

# Lineare Algebra - Zusammenfassung



Definitionen



Wichtige Ausnahmen



Klausurrelevante Details, relevante Facts



!? Zusammenfassende Worte, zusätzliche Erklärungen, Beispiele

## 2 Grundlagen

### 2.1 Notation

$\wedge$  und

$\vee$  oder

$\Rightarrow$  wenn, dann

$\neg$  nicht

$\forall$  für alle

$\exists$  es existiert

$\exists!$  es existiert genau ein

L(A,0) homogenes LGS

$\mathbb{N}$  natürliche Zahlen

$\mathbb{Z}$  ganze Zahlen

$\mathbb{Q}$  rationale Zahlen

$\mathbb{R}$  reelle Zahlen

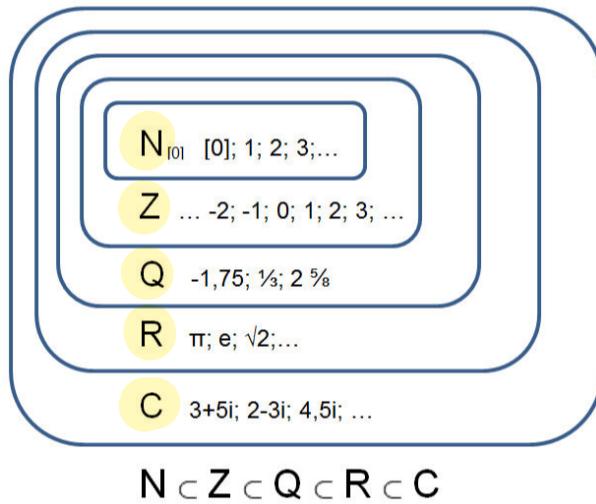
$\in$  ist Element von

$\notin$  ist kein Element von

L(A,b) inhomogenes LGS

## 2.2 Zahlenmengen

### ▼ 2.2.1 Darstellung



## 2.3 Mengen, Relationen, Abbildungen

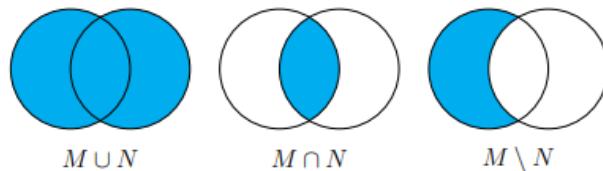
### ▼ 2.3.1 Vereinigungsmenge, Schnittmenge, Mengendifferenz

(ii) Für zwei Mengen  $M, N$  bezeichnet  $M \cup N$  die **Vereinigungs-**,  $M \cap N$  die **Schnittmenge** sowie  $M \setminus N$  die **Mengendifferenz**:

$$M \cup N := \{a \mid a \in M \vee a \in N\}$$

$$M \cap N := \{a \mid a \in M \wedge a \in N\}$$

$$M \setminus N := \{a \mid a \in M \wedge a \notin N\}.$$



Es gibt genau eine Menge ohne Elemente → **die leere Menge**.

**Notation:**  $\emptyset := \{\}$

!? **Beispiele:**

$$\begin{aligned}\{a, b, c\} \cup \{a, 7, \pi\} &= \{a, b, c, 7, \pi\} \\ \{a, b, c\} \cap \{a, 7, \pi\} &= \{a\} \\ \{a, b, c\} \setminus \{a, 7, \pi\} &= \{b, c\}\end{aligned}$$

▼ **2.3.2 Karthesisches Produkt**

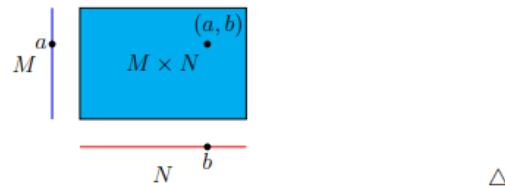


**Facts:**

- Die Mengen  $M \times N$  und  $N \times M$  sind unterschiedliche Mengen.
- Die Elemente von  $M \times N$  sind geordnete Paare,  $(\pi, a)$  ist kein Element von  $M \times N$ .
- Hat  $M$  genau  $m$  und  $N$  genau  $n$  Elemente, so hat  $M \times N$  genau  $m \cdot n$  Elemente.
- Das karthesische Produkt kann analog auch für  $\geq 2$  Mengen gebildet werden.

(iii) Für zwei Mengen  $M, N$  ist das **karthesische Produkt** von  $M$  und  $N$  die Menge aller geordneten Paare von Elementen aus  $M$  und  $N$ :

$$M \times N := \{(a, b) \mid a \in M, b \in N\}.$$



!? **Beispiel:**

Für  $M = \{a, b, c\}$  und  $N = \{1, 7, \pi\}$ :

$$M \times N = \{(a, 1), (a, 7), (a, \pi), (b, 1), (b, 7), (b, \pi), (c, 1), (c, 7), (c, \pi)\}$$

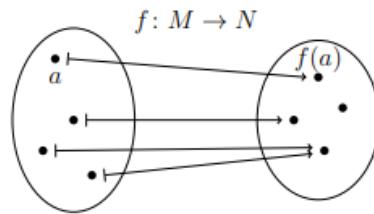
### ▼ 2.3.3 Funktion

Seien  $M, N$  Mengen. Eine Funktion/Abbildung  $f$  von  $M$  nach  $N$  ist:

- 💡 ➔ eine linkstotale und rechtseindeutige Relation zwischen  $M$  und  $N$
- ➔ d.h. eine Teilmenge  $f \subseteq M \times N$
- ➔ mit der zusätzlichen Eigenschaft  $\forall a \in M \exists! b \in N : (a, b) \in f$
- ➔ dabei heißt  $M$  der Definitionsbereich und  $N$  der Zielbereich der Funktion.
- ➔ Für jedes Element  $a$  aus dem Definitionsbereich  $M$  existiert genau ein Element  $b$  aus dem Zielbereich  $N$ .

$$b = f(a).$$

Man nennt dann  $b$  auch das **Bild von  $a$  unter  $f$** .



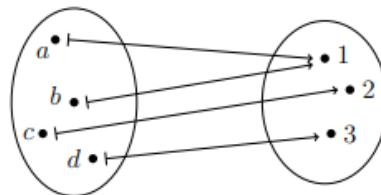
**Beispiel 1.3.15.** (i) Wir betrachten die Funktion  $f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  definiert durch

$$f(a) = 1, f(b) = 1, f(c) = 2, f(d) = 3.$$

In der formalen Darstellung als Graph erhalten wir

$$f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}$$

und schematisch können wir  $f$  so darstellen:



Es gilt beispielsweise

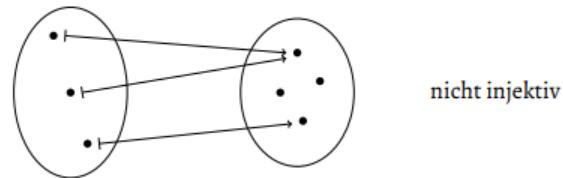
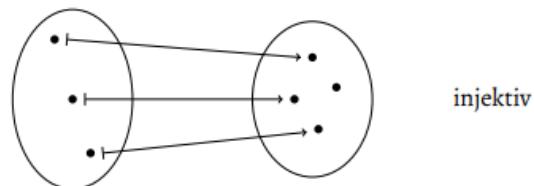
$$f(\{a, c\}) = \{1, 2\}, f^{-1}(\{1, 3\}) = \{a, b, d\}, f^{-1}(3) = \{d\}, f^{-1}(1) = \{a, b\}.$$

#### ▼ 2.3.4 Abbildung

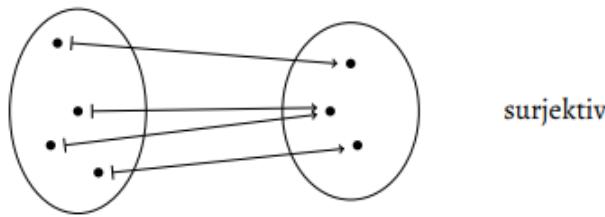
Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung. Dann heißt  $f$ :



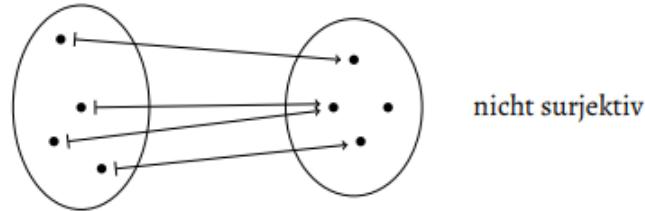
**injektiv**, falls jedes Element im Zielbereich **höchstens ein Urbild** ( $f^{-1}(b)$ ) hat:  
 $\forall b \in N : \#f^{-1}(b) \leq 1$



**surjektiv**, falls jedes Element im Zielbereich **mindestens ein Urbild** hat:  
 $\forall b \in N : \#f^{-1}(b) \geq 1$



surjektiv

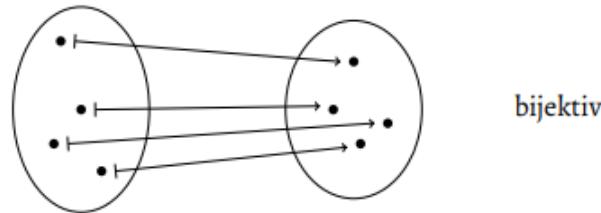


nicht surjektiv



bijektiv, falls  $f$  injektiv und surjektiv ist:

$$\forall b \in N : \#f^{-1}(b) = 1$$



bijektiv

### !? Beispiel: Abbildung

a) Die Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f(n) = n^2$  ordnet jeder natürlichen Zahl ihr Quadrat zu, z.B.  $f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9, \text{etc.}$

**Definitions- und Wertebereich:** die natürlichen Zahlen

**Bildmenge:**  $f(\mathbb{N}) = \{1, 4, 9, 16, \dots\} = \{n^2 | n \in \mathbb{N}\}$

!? Beispiel: Injektiv, Surjektiv

a)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n^2$

Die Abbildung  $f$  ist **nicht injektiv**, denn es gilt nicht, dass je zwei verschiedene Zahlen aus dem Definitionsbereich auch verschiedene Funktionswerte haben.

Denn z.B. -2 und 2 haben denselben Funktionswert  $f(-2) = f(2) = 4$

Die Abbildung ist auch **nicht surjektiv**, da nicht alle Zahlen aus  $\mathbb{N}$  Funktionswerte sind, z.B. die Zahl 3 tritt nicht als Funktionswert auf.

!? b)  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n^2$

Die Abbildung  $g$  ist **injektiv**, denn zwei verschiedene  $a, b \in \mathbb{N}$  haben auch verschiedene Funktionswerte  $n_1(2) \neq n_2(2)$ . Wie vorher ist die Abbildung aber **nicht surjektiv**.

