Zusammenfassung Altklausurfragen Lineare Algebra

Zusammenfassung einiger Altklausuren aus Lineare Algebra - alle Angaben ohne Gewähr.

1.1 Allgemeine Aussagen

1. **Lineare Gleichungssysteme, Körper, Matrizen**

✅ **Korrekte Aussagen**

💡 Entscheiden Sie:

✅ Alle Elementarmatrizen sind invertierbar.

✅ Besitzt eine Matrix A in Zeilenstufenform mehr Spalten als Pivots, so besitzt das homogene LGS mit A als Koeffizientenmatrix eine nicht-triviale Lösung.

✅ Wenn ein homogenes LGS nur die triviale Lösung besitzt, besitzt jedes inhomogene System mit derselben Koeffizientenmatrix eine Lösung.

✅ Jede Multiplikation einer Matrix A mit einer invertierbaren Matrix von links entspricht einer endlichen Abfolge von elementaren Zeilenumformungen an A.

✅ Jede invertierbare Matrix über einem Körper ist ein Produkt von Elementarmatrizen.

✅ Jede invertierbare Matrix ist ein Produkt von Elementarmatrizen.

✅ Jede elementare Zeilenumformung einer Matrix lässt sich durch Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix von links erreichen.

✅ Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lässt sich jede Matrix mit Einträgen aus einem Körper in Zeilenstufenform bringen.

✅ Die Lösungsmenge eines homogenen LGS in m Variablen über dem Körper K ist ein Untervektorraum des K^m.

🚫 Falsche Aussagen

💡 Entscheiden Sie:

🚫 Die einzige quadratische Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist die Einheitsmatrix.

🚫 Die Summe zweier Lösungen eines inhomogenen LGS ist stets wieder eine Lösung.

🚫 Besitzt eine Matrix A (über dem Körper K) mehr Zeilen als Spalten, so besitzt das homogene LGS mit A als Koeffizientenmatrix nur die triviale Lösung.

🚫 Besitzt eine Matrix A in Zeilenstufenform mehr Spalten als Pivots, so besitzt jedes inhomogene LGS mit A als Koeffizientenmatrix eine Lösung

🚫 Jedes inhomogene System linearer Gleichungen besitzt mindestens eine Lösung.

🚫 Ist der Rang einer Matrix (über einem Körper) gleich ihre Spaltenanzahl, so besitzt das von ihr definierte homogene LGS eine nicht triviale Lösung.

🚫 Ist der Rang einer Matrix A echt kleiner als ihre Zeilenanzahl, so besitzt jedes inhomogene LGS mit A als Koeffizientenmatrix eine Lösung.

✅ Korrekte Aussagen

💡 Sei K ein Körper. Entscheiden Sie:

✅ $A, B \in GL_m(K) \Rightarrow AB \in GL_m(K)$

✅ $A \in GL_M(K) \Rightarrow rang(A) = m$

✅ $A \in GL_m(K) \Leftrightarrow det(A) \neq 0$

✅ $A \in GL_m(K) \Leftrightarrow A^2 \in GL_m(K)$

✅ $A \in Mat_m(\mathbb{R})$ und $rang(A) = m \Rightarrow A \in GL_m(\mathbb{R})$

✅ $GL_m(\mathbb{R})$ bildet mit der Multiplikation von Matrizen eine Gruppe.

✅ $GL_m(K)$ ist eine Gruppe bzgl. Matrixmultiplikation.

✅ $Mat_m(\mathbb{R})$ bildet mit der bekannten Multiplikation von Matrizen eine Gruppe

✅ $Mat_m(\mathbb{R})$ bildet mit der bekannten Multiplikation von Matrizen eine abelsche Gruppe.

✅ $Mat_m(K)$ bildet mit der bekannten Addition und Multiplikation von Matrizen einen Ring.

✅ Es gibt einen Körper mit genau 23 Elementen.

✅ Es gibt einen Körper mit 17 Elementen.

✅ Es gibt einen Körper mit genau 41 Elementen.

✅ Es gibt einen Körper mit genau 29 Elementen.

✅ $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation)

✅ In $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ gibt es Elemente $a, b \neq 0$ mit $ab = 0$.

✅ In einem Körper besitzt jedes Element außer der Null ein multiplikativ Inverses.

