Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 13

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
(z.B. bis So. 24. Jänner 2021, 23:59 Uhr)

Aufgabe 49

Wir betrachten folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}[t]_{\leq 4} &\to \mathbb{C}[t]_{\leq 3} \\ p &\mapsto p' - t \cdot p'' \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass ϕ linear ist und bestimmen Sie eine Basis für Bild und Kern.

Lösung: Für $p = \sum_{n=1}^{4} p_n t^n$, $q = \sum_{n=1}^{4} q_n t^n$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \phi(p + \alpha q) &= \phi\left(\sum_{n=0}^{4} (p_n + \alpha q_n) t^n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{4} n(p_n + \alpha q_n) t^{n-1} - t \cdot \sum_{n=2}^{4} n(n-1)(p_n + \alpha q_n) t^{n-2} \\ &= \sum_{n=1}^{4} n p_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{4} n \alpha q_n t^{n-1} - t \cdot \sum_{n=2}^{4} n(n-1) p_n t^{n-2} - t \cdot \sum_{n=2}^{4} n(n-1) \alpha q_n t^{n-2} \\ &= \sum_{n=1}^{4} n p_n t^{n-1} - t \cdot \sum_{n=2}^{4} n(n-1) p_n t^{n-2} + \alpha \left(\sum_{n=1}^{4} n q_n t^{n-1} - t \cdot \sum_{n=2}^{4} n(n-1) q_n t^{n-2}\right) \\ &= \phi(p) + \alpha \cdot \phi(q), \end{aligned}$$

also ist ϕ linear. Als nächstes bestimmen wir Kern(ϕ).

$$\begin{aligned} \phi(p) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4p_4 t^3 + 3p_3 t^2 + 2p_2 t + p_1 - t \cdot (12 p_4 t^2 + 6 p_3 t + 2 p_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -8 p_4 t^3 - 3 p_3 t^2 + p_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad p_4 = p_3 = p_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad p = p_2 t^2 + p_0 \quad \Leftrightarrow \quad p \in \mathrm{Span}(t^2, 1). \end{aligned}$$

Da $t^2, 1$ linear unabhängig sind, bildet $(t^2, 1)$ eine Basis von Kern(ϕ). Um das Bild(ϕ) zu bestimmen, ergänzen wir die Basis des Kerns zu einer Basis $\underline{v}$ von $\mathbb{C}[t]_{\leq 4}$, $\underline{v} = (t^2, 1, t, t^3, t^4)$. Es gilt

$$\mathrm{Bild}(\phi) = \mathrm{Span}(\phi(t), \phi(t^3), \phi(t^4)) = \mathrm{Span}(1, -3t^2, -8t^3) = \mathrm{Span}(1, t^2, t^3).$$

Da $1, t^2, t^3$ linear unabhängig sind, bildet $(1, t^2, t^3)$ eine Basis von Bild(ϕ). Schlussendlich überprüfen wir (überflüssigerweise) unsere Berechnungen mit der Dimensionsformel

$$\dim(\mathbb{C}[t]_{\leq 4}) = \dim(\mathrm{Kern}(\phi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\phi)),$$

also $5 = 2 + 3 \quad \checkmark$. $\square$

Aufgabe 50
Gegeben sei die folgende Matrix über $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenräume von μ_A. (Verwenden Sie Aufgabe 45.)

Lösung: Wir wissen, dass λ genau dann Eigenwert ist, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$. Durch zweimalige Anwendung der Determinantenformel für Blockmatrizen aus Aufgabe 45 bekommen wir

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (2 - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} (2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)^2[1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1] = (-\lambda)(2-\lambda)^3 = 0. \end{aligned}$$

Also ergeben sich die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$. Für die Eigenräume gilt $\mathrm{Eig}(\mu_A, \lambda_i) = L(A - \lambda_i I, 0)$. Aus

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich $Av = 0$ genau dann, wenn $2v_4 = 0$, $v_2 + v_3 = 0$ und $2v_1 = 0$ also

$$\mathrm{Eig}(\mu_A, 0) = \{(0, v_2, -v_2, 0)^t \mid v_2 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}((0, 1, -1, 0)^t).$$

Analog folgt aus

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dass $Av = 2v$, genau dann wenn $-v_2 + v_3 = 0$ also

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(\mu_A, 2) &= \{(v_1, v_2, v_2, v_4)^t \mid v_1, v_2, v_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Span}((1,0,0,0)^t, (0,1,1,0)^t, (0,0,0,1)^t). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 51
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}[t]_{\leq 2} &\to \mathbb{C}[t]_{\leq 2} \\ p &\mapsto 3p - tp' - 3p(0) \end{aligned}$$

ein Endomorphismus ist und berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume.

