affaire à une suite arithmétique, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nb$$

3.2.3 Cas $a \neq 1$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda = a\lambda + b$ i.e, $\lambda = \dfrac{b}{1-a}$. On remarque que

$$u_{n+1} - \lambda = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n - a\frac{b}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = a(u_n - \lambda)$$

Donc la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \lambda$$

est une suite géométrique, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a^n v_0$$

On en déduit que

$$u_n = a^n(u_0 - \lambda) + \lambda$$

On peut toujours ramener l'étude d'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ à celle d'une suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ en posant $v_p = u_{n_0+p}$. La suite (u_n) vérifie une relation de la forme ci-dessus pour tout $n \geq n_0$ si et seulement si la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

3.2.4 Somme des premiers termes

Si $a \neq 1$, toujours en posant $\lambda = b/(1-a)$, la somme des n premiers termes (de 0 à $n\breve{}1$) est

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = (u_0 - \lambda)\frac{1-a^n}{1-a} + n\lambda$$

3.3- Sommes

3.3.1 La notation $\sum$, propriétés des sommes

L'utilisation du symbole $\sum$ a connu son apparition avec les mathématiciens du XVIII ciecle, pour la facilité que présente celui-ci au niveau des manipulations des sommes.

Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la somme $u_0+u_1+...+u_n$ est noté : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, en général la somme : $u_p+u_{p+1}+...+u_n$ est noté : $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k$ pour $p\leq n$.
- La somme ne dépend pas de l'indice de sommation k.

Voyons quelques règles de calcul de sommes :

Considérons (u_n) et (v_n) deux suites, et λ,γ des constantes réelles, on a :

$$\sum_k \lambda u_k = \lambda\sum_k u_k$$

En général on a la propriété de linéarité :

$$\sum_k(\lambda u_k+\gamma v_k)=\lambda\sum_k u_k+\gamma\sum_k v_k$$

Exemples.

1. *Calculez les deux sommes suivantes,*

$$S_1=\sum_{k=0}^{n}(3^k+12k) \qquad S_2=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{77...7}_{k}$$

Par les propriétés des sommes,

$$S_1=\sum_{k=0}^{n}(3^n+12n)=\sum_{k=0}^{n}3^k+12\sum_{k=0}^{n}k=\frac{3^{n+1}-1}{2}+12\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$S_2=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{77...7}_{k}=7\sum_{k=1}^{n}\underbrace{11...1}_{k}=7\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k}10^i=7\sum_{k=1}^{n}\frac{10^{k+1}-1}{9}=\frac{7}{9}\sum_{k=1}^{n}(10^{k+1}-1)=\frac{7}{9}\sum_{k=1}^{n}10^{k+1}-\frac{7}{9}\sum_{k=1}^{n}1=7(\frac{10}{9}\sum_{k=1}^{n}10^k-\frac{n}{9})=7(\frac{10}{9}\frac{10^{n+1}-1}{9}-\frac{n}{9})=7(\frac{10^{n+2}-10}{81}-\frac{n}{9})=7\frac{10^{n+2}-9n-10}{81}.$$

3.3.2 Sommation par paquets

On a d'abord tout simplement :

$$\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=m}^{p}a_k+\sum_{k=p+1}^{n}a_k \text{ si : } m\leq p\leq n.$$

En général on a pour E,A,B des parties de $\mathbb{N}$ non vides telles que : $E=A\cup B$ avec $A\cap B=\emptyset$:

$$\sum_{k\in E}a_k=\sum_{k\in A}a_k+\sum_{k\in B}a_k$$

3.3.3 Sommes infinies

Soit (u_n) une suite de nombre réels. On appelle $\sum\limits_{p=0}^{\infty}u_p$ la somme infinie des termes de la suite (u_n), et on a

$$\sum_{p=1}^{\infty}u_p=u_1+u_2+u_3+...+u_n+...=\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n}u_p$$

Exemples.

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{3^p} = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{3^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/3^{n+1}-1}{1/3-1} = \frac{-1}{1/3-1} = \frac{3}{2}$$

3.3.4 Sommes télescopiques

Les sommes télescopiques apparaissent largement au monde olympique, en effet elles permettent de rendre plusieurs services. Elles sont à la base des démonstrations des formules concernant les suites arithmétiques et les suites géométriques.

On appelle somme télescopique toute somme qui prend la forme :

$$\sum_{k=n_0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$$

Et cette somme vaut exactement :

$$u_{n+1} - u_{n_0}$$

Essayons d'illustrer cette technique par les exemples et les exercices.
Exemples.

Calculez la somme suivante

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$$

Commençons par remarquer que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

On en déduit que la somme recherchée est une somme télescopique, d'ou

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

➛*En s'inspirant de cette méthode, essayez de trouver la valeur de la somme suivante*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Montrez que pour tout entier naturel non nul n, on a

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Il s'agit de montrer que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

On commence par remarquer que $k^2 \geq k^2 - k = k(k-1)$ c-à-d. $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k}$, d'où

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 - \frac{1}{n}$$

➛*Finissons par un exercice extrait de "l'olympiade de Syrie"*

Simplifiez la somme suivante,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}$$

Le dénominateur nous fait penser à l'identité de "Sophie Germain".

$$4a^4 + b^4 = (2a^2 + 2ab + b^2)(2a^2 - 2ab + b^2)$$

Et en écrivant

$$4k = (2k^2 + 2k + 1) - (2k^2 - 2k + 1)$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2-2k+1} - \frac{1}{2k^2+2k+1}$$

On remarque aussi que les deux expressions : $2k^2 - 2k + 1$ et $2k^2 + 2k + 1$ sont deux termes successifs de la suite de terme général : $u_n = 2n^2 - 2n + 1$. Or un télescopage donne :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1} = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1} = \frac{2n(n+1)}{2n^2+2n+1}$$

➛ *En remarquant que* $k.k! = (k+1)! - k!$, *simplifier*

$$S = \sum_{k=1}^{n} k.k!$$

3.4- Produits

Soient m et n deux entiers naturels, on a :

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times a_{m+1} \times ... \times a_n \text{ tel que : } m \leq n.$$

On a les propriétés suivantes de calcul des produits :

$$\prod_{k=m}^{n} a_k b_k = \prod_{k=m}^{n} a_k \times \prod_{k=m}^{n} b_k$$

En particulier on a :

$$\prod_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^{n} a_k$$

Exemples.