!? c)  $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$

Die Abbildung ist **injektiv**, da zwei verschiedene ganze Zahlen aus dem Definitionsbereich  $n_1 \neq n_2$  verschiedene Funktionswerte haben.  $h(-2) = -1, h(2) = 3$ . Sie ist auch **surjektiv**, weil jede ganze Zahl  $m$  Bild einer ganzen Zahl, nämlich von  $n = m - 1$ , ist. Somit ist die Abbildung **bijektiv**.

!? d)  $k : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5, n \mapsto n + 1$

**injektiv** wie bei c). Sie ist auch **surjektiv**, weil jedes  $m \in \mathbb{Z}_5$  Funktionswert eines Elements aus  $\mathbb{Z}_5$  ist, nämlich von  $n = m + 4 \pmod{5}$  (4 ist das additive Inverse von 1 in  $\mathbb{Z}_5$ ). Somit ist die Abbildung **bijektiv**.

$$\begin{array}{rcl} -5 & + & 5 = 0 \\ \text{Number} & & \text{Additive Inverse} \end{array}$$

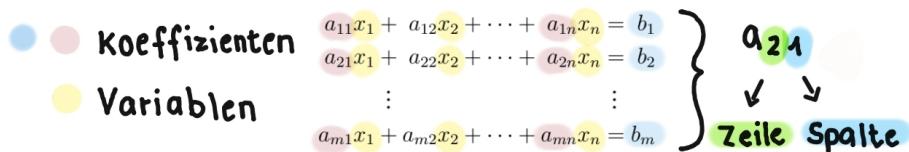
$$\begin{array}{rcl} 14 & + & -14 = 0 \\ \text{Number} & & \text{Additive Inverse} \end{array}$$

# — 3 —

## 3 Gauß-Algorithmus und Matrixrechnung

### 3.1 Lineares Gleichungssystem

#### ▼ 3.1.1 Form



- Das lineare Gleichungssystem heißt **homogen**, falls  $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ . Man nennt diese Lösung die triviale Lösung.
- Das LGS heißt **inhomogen**, falls eine Lösung existiert, z.B.  $x + y = 10$ .
- Ein inhomogenes LGS über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  hat keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen.

#### ▼ 3.1.2 Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$



- Eine  $m \times n$ -Matrix hat  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten.
- Eine  $n \times n$ -Matrix hat gleich viele Zeilen wie Spalten.

#### ▼ 3.1.3 Spezielle quadratische Matrizen



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

- $A$  ist eine obere und  $B$  eine untere Dreiecksmatrix.



$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→  $C$  ist eine Diagonalmatrix und  $\mathbb{I}$  ist die  $2 \times 2$  - Einheitsmatrix.

#### ▼ 3.1.4 Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A, b) = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

#### ▼ 3.1.5 Lösungsmenge

$L(A, b) := \{(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \mid$  rechts und links in (2.1) steht in jeder Gleichung dieselbe Zahl, wenn jedes  $x_i$  durch  $c_i$  ersetzt wird\}.

△

● ● Koeffizienten      a<sub>11</sub>x<sub>1</sub> + a<sub>12</sub>x<sub>2</sub> + ⋯ + a<sub>1n</sub>x<sub>n</sub> = b<sub>1</sub>  
 ● ● Variablen      a<sub>21</sub>x<sub>1</sub> + a<sub>22</sub>x<sub>2</sub> + ⋯ + a<sub>2n</sub>x<sub>n</sub> = b<sub>2</sub>  
 :                        :  
 a<sub>m1</sub>x<sub>1</sub> + a<sub>m2</sub>x<sub>2</sub> + ⋯ + a<sub>mn</sub>x<sub>n</sub> = b<sub>m</sub>

} a<sub>21</sub>  
 ↘ ↘  
 Zeile Spalte

#### ▼ 3.1.6 Lösbarkeit von LGS



Wenn kein Lösungsvektor angegeben, dann ist er 0.

- (1) genau eine Lösung
- (2) unendlich viele Lösungen
- (3) keine Lösung

(a) gegeben sei ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

(b) in Matrixschreibweise lautet das LGS:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(c) die dazugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix ( $A \mid b$ ):

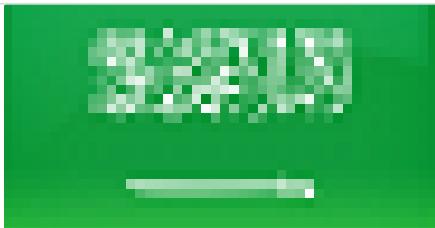
$$\left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right)$$

(d) Rang berechnen

#### Rang einer Matrix Rechner

Hier kannst du den Rang einer Matrix mit komplexen Zahlen kostenlos online und mit einer sehr detaillierten Lösung berechnen.  
Der Rang einer Matrix wird berechnet, indem man die Matrix mit Hilfe

 <https://matrix.reshish.com/de/rank.php>



!? Man bringt die gegebene Matrix in Zeilenstufenform und liest dann die Nicht-Nullzeilen ab.



Bei einer Matrix mit den Zeilen  $(1 \ 2 \ 0)$ ,  $(0 \ 1 \ 1)$  und  $(0 \ 0 \ 0)$  sind die drei Zeilen linear abhängig, da jede Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, linear abhängig ist. Wenn man den Nullvektor weglässt, so bleiben die beiden Zeilen  $(1 \ 2 \ 0)$  und  $(0 \ 1 \ 1)$  übrig, diese sind linear unabhängig, daher Rang = 2.



→ Der Rang einer Matrix  $A$  ist gleich dem Rang der transponierten Matrix  $A^T$ .

Mit anderen Worten: Die Anzahl der linear unabhängigen Spalten (Zeilenrang = Spaltenrang).

→ Elementare Zeilenumformungen lassen den Rang einer Matrix unverändert.

## Beispiele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{es sind keine Nullzeilen vorhanden, weshalb } \text{Rang}(A) = 3.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{es ist eine Nullzeile vorhanden, weshalb } \text{Rang}(B) = 2.$$

### (1) genau eine Lösung

Es gibt eine eindeutige Lösung, wenn der Rang der (erweiterten) Koeffizientenmatrix der Anzahl der Unbekannten  $n$  entspricht.



$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) = n$$

### Beispiel:

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \text{Rang } 3 = \text{Anzahl der Unbekannten}$$

### (2) unendlich viele Lösungen

Es gibt unendlich viele Lösungen, wenn der Rang der (erweiterten) Koeffizientenmatrix kleiner ist als die Anzahl der Unbekannten  $n$ .



$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) < n$$

**Beispiel:**

$$B = \left( \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{Rang } 2 < \text{Anzahl der Unbekannten } (=3)$$

### (3) keine Lösung

Es gibt keine Lösung, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix  $A$  nicht dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix entspricht.



$$\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|b)$$

**Beispiel:**

$$C = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \text{Rang}(A) = 2 \neq \text{Rang}(A|b) = 3$$

### ▼ 3.1.7 Gleichheit von Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} x+y & y \\ z+x & w \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

→  $A = B$  steht für die 4 Gleichungen



$$x + y = 3, \quad y = 1, \quad z + x = 5, \quad w = 0$$



$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \neq (2 \quad 4 \quad 5) \rightarrow \text{verschiedene Dimensionen}$$

### ▼ 3.1.8 Rechenregeln

- ✓ ➔  $A + B = B + A \rightarrow$  Kommutativität
- ➔  $A + (B + C) = (A + B) + C \rightarrow$  Assoziativität
- ➔  $A + 0 = A$
- ➔  $1A = A$
- ➔  $k(A + B) = kA + kB \rightarrow$  Distributivgesetz

## 3.2 Zeilenstufenform

### ▼ 3.2.1 ✓ Good To Know - Zeilenstufenform

- ✓ ➔ Eine Matrix ist in Zeilenstufenform, falls das erste (von links) nicht verschwindende Element in jeder Zeile gleich 1 ist und ➔ die führende 1 in jeder Zeile rechts von der führenden 1 in der Zeile darüber steht

- ✓ ➔ Sie ist in reduzierter Zeilenstufenform, falls zusätzlich über jeder führenden 1 Null(en) stehen.

### ▼ 3.2.2 Form

$$A = \left( \begin{array}{cccc|c} & \textcircled{*} & & & \\ & & \textcircled{*} & & \\ \vdots & & & \textcircled{*} & \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \textcircled{*} \\ \vdots & & & & \end{array} \right) \quad \text{Pivots } \rightarrow \text{ungleich } 0$$

### ▼ 3.2.3 Zeilenstufenform erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{cc|c} & \textcircled{*} & & b_1 \\ & & \textcircled{*} & b_2 \\ & & & b_3 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & b_r \\ & & \textcircled{*} & b_{r+1} \\ & & & \vdots \\ & & & b_m \end{array} \right)$$

-  ➔ Das System hat genau dann eine Lösung, wenn  $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$  gilt.
- ➔ Ist das System lösbar, erhält man alle Lösungen auf folgende Weise:
- Falls in der  $i$ -ten Spalten von  $A$  kein Pivot steht, kann für  $x_i$  eine beliebige Zahl eingesetzt werden. → freie Variablen
  - Die Werte für alle anderen Variablen sind dann eindeutig bestimmt (=gebundene Variablen). Man erhält sie, indem man von unten, beginnend mit der  $r$ -ten Zeile, die entsprechenden Gleichungen nach der Variable am Pivot auflöst.
- ➔ Durch diese Prozedur erhält man eine Parametrisierung der gesamten Lösungsmenge durch  $\mathbb{R}^{n-r}$ , d.h. eine bijektive Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^{n-r} \rightarrow L(A, b)$

### 3.3 Gauß-Jordan Algorithmus

#### ▼ 3.3.1 Definition



Der Gauß-Algorithmus ermöglicht es, für LGS sämtliche Lösungen zu bestimmen.

- ➔ erweiterte Koeffizientenmatrix mit Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen
- ➔ Lösung ablesen

#### ▼ 3.3.2 Good To Know - Gauß



- ➔ Es genügen schon Umformungen vom Typ (1) und Typ (3), um Zeilenstufenform zu erreichen. Typ (2) wird nur benötigt, wenn man alle Pivots auf 1 setzen möchte.
- ➔ Um alle Einträge oberhalb der Pivots 0 zu setzen, muss mit Umformung vom Typ (3), von links mit den Pivots beginnend, eliminiert werden.
- ➔ Eine Zeilenstufenform mit Pivots = 1 und Nullen oberhalb der Pivots heißt reduzierte Zeilenstufenform.
- ➔ Wichtig ist, die erweiterte Koeffizientenmatrix umzuformen, ansonsten ändert sich die Lösungsmenge. Nur bei homogenen Systemen nicht nötig, da sich die Nullspalte ganz hinten sowieso niemals ändert, wenn Zeilenumformungen vorgenommen werden.

