Dénombrabilité de quelques ensembles

1. *Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que $\mathbb{N}^n$ est dénombrable.*
2. *En déduire que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
3. *(Cantor 1891) Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.*
4. *Soit E un ensemble dénombrable infini et, pour tout $e \in E$, soit X_e un ensemble dénombrable de cardinal au moins égal à 2. Montrer que $\prod\limits_{e \in E} X_e$ n'est pas dénombrable.*

   Soit X un ensemble infini dénombrable.
5. *Montrer que l'ensemble des parties finies de X est dénombrable.*
6. *En déduire que l'ensemble des parties de X n'est pas dénombrable.*

1. *Première méthode.* On va procéder par récurrence. On sait que $\mathbb{N}^2$ s'injecte dans $\mathbb{N}$ en considérant l'application qui à $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ associe $\dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q$. Il s'en suit que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Supposons que $\mathbb{N}^n$ est dénombrable pour un certain rang n. On a $\mathbb{N}^{n+1} = \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^n$ s'injecte dans $\mathbb{N}$ par hypothèse de récurrence, donc $\mathbb{N}^{n+1}$ s'injecte dans $\mathbb{N}^2$, mais $\mathbb{N}^2$ s'injecte dans $\mathbb{N}$ d'après ce qui précède. On en déduit que $\mathbb{N}^{n+1}$ s'injecte dans $\mathbb{N}$, autrement dit $\mathbb{N}^{n+1}$ est dénombrable. Le principe de récurrence permet de conclure.

   Seconde méthode. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère n nombres premiers $p_1, p_2, ..., p_n$, soit l'application ϕ de $\mathbb{N}^n$ vers $\mathbb{N}$ qui à $(a_1, ..., a_n)$ associe $\prod\limits_{i=1}^{n} p_i^{a_i}$. D'après le théorème fondamental de la théorie des nombres, l'application ϕ est injective, il s'en suit que $\mathbb{N}^n$ est dénombrable.
2. Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'ensembles dénombrables. Il s'en suit que pour tout $1 \leq i \leq n$, l'ensemble E_i s'injecte dans $\mathbb{N}$, puis en considérant l'application produit, l'ensemble $\prod E_i$ s'injecte dans $\mathbb{N}^n$, mais d'après ce qui précède, $\mathbb{N}^n$ s'injecte dans $\mathbb{N}$, donc par transitivité, $\prod E_i$ s'injecte $\mathbb{N}$, donc $\prod E_i$ est dénombrable.
3. Supposons que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ st dénombrable, i.e. $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ une bijection. Considérons l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \phi(n)\}$. Puisque ϕ est une bijection, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A = \phi(n_0)$. Deux cas se présentent, ou bien $n_0 \in \phi(n_0) = A$, ceci donne $n_0 \notin \phi(n_0)$ ce qui est contradictoire, ou bien $n_0 \notin \phi(n_0)$, donc $n_0 \in \phi(n_0)$ par construction de l'ensemble A, ce qui est également contradictoire. En conclusion, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
4. Supposons que $\prod\limits_{e \in E} X_e$ est dénombrable. Par hypothèse l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ s'injecte dans $\prod\limits_{e \in E} X_e$, mais $\prod\limits_{e \in E} X_e$ est dénombrable, ce qui implique que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est dénombrable, mais on sait que l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ possède la puissance du continu (Il est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$), ce qui n'est pas possible. En conclusion, l'ensemble $\prod\limits_{e \in E} X_e$ n'est pas dénombrable.

   On se ramène dans le cas où $X = \mathbb{N}$, le cas général se traite similairement.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X_n l'ensemble de parties de $\mathbb{N}$ à n éléments, puisque $X_n \subset \mathbb{N}^n$ alors X_n est dénombrable. L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, cette ensemble est dénombrable puisqu'il est réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.
6. Soit Y l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$, on a $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = X \cup Y$. Si Y est dénombrable, sachant que X est dénombrable, il en est de même pour $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ce qui est impossible, puisque $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ possède la puissance du continu.