Soit $n \geq 2$, *montrez l'inégalité suivante*

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \geq \frac{1}{2}$$

On a

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \times \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

4- Éléments de combinatoire

Dans notre vie quotidienne, on a souvent besoin de compter les «événement», sachant que l'arrangement des objets est dans un certain ordre. Dans la combinatoire énumérative on aura besoin de compter des problèmes avancés sous certaines hypothèses, comme les deux problèmes suivants.
«De combien de façons on peut placer 5 garçons et 3 filles dans une rangée sachant que deux filles quelconques ne sont pas adjacentes»
«Combien y a t-il de possibilités pour diviser un groupe de 10 personnes en trois groupe, de 4, 3 et 2 personnes respectivement avec une personne rejeté»
On peut résoudre ces deux problèmes facilement en utilisant les permutations, avant d'introduire ces deux notions, donnons d'abord le principe d'addition.

4.1- Principe de l'addition

Supposons qu'il y a n_1 façons pour que l'événement E_1 soit réalisable, n_2 façons pour que l'événement E_2 soit réalisable,...,n_k façons pour que l'événement E_k soit réalisable avec $k > 1$. Si ces événements sont deux à deux disjoints, alors il y a $n_1 + n_2 + ... + n_k$ façons pour réaliser l'événement, (E_1 ou E_2 ou ... ou E_n). Donnons un exemple permettant d'appliquer ce principe.
Exemples.

Supposons que pour aller de la ville P à la ville Q il y a trois manières de faire cela, par l'air, la route, la mer. Supposons qu'il y a 3 façons pour voyager par l'air, 2 façons pour voyager par la route et 2 façons par la mer. Par le principe de l'addition, il y a 7 façons pour aller de la ville P à la ville Q.

Un énoncé équivalent, utilisant une terminologie théorique est le suivant. Soit k un entier naturel non nul. Soient $A_1, A_2, ..., A_k$ des ensembles finis. Si ces ensembles sont deux à deux disjoints, alors

$$\mid \bigcup_{i=1}^{k} A_i \mid = \mid A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \mid = \mid A_1 \mid + \mid A_2 \mid + ... + \mid A_k \mid = \sum_{i=1}^{k} \mid A_i \mid$$

Donnons un exemple à propos.
Exemples.

Trouver le nombre de pairs (x, y) tels que $x, y \in \mathbb{Z}$ et $x^2 + y^2 \leq 5$.

On peut diviser notre problème en 6 cas disjoints deux à deux, $x^2 + y^2 = 0, 1, ..., 5$. Pour $i \in \{0, 1, ..., 5\}$ on désigne par S_i l'ensemble

$$S_i = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 = i\}$$

On a alors $S_0 = \{(0, 0)\}$, $S_1 = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$, $S_2 = \{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}$, $S_3 = \emptyset$, $S_4 = \{(-2, 0), (2, 0), (0, -2), (0, 2)\}$, $S_5 = \{(1, 2), (1, -2), (2, 1), (2, -1), (-1, 2), (-1, -2), (-2, 1), (-2, -1)\}$. En appliquant le principe de l'addition, le nombre désiré est

$$\sum_{i=1}^{5} \mid S_i \mid = 1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 8 = 21$$

4.2- Principe de multiplication

Le principe de multiplication, appelé aussi le principe fondamental est à la base de nombreuses démonstrations combinatoires, on l'utilise souvent en dénombrement. Commençons d'abord par donner un cas particulier du principe de multiplication dans le cas de deux événements.

Supposons qu'un événement est décomposé en deux événement F et G et qu'il y a n possibilités pour réaliser F et qu'il y a m possibilités pour réaliser G. Alors il y a $n \times m$ possibilités pour réaliser E.
Démonstration. soient $f_1, f_2, ..., f_n$ les possibilités pour réaliser F et $g_1, g_2, ..., g_m$ les possibilités pour réaliser G, alors les possibilités pour réaliser E sont $(f_1, g_1), (f_1, g_2), ..., (f_1, g_m)$ et $(f_2, g_1), (f_2, g_2), ..., (f_2, g_m)$ et ...

$(f_n, g_1), (f_n, g_2), ..., (f_n, g_m)$. Il y a en total $n \times m$ possibilités pour réaliser E. Ce qui permet de conclure.

Le principe de multiplication peut être généralisé comme ce qui suit. Supposons qu'un événement E peut être décomposé en r événements $E_1, E_2, ..., E_r$ $(r \geq 1)$ et qu'on a

$$\begin{array}{c} n_1 \text{ façons pour réaliser l'événement } E_1 \\ n_2 \text{ façons pour réaliser l'événement } E_2 \\ \vdots \\ n_r \text{ façons pour réaliser l'événement } E_r \end{array}$$

Alors, le nombre total de façons pour réaliser l'événement E est

$$n_1 \times n_2 \times ... \times n_r = \prod_{i=1}^{r} n_i$$

Exemples.

> *Trouver le nombre de diviseurs positifs de* 600.

Notons d'abord que l'entier 600 possède une unique décomposition primaire, $600 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2$. Un diviseur d de 600 est donc de la forme $2^a \times 3^b \times 3^c$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 1$ et $0 \leq c \leq 2$. Donc le nombre de diviseurs positifs de 600 est le nombre de façons de former des triplets (a, b, c) avec les mêmes notations précédentes, qui est par le principe de multiplication égal à

$$4 \times 2 \times 3 = 24$$

➛*Dans l'exemple précédent on a utilisé le principe de l'addition et le principe de multiplication indépendamment. Souvent, en compétitions de mathématiques on utilise les deux à la fois pour résoudre un exercice. Donnons un exemple de ce type.*

> *Soient* $X = \{1, 2, ..., 100\}$ *et*
>
> $$S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in X, a < b, a < c\}$$
>
> *Trouver le nombre d'élément de* S.

