Allgemeine Informationen: Dieses Aufgabenblatt enthält schriftliche und/oder Programmieraufgaben. Bitte kombinieren Sie alle Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben zu einem einzelnen PDF Dokument, welches Sie nach folgendem Schema benennen:`{lastname}-written.pdf`. Sie können Ihre Lösungen auch scannen oder fotografieren. Achten Sie in diesem Fall auf die Lesbarkeit. Es werden JPEG/PNG Bilddateien akzeptiert welche wie folgt benannt werden müssen: `{exercisenumber}-{lastname}-written.{jpeg/png}`. Stellen Sie sicher, dass alle Rechenschritte nachvollziehbar sind und kombinieren Sie nicht zu viele kleine Schritte zu einem einzelnen.
Die Programmieraufgaben müssen in *Julia* gelöst sein und Ihr Quellcode sollte nach folgendem Schema benannt sein: `{exercisenumber}-{lastname}.jl`.

(1) (2.5 Punkte) Verwenden Sie das Julia Template `f.jl` für alle Implementierungen in dieser Aufgabe. Folgende Funktion ist gegeben

$$
\begin{align}
f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1}\\
f(x) &= \tanh(x) \tag{2}\\
&= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \tag{3}\\
&= \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} \tag{4}\\
&= \frac{\exp(2x) - 1}{\exp(2x) + 1} \tag{5}
\end{align}
$$

a) (0.5 Punkte) Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ analytisch.

b) (0.5 Punkte) Finite Differenzen können verwendet werden, um die Ableitungen einer Funktion numerisch zu approximieren. Es gibt verschiedene Finite Differenzen Methoden. Drei grundlegende Methoden sind die *Vorwärts*, *Rückwärts* und *Zentrale Differenz*:

$$
\begin{align}
\text{Vorwärtsdifferenz: } D_+ f(x) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{6}\\
\text{Rückwärtsdifferenz: } D_- f(x) &= \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \tag{7}\\
\text{Zentrale Differenz: } D_c f(x) &= \frac{f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})}{h}. \tag{8}
\end{align}
$$

Berechnen Sie die analytische Lösung für die erste Ableitung $f'(x)$ bei $x = 3$. Verwenden Sie dann die drei Finite-Differenzen Methoden mit $h = 0.1$, um die Ableitung numerisch zu approximieren. Werten Sie für die numerische Approximation zuerst $f(x)$ bei $2.9, 2.95, 3, 3.05, 3.1$ aus und notieren Sie die resultierenden Werte. Vergleichen Sie die Ergebnisse, indem Sie den Fehler zwischen den Näherungen und der analytischen Lösung unter Verwendung der absoluten Differenz berechnen. Für die Vorwärts Differenz erhalten Sie beispielsweise:

$$
\varepsilon^+ = \mid D_+ f(3) - f'(3) \mid . \tag{9}
$$

c) (0.5 Punkte) Implementieren Sie die analytische Lösung der Ableitung $f'(x)$ in der Methode `f1(x::Float64)::Float64`.

d) (0.5 Punkte) Implementieren Sie die Finite Differenzen Methoden `forward()`, `backward()` und `central()` mit der Signatur
`func(x::Float64, h::Float64, f::Function)::Float64` im Modul `FiniteDiff`. Die resultierenden Plots sollten aussehen wie in Abbildung 1.

e) (0.5 Punkte) Betrachten Sie das Ergebnis und erklären Sie, was Sie beobachten können. Was ist der Grund dafür, dass einige Methoden im Vergleich zu anderen genauer sind (kleinere Fehler)? Beschreiben Sie im Detail.

