Fonctions et mesures

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On suppose que $\mu(\{x \in X, f(x) > 0\})$. Prouver qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\mu(\{x \in X, f(x) > \epsilon\}) > 0$$

On pose $E = \{x \in X, f(x) > 0\}$ et pour tout entier $n \geq 1$, on pose $E_n = \{x \in X, f(x) > \dfrac{1}{n}\}$. Alors $(E_n)_{n\geq 1}$ est une suite de parties mesurables de X et de plus on a $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1} E_n = E$, il s'en suit que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E) > 0$$

Donc, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $\mu(E_{n_0}) > 0$. On pose $\epsilon = 1/n_0$, il s'en suit qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\mu(\{x \in X, f(x) > \epsilon\}) > 0$$