✅ $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ist ein Ring (mit der bekannten Addition und Multiplikation) (sogar ein Körper)

✅ $\mathbb{C}$ ist ein kommutativer Ring (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

✅ $\mathbb{Z}$ ist ein Ring (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

✅ $\mathbb{Q}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

✅ Der Betrag einer komplexen Zahl ist stets eine reelle Zahl.

✅ Für $a, b \in \mathbb{Q}$ folgt aus $ab = 0$ immer $a = 0$ oder $b = 0$.

✅ Für jedes $a \in \mathbb{Q}^x$ gilt $a^{-1} \neq 0$

✅ Für $A \in GL_M(K)$ gilt $A^{-1} \in GL_m(K)$.

✅ Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $z - \bar{z} = 2iIm(z)$

✅ Es gilt $\mathbb{C}^x = \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

✅Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z|^2$ = $z\bar{z}$

✅Für $a \in \mathbb{C}$ folgt aus $a^2 = 0$ immer a =0

🚫 Falsche Aussagen

💡 Sei K ein Körper. Entscheiden Sie:

🚫 $GL_m(K)$ ist eine Gruppe bzgl. Addition von Matrizen.

🚫 $A \notin GL_m(K) \Rightarrow det(A) \neq 0$

🚫 $Mat_2(\mathbb{R})$ bildet mit der bekannten Addition und Multiplikation von Matrizen einen kommutativen Ring.

🚫 $Mat_4(K)$ bildet mit der bekannten Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper.

🚫 $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

🚫 $Z/6\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Additon und Multiplikation).

🚫 $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

🚫 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Additon und Multiplikation).

🚫 $\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

🚫 In einem Körper können Elemente mehr als ein multiplikativ Inverses besitzen.

🚫 In einem Körper kann jedes Element multiplikativ invertiert werden.

🚫 In einem Körper besitzt jedes Element ein multiplikativ Inverses.

🚫 Für $a, b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ kann $ab = 0$ gelten.

🚫 Für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt $z\bar{z} = \frac{1}{|z|^2}$

🚫 Für $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt $Im(zz') = Im(z) \cdot Im(z')$

🚫 Für jedes $A \in Mat_m(K)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$.

🚫 Für jedes $A \in Mat_m(K)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = I_m$

🚫Für $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ kann $a^2 = 0$ gelten.

🚫 Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $Re(z^2) = Re(z)^2$

🚫 $\mathbb{N}$ ist ein Ring (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

🚫 Es gilt $\mathbb{Q}^x = \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}^x = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$)

✅ **Korrekte Aussagen**

💡 Sei K ein Körper. Entscheiden Sie, ob für alle $A \in Mat_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$ gilt:

✅ ist $c \in L(A,b)$ und $d \in L(A,0)$, so ist $c - d \in L(A,b)$

✅ ist $c \in L(A,b)$ und $d \in L(A,0)$, so ist $c + d \in L(A,b)$

✅ ist $c \in L(A,0)$ und $d \in L(A,b)$, so ist $c + d \in L(A,b)$

✅ ist $c \in L(A,0)$ und $\lambda \in K$, so ist $\lambda c \in L(A,0)$

✅ ist $c \in L(A,b)$ und $\lambda \in K$, so ist $\lambda c \in L(A,0)$

✅ sind $c, d \in L(A,0)$, so ist $c + d \in L(A,0)$

✅ sind $c, d \in L(A,b)$, so ist $c - d \in L(A,0)$

🚫 Falsche Aussagen

💡 Sei K ein Körper. Entscheiden Sie, ob für alle $A \in Mat_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$ gilt:

🚫 sind $c, d \in L(A,b)$, so ist $c + d \in L(A,0)$

🚫 sind $x, y \in L(A,b)$, so ist $x - y \in L(A,b)$

🚫 ist $c \in L(A,b)$ und $\lambda \in K$, so ist $\lambda c \in L(A,b)$

🚫 aus $n = m$ folgt $L(A,b) \neq \emptyset$

🚫 aus $L(A,0) \neq \{0\}$ folgt $L(A,b) \neq \emptyset$

🚫 aus $L(A,0) = \{0\}$ folgt $L(A,b) \neq \emptyset$

🚫 es gilt $b \in L(A,b)$

🚫 $L(A, b+c) = c + L(A,b)$

🚫$x, y \in L(A,b)$, so ist $x - y \in L(A,b)$

🚫 es gilt $L(A,b) = \{b + a | a \in L(A,0)\}$

---

2. Vektorräume und lineare Abbildungen

✅ Korrekte Aussagen

> 💡 Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Entscheiden Sie:

✅ V ist endlich erzeugt.

