

Angewandte Mathematik

Weitere Analysis-Themen

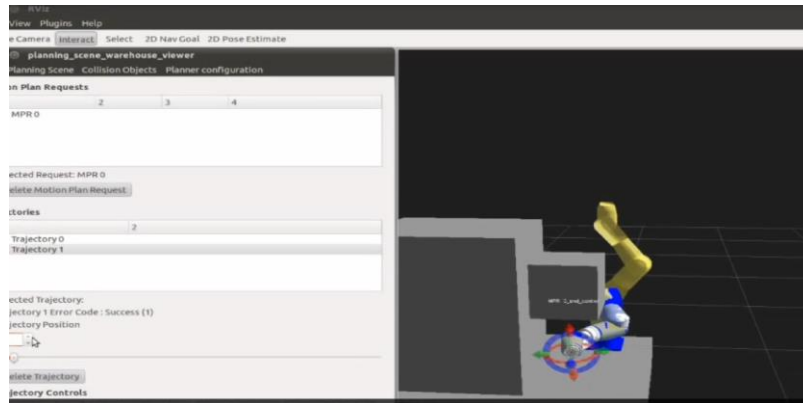
Dr. Marcel Ritter
Univ.-Prof. Dr. Matthias Harders
Sommersemester 2022



Einführungsfilme



Einführungsfilme



Inhalt

- Koordinatensysteme
- Parametrische Abbildungen
- Weitere Funktionen
- Weitere Differentialrechnung
- Weitere Integralrechnung

Inhalt

- **Koordinatensysteme**
- Parametrische Abbildungen
- Weitere Funktionen
- Weitere Differentialrechnung
- Weitere Integralrechnung



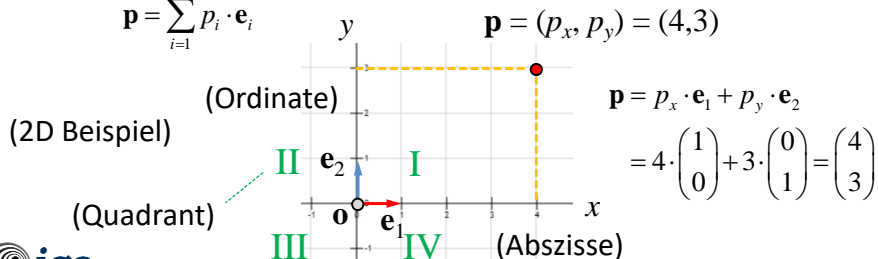
Kartesische Koordinatensysteme

- Geradliniges, orthogonales Koordinatensystem in n Dimensionen (Fokus auf $n = 2,3,4$), mit n ortho-normalen Basisvektoren \mathbf{e}_i , sowie Ursprung \mathbf{o}

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0, \quad \|\mathbf{e}_i\| = \|\mathbf{e}_j\| = 1 \quad i \neq j$$

- Punkte als Linearkombination von Basisvektoren

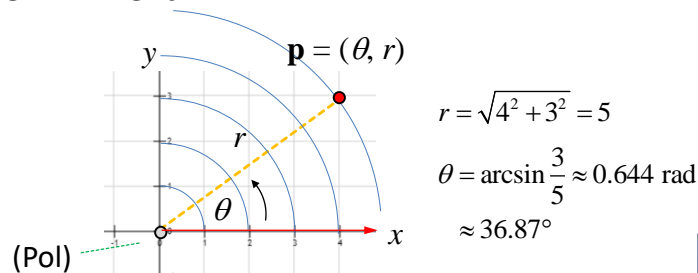
$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N p_i \cdot \mathbf{e}_i$$



Polarkoordinaten

- Darstellung (krümmelinig) von Punkten in n Dimensionen über $n - 1$ Rotationswinkel θ_i sowie Abstand r (hinsichtlich Referenzachsen und Pol)
- Beschreibung einer Richtung, z.B. in Ebene in 2D nur über einen Winkel θ

(2D Beispiel)



Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

5

Umrechnung in 2D

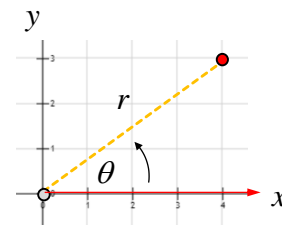
- Annahme: Ursprung/Pol sowie Achsen identisch
- Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten (2D)

$$x = r \cdot \cos \theta, \quad y = r \cdot \sin \theta$$

- Kartesische Koordinaten zu Polarkoordinaten (2D)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad x > 0$$

