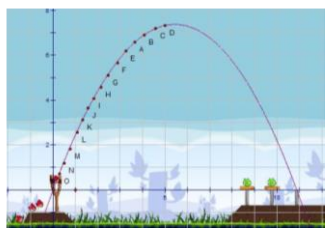
Angewandte Mathematik Differentialrechnung

Univ.-Prof. Dr. Matthias Harders
Dr. Marcel Ritter
Sommersemester 2022

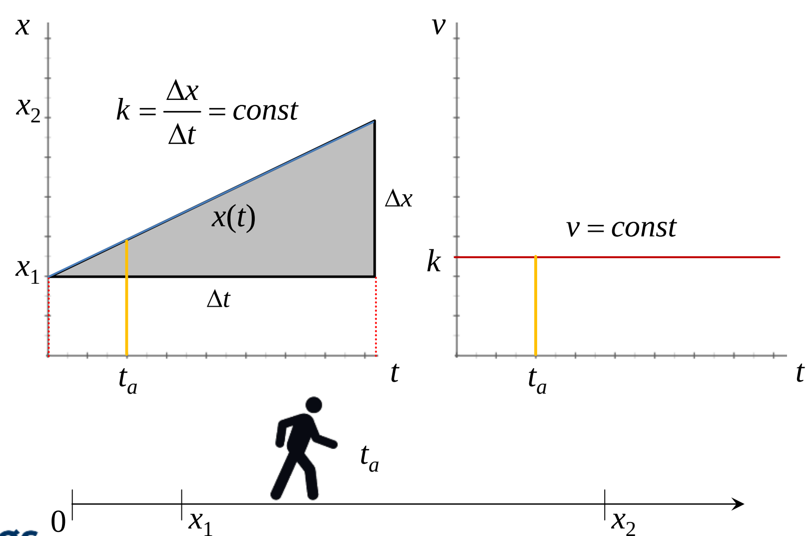


Einführungsfilm

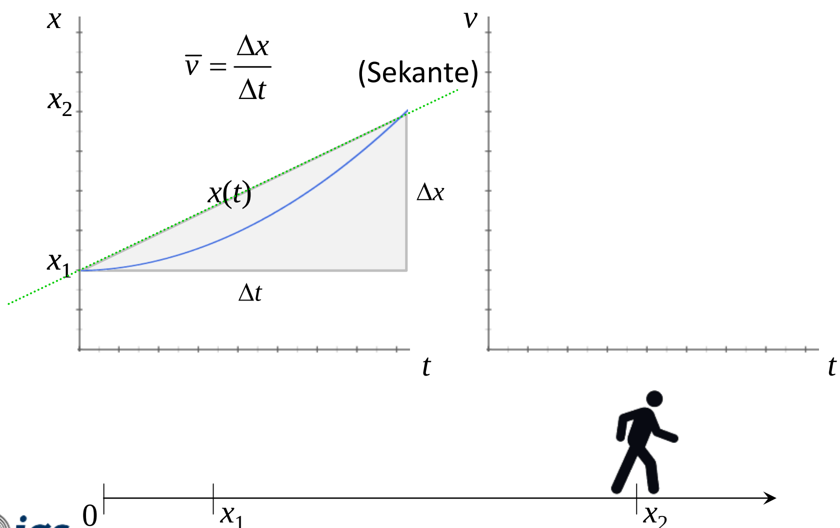
Inhalt

- Einführung
- Ableitungsregeln
- Partielle Ableitungen
- Extrema
- Optimierung

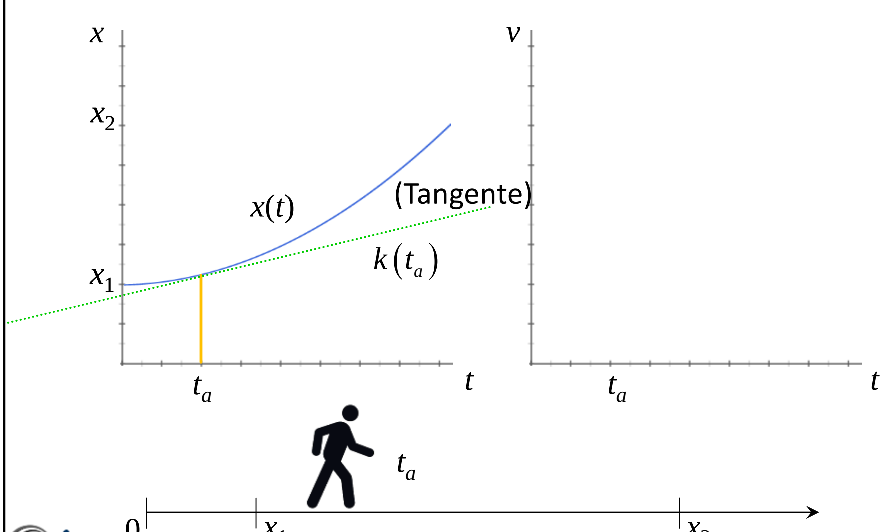
Motivation



Motivation



Motivation



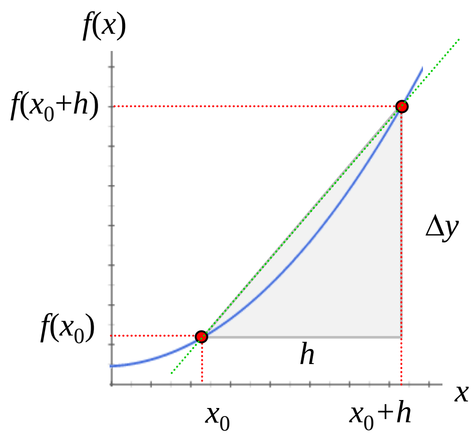
Definitionen

- Differenzenquotient

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

bzw. mit $x_1 = x_0 + h$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



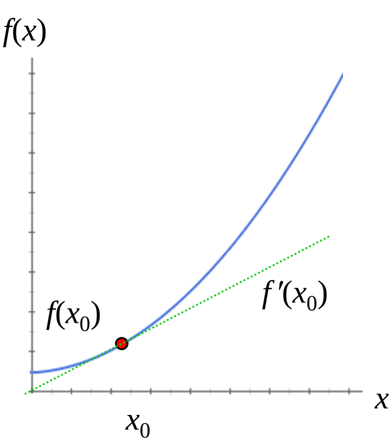
Definitionen

- Existiert der Wert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

dann ist f an x_0 differenzierbar (Differentialquotient an x_0)

- Funktion f ist differenzierbar, falls $f'(x)$ $\forall x \in D$ existiert
- Die Funktion f' ist die erste Ableitung der Funktion f



Definitionen

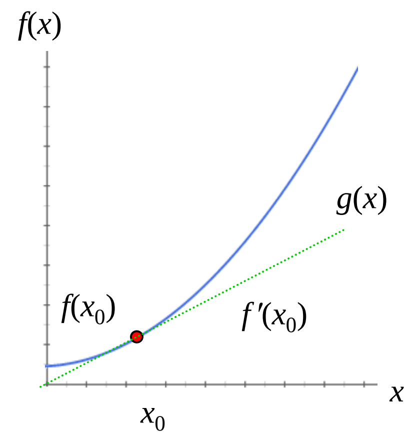
- Gleichung der Tangente in x_0

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- Nicht alle Funktionen sind überall differenzierbar, z.B.

$$x \to \sqrt{x}, \qquad x \in \mathbb{R}_0^+$$

(anschaulich: bei $x = 0$ wird Tangente senkrecht)



Berechnung Ableitung

- Beispiel: Bestimmen der Ableitung von $x \to x^2, \ x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x \end{aligned}$$

- Ableitung f' ist Gerade $g(x) = 2x$

Notation

- Schreibweisen für erste Ableitung

