6. Vektorraum

Ein **Vektorraum** oder **linearer Raum** ist eine algebraische Struktur, die in fast allen Zweigen der Mathematik verwendet wird. Eingehend betrachtet werden Vektorräume in der Linearen Algebra. Die Elemente eines Vektorraums heißen **Vektoren**. Sie können addiert werden oder mit Skalaren multipliziert, das Ergebnis ist wieder ein Vektor desselben Vektorraums. Entstanden ist der Begriff aus der Abstraktion des euklidischen Raumes auf wesentliche Eigenschaften, die dann auf abstraktere Objekte wie Funktionen oder Matrizen übertragbar sind.

Die skalaren Zahlen, mit denen man einen Vektor multiplizieren kann, stammen aus einem Körper, deswegen ist ein Vektorraum immer ein Vektorraum „über" einem bestimmten Körper. Man spricht beispielsweise von einem Vektorraum über den reellen Zahlen. In den meisten Anwendungen legt man diese oder die komplexen Zahlen zugrunde.

Eine Basis eines Vektorraums ist eine Menge von Vektoren, die es erlaubt, jeden Vektor durch eindeutige Koordinaten zu beschreiben. Wird mit Vektoren gerechnet, so wird mit deren Koordinaten gerechnet. Die Anzahl der Basisvektoren wird Dimension des Vektorraums genannt. Sie ist unabhängig von der Wahl der Basis und kann auch unendlich sein.

6.1. Definition des Vektorraumes

Ein ***Vektorraum*** über einem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ -*Vektorraum*) besteht aus einer additiv geschriebenen ABELschen Gruppe $V = (V,+)$ von „Vektoren" , einem Körper $\mathbb{K} = (\mathbb{K},+,\star)$ von „Skalaren" und einer äußeren Multiplikation $\mathbb{K} \times V \to V$, die jedem geordneten Paar (k,v) mit $k \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ einen Vektor $kv \in V$ zuordnet. Dabei gelten folgende Gesetze:

1) $(u + v) + w = u + (v + w)\ \forall\ u, v, w \in V$. (Assoziativgesetz der Addition in V)
2) Es gibt einen Vektor $0 \in V$ mit $v + 0 = v\ \ \forall\ v \in V$. (Nullelement bezüglich Addition in V)
3) Zu jedem Vektor v gibt es einen Vektor $–v$ mit $v + (-v) = 0$. (Inverses Element bezüglich Addition in V)
4) $v + w = w + v\ \forall\ v, w \in V$. (Kommutativgesetz der Addition in V)
5) $1v = v\ \forall\ v \in V$. (Einselement von $\mathbb{K}$)
6) $r(sv) = (rs)v\ \ \forall\ r, s \in \mathbb{K}$ und $\forall\ v \in V$. (Assoziativgesetz der Multiplikation in $\mathbb{K} \times V$)
7) $(r + s)v = rv + sv\ \forall\ r, s \in \mathbb{K}$ und $\forall\ v \in V$. (Distributivgesetz in $\mathbb{K} \times V$, Addition von Skalaren)
8) $r (v + w) = rv + rw\ \ \forall\ r \in \mathbb{K}$ und $\forall\ v, w \in V$. (Distributivgesetz in $\mathbb{K} \times V$, Addition von Vektoren)

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so spricht man von einem *reellen Vektorraum*, ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so spricht man von einem *komplexen Vektorraum*.