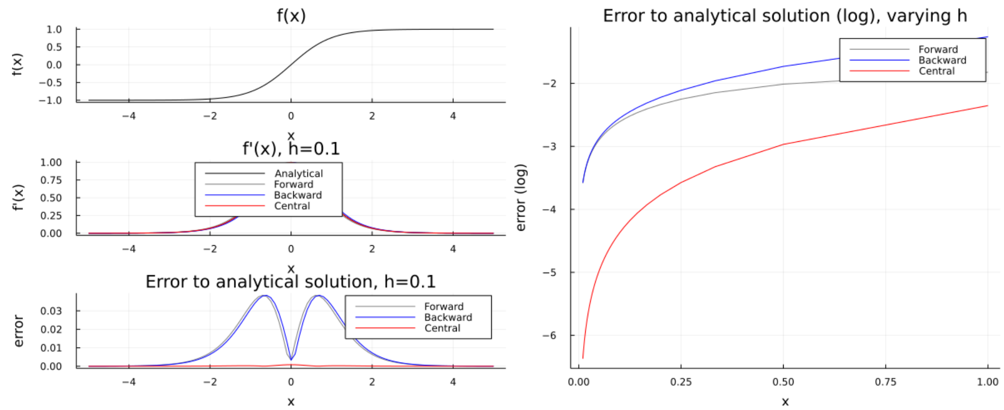

Abbildung 1: $f(x)$

(2) (2.5 Punkte) Verwenden Sie das Julia Template `quadrature.jl` für alle Implementierungen in dieser Aufgaben. Gegeben ist das Integral der Funktion aus Formel 1

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x \tag{10}$$
$$= \log(\cosh(x)) + C \tag{11}$$

a) (0.1 Punkte) Berechnen Sie $\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$ analytisch.

b) (0.3 points) Berechnen Sie $\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$ numerisch mit 3 äquidistanten Intervallen. Verwenden Sie die *Rechtssummen-*, *Trapez-* und die *Simpson-Regel* (siehe Formel 12) für die numerische Berechnung des Integrals.

c) (0,1 Punkte) Berechnen Sie die Fehler zur analytischen Lösung unter Verwendung absoluter Differenzen.

d) (0,25 Punkte) Implementieren Sie den Code von `f(x::Float64)` in `F(x::Float64)`

e) (1,5 Punkte) Implementieren Sie den Code von `right()`, `trapez()`, `simpson()`. Die Signatur all dieser Funktionen ist
`func(s::Float64, e::Float64, N::Int, f::Function)::Float64`, wobei `s` die untere und `e` die obere Grenze der Integration, `N` die Anzahl der Intervalle und
`f(x::Float64)::Float64` die zu integrierende Funktion ist. Siehe Abbildung 2.

f) (0,25 Punkte) Betrachten Sie die resultierenden Diagramme und beschreiben Sie, was Sie beobachten können. Welche Methode schneidet am Besten ab? Warum denken Sie, dass dies der Fall ist?

$$\mathcal{I}_R = \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot h \tag{12}$$

$$\mathcal{I}_T = \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot h \tag{13}$$

$$\mathcal{I}_S = \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_{i-1}) + 4f((x_i + x_{i-1})/2) + f(x_i)}{6} \cdot h \tag{14}$$

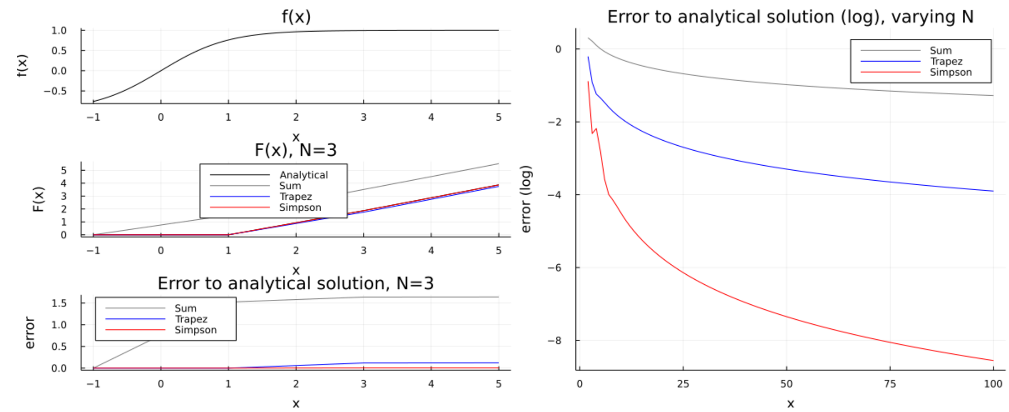

Abbildung 2: $f(x), F(x)$ und Fehler

(3) (2 Punkte) Die Diffusions Gleichung ist ein Differentialgleichung für die Beschreibung von Wärmeleitung, d.h.: die Ausbreitung von Wärme über die Zeit in einer bestimmten Region. Sie ist eine parabolische partielle Differentialgleichung und ihre normierte Form in einer Dimension ist gegeben durch Formel 15. Zur Lösung des Problems müssen $u(0,t)$ am Rand (Randbedingung) und der Anfangszustand $u(x,0)$ (Anfangsbedingung) bekannt sein. Verwenden Sie (siehe Formel 16) eine homogene *Dirichlet*-Randbedingung ("die Werte angibt, die eine Lösung entlang des Randes des Gebiets annehmen muss") und eine anfängliche Wärmeverteilung für $-1 < x < 1$ und $t > 0$.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \tag{15}$$