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f \qquad \text{für } f(x)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y \qquad \text{für } y(x)$$

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} x = \dot{x} \qquad \text{für } x(t)$$

(Funktion von Zeit *t*)

(Lagrange) (Leibniz) (Newton)

Ableitungsregeln

- Für differenzierbare Funktionen *f*, *g* mit Konstanten $a,b,k \in \mathbb{R}$ gilt:
  - Konstante Funktionen $(a)' = 0$
  - Potenzfunktionen $(x^k)' = kx^{k-1}$
  - Summenregel $(af \pm bg)' = af' \pm bg'$
  - Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Ableitungsregeln

- Für differenzierbare Funktionen f, g mit Konstanten $a,b,k \in \mathbb{R}$ gilt:
  – Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

    (z.B. Kehrwert) $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

  – Kettenregel $(f \circ g)' = \left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$

Ableitungsregeln

- Beispiele:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \left(\left(1+x^2\right)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\begin{aligned}\left(x^3\left(3x^2-5\right)\right)' &= \left(x^3\right)'\left(3x^2-5\right) + x^3\left(3x^2-5\right)' \\ &= 3x^2\left(3x^2-5\right) + x^3 6x \\ &= 9x^4 - 15x^2 + 6x^4 = 15x^4 - 15x^2\end{aligned}$$

Weitere Elementare Ableitungen

- Kreisfunktionen

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

- Exponentialfunktionen, u.a. zur Basis $a \in \mathbb{R}^+$

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x \qquad (e^x)' = e^x \qquad \left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} f'(x)$$

