Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 12

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
(z.B. bis So. 17. Jänner 2021, 23:59 Uhr)

Aufgabe 45
Die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$ habe **obere Block-Dreiecksform**, d.h. sie sei von der Form

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

mit $B \in \mathrm{Mat}_{m_1}(K), C \in \mathrm{Mat}_{m_1,m_2}(K), D \in \mathrm{Mat}_{m_2}(K)$ und $m_1 + m_2 = m$. Zeigen Sie, dass dann

$$\det(A) = \det(B) \cdot \det(D)$$

gilt.

Lösung: Wir stellen zuerst fest, dass für jede Elementarmatrix $E \in \mathrm{Mat}_m(K)$ die Matrizen $\tilde{E}, \bar{E}$, definiert durch

$$\tilde{E} := \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \bar{E} := \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

Elementarmatrizen in $\mathrm{Mat}_{m+n}(K)$ sind, mit $\det(\tilde{E}) = \det(E) = \det(\bar{E})$. Außerdem gilt für $A_1, B_1 \in \mathrm{Mat}_m(K)$ und $A_2, B_2 \in \mathrm{Mat}_n(K)$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & 0 \\ 0 & A_2 B_2 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen nun Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k \in \mathrm{Mat}_{m_1}(K)$ um B in obere Dreiecksform $\hat{B}$ zu bringen, und Elementarmatrizen $F_1, \ldots, F_\ell \in \mathrm{Mat}_{m_2}(K)$ um D in obere Dreiecksform $\hat{D}$ zu bringen, also

$$\underbrace{E_1 \cdot \ldots \cdot E_k}_{=:G} \cdot B = \hat{B} \quad \text{und} \quad \underbrace{F_1 \cdot \ldots \cdot F_\ell}_{=:H} \cdot D = \hat{D}.$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{E}_k \cdot \bar{F}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{F}_\ell \cdot A &= \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} GB & GC \\ 0 & HD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{B} & GC \\ 0 & \hat{D} \end{pmatrix} =: \hat{A} \end{aligned}$$

Da $\hat{A}, \hat{B}, \hat{D}$ obere Dreiecksmatrizen sind, gilt

$$\det(\hat{A}) = \det(\hat{B}) \det(\hat{C}) = \det(E_1) \cdot \ldots \cdot \det(E_k) \cdot \det(B) \cdot \det(F_1) \cdot \ldots \cdot \det(F_\ell) \cdot \det(D)$$

Andererseits gilt

$$\det(\hat{A}) = \det(\tilde{E}_1) \cdot \ldots \cdot \det(\tilde{E}_k) \cdot \det(\bar{F}_1) \cdot \ldots \cdot \det(\bar{F}_\ell) \det(A).$$

Die Aussage folgt nun aus $\det(E_i) = \det(\tilde{E}_i) \neq 0 \neq \det(F_j) = \det(\bar{F}_j)$.

Alternative: Wir schauen uns die Leibnizformel zur Berechnung der Determinante von A genau an. Dabei wird über alle Permutationen $\sigma \in S_{m_1+m_2}$ summiert. Wenn ein solches σ aber einen Spaltenindex $i \leq m_1$ auf einen Index

$\sigma(i) > m_1$ abbildet, wird der entsprechende Term in der Leibnizformel null (weil $a_{\sigma(i),i}$ ja im unteren linken Block von A liegt, also Null ist). Also müssen wir nur über diejenigen σ summieren, welche die ersten m_1 Indizes untereinander permutieren. Solche Permutationen permutieren dann natürlich auch die hinteren m_2 Indizes untereinander, entsprechen also einem Paar $(\sigma_1, \sigma_2) \in S_{m_1} \times S_{m_2}$. Wenn mal alle diese Paare durchläuft, kann man die Leibnizformel offensichtlich als Produkt der Leibnizformeln für die Berechnung der Determinanten von B und D faktorisieren. Dabei verwendet man noch die Multiplikativität der Signatur: $\mathrm{sgn}(\sigma_1\sigma_2) = \mathrm{sgn}(\sigma_1)\mathrm{sgn}(\sigma_2)$. □

Aufgabe 46

Bestimmen Sie die komplexen Eigenwerte des Endomorphismus μ_A für die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Eine komplexe Zahl λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $A - \lambda I$ nicht invertierbar ist, also $\det(A - \lambda I) = 0$. Mit Hilfe der Regel von Sarrus bekommen wir,

