Tut 25.11.

Thema: Vektorräume & lin. Abb. (→ Video 6 - 9)

Vektorraum

↳ Motivation: wir lösen gerne Gleichungssysteme. Man erkennt recht schnell, dass wenn 2 Tupel $\vec{a} = (a_1, \dots a_n)$ & $\vec{b} = (b_1, \dots b_n)$ ein homogenes Gleichungssystem lösen, deren Summe wieder eine Lösung gibt.

$$A(\vec{a}+\vec{b}) \underset{\text{Distributiv}}{=} A\vec{a} + A\vec{b} = 0 + 0 = 0$$

Das selbe gilt für Vielfache einer Lösung

$$A(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot A\vec{a} = \lambda \cdot 0 = 0$$

⇒ dieses Verhalten würden wir gerne beschreiben

⇝ Def. K - Vektorraum:

Ein K-Vektorraum ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ mit einer 2. Verknüpfung (= Skalarmultiplikation)

$$\leadsto \lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} \quad ; \lambda \in K$$

↳ meistens meinen wir mit K-Vektorraum den $K^n = \underbrace{K \times K \times \dots \times K}_{n \text{ mal}}$; es gibt aber noch viele andere.

⇝ „Vektorraum ca das was ein Körper ist, nur mit Vektoren als Elemente statt Zahlen"

Eine der wichtigsten Eigenschaften des VR ist seine Abgeschlossenheit (unter Vektoradd. & Skalarmult.)

$$\rightsquigarrow \forall \vec{a}, \vec{b} \in V \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in V$$
$$\forall \vec{a} \in V; \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot \vec{a} \in V$$

Unterverktorraum := Teil des VR, der auch abgeschlossen ist.

Bsp.: VR $\hat{=} \mathbb{R}^3$; UVR $\hat{=}$ x, z - Ebene = $\mathcal{M}$

$$\mathbb{R}^3: \forall \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \checkmark$$

folgt direkt aus den Körpereigenschaften von $\mathbb{R}$

$$\forall \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \wedge \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \checkmark$$

$$\mathcal{M}: \forall \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ 0 + 0 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \checkmark$$

$$\forall \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \wedge \lambda \in K \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot 0 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \checkmark$$

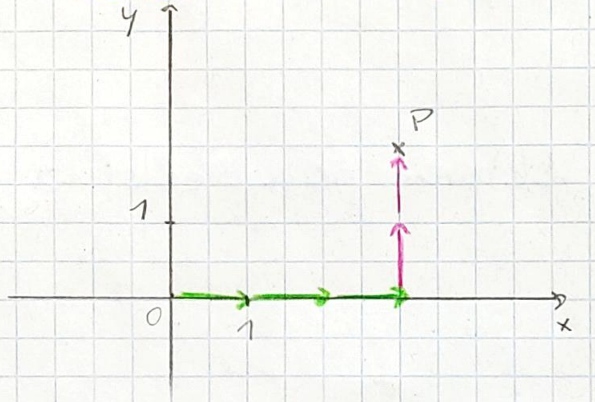
↳ $\mathbb{R}^3$ & $\mathcal{M}$ sind beide abgeschlossen.

Warum sind VR noch cool?

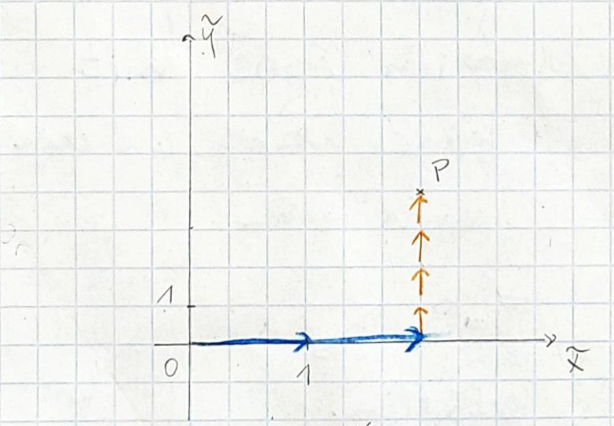
$\Rightarrow$ man hat freie Basiswahl

(„Ich kann mir aussuchen, wie ich meinen Raum beschreibe")

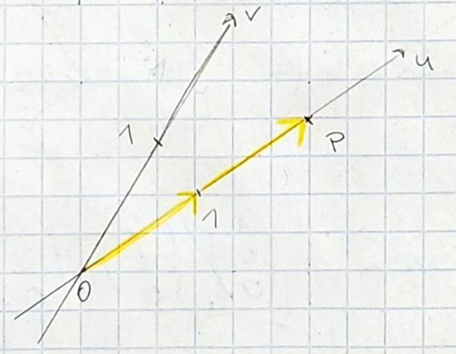
Betrachte Punkt $P \in \mathbb{R}^2$



$\rightsquigarrow P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow + 2 \uparrow$



$\rightsquigarrow P = 2 \longrightarrow + 4 \uparrow = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$



$\rightsquigarrow P = 2 \nearrow + 0 \nearrow = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Wie der Vektor, der zum Punkt P zeigt, aussieht, hängt von meiner Basis ab!

Die Anzahl an Basiselementen ist immer eindeutig für einen VR & wird als Dimension bezeichnet.