- Logarithmusfunktionen, mit $x \in \mathbb{R}^+$; Beispiele mit $\ln(.)$

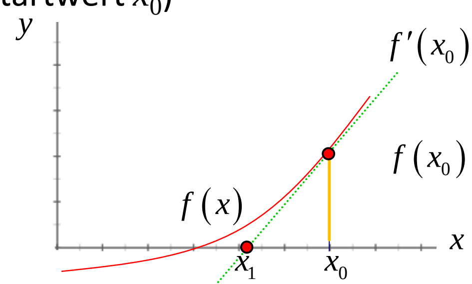
$$\left(\ln(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Anwendungsbeispiel – Newton-Verfahren

- Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung, für differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Finde $x_i \in \mathbb{R}$: $f(x_i) = 0$
- Iterationsvorschrift $\qquad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
  (mit gewähltem Startwert x_0)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

(iterieren bis $|f(x_n)| < \varepsilon$)



Anwendungsbeispiel – Newton-Verfahren

- Iteration konvergiert nicht für alle Startwerte
- Beispiel: für Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 2$ und Startwert $x_0 = 0$ oszilliert das Verfahren zwischen 0 und 1
- Generell: Startwert sollte nahe bei Nullstelle sein (auch sollte $f'(x_0) \neq 0$ sein; ggfs. neu wählen)
- Konvergenz quadratisch, d.h. Anzahl richtiger Stellen in Näherung der Nullstelle verdoppelt sich je Schritt
- Kann auch angewandt werden zur Bestimmung eines Schnittpunkts zweier beliebiger Funktion $f(x)$, $g(x)$, durch Berechnung der Nullstelle $f(x) - g(x) = 0$

Höhere Ableitungen

- Wenn eine Funktion f und ihre Ableitung $f': D \to \mathbb{R}$, in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind, dann sagt man f ist in x_0 zweimal differenzierbar
- Abbildung $f'': D \to \mathbb{R}: x \to (f')'(x)$ ist die 2. Ableitung
- n-te Ableitung einer Funktion: $f^{(n)}(x)$
- Beispiel:

$$f(x) = f^{(0)}(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$
$$f'(x) = f^{(1)}(x) = 3x^2 + 4x + 3$$
$$f''(x) = f^{(2)}(x) = 6x + 4$$
$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = 6$$
$$f''''(x) = f^{(4)}(x) = 0$$

Notation

- Schreibweisen für zweite Ableitung

$$f'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}(f) = \frac{d^2 f}{dx^2} = f^{(2)} \qquad \text{für } f(x)$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad \text{für } y(x)$$

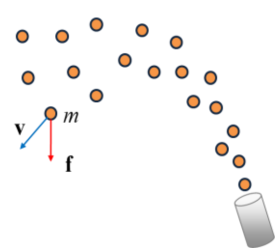
$$x'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} \quad \text{für } x(t)$$ (Funktion von Zeit t)

(Lagrange) (Leibniz) (Newton)

Beispiel – Höhere Ableitungen

- Partikelsysteme: Bestimmung der Bewegung von Partikeln über das zweite Newtonsche Gesetz $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$
- Kinematische Parameter der Partikel in 3D:
  - Position $\mathbf{x}(t) = \left(x(t) \;\; y(t) \;\; z(t)\right)^T$
  - Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$
  - Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$

$$= \ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2}$$



Multivariate Funktionen

- Funktionen können Abbildungen von mehreren Veränderlichen sein $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k,\ n,k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \to (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x}))$$

- Je nach Dimension bezeichnet man diese als skalar ($k = 1$) oder vektorwertig ($k > 1$)
- Beispiele:

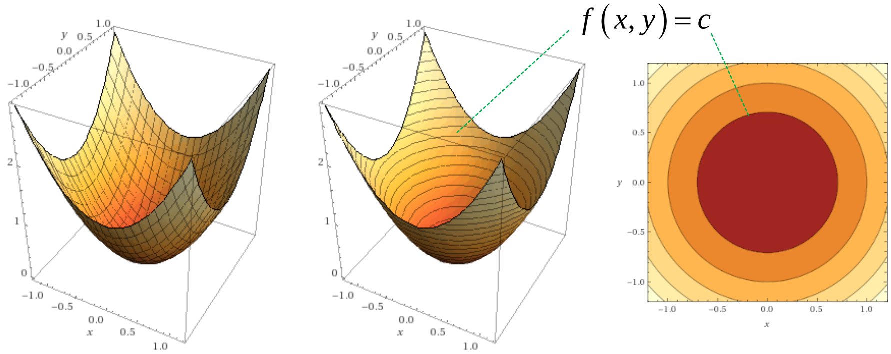
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \qquad (x,y) \to \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

(2D Vektor zu 2D Vektor) (Halbkugel, Radius 1)

Graphische Darstellung

- Darstellung skalarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ über Fläche/ Funktionsgraphen in 3D, und/oder mittels Konturlinien

$f(x,y) = c$



$f(x,y) = x^2 + y^2$

Partielle Ableitung

- Für eine skalare multivariate Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die partielle Ableitung definiert als Ableitung der Funktion nach einer der Variablen

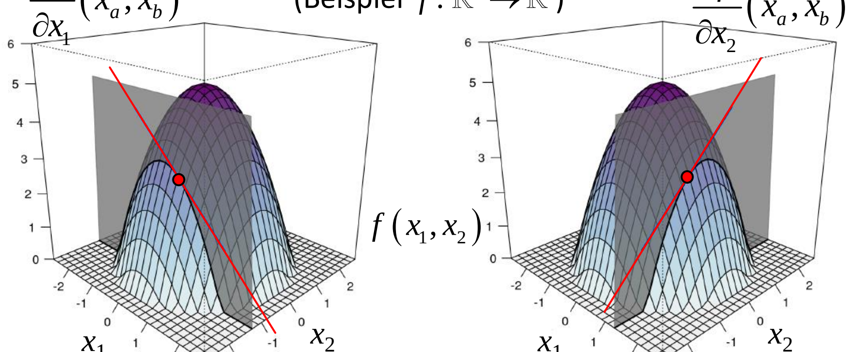
$$x_i \to (\xi_1, \ldots, x_i, \ldots, \xi_n)$$

- Es werden alle Werte $\xi_{j \neq i}$ festgehalten, d.h. somit als konstant betrachtet (es ergibt sich eine Ableitung einer Funktion einer Variablen)
- Diese partielle Ableitung wird notiert als $\frac{\partial f}{\partial x_i}$
- Das Symbol ∂ deutet speziell auf partielle Ableitungen hin (gesprochen: „*d*“ oder „*del*“)

Visualisierung – Partielle Ableitungen

- Partielle Ableitungen ausgewertet in Punkt $\mathbf{x}$ geben die dortige Steigung in eine Koordinatenrichtung an

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_a, x_b)$ (Beispiel $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_a, x_b)$



Notation

- Erste partielle Ableitungen, z.B. für Funktion $u(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = u_x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = u_y$$

- Höhere partielle Ableitungen, z.B. für Funktion $f(x,y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) = f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right) = \left(f_y\right)_x = f_{yx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

Beispielrechnungen

- Gegeben sei eine multivariate Funktion

$$f(x,y,z) = xy^2(x+2z)^3$$

- Beispiele partieller Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy(x+2z)^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2(x+2z)^2 \cdot 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy(x+2z)^3\right)$$

$$= 2y(x+2z)^3 + 2xy3(x+2z)^2$$

Satz von Schwarz

- Die Reihenfolge der Ausführung partieller Ableitungen nach einzelnen Variablen kann vertauscht werden (bei entsprechend mehrfach stetig differenzierbaren Funktionen mehrerer Variablen)
- Beispiel: $f(x,y,z) = xy^2(x+2z)^3$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y(x+2z)^3 + 2xy3(x+2z)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2(x+2z)^3 + xy^2 3(x+2z)^2\right)$$

$$= 2y(x+2z)^3 + 2xy3(x+2z)^2$$

Gradient

- Der Gradient ist ein mathematischer Operator (hier speziell ein Differentialoperator) der auf eine multi-variate skalare Funktion angewandt werden kann
- Er ist gegeben durch die Anordnung aller ersten partiellen Ableitungen in einem Vektor
- Beispiel in 2D:

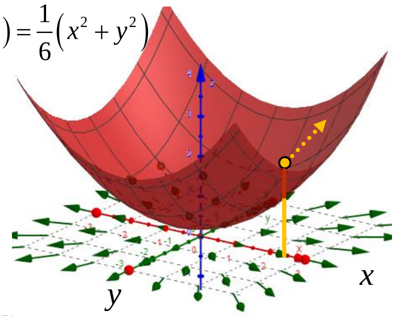
$$\nabla f = \text{grad } f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f = \left(\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

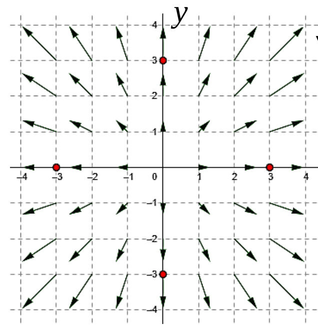
(„Nabla“ Zeichen) (Gradient-Operator)

