Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 8

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
(z.B. bis Mo. 6. Dezember 2021, 08:00 Uhr)

Aufgabe 29

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $\alpha, \beta \in K, v \in V$ gilt:

(a) $0 \cdot v = 0$.
(b) $(-\alpha) \cdot v = -(\alpha \cdot v)$.
(c) Aus $v \neq 0$ und $\alpha \neq \beta$ folgt $\alpha \cdot v \neq \beta \cdot v$.
Insbesondere besitzt jeder Vektorraum $V \neq \{0\}$ über einem unendlichen Körper unendlich viele Elemente.

Aufgabe 30

Sei $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume von V? (begründen Sie Ihre Aussage)

(a) $U_1 = \{f \in V \mid f(1) = 2\}$
(b) $U_2 = \{f \in V \mid \forall n \in \mathbb{N}\colon f(n) = -f(-n)\}$
(c) $U_3 = \{f \in V \mid \forall r \in \mathbb{R}\colon f(r) \neq 0\}$
(d) $U_4 = \{f \in V \mid \forall r \in \mathbb{R}\colon |f(r)| \leq 1\}$
(e) $U_5 = \{f \in V \mid \exists B \in \mathbb{R}\ \forall r \in \mathbb{R}\colon |f(r)| \leq B\}$.

Aufgabe 31

Sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $M = (m_{ij})_{i,j=1,\ldots,m} \in \mathrm{Mat}_m(K)$ hat **untere Dreiecksgestalt**/ ist eine **untere Dreiecksmatrix**, wenn für $i < j$ stets $m_{ij} = 0$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass die unteren Dreiecksmatrizen einen Untervektorraum von $\mathrm{Mat}_m(K)$ bilden.
(b) Zeigen Sie, dass die unteren Dreiecksmatrizen einen Unterring von $\mathrm{Mat}_m(K)$ bilden, d.h. für $M, N \in \mathrm{Mat}_m(K)$ mit unterer Dreiecksgestalt hat auch $M \cdot N$ untere Dreiecksgestalt.

Aufgabe 32

Bestimmen Sie alle Untervektorräume von $\mathbb{C}$, wobei Sie $\mathbb{C}$ einmal als $\mathbb{C}$- und einmal als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen (die Skalarmultiplikation ist einfach die bekannte Multiplikation von Zahlen).