6.2. Beispiele für Vektorräume

A) Einspaltige bzw. einzeilige reelle Matrizen vom Typ $(n, 1)$ bzw. $(1, n)$ bilden bezüglich der Matrizenaddition und äußerer Multiplikation mit einer reellen Zahl einen reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (Vektorraum der Spalten- bzw. Zeilenvektoren).
B) Alle reellen Matrizen vom Typ (m, n) bilden einen reellen Vektorraum.
C) Alle auf einem Intervall [a, b] stetigen reellen Funktionen bilden mit den durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(kf)(x) = k\cdot f(x)$ definierten Operationen einen reellen Vektorraum.
D) Die Polynome mit Koeffizienten aus einem Körper bilden, mit der üblichen Addition und der Multiplikation mit einem Element des Körpers, einen unendlich-dimensionalen Vektorraum. Für die Polynome, deren Grad durch ein $N \in \mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist, hat der resultierende Vektorraum die Dimension $N + 1$. Beispielsweise ist die Menge aller Polynome vom Grad $N \leq 4$ $\ a + b\cdot x + c\cdot x^2 + d\cdot x^3 + e\cdot x^4$ ein Vektorraum der Dimension 5. Eine Basis bilden die Monome $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

6.3. Untervektorraum

Ein ***Untervektorraum*** (auch *linearer Unterraum*) ist eine Teilmenge eines Vektorraums, die selbst wieder ein Vektorraum über demselben Körper ist. Dabei werden die Vektorraumoperationen auf den Untervektorraum vererbt.
Jeder Vektorraum enthält zwei triviale Untervektorräume, nämlich zum einen sich selbst, zum anderen den kleinsten Untervektorraum {0}, der nur aus dem Nullvektor besteht.

6.3.1. Kriterium für die Unterraumeigenschaft

Ist V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum, so bildet eine Teilmenge $U \subseteq V$ genau dann einen Untervektorraum, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

I. $U \neq \emptyset$
II. $\forall\, x, y \in U$ gilt $x + y \in U$ (U ist abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition)
III. $\forall\, x \in U$ und $a \in \mathbb{K}$ gilt $a * x \in U$ (U ist abgeschlossen bezüglich der Skalarmultiplikation)

6.3.2. Beispiel

Es sei $V = \mathbb{R}^2$ der Vektorraum der Paare reeller Zahlen. Ein Untervektorraum ist z. B. $M = \mathbb{R} \times \{0\}$, da die drei obigen Voraussetzungen erfüllt sind. Anschaulich ist V eine Ebene, und M ist die mit der x-Achse zusammenfallende Gerade. Jede andere durch den Ursprung verlaufende Gerade ist ebenfalls ein Unterraum.

6.4. Lineare Abhängigkeit

Es sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_m \in V$ heißen ***linear abhängig***, falls es $a_1, a_2, ..., a_m \in \mathbb{K}$ gibt, die *nicht alle* gleich Null sind, sodass $a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_m v_m = 0$ gilt, und anderenfalls ***linear unabhängig***. Lineare Abhängigkeit von Vektoren bedeutet also, dass sich ein Vektor durch die anderen Vektoren darstellen lässt.

Beispiel

a) Es seien $v_1 = (1, 5, 1)$, $v_2 = (0, 9, 1)$ und $v_3 = (3, -3, 1)$Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Man untersucht die Gleichung $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$ nach Lösungen. Es sind die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 durch Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & + & 0a_2 & + & 3a_3 & = & 0 \\ 5a_1 & + & 9a_2 & - & 3a_3 & = & 0 \\ a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 0 \end{array}$$

zu finden. Das System hat unendlich viele Lösungen für $a = (a_1, a_2, a_3)$, z.B. (3, -2, -1).
Da $(3, -2, -1) \neq (0, 0, 0)$ ist, sind die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear abhängig.
In diesem Fall gilt $3v_1 - 2v_2 - v_3 = 0$.

b) Dagegen sind die Vektoren $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (7, 3, 1)$, $v_3 = (2, 5, 8)$ linear unabhängig, weil die Gleichung $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$ nur für $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ gilt.

c) Die Polynome $p_1 = t + 1$, $p_2 = t^2 + 1$ und $p_3 = t - 1$ sind linear unabhängig im Vektorraum $\mathbb{P}$ der Polynome 2. Grades, da $a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3 = a_1 \cdot (t + 1) + a_2 \cdot (t^2 + 1) + a_3 \cdot (t - 1) = a_2 t^2 + (a_1 + a_3)t + (a_1 + a_2 - a_3) = 0$ nur für $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ gilt.

