Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 3

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
Achtung: da Montag 26.10. ein Feiertag ist, sind Sonderregelungen möglich

Aufgabe 9

Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Für $T \subseteq M$ und $S \subseteq N$ gilt

$$T \subseteq f^{-1}\left(f(T)\right) \text{ und } f\left(f^{-1}(S)\right) \subseteq S.$$

(b) Für $S_1, S_2 \subseteq N$ gilt

$$\begin{aligned} & f^{-1}\left(S_1 \cup S_2\right) = f^{-1}\left(S_1\right) \cup f^{-1}\left(S_2\right) \\ \text{und} \quad & f^{-1}\left(S_1 \cap S_2\right) = f^{-1}\left(S_1\right) \cap f^{-1}\left(S_2\right) \end{aligned}$$

(c) Für $T_1, T_2 \subseteq M$ gilt

$$f\left(T_1 \cup T_2\right) = f\left(T_1\right) \cup f\left(T_2\right).$$

(d) Zeigen oder widerlegen Sie die Aussage

$$f\left(T_1 \cap T_2\right) = f\left(T_1\right) \cap f\left(T_2\right).$$

Beweis. (a) Sei $x \in T$. Dann gilt natürlich $f(x) \in f(T)$ und daher auch $x \in f^{-1}(f(T)$.

Für die zweite Inklusion sei $s \in f(f^{-1}(S))$. Es gilt also $s = f(t)$ für ein $t \in f^{-1}(S)$. Da $f(t) \in S$ gilt, folgt direkt $s = f(t) \in S$.

(b) Die erste Mengengleichheit wird durch folgende Äquivalenz bewiesen:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(S_1 \cup S_2) &\Leftrightarrow f(x) \in S_1 \cup S_2 \Leftrightarrow f(x) \in S_1 \text{ oder } f(x) \in S_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(S_1) \text{ oder } x \in f^{-1}(S_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(S_1) \cup f^{-1}(S_2). \end{aligned}$$

Die zweite Mengengleichheit wird durch folgende Äquivalenz bewiesen:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(S_1 \cap S_2) &\Leftrightarrow f(x) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow f(x) \in S_1 \text{ und } f(x) \in S_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(S_1) \text{ und } x \in f^{-1}(S_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(S_1) \cap f^{-1}(S_2). \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} f(T_1 \cup T_2) &= \{f(x) \mid x \in T_1 \cup T_2\} = \{f(x) \mid x \in T_1 \text{ oder } x \in T_2\} \\ &= \{f(x) \mid x \in T_1\} \cup \{f(x) \mid x \in T_2\} = f(T_1) \cup f(T_2). \end{aligned}$$

Die zweite Aussage stimmt nicht, nur die Inklusion $f\left(T_1 \cap T_2\right) \subseteq f\left(T_1\right) \cap f\left(T_2\right)$ ist wahr. Aus $T_1 \cap T_2 \subseteq T_i$ für $i = 1, 2$ folgt nämlich $f(T_1 \cap T_2) \subseteq f(T_i)$ für $i = 1, 2$ und damit $f(T_1 \cap T_2) \subseteq f(T_1) \cap f(T_2)$.

Für ein Beispiel mit strikter Inklusion reicht jede nicht-injektive Funktion. Sei etwa $f\colon \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ mit $f(1) = f(2) = 1$ und $T_1 = \{1\}$, $T_2 = \{2\}$. Dann ist $f(T_1) = \{1\} = f(T_2)$, aber $f(T_1 \cap T_2) = f(\emptyset) = \emptyset$. □

Häufige Probleme bei Aufgabe 9:

- Mit einem Bild können die Aussagen hier nicht bewiesen werden. Die Funktion f kann graphisch nicht in aller Allgemeinheit dargestellt werden. Dasselbe gilt für Wahrheitstafeln.
- Die Aussage in (d) ist falsch! Ein Beweis würde benötigen, dass zwei Urbilder desselben Elements stets gleich sind, man müsste also die Injektivität von f voraussetzen.
- Beachten Sie dass f^{-1} im Allgemeinen nicht die Umkehrfunktion von f bezeichnet, denn die existiert nur bei Bijektivität von f. Mit $f^{-1}(S)$ ist die Menge aller Urbilder von Elementen aus S gemeint.
- Mengen können gleich sein ("$S = T$"), Aussagen können äquivalent sein ("$x \in S \Leftrightarrow x \in T$"). Formulierungen wie "$S \Leftrightarrow T$" oder "$x \in S = x \in T$") hingegen sind nicht sinnvoll.

Aufgabe 10

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

(a) $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (a, b) \mapsto a - b$.
(b) $f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (a, b) \mapsto a^2 + b^2 + 1$.
(c) $f_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (a, b) \mapsto (2a + b, a - 2b)$.
(d) $f_4 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (a, b) \mapsto (a^2, a + b, b)$.

Beweis. (a) f_1 ist surjektiv, denn für jedes $r \in \mathbb{R}$ gilt beispielweise $f_1(r, 0) = r$. f_1 ist nicht injektiv, denn zum Beispiel gilt $f(1, 1) = 0 = f(0, 0)$.