$$u(-1,t) = u(1,t) = \pi \tag{16}$$

$$u(x,0) = e^{-x} \tag{17}$$

Ein solches Problem kann numerisch durch finite Differenzen approximiert werden: der Raumbereich wird in $x_0, \ldots, x_I$ mit einer Schrittweite h und der Zeitbereich in $t_0, \ldots, t_N$ mit einer Schrittweite τ diskretisiert. Auf einem solchen Gitter kann $u(x,t)$ in jedem Punkt $u(x_i, t_n)$ approximiert werden. Dazu kann eine explizite Methode abgeleitet werden, indem ein Vorwärtsdifferenzschema (siehe $D_+ f(x)$ in Formel 6) zur Berechnung der Zeitableitung $\frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_n)$ an der Position x_i verwendet wird.

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x_i, t_n) = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\tau} \tag{18}$$

Ein zentrales Differenzschema zweiter Ordnung kann zur Schätzung der Raumableitung $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_i, t_n)$ verwendet werden. Die Formel für ein zentrales Differenzschema zweiter Ordnung erhält man durch zweimalige Anwendung der zentralen Differenz erster Ordnung, so dass $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_i, t_n)$ approximiert werden kann.

$$D_c^{(2)} f(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \tag{19}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_i, t_n) = \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n)}{h^2} \tag{20}$$

a) (0.5 Punkte) Leiten Sie die Formel für $u(x_i, t_{n+1})$ her: Setzen Sie $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ und $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$ in die Diffusionsgleichung mit dem Vorwärts Differenzschema über die Zeit und dem Zentralen Differenzschema zweiter Ordnung über den Raum ein und lösen Sie nach $u(x_i, t_{n+1})$ auf.

b) (1.5 Punkte) Implementieren Sie den Aktualisierungsschritt von $u(x,t)$ für einen Zeitschritt in der Template Datei `diffusion.jl` (`explicitStep(us::Vector, h::Float64, tau::Float64)::Vector`). Verwenden Sie Abbildung 3 als Referenz.