✅ V ist endlich dimensional.

✅ V besitzt eine Basis.

✅ Die Dimension von V ist endlich.

✅ Jede Basis eines Untervektorraums von V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

✅ Jedes minimale Erzeugendensystem von V ist eine Basis von V.

✅ Jede Basis von V ist ein Erzeugendensystem von V.

✅ Jedes System linear unabhängiger Vektoren von V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen

✅ Je zwei Basen von V bestehen aus gleich vielen Vektoren.

🚫 Falsche Aussagen

> 💡 Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Entscheiden Sie:

🚫 Jedes Erzeugendensystem von V ist eine Basis von V.

🚫 Jede minimale linear unabhängige Teilmenge von V ist eine Basis von V.

🚫 V hat unendlich viele Elemente.

🚫 Je zwei Erzeugendensysteme von V bestehen aus gleich vielen Vektoren.

✅ Korrekte Aussagen

💡 Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_m \in V$. Entscheiden Sie:

✅ Es ist $Span_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ ein Untervektorraum von V.

✅ Es ist $Span_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ der kleinste Untervektorraum von V, welcher alle v_i enthält.

✅ Es ist $Span_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ der kleinste Untervektorraum von V, der $v_1, \ldots, v_m$ enthält.

✅ Aus $dim_K(Span_K(\{v_1, \ldots, v_m\})) = m$ folgt, dass $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind.

!? Es ist $Span_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ die Menge aller linear unabhängiger Teilmengen von $v_1, \ldots, v_m$.

!? Die Dimension von $Span_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ ist höchstens m.

🚫 Falsche Aussagen

💡 Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_m \in V$. Entscheiden Sie:

🚫 Es ist $Span_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ ein Untervektorraum von K^m.

🚫 Es ist $Span_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ die Vereinigung aller Untervektorräume von V, welche $v_1, \ldots, v_m$ enthalten.

🚫 Aus $dim_K(V) = m$ folgt $V = Span_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$

✅ Korrekte Aussagen

💡 Sei V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Entscheiden Sie:

✅ Es ist $U_1 \cap U_2$ der größte in U_1 und U_2 enthaltene Untervektorraum.

🚫 Falsche Aussagen

> 💡 Sei V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Entscheiden Sie:

🚫 Es ist $U_1 \cup U_2$ steht ein Untervektorraum von V.

🚫 Es gilt stets $dim_K(U_1 + U_2) - dim_K(U_1) = dim_K(U_1) + dim_K(U_2)$

🚫 Aus $U_1 \neq V$ und $U_2 \neq V$ folgt $U_1 + U_2 \neq V$

✅ Korrekte Aussagen

> 💡 Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

✅ Wenn φ injektiv ist, ist φ ein Isomorphismus.

✅ Wenn φ surjektiv ist, ist φ auch injektiv.

✅ Wenn φ injektiv ist, ist φ auch surjektiv.

✅ Es kann $dim(Kern(\varphi)) < dim(Bild(\varphi))$ gelten.

✅ Aus $dim(Bild(\varphi)) < dim(V)$ folgt, dass φ nicht injektiv ist.

✅ Es ist $Kern(\varphi)$ ein Untervektorraum von V.

✅ Es ist $Bild(\varphi)$ ein Untervektorraum von V.

✅ Es gilt $dimBild(\varphi) = dim(V) - dimKern(\varphi)$.

✅ Es gilt stets dim $Bild(\varphi) \leq dim\ V$.

!? Aus dim $Kern(\varphi) > 0$ folgt, dass φ nicht surjektiv ist. "und auch nicht injektiv"

✅ Aus dim $Kern(\varphi) = 0$ folgt, dass φ surjektiv ist.

!? Aus $Kern(\varphi) = \{0\}$ folgt, dass φ invertierbar ist.

🚫 Falsche Aussagen

💡 Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

🚫 φ ist ein Isomorphismus.

🚫 Es ist φ stets surjektiv.