### ▼ 3.3.3 Äquivalenzumformungen



- (1) Vertauschen von zwei Zeilen (Gleichungen).
- (2) Multiplikation (jedes Eintrags) einer Zeil mit einer Zahl  $\neq 0$ .
- (3) Addition des Vielfachen ( $\neq 0$ ) einer Zeile zu einer anderen Zeile.

### ▼ 3.3.4 Reduzierte Zeilenstufenform - Beispiel

$\begin{array}{l} x_4 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_3 = 11 \\ 4x_4 - x_2 + 2x_3 = 15 \end{array}$	$\left( \begin{array}{cccc c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 11 \\ 4 & -1 & 2 & 15 \end{array} \right)$
$x_4 - x_2 - x_3 = 0 \quad   \quad Z1$ $-x_1 - 3x_3 = 11 \quad   \quad +Z1 \quad \rightarrow \quad Z2$ $-x_2 - 4x_3 = -11 \quad   \quad \leftarrow Z2$ $4x_4 - x_2 + 2x_3 = 15 \quad   \quad +(-4) \cdot Z1 \quad \rightarrow \quad Z3$ $+3x_2 + 6x_3 = 15 \quad   \quad Z3$	
<p>es wird <math>Z1</math> verwendet</p> $\left( \begin{array}{cccc c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 3 & 6 & 15 \end{array} \right)$ <p><math>x_1</math> aus <math>Z2</math> &amp; <math>Z3</math> entfernen</p>	
$z2 \cdot (-1) \rightarrow x_2 + 4x_3 = 11$ $x_1 + 3x_3 = 11 \quad   \quad Z4 + Z2$ $x_2 + 4x_3 = 11$ $-6x_3 = -18 \quad   \quad Z4 + (-3 \cdot Z2) \quad \text{Elimination von } x_2$	
$z3 / (-6) \rightarrow \text{koeffizient v. } x_3 \text{ 1}$ $-6x_3 = -18 \quad   : (-6) \Rightarrow x_3 = 3 \quad   \quad Z3$ $x_2 + 4x_3 = 11 \quad   (-4) \cdot Z3$ $x_2 = -1 \quad   \quad Z2$ $x_1 + 3x_3 = 11 \quad   (-3) \cdot Z3$ $x_1 = 2 \quad   \quad Z1$	
$\left( \begin{array}{cccc c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$ <p>Elimination von <math>x_3</math></p>	

## 3.4 Gruppen, Ringe Körper

### ▼ 3.4.1 Definition: Gruppe



Eine Gruppe ist eine Menge  $G$  zusammen mit einer zweistelligen Verknüpfung:

$$*: G \times G \rightarrow G$$

### ▼ 3.4.2 Bedingungen einer Gruppe



► **Assoziativgesetz:**  $\forall a, b, c \quad (a * b) * c = a * (b * c)$

► **Neutrales Element:**  $\exists e \forall a \quad e * a = a * e = a$

► **Inverse Elemente:**  $\forall a \exists b \quad a * b = b * a = e$

gilt zusätzlich das Kommutativgesetz, so nennt man  $G$  eine **kommutative** bzw. **abelsche** Gruppe



► **Kommutativgesetz:**  $\forall a, b \quad a * b = b * a$

### ▼ 3.4.3 Additive Gruppen



$(\mathbb{Z}, +)$ , also die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  mit der Addition, bilden eine **kommutative Gruppe**, denn:

► Assoziativität:  $a + (b + c) = (a + b) + c$  gilt für alle ganzen Zahlen  $a, b, c$ .

► Neutrale Element: Bezuglich der Addition ist 0:  $a + 0 = 0 + a$ .

► Zu jeder ganzen Zahl  $a$  gibt es ein Inverses  $-a$  bezügl. der Addition.

► Das Kommutativgesetz gilt  $a + b = b + a$  für alle ganzen Zahlen  $a, b$ .



Ebenso sind  $(\mathbb{Z}_m, +)$ , für beliebiges  $m$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{C}, +)$  **kommutative Gruppen**

 Aber:  $(\mathbb{N}_0, +)$  ist **keine Gruppe**. Assoziativgesetz und neutrales Element sind kein Problem, aber es gibt nicht für jede natürliche Zahl  $a$  ein additiv Inverses. z.B. es gibt keine natürliche Zahl  $a$ , sodass  $3 + a = 0$ .

#### ▼ 3.4.4 Multiplikative Gruppen

  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ , also die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  ohne 0 mit der Multiplikation, bilden eine **kommutative Gruppe**, denn:

- Das Assoziativgesetz gilt:  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  für alle rationalen Zahlen  $a, b, c \neq 0$ .
- Das neutrale Element bzgl. der Multiplikation ist 1:  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  für alle rationalen Zahlen  $a \neq 0$ .
- Zu jeder rationalen Zahl  $a \neq 0$  gibt es ein Inverses bzgl. der Multiplikation (multiplikatives Inverses):  $\frac{1}{a} : a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ .
- Das Kommutativgesetz gilt:  $a \cdot b = b \cdot a$  für alle rationalen Zahlen  $a, b \neq 0$ .

  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  ist ebenso eine abelsche Gruppe bzgl.  $\cdot$  mit  $e = 1$ .

 Ebenso sind  $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$ , (wobei  $p$  Primzahl),  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$  **kommutative Gruppen**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

 Aber:  $(\mathbb{N}, \cdot)$  und auch  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$  sind **keine Gruppen**. Wieder sind Assoziativgesetz, neutrales Element kein Problem, aber es scheitert wieder am Inversen: In  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gibt es nicht für jedes  $a$  ein multiplikatives Inverses. z.B. gibt es keine ganze Zahl  $a$ , sodass  $3 \cdot a = 1$ .

#### ▼ 3.4.5 Good To Know - Gruppen

 Reelle Zahlen ( $\mathbb{R}$ ) sind sowohl bzgl.  $+$  als auch (wenn man die 0 herausnimmt) bzgl.  $\cdot$  eine **kommutative Gruppe**. Dasselbe gilt für  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{Z}_p$ .

→ Daher haben diese Mengen bzgl. Addition und Multiplikation dieselbe Struktur, es gelten also dieselben Rechenregeln. Man nennt diese Struktur einen **Körper**.

#### ▼ 3.4.6 Definition: Körper



Eine Menge  $\mathbb{K}$  mit zwei Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$ , geschrieben  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ , heißt Körper, wenn folgendes gilt:

- (1)**  $(\mathbb{K}, +)$  ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0.
- (2)**  $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1.
- (3)** für alle  $a, b, c \in \mathbb{K}$  gilt:  $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c) \rightarrow$  Distributivgesetz



Das Distributivgesetz regelt, wie die beiden Verknüpfungen sich miteinander vertragen.

#### ▼ 3.4.7 Good To Know - Körper

-  → Für eine Primzahl  $p$  ist  $\mathbb{Z}_p$  ein Körper.
- Ebenso sind  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  Körper.
- Jedoch ist  $\mathbb{Z}$  kein Körper, denn  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$  ist keine Gruppe.

→ hat nicht jedes Element ein multiplikatives Inverses, so wie z.B. in  $\mathbb{Z}_m$ , so spricht man von einem Ring.

#### ▼ 3.4.8 Definition: Ring



Eine Menge  $R$  mit zwei Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$ , geschrieben  $(R, +, \cdot)$ , heißt **Ring**, wenn folgendes gilt:

- (1)  $(R, +)$  ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0.
- (2) Für alle  $a, b, c \in R$  gilt:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \rightarrow \text{Assoziativgesetz}$
- (3) Für alle  $a, b, c \in R$  gilt:  $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c) \rightarrow \text{Distributivgesetz}$

Gilt zusätzlich:

- (4) das Kommutativgesetz  $a \cdot b = b \cdot a$  für alle  $a, b \in R$ , so spricht man von einem **kommutativen Ring**.
- (5) Wenn darüber hinaus ein neutrales Element 1 für die Multiplikation existiert, also  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  für alle  $a \in R$ , so spricht man von einem **kommutativen Ring mit Eins**.

!? Wenn also jedes Element (außer 0) eines **kommutativen Rings mit Eins** ein **multiplikatives Inverses besitzt**, dann ist der **Ring ein Körper**.

#### ▼ 3.4.9 Good To Know - Ring



- Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  sind ein kommutativer Ring mit Eins; kein Körper, da es nicht zu jeder ganzen Zahl ein Inverses bzgl. der Multiplikation gibt.
- $\mathbb{Z}_m$  ist ein kommutativer Ring mit Eins; er ist genau dann ein Körper wenn  $m = p$  eine Primzahl ist. So sind also z.B.  $\mathbb{Z}_4$  oder  $\mathbb{Z}_{256}$  nur Ringe, aber  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$  hingegen Körper.
- Die Menge der Polynome  $\mathbb{R}[x] = \{p(x) = p_n x^n + \dots + p_1 x + p_0 | p_k \in \mathbb{R}\}$  ist ein kommutativer Ring mit Eins, aber kein Körper.

### ▼ 3.4.10 Endliche Körper



Sei  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{Z}$  durch folgende Setzung:

$$a \sim b : \Leftrightarrow n|(b - a)$$

→ Zwei Zahlen sind also äquivalent, wenn sie sich um ein Vielfaches von  $n$  unterscheiden. Ordnet man die Zahlen auf einer Uhr mit  $n$  Stunden an, so endet jeder Umlauf um die Uhr also in derselben Äquivalenzklasse.

### ▼ 3.4.11 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

!? Wurde bereits als Gruppe mit  $+$  eingeführt, nun definieren wir Addition und Multiplikation auf  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ :

$$(1) [a] + [b] := [a + b]$$

$$(2) [a] \cdot [b] := [a \cdot b]$$



Sei  $n \geq 2$ :

- Es ist  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ein kommutativer **Ring** mit genau  $n$  Elementen.
- Es ist  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  genau dann ein **Körper**, wenn  $n$  eine Primzahl ist.  
 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$



!? Folgende 3 Aussagen sind für  $n = p \in \mathbb{N}$  äquivalent:

- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist ein Körper.
- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist nullteilerfrei.
- $p$  ist eine Primzahl.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  Ring mit genau  $n$  Elementen

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  Körper mit genau  $n$  Elementen

### 3.5 Matrixrechnung

#### ▼ 3.5.1 Definition



Sei  $R$  eine Menge und  $m, n \in \mathbb{N}$

(1) Eine  $m \times n$  - Matrix über  $R$  ist eine Abbildung

$$M : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow R$$

$$M = (m_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{pmatrix}.$$

!/? Erster Index bezeichnet die Zeile   
Zweiter Index bezeichnet die Spalte

(2) Eine  $m \times 1$  - Matrix wird auch Spaltenvektor, eine  $1 \times n$  - Matrix Zeilenvektor genannt.

