المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين

جهة الرباط - سلا - زمور - زعير

Concours d'accès au cycle de préparation à l'agrégation de Mathématiques

Session Juillet 2016

ÉPREUVE D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE

Durée 4 heures

Le sujet comporte 4 pages, en plus de cette page de garde.

Important

L'épreuve est constituée d'un problème en trois parties. Le candidat est invité à bien mentionner les références complètes de chaque question traitée.

Les candidats sont tenus à rendre deux copies séparées même si elles sont vierges. La première contenant la résolution des parties 1 et 2 et la seconde contenant celle de la partie 3. Dans chacune des deux copies on indiquera les références du candidat et le nombre d'intercalaires utilisés.

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la rigueur de votre raisonnement, de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la présentation de votre copie. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, il veillera toutefois à mentionner la référence du résultat utilisé.

Si le candidat repère ce qu'il pense être une erreur de l'énoncé, il le signale sur sa copie en expliquant les raisons qui l'ont amené à le penser. Ceci ne doit pas l'empêcher de finir son épreuve et il a le choix d'adopter les rectifications qu'il croit nécessaires ou pas.

Les calculatrices et tout matériel électronique ainsi que les documents sont interdits lors de cette épreuve.

✧ ✧ ✧ ✧

Notations et objet du problème

Toutes les matrices de l'énoncé sont à coefficients réels et, pour tout entier n strictement positif, on note $\mathscr{M}_n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n et $\mathscr{C}_n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices-colonnes à n coefficients.

L'espace $\mathscr{M}_1$ est identifié à $\mathbb{R}$ et la transposée d'une matrice M, quelque soit son format, est notée ${}^tM$.

On s'intéresse dans ce problème aux matrices carrées H dont les coefficients $h_{i,j}$ ne dépendent que de la somme $i+j$ de leur indice de ligne i et de leur indice de colonne j.

Pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ et tout entier strictement positif n, on note $H_\varphi^{(n)}$ la matrice carrée de $\mathscr{M}_n$ donnée par :

$$H_\varphi^{(n)} = \varphi\big(\ (i+j-2)\ \big)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} \varphi(0) & \varphi(1) & \cdots & \varphi(n-1) \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(n-1) & \varphi(n) & \cdots & \varphi(2n-2) \end{pmatrix}.$$

L'objet du problème est de préciser dans quels cas les matrices $H_\varphi^{(n)}$ définissent un produit scalaire, ce qui permet alors d'écrire leurs coefficients comme les moments d'une variable aléatoire discrète.

Les trois parties du problème sont relativement indépendantes les unes des autres.

Partie 1

Dans tout le problème n désigne un nombre entier non nul. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle .,. \rangle$, pour lequel la base canonique $\mathscr{B}_n = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est orthonormale.

On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\ker(h)$ et $\mathrm{Im}(h)$ désignent, respectivement, le noyau et l'image de h.

1. Justifier, sans calcul, que la matrice H est diagonalisable.

2. Justifier, sans les déterminer, que $\ker(h)$ et $\mathrm{Im}(h)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer $\ker(h)$ et $\mathrm{Im}(h)$.

4. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(h)$.

5. Dans cette question, $n \geq 3$ et on note φ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = (-1)^k(k+1)$$

On observera que $H_\varphi^{(3)}$ est la matrice H de la question précédente. Soit τ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \tau(k) = k+1.$$

On note h (resp. g) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_n$ est $H_\varphi^{(n)}$ (resp. $H_\tau^{(n)}$).

(a) Démontrer que les matrices $H_\varphi^{(n)}$ et $H_\tau^{(n)}$ sont semblables.

(b) Montrer que $\mathrm{Im}(g)$ est le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ engendré par les deux vecteurs :

$$\begin{cases} f_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \\ f_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k e_k \end{cases},$$

et donner la dimension de $\ker(g)$.

(c) Justifier la stabilité de F par g et démontrer que la matrice dans la base (f_1, f_2) de l'endomorphisme de F induit par g est :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{n(n-1)}{2} & \dfrac{n(n^2-1)}{3} \\ n & \dfrac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}.$$

(d) Déduire des résultats précédents le spectre de $H_\varphi^{(n)}$.

Tous les polynômes considérés dans la suite du problème sont à coefficients réels et, pour tout entier naturel p, on note E_p l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus p.

On considère une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, à laquelle on associe pour tout entier naturel non nul n les applications Δ_n et δ_n définies sur $E_n \times E_n$ et E_{2n} de la manière suivante.