🚫 Es kann $dimV < dimBild(\varphi)$ gelten.

🚫 Aus $dim(Kern(\varphi)) < dimV$ folgt, dass φ nicht surjektiv ist.

🚫 Es gilt stets dim $Bild(\varphi) < dim\ V$.

!? Aus $dim(Kern(\varphi)) < dimV$ folgt, dass φ nicht injektiv ist.

---

3. Determinante und Eigenwerte

✅ Korrekte Aussagen

💡 Sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Entscheiden Sie:

✅ Für $A, B \in Mat_m(K)$ gilt $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.

✅ Es gilt $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$ f+r alle $A, B \in Mat_m(K)$.

✅ Für $A \in Mat_m(K)$ mit $det(A) \neq 0$ gilt $A \in GL_m(K)$.

✅ Die Determinante $det : Mat_m(K) \to K$ ist K-linear in jeder Spalte.

✅ $det(A) \neq 0 \Rightarrow A \in GL_m(K)$.

!? Aus $det(A) \neq 0$ folgt $L(A, b) \neq \emptyset$ für alle $b \in K^m$

!? Es gilt $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$ für alle $A \in GL_m(K)$.

🚫 Falsche Aussagen

💡 Sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Entscheiden Sie:

🚫 Es gilt $det(A^{-1}) = -det(A)$ für alle $A \in GL_m(K)$.

🚫 Es gilt $det(A^{-1}) = det(A)$ für alle $A \in GL_m(K)$.

🚫 Die Determinante $det : Mat_m(K) \to K$ ist eine K-lineare Abbildung.

🚫 Die Determinante einer Matrix ändert sich beim Vertauschen zweier verschiedener Spalten nicht.

🚫 Die Determinante einer Matrix ändert sich unter elementaren Zeilenumformungen nicht.

🚫 Für $A \in Mat_m(K)$ mit $det(A) \neq 0$ gilt $L(A, b) = \emptyset$ für mindestens ein $b \in K^m$.

!? Es gilt $det(A) = det(-A)$ für alle $A \in Mat_m(K)$. 💬

✅ Korrekte Aussagen

💡 Entscheiden Sie:

✅ Es gilt $det(A)A^{-1} = A^{adj}$ für alle $A \in GL_7(\mathbb{R})$.

✅ Die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonaleinträge.

✅ Der Rang einer Matrix ist die größte Größe einer quadratischen Untermatrix mit Determinante $\neq 0$.

✅ $A \in Mat_4(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ ist genau dann invertierbar, wenn $det(A) \neq 0$ gilt.

✅ $A \in Mat_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ist genau da,, invertierbar, wenn $det(A) = 1$ gilt.

✅ Für $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}^3$ gilt $det(a_1, a_2, a_3) = -det(a_3, a_2, a_1)$

✅ $det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2$

✅ es gilt $det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} = 0$

🚫 Falsche Aussagen

💡 Entscheiden Sie:

🚫 $A \in Mat_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ ist genau dann invertierbar, wenn $det(A) = 1$ gilt.

🚫 $A \in Mat_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ ist genau dann invertierbar, wenn $det(A) = 1$ oder $det(A) = 2$.

🚫 Die Determinante einer Diagonalmatrix ist stets ungleich Null.

🚫 Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist Null.

🚫 Die Determinante einer Matrix ist das Produkt ihrer Diagnonaleinträge.

🚫 Die Leibnitzformel zur Berechnung von Determinanten gilt nur für Matrizen der Größe 3.

🚫 Die Regel von Sarrus gilt für Matrizen der Größe 4.

🚫 Der Rang einer Matrix ist die größte Größe einer quadratischen Untermatrix mit Determinante = 0.

🚫 Hat eine Matrix Rang 2, so hat jede 2×2-Untermatrix Determinante null.

🚫 Für $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}^3$ gilt $det(a_1, a_2, a_3) = det(a_3, a_2, a_1)$.

!? Für $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}^3$ gilt $det(a_1, a_2, a_3) = -det(a_2, a_3, a_1)$

🚫 Für $A \in Mat_m(K)$ gilt $A^{adj} \in Mat_{m-1}(K)$.

🚫 $det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2$

🚫 $det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

🚫 Es gilt $A \cdot A^{adj} = I_2$ für alle $A \in GL_2(\mathbb{R})$.

