المباراة العامة للعلوم والتقنيات 2012

موضوع الرياضيات

الأشكال الأربوعية الصحيحة في المستوى: دراسة وتطبيقات

تعاريف ورموز

1. التطبيقات الخطية في المستوى والمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية

- نرمز بـ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لمجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة الثانية $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ حيث α و β و γ و δ أعداد حقيقية .
- نرمز بـ $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ لمجموعة التطبيقات الخطية $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ التى من أجلها توجد أعداد حقيقية α و β و γ و δ بحيث ، لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$، لدينا:

$$f(x,y)=(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y)\ .$$

- نربط كل تطبيق خطى f من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ، معرف بـ

$$f(x,y)=(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y),\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

حيث α و β و γ و δ أعداد حقيقية، بالمصفوفة $M(f)$ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ المعرفة بـ $M(f)=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$.

- عكسيا، نربط كل مصفوفة $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بالتطبيق الخطى $f_A:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ المعرف بما يلى:

$$f_A(x,y)=(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y),\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2\ .$$

2. محددة ومنقول مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

- نربط كل مصفوفة $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بالمصفوفة ${}^tA=\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$ ونسمى ${}^tA$ بمنقول المصفوفة A .
- نسمى محددة المصفوفة $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ ، العدد الحقيقى الذى نرمز إليه بـ $\det A$ والمعرف بـ

$$\det A=\alpha\delta-\gamma\beta\ .$$

3. مقلوب مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية قابلة للقلب

- نُذَكِر أن عملية ضرب المصفوفات معرفة على $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\text{x}\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ كما يلى

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\alpha'+\beta\gamma' & \alpha\beta'+\beta\delta'\\ \gamma\alpha'+\delta\gamma' & \gamma\beta'+\delta\delta'\end{pmatrix}$$

وأن هذه العملية غير تبادُلِية .

- نرمز بـ I_2 للمصفوفة المعرفة بـ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، ونُذَكِر أن المصفوفة I_2 هي العنصر المحايد في مجموعة المصفوفات المربعة $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ، مزودة بعملية الضرب المعرفة أعلاه .
- لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. نقول أن A تقبل مقلوبا إذا وُجِدَت مصفوفة B من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ تحقق $AB = BA = I_2$.

نُذَكِر أن المصفوفة B إذا وُجِدَت فإنها وحيدة ؛ يرمز إليها بـ A^{-1} وتسمى مقلوب المصفوفة A .

نتـــائـــج مقبـــولـــة يمـــكن استعمـــالهـــا

أ- لتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. نقبل أن $\det(AB) = \det A \det B$ و أن ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

ب- لتكن $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ مصفوفة من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$، إذا وفقط إذا كان $\det A \neq 0$ ، وفي هذه الحالة لدينا:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} .$$

ج- لتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ تقبل كل واحدة منهما مقلوبا . نذكر أن المصفوفة AB تقبل هي الأخرى مقلوبا و أن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

الـــجـــزء الأول

نتـــائـج حـــول التطبـــيـقـــات الخطـــية

ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ معرفين بما يلي:

$$f(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y),\ \ g(x,y) = (\alpha' x + \beta' y, \gamma' x + \delta' y),\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

حيث α و β و γ و δ و α' و β' و γ' و δ' أعداد حقيقية .

1.1. ليكن λ عددا حقيقيا . نرمز بـ $\circ$ لتركيب تطبيقين .

1.1.1. بين أن التطبيقات λf و $f+g$ و $f \circ g$ عناصر من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ وأن المصفوفات المرتبطة بها تحقق:

$$M(\lambda f) = \lambda M(f),\ \ M(f+g) = M(f) + M(g),\ \ M(f \circ g) = M(f)M(g) .$$

2.1.1. بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}^2$ إذا وفقط إذا كان $\det M(f) \neq 0$ ، و بين في هذه الحالة أن f^{-1} ، التطبيق العكسي للتطبيق f ، هو كذلك تطبيق خطي ثم أعط تعبير $f^{-1}(x,y)$ لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ؛ حدد العلاقة بين $M(f)$ و $M(f^{-1})$.