On peut subdiviser notre problème en des cas disjoints en considérant $a = 1, 2, ..., 99$.
Pour $a = k \in \{1, 2, ..., 99\}$, le nombre de choix pour b est $100 - k$, même chose pour c. Donc d'après le principe de multiplication le nombre des triplets (k, b, c) (k étant fixé) est

$$1 \times (100 - k) \times (100 - k) = (100 - k)^2$$

Notons que k prend les valeurs $1, 2, ..., 99$, donc par le principe de l'addition on a

$$\mid S \mid = 99^2 + 98^2 + ... + 1$$

En utilisant la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ on obtient

$$\mid S \mid = \frac{1}{6} \times 99 \times 100 \times 199 = 328350$$

4.3- Coefficients binomiaux, arrangements

4.3.1 Arrangements

Dans le début de cette section on a donné un problème qui est le suivant «De combien de façons on peut placer 5 garçons et 3 filles dans une rangée sachant que deux filles quelconques ne sont pas adjacentes». Ce problème n'est qu'un cas particulier du problème qui suit.

Soit $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un ensemble de n éléments distincts. Pour $0 \leq r \leq n$, un $r-$arrangement de A est une façon d'arranger r éléments de A parmi les n éléments de A dans une rangée. Dans le cas particulier de $r = n$ un $n-$arrangement est dit tout simplement une permutation de A.
Soit $A = \{a, b, c, d\}$, tous les 3-arrangements de A sont

abc	acb	bac	bca	cab	cba
abd	adb	bad	bda	dab	dba
acd	adc	cad	cda	dac	dca
bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb

Il y a donc en total 24 arrangements de 3 éléments parmi 4 éléments.

Désignons par A_n^r le nombre des arrangements de r éléments parmi n éléments. Dans ce qui suit nous allons essayer de trouver une expression explicite de A_n^r en utilisant le principe de multiplication.
Un arrangement de r éléments parmi n éléments est formé en r étapes. Premièrement on choisit un élément parmi les éléments de A et on le pose dans la première case (Voir la figure). Ensuite pour la seconde case on choisit un élément parmi les $r-1$ éléments restants de A etc ... Pour la dernière case, il y a $n-r+1$ éléments restants de A.Il y a n choix possibles dans l'étape 1, $n-1$ choix possibles dans l'étape 2,...,$n-r+1$ choix possibles dans l'étape r. Donc d'après le principe de multiplication,

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Par convention on pose $0! = 1$.

➛*Notons que le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est* $A_n^n = n!$.

4.3.2 Coefficients binomiaux

Soit E un ensemble fini de cardinal n. On s'intéresse aux nombres de parties F de E de cardinal k où $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. Notons ce nombre qui dépend que de n et de k, C_n^k ou $\binom{n}{k}$. Soit F une partie de E à k éléments, on peut écrire $F = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ où les $a_i \in E$. La partie F peut s'écrire sous la forme $F = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. D'après ce qui précède, le nombre de façons pour obtenir le $k-$uplet $(a_1, a_2, ..., a_k)$ est A_n^k, mais remarquons que

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

En effet, pour toute permutation σ de $\{1, 2, ..., k\}$ on a $\{a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ..., a_{\sigma(k)}\} = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, mais en total il y a $k!$ permutation σ, donc le nombre de k-uplets est celui des parties à k éléments multiplié par $k!$ par le principe de multiplication, d'où la conclusion.

4.3.3 Permutations circulaires

Si on arrange n objets distincts autour d'un cercle, alors cette permutation est dite circulaire. Le nombre de permutations circulaires de n objets distincts est égal $(n-1)!$.
En effet, le nombre de permutations linéaires de n objets $o_1, o_2, ..., o_n$ est $n!$. Soit σ une permutation de $\{1, 2, ..., n\}$. Remarquons que la permutation circulaire $(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ..., a_{\sigma(n)})$ est $(a_{\sigma(n)}, a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n-1)})$, en général

$$(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ..., a_{\sigma(n)}) = (a_{\sigma(n)}, a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n-1)}) = ... = (a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, ..., a_{\sigma(1)})$$

Donc le nombre de permutations linéaires est celui des permutations circulaires multiplié par n. Donc, le nombre de permutations circulaires est $n!/n = (n-1)!$.

4.3.4 Binôme de Newton

Soient a et b deux nombres réels, et n un entier naturel non nul, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Si $b = 0$, on a bien sur la formule. Supposons $b \neq 0$, en divisant les deux membres de l'égalité par b^n, on trouve

$$(c+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c^k \qquad (*)$$

où $c = a/b$. Montrons par un argument combinatoire la formule $(*)$. Notons c_k le coefficient de c^k où $0 \leq k \leq n$ dans le développement de $(c+1)^n$. Nous obtenons c^k en effectuant $\underbrace{c \times c \times ... \times c}_{k}$, donc c_k est le nombre de manières de choisir k, $(1+c)$ parmi n, $(1+c)$ dans le produit $(1+c)^n$, il s'en suit que $c_k = \binom{n}{k}$. D'ou $(*)$.

4.4- Principe d'inclusion-exclusion

En combinatoire, le principe d'inclusion-exclusion permet d'exprimer le nombre d'éléments (ou cardinal) d'une réunion finie d'ensembles finis en fonction du nombre d'éléments de ces ensembles et de leurs intersections. Il se généralise en termes de probabilités.

Il est attribué au mathématicien Abraham de Moivre, et connu également (lui ou sa version probabiliste) sous le nom de formule du crible de Poincaré, formule de Poincaré, ou formule du crible.