🚫 Es gilt $A \cdot A^{adj} = I_2$ für alle $A \in Mat_2(\mathbb{R})$.

!? Für $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}^3$ und $\sigma \in S_3$ gilt $det(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}) = sgn(\sigma) det(a_1, a_2, a_3)$

✅ Korrekte Aussagen

💡 Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

✅ Die Menge $\{v \in V | \varphi(v) = v\}$ ist ein Untervektorraum von V.

✅Die Menge$\{v \in V | \varphi(v) = 2v\}$ ist ein Untervektorraum von V.

✅ φ muss in Knicht unbedingt einen Eigenwert haben.

✅ φ hat höchstens endlich viele verschiedene Eigenwerte.

✅ Die Menge $\{v \in V | \varphi(v) = -v\}$ ist ein Untervektorraum von V.

✅ Für $A \in Mat_m(K)$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynomy p_A genau die Eigenwerte von μ_A.

✅$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ besitzt $\mu_A : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ den Eigenwert 2.

🚫 Falsche Aussagen

💡 Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

🚫 φ besitz in K mindestens einen Eigenwert.

🚫 Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ besitzt $\mu_A : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ den Eigenwert 1.

🚫 Für $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ besitzt $\mu_A : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ den Eigenwert 2.

▼ 1.2 Aufgabenbezogene Aussagen

1. Lineare Gleichungssysteme, Körper, Matrizen

💡 Entscheiden Sie für:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R})$$

✅ Korrekte Aussagen

✅ $A \in GL_3(\mathbb{R})$→ "ist die Matrix invertierbar"

✅ $rang(A) = 3$

✅ Jedes inhomogene LGS mit Koeffizientenmatrix A besitzt eine Lösung.

🚫 **Falsche Aussagen**

🚫 A lässt sich mit elementaren Zeilenumformungen $nicht$ zur Einheitsmatrix I_3 transformieren.

🚫 $rang(A) = 2$

💡 Entscheiden Sie für:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ -i & 1 & i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{C})$$

✅ **Korrekte Aussagen**

✅ Der Lösungsraum $L(A, 0)$ hat Dimension 3. "Rang 3" → in Zeilenstufenform bringen, Nullzeilen abziehen

✅ A lässt sich mit elementaren Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix transformieren. "Inverse Matrix"

🚫 **Falsche Aussagen**

🚫 Es gibt ein $b \in \mathbb{C}^3$ mit $L(A, b) = \emptyset$ "wenn Rang $<$ Unbekannte, dann wahr"

🚫 Der Rang von A ist 2.

💡 Entscheiden Sie für:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{Q})$$

✅ **Korrekte Aussagen**

✅ A ist invertierbar über $\mathbb{Q}$.

✅ Das homogene LGS mit Koeffizientenmatrix A besitzt nur die triviale Lösung.

🚫 **Falsche Aussagen**

🚫 Es gibt $b \in \mathbb{Q}^3$ mit $L(A,b) = \emptyset$

🚫 A lässt sich mit elementaren Zeilenumformungen auf eine Zeilenstufenform mit genau 2 Pivots bringen.

💡 Entscheiden Sie für:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ i & -1 & 2 \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{C})$$

✅ **Korrekte Aussagen**

✅ A ist invertierbar über $\mathbb{C}$.

✅ Das homogene LGS mit Koeffizientenmatrix A besitzt nur die triviale Lösung.

🚫 **Falsche Aussagen**

🚫 Es gibt $b \in \mathbb{C}^3$ mit $L(A,b) = \emptyset$.

🚫 A lässt sich mit elementaren Zeilenumformungen auf eine Zeilenstufenform mit genau 2 Pivots bringen.

💡 Entscheiden Sie für:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_4(\mathbb{Q})$$

✅ **Korrekte Aussagen**

✅ A lässt sich mit elementaren Zeilenumformungen auf eine Zeilenstufenform mit genau 4 Pivots bringen.

✅ A ist invertierbar über $\mathbb{Q}$.

🚫 **Falsche Aussagen**

🚫 A lässt sich mit elementaren Zeilenumformungen auf eine Zeilenstufenform mit genau 3 Pivots bringen.

🚫$b \in \mathbb{Q}^4$ mit $L(A, b) = \emptyset$.