— Pour tout polynôme $A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in E_n$ et tout polynôme $B = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j \in E_n$, on pose :

$$\Delta_n(A,B) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j \varphi(i+j).$$

— Pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k \in E_{2n}$ on pose : $\delta_n(Q) = \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi(k)$.

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

Partie 2

6. Vérifier que l'application Δ_n est une forme bilinéaire symétrique sur $E_n \times E_n$ et que δ_n est une forme linéaire sur E_{2n}.

7. Établir, pour tout élément (A,B) de $E_n \times E_n$, l'égalité :

$$\Delta_n(A,B) = \delta_n(AB).$$

8. Dans cette question, on note φ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = \frac{1}{k+1}$$

(a) Justifier, pour toute matrice-colonne $C = {}^t\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$ de $\mathscr{C}_n$, l'égalité :

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} c_i t^{i-1}\right)^2 \mathrm{d}t = {}^t C H_\varphi^{(n)} C.$$

(b) Déduire que, dans ce cas, Δ_n est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

9. Dans cette question, on considère un nombre entier naturel $d \geq 2$, $y_1, y_2, \dots, y_d$ des réels deux à deux distincts et une variable aléatoire réelle discrète Y, définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telle que

$$Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_d\} \text{ et pour tout } i \in [\![1,d]\!] : \mathbb{P}(Y = y_i) = p_i$$

$$\text{avec } p_i > 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{d} p_i = 1.$$

On se place alors dans le cas où la fonction φ est définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = \mathbb{E}(Y^k),$$

où $\mathbb{E}(Y^k)$ désigne l'espérance de la variable variable aléatoire Y^k.

(a) Pour tout polynôme $Q \in E_{2n}$, vérifier l'égalité : $\delta_n(Q) = \mathbb{E}(Q(Y))$.

(b) En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur n et d, pour que la forme bilinéaire Δ_n soit un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

La suite de l'épreuve est à rédiger séparément !

Partie 3

On dit qu'un polynôme P est positif s'il est distinct du polynôme nul et si $P(x)$ est positif ou nul pour tout réel x.

10. Montrer que l'ordre de multiplicité de toute racine réelle α d'un polynôme positif P est pair.

11. En utilisant sa décomposition en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, montrer que tout polynôme positif Q est somme de deux carrés de polynômes, c'est-à-dire qu'il existe un couple (A, B) de polynômes à coefficients réels, tels que $Q = A^2 + B^2$.

12. Montrer que Δ_n est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$ si et seulement si, pour tout polynôme positif P de E_{2n}, on a : $\delta_n(P) > 0$.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que la fonction φ vérifie l'égalité $\varphi(0) = 1$, $n \geq 2$, et on suppose que l'application Δ_n associée à φ est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

On note $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ une base orthonormale de E_n pour le produit scalaire Δ_n telle que

$$\deg(P_k) = k \text{ pour tout } k \in [\![0, n]\!].$$

13. Justifier l'orthogonalité de P_n avec tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

14. En déduire que P_n est scindé à racines simples. (ind. on pourra raisonner par l'absurde utiliser la question **12**).

On note $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ les n racines de P_n, réelles et distinctes deux à deux, d'après ce qui précède. On note :

$$L_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i} \quad \text{pour tout entier } k \in [\![1, n]\!].$$

15. Montrer que $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de E_{n-1} et calculer $\sum_{k=1}^{n} L_k$.

16. Soit $Q \in E_{2n-1}$.

(a) Justifier l'existence d'un couple $(A, R) \in E_{n-1} \times E_{n-1}$ tel que : $Q = P_n A + R$.

(b) Vérifier que : $\delta_n(Q) = \sum_{i=1}^{n} Q(\alpha_i)\delta_n(L_i)$.

17. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on pose : $p_k = \delta_n(L_k)$.

(a) Démontrer que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont strictement positifs et de somme égale à 1.

(b) Déduire de ce qui précède qu'il existe une variable aléatoire discrète Z définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, vérifiant la propriété :

$$\forall k \in [\![1, 2n-1]\!], \ \mathbb{E}(Z^k) = \varphi(k). \qquad (*)$$

18. Dans le cas où la fonction φ est définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \varphi(k) = \frac{1}{k+1},$$

déterminer le nombre minimal d_0 de valeurs prises par une variable aléatoire discrète Z vérifiant la propriété (*).