2.1. ليكن e_1 و e_2 زوجين من $\mathbb{R}^2$ ، و λ و η عددين حقيقيين . بين أن $f(\lambda e_1 + \eta e_2) = \lambda f(e_1) + \eta f(e_2)$.

3.1. الهدف من هذه الفقرة هو أن نبرهن على أن : التطبيق f يحقق $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا كانت الأعداد α و β و γ و δ صحيحة نسبية و $\det M(f) = \pm 1$.

1.3.1. نفترض أن الأعداد α و β و γ و δ صحيحة نسبية وأن محددة المصفوفة $M(f)$ تحقق $\det M(f) = \pm 1$. بين أن التطبيق f يحقق $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$.

2.3.1. عكسيا ، نفترض أن التطبيق f يحقق $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$.

1.2.3.1. بين أن الأعداد α و β و γ و δ صحيحة نسبية واستنتج أن $\det M(f)$ عدد صحيح نسبي .

2.2.3.1. بين أنه يوجد زوجان u_1 و u_2 من $\mathbb{Z}^2$ بحيث $f(u_1) = (1,0)$ و $f(u_2) = (0,1)$ ، ثم بين أن الأسرة (u_1, u_2) أساس للمستوى المتجهي $\mathbb{R}^2$.

3.2.3.1. بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}^2$ وأن تطبيقه العكسي f^{-1} يحقق كذلك $f^{-1}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$.

4.2.3.1. بين أن المصفوفة $M(f)$ تحقق $\det M(f) = \pm 1$.

4.1. نضع $\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$ مجموعة التطبيقات الخطية f من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ التي تحقق $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ ، و $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ مجموعة التطبيقات الخطية f من $\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$ التي تحقق $\det M(f) = 1$. بين أن $(\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2), \circ)$ زمرة وأن $(\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2), \circ)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2), \circ)$.

الجـــــــزء الثـــــانـــــــي

الأشكـــال الاربـــوعـــية الصحـــيحة في المستـــوى المتجـــهي $\mathbb{R}^2$

- نقول أن تطبيقا $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ شكل أربوعي على المستوى المتجهي $\mathbb{R}^2$ إذا وجدت أعداد حقيقية a و b و c بحيث ، لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ، لدينا:

$$q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 .$$

تسمى الأعداد a و b و c معاملات الشكل الأربوعي q ونقول أن q **شكل أربوعي صحيح** إذا كانت معاملاتة أعدادا صحيحة نسبية .

نربط كل شكل أربوعي q بالمصفوفة $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ ونرمز إليها بالرمز M_q : $M_q = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$.

نسمي العدد $4ac - b^2$ مميز الشكل الأربوعي q ونرمز إليه بالرمز $d(q)$ ؛ ونذكر أن

$$4\det M_q = d(q) = 4ac - b^2 .$$

نقول أن الشكل الأربوعي q **معرف موجب** إذا كان q يحقق $q(x,y) > 0$ لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

- نرمز بـ $\mathcal{Q}$ لمجموعة الأشكال الأربوعية الصحيحة على $\mathbb{R}^2$ ، وبـ $\mathcal{Q}^+$ لمجموعة الأشكال الأربوعية من $\mathcal{Q}$ ، **المعرفة موجبة** .

1.2. **دراســـة بعـــــض الأمثـــلة**

1.1.2. بين أن الشكل الأربوعي q_1 المعرف على $\mathbb{R}^2$ بـ $q_1(x,y) = x^2 + y^2$ ، لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ، معرف موجب .

2.1.2. بين كذلك أن الشكل الأربوعي q_2 المعرف على $\mathbb{R}^2$ بـ $q_2(x,y) = x^2 + xy + y^2$ ، لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ، معرف موجب .

3.1.2. هل الشكل الأربوعي q_3 المعرف على $\mathbb{R}^2$ بـ $q_3(x,y) = x^2 - y^2$ ، لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ، معرف موجب ؟

2.2. **شــــرط لازم وكـــاف للأ شكـــال الأربـــوعية المعـــرفة مـــوجـبة**

ليكن q شكلا أربوعيا على $\mathbb{R}^2$ ، معرفا بـ

$$q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

حيث a و b و c أعداد حقيقية .