Soit E un ensemble de cardinal fini, et soient A et B deux parties de E, alors on a

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

4.4.1 Formule du crible de Poincaré

Une généralisation de la formule cité précédemment est la suivante.

Soient $A_1, ..., A_n$ n ensembles finis. Nous avons

$$\mid \bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid = \sum_{i=1}^{n} \mid A_i \mid - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mid A_i \cap A_j \mid + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mid A_i \cap A_j \cap A_k \mid - ... + (-1)^{n-1} \mid \bigcap_{i=1}^{n} A_i \mid$$

Finalement, on donne une autre version du principe d'inclusion exclusion qui consiste à faire un passage complémentaire dans la formule précédente.

Soit S un ensemble fini, et soient $A_1, ..., A_n$ n parties de S. On désigne par $\overline{A}$ le complémentaire de A dans S, on a

$$\mid \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \mid = \mid S \mid - \sum_{i=1}^{n} \mid A_i \mid + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mid A_i \cap A_j \mid - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mid A_i \cap A_j \cap A_k \mid + ... + (-1)^n \mid \bigcap_{i=1}^{n} A_i \mid$$

exemples.

Déterminer le nombre d'entiers strictement positifs éléments de $\{1, 2, ..., 999\}$ qui ne sont divisibles ni par 7 ni par 5.

Soient $S = \{1, 2, ..., 999\}$ et $A_i = \{k : k \in S, \text{k est divisible par i}\}$ avec i=5,7. Il s'agit de calculer $\mid \overline{A_5} \cap \overline{A_7} \mid$. D'après le principe d'inclusion-exclusion avec complémentaire on sait que

$$\mid \overline{A_5} \cap \overline{A_7} \mid = \mid S \mid - \mid A_5 \mid - \mid A_7 \mid + \mid A_5 \cap A_7 \mid = 686$$

4.5- Principe de la valeur moyenne, principe des tiroirs

4.5.1 Principe de valeur moyenne

Le principe de la valeur moyenne affirme que la moyenne arithmétique de n réels est supérieur à l'un de ces réels est inférieur à un autre. Malgré que ce principe peut sembler évident mais il est très util en mathématiques olympiques.

Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres réels et

$$M = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

alors au moins, un des nombres $a_1, a_2, ..., a_n$ est plus grand ou égal M et un au moins de ces nombres est plus petit ou égal à M.

Exemples.

Supposons que les 10 nombres distincts de $\{1, 2, ..., 10\}$ sont sont rangés de façon arbitraire sur un cercle.
1. Montrez qu'il existe trois nombres successifs sur le cercle dont la somme ≥ 17.
2. La même question avec la somme ≥ 18.

1. Notons $a_1, a_2, ..., a_n$ les dix nombres sur le cercle. On a

$$M = \frac{(a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3 + a_4) + ... + (a_{10} + a_1 + a_2)}{10}$$

la moyenne des réels $(a_i + a_{i+1} + a_{i+2})_{1 \leq i \leq 10}$. D'autre part

$$M = \frac{3\sum_{i=1}^{10} a_i}{10} = \frac{3\sum_{i=1}^{10} i}{10} = 16,5$$

Donc l'un des réels $(a_i + a_{i+1} + a_{i+2})_{1 \leq i \leq 10}$ est supérieur à 16,5, donc supérieur à 17.
2. On suppose que $a_1 = 1$, on a

$$M' = \frac{(a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + a_9 + a_{10})}{3} = \frac{\sum_{i=1}^{10} i - 1}{3} = 18$$

D'où le résultat par le principe de la moyenne.

Supposons qu'il y a $n \geq 4$ points distincts dans le plan, et que chaque paire d'entre eux est liée par un segment. Si parmi toutes les longeurs de ces segments, seules $n + 1$ longueurs sont égales à d, montrer qu'il existe un point P tel qu'il y a au moins 3 segments se coupant en P dont les longueurs sont toutes égales à d

Pour tout point P_i, on note n_i le nombre de segments de longueur d dont l'extrémité est le point P_i. On a

$$\frac{\sum n_i}{n} = \frac{2(n+1)}{n} > 2$$

Donc il existe un indice i tel que $n_i > 3$, ce qui achève la démonstration.

Dans un plan, on donne quatre points tels que trois quelconques parmi ces quatre points ne sont pas alignés. Montrez qu'il existe au moins un triangle admettant trois de ces points comme sommets, et dont l'un des angles n'est pas aigu. éléments de l'ensemble. En particulier, le cardinal de l'ensemble vide est zéro.

On se donne quatre points A, B, C, D. Deux cas se présentent, soit l'un des points est à l'intérieur du triangle formé par les trois autres ; par exemple , D intérieur à ABC. Alors $\widehat{ADC} + \widehat{CBD} + \widehat{BDA} = 2\pi$. donc l'un de ces trois angles est supérieur ou égal à $2\pi/3$ par le principe de la valeur moyenne, d'où la conclusion. soit les points forment un quadrilatère convexe. Dans ce quadrilatère, la somme des angles au sommets est égale à 2π. Donc par le principe de la valeur moyenne l'un des ces angles.

4.5.2 Principe des tiroirs

En mathématiques, le principe des tiroirs de Dirichlet, affirme que si n chaussettes occupent m tiroirs, et si $n > m$, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette. Une autre formulation serait que m tiroirs ne peuvent contenir strictement plus de m chaussettes avec une seule chaussette par tiroir ; ajouter une autre chaussette obligera à réutiliser l'un des tiroirs.
Le principe des affirme que si on place n chaussettes dans m tiroirs alors un des m tiroirs contient au moins $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ chaussettes. En particulier si on place $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, alors il existe un tiroir contenant 2 chaussettes.

Essayons d'illustrer le principe des tiroirs par des exemples.
Exemples.

Montrez que pour tout ensemble de 10 points choisis à l'intérieur d'un carré de coté 3, il existe 2 points dans la longueur du segment dont les extrémités ces 2 points est au plus égale à $\sqrt{2}$.

