[redacted]

Name [redacted]

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra (ohne Vertiefung)

Fr. 22. Jänner 2021

Sie können in jedes Kästchen entweder **w** (wahr), f (falsch) oder **nichts** schreiben.

Jede korrekt beantwortete Frage gibt einen Punkt, für jede unkorrekt beantwortete Frage wird ein Punkt abgezogen. Eine nicht beantwortete Frage zählt null Punkte.

Negative Gesamtpunkte in einer einzelnen Aufgabe werden auf Null aufgerundet.

Insgesamt können **64** Punkte erzielt werden.

Punkte	64–57	56–49	48–41	40–33	32–0
Note	1	2	3	4	5

1. Lineare Gleichungssysteme, Körper und Matrizen.

1.1. Entscheiden Sie:

1 + [W] Jede Multiplikation einer Matrix A mit einer invertierbaren Matrix von links entspricht einer endlichen Abfolge von elementaren Zeilenumformungen an A.

+ [W] Alle Elementarmatrizen sind invertierbar.

– [W] Die einzige quadratische Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist die Einheitsmatrix.

[ ] Besitzt eine Matrix A in Zeilenstufenform mehr Spalten als Pivots, so besitzt das homogene lineare Gleichungssystem mit A als Koeffizientenmatrix eine nichttriviale Lösung.

1.2. Entscheiden Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q})$$

3 + [F] A lässt sich mit elementaren Zeilenumformungen auf eine Zeilenstufenform mit genau 3 Pivots bringen.

[ ] Es gibt $b \in \mathbb{Q}^4$ mit $L(A, b) = \emptyset$.

+ [F] Das homogene lineare Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A besitzt mehr als nur die triviale Lösung.

+ [W] A ist invertierbar über $\mathbb{Q}$.

1.3. Sei K ein Körper. Entscheiden Sie, ob für alle $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$ gilt:

2 [ ] Sind $c, d \in L(A, b)$, so ist $c + d \in L(A, 0)$.

+ [W] Ist $c \in L(A, b)$ und $d \in L(A, 0)$, so ist $c - d \in L(A, b)$.

+ [W] Ist $c \in L(A, 0)$ und $\lambda \in K$, so ist $\lambda c \in L(A, 0)$. UVR

[ ] Aus $L(A, 0) = \{0\}$ folgt $L(A, b) \neq \emptyset$.

1.4. Entscheiden Sie:

3 + W $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})$ bildet mit der bekannten Addition von Matrizen eine abelsche Gruppe.

\+ W $A, B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) \Rightarrow AB \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$.

\+ W $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = m$.

☐ $A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})$ und $\mathrm{rang}(A) = m \;\Rightarrow\; A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$.

1.5. Entscheiden Sie:

4 + F $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

\+ W Es gibt einen Körper mit genau 29 Elementen.

\+ W In einem Körper besitzt jedes Element außer der Null ein multiplikativ Inverses.

\+ W $\mathbb{Z}$ ist ein Ring (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

1.6. Entscheiden Sie:

4 + W $\mathbb{Q}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

\+ W Für $a, b \in \mathbb{Q}$ folgt aus $ab = 0$ immer $a = 0$ oder $b = 0$.

\+ w W Für jedes $a \in \mathbb{Q}^\times$ gilt $a^{-1} \neq 0$.

\+ F Es gilt $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

2. Vektorräume und lineare Abbildungen.

2.1. Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Entscheiden Sie:

4 + [W] V ist endlich erzeugt.

+ [F] Jedes Erzeugendensystem von V ist eine Basis von V.

+ [W] Jedes System linear unabhängiger Vektoren von V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

+ [W] Je zwei Basen von V bestehen aus gleich vielen Vektoren.

2.2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $V = \mathbb{R}[t]$ jeweils $\mathbb{R}$-Untervektorräume sind (bezüglich der bekannten Addition und skalaren Multiplikation):

4 + [W] $\{p \in V \mid p(7) = 0\}$.

+ [W] $\{p \in V \mid p' = 0\}$. Diff is lin...

+ [F] $\{p \in V \mid p(0) \neq 1\}$.