1.2.2. احسب $q(1,0)$ و $q(0,1)$ و $q(-b, 2a)$.

2.2.2. بين أنه إذا كان العدد a غير منعدم فإن لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$ لدينا:

$$q(x,y) = a\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2 + \frac{d(q)}{4a}y^2 .$$

3.2.2. استنتج أن الشكل الأربوعي q معرف موجب إذا وفقط إذا كان $a>0$ و $d(q)>0$.

3.2. ليكن $q:(x,y)\longmapsto ax^2+bxy+cy^2$ شكلا أربوعيا من Q^+ ، وليكن n عددا صحيحا طبيعيا . نعتبر المجموعة $E_q(n)$ ، ضمن $\mathbb{Z}^2$ ، المعرفة بـ $E_q(n)=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ \ q(x,y)=n\}$. بين أن $E_q(n)$ مجموعة منتهية .

4.2. ليكن f عنصرا من $\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$ و q عنصرا من $\mathcal{Q}^+$ حيث $f(x,y)=(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y)$ و $q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ ، لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$. نعتبر التطبيق $q'=q\circ f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$.

1.4.2. بين أن q' شكل أربوعي على $\mathbb{R}^2$.

لتكن a' و b' و c' أعداد حقيقية بحيث $q'(x,y)=a'x^2+b'xy+c'y^2$ لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$.

2.4.2. احسب المعاملات a' و b' و c' بدلالة α و β و γ و δ ومعاملات الشكل الأربوعي q ، وبين أنها أعداد صحيحة نسبية .

3.4.2. تحقق من أن $M_{q'}={}^tM(f)M_qM(f)$.

4.4.2. احسب $d(q')$ بدلالة $d(q)$ ثم بين أن الشكل الأربوعي q' ينتمي إلى المجموعة $\mathcal{Q}^+$.

5.2. نحتفظ بنفس المعطيات الواردة في السؤال 4.2. أعلاه .

1.5.2. بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n ، لدينا $E_{q'}(n)=f^{-1}(E_q(n))$ ، ثم استنتج أن المجموعتين $E_q(n)$ و $E_{q'}(n)$ لهما نفس عدد العناصر .

2.5.2. نرمز بـ $e(q)$ للقاسم المشترك الأكبر لمعاملات الشكل الأربوعي q ؛ بين أن $e(q')=e(q)$.

6.2. نعتبر المجموعة $\mathcal{L}^+(q,q')$ ، ضمن $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ ، المعرفة بـ $\mathcal{L}^+(q,q')=\{f\in\ \mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)\ ;\ \ q'=q\circ f\}$ حيث q و q' عنصران من $\mathcal{Q}^+$. بين أن $\mathcal{L}^+(q,q')$ مجموعة منتهية .

7.2. **علاقة تكافؤ في $\mathcal{Q}^+$**

ليكن q و q' عنصرين من $\mathcal{Q}^+$. نقول أن الشكل الأربوعي q' يكافئ الشكل الأربوعي q ، ونكتب $q\sim q'$ ، إذا وجد عنصر f من $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ بحيث $q'=q\circ f$ ؛ وبتعبير آخر ، q' يكافئ q إذا كانت المجموعة $\mathcal{L}^+(q,q')$ غير فارغة .

1.7.2. **العلاقة $\sim$ تكافئية**

بين أن $\sim$ تحقق الخاصيات التالية:

1.1.7.2. انعكاسية: أي أن لكل عنصر q من $\mathcal{Q}^+$ ، لدينا $q\sim q$.

2.1.7.2. تماثلية: أي أن لكل عنصرين q و q' من $\mathcal{Q}^+$ لدينا: $q\sim q'$ إذا وفقط إذا $q'\sim q$.

3.1.7.2. متعدية: أي أنه لكل مثلوث (q,q',q'') من عناصر المجموعة $\mathcal{Q}^+$ ، إذا كان $q\sim q'$ و $q'\sim q''$ فإن $q\sim q''$.