Lösung: Wir müssen zeigen, dass ϕ linear ist. Für $p = p_0 + p_1 t + p_2 t^2$ gilt

$$\begin{aligned} \phi(p) &= 3(p_0 + p_1 t + p_2 t^2) - t(p_1 + 2p_2 t) - 3p_0 \\ &= 2p_1 t + p_2 t^2. \end{aligned}$$

Für $q = q_0 + q_1 t + q_2 t^2$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt also

$$\begin{aligned}\phi(p+\alpha q) &= \phi((p_0+\alpha q_0) + (p_1+\alpha q_1)t + (p_2+\alpha q_2)t^2) \\ &= 2(p_1+\alpha q_1)t + (p_2+\alpha q_2)t^2 \\ &= 2p_1 t + p_2 t^2 + \alpha(2q_1 t + q_2 t^2) \\ &= \phi(p) + \alpha\phi(q). \qquad \checkmark\end{aligned}$$

Für einen Eigenvektor p zum Eigenwert λ von ϕ muss gelten $\phi(p) - \lambda p = 0$, also

$$\begin{aligned} & 2p_1 t + p_2 t^2 - \lambda(p_0 + p_1 t + p_2 t^2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -\lambda p_0 + p_1(2-\lambda)t + p_2(1-\lambda)t^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda p_0 = 0, \quad p_1(2-\lambda) = 0, \quad p_2(1-\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}}_{=:A-\lambda I}\underbrace{\begin{pmatrix}p_0 \\ p_1 \\ p_2\end{pmatrix}}_{=:v_p} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \qquad (\star)\end{aligned}$$

Damit haben wir das Eigenwertproblem für die Abbildung ϕ auf eine Eigenwertproblem für die Abbildung μ_A zurückgeführt. Das homogene Gleichungssystem $(A-\lambda I)v = 0$ hat genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn $\det(A-\lambda I) = 0$ also wenn

$$\lambda \cdot (2-\lambda)\cdot(1-\lambda) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lambda \in \{0,1,2\}.$$

Das heißt ϕ hat die Eigenwerte $0, 1, 2$. Mittels $(\star)$ können wir auch die Eigenräume berechnen.
$\lambda = 0:$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_0 \\ p_1 \\ p_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = p_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = p_0,$$

also $\mathrm{Eig}(\phi, 0) = \mathrm{Span}(1)$.
$\lambda = 2:$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_0 \\ p_1 \\ p_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad p_0 = p_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = p_1 t,$$

also $\mathrm{Eig}(\phi, 2) = \mathrm{Span}(t)$.
$\lambda = 1:$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_0 \\ p_1 \\ p_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad p_0 = p_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = p_2 t^2,$$

also $\mathrm{Eig}(\phi, 1) = \mathrm{Span}(t^2)$. □

Aufgabe 52

Die Spur einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$ ist definiert als die Summe ihrer Diagonaleinträge. Gegeben sind die Abbildungen

$$\begin{aligned}&\psi_1 : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad A \mapsto \mathrm{Spur}(A) \\ &\psi_2 : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad A \mapsto A + A^t\end{aligned}$$

Berechnen Sie $\mathrm{Kern}(\psi_1), \mathrm{Kern}(\psi_2), \mathrm{Bild}(\psi_2)$ sowie $\mathrm{Kern}(\psi_1) \cap \mathrm{Bild}(\psi_2)$.

Lösung:

$$\psi_1(A) = a_{11} + a_{22} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{11} = -a_{22}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Kern}(\psi_1) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right).$$

$$\begin{aligned}\psi_2(A) = A + A^t = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad A = -A^t\\ &\Leftrightarrow \quad a_{11} = -a_{11}, a_{21} = -a_{12}, a_{22} = -a_{22}\\ &\Leftrightarrow \quad a_{11} = a_{22} = 0, a_{21} = -a_{12}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Kern}(\psi_2) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right).$$

Um das $\mathrm{Bild}(\psi_2)$ zu berechnen ergänzen wir $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$:

$$\underline{v} = \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) =: (B_1, B_2, B_3, B_4)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Bild}(\psi_2) &= \mathrm{Span}(\psi_2(B_2), \psi_2(B_3), \psi_2(B_4))\\ &= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \{A \mid A = A^t\}\end{aligned}$$

Zum Schluss berechnen wir den Schnitt von $\mathrm{Kern}(\psi_1) \cap \mathrm{Bild}(\psi_2)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Kern}(\psi_1) \cap \mathrm{Bild}(\psi_2) &= \{A \mid a_{11} = -a_{22}\} \cap \{A \mid A = A^t\}\\ &= \{A \mid a_{11} = -a_{22}, a_{21} = a_{12}\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

□