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) + (-3)\cdot 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 \cdot (-6) \\
&\qquad - 6 \cdot 3 \cdot (-5-\lambda) - 3 \cdot (-3) \cdot (4-\lambda) - (1-\lambda)\cdot(-6)\cdot 3 \\
&= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) - 108 + 9(10 + 2\lambda + 4 - \lambda + 2 - 2\lambda) \\
&= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) + 36 - 9\lambda \\
&= (-5 - \lambda + 5\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) + 9(4-\lambda) \\
&= (4 + 4\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) \\
&= (2+\lambda)^2(4-\lambda),
\end{aligned}$$

woraus leicht abzulesen ist, dass $\det(A - \lambda I) = 0$ genau dann wenn $\lambda \in \{-2, 4\}$. Die komplexen Eigenwert sind also -2 und 4. □

Aufgabe 47

Sei $\varphi\colon V \to V$ linear und $v_1, \ldots, v_n \in V \setminus \{0\}$ Eigenvektoren von φ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie, dass $v_1, \ldots, v_n$ dann linear unabhängig sind.

Lösung: Wir verwenden eine Induktionsbeweis.
$n = 1$: v_1 ist Eigenvektor, also gilt nach Definition $v_1 \neq 0$ und somit ist v_1 linear unabhängig.
$n \to n+1$: Wir nehmen an, dass die Aussage für n Eigenvektoren von φ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten gilt. Sei nun v_{n+1} ein weiterer Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_{n+1} \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ und

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i = 0 \qquad (\star).$$

Da φ linear ist bekommen wir

$$0 = \varphi(0) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \lambda_i v_i$$

und durch Subtraktion von ($\star$) multipliziert mit λ_{n+1}

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \lambda_i v_i - \lambda_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) v_i.$$

Da laut Annahme $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, gilt $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und aus $(\lambda_{n+1} - \lambda_i) \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n$ folgt $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Zurückeingesetzt in ($\star$) erhalten wir also $\alpha_{n+1} v_{n+1} = 0$. Als Eigenvektor ist $v_{n+1} \neq 0$, also muss gelten $\alpha_{n+1} = 0$. Ingesamt bekommen wir also

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n+1$$

und somit sind $v_1, \ldots, v_{n+1}$ linear unabhängig. □

Aufgabe 48

Sei $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus des endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Zeigen Sie:

(a) Ist λ ein Eigenwert von φ, so ist λ^m ein Eigenwert von $\underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{m}$.
(b) φ ist genau dann invertierbar wenn 0 kein Eigenwert von φ ist.
(c) Ist φ invertierbar und λ ein Eigenwert von φ, so ist λ^{-1} ein Eigenwert von φ^{-1}.

Lösung:

(a) Da λ Eigenwert von φ ist existiert $v \in V$ mit $\varphi(v) = \lambda^1 v$ also gilt die Aussage für $m = 1$. Wir verwenden die Abkürzung φ^m für die n-fache Hintereinanderausführung von φ und nehmen an, dass

$$\varphi^m(v) := (\underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{m})(v) = \lambda^m v.$$

Daraus ergibt sich

$$\varphi^{m+1} v = \varphi(\varphi^m(v)) = \varphi(\lambda^m v) = \lambda^m \varphi(v) = \lambda^m \lambda v = \lambda^{m+1} v,$$

und die Aussage folgt mittels Induktion.

(b) Wir wissen, dass φ genau dann invertierbar ist wenn φ injektiv und surjektiv ist, was für einen Endomorphismus äquivalent dazu ist, dass $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$ und $\mathrm{Bild}(\varphi) = V$. Aus der Dimensionsformel

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$$

können wir ablesen, dass der Endomorphismus φ genau dann surjektiv ist, wenn er injektiv ist, also ist φ genau dann invertierbar, wenn φ injektiv ist, also wenn $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt $\varphi(v) \neq 0 = 0 \cdot v$, also dazu dass 0 kein Eigenwert von φ ist.

(c) Da φ invertierbar ist und λ ein Eigenwert von φ folgt aus (b), dass $\lambda \neq 0$. Sei nun $v \neq 0$ mit $\varphi(v) = \lambda v$. Für φ^{-1} muss gelten

$$v = \varphi^{-1}(\varphi(v)) = \varphi^{-1}(\lambda v) = \lambda \varphi^{-1}(v)$$

und damit $\varphi^{-1}(v) = \lambda^{-1} v$, also ist λ^{-1} ein Eigenwert von φ^{-1}.

□