1️⃣

Blatt 1

Aufgabe 1: Asymptotische Wachstum

Ordnen Sie die nachfolgenden Funktionen anhand ihres asymptotischen Wachstums. Begründen Sie Ihre Antwort:

$$4n\ log\ n + 2n,\ 2^{10},\ 2^{log_2 n},\ 3n + 100\ log\ n,\ 4n,\ 2^n,\ n^2 + 10n,\ n^3,\ n\ log\ n$$

2^n	$\mathcal{O}(2^n)$exponentiel
n^3	$\mathcal{O}(n^3)$ qubisch
$n^2 + 10n$	$\mathcal{O}(n^2)$ quadratisch
$4n\ log\ n + 2n$	$\mathcal{O}(n\ log\ n)$ logarithmisch linear
$n\ log\ n$	$\mathcal{O}(n\ log\ n)$ logarithmisch linear
$3n + 100\ log\ n$	$\mathcal{O}(n)$ linear
$4n$	$\mathcal{O}(n)$ llinear
$2^{log_2 n}$	$\mathcal{O}(n)$ linear
2^{10}	$\mathcal{O}(2^{10})$ konstante

Aufgabe 2: Komplexität

Beweise folgende Funktionen:

💡 $$\frac{log_b\ n}{log_b\ a} = log_a\ n = x$$

a) $f(n) = 5n^2 + 3n\ log_2\ n + 2n + 5 \in \mathcal{O}(n^2)$

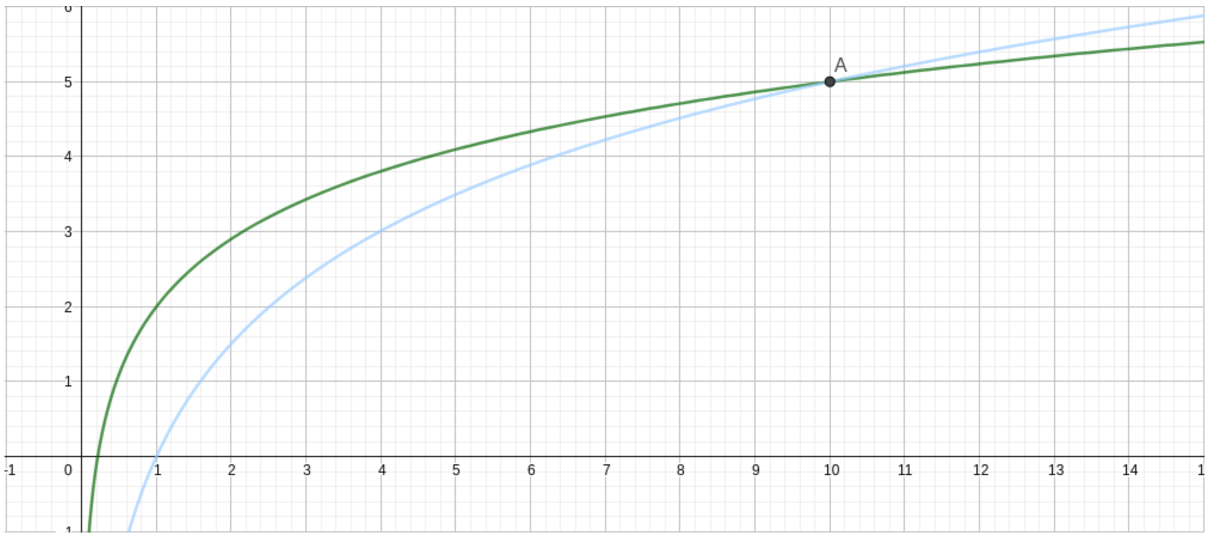
$$n_0 = 1; c = 5 + 3 + 2 + 5 = 15$$
$$5n^2 + 3n\ log_2\ n + 2n + 5 \leq 15n^2$$

b) $g(n) = 20n^3 + 10n\ log_2 n + 5 \in \mathcal{O}(n^3)$

$$n_0 = 1; c = 20 + 10 + 5 = 35$$
$$20n^3 + 10n\ log_2 n + 5 \leq 35n^3$$

c) $h(n) = 3\ log_2\ n + 2 \in \mathcal{O}(log\ n)$

$$n_0 = 10, c = 3 + 2 = 5$$
$$3\ log_2\ n + 2 \leq 5\ log\ n = 3\ log\ n + 2\ log\ n$$



Grün = h(n); Blau = 3 log n + 2 log n = 5 log n

d) $k(n) = 2^{n+2} \in \mathcal{O}(2^n)$

$n_0 = 1; c = 4$
$2^{n+2} \leq 2^{n+2n}$

e) $l(n) = 2n + 100\ log_2\ n \in \mathcal{O}(n)$

$n_0 = 1; c = 2 + 100$
$2n + 100\ log_2\ n \leq 102n$

Aufgabe 3: Komplexität von Polynomfunktionen

Sei $p(n)$ eine Polynomfunktion von Grad d mit positiven Koeffizenten $a_i > 0$:

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

Beweisen Sie für jede Konstante $k \geq d$ und $n \geq n_0 = 1$, dass $p(n) \in \mathcal{O}(n^k)$.

$Z.Z : p(n) \in (n^k)$

$d = 3$

$p(n) = a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + a_3 n^3 \Rightarrow a_0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + a_3 n^3$

$c = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$

$c * g(n) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) * n^k = a_o n^k + a_1 n^k + a_2 n^k + a_3 n^k$

Es gelte $d \leq k$ und sei $a_i > 0$:

$p(n) \leq c * g(n) \Rightarrow a_0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + a_3 n^3 \leq a_0 n^k + a_1 n^k + a_2 n^k + a_3 n^k$