Les 10 points sont placés dans 10 carreaux, donc d'après le principe des tiroirs il existe un carreau qui contient 2 points. A l'intérieur d'un carré de coté de longueur 1, la distance maximale entre deux points est $\sqrt{2}$, ce qui achève la démonstration.

(Maroc 2017) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0, i, j)$. On considère cinq points, les coordonnées de chacun d'eux sont des entiers naturels Montrez que, parmi ces cinq points, il existe au moins deux points qui forment un segment dont les coordonnées de son milieu, sont aussi des entiers naturels.

On raisonne sur les abscisses des 5 points, parmi ces 5 points, 3 points dont les abscisses ont la même parité ; parmi ces trois points il existe 2 points dont les ordonnées ont la même parité. Le milieu du segment dont les extrémités ces deux points est à coordonnées entières.

(Maroc 2006) On place 65 boules de couleurs et de tailles différentes dans deux urnes. Chaque boule est soit blanche soit rouge soit jaune et on suppose que chaque fois qu'on choisit 5 boules de même couleur il existe deux parmi ces boules, qui ont la même taille.
Montrez qu'il existe au moins 3 boules prises du même urne de même couleur et de même taille.

Puisque 65 boules sont placés dans deux urnes différentes, il existe donc une urne qui contient 33 boules ; ces boules sont coloriées par quatre couleurs différentes d'après le principe des tiroirs, il existe 9 boules qui sont coloriées par la même couleur, supposons qu'il sont coloriés en blanc. Soient $b_1, b_2, ..., b_9$ ces 9 boules, on pose $B = \{b_1, b_2, ..., b_9\}$ dans l'ensemble $B_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, par hypothèse il existe deux éléments b_1 et b_2 (sans perte de généralité) qui on la même couleur, ont montre de même que b_3 et b_4 ont la même couleur en considérant l'ensemble $B_2 = \{b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$, et aussi que b_5 et b_6 ont la même couleur en considérant l'ensemble $B_3 = \{b_5, b_6, b_7, b_8, b_9\}$. Dans l'ensemble $\{b_1, b_3, b_5, b_7, b_8\}$, il existe deux éléments qui ont la même couleur, si par exemple b_1 et b_7 ont la même couleur, c'est fini. Sinon on a forcément b_7 et b_8 ont la même couleur. De même on montre que b_7 et b_9 ont la même couleur en considérant l'ensemble $\{b1, b3, b5, b7, b9\}$. Finalement les boules $b7$, $b8$ et b_9 ont la même couleur.

Montrez que parmi six personnes, il y en a toujours trois qui se connaissent toutes entre elles ou trois qui ne se connaissent pas entre elles.

On commence par considérer une de ces personnes et on essaie de déduire quelque chose sur les personnes qu'elle connaît ou non. Il y a deux tiroirs, "connaît" ou "ne connaît pas", et cinq objets qui sont les cinq liens de la personne sélectionnée avec les cinq autres personnes. Ainsi, une personne donnée connaît au moins trois personnes ou ne connaît pas au moins trois personnes. Sans perte de généralité, on suppose que la personne sélectionnée connaît trois autres personnes. Si deux de ces trois personnes se connaissent alors on a fini en prenant ces deux personnes avec la première. Autrement ces trois personnes ne se connaissent pas entre elles et donc on a aussi terminé. Pour un exercice de ce genre, il est plus commode de représenter les personnes par six points sur une feuille et les liens "connaît" et "ne connaît pas" en reliant les différents points par des segments de deux couleurs. On veut ainsi montrer que, peu importe les couleurs que l'on donne aux quinze segments, il y a toujours un triangle dont tous les côtés ont la même couleur.

4.6- Invariants, mono-variants

Lorsque on est face à un problème qui met en jeu un algorithme, c'est à dire la répétition de certaines transformations, on essaye de trouver une grandeur qui se conserve.
Pour bien comprendre ce principe, il faut, comme souvent en mathématiques olympiques, voir plusieurs exemples.
Exemples.

On considère un échiquier 8×8 auquel nous avons enlevé la case en haut à gauche. Peut-on le paver avec des dominos ?

La réponse est non. Nous allons démontrer cela à l'aide du principe d'invariance. Un domino recouvre exactement deux cases de l'échiquier. Par conséquent, à chaque fois que nous posons un domino, la parité du nombre de case qu'il reste à paver ne change pas car si n est un entier, n et $n-2$ ont même parité. Or notre échiquier a 63 cases au début. Donc après chaque étape, il restera un nombre impair de case à recouvrir. A la fin du processus, il restera un nombre impair de case à recouvrir et comme 0 est pair, nous n'arriverons jamais à tout recouvrir.

On considère un échiquier 8×8 auquel nous avons enlevé les deux coins opposés comme le montre la figure ci-dessous. Peut-on paver cet échiquier avec des dominos ?

Dans ce cas, si on prend le même invariant que tout à l'heure, nous obtenons qu'à la fin, il est possible qu'il reste 0 case puisqu'on commence avec 62 cases. Toutefois, il ne faut surtout pas se dire que, parce que cet invariant est bon, nous pouvons créer un pavage qui répond à la question ! Nous allons même montrer qu'on ne peut pas paver cette figure. Cette fois, la démonstration est un peu plus subtile et l'invariant que l'on va considérer va passer par le coloriage de notre échiquier en cases blanches et noires. Vous remarquez que nous avons enlevé 2 cases blanches. Donc il nous reste 30 cases blanches et 32 cases noires. On remarque également que lorsqu'on pose un domino, il couvre nécessairement une case blanche et une case noire. Donc, si on appelle b le nombre de cases blanches et n le nombre de cases noires, 'a chaque étape, $b - n$ est conservé. C'est notre invariant. Comme au début $b - n = 2$, on obtient à la fin de notre pavage le même résultat. Donc il va forcément rester au moins 2 cases blanches qui ne seront pas recouvertes.

