Gruppe 1

(1) Geben Sie die Formel für partielle Integration für zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ an.

(2) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^1 a^x \, \mathrm{d}x \, .$$

für $a = 3.14$

Gruppe 2

(1) Geben Sie die Stammfunktionen für die folgenden Funktionen an.

- $\alpha f'(x) + g'(x)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\sin(x)$
- $\cos(x)$
- $\frac{1}{x}$
- e^{kx} für $k \in \mathbb{R}$
- K für $K \in \mathbb{R}$

(2) Bestimmen Sie das Integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\pi \cos(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Gruppe 3

(1) Gegeben sei ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit Nullstellen $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$. Wie kann man das Polynom $p(x)$ als Produkt darstellen?

(2) Bestimmen Sie das Integral

$$\int \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^2 + 5x + 6} \mathrm{d}x \, .$$

Gruppe 4

(1) Geben Sie die Substitutionsregel für Integrale an.

(2) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} \, \mathrm{d}x \, .$$

Gruppe 5

Ein Kreis in 2D mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $(0,0)$ ist gegeben durch

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq R^2\}\,.$$

Polarkoordinaten ermöglichen die Darstellung

$$S = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \colon 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi < 2\pi\}\,,$$

welche (nach einigen Rechenschritten) zu einem einfachen Integral führt

$$A := \int_0^{2\pi} \int_0^R r \,\mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi\,.$$

Bestimmen Sie dieses Integral und leiten Sie folglich die bekannte Formel für die Kreisfläche mit Radius R her.

Gruppe 6

Monte Carlo Integration ist ein numerischer Ansatz zur Approximation von Integralen mittels Zufallszahlen. Ein klassisches Beispiel ist die Bestimmung der Fläche eines Kreises mit Radius $R > 0$. Der Algorithmus sieht wie folgt aus.

(i) Generiere zwei gleichverteilte Zufallszahlen x und y über das Interval $[0, R]$.

(ii) Berechne die Distanz r zum ensprechenden Punkt $r^2 = x^2 + y^2$.

(iii) Teste ob r innerhalb oder außerhalb des Kreises mit Radius R liegt.

(iv) Falls $r \leq R$ ist der Test ein Treffer. Wenn $r > R$ ist der Test als verfehlt zu werten.

(v) Nach N Gesamttests kann die Kreisfläche approximiert werden mittels $\frac{N_{\text{hit}}}{N} 4R^2$.

Hier ist $4R^2$ die Fläche der Box mit Seitenlänge $D = 2R$ das den Kreis umschreibt. Verwenden Sie die Vorlage `monte_carlo.jl`, welche im ZIP mit diesem Dokument vom OLAT geladen wurde und füllen Sie die Lücken aus. Führen Sie das Skript aus, um zu sehen, wie der obige Algorithmus funktioniert.

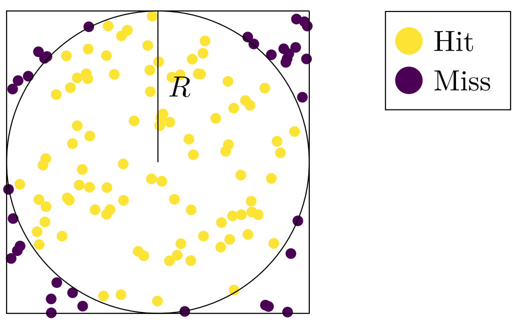

Figure 1: Monte Carlo Integration für einen Kreis mit Radius $R > 0$.

Gruppe 7

Berechnen Sie folgende Integrale:

(1) Bestimmen Sie das Integral

$$\int (e^{x+3} + e^{x-3}) \mathrm{d}x \,.$$

(2) Bestimmen Sie das Integral

$$\int \frac{23 \cdot \sin(x)}{15 \cdot \tan(x)} \mathrm{d}x \,.$$

Gruppe 8

Berechnen Sie folgende Integrale:

(1) Bestimmen Sie das Integral

$$\int \frac{1}{4x^{+}4} \mathrm{d}x \,.$$

(2) Bestimmen Sie das Integral

$$\int \frac{6}{\sqrt{3x}} \mathrm{d}x \,.$$