🚫 Das homogene LGS mit Koeffizientenmatrix A besitzt mehr als nur die triviale Lösung.

---

2. Vektorräume und lineare Abbildungen

✅ **Korrekte Aussagen**

> 💡 Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $V = \mathbb{R}[t]$ jeweils $\mathbb{R}$-Untervektorräume sind (bzgl. Addition und skalaren Multiplikation)

✅ $\{p \in V | p(7) = 0\}$

$+: \quad p_1(7) + p_2(7) = 0 + 0 = 0$ ✔

$\cdot: \quad p(7) \cdot k = 0 \cdot k = 0$ ✖

✅ $\{p \in V | p' = 0\}$

$+: \quad p_1' + p_2' = 0 + 0 = 0 \rightarrow p' = 0$ ✔(konstante Funk abgeleitet immer 0)

$\cdot: \quad p' \cdot k = 0 \cdot k = 0 \rightarrow p' = 0$ ✔

> 💡 Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $V = \mathbb{Q}[t]$ jeweils $\mathbb{Q}$-Untervektorräume sind (bzgl. Addition und skalaren Multiplikation)

✅ $\{f \in V | f(0) = 0\}$

✅ $\{f \in V | f(1) = 0\}$

✅ $\{p \in V | p'(1) = 0\}$

✅ $\{p \in V | p(7) = 0\}$

✅ $\{p \in V | p' = 0\}$

✅ $\{p \in V | p(-1) = 0\}$

✅ $\{p \in V | p(-4) = 0\}$

✅ $\{p \in V | p(a) \neq 0 \text{ für alle } 0 < a \in \mathbb{Q}\}$
✅ $\{p \in V | p'' = 0\}$

🚫 Falsche Aussagen

💡 Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $V = \mathbb{R}[t]$ jeweils $\mathbb{R}$-Untervektorräume sind (bzgl. Addition und skalaren Multiplikation)

🚫 $\{p \in V | p(0) \neq 1\}$

$+: \quad p_1(0) + p_2(0) = 2 + (-1) = 1$ ✖

🚫 $\{p \in V | p(a) > 0 \text{ für alle } a \in [0,1]\}$

$+: \quad p_1(a) + p_2(a) = 1 + 1 = 2 \to p(a) > 0$ ✔

$\cdot: \quad p(a) \cdot k = 1 \cdot 0 = 0 \to p(a) > 0$ ✖

💡 Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $V = \mathbb{Q}[t]$ jeweils $\mathbb{Q}$-Untervektorräume sind (bzgl. Addition und skalaren Multiplikation)

🚫 $\{p \in V | p(0) = 1\}$

🚫 $\{p \in V | p \text{ hat in } [0,1] \text{ eine Nullstelle}\}$

!? $\{p \in V | p' = t\}$

!? $\{p \in V | p(a) \geq 0 \text{ für alle } a \in [0,1]\}$

🚫 $\{p \in V | p(a) \neq 0 \text{ für alle } a \in [0,1]\}$

✅ Korrekte Aussagen

> 💡 Entscheiden Sie, ob folgende Abbildungen linear sind:

✅ $\varphi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2; (x, y)^t \mapsto (x + y, y)^t$
✅ $\varphi : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}^1; p \mapsto p(-1)$
✅ $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y)^t \mapsto (x - y, y)$
✅ $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y)^t \mapsto (2x - y, 3y)$
✅ $\varphi : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]; p \mapsto p'$
✅ $\varphi : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]; p \mapsto p' + p(1)$
✅ $\varphi : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]; p \mapsto p + p'$
✅ $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1; a \mapsto -a$
✅ $\varphi : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]; p \mapsto p(0)$
✅ $\varphi : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}; p \mapsto p(0)$

🚫 **Falsche Aussagen**

> 💡 Entscheiden Sie, ob folgende Abbildungen linear sind:

🚫 $\varphi : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t]; p \mapsto p + t$
🚫 $\varphi : \mathbb{Q}^1 \to \mathbb{Q}^2; a \mapsto (a, a \cdot a)^t$
🚫 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1; (a, b)^t \mapsto a^2 + b$
🚫 $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1; a \mapsto 7a - 1$
🚫 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1; (a, b)^t \mapsto a - b^2$
🚫 $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1; a \mapsto a + 1$
🚫 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y)^t \mapsto (x - y, y + 1)$
🚫 $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2; a \mapsto (a, a^2)$

▼ 1.3 Allgemeine Beweisaufgaben

💡 Sei W ein Vektorraum, $\varphi : W \to W$ eine lineare Abbildung und $w_1, w_2 \in W$:

✅ Sind w_1, w_2 linear unabhängig, dann auch $w_1, w_1 + w_2$.