Ce qu'il faut retenir de ces deux exemples est que le principe d'invariant montre aisément que quelque chose est impossible mais qu'il n'est pas efficace pour montrer l'existence d'un objet. De plus, il est important de trouver le bon invariant pour résoudre un problème donné. Bien sûr, certaines fois plusieurs invariants peuvent mener à la solution. Parfois l'idée de l'invariant peut ne pas être suffisante pour résoudre un problème, cependant il existe un nouveau principe appelé «Principe de Mono-variance», c'est ce qu'on va découvrir par la suite.
Exemples.

> Une suite d'entiers naturels décroissante est nécessairement stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain ordre).

C'est trivial, si une suite d'entiers naturels commence à n et diminue à chaque étape, le processus ne peut certainement pas continuer pour plus de $n-1$ pas. Pourtant, malgré son apparente évidence, ce principe est peut-être le moyen le plus puissant pour nous de tirer des conclusions sur la façon dont un processus se comporte.

> Au Sénat de Kazakhstan, chaque membre a au plus trois ennemis. Un membre ne peut pas être ennemi de lui même et l'inimité est réciproque. Prouver que le Sénat peut être divisé en deux groupes telles que chaque sénateur à au plus un ennemi au sein de son groupe.

Premièrement, nous séparons les membres arbitrairement en deux groupes. Soit H la somme de tous les ennemis que tous les ennemis que chaque membre possède dans son propre groupe. Supposons un membre S a au moins deux ennemis dans son propre groupe. Alors le membre S change de groupe, H va diminuer puisque S ne possède que trois ennemis au plus en total. Laisser ce processus se poursuivre pour tous les membres dans la même situation que M. Remarquons que H est une suite d'entiers positifs décroissante, elle est donc stationnaire. À ce stade, aucun sénateur ne peut en avoir plus d'un ennemi dans sa propre faction, parce que sinon le processus (par définition) ne se serait pas terminé. Ainsi, nous avons trouvé la division souhaitée de Sénateurs.

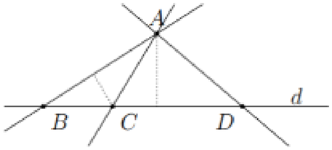
4.7- Principe de l'extremum

L'expression « élément extremum » signifie « élément maximum » ou « élément minimum ». Dans un ensemble ordonné E, un élément d'une partie A est le plus grand élément ou maximum de A, s'il appartient à A et est supérieur à tout autre élément de A. L'existence d'un maximum n'est en général pas assurée pour toute partie d'un ensemble ordonné. En revanche, sous condition d'existence, un tel élément est unique (ce qui justifie l'emploi de l'article défini « le » dans la définition). De manière analogue, le plus petit élément ou minimum est, s'il existe, un élément de A inférieur à tout autre élément de A.
Le principe de l'extremum est une heuristique qui consiste à considérer un objet pour lequel une certaine quantité associée est minimale ou maximale.
Donnons quelques exemples afin de bien comprendre le principe de l'extremum.
Exemples.

> On se donne n points du plan. On suppose que pour deux points quelconques distincts, il en existe un troisième aligné avec les deux premiers. Montrer que tous les points sont alignés.

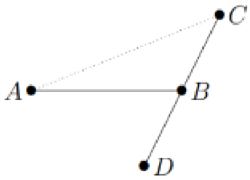
Pour chaque paire de points distincts, traçons la droite passant par ces deux points. Supposons par l'absurde que tous les points ne sont pas alignés. Autrement dit, tous les points ne sont pas sur une même droite. Il existe donc des distances entre les points et les droites qui sont strictement positives. Considérons donc le point et la droite qui ont la plus petite distance strictement positive. Appelons A ce point et d la droite. Par d, il passe par hypothèse au minimum trois points B, C et D, qu'on place comme sur la figure. Appelons d' la distance entre la droite (AB) et le point C, pour des raisons géometrique on a $d' < d$, ce qui contredit la minimalité de la distance d.

On a $d < d'$ car $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{d'}{BC} = \dfrac{d}{AB}$ et $BC < AB$ car dans un triangle quelconque la plus grande longueur de ses côtés se situe en face du plus grand angle.



On se donne des points dans le plan tels que chaque point soit le milieu de deux autres. Montrer que les points sont en nombre infini.

On suppose par l'absurde qu'il n'y a qu'un nombre fini de points. On considère un couple de points (A, B) tel que la distance AB soit maximale. B est par hypothèse le milieu de deux points qu'on nommera C et D. On a alors $AC > AB$ ou $AD > AB$, ce qui contredit le caractère maximal de AB. Conclusion, les points sont bien en nombre infini.



4.8- Jeux

Dans cette section, nous donnerons plusieurs exemples sur les jeux et les stratégies gagnantes.
Exemples.

On dispose de 21 allumettes. Chacun à son tour, l'un des deux joueurs prend 1, 2 ou 3 allumettes. Celui qui prend la dernière allumette gagne. Déterminer celui des deux joueurs qui possède une stratégie gagnante.

Le premier joueur prend une seule allumette à son premier coup. Puis, à chaque coup suivant, si son adversaire vient de prendre a allumettes, il en choisit alors $4 - a$. Ainsi, après chacun de ses coups, le nombre d'allumettes prises augmente de 4. En particulier, le premier joueur prendra la 21^{eme}, et gagne ainsi la partie. C'est un exemple de stratégie basée sur le principe "si tu peux jouer, alors je pourrais jouer après toi". Dans un jeu qui doit nécessairement s'arrêter, un joueur qui possède une telle stratégie est alors sûr de gagner, puisqu'il ne sera pas le premier à être bloqué... La difficulté est de trouver la façon adéquate de jouer : si l'exemple est ici assez simple, il peut ne pas paraître évident tout de suite qu'une bonne façon de jouer est de compléter à 4 ce qu'a fait son adversaire au coup précédent... Nous verrons ci-dessous une autre façon d'analyser la situation, qui rendra la solution trouvée plus naturelle.

