Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 10

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
(z.B. bis So. 13. Dezember 2020, 23:59 Uhr)

Aufgabe 37

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen jeweils eine Basis für Kern und Bild:

(a) $\phi_1 : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2; (x_1, x_2) \to (x_1 - x_2, x_2 + 2x_1)$
(b) $\phi_2 : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_3; (x_1, x_2) \to (x_1 + x_2, x_1 - 2x_2, 2x_2 - x_1)$
(c) $\phi_3 : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3; (x_1, x_2, x_3) \to (7x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_3 - 6x_1)$

Lösung:

(a) Die Abbildung ϕ_1 wird durch die Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

realisiert, also $\phi_1(x) = A_1 x$ für $x = (x_1, x_2)^t$. Der Kern von ϕ_1 entspricht dem Lösungsraum $L(A_1, 0)$. Durch Umformen zu Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sehen wir, dass A_1 vollen Rang hat, also $L(A_1, 0) = \{0\}$. Damit hat Kern(ϕ_1) die leere Basis und für Bild(ϕ_1) bekommen wir als Basis $((1,2)^t, (-1,1)^t)$, die Spalten der Matrix A_1.

(b) Die Abbildung ϕ_2 wird durch die Matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

realisiert, also $\phi_2(x) = A_2 x$ für $x = (x_1, x_2)^t$. Der Kern von ϕ_2 entspricht dem Lösungsraum $L(A_2, 0)$. Durch Umformen zu Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sehen wir, dass A_2 vollen Spaltenrang hat (d.h. die Spalten sind linear unabhängig), also $L(A_2, 0) = \{0\}$. Damit hat Kern(ϕ_2) die leere Basis und für Bild(ϕ_2) bekommen wir als Basis die Spalten der Matrix A_2, also gerade $((1,1,-1)^t, (1,-2,2)^t)$.

(c) Die Abbildung ϕ_3 wird durch die Matrix

$$A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

realisiert, also $\phi_3(x) = A_3 x$ für $x = (x_1, x_2, x_3)^t$. Der Kern von ϕ_3 entspricht dem Lösungsraum $L(A_3, 0)$. Durch Umformen zu Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -6 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sehen wir, dass A_3 Rang 2 hat, also gilt $\dim(L(A_3, 0)) = 1$. Es gilt $6x_2+7x_3 = 0$ also $x_2 = \frac{-7}{6}x_3$ und $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ also $x_1 = -x_2 - x_3 = \frac{7}{6}x_3 - x_3 = \frac{1}{6}x_3$ und wir bekommen

$$L(A_3, 0) = \left\{x_3 \cdot (\tfrac{1}{6}, \tfrac{-7}{6}, 1)^t \mid x_3 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a \cdot (1, -7, 6)^t \mid a \in \mathbb{R}\right\}.$$

Daraus lesen wir ab, dass $((1, -7, 6)^t)$ eine Basis des Kerns von ϕ_3 ist. Um eine Basis des Bildes zu erhalten, nehmen wir 2 linear unabhängige Spalten von A_3, z.B. jene in denen nach Umformen zu Zeilenstufenform ein Pivotelement steht, also $((7, 1, -6)^t, (1, 1, 0)^t)$.

$\square$

Häufige Probleme bei Aufgabe 37:

- Der Nullraum $\{0\}$ besitzt die leere Basis!
- Wenn man herausfinden will, welche Spalten einer Matrix linear unabhängig sind, kann man den Gauss-Algorithmus anwenden und die Matrix auf Zeilenstufenform bringen. Diejenigen Spalten, die zu Pivotspalten werden, waren auch in der ursprünglichen Matrix linear unabhängig.