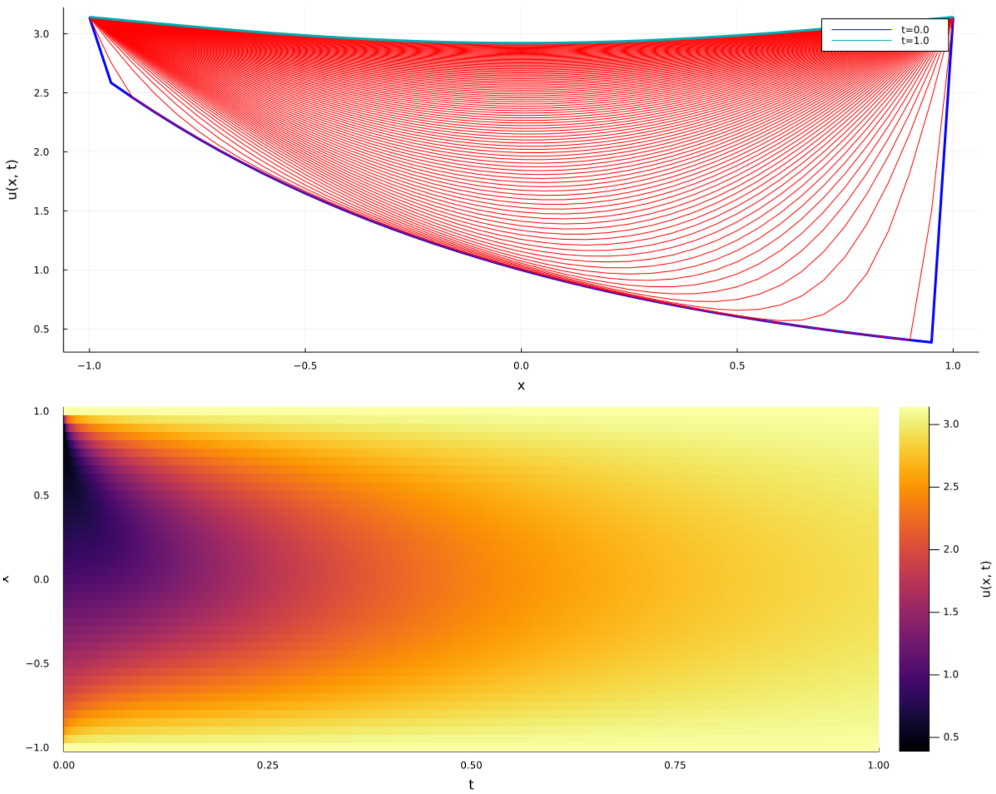

Abbildung 3: Ergebnis aus Formel 16

(4) **Bonus**: (1 Punkte) Transformieren Sie das folgende Polynom mit Hilfe des Hornerschen Schemas. Berechnen Sie die Anzahl der Rechenoperationen vor und nach der Transformation. Führen Sie die Berechnungen für (a) und (b) explizit von Hand durch.

(a) (0.25 points) $2x^6 - 5x^5 + x^2 - 6x + 1$

(b) (0.5 points) $12x^7 + 2x^4y^6 + x^3y^4 + x^2(-3 - 7y^4) - 2 + 9y + 2y^5$.

Hinweis: Sortieren Sie die Terme nach x-, y- und xy-Termen und transformieren Sie jede der drei Gruppen separat.

(c) (0.25 Punkte) Implementieren Sie die transformierte Funktion aus (b) in den vorbereitete Julia-Funktion `h(x::Float64, y::Float64)::Float64` in `bonus.jl`. Das Skript misst die Laufzeit für die Auswertung des Polynoms für jede Zelle auf einem Gitter der Größe $N \times N, N = 1024$ und gibt dann die durchschnittliche Laufzeit für beide Funktionen über drei Programmausführungen an. Darüber hinaus werden die Ergebnisse und dessen Differenz als Heatmaps dargestellt (siehe Abbildung 4). Verwenden Sie die durchschnittlichen Laufzeiten, um den Geschwindigkeitszuwachs gegenüber der ursprünglichen Funktion zu berechnen.

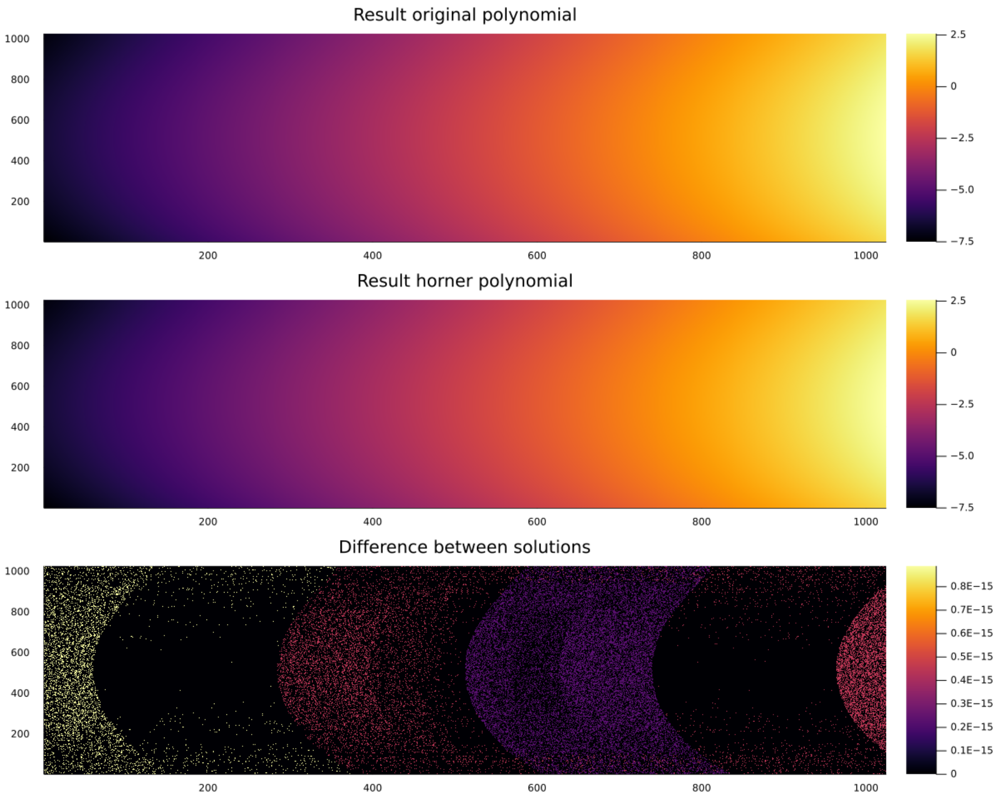

Abbildung 4: Ergebnis aus 4c