!? In Zeilen- oder Spaltenvektoren wird oft nur ein Index verwendet, z.B.:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \rightarrow \text{Spaltenvektor}$$

(3) Die Menge aller  $m \times n$  - Matrizen über  $R$  wird mit  $\text{Mat}_{m,n}(R)$  bezeichnet.

!? → Wenn  $m = n$ , wird statt  $\text{Mat}_{m,m}(R) \rightarrow \text{Mat}_m(R)$  geschrieben.

→ Statt  $\text{Mat}_{m,1}(R)$  (=Spaltenvektor)  $\rightarrow R^m$

(4) Für  $M = (m_{ij})_{i=1,\dots,m; j=1,\dots,n} \in \text{Mat}_{m,n}(R)$  bezeichnen wir mit:

$$M^t := (m_{ij})_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,m} \in \text{Mat}_{n,m}(R)$$

die sog. **transponierte Matrix**

### ▼ 3.5.2 Transponierte Matrix



Die transponierte Matrix entsteht aus  $M$  durch Vertauschung der Indizes,  
bzw. durch Spiegelung an der Diagonalen.

→ Die Zeilen von  $M$  werden zu den Spalten von  $M^t$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{N}), \quad M^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{N})$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2,3}(\mathbb{N}), \quad N^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3,2}(\mathbb{N})$$

$$O = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ \pi \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \quad O^t = \begin{pmatrix} -1 & i & \pi \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{1,3}(\mathbb{C}).$$

### ▼ 3.5.3 Summe zweier $m \times n$ -Matrizen



Die Summe zweier  $m \times n$ -Matrizen  $A = (a_{ij})$  und  $B = (b_{ij})$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

**Beispiel:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

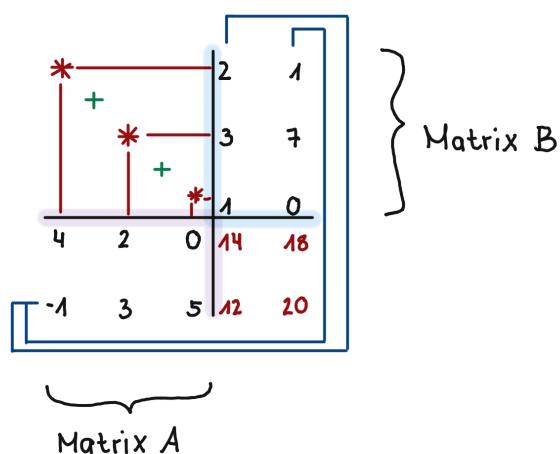
!? Matrizen können nur addiert, wenn sie die gleichen Dimensionen haben. Hier:

$$3 \times 2 + 3 \times 2 = 3 \times 2$$

### ▼ 3.5.4 Multiplikation von Matrizen



Das Kommutativgesetz ( $AB \neq BA$ ) gilt nicht!



**Beispiel:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$$

!? Matrizen können nur multipliziert werden, wenn die Spalte der linken Matrix die gleiche Dimension wie die Zeilen der rechten Matrix hat. Hier:

$$3 \times 2 \cdot 2 \times 3 = 3 \times 3$$

	1	2	3
	4	5	6
1	2	9	12 15
3	4	19	26 33
5	6	29	40 51

$$x_{11} = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

$$x_{12} = 2 \cdot 5 + 2 = 12$$

$$x_{13} = 2 \cdot 6 + 3 = 15$$

$$x_{21} = 4 \cdot 4 + 3 = 19$$

$$x_{22} = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 26$$

$$x_{23} = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 33$$

$$x_{31} = 6 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 29$$

$$x_{32} = 6 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 40$$

$$x_{33} = 6 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 51$$

### ▼ 3.5.5 R als Ring



Sei  $R$  ein Ring und  $m, n \in \mathbb{N}$ , dann gilt:



(1)  $Mat_{m,n}(R)$  ist eine abelsche Gruppe bzgl.  $+$

 (2) Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ, d.h. es gilt:  
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

 (3) Zwischen Addition und Multiplikation gilt das Distributivgesetz, d.h.:  
$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C), \quad (B + C) \cdot A = (B \cdot A) + (C \cdot A)$$

  $Mat_m(R)$  ist ein Ring bzgl.  $+$  und  $\cdot$ .  
Selbst wenn  $R$  kommutativ ist, ist es  $Mat_m(R)$  niemals, solange  $m \geq 2$ .

### ▼ 3.5.6 K als Körper

 Sei  $K$  ein Körper,  $m, n \in \mathbb{N}$  sowie  $A \in Mat_{m,n}(K)$  und  $b \in K^m$ . Sei  $\bar{c} \in L(A, b)$  ein beliebiges Element, dann gilt:  
$$L(A, b) = \{\bar{c} + c \mid c \in L(A, 0)\}$$

### ▼ 3.5.7 Inverse Matrix

 Wenn es zu einer quadratischen Matrix  $A$  eine Matrix  $A^{-1}$  gibt mit  
$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I},$$
  
dann heißt die Matrix  $A$  invertierbar oder regulär.

-  ➔ Die Inverse von  $A$  hat dieselbe Dimension wie  $A$  und ist eindeutig (!?) bestimmt.  
➔ Eine quadratische Matrix, die nicht invertierbar ist, heißt singulär.  
➔ Eine Matrix  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn gilt:  $\det(A) \neq 0$ .

 "Eindeutig bestimmt": Wenn wir zu  $A$  eine Matrix  $B$  gefunden haben, die die Eigenschaft  $AB = BA = \mathbb{I}$  erfüllt, dann ist  $B$  die einzige Matrix dieser Art.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_{11} + 4b_{21} & 2b_{12} + 4b_{22} \\ -b_{11} + 3b_{21} & -b_{12} + 3b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Sei  $R$  ein Ring und  $m \geq 1$ . Dann heißen die Elemente von  $GL_m(R) := Mat_m(R)^x$  (über  $R$ ) invertierbare Matrizen.



- Hat eine Matrix  $A$  eine Nullzeile oder Nullspalte, so ist sie nicht invertierbar.
- Ist die Koeffizientenmatrix  $A$  eines LGS quadratisch und invertierbar, so besitzt das System genau eine Lösung
- Ist  $B$  eine invertierbare Matrix, so gilt  $L(A, b) = L(BA, Bb)$  für alle LGS. Es bedeutet  $x \in L(A, b)$  ja gerade  $Ac = b$ .

### ▼ 3.5.8 Elementarmatrix



- Multipliziert man eine  $n \times p$  - Matrix  $A$  von links mit einer Elementarmatrix, so entspricht das einer elementaren Zeilenumformung der Matrix  $A$ .
- Elementarmatrizen können auch von rechts an eine Matrix  $A$  multipliziert werden und entsprechen dann elementaren Spaltenumformungen von  $A$ .



Sei  $K$  ein Körper und  $m \in \mathbb{N}$ . Eine Elementarmatrix (über  $K$ ) ist eine Matrix aus  $Mat_m(K)$  von einem der folgenden drei Typen:

**(1)** Für  $1 \leq i \leq j \leq m$

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$



$P_{ij} A$  entsteht aus  $A$  durch Vertauschen der  $i$ -ten und  $j$ -ten Zeile.

**(2)** Für  $1 \leq i \leq m$  und  $0 \neq \lambda \in K$

$$S_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$



$S_i(\lambda)A$  entsteht aus  $A$  durch Multiplikation der  $i$ -ten Zeile mit  $\lambda$ .

**(3)** Für  $1 \leq i, j \leq m$ ,  $i \neq j$ ,  $0 \neq \lambda \in K$

$$M_j^i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$        $\uparrow$

$i$        $j$



$M_j^i(\lambda)A$  entsteht durch Addition des  $\lambda$ -fachen der  $i$ -ten Zeile zur  $j$ -ten Zeile.



- Jede Elementarmatrix ist invertierbar über  $K$ .
- Eine quadratische Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ohne Nullzeilen ist die Einheitsmatrix.
- Inverse von Elementarmatrizen sind selbst wieder Elementarmatrizen

Sei  $K$  ein Körper,  $m \in \mathbb{N}$  und  $A \in Mat_m(K)$ , dann sind äquivalent:



- $A \in GL_m(K)$
- $A$  ist ein Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen.
- $A$  lässt sich durch elementare Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix transformieren.

# — 4 —

## 4 Vektorräume und lineare Abbildungen

### 4.1 Vektorräume

#### ▼ 4.1.1 Definition

!? Ein  $n$ -Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  nennt man Vektor.  $\rightarrow \mathbb{R}^n$  ist der Vektorraum  
Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  sind bspw.  $a = (2, 3)$  oder  $b = (0, -1)$   
Vektoren im  $\mathbb{R}^5$  sind bspw.  $c = (1, 4, 0, -2, -1)$

(1) Ein  $K$ -Vektorraum ist eine abelsche Gruppe  $(V, +)$  zusammen mit der Verknüpfung



$\cdot : K \times V \rightarrow V$

genannt die Skalarmultiplikation, sodass für alle  $\lambda, \gamma \in K$  und  $v, w \in V$  gilt:

- ➡  $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$
- ➡  $(\lambda + \gamma) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\gamma \cdot v)$
- ➡  $(\lambda\gamma) \cdot v = \lambda \cdot (\gamma \cdot v)$
- ➡  $1 \cdot v = v$

(2) Die Elemente von **V** heißen **Vektoren**, die Elemente von **K Skalare**. Das **neutrale Element** der **abelschen Gruppe V** heißt **Nullvektor/Ursprung**.

#### ▼ 4.1.2 Addition von Vektoren



Die Summe von zwei Vektoren  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  ist der Vektor:

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$



Je zwei Elemente  $a, b \in V$  wird ein Element  $a + b \in V$  zugeordnet, sodass  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe wird, d.h.:

→  $a + b = b + a \rightarrow$  **Kommutativität**

→  $a + (b + c) = (a + b) + c \rightarrow$  **Assoziativität**

→  $a + 0 = a \rightarrow$  **Existenz eines neutralen Elements**

→  $a + (-a) = 0 \rightarrow$  **Existenz eines inversen Elements**

✓ für  $a, b, c \in V$ , das neutrale Element **0** ist der **Nullvektor** und das zu  $a$  **inverse Element** ist  $-a$ .

#### ▼ 4.1.3 Skalarmultiplikation



Die Multiplikation des Vektors  $a \in \mathbb{R}^n$  mit einem Skalar  $k \in \mathbb{R}$  ist der Vektor:

$$k \cdot a = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ \vdots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix}$$

→ Das Ergebnis jeder dieser beiden Rechenoperationen ist wieder ein Vektor im  $\mathbb{R}^n$ .