Gradient

- Durch den Gradienten wird ein Skalarfeld in ein Vektorfeld umgewandelt
- Die Gradientenvektoren zeigen in die Richtung des größten Anstiegs an einem Punkt einer Funktion

$$f(x,y)=\frac{1}{6}\left(x^2+y^2\right)$$



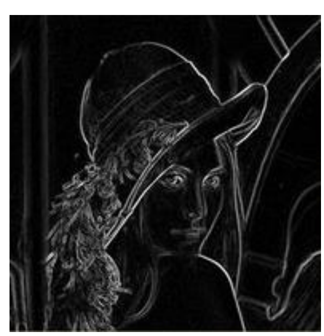


$$\nabla f=\left(\frac{1}{3}x,\frac{1}{3}y\right)$$

Anwendungsbeispiel

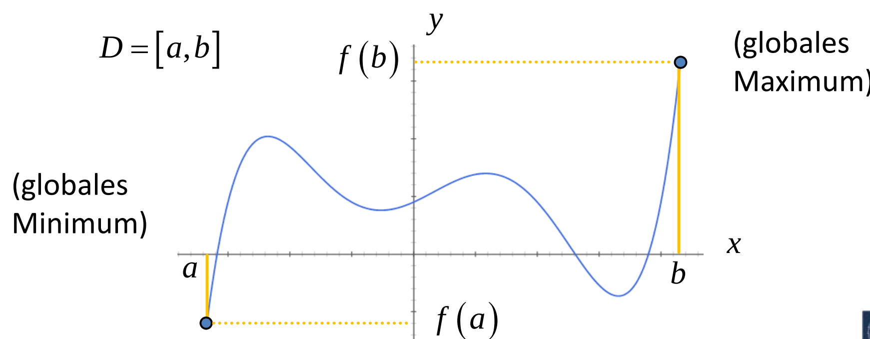
- Kantendetektion über Annäherung des Gradienten-feldes mit dem Sobel-Operator

(„Lena“ Testbild)



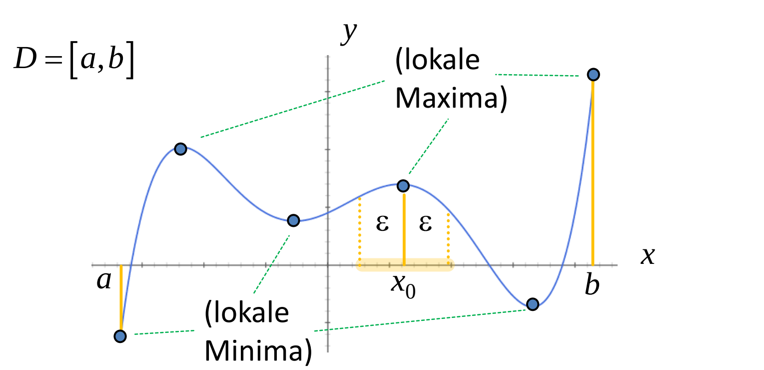
Globale Extrema

- Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ hat in x_0 ein globales Maximum (bzw. Minimum), genau dann wenn $\forall x \in D$: $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$)



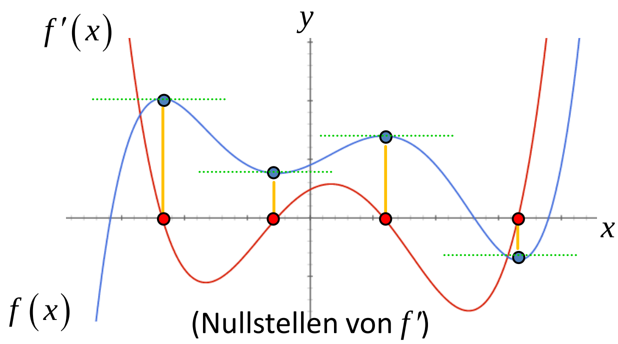
Lokale Extrema

- Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ hat in x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum), genau dann wenn $\exists \varepsilon > 0$: $\forall x \in D$: mit $|x_0 - x| < \varepsilon$: $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$)



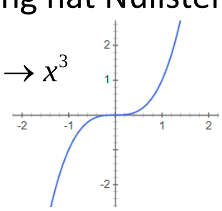
Lokale Extrema

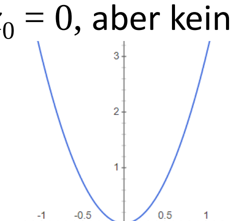
- Gegeben sei Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$; falls f in $x_0 \in \,]a,b[$ ein lokales Extremum (Maximum/Minimum) aufweist und in x_0 differenzierbar ist, dann folgt $f'(x_0) = 0$



Lokale Extrema

- Beachte: die Umkehrung des Satzes gilt nicht, d.h. nur aus $f'(x_0) = 0$ folgt nicht Existenz eines Extremums
- Beispiel: Für Funktion $f(x) = x^3$ ist $f'(x) = (x^3)'=3x^2$, Ableitung hat Nullstelle bei $x_0 = 0$, aber kein Extremum

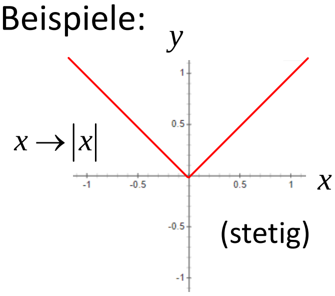


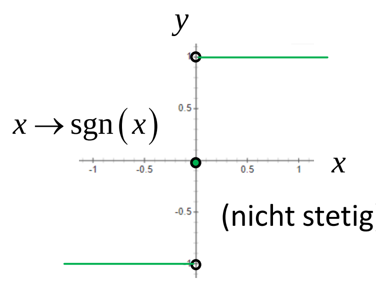


- Beachte: für ein x_0 am Rand von einem Intervall $[a,b]$ gilt der Satz auch nicht, da der Limes (siehe Definition Ableitung) dort nicht definiert ist

Stetigkeit von Funktionen

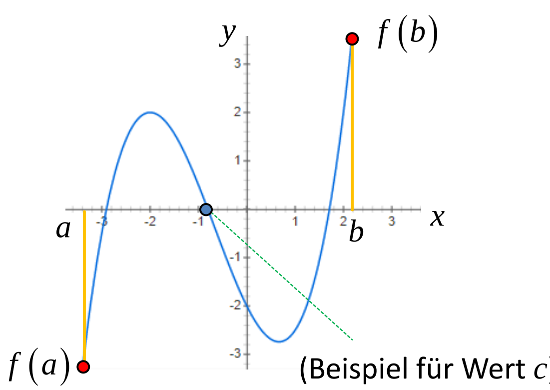
- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, genau dann wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
  (anschaulich: der Graph kann ohne „Absetzen“, im Definitionsbereich, gezeichnet werden)
- Beispiele:





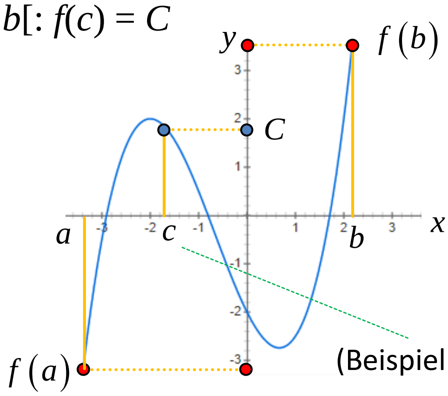
Sätze zu Funktionen

- Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig, sowie $f(a) \cdot f(b) < 0$;
  dann gilt: $\exists\, c \in \,]a,b[: f(c) = 0$



Sätze zu Funktionen

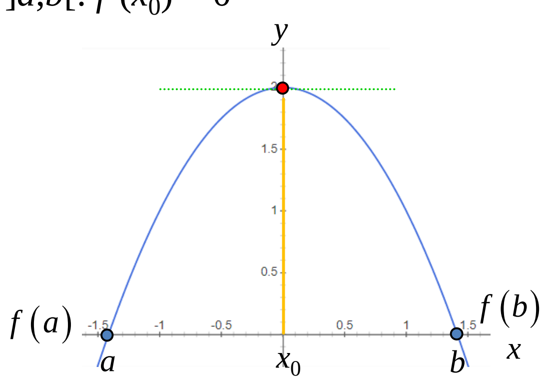
- Zwischenwertsatz: Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig, sowie $f(a) < C < f(b)$ oder $f(a) > C > f(b)$; dann gilt: $\exists\, c \in\,]a,b[: f(c) = C$



(Beispiel für Wert c)

Sätze zu Funktionen

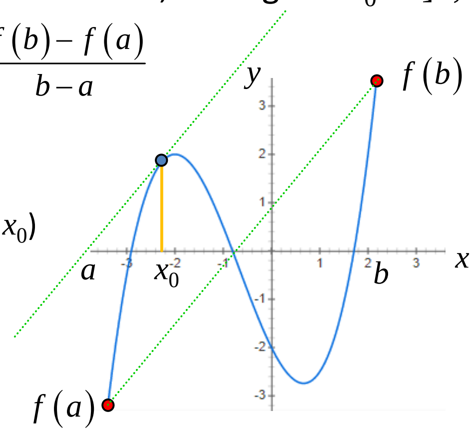
- Satz von Rolle: Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und in $]a,b[$ differenzierbar, sowie $f(a) = f(b)$; dann gilt $\exists\, x_0 \in\,]a,b[: f'(x_0) = 0$



Sätze zu Funktionen

- Mittelwertsatz: Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und in $]a,b[$ differenzierbar; dann gilt $\exists\, x_0 \in\,]a,b[$:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



(Beispiel für Wert x_0)

Sätze zu Funktionen

- Monotonie: Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und in $]a,b[$ differenzierbar; dann gilt
  1) falls $\forall x \in\,]a,b[$: $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ monoton steigend
  2) falls $\forall x \in\,]a,b[$: $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ monoton fallend
  3) falls $\forall x \in\,]a,b[$: $f'(x) = 0 \Rightarrow f$ konstant

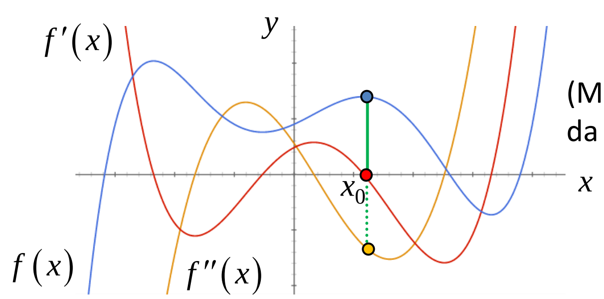
- Hinweis: ein Limes bei Funktionen z.B. der Art $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ kann manchmal von der Form $\dfrac{0}{0}$ oder $\dfrac{\infty}{\infty}$ sein;

  hier kann die Regel von Bernoullie-L'Hospital angewandt werden (später mehr dazu)

Art eines Extremums

- Gegeben sei Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, differenzierbar auf $]a,b[$ und mit einem Extremum bei $x_0 \in\,]a,b[$
- Ist auch f' auf $]a,b[$ differenzierbar, dann gilt
  - x_0 ist ein Maximum, genau dann wenn $f''(x_0) < 0$
  - x_0 ist ein Minimum, genau dann wenn $f''(x_0) > 0$
- Falls für eine n-mal differenzierbare Funktion gilt $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, dann ist
  - für gerade n bei x_0 ein Maximum (bzw. ein Minimum), bei $f^{(n)}(x_0) < 0$ (bzw. $f^{(n)}(x_0) > 0$)
  - für ungerade n bei x_0 kein Extremum

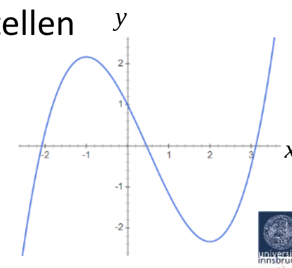
Art eines Extremums – Visualisierung



(Maximum bei x_0, da $f''(x_0) < 0$)

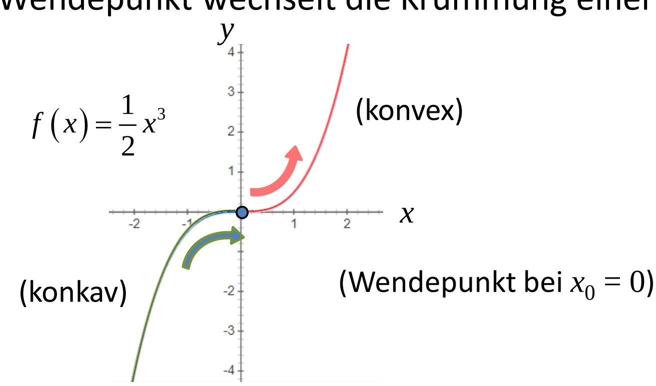
Rechenbeispiel

- Art der lokalen Extrema der Funktion
  $$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$$
- Untersuchung der Nullstellen der ersten Ableitung
  $$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2) \qquad x_{0,1}=-1 \qquad x_{0,2}=2$$
- Verhalten zweiter Ableitung an Nullstellen
  $$f''(x)=2x-1$$
  $$f''(x_{0,1})=-3<0 \qquad \text{(Maximum)}$$
  $$f''(x_{0,2})=3>0 \qquad \text{(Minimum)}$$



Krümmung und Wendepunkte

- Generell kann eine Funktion linksgekrümmt (konvex), rechtsgekrümmt (konkav), oder ohne Krümmung sein
- An einem Wendepunkt wechselt die Krümmung einer Funktion



Krümmung und Wendepunkte

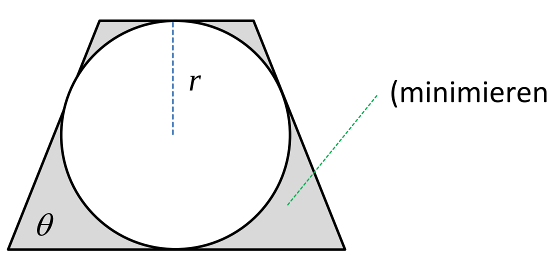
- Gegeben sei eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, zweimal differenzierbar auf $]a,b[$, sowie $x_0 \in \ ]a,b[$
- Wenn f bei x_0 einen Wendepunkt aufweist, dann hat f' dort ein Extremum, somit also $f''(x_0) = 0$
- Beachte: der Umkehrschluss gilt nicht, z.B. $f(x) = x^4$
- Eine Linkskrümmung liegt vor wenn $f''(x_0) > 0$, eine Rechtskrümmung wenn $f''(x_0) < 0$
- An einem Wendepunkt wechselt f'' das Vorzeichen
- Wie zuvor, falls notwendig, Betrachtung höherer Ableitungen als hinreichendes Kriterium