2.7.2. هل الشكلان q_1 و q_2 المعرفان في السؤال 1.2. أعلاه متكافئان ؟ علل جوابك .

إشارة : يمكن استعمال نتائج السؤال 4.4.2. أعلاه .

3.7.2. ليكن q و q' عنصرين متكافئين من المجموعة $\mathcal{Q}^+$ ؛ نفترض أن $q' = q\circ f$ حيث f عنصر من $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$. بين أن $\mathcal{L}^+(q',q') = \{f^{-1}\circ g\circ f \ ; \ g\in\mathcal{L}^+(q,q)\}$ ثم قارن عدد عناصر كل من المجموعتين $\mathcal{L}^+(q,q)$ و $\mathcal{L}^+(q',q')$.

4.7.2. ليكن q_1 الشكل الأربوعي المعرف بـ $q_1(x,y) = x^2+y^2$ ، لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$ و f_1 التطبيق الخطي من $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ المرتبط بالمصفوفة $M(f_1) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. نضع $q_4 = q_1\circ f_1$.

- تحقق من أن الشكلين q_1 و q_4 متكافئان ، ثم احسب $q_1(0,1)$ و $q_4(0,1)$.
- حدد عناصر المجموعة $E_{q_1}(2) = \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \ ; \ q_1(x,y)=2\}$ واستنتج عناصر المجموعة $E_{q_4}(2) = \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \ ; \ q_4(x,y)=2\}$.
- حدد عناصر كل من المجموعتين $\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \ ; \ q_1(x,y)=2\}$ و $\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \ ; \ q_4(x,y)=2\}$. هل لهذه المجموعتين نفس عدد العناصر ؟

الجزء الثالث

الأشكال الأربوعية الصحيحة المختصرة

تعريف: نقول أن $q:(x,y)\longmapsto ax^2+bxy+cy^2$ من $\mathcal{Q}^+$ شكل أربوعي مختصر إذا كانت معاملاته a و b و c تحقق ما يلي:

- $|b|\le a\le c$ ؛
- وإذا كان $|b|=a$ أو $a=c$ فإن $0\le b$.

أمثلة: نعتبر الأشكال الأربوعية q_1 و q_2 و q_5 المعرفة بـ

$$q_1(x,y)=x^2+y^2, \qquad q_2(x,y)=x^2+xy+y^2, \qquad q_5(x,y)=3x^2-2xy+y^2$$

لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$. لاحظ أن الشكلين q_1 و q_2 مختصران ، وأن الشكل q_5 غير مختصر.

1.3. ليكن q شكلا أربوعيا مختصرا من $\mathcal{Q}^+$ معرفا بـ $q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ ، لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$.

1.1.3. بين أن $a\le\sqrt{\frac{d(q)}{3}}$ و أن $\frac{\sqrt{d(q)}}{2}\le c\le\frac{d(q)}{3a}$.

2.1.3. ادرس حالات التساوي في كل من المتفاوتات الثلاث السالفة .

2.3. ليكن q شكلا أربوعيا مختصرا من $\mathcal{Q}^+$ معرفا بـ $q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ ، لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$. نذكر أن $4aq(x,y)=(2ax+by)^2+d(q)y^2$ لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$.

1.2.3. تحقق من أن المجموعة $\{q(x,y) \ ; \ (x,y)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{(0,0)\}\}$ تقبل عنصرا أصغر نرمز إليه بـ m . حدد قيمة m وأوجد جميع الأزواج (x,y) من المجموعة $\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{(0,0)\}$ التي تحقق $m=q(x,y)$.
إشارة: يمكن دراسة الحالات الثلاث $a=b=c$ ؛ $a=c$ و $b=0$ ؛ $a\neq c$.

2.2.3. تحقق من أن المجموعة $\{q(x,y) \ ; \ (x,y)\in\mathbb{Z}\text{x}(\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\})\}$ تقبل عنصرا أصغرا نرمز إليه بـ m_1 . حدد قيمة m_1 وأوجد جميع الأزواج (x,y) من المجموعة $\mathbb{Z}\text{x}(\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\})$ التي تحقق $m_1=q(x,y)$.

