Wie im Proseminar bereits besprochen habe ich noch einmal ausführlich die erste Aufgabe aufgeschrieben. (ab $\sigma_4$)

## Aufgabe 41

Man kann $\sigma_4$ als Hintereinanderausfühurngen von verschieden Permutationen ansehen.

$$\sigma_4 = \tau_1\tau_2\tau_3,$$

wobei $\tau_1 = (1432), \quad \tau_2 = (5674)$, und $\tau_3 = (12)$. Beispielsweise können wir das Bild von 1 betrachten.

$$\sigma_4(1) = \tau_1(\tau_2(\tau_3(1))) = \tau_1(\tau_2(2)) = \tau_1(2) = 1$$

Man betrachtet also jede Permutation einzeln. Ich werde nun für die Permutationen $\sigma_4, \sigma_5$ und $\sigma_6$ die Darstellung in Matrixform berechnen.

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 4 & 1 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ich denke wie man auf die restlichen Darstellungen kommt, war hier nicht das Problem.

## Aufgabe 44

Für jeden der die Aufgabe 44 nicht ganz verstanden hat. Hier noch einmal die grundlegende Idee:

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

Zu zeigen ist:

$$\det(A) = \det(B) \cdot \det(D)$$

Eine Idee ist es die Matrix $A$ mithilfe von Elementarmatrizen in untere Dreiecksform zu bringen.

## 1. Schritt

Als erstes werden die Matrix $B$ in untere Dreiecksform bringen. Es gibt also eine Matrix $P_1$, die ein Produkt aus Elemenatrmatrizen ist, für die gilt

$$B \cdot P_1 = \hat{B},$$

wobei $\hat{B}$ eine Matrix in unterer Dreiecksform ist.
Analog können wir diese Überlegungen für die Matrix $D$ machen:

$$D \cdot P_2 = \hat{D},$$

wobei wiederum $\hat{D}$ eine Matrix in unterer Dreiecksform ist.

## 2. Schritt

Nun kann man sehen, dass

$$A \cdot \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = A \cdot P = \begin{pmatrix} B \cdot P_1 & 0 \\ C \cdot P_1 & D \cdot P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{B} & 0 \\ C \cdot P_1 & \hat{D} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist nun in unterer Dreiecksform und daher ist die Determinante leicht zu berechnen. Es wird einfach nur die Diagonale multipliziert. Was hier auch zu beachten ist, ist, dass die Determinante der Blockmatrix $P$ einfach nur das Produkt der Determinante der einzelnen Matrizen $P_1, P_2$ ist.

## 3. Schritt

Nach Satz 4.2.4 wissen wir, dass $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. Nun können wir folgende Berechnungen machen

$$\begin{aligned}
\det(A) \cdot \det(P) &= \det(A \cdot P) = \det(\hat{B}) \cdot \det(\hat{D}) \\
&= \det(B \cdot P_1) \cdot \det(D \cdot P_2) \\
&= \det(B) \cdot \det(P_1) \cdot \det(D) \cdot \det(P_2) \\
&= \det(B) \cdot \det(D) \cdot \det(P_1) \cdot \det(P_2) \\
&= \det(B) \cdot \det(D) \cdot \det(P).
\end{aligned}$$

Würde nun $\det(P) = 0$ sein, dann wäre $A$ nicht invertierbar und dadurch würde man sehen, dass auch entweder $B$ und/oder $D$ nicht invertierbar wären. Daher würde auch in diesem Fall die Gleichung stimmen.