- Für $r = 0$ Winkel nicht bestimmt
- Winkel $\theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ beschreiben den gleichen Punkt
- Erweiterung auf alle Quadranten mittels Funktion: $\text{atan2}(x, y)$

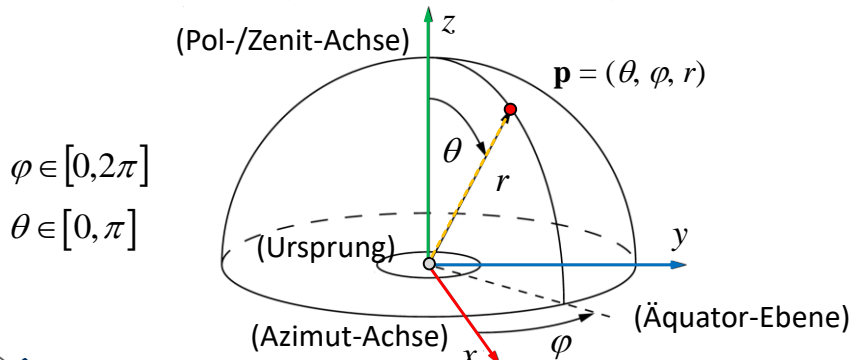


Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

6

Kugelkoordinaten

- Position in 3D über Distanz r vom Ursprung, sowie (Azimut)-Winkel φ und (Zenit)-Winkel θ
- Position auf Kugel über zwei Richtungen

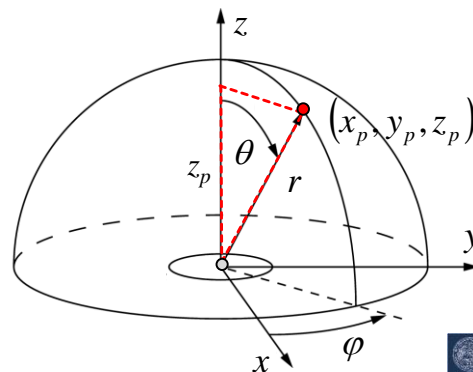
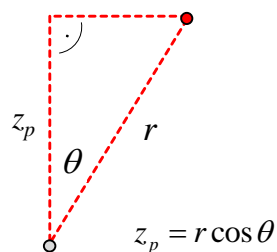


Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

7

Umrechnung in 3D

- Annahme: Ursprung/Pol, Achsen identisch
- Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten (3D)
- Gegeben: θ, φ, r

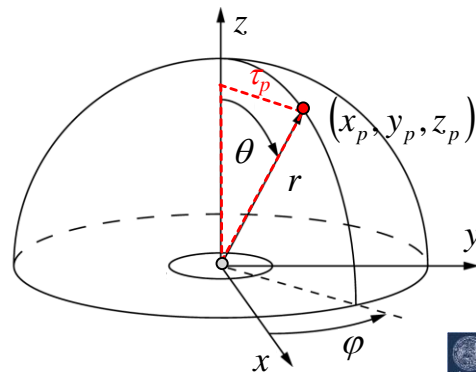
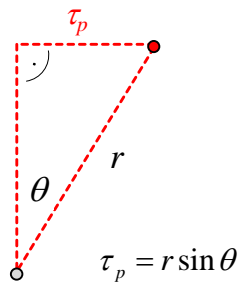


Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

8

Umrechnung in 3D

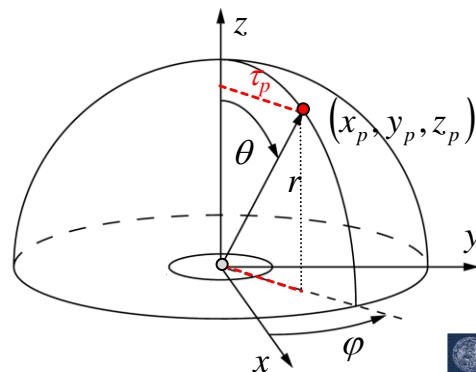
- Annahme: Ursprung/Pol, Achsen identisch
- Polarkoordinaten zu kartesische Koordinaten (3D)
- Gegeben: θ , φ , r



Umrechnung in 3D

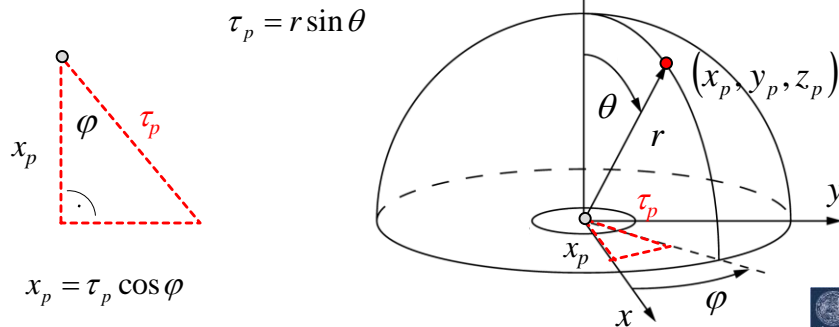
- Annahme: Ursprung/Pol, Achsen identisch
- Polarkoordinaten zu kartesische Koordinaten (3D)
- Gegeben: θ , φ , r

$$\tau_p = r \sin \theta$$



Umrechnung in 3D

- Annahme: Ursprung/Pol, Achsen identisch
- Polarkoordinaten zu kartesische Koordinaten (3D)
- Gegeben: θ , φ , r

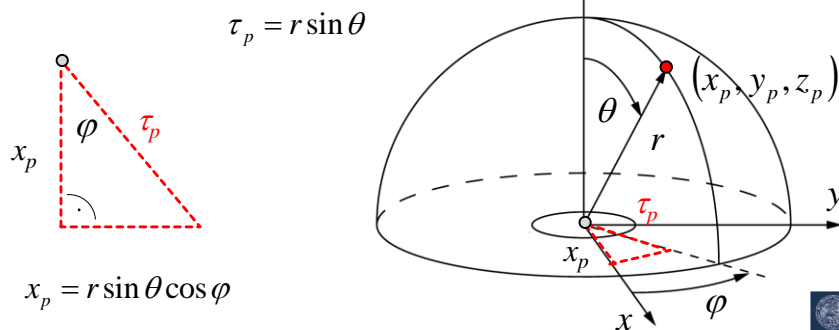


Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

8

Umrechnung in 3D

- Annahme: Ursprung/Pol, Achsen identisch
- Polarkoordinaten zu kartesische Koordinaten (3D)
- Gegeben: θ , φ , r

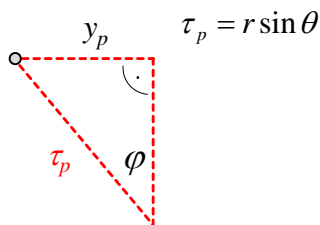


Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

8

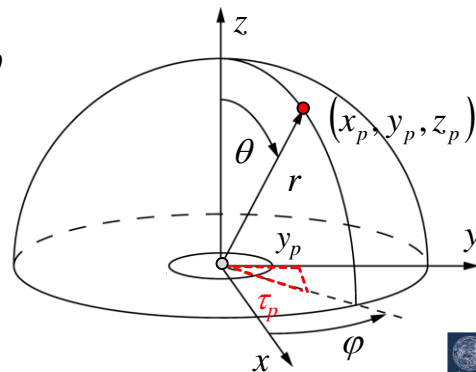
Umrechnung in 3D

- Annahme: Ursprung/Pol, Achsen identisch
- Polarkoordinaten zu kartesische Koordinaten (3D)
- Gegeben: θ , φ , r



$$\tau_p = r \sin \theta$$

$$y_p = r \sin \theta \sin \varphi$$



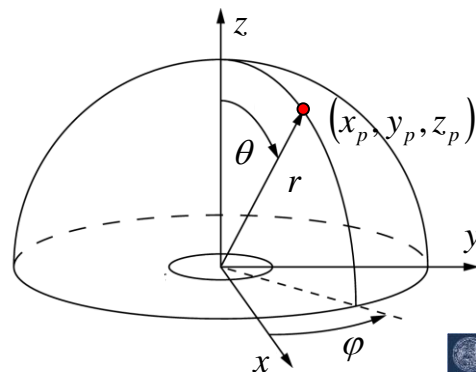
Umrechnung in 3D

- Annahme: Ursprung/Pol, Achsen identisch
- Polarkoordinaten zu kartesische Koordinaten (3D)
- Gegeben: θ , φ , r

$$x = r \cos \varphi \sin \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$



