1. Lineare Gleichungssysteme, Körper und Matrizen.

1.1. Entscheiden Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}):$$

[W] $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

[f] $\mathrm{rang}(A) = 2$.

4 [W] Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A besitzt eine Lösung.

[f] A lässt sich mit elementaren Zeilenumformungen nicht zur Einheitsmatrix I_3 transformieren.

1.2. Entscheiden Sie:

+ [f] Eine quadratische Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist die Einheitsmatrix.

+ [f] Besitzt eine Matrix A (über dem Körper K) mehr Zeilen als Spalten, so besitzt das homogene lineare Gleichungssystem mit A als Koeffizientenmatrix nur die triviale Lösung.

3 [ ] Wenn ein homogenes lineares Gleichungssystem nur die triviale Lösung besitzt, besitzt jedes inhomogene System mit derselben Koeffizientenmatrix eine Lösung.

+ [f] Jedes inhomogene System linearer Gleichungen besitzt mindestens eine Lösung.

1.3. Sei K ein Körper. Entscheiden Sie, ob für alle $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$ gilt:

[ ] Es gilt $L(A, b) = \{b + a \mid a \in L(A, 0)\}$.

[ ] Aus $L(A, 0) \neq \{0\}$ folgt $L(A, b) \neq \emptyset$.

2 +W [ ] Ist $c \in L(A, 0)$ und $d \in L(A, b)$, so ist $c + d \in L(A, b)$.

+W [K] Sind $c, d \in L(A, b)$, so ist $c - d \in L(A, 0)$.

1.4. Sei K ein Körper. Entscheiden Sie:

+ [W] Für $A \in \mathrm{GL}_m(K)$ gilt $A^{-1} \in \mathrm{GL}_m(K)$.

− [W] $\mathrm{GL}_m(K)$ ist eine Gruppe bezüglich Addition von Matrizen.

1 + [W] Für $A \in \mathrm{GL}_m(K)$ gilt $\mathrm{rang}(A) = m$.

[ ] $\mathrm{Mat}_4(K)$ bildet mit der bekannten Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper.

1.5. Entscheiden Sie:

[ ] $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ist ein Ring (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

[f] $\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

3 [f] $Z/6\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

[f] In einem Körper kann jedes Element multiplikativ invertiert werden.

1.6. Entscheiden Sie:

W [f] Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.

[ ] Für $a \in \mathbb{C}$ folgt aus $a^2 = 0$ immer $a = 0$.

3 [f] Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $z\overline{z} = \frac{1}{|z|^2}$.

[f] Für $z \in \mathbb{C}$ ist $|z|$ stets eine nichtnegative rationale Zahl.
reelle

1.4. Sei K ein Körper. Entscheiden Sie:

+ [W] Für $A \in \mathrm{GL}_m(K)$ gilt $A^{-1} \in \mathrm{GL}_m(K)$.

− [W] $\mathrm{GL}_m(K)$ ist eine Gruppe bezüglich Addition von Matrizen.

1 + [W] Für $A \in \mathrm{GL}_m(K)$ gilt $\mathrm{rang}(A) = m$.

[ ] $\mathrm{Mat}_4(K)$ bildet mit der bekannten Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper.

1.5. Entscheiden Sie:

[ ] $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ist ein Ring (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

[f] $\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

3 [f] $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

[f] In einem Körper kann jedes Element multiplikativ invertiert werden.

1.6. Entscheiden Sie:

W [f] Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.

[ ] Für $a \in \mathbb{C}$ folgt aus $a^2 = 0$ immer $a = 0$.

3 [f] Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $z\overline{z} = \frac{1}{|z|^2}$.

[f] Für $z \in \mathbb{C}$ ist $|z|$ stets eine nichtnegative rationale Zahl.

reelle

2. Vektorräume und lineare Abbildungen.

2.1. Sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Entscheiden Sie:

− [f] Jedes minimale Erzeugendensystem von V ist eine Basis von V.

\+ [f] Jede minimale linear unabhängige Teilmenge von V ist eine Basis von V.

2 + [f] V hat unendlich viele Elemente.

\+ [w] V ist endlich dimensional.

2.2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $V = \mathbb{Q}[t]$ jeweils $\mathbb{Q}$-Untervektorräume sind (bezüglich der bekannten Addition und skalaren Multiplikation):

[ ] $\{p \in V \mid p' = t\}$.

2 [w] $\{p \in V \mid p'(1) = 0\}$.

[f] $\{p \in V \mid p(0) = 1\}$.

[ ] $\{p \in V \mid p(a) \neq 0 \text{ für alle } 0 < a \in \mathbb{Q}\}$.

2.3. Sei V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Entscheiden Sie:

[ ] Es ist $U_1 \cap U_2$ der größte in U_1 und U_2 enthaltene Untervektorraum.

[f] Es ist $U_1 \cup U_2$ stets ein Untervektorraum von V.

2 [ ] Aus $U_1 \neq V$ und $U_2 \neq V$ folgt $U_1 + U_2 \neq V$.

[f] Es gilt stets $\dim_K(U_1 + U_2) - \dim_K(U_1) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2)$.

2.4. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

W ☐ Es gilt $\dim \operatorname{Bild}(\varphi) = \dim(V) + \dim \operatorname{Kern}(\varphi)$.

☐ W Es ist $\operatorname{Kern}(\varphi)$ ein Untervektorraum von V.

2

☐ Es gilt stets $\dim \operatorname{Bild}(\varphi) < \dim V$.

☐ Aus $\dim \operatorname{Kern}(\varphi) > 0$ folgt, dass φ nicht surjektiv ist.

2.5. Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}$-linear sind:

— ☐ W $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1; (a, b)^t \mapsto a^2 + b$.

f ☐ W $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y)^t \mapsto (x - y, y)$.

1

☐ $\varphi\colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]; p \mapsto p' + p(1)$.

+ ☐ f $\varphi\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1; a \mapsto 7a - 1$.

3. Determinanten.

3.1. Sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Entscheiden Sie:

- [ ] Es gilt $\det(A) = \det(-A)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$.
- \+ [f] Die Determinante einer Matrix ändert sich beim Vertauschen zweier verschiedener Spalten nicht.
- 1 − [f] Die Determinante $\det\colon \mathrm{Mat}_m(K) \to K$ ist K-linear in jeder Spalte.
- \+ [w] $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A \in \mathrm{GL}_m(K)$.

3.2. Entscheiden Sie:

- − [f] Es gilt $\det(A)A^{-1} = A^{\mathrm{adj}}$ für alle $A \in \mathrm{GL}_7(\mathbb{R})$.
- \+ [f] $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ ist genau dann invertierbar wenn $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = 2$ gilt.
- 1 + [w] Die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonaleinträge.
- [ ] Für $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}^3$ und $\sigma \in S_3$ gilt $\det(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\det(a_1, a_2, a_3)$.

3.3. Entscheiden Sie:

- w [~~f~~] Es gilt

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} = 0.$$

- 4 [f] Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{adj}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- [f] Die Leibnitzformel zur Berechung von Determinanten gilt nur für Matrizen der Größe 3.
- 1 [f] Hat eine Matrix Rang 2, so hat jede 2×2-Untermatrix Determinante null.

4. Allgemeine Beweisaufgaben.

4.1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$ zwei Vektoren. Entscheiden Sie:

1

- [ ] Aus $\varphi(v_1) = v_1$ folgt, dass φ nichttrivialen Kern hat.
- [w] Sind $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$ linear unabhängig, so auch v_1, v_2.
- [ ] Aus $\varphi(v_1) = v_2$ und $\varphi(v_2) = v_1$ folgt, dass v_1, v_2 linear unabhängig sind.
- [ ] Aus $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ folgt $v_2 - v_1 \in \mathrm{Bild}(\varphi)$.

4.2. Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$. Entscheiden Sie:

2

- [ ] Aus $\mathrm{rang}(A) < m$ folgt $BA = 0$ für ein $0 \neq B \in \mathrm{Mat}_m(K)$.
- [f] Es gilt $\det(A + A) = \det(A)^2$.
- [w] Es gilt $\det(A^{\mathrm{adj}}) = \det(A)^{m-1}$.
- [ ] Aus $A^2 = A$ folgt $\det(A) \in \{0, 1\}$.

5.3. Sei K ein Körper und V, W zwei K-Vektorräume. Entscheiden Sie:

2

- [x] Ist V endlich-dimensional, so gilt $V \cong V'$.
- [W] Für den Dualraum V' von V gilt $V' = \mathrm{Lin}_K(V, K)$.
- [f] Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Für die duale Abbildung von φ gilt dann $\varphi^*: W \to V$.
- [ ] Es gilt $\dim((K^m)') = m + 1$.