→  $k(ha) = (kh)a$

→  $1a = a$

→  $k(a + b) = ka + kb \rightarrow$  **Distributivgesetz**

→  $(k + h)a = ka + ha$

✓ für alle  $a, b \in V$  und  $h, k \in K : V$  wird ein Vektorraum (über dem Körper  $K$ ) genannt.



Ist  $K = \mathbb{R} \rightarrow$  reeller Vektorraum

Ist  $K = \mathbb{C} \rightarrow$  komplexer Vektorraum

#### ▼ 4.1.4 Good To Know - Vektorräume



(1) Für  $m \geq 1$  ist  $K^m$  ein  $K$ -Vektorraum.



(2) Etwas allgemeiner ist für  $m, n \geq 0$  stets  $\text{Mat}_{m,n}(K)$  ein  $K$ -Vektorraum.



(3) Sei  $M$  eine beliebige Menge. Die Menge:  $F(M, K) = \{f : M \rightarrow K\}$  aller  $K$ -wertigen Abbildungen auf  $M$  ist nicht nur ein Ring, sondern kann auch als  $K$ -Vektorraum aufgefasst werden.



(4) Die Menge aller Polynome mit Koeffizienten aus  $K$  ist ein  $K$ -Vektorraum.

$$K[t] := \{c_0 + c_1t + \cdots + c_dt^d \mid d \in \mathbb{N}, c_i \in K\}$$



(5) Für jeden Körper  $K$  existiert der Nullvektorraum, i.e.  $V = \{0\}$ . Die Verknüpfungen sind dabei eindeutig bestimmt. Man nennt ihn auch den trivialen Vektorraum.

-  (6) Sind  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume, so kann man das kartesische Produkt  $V \times W$  wieder als  $K$ -Vektorraum auffassen. Addition und Skalarmultiplikation sind komponentenweise definiert:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \quad \lambda \cdot (v, w) := (\lambda v, \lambda w).$$

-  (7) Für  $0 \neq v \in V$  und  $\lambda, \gamma \in K$  mit  $\lambda \neq \gamma$  gilt stets:

$$\lambda v \neq \gamma v$$

-  (8) Für  $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  gilt:

$$K^2 = \{(0, 0)^t, (0, 1)^t, (1, 0)^t, (1, 1)^t\}$$

### Wichtige Eigenschaften von Vektorräumen:

-    $0a = 0$   
  $k0 = 0$   
  $(-1)a = -a$   
  $a - b = a + (-b)$

#### ▼ 4.1.5 Untervektorraum

Untervektor-  
raummenge  $\subseteq$  Vektorraum-  
menge



Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  eine nichtleere Teilmenge.

- (1)  $U$  heißt  $K$ -Untervektorraum von  $V$ , falls gilt:

$$v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$$

$$\lambda \in K, v \in U \Rightarrow \lambda v \in U$$

(2)  $U$  heißt affiner  $K$ -Unterraum von  $V$ , falls ein  $v \in V$  existiert, sodass:

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}$$

ein  $K$ -Untervektorraum von  $V$  ist. Dabei heißt dann  $v + U$  der zu  $U$  parallele Untervektorraum.

- !?
- Untervektorräume sind niemals leer.
  - Die Vektoraddition und die skalare Multiplikation sind auf  $U$  abgeschlossen.
  - Fehlt in  $U$  der Nullvektor  $0$ , so ist  $U$  kein Untervektorraum.

- ✓ (1) Jeder Untervektorraum  $U$  enthält den Nullvektor.

- ✓ (2) Jeder  $K$ -Untervektorraum von  $V$  ist mit den eingeschränkten Verknüpfungen selbst wieder ein  $K$ -Vektorraum.

- ✓ (3) Der Durchschnitt einer beliebigen Familie von Untervektorräumen von  $V$  ist wieder ein Untervektorraum.

- ✓ (4) Jeder Untervektorraum ist ein affiner Unterraum. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Genauer ist ein affiner Unterraum  $U$  genau dann auch ein Untervektorraum, wenn  $0 \in U$ .

#### ▼ 4.1.6 Lösungsmenge

(1) Für  $A \in Mat_{m,n}(K)$  ist die Lösungsmenge

$$L(A, 0) \subseteq K^n$$

des von  $A$  definierten homogenen Gleichungssystem ein  $K$ -Untervektorraum.

(2) Fpr  $A \in Mat_{m,n}(K)$  und  $b \in K^m$  ist die Lösungsmenge

$$L(A, b) \subseteq K^n$$

des inhomogenen Systems ein affiner  $K$ -Unterraum. Für jedes beliebige  $\bar{c} \in L(A, b)$  gilt ja:

$$(-\bar{c}) + L(A, b) = L(A, 0) \rightarrow (-b + b = 0)$$

(3) Für  $d \in \mathbb{N}$  ist

$$K[t]_{\leq d} := \{c_0 + c_1t + \dots + c_dt^d \mid c_i \in K\}$$

aller Polynome vom Grad höchstens  $d$  ein Untervektorraum des Vektorraums  $K[t]$ .

#### ▼ 4.1.7 Linearkombination



Seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $v_1, \dots, v_r \in V$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ . Dann heißt das Element  $\lambda_1v_1 + \dots + \lambda_rv_r \in V$  eine Linearkombination der Vektoren  $v_1, \dots, v_r$  → leere Linearkombination ( $r=0$ ) = Nullvektor

#### ▼ 4.1.8 Kleinster Untervektorraum - Definition



Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $M \subseteq V$  eine beliebige Teilmenge. Dann gilt:

$$\bigcap_{\substack{M \subseteq U \subseteq V \\ U \text{ Untervektorraum}}} U = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \mid r \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, v_i \in M \right\}$$

→ und dies ist der kleinste Untervektorraum, der  $M$  enthält.

#### ▼ 4.1.9 Spann

- ✓ (1) Für  $M \subseteq V$  bezeichnen wir die Menge aus "Kleinster Untervektorraum - Definition" als  $K$ -lineare Hülle oder Spann über  $K$  von  $M$  und verwenden dafür auch die Bezeichnung:

$\text{Span}_k(M) \rightarrow \text{Spann über } K \text{ von } M = \text{kleinere } K\text{-Unterraum von } V, \text{ der } M \text{ enthält.}$

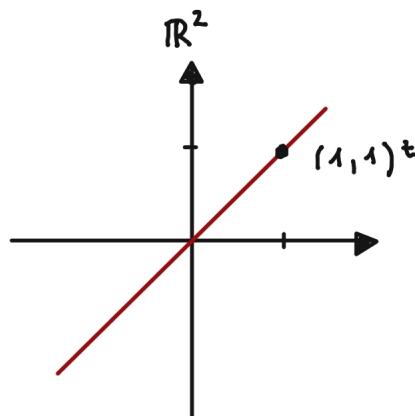
- ✓ (2) Ein  $K$ -Vektorraum heißt endlich erzeugt oder endlich dimensional, wenn es eine endliche Teilmenge  $M \subseteq V$  gibt mit :

$$\text{Span}_k(M) = V$$

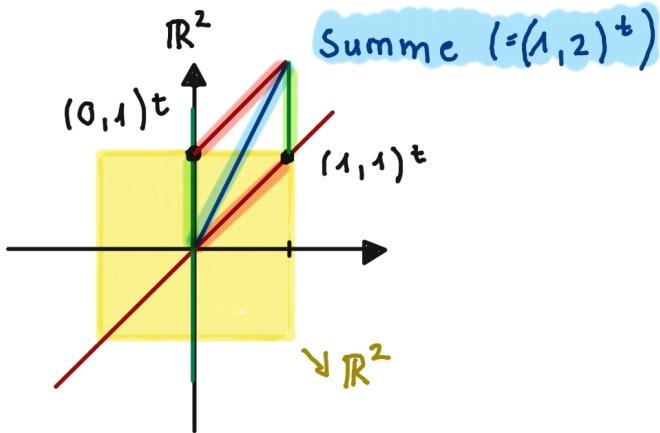
**Beispiel:**

- 💡 (1) Hat die Menge  $M$  nur ein Element, so ist jede Linearkombination von Elementen aus  $M$  nur ein Vielfaches dieses einen Vektors.  
➡ Man muss sich den  $\text{Span}_K(M)$  also als Ursprungsgerade vorstellen (Ausnahme: Nullvektor)

Betrachte man also bspw. den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  und darin die einelementige Menge  $M = \{(1, 1)^t\} \rightarrow \text{Span}_{\mathbb{R}}(M)$  ist die Ursprungsgerade durch den Punkt  $(1, 1)^t$ :



Betrachtet man  $M = \{(1,1), (0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$  so ergibt sich  $\text{Span}_{\mathbb{R}}(M) = \mathbb{R}^2$ . Es reicht für die lineare Hülle nicht, nur Vielfache der beiden Vektoren zu betrachten, man muss auch Summen zulassen:



#### Rechnerisch:

Man wählt  $(a,b)^t \in \mathbb{R}^2$  beliebig und setzt  $\lambda = a$   $\gamma = b - a$ :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \text{Hint: } \begin{pmatrix} a \\ a + (b - a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

→ so erhält man den Vektor  $(a,b)^t$  als  $\mathbb{R}$ -Linearkombination der Elemente von  $M$



(2) Für jedes  $m \in \mathbb{N}$  und jeden Körper  $K$  ist  $K^m$  ein endlich erzeugter  $K$ -Vektorraum:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Span}_K(\{e_1, \dots, e_m\}) = K^m$$



(3) Der  $K$ -Vektorraum  $K[t]$  aller Polynome ist nicht endlich erzeugt. Endlich viele Polynome sind immer vom Grad beschränkt. Beim Übergang zum Spann entstehen niemals Polynome von höherem Grad.

#### ▼ 4.1.10 Spaltenraum



sei  $A \in Mat_{m,n}(K)$  gegeben. Die  $n$  Spalten von  $A$  sind Elemente von  $K^m$ , wir bezeichnen sie mit  $a_1, \dots, a_n$ . Für  $c = (c_1, \dots, c_n)^t \in K^n$  gilt dann

$$Ac = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n \quad \text{und somit gilt:}$$

$$Span_K(\{a_1, \dots, a_n\}) = \{Ac \mid c \in K^n\}$$



Diese Menge bezeichnet man als den Spaltenraum von  $A$ . Man erkennt, dass das durch  $(A|b)$  definierte LGS genau dann eine Lösung hat, wenn  $b$  zum Spaltenraum von  $A$  gehört.

### 4.2 Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimension

#### ▼ 4.2.1 Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis



Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

(1) Das Tupel  $(v_1, \dots, v_m)$  heißt  $K$ -linear unabhängig, falls für alle  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  aus  $K$  gilt:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$$

→ Ansonsten heißt es  $K$ -linear abhängig.