On dispose d'un jeu complet de dominos. Deux joueurs jouent, chacun à son tour, selon la règle suivante : Le joueur choisit un domino parmi ceux non encore utilisés, et le place à l'une des extrémités de la chaîne déjà formée, de sorte que deux dominos adjacents aient toujours les mêmes numéros marqués sur leurs cases adjacentes. Le premier qui ne peut jouer perd. Déterminer celui des deux joueurs qui possède une stratégie gagnante.

On peut trouver une stratégie du même type pour le premier joueur, mais un peu plus subtile : Le premier joueur choisit le domino $(0,0)$. Alors, le second joueur est obligé de choisir un domino $(0,a)$ (qu'il peut évidemment placer en $(a,0)$) avec $a \neq 0$. Le premier joueur choisit alors le domino (a,a). Dans cette situation, on constate que l'on a la propriété suivante : pour tout entier k, le domino $(0,k)$ est encore disponible si et seulement si le domino (a,k) est encore disponible. De plus, le second joueur ne peut choisir un double. Donc, à partir de maintenant, si le second joueur choisit un domino, il est forcément de la forme $(0,k)$ ou (a,k) et le premier peut alors choisir à son tour suivant celui de ces dominos qui reste disponible, et le mettre à la suite du domino du second joueur. Ce faisant, le second joueur se retrouve dans une situation où la propriété ci-dessus est à nouveau vraie. En procédant ainsi, le premier joueur est sûr de ne pas être le premier bloqué et donc de gagner la partie.

a) Sur un tableau 2012×2012 formé exclusivement de cases blanches, Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice commence par noircir la case en haut à gauche. Bob doit alors noircir une case non encore noircie et adjacente (i.e. ayant un côté commun) à celle que vient de noircir Alice. Puis c'est au tour d'Alice de jouer, et de noircir une case blanche adjacente à la case précédemment noircie par Bob, et ainsi de suite. Lorsqu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu. Déterminer lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante.
b) Et s'ils jouaient sur un tableau 2011×2011 ?

a) Là encore, on peut trouver une stratégie de ce type, mais pour le second joueur. Celui-ci doit imaginer que le tableau est pavé par des dominos, ce qui possible puisqu'il y a un nombre pair de cases. Un tel pavage étant fixé une fois pour toutes, la stratégie de Bob est alors très simple : il "complète" à chaque fois le domino que vient juste de commencer à colorier Alice. Ainsi, à son premier coup, il colorie la case qui forme un domino avec la case en haut à gauche. Alice est alors obligée de noircir une case d'un domino non encore utilisé, ce qui laisse à Bob la possibilité de compléter à nouveau le domino à son prochain coup. À chacun de ses coups, Alice est alors obligée "d'ouvrir" un domino, pour autant qu'elle puisse jouer, et laisse à Bob la possibilité de jouer en le complétant. S'il adopte cette stratégie, c'est donc Alice qui va être bloquée la première, et Bob qui va gagner la partie.
b) Cette fois, c'est Alice qui possède une stratégie gagnante : c'est exactement la même qu'au a), mais en ne considérant que le pavage du tableau dont on a éliminé la case en haut à gauche (il est facile de vérifier qu'une fois cette case éliminée, un tel pavage existe puisque $2011 - 1 = 2010$ est pair).

Partant de 0, Alice et Bob ajoutent chacun leur tour à la quantité en cours un nombre de leur choix parmi $\{1, 2, ..., 10\}$. Celui qui atteint 100 gagne. Qui a une stratégie gagnante ?

C'est Alice, qui commence, qui a une stratégie gagnante. Pour le prouver, on va étudier les positions (i.e. les quantités obtenues) gagnantes de ce jeu : Clairement, 100 est perdante (le jeu vient de se terminer par la victoire de l'adversaire...). Et donc, les quantités 90, 91, ..., 99 sont gagnantes (un joueur qui part d'une telle quantité gagne à son prochain coup). Par suite, 89 est perdante, puisque le joueur qui doit alors jouer laissera une quantité égale à l'un des nombres 90, 91, ..., 99. Comme ci-dessus, on en déduit que 79, 80, ..., 88 sont gagnantes. Puis, que 78 est perdante. Et ainsi de suite, on vérifie facilement que les positions perdantes sont de 11 en 11, à savoir 100, 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1. Puisque 1 est perdante, Alice commence par choisir 1, laisse donc une position perdante à Bob, et assure alors sa victoire en pouvant rester à chaque coup sur des positions gagnantes.

On place un jeton sur la case C1 d'un échiquier classique. Deux joueurs le déplacent à tour de rôle, en respectant la règle suivante : à chaque tour, on peut déplacer le jeton d'autant de cases que l'on veut, mais au moins une, soit vers la droite, soit vers le haut soit en diagonale vers la droite et vers le haut. Celui des deux joueurs qui amène le jeton en H8 gagne. Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Si le jeton est au départ en C1, c'est le premier joueur qui possède une stratégie gagnante. En fait, pour toute case de départ, via une analyse des positions, on peut déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante : la case H8 est perdante puisque le joueur qui doit jouer alors que le jeton est dans cette case vient juste de perdre... Du coup, toutes les cases de la ligne numéro 8 ou de la colonne H ou de la diagonale A1-H8 sont des positions gagnantes. Mais alors, les positions F7 et G6 sont perdantes puisqu'un joueur qui doit jouer à partir d'une telle case met forcément le jeton sur une des cases gagnantes ci-dessus. On en déduit que toutes les cases non encore déterminées dans les colonnes, lignes ou diagonales respectives de ces deux cases sont gagnantes. Comme ci-dessus, cela entraîne que les cases C5 et E3 sont perdantes. De même, les cases non encore déterminées dans les lignes, colonnes ou diagonales respectives de ces deux cases sont alors gagnantes. Par suite, les cases A4 et D1 sont perdantes, et les autres sont gagnantes. En particulier, la case C1 est gagnante. Donc, le premier joueur possède une stratégie gagnante, décrite ci-dessus : son premier coup consiste à amener le jeton en D1 (ou C5) qui est perdante puis, selon le coup du second joueur à amener à chaque fois le jeton dans des positions perdantes.