5. Vertiefung.

5.1. Entscheiden Sie:

- ☐ Die Gleichung $x^{14} - \pi x^5 + 12x = i$ besitzt in $\mathbb{C}$ eine Lösung.
- – f Einheitswurzeln haben Betrag ≤ 1.
- 1 + f Die komplexe Zahl i ist eine primitive 2-te Einheitswurzel.
- + w Es gibt in $\mathbb{C}$ genau 11 verschiedene 11-te Einheitswurzeln.

5.2. Sei $\varphi\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q}); A \mapsto BA$, mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entscheiden Sie:

- + f Es gibt eine Basis $\underline{v}$ von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$ mit $M_{\underline{v},\underline{v}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 0 – f Es gibt eine Basis $\underline{v}$ von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$ mit $M_{\underline{v},\underline{v}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ Jede Darstellungsmatrix von φ ist äquivalent zu I_2.
- ☐ φ ist injektiv.

1.4. Sei K ein Körper. Entscheiden Sie:

- \+ [W] Für $A \in \mathrm{GL}_m(K)$ gilt $A^{-1} \in \mathrm{GL}_m(K)$.
- − [W] $\mathrm{GL}_m(K)$ ist eine Gruppe bezüglich Addition von Matrizen.
- 1 + [W] Für $A \in \mathrm{GL}_m(K)$ gilt $\mathrm{rang}(A) = m$.
- [ ] $\mathrm{Mat}_4(K)$ bildet mit der bekannten Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper.

1.5. Entscheiden Sie:

- [ ] $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ist ein Ring (mit der bekannten Addition und Multiplikation).
- [f] $\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).
- 3 [f] $Z/6\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).
- [f] In einem Körper kann jedes Element multiplikativ invertiert werden.

1.6. Entscheiden Sie:

- W [f] Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.
- [ ] Für $a \in \mathbb{C}$ folgt aus $a^2 = 0$ immer $a = 0$.
- 3 [f] Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $z\overline{z} = \frac{1}{|z|^2}$.
- [f] Für $z \in \mathbb{C}$ ist $|z|$ stets eine nichtnegative ~~rationale~~ reelle Zahl.

1.4. Sei K ein Körper. Entscheiden Sie:

+ W Für $A \in \mathrm{GL}_m(K)$ gilt $A^{-1} \in \mathrm{GL}_m(K)$.

− W $\mathrm{GL}_m(K)$ ist eine Gruppe bezüglich Addition von Matrizen.

1 + W Für $A \in \mathrm{GL}_m(K)$ gilt $\mathrm{rang}(A) = m$.

$\mathrm{Mat}_4(K)$ bildet mit der bekannten Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper.

1.5. Entscheiden Sie:

$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ist ein Ring (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

f $\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

3 f $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

f In einem Körper kann jedes Element multiplikativ invertiert werden.

1.6. Entscheiden Sie:

W Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.

Für $a \in \mathbb{C}$ folgt aus $a^2 = 0$ immer $a = 0$.

3 f Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $z\overline{z} = \frac{1}{|z|^2}$.

f Für $z \in \mathbb{C}$ ist $|z|$ stets eine nichtnegative rationale Zahl.
reelle

2. Vektorräume und lineare Abbildungen.

2.1. Sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Entscheiden Sie:

− [f] Jedes minimale Erzeugendensystem von V ist eine Basis von V.

+ [f] Jede minimale linear unabhängige Teilmenge von V ist eine Basis von V.

2 + [f] V hat unendlich viele Elemente.

+ [w] V ist endlich dimensional.

2.2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $V = \mathbb{Q}[t]$ jeweils $\mathbb{Q}$-Untervektorräume sind (bezüglich der bekannten Addition und skalaren Multiplikation):

[ ] $\{p \in V \mid p' = t\}$.

2 [w] $\{p \in V \mid p'(1) = 0\}$.

[f] $\{p \in V \mid p(0) = 1\}$.

[ ] $\{p \in V \mid p(a) \neq 0 \text{ für alle } 0 < a \in \mathbb{Q}\}$.

2.3. Sei V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Entscheiden Sie:

[ ] Es ist $U_1 \cap U_2$ der größte in U_1 und U_2 enthaltene Untervektorraum.

[f] Es ist $U_1 \cup U_2$ stets ein Untervektorraum von V.

2 [ ] Aus $U_1 \neq V$ und $U_2 \neq V$ folgt $U_1 + U_2 \neq V$.

[f] Es gilt stets $\dim_K(U_1 + U_2) - \dim_K(U_1) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2)$.

