Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 12

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
(z.B. bis Mo. 24. Jänner 2022, 08:00 Uhr)

Aufgabe 45

Sei K ein Körper und $x_1, \ldots, x_m \in K$. Wir betrachten

$$V(x_1, \ldots, x_m) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{m-1} \\ & \vdots & & & \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{m-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_m(K).$$

Zeigen Sie

$$\det\left(V(x_1, \ldots, x_m)\right) = \prod_{1 \le i < j \le m} (x_j - x_i).$$

Insbesondere ist $V(x_1, \ldots, x_m)$ genau dann invertierbar, wenn die x_i paarweise verschieden sind.

Aufgabe 46

Sei K ein Körper und $x_1, \ldots, x_m \in K$ paarweise verschiedene Elemente. Zeigen Sie, dass es dann für jede Wahl von $y_1, \ldots, y_m \in K$ genau ein Polynom $p \in K[t]$ vom Grad höchstens $m - 1$ gibt, mit

$$p(x_i) = y_i$$

für alle $i = 1, \ldots, m$.

Aufgabe 47

Bestimmen Sie die (komplexen) Eigenwerte und Eigenräume des Endomorphismus $\mu_A \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ für die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 48

Sei $A \in \mathrm{GL}_m(K)$, $B \in \mathrm{Mat}_m(K)$ und $\lambda \in K$. Zeigen Sie

$$\det\left(\lambda I_m - AB\right) = \det\left(\lambda I_m - BA\right).$$