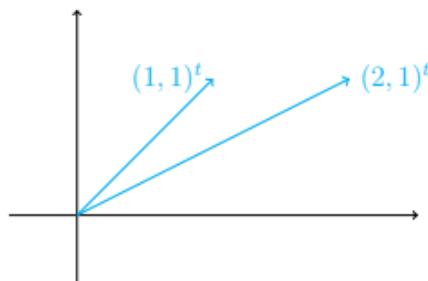
(2)  $(v_1, \dots, v_m)$  heißt  $K$ -Erzeugendensystem von  $V$  falls:

$$Span_K(\{v_1, \dots, v_m\}) = V$$

(3) Das Tupel  $(v_1, \dots, v_m)$  heißt  $K$ -Basis von  $V$ , falls es linear unabhängig (1) und ein Erzeugendensystem von  $V$  (2) ist. → dann ist es eine Basis von  $V$ .



- ➔ Linear unabhängig sind Vektoren  $v_1, \dots, v_m$  genau dann, wenn der Nullvektor nur als Linearkombination aus ihnen entsteht, wenn alle Koeffizienten dabei Null sind.
- ➔ Im  $\mathbb{R}^2$  sind die beiden Vektoren  $v_1 = (1, 1)^t, v_2 = (2, 1)^t$  linear unabhängig. Man kann sie also nicht skalieren und addieren und damit den Nullpunkt erreichen.



Rechnerisch sieht man das folgendermaßen: Aus

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2)$$

folgt  $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$  und  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ . Dieses System linearer Gleichungen über  $\mathbb{R}$  besitzt nur die triviale Lösung.

(4) Der Nullvektor ist der einzige Vektor, der für sich allein linear abhängig ist.

#### ▼ 4.2.2 ✓ Good To Know - Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis



(1)  $(v_1, \dots, v_m)$  bildet eine Basis von  $V$ .



(2) Zu jedem  $v \in V$  existieren eindeutig bestimmte Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  mit  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ .



(3)  $(v_1, \dots, v_m)$  ist maximal linear unabhängig, d.h. das Hinzufügen eines beliebigen weiteren Vektors führt stets zur linearen Abhängigkeit.  $\rightarrow (v_1, \dots, v_{m+1})$

 (4)  $(v_1, \dots, v_m)$  ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. , wenn man ein beliebiges  $v_i$  wegnimmt, spannen sie nicht mehr  $V$  auf.

 (5) Jeder endlich erzeugter  $K$ -Vektorraum besitzt eine Basis.

 (6) Sei  $V$  ein eindlich erzeugter  $K$ -Vektorraum  $(v_1, \dots, v_m)$ , ein Erzeugendensystem von  $V$  sowie  $(w_1, \dots, w_n)$  linear unabhängig, dann gilt:

- $n \leq m$ .
- Je zwei Basen von  $V$  haben dieselbe Länge.
- Es gibt unter  $v_1, \dots, v_m$  Vektoren  $v_{i1}, \dots, v_{ir}$ , sodass  $(w_1, \dots, w_n, v_{i1}, \dots, v_{ir})$  eine Basis von  $V$  bildet.

#### ▼ 4.2.3 Dimension



Sei  $V$  ein endlich erzeugter  $K$ -Vektorraum. Die Dimension von  $V$  (über  $K$ ) ist die Länge einer bzw. jeder Basis von  $V$ :

  $\dim_K(V)$

#### Beispiel:

Man betrachte den  $K$ -Vektorraum  $K^m$



Standardbasis:  $(e_1, \dots, e_m) \rightarrow$  besteht aus genau  $m$  Vektoren.

Somit besteht jede andere Basis ebenfalls aus  $m$  Vektoren und es gilt:

$$\dim_K(K^m) = m$$

Jedes Erzeugendensystem von  $K^m$  hat mindestens  $m$  Elemente und jede Menge linear unabhängiger Vektoren hat höchstens  $m$  Elemente.

-  Die Vektoren  $v_1, \dots, v_m \in K^m$  bilden genau dann eine  $K$ -Basis von  $K^m$ , wenn die Matrix  $M = (v_1, \dots, v_m) \in Mat_m(K)$  invertierbar über  $K$  ist.
- wenn  $\det(M) \neq 0$
  - wenn die Spalten linear unabhängig sind.

#### ▼ 4.2.4 Basis von Lösungsmengen



Sei  $(A, b)$  die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems über  $K$ .

- Dann ist  $L(A, b) \subseteq K^n$  ein affiner Unterraum und für jedes beliebige  $\bar{c} \in L(A, b)$  gilt:

$$L(A, b) = \bar{c} + L(A, 0)$$

- Weiter ist  $L(A, 0)$  ein Untervektorraum und wir können für ihn eine endliche Basis  $(v_1, \dots, v_s)$  finden. Dadurch kann man  $L(A, b)$  ausdrücken als:

$$L(A, b) = \left\{ \bar{c} + \sum_{i=1}^s \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in K \right\}.$$

#### Basis von $L(A, 0)$ finden:

- (1) Zunächst bringt man  $A$  mit elementaren Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform.



Dabei ergeben sich:

- $r$  Pivotspalten und
- $n - r$  freie Variablen

- (2) Für jede freie Variable konstruiert man sich einen Lösungsvektor, indem man für eine der freien Variablen den Wert 1, für die anderen freien Variablen 0 wählt. (dies wiederholt man für alle freien Variablen)

- (3) Dadurch erhält man  $n - r$  viele Vektoren, die eine Basis von  $L(A, 0)$  bilden



Somit ist auch  $\text{Dim}_K(L(A, 0)) = n - r$

## 4.3 Lineare Abbildungen

### ▼ 4.3.1 Definition: Lineare Abbildung



In diesem Abschnitt werden Abbildungen der Form:  $F : K^n \rightarrow K^n$  betrachtet, die also eine Vektor  $x \in K^n$  auf einen Vektor  $y = F(x) \in K^m$  abbilden.

#### Beispiele:

Sei  $K = \mathbb{R}$ ,  $n = m = 2$ , die Abbildung:  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $F(x) = -x$

→ Die Abbildung ordnet jedem Vektor  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  den am Koordinatenursprung gespiegelten Vektor  $F(x) = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$  zu. Bspw. wird  $x = (4, -2)$  auf  $F(x) = (-4, 2)$  abgebildet.

#### Mithilfe einer Matrix:

(1) Ermittlung der Bilder der Standardbasisvektoren des  $\mathbb{R}^2$ :

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Daher ist  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  die gesuchte Matrix. Mit ihrer Hilfe kann die Abbildungsvorschrift als:

$$F(x) = Ax = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = -x \quad \text{geschrieben werden.}$$

Sei  $K = \mathbb{R}$ ,  $n = 3, m = 2$ , die Abbildung:  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

→ Die Abbildung ordnet jedem Vektor  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  den Vektor  $F(x) = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  zu. Bspw. wird  $x = (2, 3, 7)$  auf  $F(x) = (2, 3)$  abgebildet.

#### Definition - linear



Seien  $V (= K^n), W (= K^m)$  zwei  $K$ -Vektorräume:

(1) Eine Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  heißt linear, falls für alle  $v_1, v_2 \in V, \lambda \in K$  stets gilt:

$$\begin{array}{l} \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \\ F(a + b) = F(a) + F(b) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \varphi(\lambda v_1) = \lambda \varphi(v_1) \\ F(ka) = kF(a) \end{array} \quad \text{bzw.}$$



Eine Abbildung  $F : K^n \rightarrow K^m$  ist genau dann linear wenn sie in der Form  $F(x) = Ax$  mit einer  $(m, n)$ -Matrix  $A$  geschrieben werden kann.

### Bilder der Standardbasisvektoren

Standardbasisvektoren  $e_1, \dots, e_n$

Bilder von  $\mathbb{R}^3$ :  $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Bilder von  $\mathbb{R}^4$ :  $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  etc.

### Definition - Isomorphismus

(2) Eine lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  heißt Isomorphismus, falls eine lineare Abbildung  $\psi : W \rightarrow V$  existiert mit :

$$\psi \circ \varphi = id_v \quad \text{und} \quad \varphi \circ \psi = id_w$$

### Definition - isomorph

(3)  $V$  und  $W$  heißen isomorph, falls ein Isomorphismus  $\varphi : V \rightarrow W$  existiert. Wir schreiben:

$$V \cong W$$

### ▼ 4.3.2 Good To Know - Lineare Abbildungen



Jede Matrix  $A \in Mat_{m,n}(K)$  definiert durch Matrixmultiplikation von links eine lineare Abbildung:

$$\mu_A : K^n \rightarrow K^m$$

$$c \mapsto Ac$$

In dieser Notation gilt:  $L(A, b) = \mu_A^{-1}(b)$

→ Das LGS zu lösen bedeutet also, das Urbild vom Vektor  $b$  unter der Abbildung  $\mu_A$  zu bestimmen.



Ein Isomorphismus ist offensichtlich immer bijektiv. Umgekehrt ist aber auch jede bijektive lineare Abbildung ein Isomorphismus.



Isomorphie ist ein verallgemeinerter Gleichheitsbegriff für Vektorräume. Zwei isomorphe Vektorräume sind eigentlich völlig identisch, nur tragen ihre Elemente eventuell verschiedene Namen. Ein Isomorphismus  $\varphi : V \rightarrow W$  gibt dabei einfach die Umbenennung der Elemente an.

#### ▼ 4.3.3 Rechenregeln



Seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume, dann gilt:

$$(1) \varphi(0) = 0 \text{ und}$$

$$(2) \varphi(-v) = -\varphi(v)$$

#### ▼ 4.3.4 Matrix einer linearen Abbildung

**Beispiel 1: (in der Form  $F(x) = Ax$ )**

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \checkmark \text{ Die Abbildung ist linear.}$$

**Begründung:**

→ Die Abbildung ist linear, da sie die Form  $F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix}$  hat.

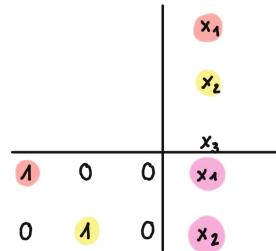
→ Die Matrix  $A$  erhalten wir, indem wir die Bilder der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  ermitteln:

$$F(e_1) = F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F(e_2) = F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F(e_3) = F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die obersten 2 Werte der Standardbasis werden genommen, weil  $\mathbb{R}^3$  auf  $\mathbb{R}^2$  abgebildet wird

→ Diese 3 Vektoren bilden die Spalten von  $A$ , also  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

→ Probe:  $Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  ✓



### Beispiel 2: (in der Form $F(x) = Ax$ )

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \text{ ↘ Die Abbildung ist nicht linear.}$$

**Begründung:**

→ Die Abbildung hat nicht die Form  $F(x) = Ax$ .