2.4. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

W ☐ Es gilt $\dim \mathrm{Bild}(\varphi) = \dim(V) + \dim \mathrm{Kern}(\varphi)$.

☐ W Es ist $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ein Untervektorraum von V.

2 ☐ Es gilt stets $\dim \mathrm{Bild}(\varphi) < \dim V$.

☐ Aus $\dim \mathrm{Kern}(\varphi) > 0$ folgt, dass φ nicht surjektiv ist.

2.5. Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}$-linear sind:

− ☐ W $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1; (a,b)^t \mapsto a^2 + b$.

f ☐ W $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x,y)^t \mapsto (x - y, y)$.

1 ☐ $\varphi\colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]; p \mapsto p' + p(1)$.

+ ☐ f $\varphi\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1; a \mapsto 7a - 1$.

3. Determinanten.

3.1. Sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Entscheiden Sie:

- [ ] Es gilt $\det(A) = \det(-A)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$.
- \+ [f] Die Determinante einer Matrix ändert sich beim Vertauschen zweier verschiedener Spalten nicht.
- 1 − [f] Die Determinante $\det\colon \mathrm{Mat}_m(K) \to K$ ist K-linear in jeder Spalte.
- \+ [w] $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A \in \mathrm{GL}_m(K)$.

3.2. Entscheiden Sie:

- − [f] Es gilt $\det(A)A^{-1} = A^{\mathrm{adj}}$ für alle $A \in \mathrm{GL}_7(\mathbb{R})$.
- \+ [f] $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ ist genau dann invertierbar wenn $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = 2$ gilt.
- 1 + [w] Die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonaleinträge.
- [ ] Für $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}^3$ und $\sigma \in S_3$ gilt $\det(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\det(a_1, a_2, a_3)$.

3.3. Entscheiden Sie:

- w [f] Es gilt
$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} = 0.$$
- 4 [f] Es gilt
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{adj}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
- [f] Die Leibnitzformel zur Berechung von Determinanten gilt nur für Matrizen der Größe 3.
- 1 [f] Hat eine Matrix Rang 2, so hat jede 2×2-Untermatrix Determinante null.

4. Allgemeine Beweisaufgaben.

4.1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$ zwei Vektoren. Entscheiden Sie:

- Aus $\varphi(v_1) = v_1$ folgt, dass φ nichttrivialen Kern hat.
- W Sind $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$ linear unabhängig, so auch v_1, v_2.
- Aus $\varphi(v_1) = v_2$ und $\varphi(v_2) = v_1$ folgt, dass v_1, v_2 linear unabhängig sind.
- Aus $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ folgt $v_2 - v_1 \in \mathrm{Bild}(\varphi)$.

1

4.2. Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$. Entscheiden Sie:

- Aus $\mathrm{rang}(A) < m$ folgt $BA = 0$ für ein $0 \neq B \in \mathrm{Mat}_m(K)$.
- f Es gilt $\det(A + A) = \det(A)^2$.
- W Es gilt $\det(A^{\mathrm{adj}}) = \det(A)^{m-1}$.
- Aus $A^2 = A$ folgt $\det(A) \in \{0, 1\}$.

2

5.3. Sei K ein Körper und V, W zwei K-Vektorräume. Entscheiden Sie:

2

- [•] Ist V endlich-dimensional, so gilt $V \cong V'$.
- [W] Für den Dualraum V' von V gilt $V' = \mathrm{Lin}_K(V, K)$.
- [f] Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Für die duale Abbildung von φ gilt dann $\varphi^*: W \to V$.
- [ ] Es gilt $\dim((K^m)') = m + 1$.

5. Vertiefung.

5.1. Entscheiden Sie:

☐ Die Gleichung $x^{14} - \pi x^5 + 12x = i$ besitzt in $\mathbb{C}$ eine Lösung.

– f Einheitswurzeln haben Betrag ≤ 1.

1 + f Die komplexe Zahl i ist eine primitive 2-te Einheitswurzel.

+ w Es gibt in $\mathbb{C}$ genau 11 verschiedene 11-te Einheitswurzeln.

5.2. Sei $\varphi\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q});\, A \mapsto BA$, mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entscheiden Sie:

+ f Es gibt eine Basis $\underline{v}$ von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$ mit $M_{\underline{v},\underline{v}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

0 – f Es gibt eine Basis $\underline{v}$ von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$ mit $M_{\underline{v},\underline{v}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ Jede Darstellungsmatrix von φ ist äquivalent zu I_2.

☐ φ ist injektiv.