1. Lineare Gleichungssysteme, Körper und Matrizen.

1.1. Entscheiden Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q}):$$

4

+ $\boxed{W}$ A ist invertierbar über $\mathbb{Q}$.

+ $\boxed{f}$ Es gibt $b \in \mathbb{Q}^3$ mit $L(A, b) = \emptyset$.

+ $\boxed{f}$ A lässt sich mit elementaren Zeilenumformungen auf eine Zeilenstufenform mit genau 2 Pivots bringen.

+ $\boxed{W}$ Das homogene lineare Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A besitzt nur die triviale Lösung.

1.2. Entscheiden Sie:

2

+ $\boxed{W}$ Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lässt sich jede Matrix mit Einträgen aus einem Körper in Zeilenstufenform bringen.

+ $\boxed{f}$ Besitzt eine Matrix A in Zeilenstufenform mehr Spalten als Pivots, so besitzt jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit A als Koeffizientenmatrix eine Lösung.

+ $\boxed{f}$ Die Summe zweier Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems ist stets wieder eine Lösung.

− $\boxed{W}$ Eine quadratische Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist die Einheitsmatrix.

1.3. Sei K ein Körper. Entscheiden Sie, ob für alle $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$ gilt:

2

+ $\boxed{W}$ Ist $c \in L(A, b)$ und $d \in L(A, 0)$, so ist $c + d \in L(A, b)$.

− $\boxed{f}$ Sind $c, d \in L(A, b)$, so ist $c - d \in L(A, 0)$.

+ $\boxed{W}$ Ist $c \in L(A, 0)$ und $\lambda \in K$, so ist $\lambda c \in L(A, 0)$.

+ $\boxed{f}$ Aus $L(A, 0) \neq \{0\}$ folgt $L(A, b) \neq \emptyset$.

4

1.4. Sei K ein Körper. Entscheiden Sie:

+ $\boxed{f}$ Für jedes $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$.

+ $\boxed{w}$ $A, B \in \mathrm{GL}_m(K) \Rightarrow AB \in \mathrm{GL}_m(K)$.

+ $\boxed{w}$ $A \in \mathrm{GL}_m(K) \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = m$.

+ $\boxed{f}$ $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ bildet mit der bekannten Addition und Multiplikation von Matrizen einen kommutativen Ring.

4

1.5. Entscheiden Sie:

+ $\boxed{w}$ Es gibt einen Körper mit genau 23 Elementen.

+ $\boxed{f}$ $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

+ $\boxed{f}$ In einem Körper können Elemente mehr als ein multiplikativ Inverses besitzen.

+ $\boxed{f}$ $\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

2

1.6. Entscheiden Sie:

+ $\boxed{w}$ $\mathbb{C}$ ist ein kommutativer Ring (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

— $\boxed{w}$ Für $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kann $ab = 0$ gelten.

+ $\boxed{w}$ Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z|^2 = z\overline{z}$.

+ $\boxed{w}$ Der Betrag einer komplexen Zahl ist stets eine reelle Zahl.

2. Vektorräume und lineare Abbildungen.

2.1. Sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Entscheiden Sie:

4

+ W V besitzt eine Basis.

+ f Jedes Erzeugendensystem von V ist eine Basis.

+ W Je zwei Basen von V bestehen aus gleich vielen Vektoren.

+ W Jedes System linear unabhängiger Vektoren von V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

2.2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $V = \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ jeweils $\mathbb{R}$-Untervektorräume sind (bezüglich der bekannten Addition und skalaren Multiplikation):

0

+ W $\{f \in V \mid f(0) = 0\}$.

+ f $\{f \in V \mid f(0) = 1\}$.

− f $\{f \in V \mid f(1) = 0\}$.

− W $\{f \in V \mid f(a) \geq 0 \text{ für alle } a \in [0,1]\}$.

2.3. Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_m \in V$. Entscheiden Sie:

2

+ W Es ist $\operatorname{Span}_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ ein Untervektorraum von V.

− W Es ist $\operatorname{Span}_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ ein Untervektorraum von K^m.

+ f Es ist $\operatorname{Span}_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ die Vereinigung aller Untervektorräume von V, welche $v_1, \ldots, v_m$ enthalten.

+ f Es ist $\operatorname{Span}_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ die Menge aller linear unabhängiger Teilmengen von $\{v_1, \ldots, v_m\}$.

2.4. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

4 + $\boxed{w}$ Wenn φ injektiv ist, ist φ auch surjektiv.

+ $\boxed{f}$ Es ist φ stets surjektiv.

+ $\boxed{f}$ Es kann $\dim V < \dim \mathrm{Bild}(\varphi)$ gelten.

+ $\boxed{w}$ Aus $\dim \mathrm{Bild}(\varphi) < \dim V$ folgt, dass φ nicht injektiv ist.

2 **2.5.** Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}$-linear sind:

+ $\boxed{f}$ $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1; (a,b)^t \mapsto a - b^2$.

+ $\boxed{w}$ $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x,y)^t \mapsto (2x - y, 3y)$.

− $\boxed{f}$ $\varphi\colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]; p \mapsto p + p'$.

+ $\boxed{f}$ $\varphi\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1; a \mapsto a + 1$.

3. Determinanten.

3.1. Sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Entscheiden Sie:

2 − $\boxed{W}$ Die Determinante $\det\colon \mathrm{Mat}_m(K) \to K$ ist eine K-lineare Abbildung.

\+ $\boxed{W}$ Es gilt $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_m(K)$.

\+ $\boxed{f}$ Die Determinante einer Matrix ändert sich unter elementaren Zeilenumformungen nicht.

\+ $\boxed{W}$ Aus $\det(A) \neq 0$ folgt $L(A, b) \neq \emptyset$ für alle $b \in K^m$.

3.2. Entscheiden Sie:

4 + $\boxed{f}$ Es gilt $A \cdot A^{\mathrm{adj}} = I_2$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

\+ $\boxed{W}$ $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ist genau dann invertierbar wenn $\det(A) = 1$ gilt.

\+ $\boxed{f}$ Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist Null.

\+ $\boxed{f}$ Für $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}^3$ gilt $\det(a_1, a_2, a_3) = -\det(a_2, a_3, a_1)$.

3.3. Entscheiden Sie:

4 + $\boxed{f}$ Die Regel von Sarrus gilt für Matrizen der Größe 4.

\+ $\boxed{f}$ Für $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$ gilt $A^{\mathrm{adj}} \in \mathrm{Mat}_{m-1}(K)$.

\+ $\boxed{W}$ Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

\+ $\boxed{W}$ Der Rang einer Matrix ist die größte Größe einer quadratischen Untermatrix mit Determinante $\neq 0$.

4. Allgemeine Beweisaufgaben.

4.1. Sei V ein Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und $v_1, v_2 \in V$. Entscheiden Sie:

3 ☐ Aus $\varphi(v_1) = 7v_1$ und $\varphi(v_2) = 7v_2$ folgt $\varphi(v) = 7v$ für alle $v \in \operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$.

\+ f Sind v_1, v_2 linear unabhängig, so auch $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$.

\+ W Sind $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$ linear unabhängig, so auch v_1, v_2.

\+ W Aus $v_2 - v_1 \in \operatorname{Kern}(\varphi)$ folgt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$.

4.2. Sei K ein Körper, $A \in \operatorname{Mat}_m(K)$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$. Entscheiden Sie:

2 + W $\operatorname{rang}(A) < m$.

\+ f A hat Diagonalgestalt.

– f Aus $A^2 v = Av$ folgt $Av = 0$.

\+ f Es gibt keine Matrizen mit $A^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.