(b) f_2 ist nicht surjektiv, denn da $a^2 + b^2$ immer größer gleich 0 ist nimmt f_2 nur Werte ≥ 1 an. Es liegt also zum Beispiel 0 nicht im Bild von f_2. f_2 ist auch nicht injektiv, denn es gilt etwa $f_2(\sqrt{2}, 0) = 3 = f_2(1, 1)$.

(c) f_3 ist injektiv, surjektiv und damit bijektiv. Dazu sei $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiges Element im Zielbereich von f_3. Wir untersuchen die Bedingung $f_3(a, b) = (r, s)$ und kommen auf ein lineares Gleichungssystem mit folgender erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & r \\ 1 & -2 & s \end{array}\right).$$

Wir bringen die Matrix mit dem Gauss-Algorithmus auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & s \\ 0 & 5 & r - 2s \end{array}\right).$$

Hier sieht man dass es für jede Wahl von r und s genau eine Lösung (a, b) gibt. Damit ist die Abbildung f_3 bijektiv.

(d) Die Abbildung f_4 ist injektiv. Dazu nehmen wir an dass $f_4(a, b) = f_4(a', b')$ gilt. Aus Vergleich der dritten Komponenten folgt direkt $b = b'$, und aus Vergleich der zweiten Komponenten damit dann $a = a'$. Das beweist die Injektivität. f_4 ist aber nicht surjektiv, denn die erste Komponente von $f_4(a, b)$ ist stets größer gleich 0. Also liegt etwa $(-1, 0, 0)$ sicher nicht im Bild von f_4. □

Häufige Probleme bei Aufgabe 10:

- Für die Surjektivität in (c) muss für *jedes* Element im Zielbereich ein Urbild angegeben werden (oder argumentiert werden, dass es eins gibt). Es reicht nicht, das nur für spezielle Elemente zu tun.

Aufgabe 11

Seien $f \colon M \to N, g \colon N \to O, h \colon O \to P$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
(b) Sind f und g injektiv, so auch $g \circ f$.
(c) Sind f und g surjektiv, so auch $g \circ f$.

(d) Sind f und g bijektiv, so auch $g \circ f$ und es gilt
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Beweis. (a) Sei $x \in M$. Laut der Definition von $\circ$ gilt
$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$
Also stimmen die Werte von $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ für jedes beliebige $x \in M$ überein, wodurch bewiesen ist dass es sich um dieselbe Funktion handelt.

(b) Es seien $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$. Da f injektiv ist folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$. Da g injektiv ist, folgt $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Somit ist $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$, also ist $g \circ f$ injektiv.

(c) Sei $z \in O$. Da g surjektiv ist, gibt es ein $y \in N$, so dass $g(y) = z$ gilt. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in M$, so dass $f(x) = y$ gilt. Es gilt nun
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$
Damit ist die Surjektivität von $g \circ f$ bewiesen.

(d) Dass $g \circ f$ bijektiv ist folgt aus (b) und (c). Es gilt nun
$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_N \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_O.$$
Genauso sieht man
$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_M.$$
Das zeigt dass $f^{-1} \circ g^{-1}$ die Umkehrabbildung von $g \circ f$ ist, und genau das war die zu beweisende Aussage. $\square$

Häufige Probleme bei Aufgabe 11:

- Mit einem Bild können die Aussagen hier nicht bewiesen werden. Die Funktionen f, g, h können graphisch nicht in aller Allgemeinheit dargestellt werden. Dasselbe stimmt für Wahrheitstafeln.
- Teil (d) erledigt man am elegantesten, indem man wie in der Lösung oben zeigt, dass $f^{-1} \circ g^{-1}$ die Eigenschaft der Umkehrabbildung von $g \circ f$ hat. Da $(g \circ f)^{-1}$ ja gerade diese Umkehrabbildung bezeichnet, ist die Aussage damit bewiesen.

Aufgabe 12

Sei X eine Menge mit m Elementen und Y eine Menge mit n Elementen.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl aller Abbildungen $f\colon X \to Y$.
(b) Bestimmen Sie die Anzahl aller bijektiven Abbildungen $f\colon X \to Y$.

Beweis. (a) Für jedes der m Elemente von X haben wir n Elemente als mögliches Bild zur Auswahl. Damit ergeben sich insgesamt n^m viele Möglichkeiten für eine Abbildung von X nach Y.

(b) Damit es überhaupt eine bijektive Abbildung gibt muss $m = n$ gelten. Dann haben wir für das erste Element von X genau m Auswahlmöglichkeiten als Bild. Für das nächste Element gibt es dann nur noch $m - 1$ viele Möglichkeiten, da das Bild des ersten Elementes nicht noch einmal als Bild auftreten darf (das widerspräche der Injektivitiät). So erhält man iterativ
$$m(m-1)(m-2)\cdots 2 \cdot 1 = m!$$
viele bijektive Abbildungen von X nach Y. $\square$