→ Würde man die Bilder der Standardbasis  $\mathbb{R}^2$  ermitteln:

$$F(e_1) = F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } F(e_2) = F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

damit wäre die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

→ Mit diesem  $A$  erhalten wir die lineare Abbildung:

$$Ax = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

🚫 Aber diese Abbildung ist ungleich  $F$ !



Eine Abbildung der Form  $F(x) = Ax + b$  (siehe Bsp. 2) ist keine lineare Abbildung, sondern wird als affine Abbildung bezeichnet.

### Beispiel 2: (in der Form $F(x) = Ax$ )

#### ▼ 4.3.5 Dimensionsformel



Seien  $V, W$  zwei Vektorräume und  $\varphi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann heißt:

$Kern(\varphi) := \varphi^{-1}(0) = \{v \in V | \varphi(v) = 0\}$  der Kern von  $\varphi$ .



Für eine Matrix  $A \in Mat_{m,n}(K)$  gilt offensichtlich:

$Kern(\mu_A) = L(A, 0)$



Hier gilt:

- Es sind  $Kern(\varphi) \subseteq V$  und  $Bild(\varphi) \subseteq W$  jeweils Untervektorräume.
- Es ist  $\varphi$  genau dann injektiv, wenn  $Kern(\varphi) = \{0\}$  gilt

### Beispiel:



Wir betrachten die lineare Abbildung:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b)^t &\mapsto a - b\end{aligned}$$

Es ist  $Kern(\varphi) = \{(a, b)^t \in \mathbb{R}^2 | a = b\} = \{(a, a) | a \in \mathbb{R}\}$  genau die Diagonale in  $\mathbb{R}^2$ , ein eindimensionaler Untervektorraum. Insbesondere ist  $\varphi$  nicht injektiv. Es gilt  $Bild(\varphi) = \mathbb{R}^1$ .

### Dimensionsformel:

Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $W$  ein weiterer  $K$ -Vektorraum und  $\varphi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, dann gilt:

$$\dim_K(V) = \dim_K(\text{Kern}(\varphi)) + \dim_K(\text{Bild}(\varphi))$$

- ✓ Seien  $V, W$  zwei endlich-dimensionale  $K$ -Vektorräume mit  $\dim_K(V) = \dim_K(W)$  sowie  $\varphi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, dann sind äquivalent:
- $\varphi$  ist injektiv
  - $\varphi$  ist surjektiv
  - $\varphi$  ist bijektiv

- ✓ Für eine quadratische Koeffizientenmatrix  $A \in \text{Mat}_m(K)$  sind äquivalent:
- $L(A, 0) = \{0\}$
  - Für jedes  $b \in K^m$  besitzt das LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix  $(A, b)$  eine Lösung.
  - $A$  ist invertierbar.

### ▼ 4.3.6 Rang einer Matrix



Für  $A \in \text{Mat}_{m,n}(K)$  definieren wir den Rang als  
 $\text{rang}(A) := \dim_K(\text{Bild}(\mu_A))$

- Der Rang von  $A$  ist also genau die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von  $A$ .
- Der Rang einer Matrix  $A$  ist gleich dem Rang der transponierten Matrix  $A^T$ .
- Eine Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn  $\text{rang}(A) = m$  gilt. Genau dann ist auch das LGS  $(A, b)$  für jedes  $b \in K^m$  lösbar.
- Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der Rang von  $A$  nicht. Solche Umformungen entsprechen der Multiplikation von links mit invertierbaren Matrizen.

!? In German: Der Rang einer Matrix  $A$  ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen der Matrix.

**Beispiel:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Die 3 Zeilen als Vektoren betrachtet sind linear abhängig, weil jede Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, linear abhängig ist. Wenn man den Nullvektor weglässt, so bleiben die beiden Zeilen  $(1 \ 2 \ 0)$  und  $(0 \ 1 \ 1)$  übrig, und die sind linear unabhängig. Daher ist  $\text{rang}(A) = 2$ .



Ein LGS ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist.

**▼ 4.3.7 Bild einer Matrix**


Das Bild einer  $(m, n)$ -Matrix  $A$  ist definiert als:

$$\text{Bild}(A) = \{Ax \mid x \in K^n\} \subseteq K^m$$

!? In German: Also die Menge aller Vektoren, die durch Anwendung von  $A$  auf alle  $x \in K^n$  erreicht werden. Alternativ kann auch vom Bild der linearen Abbildung  $F : K^n \rightarrow K^m, F(x) = Ax$  gesprochen werden.

**Die Dimension des Bildes ist daher gleich dem Rang der Matrix  $A$ .**

**Beispiel:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Das Bild wird von den Spaltenvektoren von  $A$  aufgespannt, also:

$$\text{Bild}(A) = LH\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \in \mathbb{R}^3$$

→ Offensichtlich sind die drei Spaltenvektoren nicht linear unabhängig, denn der dritte ist ja die Summe der ersten beiden. Deshalb ist der dritte überflüssig und wir können ihn weglassen:

$$Bild(A) = LH \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

→ Die verbleibenden beiden Vektoren sind nun aber linear unabhängig und damit ist das Bild von  $A$  die von diesen beiden Vektoren aufgespannte Ebene. Dimension des Bildes = Rang der Matrix = 2

---

#### ▼ 4.3.8 Kern einer Matrix



Der Kern einer  $(m, n)$ -Matrix  $A$  ist definiert als:

$$Kern(A) = \{x | Ax = 0\} \subseteq K^n$$

!? In German: Also die Menge aller Lösungen des homogenen Gleichungssystems  $Ax = 0$ . Der Kern besteht aus allen Vektoren  $x$ , die von  $F$  auf 0 abgebildet werden.

→ Die Lösungen des homogenen Gleichungssystems bilden wieder einen Teilraum, da Addition und Multiplikation mit einem Skalar für Lösungen des homogenen Gleichungssystems wieder eine Lösung des homogenen Gleichungssystems ergibt:



Der  $Kern(A)$  einer  $(m, n)$ -Matrix  $A$  bildet einen Teilraum des  $K^n$ .

#### Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Um den Kern zu bestimmen, muss das homogene Gleichungssystem  $Ax = 0$  gelöst werden

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 0$$

(2) Nach Anwendung des Gauß-Algorithmus erhalten wir:

$$x_1 + x_3 = 0$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

$$0 = 0$$

(3) Für  $x_3 = t \in \mathbb{R}$  einsetzen. Man sieht, dass die Lösung von der Form  $(x_1, x_2, x_3) = (-t, -t, t)$  ist. Der Kern ist also die Gerade, die vom Vektor  $(-1, -1, 1)$  aufgespannt wird

$$Kern(A) = LH\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Die Dimension des Kerns ist somit 1.



Zusammengefasst:

- ➡ Für gegebenes  $b \in K^m$  hat das LGS genau dann mind. 1 Lösung, wenn  $b \in Bild(A)$ .
- ➡ Hat man irgendeine Lösung  $x_0$  des inhomogenen LGS gefunden, so erhält man alle anderen, indem man alle möglichen Lösungen des homogenen LGS hinzufügt:

$$x = x_0 + Kern(A)$$

Insbesondere ist die Lösung  $x_0$  genau dann eindeutig, wenn der Kern nulldimensional ist:  $Kern(A) = \{0\}$

# — 5 —

## 5 Die Determinante

### 5.1 Permutationen

#### ▼ 5.1.1 Matrixschreibweise

$$\sigma \stackrel{\wedge}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(m) \end{pmatrix}$$

**Beispiel:**

Die Permutation  $\pi : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  mit

$$\pi(1) = 2$$

$$\pi(2) = 4$$

$$\pi(3) = 3$$

$$\pi(4) = 1$$

wird in der Zweizeilenform durch :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ notiert.}$$

#### ▼ 5.1.2 Hintereinanderausführung von zwei Permutationen

L R

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Schritt 1: R gibt man die 1, wird zu 1

L bekommt die 1, wird zu 3    1 → 3

Schritt 2: R gibt man die 2, wird zu 3

L bekommt die 3, wird zu 1    2 → 1

Schritt 3: R gibt man die 3, wird zu 2

L bekommt die 2, wird zu 2    3 → 2



Die Hintereinanderausführung ist nicht kommutativ.

### ▼ 5.1.3 Inverse Permutation zu $\sigma$



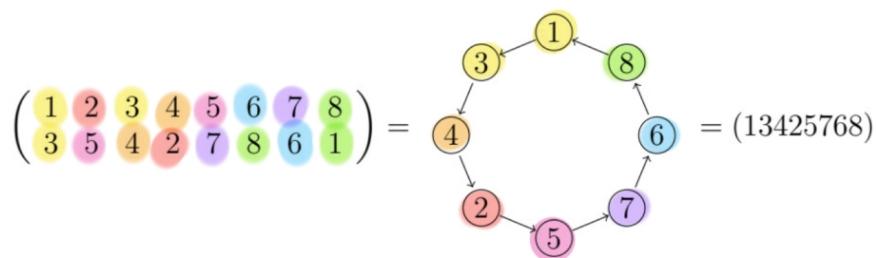
Erhält man , indem man die beiden Zeilen vertauscht und dann die Spalten so ordnet, dass die Einträge in der ersten Zeile wieder in der richtigen Reihenfolge stehen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeile 1 & 2 vertauschen

obere Zeile wieder  
in richtige Reihen-  
folge (123) bringen

### ▼ 5.1.4 Zykelschreibweise



$$\begin{array}{ll} 1 \rightarrow 3 & 5 \rightarrow 7 \\ 3 \rightarrow 4 & 7 \rightarrow 6 \\ 4 \rightarrow 2 & 6 \rightarrow 8 \\ 2 \rightarrow 5 & 8 \rightarrow 1 \end{array}$$

### ▼ 5.1.5 Elementfremde Zykeln

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$$

erhält man beispielsweise die Zyklenschreibweise  $\sigma = (132)(45)$ .

$$\begin{array}{rcl} 1 & \rightarrow & 3 \\ 3 & \rightarrow & 2 \\ 2 & \rightarrow & 1 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 4 & \rightarrow & 5 \\ 5 & \rightarrow & 4 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{Diagram of } (132) \\ \text{Diagram of } (45) \\ = (132)(45) \end{array}$$



Reihenfolge der Zykeln spielt keine Rolle.