6.5. Erzeugendensystem und Basis eines Vektorraums

Für endlich viele $v_1, v_2, ..., v_m \in V$ und $a_1, a_2, ..., a_m \in \mathbb{K}$ bezeichnet man die Summe

$s = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_m v_m = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i$ als Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2, ..., v_m$. Dabei ist s selbst wieder ein Vektor aus dem Vektorraum V.

Ist S eine Teilmenge von V, so wird die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus S die *lineare Hülle* von S genannt. Sie ist ein Untervektorraum von V, und zwar der kleinste Untervektorraum, der S enthält.
Eine Teilmenge E eines Vektorraums V ist ein ***Erzeugendensystem*** von V, wenn die lineare Hülle von E der ganze Vektorraum V ist. Das bedeutet, dass durch Linearkombination der Vektoren aus E der gesamte Vektorraum V „erzeugt" werden kann.

Betrachtet man nun die Summe $b = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ für endlich viele $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ und $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$ mit $n \leq m$ als Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2, ..., v_n$. Dabei ist b selbst wieder ein Vektor aus dem Vektorraum V.
Eine Teilmenge B eines Vektorraums V ist eine ***Basis*** von V, wenn B **linear unabhängig** ist und die lineare Hülle von B der ganze Vektorraum ist. Die Basis ist ein minimales Erzeugendensystem.

Ein Vektorraum kann verschiedene Basen besitzen, jedoch hat jede Basis desselben Vektorraums gleich viele Elemente. Die Anzahl n der Elemente einer Basis ist die ***Dimension*** des Vektorraums. Die Linearfaktoren der Darstellung eines Vektors in den Basisvektoren heißen Koordinaten des Vektors bezüglich der Basis und sind Elemente des zugrunde liegenden Körpers. Erst durch Einführung einer Basis werden jedem Vektor seine Koordinaten bezüglich der gewählten Basis zugeordnet. Dadurch wird das Rechnen in Vektorräumen erleichtert, insbesondere wenn man statt Vektoren in „abstrakten" Vektorräumen ihre zugeordneten „anschaulichen" Koordinatenvektoren verwenden kann.

6.5.1. Beispiele

a) Es sei $E = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit $v_1 = (1, 5, 1)$, $v_2 = (0, 9, 1)$ und $v_3 = (3, -3, 1)$ eine Teilmenge von Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Man untersucht die drei Vektoren auf lineare Unabhängigkeit mit Hilfe der Gleichung $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$ und dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 9 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & -18 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das bedeutet, dass die drei Vektoren linear abhängig sind. Aus jeweils zwei Vektoren kann man den dritten Vektor durch Linearkombination darstellen, z.B. $v_3 = 3v_1 - 2v_2$. Die Dimension des von E aufgespannten Untervektorraumes U ist 2. Damit ist z.B. $B = \{v_1, v_2\}$ eine Basis von U.

b) Es sei $E = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit den Vektoren $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (7, 3, 1)$, $v_3 = (2, 5, 8)$. Die Untersuchung auf lineare Unabhängigkeit liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \end{array}\right)$$, d.h. Dimension 3. Damit ist E Erzeugendensystem <u>und</u> Basis des $\mathbb{R}^3$.

c) Die Polynome $p_1 = t + 1$, $p_2 = t^2 + 1$ und $p_3 = t - 1$ sind linear unabhängig im Vektorraum $\mathbb{P}$ der Polynome 2. Grades, wie bereits oben gezeigt wurde. Damit ist $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ Basis von $\mathbb{P}$. Eine weitere Basis wäre $\{1, t, t^2\}$.

6.5.2. Normierung von Basisvektoren

Um den Begriff der Norm eines Vektors zu definieren, werden zunächst zwei Operationen von Vektoren definiert.

1. Das **Skalarprodukt** ($*$) der Vektoren $v, w \in V = \mathbb{R}^n$ mit $v = (v_1, v_2, ... , v_n)$ und $w = (w_1, w_2, ... , w_n)$ ist definiert wie folgt:

$$v * w = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + ... + v_n \cdot w_n.$$

Es ist eine Abbildung $V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, d.h. das Ergebnis des Produktes zweier Vektoren ist ein Skalar. Oft wird auch das normale (·) verwendet.