✅ Sind $\varphi(w_1), \varphi(w_2)$ linear unabhängig, so auch w_1, w_2.

🚫 Aus w_1, w_2 linear unabhängig, folgt $\varphi(w_1) \neq \varphi(w_2)$.

!? Aus $\varphi(w_1) \neq \varphi(w_2)$ folgt, dass w_1, w_2 linear unabhängig.

💡 Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung und $v_1, v_2 \in V \backslash \{0\}$:

✅ Sind $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$ linear unabhängi, so auch v_1, v_2.

!? Aus $\varphi(v_1) = v_1$ folgt, dass φ nichttrivialen Kern hat.

!? Aus $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ folgt $v_2 - v_1 \in Bild(\varphi)$

💡 Sei V ein Vektorraum, $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung und $v_1, v_2 \in V$:

✅ Aus $\varphi(v_1) = 7v_1$ und $\varphi(v_2) = 7v_2$ folgt $\varphi(v) = 7v$ für alle $v \in Span\{v_1, v_2\}$

✅$v_2 - v_1 \in Kern(\varphi)$ folgt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$

!? Sind v_1, v_2 linear unabhängig, so auch $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$

✅ Sind $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$ linear unabhängig, so auch v_1, v_2

💡 Sei V ein Vektorraum, $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung und $v_1 \neq v_2 \in V$:

✅ Sind $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$ linear unabhängig, so auch v_1, v_2

✅ v_1, v_2 linear unabhängig, dann auch $v_1, v_1 + v_2$.

🚫 Aus $\varphi(v_1) = v_2$ und $\varphi(v_2) = v_1$ folgt, dass v_1, v_2 linear unabhängig sind.

!? Aus $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ folgt $v_2 - v_1 \in Kern(\varphi)$.

💡 Sei V ein K-Vektorraum, $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung und $v, w \in V$:

✅ Sind $\varphi(v), \varphi(w)$ linear unabhängig, so auch v, w.

✅ Aus $Span(\{v,w\}) = Span(\{v\})$ folgt, dass v, w linear abhängig sind.

!? Aus $\varphi(v) = w$ und $\varphi(w) = v$ folgt $dim_K(span_K(\{v,w\}) = 2$.

!? Aus $v - w \in Kern(\varphi)$ folgt $\varphi(v) = \varphi(w)$

💡 Sei K ein Körper und $A \in Mat_m(K)$ mit $A^2 = A$. Entscheiden Sie:

🚫 $A \in GL_m(K)$

🚫 Es gilt $m \leq 2$

🚫 Es gibt keine Matrizen mit $A^2 = A$

🚫 Es gilt $det(A + A) = det(A)^2$

🚫 $A = I_m$ oder $A = 0$

🚫 A hat Diagonalgestalt

🚫 $rang(A) = m$

✅ Es gilt $A^8 = A$

✅ $det(A) \in \{0, 1\}$

✅ Es gilt $det(A^{adj}) = det(A)^{m-1}$

!? Aus $rang(A) < m$ folgt $BA = 0$ für ein $0 \neq B \in Mat_m(K)$

💡 Sei K ein Körper und $A \in Mat_m(K)$ und $n \in \mathbb{N}$,mit $A^n = 0$. Entscheiden Sie:

✅Es gilt $det(A) = 0$.

✅ $rang(A) < m$

✅ Aus $A^2v = Av$ folgt $Av = 0$

🚫 Es gibt keine Matrizen mit $A^n = 0$

!? Es gilt $rang(A) = n$

> 💡 Sei K ein Körper und $A \in Mat_m(K)$ und $n \in \mathbb{N}$,mit $A^n = I_m$. Entscheiden Sie:

✅ $rang(A) = m$

✅ A hat Diagonalgestalt.

🚫 Es gilt $n \leq m$

🚫 Es gibt keine Matrizen mit $A^n = I_m$ für ein $n \in \mathbb{N}$