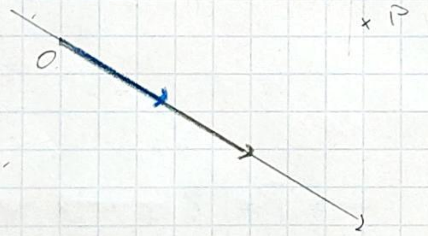
Durch Linearkombination meines Basiselemente muss

beliebige Vielfache der Basiselemente werden addiert

ich zu jedem Punkt im Raum gelangen können.

Frage: Geht das für jede Kombination von 2 Vektoren im $\mathbb{R}^2$?

$\Rightarrow$ Nein! Wenn beide Vektoren parallel sind geht es nicht.



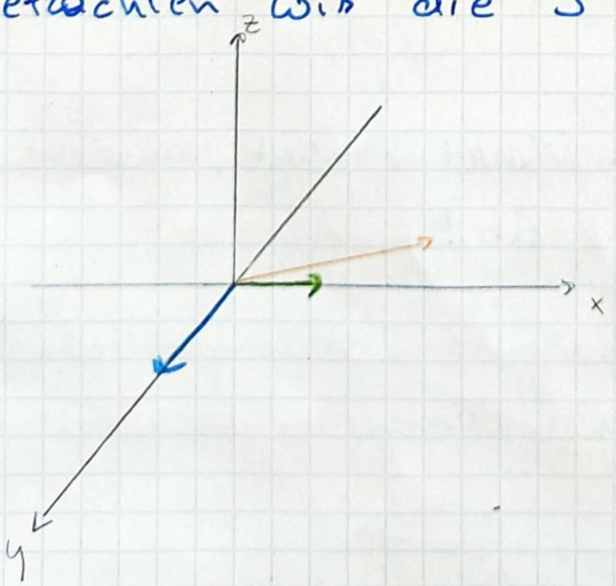
$\rightsquigarrow$ ich werde mit keiner Wahl an Zahlen $m, n \in \mathbb{R}$

$P = m \searrow + n \searrow$

erfüllen.

Dies drückt man mit dem Begriff „Lineare Unabhängigkeit" aus.

Betrachten wir die 3 Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$



⇝ sie liegen alle 3 in der (x, y) - Ebene ⇒ sollte sich eig. wie $\mathbb{R}^2$ verhalten.

⇒ durch Linearkombination kann ich zB den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht erreichen, obwohl die 3 Vektoren nicht parallel sind.

↳ aber man kann einen der 3 durch die beiden anderen ausdrücken!

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. $$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Eine Menge Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn sich keiner der Vektoren durch den Rest ausdrücken lässt.

Jede Menge von n linear unabhängigen Vektoren ist eine Basis eines n-dimensionalen Raums

mathm. sauber:

$\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n\}$ lin. unabhängig

$$\Leftrightarrow \forall \lambda \in K: \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = 0 \Rightarrow \forall \lambda_i = 0$$

sei $\{\vec{v}_i\}$ eine Basis. Dann gibt es eindeutige Körperelemente λ_i für jeden Vektor $\vec{v}$ aus dem Raum, sodass

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \quad \text{gilt.}$$

↳ $\vec{v}$ beschreibt man dann meist als $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Lineare Abbildungen:

→ lineare Abbildungen sind Funktionen, deren Ziel- & Definitionsmenge je ein Vektorraum sind ($\Rightarrow \varphi: V \to W$) & die folgende Eigenschaften erfüllen:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V: \varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$$
$$\forall \vec{x} \in V \wedge \forall \lambda \in K: \varphi(\lambda \vec{x}) = \lambda \varphi(\vec{x})$$

⇒ die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto kx+d$ ist nicht linear wenn $d \neq 0$!

⇝ für uns sind lineare Abbildungen extrem wichtig & interessant, weil jede lineare Abbildung durch eine Matrix dargestellt werden kann (& umgekehrt)

Bsp.: betrachte $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Diese Abb. kann man mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ assoziieren, weil

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$ gilt.

Deswegen lassen sich viele Aussagen über Matrizen verknüpfen. Insbesondere lassen sich dadurch Zusammenhänge zwischen den Lösungsmengen des homogenen Gleichungssystem & der Abbildung, die beide durch die Matrix A definiert sind, entdecken.

Einige der wichtigsten Bsp.:

nennt man auch Kern von φ

$\rightarrow L(A,0) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{im}_{\varphi}^{-1}\{0\} = \{0\}$

$\rightsquigarrow$ wenn wir bei $\mathrm{im}_{\varphi}^{-1}\{0\} = \{0\}$ beginnen, bedeutet das ja gerade, dass nur der 0-Vektor der Def.menge auf den 0-Vektor der Zielmenge abbildet

$\Rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ ist nur für $\vec{x} = \vec{0}$ erfüllt.

Damit löst nur das 0-Tupel das Gleichungssystem A.

$\hookrightarrow$ wenn A quadratisch ist ($\Leftrightarrow \dim(V) = \dim(W)$), ist dies zusätzlich äquivalent dazu, dass A invertierbar ist.

$\rightarrow L(A,0) \Leftrightarrow \mathrm{Kern}(\varphi)$

$\rightarrow \mathrm{Rang}(A) = \dim(\mathrm{im}(\varphi)) \Leftrightarrow$ # der Pivots von A