2. Das **Vektorprodukt** ($\times$) oder **Kreuzprodukt** der Vektoren v, $w \in V = \mathbb{R}^3$ mit $v = (v_1, v_2, v_3)$ und $w = (w_1, w_2, w_3)$ ist definiert wie folgt:

$$v \times w = (v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2,\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3,\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1).$$

Es ist eine Abbildung $V \times V \rightarrow V$, d.h. das Ergebnis des Produktes zweier Vektoren ist wieder ein Vektor.

Mit dem Skalarprodukt wird die **Euklidische Norm** oder der **Betrag** eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ definiert als

$$\|v\| = \sqrt{v * v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}\ .$$

Oft wird auch das Symbol $|v|$ für den Betrag verwendet.

Mit Hilfe dieser Definition kann man das Skalarprodukt auch definieren:

$$v * w = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n\, w_n = |v| \cdot |w| \cdot \cos\sphericalangle(v,w).$$

Man erhält aus einer Basis $B = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ eine **normierte Basis** B', indem man jeden Basisvektor durch seinen Betrag dividiert, d.h. $B' = \left\{ \frac{v_1}{|v_1|}, \frac{v_2}{|v_2|}, \cdots, \frac{v_n}{|v_n|} \right\}$. Dabei hat jeder Basisvektor den Betrag 1.

6.5.3. Orthonormierung von Basisvektoren

Eine Basis B'' ist eine **orthonormierte Basis**, wenn das Skalarprodukt aus je zwei normierten Basisvektoren gleich 0 ist. Damit ist der Winkel zwischen diesen Vektoren gleich 90°.

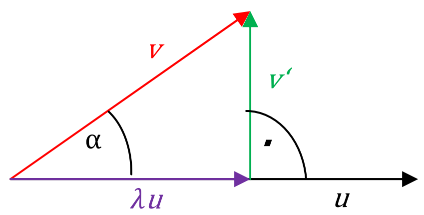
Die Standardbasis (kanonische Basis) des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$ – das ist die Basis mit der Darstellung {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0 , 1)} – ist orthonormal:

$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$	(jeder Vektor für sich ist normiert)
$e_1 * e_2 = e_1 * e_3 = e_2 * e_3 = 0$ (Skalarprodukt)	(alle Vektoren sind paarweise zueinander orthogonal)

Die Standardbasis des n-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^n$ ist die Basis mit der Darstellung $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ = {(1, 0, ..., 0),(0, 1, ... ,0), (0, 0 ,..., 1)} ist analog definiert und es gelten die gleichen Regeln.

Nachfolgend soll ein Verfahren dargestellt werden, durch das man aus einem gegebenen Basissatz $B = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ eine orthonormierte Basis erzeugen kann. Dieses Verfahren nennt man **Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren**.

Das Prinzip soll zunächst an zwei, nicht linear abhängigen Vektoren u und v demonstriert werden:



Der Vektor λu ist ein Vielfaches des Vektors u. Beide Vektoren haben damit die gleiche Richtung. Der Vektor v' ist die **senkrechte** Projektion des Vektors v auf die Gerade mit dem Richtungsvektor u und $\alpha = \sphericalangle(u,v)$.

Aus $v = \lambda u + v'$ folgt $v' = v - \lambda u$. Dabei ist $\lambda|u| = |v| \cdot \cos\alpha$. Das Skalarprodukt $u * v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\alpha$ enthält ebenfalls den Kosinus von α. Daraus folgt

$\lambda = \frac{|v|}{|u|} \cdot \cos\alpha = \frac{|v|}{|u|} \cdot \frac{u * v}{|u| \cdot |v|} = \frac{u * v}{|u|^2} \Rightarrow v' = v - \frac{u * v}{|u|^2} \cdot u$ oder $\boxed{v' = v - (v * \tilde{u}) \cdot \tilde{u}}$, wobei $\tilde{u} = \frac{u}{|u|}$ der normierte Vektor u ist. Der Vektor v' ist der gesuchte, auf u senkrecht stehende Basisvektor.