3.3. **تعريف:** ليكن q شكلا أربوعيا من $\mathcal{Q}^+$ معرفا بـ $q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ ، لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$. نرمز بـ $C(q)$ لمجموعة الأشكال الأربوعية من $\mathcal{Q}^+$ التي تكافئ الشكل q

$$C(q)=\{q'\in\mathcal{Q}^+ \ ; \ q'\sim q\} .$$

تسمى المجموعة $C(q)$ صنف تكافؤ الشكل q .

الهدف من الأسئلة الموالية هو أن نبين أن كل شكل أربوعي q يكافئ شكلا أربوعيا مختصرا ، وبتعبير آخر أن كل صنف التكافؤ $C(q)$ يحتوى على شكل أربوعي مختصر .

1.3.3. ليكن (x_0, y_0) عنصرا من المجموعة $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ يحقق $q(x_0, y_0) = m$ ، حيث m العنصر الأصغر من المجموعة $\{q(x,y) \ ; \ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$. بين أن العددين x_0 و y_0 أوليان فيما بينهما ثم استنتج أنه يوجد عددان صحيحان نسبيان u و v يحققان $ux_0 - vy_0 = 1$.

2.3.3. نعتبر التطبيق الخطي f_0 من $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ المرتبط بالمصفوفة $\begin{pmatrix} x_0 & v \\ y_0 & u \end{pmatrix}$. بين أن الشكل الأربوعي $q' = q \circ f_0$ يكافئ الشكل q ، وأن معاملاته a' و b' و c' تحقق $a' = m$ و $a' \leq c'$.

3.3.3. تحقق أنه يوجد عدد صحيح طبيعي n بحيث $-m < b' + 2mn \leq m$.
نعتبر التطبيق الخطي g_n من $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ المعرف بـ $g_n(x,y) = (x + ny, y)$ ، لكل زوج (x,y) من $\mathbb{R}^2$.
بين أن الشكل الأربوعي $q'' = q' \circ g_n$ يكافئ الشكل q ، وأن معاملاته a'' و b'' و c'' تحقق $a'' = m$ و $a'' \leq c''$ و $|b''| \leq m$ ، وأن $|b''| = m$ إذا وفقط إذا كان b'' يساوي m .

4.3.3. س نحتفظ بنفس المعطيات الواردة في السؤال 3.3.3. أعلاه .

1.4.3.3. نفترض أن $|b''|$ يساوي m ؛ بين أن q'' شكل أربوعي مختصر .

2.4.3.3. نفترض أن $m = c''$ و $b'' < 0$ ؛ بين أن $q''' : (x,y) \longmapsto q''(y, -x)$ شكل أربوعي مختصر وينتمي إلى صنف التكافؤ $C(q)$.

4.3. نستنتج من خلال ما سبق أنه يوجد شكل أربوعي مختصر يكافئ الشكل q ؛ بين أن هذا الشكل المختصر وحيد .

5.3. **تـــطبيـــقات**

1.5.3. اوجد الشكل الأربوعي المختصر المكافئ للشكل q_6 المعرف بـ $(x,y) \longmapsto 11x^2 + 7xy + 4y^2$.

2.5.3. أجب على نفس السؤال بالنسبة للشكل q_7 المعرف بـ $(x,y) \longmapsto 2x^2 + 10xy + 13y^2$.

6.3. بين أن مميز كل شكل أربوعي يوافق 0 أو 3 بترديد 4 ، ثم حدد جميع الأشكال الأربوعية المختصرة التي مميزها أصغر أو يساوي 12 .
إشارة : يمكن استعمال المتفاوتات الواردة في السؤال 1.1.3. .

7.3. ليكن $q : (x,y) \longmapsto ax^2 + bxy + cy^2$ شكلا أربوعيا مختصرا ؛ حدد ، حسب المعاملات a و b و c ، جميع المصفوفات المرتبطة بعناصر المجموعة $\mathcal{L}^+(q,q)$.
إشارة: يمكن دراسة الحالات الثلاث $a = b = c$ ؛ $a = c$ و $b = 0$ ؛ $a \neq c$.

