Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 9

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
(z.B. bis Mo. 13. Dezember 2021, 08:00 Uhr)

Aufgabe 33

Bestimmen Sie für die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{3,5}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ eine Basis des Lösungsraums $L(A,0) \subseteq (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 34

Bestimmen Sie für die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$ jeweils eine Basis und die Dimension:

(a) $U_1 = \{(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid a_2 - 2a_3 = 0\}$
(b) $U_2 = \{(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid a_4 + 2a_2 = a_3 + 2a_1\}$
(c) $U_1 \cap U_2$
(d) $U_1 + U_2$.

Aufgabe 35

Wir betrachten folgende Menge:

$$Q := \left\{ M \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}) \mid \text{jede Zeile und jede Spalte von } M \text{ summiert sich zu } \sqrt{2} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass Q ein affiner Unterraum von $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ ist und bestimmen Sie den zu Q parallelen Untervektorraum $U \subseteq \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$.
(b) Bestimmen Sie eine Basis von U.

Aufgabe 36

Sei W ein K-Vektorraum. Seien $u_1,\dots,u_m \in W$ linear unabhängig, sowie $v_1,\dots,v_n \in W$ linear unabhängig. Zeige, dass

$$u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_n$$

genau dann linear unabhängig sind, wenn

$$\mathrm{Span}_K(\{v_1,\dots,v_m\}) \cap \mathrm{Span}_K(\{u_1,\dots,u_n\}) = \{0\}.$$