Beispiel aus dem $\mathbb{R}^2$: Seien $u = (2,1)$ und $v = (-1,3)$. Dann gilt $\tilde{u} = \frac{u}{|u|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ und

$$v' = v - (v * \tilde{u}) \cdot \tilde{u} = (-1{,}3) - \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = (-1{,}3) - \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{-7}{5}, \frac{14}{5}\right) \to \tilde{v}' = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Man kann leicht mit dem Skalarprodukt überprüfen, dass $\tilde{u} * \tilde{v}' = 0$ ist und damit zwei orthonormale Basisvektoren gefunden wurden.

Wenn man dieses Verfahren auf eine gegebene Basis $B = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ mit Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ mit $m \leq n$ überträgt, so wählt man sich zunächst zwei Vektoren, z.B. v_1 und v_2 ,aus und bestimmt mit der Gleichung

$$v_2' = v_2 - (v_2 * \tilde{v}_1) \cdot \tilde{v}_1 \text{ und } \tilde{v}_2' = \frac{v_2'}{|v_2'|}$$

die ersten beiden orthonormierten Basisvektoren.
Im nächsten Schritt nimmt man den dritten Basisvektor, z.B. v_3, und bestimmt mit der Gleichung

$$v_3' = v_3 - (v_3 * \tilde{v}_1) \cdot \tilde{v}_1 - (v_3 * \tilde{v}_2) \cdot \tilde{v}_2 \text{ und } \tilde{v}_3' = \frac{v_3'}{|v_3'|}$$

den dritten orthonormierten Basisvektor. Das Verfahren wird bis zum letzten Basisvektor v_m fortgesetzt. Dabei gilt

$$\boxed{v_m' = v_m - (v_m * \tilde{v}_1) \cdot \tilde{v}_1 - (v_m * \tilde{v}_2) \cdot \tilde{v}_2 - \cdots - (v_m * \tilde{v}_{m-1}) \cdot \tilde{v}_{m-1}} \text{ und } \boxed{\tilde{v}_m' = \frac{v_m'}{|v_m'|}}.$$

6.6. Lineare Abbildungen

Die mit der Struktur von Vektorräumen verträglichen Abbildungen werden ***lineare Abbildungen*** genannt.

f: $V_1 \to V_2$ heißt linear, wenn $\forall u, v \in V_1 \wedge \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $f(u+v) = f(u) + f(v) \wedge f(\lambda u) = \lambda \cdot f(u)$.

Man kann auch beide Bedingungen zusammenfassen zu:

$$\forall u,v \in V_1 \wedge \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}: f(\lambda u + \mu v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)$$

Die linearen Abbildungen von f von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ werden mit Hilfe von Matrizen $\boldsymbol{A}$ vom Typ (m,n) durch $f(v) = \boldsymbol{A} \cdot v$ beschrieben.

Kern, Bild: Es seien V_1, V_2 $\mathbb{K}$-Vektorräume. Ist f: $V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung, so sind die Unterräume **Kern** (Bezeichnung: ker f) und **Bild** (Bezeichnung: im f) wie folgt definiert:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}, \; \mathrm{im}\, f = \{ f(v) \mid v \in V\}.$$

So ist zum Beispiel die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems $\boldsymbol{A} \cdot x = 0$ der Kern der durch die Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ vermittelten linearen Abbildung.

Dimension: Die Dimension dim ker f bzw. dim im f werden ***Defekt f*** bzw. ***Rang f*** genannt. Zwischen diesen Dimensionen besteht der Zusammenhang

$$\text{Defekt } f + \text{Rang } f = \dim V,$$

der *Dimensionsformel* genannt wird. Ist z.B. Defekt $f = 0$, d.h. ker $f = \{0\}$, dann ist die lineare Abbildung f injektiv und umgekehrt. Injektive lineare Abbildungen werden *regulär* genannt.