Alphabet, Wörter, Sprachen

Complete	☐
Importancy	
Notes	☐
Readings	☐

Was ist ein Alphabet Σ?

- eine endliche, nicht leere Menge von Symbolen
- das Leerwort ϵ ist das kleinste vorstellbare Wort, d.h ein Wort ohne Buchstaben

Wie wird die Länge eines Wortes wiedergeben?

- die Länge des Wortes w ist die Anzahl der Positionen in w

> Länge des Wortes w bezeichnen wir mit $|w|$

- das Leerwort ϵ hat die Länge 0

Wie wird die Menge aller Wörter definiert?

- durch Potenznotationen
- Σ^k ist die Menge aller Wörter der Länge k, deren Symbole aus Σ stammen

folgende Definitionen werden auch verwendet:

$\boxed{\Sigma^+ := \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup ...}$

$\boxed{\Sigma^* := \Sigma^+ \cup \{\epsilon\}}$

> Jedes Wort über Σ ist Element von Σ^*

💡 Eine Teilmenge L von Σ^* heißt eine *formale Sprache* über dem *Alphabet* Σ

Definitionen wie in der Mengenlehre

Seien L, M formale Sprachen über dem Alphabet Σ.

- **Vereinigung von L und M**
  - $L \cup M := \{x \mid x \in L \; oder \; x \in M\}$
  - x ist ein Element aus L oder M
- **Komplement von L und M**
  - $\backsim L = \Sigma^* \setminus L := \{x \in \Sigma^* \mid x \notin L\}$
  - die Menge aller Wörter ohne L
- **Durchschnitt von L und M**
  - $L \cap M := \{x \mid x \in L \; und \; x \in M\}$
  - x ist ein Element aus L und M
- **Produkt von L und M (Verkettung, Konkatenation)**
  - $LM := \{xy \mid x \in L \; und \; y \in M\}$
  - xy sind Elemente aus L und M, da sie konkateniert wurden

💡 Lemma 4.1 (folgt aus Definition das $\langle \Sigma^*; \cdot \rangle$
Seien L, L_1, L_2, L_3 formale Sprachen, dann gilt
$(L_1 L_2) L_3 = L_1 (L_2 L_3) \qquad L\{\epsilon\} = \{\epsilon\}L = L$

Erweiterung der Potenznotation

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine formale Sprache und $k \in \mathbb{N}$, so ist die k-te Potenz von L definiert als:

$$L^k := \begin{cases} \{\epsilon\} & falls \; k = 0 \\ \underbrace{LL...L}_{k-mal} & falls \; k \geq 1 \end{cases}$$

$L^2 = LL$
$L^3 = LL^2$
Es wird immer mit k vielen L konkateniert

Der Kleene-Stern* von L ist definiert als:

$$L^* := \bigcup_{k \geq 0} L^k = \{x_1 \cdots x_k \mid x_1, \cdots, x_k \in L \; und \; k \in \mathbb{N}, k \geq 0\}$$

der Kleene Stern geht endlich weiter, dabei wird immer mit dem nächsten L^k konkateniert (vgl. k-te Potenz von L

dazu definieren wir:

$$L^+ := \bigcup_{k \geq 1} L^k = \{x_1 \cdots x_k \mid x_1, \cdots, x_k \in L \; und \; k \in \mathbb{N}, k \geq 1\}$$