Aufgabe 38

Seien V, W zwei K-Vektorräume und $\psi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\psi(0) = 0$ und $\psi(-v) = -\psi(v)$ für alle $v \in V$.
(b) Falls ψ bijektiv ist, ist die Umkehrabbildung $\psi^{-1}\colon W \to V$ ebenfalls linear. Es gilt $\dim_K(V) = \dim_K(W)$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\psi(0) = \psi(0 \cdot v) = 0 \cdot \psi(v) = 0 \quad (v \text{ ein beliebig gewählter Vektor}) \quad \checkmark$$

$$\psi(v) + \psi(-v) = \psi(v - v) = \psi(0) = 0 \quad \checkmark$$

Alternative: $\psi(-v) = \psi(-v) + \psi(v) - \psi(v)$
$$= \psi(-v + v) - \psi(v) = \psi(0) - \psi(v) = 0 - \psi(v) = -\psi(v). \quad \checkmark$$

(b) Sei $w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in K$. Wir definieren $v_i := \psi^{-1}(w_i)$, also $\psi(v_i) = w_i$.

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(w_1 + w_2) &= \psi^{-1}\big(\psi(v_1) + \psi(v_2)\big) = \quad [\psi \text{ linear}] \\ &= \psi^{-1}\big(\psi(v_1 + v_2)\big) = v_1 + v_2 = \psi^{-1}(w_1) + \psi^{-1}(w_2). \quad \checkmark \\ \psi^{-1}(\lambda w_1) &= \psi^{-1}\big(\lambda\psi(v_1)\big) = \psi^{-1}\big(\psi(\lambda v_1)\big) = \lambda v_1 = \lambda\psi^{-1}(w_1). \quad \checkmark \end{aligned}$$

Da ψ surjektiv ist, gilt $\mathrm{Bild}(\psi) = W$. Da ψ injektiv ist, gilt $\mathrm{Kern}(\psi) = \{0\}$. Aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen bekommen wir

$$\begin{aligned} \dim_K(V) &= \dim_K(\mathrm{Kern}(\psi)) + \dim_K(\mathrm{Bild}(\psi)) \\ &= \dim_K(\{0\}) + \dim_K(W) = 0 + \dim_K(W) = \dim_K(W). \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 39

Sei $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 3. Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen $\phi_i : V \to V$ linear sind, bestimmen Sie gegebenenfalls eine Basis für den Kern.

(a) $\phi_1 : p \mapsto p(0)$ - Auswertung in 0
(b) $\phi_2 : p \mapsto p(1)$ - Auswertung in 1
(c) $\phi_3 : p \mapsto p'$ - (formale) Ableitung nach t
(d) $\phi_4 : p \mapsto p + 1$.

Lösung:

(a) ϕ_1 linear ✓
Wir nehmen $p = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3$ und $q = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3$, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\phi_1(p+q) &= \phi_1\big((p_0+q_0) + (p_1+q_1)t + (p_2+q_2)t^2 + (p_3+q_3)t^3\big) \\
&= (p_0+q_0) + (p_1+q_1)\cdot 0 + (p_2+q_2)\cdot 0^2 + (p_3+q_3)\cdot 0^3 \\
&= p_0 + q_0 = \phi_1(p) + \phi_1(q). \quad \checkmark \\
\phi_1(\lambda p) &= \phi_1\big(\lambda p_0 + \lambda p_1 t + \lambda p_2 t^2 + \lambda p_3 t^3\big) = \lambda p_0 = \lambda \phi_1(p). \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Die Abbildung ϕ_1 ist also linear. Um eine Basis des Kerns zu erhalten, überlegen wir

$$\phi_1(p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3.$$

Daraus können wir folgendes Erzeugendensystem für den Kern ablesen, dessen lineare Unabhängigkeit offensichtlich ist: $B_1 = (t, t^2, t^3)$.

(b) ϕ_2 linear ✓
Für p, q, λ wie in (a) überprüfen wir,

$$\begin{aligned}
\phi_2(p+q) &= \phi_2\big((p_0+q_0) + (p_1+q_1)t + (p_2+q_2)t^2 + (p_3+q_3)t^3\big) \\
&= (p_0+q_0) + (p_1+q_1)\cdot 1 + (p_2+q_2)\cdot 1^2 + (p_3+q_3)\cdot 1^3 \\
&= (p_0+p_1+p_2+p_3) + (q_0+q_1+q_2+q_3) = \phi_2(p) + \phi_2(q). \quad \checkmark \\
\phi_2(\lambda p) &= \phi_2\big(\lambda p_0 + \lambda p_1 t + \lambda p_2 t^2 + \lambda p_3 t^3\big) \\
&= \lambda p_0 + \lambda p_1 + \lambda p_2 + \lambda p_3 = \lambda(p_0+p_1+p_2+p_3) = \lambda \phi_2(p). \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Die Abbildung ϕ_2 ist also linear. Um eine Basis des Kerns zu erhalten, überlegen wir