+ [F] $\{p \in V \mid p(a) > 0 \text{ für alle } a \in [0, 1]\}$.

2.3. Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \dots, v_m \in V$. Entscheiden Sie:

3 + [W] Es ist $\mathrm{Span}_K(\{v_1, \dots, v_m\})$ ein Untervektorraum von V.

+ [F] Es ist $\mathrm{Span}_K(\{v_1, \dots, v_m\})$ ein Untervektorraum von K^m.

[ ] Es ist $\mathrm{Span}_K(\{v_1, \dots, v_m\})$ die Vereinigung aller Untervektorräume von V, welche $v_1, \dots, v_m$ enthalten.

+ [W] Es ist $\mathrm{Span}_K(\{v_1, \dots, v_m\})$ der kleinste Untervektorraum von V, der $v_1, \dots, v_m$ enthält.

2.4. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi: V \to V$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

2 + [W] Wenn φ injektiv ist, ist φ ein Isomorphismus. ⇝ BIJEKTIV

+ [W] Es ist Kern(φ) ein Untervektorraum von V.

[ ] φ ist ein Isomorphismus. ENDO

[ ] Aus $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) < \dim V$ folgt, dass φ nicht surjektiv ist.

2.5. Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{Q}$-linear sind:

2 [ ] $\varphi: \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t]; p \mapsto p + t$.

+ [W] $\varphi: \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2; (x, y)^t \mapsto (x + y, y)^t$.

[ ] $\varphi: \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}^1; p \mapsto p(-1)$.

+ [F] $\varphi: \mathbb{Q}^1 \to \mathbb{Q}^2; a \mapsto (a, a \cdot a)^t$.

3. Determinante und Eigenwerte.

3.1. Sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Entscheiden Sie:

4 + [F] Es gilt $\det(A^{-1}) = -\det(A)$ für alle $A \in \mathrm{GL}_m(K)$. $\det^{-1}$

+ [W] Für $A, B \in \mathrm{Mat}_m(K)$ gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

+ [W] Für $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$ mit $\det(A) \neq 0$ gilt $A \in \mathrm{GL}_m(K)$.

+ [F] Die Determinante $\det\colon \mathrm{Mat}_m(K) \to K$ ist eine K-lineare Abbildung.

3.2. Entscheiden Sie:

3 + [F] $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ ist genau dann invertierbar wenn $\det(A) = 1$ gilt. 1,2,~~3~~

/ [ ] Die Determinante einer Diagonalmatrix ist stets ungleich Null.

+ [F] Für $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}^3$ gilt $\det(a_1, a_2, a_3) = \det(a_3, a_2, a_1)$.

+ [F] $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2.$

3.3. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

[ ] Die Menge $\{v \in V \mid \varphi(v) = v\}$ ist ein Untervektorraum von V. eins?

2 + ([F] φ besitzt in K mindestens einen Eigenwert. Drehungen

[ ] Für $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_A genau die Eigenwerte von μ_A.

+ [F] Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ besitzt $\mu_A\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ den Eigenwert 1. komplex

4. Allgemeine Beweisaufgaben.

4.1. Sei W ein Vektorraum, $\varphi\colon W \to W$ eine lineare Abbildung und $w_1, w_2 \in W$. Entscheiden Sie:

2 + [W] Sind w_1, w_2 linear unabhängig, so auch $w_1, w_1 + w_2$.

\+ [W] Sind $\varphi(w_1), \varphi(w_2)$ linear unabhängig, so auch w_1, w_2.

[ ] Aus $\varphi(w_1) \neq \varphi(w_2)$ folgt dass w_1, w_2 linear unabhängig sind.

[ ] Aus w_1, w_2 linear unabhängig folgt $\varphi(w_1) \neq \varphi(w_2)$.

4.2. Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$ mit $A^2 = A$. Entscheiden Sie:

2 + [E] $A \in \mathrm{GL}_m(K)$.

vll [ ] $\det(A) \in \{0, 1\}$.

[ ] Es gilt $m \leq 2$.

\+ [E] Es gibt keine Matrizen mit $A^2 = A$. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ id