Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 2

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
(z.B. bis So. 18. Oktober 2020, 23:59 Uhr)

Aufgabe 5

Für eine nichtleere Menge Ω und eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ ist die Komplementärmenge A^c (auch kurz das Komplement A^c), definiert als $A^c = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$. Für eine beliebige, nichtleere Indexmenge I und Teilmengen $A_i \subseteq \Omega$ für $i \in I$ ist die Vereinigung definiert als

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I : \omega \in A_i\}$$

und der Schnitt als

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in I : \omega \in A_i\}.$$

Zeigen Sie die De Morgan'sche Formeln:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \left(\bigcap_{i\in I} A_i^c\right)^c \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{i\in I} A_i = \left(\bigcup_{i\in I} A_i^c\right)^c.$$

Beweis. Alle Elemente sind hier grundsätzlich aus der Menge Ω vorausgesetzt.

Es gilt nun

$$x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i^c\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i\in I} A_i^c \Leftrightarrow \exists i \in I : x \notin A_i^c \Leftrightarrow \exists i \in I : x \in A_i \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Das beweist die erste Aussage. Die zweite geht ganz ähnlich:

$$x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i^c\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} A_i^c \Leftrightarrow \forall i \in I : x \notin A_i^c \Leftrightarrow \forall i \in I : x \in A_i \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i.$$

□

Häufige Probleme in Aufgabe 5:

- Mit einer Wahrheitstafel kann man diese Aussage nur beweisen, wenn eine feste *endliche* Anzahl von Mengen A_i betrachtet werden. Die Aussage stimmt aber für jede beliebige Familie von Mengen A_i.

Aufgabe 6

(A) Sei M die Menge aller Menschen. Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf M in Hinblick auf Symmetrie, Reflexivität und Transitivität:

(a) $R_1 = \{(A, B) \mid A \text{ liebt } B\}$
(b) $R_2 = \{(A, B) \mid A \text{ ist mit } B \text{ verheiratet}\}$.
(c) $R_3 = \{(A, B) \mid A \text{ ist Großmutter von } B\}$
(d) $R_4 = \{(A, B) \mid \exists C \in M : (C, A) \in R_3 \wedge (C, B) \in R_3\}$

(B) Geben Sie für jede der drei Eigenschaften *reflexiv, symmetrisch, transitiv* eine Relation auf einer Menge an, die diese Eigenschaft hat, die anderen beiden jedoch nicht.

Beweis. (A): (a): Die Relation R_1 ist nicht symmetrisch, wie die meisten von uns vermutlich schon einmal schmerzhaft festgestellt haben. Die Reflexivität ist schwer zu entscheiden, aber vermutlich liebt nicht jeder Mensch sich selbst. Damit wäre sie nicht reflexiv. Auch transitiv ist sie ziemlich sicher nicht, ganz im Gegenteil.

(b): Die Relation R_2 ist offensichtlich symmetrisch. Reflexiv ist sie eindeutig nicht, denn sogar niemand ist mit sich selbst verheiratet. Transitiv ist sie deshalb ebenfalls nicht (sogar kulturunabhängig). Das liegt daran, dass wenn A mit B verheiratet ist, auch B mit A, aber A nicht mit A verheiratet ist.

(c): R_3 hat offensichtlich keine der drei Eigenschaften.

(d): R_4 drückt gerade aus, dass A und B eine gemeinsame Großmutter haben. Das ist offensichtlich symmetrisch und reflexiv. Transitiv ist es nicht, denn die gemeinsame Großmutter von A und B ist nicht unbedingt die gleiche wie die gemeinsame Großmutter von B und C, und somit müssen A und C nicht unbedingt eine gemeinsame Großmutter haben.

(B): Wir betrachten hier die Menge $X = \{1, 2, 3\}$. Die Relation

$$\{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)\}$$

ist reflexiv, aber weder symmetrisch noch transitiv. Die Relation

$$\{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$$

ist nicht reflexiv und nicht transitiv, aber symmetrisch. Die Relation

$$\{(1,2)\}$$

is nicht reflexiv und nicht symmetrisch, aber transitiv. □

Häufige Probleme in Aufgabe 6:

- Achtung: Wenn die Voraussetzung einer der Eigenschaften nicht erfüllt werden kann, ist die Eigenschaft wahr! Zum Beispiel ist die Relation $\{(1,2)\}$ transitiv, da der Fall $(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R$ gar nie eintritt, also auch nichts zu überprüfen ist.
- (A)(d) ist nicht transitiv, da die beiden involvierten Großmütter unterschiedlich sein können.

Aufgabe 7

Prüfen Sie nach, ob die angegebenen Relationen auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation, eine partielle Ordnung oder eine vollständige Ordnung sind.

(a) $R_1 = \{(v,w) \mid v_1 \leq w_1 \wedge v_2 \leq w_2\}$
(b) $R_2 = \{(v,w) \mid v_1 + v_2 \leq w_1 + w_2\}$
(c) $R_3 = \{(v,w) \mid v_1 + w_1 = v_2 + w_2\}$
(d) $R_4 = \{(v,w) \mid v_1 + w_2 = v_2 + w_1\}$

Beweis. (a): Eine Äquivalenzrelation ist R_1 nicht, denn sie ist nicht symmetrisch. Zum Beispiel steht $(1,1)$ in Relation zu $(2,2)$, aber nicht umgekehrt. Es ist aber eine partielle Ordnung. Die Reflexivität folgt daraus, dass natürlich $v_1 \leq v_1$ und $v_2 \leq v_2$ für alle reellen Zahlen v_1, v_2 gilt, und damit jedes $v = (v_1, v_2)$ zu sich selbst in Relation steht. Die Antisymmetrie folgt aus der Antisymmetrie der Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$. Steht nämlich v zu w und w zu v in Relation, dann gilt $v_1 \leq w_1, v_2 \leq w_2, w_1 \leq v_1$ und $w_2 \leq v_2$. Das impliziert $v_1 = w_1$ und $v_2 = w_2$ und damit $v = w$. Für die Transitivität stehe v zu w und w zu x in Relation. Dann gilt also $v_1 \leq w_1, v_2 \leq w_2, w_1 \leq x_1$ und $w_2 \leq x_2$. Aus der Transitivität von $\leq$ auf $\mathbb{R}$ folgt $v_1 \leq x_1$ und

$v_2 \leq x_2$, also steht v zu x in Relation. R_1 ist aber keine vollständige Ordnung. Für $v = (1,0)$ und $w = (0,1)$ gilt weder vR_1w noch wR_1v.

(b) R_2 ist nicht symmetrisch (und damit auch keine Äquivalenzrelation). Es gilt nämlich $(0,0)R_2(1,0)$ aber nicht $(1,0)R_2(0,0)$. R_2 ist aber auch nicht antisymmetrisch (und damit auch keine partielle Ordnung). Es gilt nämlich $(1,0)R_2(0,1)$ und $(0,1)R_2(1,0)$, aber $(1,0) \neq (0,1)$.

(c) R_3 ist nicht reflexiv, denn zum Beispiel gilt nicht $(1,0)R_3(1,0)$. Also ist R_3 weder eine Äquivalenzrelation noch eine partielle Ordnung.

(d) R_4 ist nicht antisymmetrisch, also auch keine partielle Ordnung. Es gilt zum Beispiel $(1,0)R_4(2,1)$ und $(2,1)R_4(1,0)$, aber $(1,0) \neq (2,1)$. Es ist R_4 aber eine Äquivalenzrelation. Wegen $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ gilt vR_4v für alle $v \in \mathbb{R}^2$, also ist R_4 reflexiv. Aus $v_1 + w_2 = v_2 + w_1$ folgt natürlich $w_1 + v_2 = w_2 + v_1$, also ist R_4 symmetrisch. Für die Transitivität gelte vR_4w und wR_4x. Das bedeutet $v_1 + w_2 = v_2 + w_1$ sowie $w_1 + x_2 = w_2 + x_1$. Addiert man beide Gleichungen erhält man

$$v_1 + w_2 + w_1 + x_2 = v_2 + w_1 + w_2 + x_1.$$

Wenn man nun auf beiden Seiten $w_1 + w_2$ abzieht ergibt sich $v_1 + x_2 = v_2 + x_1$, also vR_4x. □

Häufige Probleme in Aufgabe 7:

- R_1 ist nicht total/vollständig!
- R_2 ist nicht antisymmetrisch!

Aufgabe 8

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Auf $\mathbb{Z}$ definieren wir folgende Relation:

$$M_n := \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists c \in \mathbb{Z} \colon nc = b - a\}.$$

Zeigen Sie, dass es sich bei M_n um eine Äquivalenzrelation handelt und bestimmen Sie die Anzahl ihrer Äquivalenzklassen.

Beweis. Falls $n = 0$ gilt, ist (a,b) genau dann in M_n, wenn $0 = b - a$, also $a = b$ gilt. Also gilt $M_0 = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Man sieht leicht, dass M_0 reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, also eine Äquivalenzrelation. In diesem Fall besteht jede Äquivalenzklasse aus genau einer ganzen Zahl, also hat M_0 unendlich viele Äquivalenzklassen.

Nehmen wir weiter an, n sei nicht Null. Wir müssen zeigen, dass M_n als Relation auf $\mathbb{Z}$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Die Reflexivität folgt daraus dass $n \cdot 0 = 0 = a - a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt. Die Symmetrie ergibt sich aus der Tatsache, dass $nc = b - a$ natürlich $n(-c) = a - b$ impliziert.

Um die Transitivität zu zeigen, seien (a,b) und (b,a') in M_n. Sei $c \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass $nc = b - a$, und sei $c' \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass $nc' = a' - b$. Dann gilt

$$a' - a = a' - b + b - a = nc' + nc = n(c' + c),$$

also gibt es eine ganze Zahl d (nämlich $d = c' + c$), so dass $nd = a' - a$ gilt. Es folgt $(a,a') \in M_n$. Damit haben wir bewiesen, dass M_n transitiv ist.

Es lässt sich jedes $a \in \mathbb{Z}$ schreiben als $a = cn + r$, wobei $r \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ und $c \in \mathbb{Z}$ (Division mit Rest). Das bedeutet $cn = a - r$ und also $(r,a) \in M_n$. Also gibt es für jede ganze Zahl a ein $r \in \{0,\ldots,n-1\}$, das sich in derselben Äquivalenzklasse von M_n wie a befindet. Also gibt es höchstens n verschiedene Äquivalenzklassen. Andererseits unterscheiden sich zwei verschiedene Zahlen aus $\{0,\ldots,n-1\}$ niemals um ein Vielfaches von n, sind also nie äquivalent. Folglich hat M_n genau n Äquivalenzklassen. □

Häufige Probleme in Aufgabe 8:

- Die Zahl c in der Definition von M_n kann beliebig gewählt werden, es muss nicht immer dieselbe sein. Es muss nur eine geben, damit a zu b in Relation steht.