$$\begin{aligned}
\phi_2(p) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad p = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 - (p_0+p_1+p_2)t^3 \\
&\Leftrightarrow \quad p = p_0(1-t^3) + p_1(t-t^3) + p_2(t^2-t^3).
\end{aligned}$$

Daraus können wir folgendes Erzeugendensystem für den Kern ablesen:

$$B_2 = (1-t^3, t-t^3, t^2-t^3).$$

Die lineare Unabhängigkeit ist auch hier ganz einfach nachzurechnen (oder man benutzt die Dimensionsformel um zu sehen, dass der Kern 3-dimensional ist).

(c) ϕ_3 linear ✓

Für p, q, λ wie in (a) überprüfen wir,

$$\begin{aligned}\phi_3(p+q) &= \phi_3\big((p_0+q_0)+(p_1+q_1)t+(p_2+q_2)t^2+(p_3+q_3)t^3\big)\\ &= (p_1+q_1)+2(p_2+q_2)t+3(p_3+q_3)t^2\\ &= p_1+2p_2t+3p_3t^2+q_1+2q_2t+3q_3t^2 = \phi_3(p)+\phi_3(q). \quad ✓\\ \phi_2(\lambda p) &= \phi_2\left(\lambda p_0+\lambda p_1 t+\lambda p_2 t^2+\lambda p_3 t^3\right)\\ &= \lambda p_1 + 2\lambda p_2 t + 3\lambda p_3 t^2 = \lambda(p_1+2p_2t+3p_3t^2) = \lambda\phi_3(p). \quad ✓\end{aligned}$$

Die Abbildung ϕ_3 ist also linear. Um eine Basis des Kerns zu erhalten, überlegen wir

$$\begin{aligned}\phi_3(p)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad p_1+2p_2t+3p_3t^2=0\\ &\Leftrightarrow \quad p_1=p_2=p_3=0\\ &\Leftrightarrow \quad p=p_0.\end{aligned}$$

Daraus können wir folgende Basis für den Kern ablesen $B_3 = (1)$.

(d) ϕ_4 linear ✗

Für $p = 1$ und $\lambda = 0$ gilt

$$\phi_4(\lambda p) = \phi_4(0\cdot p) = \phi_4(0) = 1 \neq 0 = 0\cdot 2 = 0\cdot\phi(p) = \lambda\phi(p).$$

□

Aufgabe 40

Sei $\psi\colon V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

(a) Sind $v_1, \ldots, v_m$ in V_1 linear unabhängig, so sind $\psi(v_1), \ldots, \psi(v_m)$ in V_2 linear unabhängig.

(b) Sind $\psi(v_1), \ldots, \psi(v_m)$ in V_2 linear unabhängig, so sind $v_1, \ldots, v_m$ in V_1 linear unabhängig.

Lösung:

(a) ✗ Die Nullabbildung mit $\psi_0(v) = 0$ für alle $v \in V_1$ ist linear, und die Bilder $\psi(v_1) = \ldots = \psi(v_m) = 0$ sind linear abhängig, auch wenn $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind.

(b) ✓ Zu zeigen: Aus $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ folgt, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$:

$$\begin{aligned} & & &\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0\\ & &\Rightarrow\quad &\psi(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m) = \psi(0) = 0\\ &[\psi \text{ linear}] &\Rightarrow\quad &\lambda_1\psi(v_1) + \ldots + \lambda_m\psi(v_m) = \psi(0) = 0\\ &[\psi(v_1), \ldots, \psi(v_m) \text{ lin. unabh.}] &\Rightarrow\quad &\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0. \quad ✓\end{aligned}$$

□