Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 11

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
(z.B. bis So. 10. Jänner 2021, 23:59 Uhr)

Aufgabe 41
Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen über dem Körper $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Was ist der Rang, wenn wir A, B als Matrizen über dem Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ auffassen? Finden Sie für A jeweils eine invertierbare Untermatrix von maximaler Größe.

Lösung: Über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $\operatorname{rang}(A) = 4$ über $\mathbb{R}$ und A ist selbst ihre größte invertierbare Untermatrix.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da wir 3 Pivotelemente erhalten gilt $\operatorname{rang}(B) = 3$ über $\mathbb{R}$. Wenn man den Gauss-Algorithmus genauso nur auf die obere linke 3×3-Untermatrix von B angewandt hätte, wäre genau die obere linke 3×3-Untermatrix der Zeilenstufenform entstanden. Daraus sehen wir, dass die obere linke 3×3-Untermatrix von B eine maximale invertierbare Untermatrix ist.
Über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ können wir die obere Zeilenstufenform weiter vereinfachen zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da wir 3 Pivotelemente erhalten, gilt $\operatorname{rang}(A) = 3$ über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Wir können in A also die dritte Spalte streichen und erhalten linear unabhängige Spalten. Da wir die vierte Zeile im Algorithmus niemals vertauscht haben, können wir sie ebenfalls streichen und erhalten so eine invertierbare 3×3-Untermatrix von A über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet als Probe direkt $\det(A') = 2$, also $A' \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Für B vereinfacht sich die Zeilenstufenform über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ direkt zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da wir 2 Pivotelemente erhalten, gilt $\operatorname{rang}(B) = 2$ über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Die obere linke 2×2-Untermatrix von B ist offensichtlich invertierbar über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. $\square$

Häufige Probleme bei Aufgabe 41:

- Eine Untermatrix der Zeilenstufenform ist nicht dasselbe wie eine Untermatrix von A.
- Es muss begründet werden, warum die angegebene Untermatrix wirklich invertierbar ist.

Aufgabe 42

Bestimmen Sie von allen unten angegebenen Permutationen $\sigma_i \in S_7$ Darstellungen in Matrixschreibweise, als Produkt von elementfremden Zykeln und als Produkt von Transpositionen. Bestimmen Sie jeweils die Signatur:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_3 = (1432)(567), \quad \sigma_4 = (1432)(5476)(12),$$
$$\sigma_5 = (12)(13)(45)(27)(24), \quad \sigma_6 = \sigma_4\sigma_1\sigma_3.$$

Lösung: Wir erhalten

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = (142)(3576), \quad \sigma_1 = (14)(42)(35)(57)(76),$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = (137245)(6), \quad \sigma_2 = (13)(37)(72)(24)(45),$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = (1432)(567), \quad \sigma_3 = (14)(43)(32)(56)(67),$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = (247653)(1), \quad \sigma_4 = (24)(47)(76)(65)(53),$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 7 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = (132547)(6), \quad \sigma_5 = (13)(32)(25)(54)(47),$$

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = (143)(2765), \quad \sigma_6 = (14)(43)(27)(76)(65).$$

Damit gilt $\operatorname{sign}(\sigma_i) = (-1)^5 = -1$ für alle $i = 1, \ldots, 6$. $\square$

Häufige Probleme bei Aufgabe 42:

- Eine Transposition muss wirklich genau Länge zwei haben. Es ist etwa (66) keine Transposition! Das kann sonst zu Fehlern bei der Berechnung der Signatur führen.
- σ_4 ist als Produkt von Zykeln angegeben, aber noch nicht als Produkt von *elementfremden* Zykeln.

Aufgabe 43
Bestimmen Sie alle Werte $\lambda \in \mathbb{R}$, für welche die folgende Matrix über $\mathbb{R}$ invertierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -\lambda \\ 2 & 1 & 3 \\ \lambda+2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir wissen: A ist genau dann nicht invertierbar, wenn $\det(A) = 0$. Mit einer Vorgehensweise nach Wahl berechnet man

$$\det(A) = 4\lambda^2 + 2\lambda - 1.$$

Genau für

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

wird diese Determinante Null, also ist A genau für

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \right\}$$

invertierbar. □

Aufgabe 44

(a) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Hängt das Ergebnis vom Körper ab, über dem die Matrix betrachtet wird?

(b) Sei $A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{Z})$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:
  (i) $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$.
  (ii) $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ für alle bis auf endlich viele Primzahlen p.

(c) Sei $A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{Q})$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:
  (i) $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$.
  (ii) $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$.

Lösung:

(a) Wir formen um

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \overset{1Z-2Z,4Z-3Z}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} =: B$$

Da wir nur Umformungen vorgenommen haben welche die Determinante nicht verändern gilt, $\det(A) = \det(B)$, und da die erste Zeile von B gleich der vierten Zeile ist, gilt $\det(B) = 0$, und damit $\det(A) = 0$.

Die vorgenommenen Umformungen funktionieren in jedem Körper, also ist das Ergebnis vom Körper unabhängig.

(b) Wir stellen zuerst fest, dass für $a, b \in \mathbb{Z}$ und eine Primzahl p gilt:

$$(a+b) \bmod p = [(a \bmod p) + (b \bmod p)] \bmod p.$$

$$(a \cdot b) \bmod p = [(a \bmod p) \cdot (b \bmod p)] \bmod p.$$

In Worten: Wir können ganze Zahlen erst addieren und multiplizieren und dann modulo p reduzieren, oder erst modulo p reduzieren und dann addieren und multiplizieren. Daraus können wir schließen, dass für $A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{Z})$ der folgende Zusammenhang zwischen der Determinante $\det_{\mathbb{Q}}(A)$ über $\mathbb{Q}$ und $\det_p(A)$ über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ besteht:

$$(\star) \quad \det_p(A) = \det_{\mathbb{Q}}(A) \bmod p.$$

In Worten: Wir können die Determinante auch über $\mathbb{Q}$ berechnen und dann modulo p reduzieren.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Aus $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ folgt $\det_{\mathbb{Q}}(A) \neq 0$. Außerdem gilt, weil $A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{Z})$, dass $\det_{\mathbb{Q}}(A) \in \mathbb{Z}$. Da nur endlich viele Primzahlen p existieren die $\det_{\mathbb{Q}}(A)$ teilen, gilt $\det_p(A) = \det_{\mathbb{Q}}(A) \bmod p = 0$ nur für endlich viele p. Das heißt, $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ für alle bis auf endlich viele Primzahlen p.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Wäre $\det(A) = 0$ in $\mathbb{Z}$, so erst recht in jedem Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(c) Da $A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{Q})$, gilt $\det_{\mathbb{Q}}(A) = \det_{\mathbb{C}}(A)$, also ist $\det_{\mathbb{Q}}(A) \neq 0$ genau dann wenn $\det_{\mathbb{C}}(A) \neq 0$ und damit gilt

$$A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}).$$

$\square$

Häufige Probleme bei Aufgabe 44:

- Die Determinante einer Zeilenstufenform ist nicht notwendigerweise identische mit der Determinante der ursprünglichen Matrix.
- Eine elementare Zeilentransformation über $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{Z}$ muss nicht notwendigerweise auch über jedem $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ erlaubt sein. Multiplikation einer Zeile mit 3 geht beispielsweise über $\mathbb{Q}$, aber nicht über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$!