# Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 8

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
(z.B. bis So. 29. November 2020, 23:59 Uhr)

**Aufgabe 29**
Berechnen Sie zur gegebenen Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ eine Zerlegung als Produkt von Elementarmatrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Lösung:*

$$E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A_1.$$

$$E_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A_2.$$

$$E_3 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A_3.$$

$$E_4 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A_4.$$

$$E_5 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A_5.$$

$$E_6 \cdot A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Wir bekommen also $E_6 \cdot E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_3$ und damit

$$\begin{aligned} A &= E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot E_4^{-1} \cdot E_5^{-1} \cdot E_6^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

**Häufige Probleme bei Aufgabe 29:**

- Nachdem man die Matrix durch Multiplikation mit Elementarmatrizen von links zur Einheitsmatrix gemacht hat, muss man alle benutzten Elementarmatrizen invertieren und ihre Reihenfolge vertauschen. Nur so bekommt man wirklich eine Darstellung von $A$.

**Aufgabe 30**

Sei $K$ ein Körper und $V$ ein $K$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in K, v \in V$ gilt:

(a) $0_K \cdot v = 0_V$.
(b) $(-\alpha) \cdot v = -(\alpha \cdot v)$.
(c) Aus $v \neq 0_V$ und $\alpha_1 \neq \alpha_2$ folgt $\alpha_1 \cdot v \neq \alpha_2 \cdot v$.
Insbesondere besitzt jeder Vektorraum $V \neq \{0_V\}$ über einem unendlichen Körper unendlich viele Elemente.

*Lösung:*

(a)

$$\begin{aligned} 0_K \cdot v = 0_K \cdot v + 0_V &= 0_K \cdot v + 0_K \cdot v + (-(0_K \cdot v)) \\ &= (0_K + 0_K) \cdot v - (0_K \cdot v) \\ &= 0_K \cdot v - 0_K \cdot v = 0_V. \quad \checkmark \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$(\alpha \cdot v) + ((-\alpha) \cdot v) = (\alpha + (-\alpha)) \cdot v = 0_K \cdot v = 0_V,$$

wobei wir (a) benutzt haben. Also ist $(-\alpha) \cdot v$ das additiv inverse Element zu $\alpha \cdot v$, und das ist genau die zu zeigende Aussage.
Alternative Argumentation:

$$\begin{aligned} (-\alpha) \cdot v = (-\alpha) \cdot v + 0_V &= (-\alpha) \cdot v + \alpha \cdot v - \alpha \cdot v \\ &= (-\alpha + \alpha) \cdot v - \alpha \cdot v \\ &= 0_K \cdot v - \alpha \cdot v = 0_V - \alpha \cdot v = -\alpha \cdot v. \quad \checkmark \end{aligned}$$

(c) Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Nehmen wir also an, dass $v \neq 0_V$ und $\alpha_1 \neq \alpha_2$, aber $\alpha_1 \cdot v = \alpha_2 \cdot v$ gilt.
Durch Addieren von $x = (-\alpha_2) \cdot v$ auf beiden Seiten erhalten wir

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot v = \alpha_1 \cdot v + (-\alpha_2) \cdot v = \alpha_2 \cdot v + (-\alpha_2) \cdot v \overset{(b)}{=} 0_V.$$

Aus $\alpha_1 \neq \alpha_2$ folgt $(\alpha_1 - \alpha_2) \neq 0$ und da $K$ ein Körper ist existiert also $(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}$ . Wir multiplizieren beide Seiten der oberen Gleichung mit $(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}$ und erhalten

$$v = 1 \cdot v = (\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot v = (\alpha_1 - \alpha_2)^{-1} \cdot 0_V = 0_V. \quad ⚡$$

Die letzte Gleichheit hier beweist man ganz ähnlich wie (a). Das widerspricht klarerweise der Annahme $v \neq 0_V$.

Wenn also der Vektorraum ein Element $v \neq 0_V$ enthält, bekommen wir für jedes Element $\alpha \in K$ ein Element $\alpha v \in V$. Da $V \supseteq \{\alpha v \mid \alpha \in K\}$ gilt

$$|V| \geq |\{\alpha v \mid \alpha \in K\}| = |K| = \infty.$$

□

**Häufige Probleme bei Aufgabe 30:**

- Die Aussage soll für jeden beliebigen $K$-Vektorraum gezeigt werden, nicht nur für den $K^m$. Man darf also auch hier im Beweis wieder nur die Vektorraumaxiome benutzen.

**Aufgabe 31**

Sei $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume von V? (begründen Sie Ihre Aussage)

(a) $U_1 = \{f \in V \mid f(1) = f(2)\}$
(b) $U_2 = \{f \in V \mid f(3) = 1\}$
(c) $U_3 = \{f \in V \mid \forall r \in \mathbb{R}\colon f(r) \neq 0\}$
(d) $U_4 = \{f \in V \mid \forall r \in \mathbb{R}\colon |f(r)| \leq 1\}$
(e) $U_5 = \{f \in V \mid \exists B \in \mathbb{R}\ \forall r \in \mathbb{R}\colon |f(r)| \leq B\}$.

*Lösung:*

(a) $U_1 = \{f \in V \mid f(1) = f(2)\}$. ✓
Für die Nullfunktion $f_0$ (d.h. $f_0(r) = 0$ für alle $r \in \mathbb{R}$) gilt $f_0(1) = 0 = f_0(2)$, also $f_0 \in U_1$, also $U_1 \neq \emptyset$.
Für $f, g \in U_1$ gilt $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = f(2) + g(2) = (f+g)(2)$, also $f + g \in U_1$.
Für $f \in U_1$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt $(rf)(1) = rf(1) = rf(2) = (rf)(2)$, also $rf \in U_1$.
Also ist $U_1$ ein UVR.

(b) $U_2 = \{f \in V \mid f(3) = 1\}$. ✗
Für die konstante Einsfunktion $f_1$ (d.h. $f_1(r) = 1$ für alle $r \in \mathbb{R}$) gilt $f_1 \in U_2$. Für den Skalar $0 \in \mathbb{R}$ gilt aber $(0 \cdot f_1)(3) = 0 \cdot f_1(3) = 0 \neq 1$, also $0 \cdot f_1 \notin U_2$, und damit ist $U_2$ kein UVR.

(c) $U_3 = \{f \in V \mid \forall r \in \mathbb{R}\colon f(r) \neq 0\}$. ✗
Für $f_1$ wie in (b) gilt $f_1 \in U_3$. Aber für $0 \in \mathbb{R}$ haben wir $(0 \cdot f_1)(3) = 0 \cdot f_1(3) = 0$, also $0 \cdot f_1 \notin U_3$ und daher ist $U_3$ kein UVR.

(d) $U_4 = \{f \in V \mid \forall r \in \mathbb{R}\colon |f(r)| \leq 1\}$ ✗
Für $f_1$ wie in (b) gilt $f_1 \in U_4$. Aber für $5 \in \mathbb{R}$ haben wir $(5 \cdot f_1)(0) = 5 > 1$, also $5 \cdot f_1 \notin U_4$ und deswegen ist $U_4$ kein UVR.

(e) $U_5 = \{f \in V \mid \exists B \in \mathbb{R}\ \forall r \in \mathbb{R}\colon |f(r)| \leq B\}$. ✓
Für $f_0$ wie in (a) gilt $f_0 \in U_5$ (zum Beispiel mit $B = 0$), also $U_5 \neq \emptyset$.
Für $f, g \in U_5$ existieren $B_f, B_g$, sodass $|f(r)| \leq B_f$ und $|g(r)| \leq B_g$ für alle $r \in \mathbb{R}$. Damit gilt für alle $r \in \mathbb{R}$

$$|(f+g)(r)| = |f(r) + g(r)| \leq |f(r)| + |g(r)| \leq B_f + B_g =: B_{f+g}.$$

Also ist $f + g \in U_5$. Genauso gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $r \in \mathbb{R}$

$$|(\lambda f)(r)| = |\lambda \cdot f(r)| = |\lambda||f(r)| \leq |\lambda| B_f =: B_{\lambda f},$$

also ist $\lambda f \in U_5$. Somit ist $U_5$ ein UVR.

□

**Häufige Probleme bei Aufgabe 31:**

- Achten Sie darauf, dass Sie Funktionen und Funktionswerte nicht verwechseln! Die Räume hier bestehen aus Funktionen, aber sind jeweils durch Bedingungen an die Funktionswerte definiert.
- Nicht vergessen zu zeigen, dass ein Untervektorraum nicht leer sein darf!

**Aufgabe 32**

Sei $K$ ein Körper und $m \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $M = (M_{ij})_{i,j=1,\ldots,m} \in \mathrm{Mat}_m(K)$ hat **obere Dreiecksgestalt**/ ist eine **obere Dreiecksmatrix**, wenn für $i > j$ stets $M_{ij} = 0$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass die oberen Dreiecksmatrizen einen Untervektorraum von $\mathrm{Mat}_m(K)$ bilden.

(b) Zeigen Sie, dass die oberen Dreiecksmatrizen einen Unterring von $\mathrm{Mat}_m(K)$ bilden.

(Hinweis: Insbesondere ist zu zeigen, dass für $A, B \in \mathrm{Mat}_m(K)$ mit oberer Dreiecksgestalt auch $A + B, A \cdot B$ bzw. die neutralen und additiv inversen Elemente obere Dreiecksgestalt haben.)

*Lösung:* Wir bezeichnen die Menge der oberen Dreiecksmatrizen mit $\Delta$ .

(a) Die Nullmatrix ist eine obere Dreiecksmatrix, $0_m \in \Delta$, also ist $\Delta \neq \emptyset$. Angenommen $A = (A_{ij})_{i,j}$ und $B = (B_{ij})_{i,j}$ sind in $\Delta$, dann gilt für $i > j$, dass

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = 0 + 0 = 0,$$

also ist $A + B \in \Delta$. Genauso haben wir für $\lambda \in K$ und $i > j$,

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot A_{ij} = \lambda \cdot 0 = 0,$$

also ist $\lambda A \in \Delta$ und damit ist $\Delta$ ein Untervektorraum.

(b) In (a) haben wir bereits gezeigt, dass $\Delta$ abgeschlossen unter der Addition ist und, dass das neutrale Element bezüglich der Addition, die Nullmatrix, in $\Delta$ enthalten ist. Aus $-A = (-A_{ij})_{i,j}$, folgt, dass für $A \in \Delta$ auch die additiv inverse Matrix $(-A)$ in $\Delta$ enthalten ist.

Da auch das neutrale Element bezüglich der Multiplikation, die Einheitsmatrix $I_m$, eine obere Dreiecksmatrix ist (sowie jede Diagonalmatrix), bleibt nur noch zu zeigen, dass $\Delta$ abgeschlossen unter Multiplikation ist.

Seien also $A, B \in \Delta$ und $i > j$

$$\begin{aligned}
& & (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=i}^{m} A_{ik}B_{kj} \\
&[k \in \{1 \dots i-1\} \Rightarrow i > k] & &= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot B_{kj} + \sum_{k=i}^{m} A_{ik}B_{kj} \\
&[k \in \{i \dots m\} \Rightarrow k \geq i > j] & &= 0 + \sum_{k=i}^{m} A_{ik} \cdot 0 = 0 + 0 = 0. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

$\square$

**Häufige Probleme bei Aufgabe 32:**

- Bevor Sie die Aufgabe gar nicht bearbeiten ist es besser, sie nur für $3 \times 3$-Matrizen zu zeigen. Aber natürlich muss man hier eigentlich Matrizen beliebiger Größe betrachten.