Anwendungsbeispiel

- Gegeben sei ein Kreis mit Radius r, sowie ein spezielles gleichschenkeliges Trapez, das diesen berührt
- Gesucht: Winkel θ für den die graue Differenzfläche beider Formen minimal wird (siehe Skizze)

$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$r > 0$$

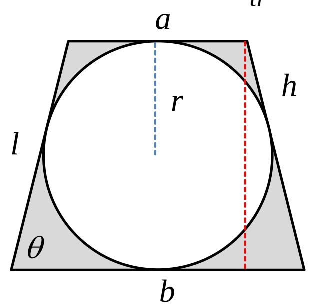


Anwendungsbeispiel

- Bezeichne Seitenlängen Trapez mit a und b, sowie l, und Höhe mit h
- Fläche Trapez $A_{tr} = ½(a+b)\cdot h$, Fläche Kreis $A_{kr} = \pi\cdot r^2$
- Minimiere Differenzfläche $A = A_{tr} - A_{kr}$

$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$r > 0$$

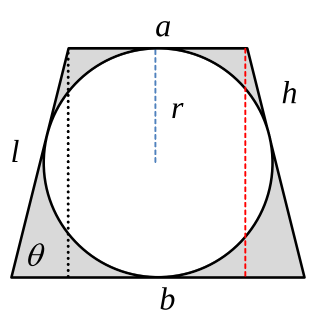


Anwendungsbeispiel

- Parameter reduzieren: es gilt $h = 2r$, sowie $a+b = 2l$ (Satz von Pitot)
- Rechtwinkeliges Dreieck: $l = \dfrac{2r}{\sin\theta}$

$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$r > 0$$



Anwendungsbeispiel

- Resultierende Funktion der Fläche nach Einsetzen

$$A(\theta)=\frac{4r}{\sin\theta}r-\pi r^2=4r^2\frac{1}{\sin\theta}-\pi r^2$$

- Erste Ableitung nach Winkel θ, Nullstelle finden

$$A'(\theta)=-4r^2\frac{1}{\sin^2\theta}\cos\theta \qquad 0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

$$A'(\theta)=0\Leftrightarrow\cos\theta=0\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2} \qquad r>0$$

- Zweite Ableitung nach Winkel θ

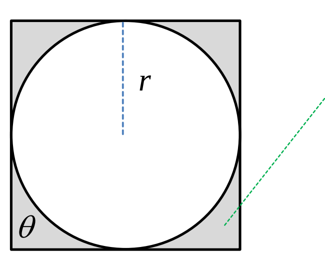
$$A''(\theta)=4r^2\frac{\cos^2\theta+1}{\sin^3\theta} \qquad A''\left(\frac{\pi}{2}\right)=4r^2>0 \quad \text{(Minimum)}$$

Anwendungsbeispiel

- Gegeben sei ein Kreis mit Radius r, sowie ein spezielles gleichschenkeliges Trapez, das diesen berührt
- Gesucht: Winkel θ für den die graue Differenzfläche beider Formen minimal wird (siehe Skizze)

$$0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

$$r>0$$



(minimal für $\theta=\frac{\pi}{2}$)

Einige Hilfreiche Weblinks

- WolframAlpha – Onlinedienst aufbauend auf Mathematik-Softwarepaket Mathematica
  https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/

- GeoGebra (ursprünglich in Salzburg entwickelt) – Interaktive Onlineanwendung für Geometrie, Algebra, Analysis, Statistik, etc.
  https://www.geogebra.org/m/FACt3ZVK

Vorlesungsplan

Datum	Thema	Proseminar
11.03.22	Einführung, Grundlagen, Funktionen	*(Beginn zuvor am 8.3.)*
18.03.22	Differentialrechnung	
25.03.22	Integralrechnung	
01.04.22	Differentialgleichungen	
08.04.22	Weitere Funktionen	
	Osterferien	
29.04.22	Reihen und Folgen	
06.05.22	Numerische Auswertung von Funktionen	
13.05.22	Lösung von Gleichungssystemen	
20.05.22	Interpolation	
27.05.22	Zufallszahlen	
03.06.22	Komplexe Zahlen	
10.06.22	Klausurvorbereitung	
01.07.22	**Klausur**	