Lineare Algebra
Wintersemester 2021/22

Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 11

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
(z.B. bis Mo. 17. Jänner 2022, 08:00 Uhr)

Aufgabe 41

(a) Finden Sie für alle unten angegebenen Permutationen $\sigma_i \in S_7$ jeweils Darstellungen in Matrixschreibweise, als Produkt von elementfremden Zykeln und als Produkt von Transpositionen und berechnen Sie die Signatur:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = (2134)(576), \qquad \sigma_4 = (1432)(5674)(12),$$

$$\sigma_5 = (12)(23)(45)(27)(24), \qquad \sigma_6 = \sigma_4\sigma_1\sigma_3.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $\sigma \in S_m$ (und jeden Körper K) genau eine Matrix $A_\sigma \in \mathrm{Mat}_m(K)$ existiert, sodass für alle $(c_1, \ldots, c_m)^t \in K^m$ gilt:

$$A_\sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ c_{\sigma(m)} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42

(a) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Hängt das Ergebnis vom Körper ab, über dem die Matrix betrachtet wird?

(b) Sei $A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{Z})$. Zeigen Sie, dass $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ genau dann wenn $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ für alle bis auf endlich viele Primzahlen p.

Aufgabe 43

Bestimmen Sie alle Werte $\lambda \in \mathbb{R}$, für welche $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ invertierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -\lambda \\ 2 & 1 & 3 \\ \lambda + 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 44

Die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$ habe **untere Block-Dreiecksform**, also

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

mit $B \in \mathrm{Mat}_{m_1}(K), C \in \mathrm{Mat}_{m_2,m_1}(K), D \in \mathrm{Mat}_{m_2}(K)$ und $m_1 + m_2 = m$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\det(A) = \det(B) \cdot \det(D).$$