8.3. ليكن q شكلا أربوعيا من $\mathcal{Q}^+$ و m عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم ؛ نفترض أنه يوجد عددان صحيحان x و y يحققان $m = q(x,y)$ ؛ نقول أن $m = q(x,y)$ كتابة فعلية للعدد m بواسطة الشكل q إذا كان العددان x و y أوليان فيما بينهما.

1.8.3. بين أن للعدد m كتابة فعلية بواسطة الشكل q إذا وفقط إذا كان الشكل q يكافئ شكلا أربوعيا q' من $\mathcal{Q}^+$ معرفا بـ $q' : (x,y) \longmapsto mx^2 + bxy + cy^2$ ، حيث $-m < b \leq m$.

- نرمز بـ I_2 للمصفوفة المعرفة بـ $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ، ونُذَكِر أن المصفوفة I_2 هي العنصر المحايد في مجموعة المصفوفات المربعة $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ، مزودة بعملية الضرب المعرفة أعلاه .
- لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. نقول أن A تقبل مقلوبا إذا وُجِدَت مصفوفة B من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ تحقق

$$AB=BA=I_2 .$$

نُذَكِر أن المصفوفة B إذا وُجِدَت فإنها وحيدة ؛ يرمز إليها بـ A^{-1} وتسمى مقلوب المصفوفة A .

نتـــائـــج مقبـــولـــة يمــكن استعمــــالهــــا

أ- لتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. نقبل أن $\det(AB)=\det A\det B$ و أن ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$.

ب- لتكن $A=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ مصفوفة من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$، إذا وفقط إذا كان $\det A\neq 0$ ، وفي هذه الحالة لدينا:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}\delta&-\beta\\-\gamma&\alpha\end{pmatrix} .$$

ج- لتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ تقبل كل واحدة منهما مقلوبا . نذكر أن المصفوفة AB تقبل هي الأخرى مقلوبا و أن $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

الـجـــــزء الأول

نتـــائـج حـــول التطبـــيقـــات الخطـــية

ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ معرفين بما يلي:

$$f(x,y)=(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y),\ \ g(x,y)=(\alpha' x+\beta' y,\gamma' x+\delta' y),\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

حيث α و β و γ و δ و α' و β' و γ' و δ' أعداد حقيقية .

1.1. ليكن λ عددا حقيقيا . نرمز بـ $\circ$ لتركيب تطبيقين .

1.1.1. بين أن التطبيقات λf و $f+g$ و $f\circ g$ عناصر من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ وأن المصفوفات المرتبطة بها تحقق:

$$M(\lambda f)=\lambda M(f),\ \ M(f+g)=M(f)+M(g),\ \ M(f\circ g)=M(f)M(g) .$$

2.1.1. بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}^2$ إذا وفقط إذا كان $\det M(f)\neq 0$ ، و بين في هذه الحالة أن f^{-1} ، التطبيق العكسي للتطبيق f ، هو كذلك تطبيق خطي ثم أعط تعبير $f^{-1}(x,y)$ لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ؛ حدد العلاقة بين $M(f)$ و $M(f^{-1})$.

2.1. ليكن e_1 و e_2 زوجين من $\mathbb{R}^2$ ، و λ و η عددين حقيقيين . بين أن $f(\lambda e_1+\eta e_2)=\lambda f(e_1)+\eta f(e_2)$.

3.1. الهدف من هذه الفقرة هو أن نبرهن على أن : التطبيق f يحقق $f(\mathbb{Z}^2)=\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا كانت الأعداد α و β و γ و δ صحيحة نسبية و $\det M(f)=\pm 1$.

1.3.1. نفترض أن الأعداد α و β و γ و δ صحيحة نسبية وأن محددة المصفوفة $M(f)$ تحقق $\det M(f)=\pm 1$. بين أن التطبيق f يحقق $f(\mathbb{Z}^2)=\mathbb{Z}^2$.

2.3.1. عكسيا ، نفترض أن التطبيق f يحقق $f(\mathbb{Z}^2)=\mathbb{Z}^2$.

1.2.3.1. بين أن الأعداد α و β و γ و δ صحيحة نسبية واستنتج أن $\det M(f)$ عدد صحيح نسبي .