> Sur la table se trouvent 1999 jetons. Tour à tour, Albert et Barbara doivent enlever au moins un jeton et au plus la moitié des jetons restants au moment où ils jouent. Le joueur qui laisse un unique jeton sur la table perd la partie. C'est Albert qui commence. Déterminer lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante et décrire une telle stratégie.

C'est Albert qui possède une stratégie gagnante. Analysons les positions : Clairement, 1 est gagnante (puisque le joueur qui doit jouer vient de gagner la partie...), et 2 est perdante car celui qui doit jouer est obligé de laisser un seul jeton et perd la partie. On en déduit que 3 et 4 sont gagnantes (le joueur peut laisser 2 jetons et donne ainsi une position perdante à son adversaire). Du coup, 5 est perdante car le joueur doit alors laisser 3 ou 4 jetons, et donne alors une position gagnante à son adversaire. Cela entraîne que 6, 7, 8, 9, 10 sont gagnantes (le joueur laisse alors 5, qui est perdante), mais que 11 est perdante (le joueur est obligé de laisser 6, 7, 8, 9 ou 10 qui sont gagnantes). Afin d'éviter de tout faire à la main, il est judicieux de prendre un peu de hauteur. Pour cela, on constate que si k est perdante alors $k+1, k+2, ..., 2k$ sont gagnantes (le joueur laisse alors k, dont on vient de dire qu'elle était supposée perdante), et $2k+1$ est perdante (le joueur est obligé de laisser $k+1, k+2, ..., 2k-1$ ou $2k$, qui sont gagnantes). Cela permet de déterminer les positions perdantes (et les positions gagnantes) de proche en proche, mais plus rapidement... Ainsi, les positions perdantes sont 2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, 1535, 3071, ... Et donc, 1999 est gagnante, ce qui conclut.

> Une plaquette de chocolat est un rectangle de $m \times n$ carrés-unité. Seul le carré en bas à gauche est empoisonné. A tour de rôle, Achille, en premier, et Béatrice découpe la plaquette selon la règle suivante : on choisit un carré c et prend tout le rectangle dont c est le coin inférieur gauche (il se peut que certains des carrés de ce rectangle aient déjà été pris auparavant). Évidemment, celui des deux qui prend le carré empoisonné perd. Quel est celui qui a une stratégie gagnante ?

Il est évident que si $m = n = 1$, le premier joueur va perdre... On suppose donc que $m \geq 2$ ou $n \geq 2$. Clairement, nous sommes face à un jeu pour lequel le théorème de Zermelo s'applique. L'un des deux joueurs possède donc une stratégie gagnante. Par l'absurde : supposons que ce soit Béatrice. Si Achille choisit le carré situé en haut et à gauche, il laisse la plaque quasi entière à Béatrice qui, à partir de cette position, possède une stratégie qui va lui assurer la victoire. En particulier, selon cette stratégie, Béatrice va choisir un carré c et découper le "rectangle" correspondant. On note qu'à ce rectangle il manque en fait exactement le carré choisi par Achille pour être complet. Mais alors, Achille pourrait dès le départ choisir le carré c et découper le rectangle tout entier, et laisser ainsi Béatrice dans la position exacte dans laquelle luimême se trouvait selon sa première option. Il n'a alors plus qu'à suivre la stratégie gagnante de Béatrice pour gagner lui-même, privant ainsi celle-ci de la victoire qu'elle était assurée d'obtenir, ce qui est absurde. Ainsi, Béatrice n'a pas de stratégie gagnante, et c'est donc Achille qui en possède une.

> Alice et Bob jouent aux échecs, mais en ayant le droit d'enchaîner deux coups par tour. C'est Alice qui commence. Prouver qu'elle peut s'assurer de ne pas perdre.

Qu'Alice soit assurée de ne pas perdre, c'est dire que Bob ne possède pas de stratégie gagnante. Par l'absurde : supposons que Bob ait une stratégie gagnante. Alors Alice commence par déplacer son cavalier de B1 en A3 et retour. C'est donc Bob qui doit jouer, comme s'il était le premier joueur. Or, puisque le second joueur possède une stratégie gagnante, Alice peut l'utiliser et donc s'assurer de battre Bob. Ainsi, Bob possède une stratégie gagnante mais est sûr de perdre. Contradiction. Donc, Bob n'a pas de stratégie gagnante, ce qui assure qu'Alice est sûre de pouvoir éviter de perdre.

> Soit $n > 0$ un entier. A tour de rôle, Alice et Bob écrivent au tableau un entier strictement positif et ne dépassant pas n. Aucun nombre n'est effacé, et il est interdit d'écrire un nombre qui divise un nombre déjà écrit au tableau. C'est Alice qui commence et le premier qui ne peut plus jouer perd la partie. Qui a une stratégie gagnante ?

C'est Alice qui possède une stratégie gagnante. Le raisonnement est très proche de celui de l'exercice précédent. D'après le théorème de Zermelo, nous savons que l'un des deux joueurs possède une telle stratégie. Par l'absurde : supposons que ce soit Bob. Si Alice écrivait 1, Bob écrirait alors un certain nombre k de façon à suivre sa stratégie et à assurer sa victoire. Mais alors, Alice peut directement écrire k, ce qui interdit à chacun des deux joueurs d'écrire ultérieurement 1, et laisse donc Alice dans la situation exacte où était Bob lorsqu'il suivait sa stratégie. En suivant cette même stratégie, Alice a donc assurer sa victoire, en contradiction avec notre hypothèse. Ainsi, Bob n'a pas de stratégie gagnante et, selon ce qui a été dit au départ, c'est donc qu'Alice en a une.