### ▼ 5.1.6 Produkt von nicht elementfremden Zykeln



Bei nicht elementfremden Zykel ist das Prpdukt von der Reihenfolge abhängig:

$$\begin{array}{c} L \quad R \\ (1 \ 3 \ 2) \cdot (2 \ 4 \ 5) \\ = (1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 5) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 \ 3 \ 2) \cdot (2 \ 4 \ 5) \\ (1 \ 3 \ 2 \ 1) \cdot (2 \ 4 \ 5 \ 2) \end{array} \right.$$

- 1 macht in R gar nichts,  $1 \mapsto 3$
- 3 macht in R nichts, in L  $3 \mapsto 2$
- 2 wird in R zu  $2 \mapsto 4$ , 4 in L macht nichts
- 4 wird in R zu  $4 \mapsto 5$ , 5 in L macht nichts
- 5 wird in R zu  $5 \mapsto 2$ , 2 in L wird zu  $2 \mapsto 1$
- 1 wurde schon benutzt

$$\begin{array}{c} L \quad R \\ (2 \ 4 \ 5) \quad (1 \ 3 \ 2) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \ 3 \ 4 \ 5 \ 2)$$

- 1 wird in R zu  $1 \mapsto 3$ , in L nichts
- 3 wird in R zu  $3 \mapsto 2$ , 2 in L zu  $2 \mapsto 4$
- 4 macht in R nichts, in L wird  $4 \mapsto 5$
- 5 macht in R nichts, in L wird  $5 \mapsto 2$

### ▼ 5.1.7 Inverse eines Zykels

Das Inverse eines Zykels entsteht einfach aus Umkehrung der Reihenfolge der Zahlen:

$$(13245)^{-1} = (54231) = (15423).$$

$$(1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 5) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$$
$$(1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 5)^{-1} = (5 \ 4 \ 2 \ 3 \ 1) = (15423)$$

### ▼ 5.1.8 Transposition



Ein Zykel der Länge 2 heißt Transposition. Transpositionen sind selbstinvers, d.h. :

$$(25)^{-1} = (52) = 25$$

### ▼ 5.1.9 ✓ Good To Know - Permutationen



Jede Permutation  $\sigma \in S_m$  lässt sich als Produkt von elementfremden Zyklen schreiben. Deren Anzahl ist durch  $\sigma$  eindeutig bestimmt.



Ist eine Permutation  $\sigma \in S_m$  ein Produkt von  $k$  elementfremden Zyklen und  $\tau \in S_m$  eine Transposition, so besteht  $\sigma\tau$  aus  $k+1$  oder  $k-1$  elementfremden Zyklen.



Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben. Deren Anzahl ist für jede Permutation modulo 2 eindeutig bestimmt.

### ▼ 5.1.10 Signatur



Für  $\sigma \in S_m$  ist  $sgn(\sigma) := (-1)^S$

→ wobei  $S$  die Anzahl von Transpositionen ist.

Dadurch erhält man die **Signaturabbildung**:

$$sgn : S_m \rightarrow \{-1, 1\}$$



Ein Zykel hat genau dann Signatur 1, wenn er eine ungerade Länge hat.



Gerade Länge: so gilt  $sgn(\sigma) = (-1)^r$



Für  $\sigma, \tau \in S_m$  gilt:  $sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau)$

## 5.2 Die Determinante

### ▼ 5.2.1 Leibnitz-Formel der Determinante



Für  $A = (a_{ij})_{ij} \in Mat_m(K)$  wird die Determinante definiert als:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(m)m}.$$

→ Dadurch ergibt sich die Determinantenabbildung:  $\det : Mat_m(K) \rightarrow K$

Die Determinante einer  $(2, 2)$ -Matrix  $A$  ist die Zahl

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \in K$$

!? Die Determinante einer Matrix ist gleich der Determinante ihrer transponierten Matrix:

$$\det(A) = \det(A^t)$$

### ▼ 5.2.2 Entwicklungssatz von Laplace

Die Determinante einer  $(n, n)$ -Matrix ist eine Zahl aus  $K$ , die rekursiv berechnet wird.

→  $\det(A) = a_{11} \rightarrow$  wenn  $n = 1$

und

→  $\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1} \cdot \det(A^{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2} \cdot \det(A^{i2}) + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \cdot \det(A^{in})$

für  $n > 1$ , wobei  $A^{ij}$  jene  $(n-1, n-1)$ -Matrix ist, die aus  $A$  entsteht, wenn man die  $i$ -te Zeile und die  $j$ -te Spalte entfernt.

!? In German: Man sucht sich eine Zeile (oder Spalte), in der möglichst viele Elemente gleich 0 sind (denn dann ist weniger zu rechnen). Die Elemente werden der Reihe nach mit der entsprechenden Unterdeterminante multipliziert und mit alternierenden Vorzeichen (siehe Abbildung unten) aufsummiert.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

**Beispiel:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

→ Zeile 2 hat die meisten Nullen daher:

!? Formel zur Erinnerung

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1} \cdot \det(A^{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2} \cdot \det(A^{i2}) \dots$$

$$\det(A) = 4(-1)^{2+1} \cdot \det(A^{21}) + 5(-1)^{2+3} \cdot \det(A^{23})$$



$\det$  = Summe der Diagonaleinträge

$$\left( \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{array} \right) \quad A^{21} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \\ A^{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = \\ -4((1 \cdot 8) - (6 \cdot 3)) - 5((2 \cdot 6) - (7 \cdot 1)) = 40 - 25 = 15$$

Die Determinante ist 15.

### ▼ 5.2.3 Invertierbarkeit



Eine  $(n, n)$ -Matrix  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det(A) \neq 0$ .

Insbesondere ist das LGS  $Ax = b$  genau dann eindeutig lösbar, wenn  $\det(A) \neq 0$  und die Lösung ist dann  $x = A^{-1}b$ .

### ▼ 5.2.4 Lösbarkeit eines Gleichungssystems - Beispiel



Zu bestimmen sind jeden Zahlen  $\lambda \in \mathbb{R}$ , für die das homogene Gleichungssystem  $Ax = 0$  nicht-triviale Lösungen besitzt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

(1) Ist  $\det(A) \neq 0$ , so hat das homogene Gleichungssystem genau eine Lösung  $\rightarrow$  die triviale.

Also müssen jene Zahlen  $\lambda$  gefunden werden, für die  $\det(A) = 0$  gilt, denn dann gibt es auch nicht-triviale Lösungen.

Berechnung der Determinante:

$$\det(A) = (1 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

- Setzt man diese gleich 0 und löst die quadratische Gleichung, so erhält man  
 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$

#### ▼ 5.2.5 Charakteristische Eigenschaften der Determinante

  $\det(I) = 1$

 Die Determinante ist linear in jeder Spalte. D.h. es gilt

$$\det(a_1, \dots, a_j + b_j, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, b_j, \dots, a_n)$$

und

$$\det(a_1, \dots, k a_j, \dots, a_n) = k \cdot \det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n) \text{ für } k \in K$$

 Die Determinante ist alternierend, d.h. bei Vertauschen zweier Spalten ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

 Wenn eine Spalte(Zeile) von  $A$  lauter Nullen enthält, so ist die Determinante gleich 0.

 Wenn zwei Spalten (Zeilen) von  $A$  gleich sind, so ist die Determinante gleich 0.

 Wenn zwei Spalten (Zeilen) von  $A$  linear abhängig sind, so ist die Determinante gleich 0

 Multiplikation der  $(n, n)$ -Matrix  $A$  mit einem Skalar  $k \in K$  multipliziert die Determinante mit  $k^n$ :  $\det(kA) = k^n \cdot \det(A)$

 Achtung: Es ist also  $\det(kA) \neq k \cdot \det(A)$

 Warnung:  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

  $\det(AB) = \det(BA)$

  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

# — 6 —

## 6 Eigenwerte und Eigenvektoren

### 6.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

#### ▼ 6.1.1 Endomorphismus



$\varphi : V \rightarrow V$

... wobei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum

Eine lineare Abbildung von einem Raum in sich selbst heißt **Endomorphismus**.

#### ▼ 6.1.2 Eigenwert und Eigenvektor



Ein  $\lambda \in K$  heißt Eigenwert von  $\varphi$ , falls es ein  $0 \neq v \in V$  gibt mit  $\varphi(v) = \lambda v$ .

→ jedes solche  $v$  heißt dann Eigenvektor von  $\varphi$  zum Eigenwert  $\lambda$ .

#### ▼ 6.1.3 Eigenraum



Zu einem Eigenwert  $\lambda$  von  $\varphi$  heißt:

$Eig(\varphi, \lambda) := \{v \in V | \varphi(v) = \lambda v\}$

der zu  $\lambda$  gehörige **Eigenraum** von  $\varphi$ .

#### ▼ 6.1.4 Spektrum



Die Menge aller Eigenwerte von  $\varphi$  heißt das **Spektrum** von  $\varphi$ .

### ▼ 6.1.5 Good To Know - Eigenwerte und Eigenvektoren

 Ein Vektor  $0 \neq v$  ist genau dann ein Eigenvektor von  $\varphi$ , wenn er durch  $\varphi$  nur skaliert, nicht aber in der Richtung verändert wird.

 Die Bedingung  $0 \neq v$  ist wichtig, ohne sie wäre jedes  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $\varphi$ . Zum Eigenraum  $Eig(\varphi, \lambda)$  gehört der Nullvektor laut Definition aber immer.

 Für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $\varphi$  ist  $Eig(\varphi, \lambda)$  ein Untervektorraum von  $V$ . Für  $v, w \in Eig(\varphi, \lambda)$  und  $\gamma \in K$  gilt:

  $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v + w)$  und  
 $\varphi(\gamma v) = \gamma \varphi(v) = \gamma \lambda v = \lambda(\gamma v)$

 Eine Spiegelung des  $\mathbb{R}^2$  an einer Ursprungsgeraden besitzt die Eigenwerte 1 und -1. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist die Spiegelungsgerade, die dazu orthogonale Ursprungsgerade ist der Eigenraum zum Eigenwert -1.

 Nicht jede lineare Abbildung besitzt Eigenwerte oder -vektoren.

 Für  $A \in Mat_m(K)$  und  $\lambda \in K$  sind äquivalent:

- ➡  $\lambda$  ist Eigenwert von  $\mu_A$ .
- ➡  $Kern(\lambda id_K m - \mu_A) \neq \{0\}$
- ➡  $\lambda I_m - A$  ist nicht invertierbar.
- ➡  $\det(\lambda I_m - A) = 0$

Dabei gilt:

$$\text{Eig}(\mu_A, \lambda) = \text{Kern}(\lambda \text{id}_{K^m} - \mu_A) = \text{Ker}(\mu_{(\lambda I_m - A)}) = L(\lambda I_m - A, 0).$$

### ▼ 6.1.6 Charakteristisches Polynom



Für  $A \in Mat_m(K)$  heißt  $p_A := \det(tI_m - A) \in K[t]$  das charakteristische Polynom von  $A$ .

- Für  $A \in Mat_m(K)$  sind die Eigenwerte von  $\mu_A$  gerade die Nullstellen von  $p_A$  in  $K$ . Somit hat  $\mu_A$  höchstens  $m$  verschiedene Eigenwerte.