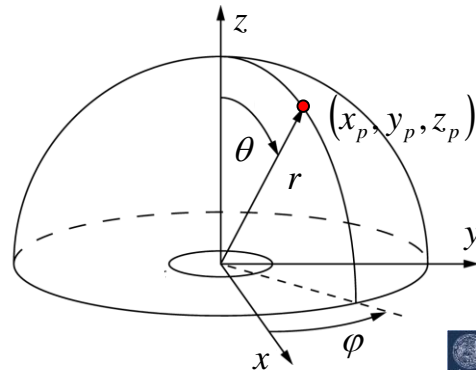
Umrechnung in 3D

- Annahme: Ursprung/Pol, Achsen identisch
- Kartesische Koordinaten zu Polarkoordinaten (3D)
- Gegeben: x, y, z

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos \frac{z}{r} \quad r > 0$$



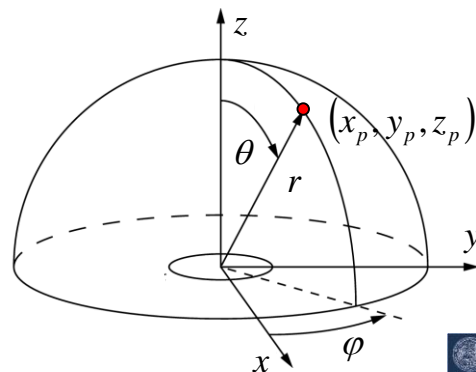
Umrechnung in 3D

- Annahme: Ursprung/Pol, Achsen identisch
- Kartesische Koordinaten zu Polarkoordinaten (3D)
- Gegeben: x, y, z

$$x = r \cos \varphi \sin \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin \varphi \sin \theta}{r \cos \varphi \sin \theta} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$



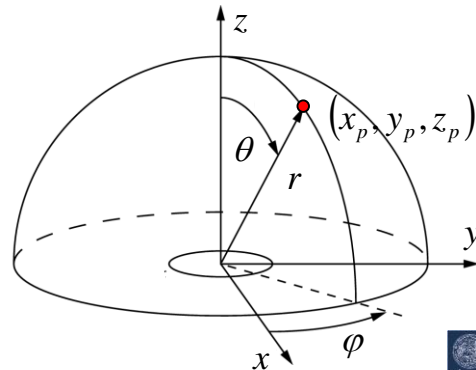
Umrechnung in 3D

- Annahme: Ursprung/Pol, Achsen identisch
- Kartesische Koordinaten zu Polarkoordinaten (3D)
- Gegeben: x, y, z

$$x = r \cos \varphi \sin \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin \varphi \sin \theta}{r \cos \varphi \sin \theta} = \tan \varphi$$



Umrechnung in 3D

- Annahme: Ursprung/Pol, Achsen identisch
- Kartesische Koordinaten zu Polarkoordinaten (3D)
- Gegeben: x, y, z

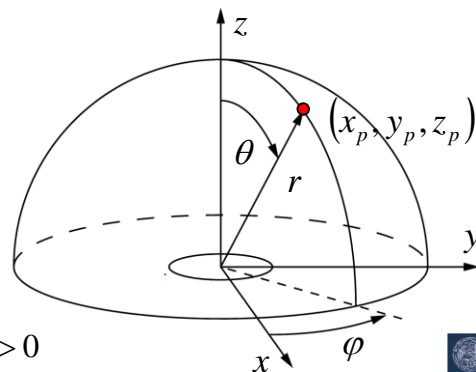
$$x = r \cos \varphi \sin \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin \varphi \sin \theta}{r \cos \varphi \sin \theta} = \tan \varphi$$

$$\Rightarrow \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$x > 0$$



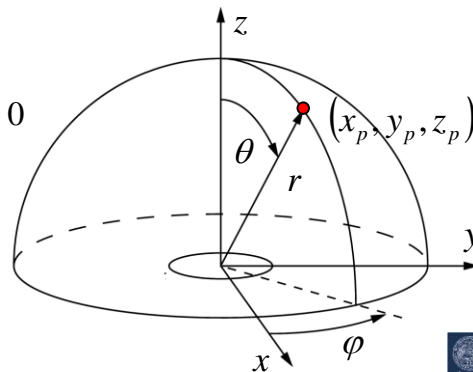
Umrechnung in 3D

- Annahme: Ursprung/Pol, Achsen identisch
- Kartesische Koordinaten zu Polarkoordinaten (3D)
- Gegeben: x, y, z

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad r, x > 0$$

$$\varphi = \arctan(y/x)$$

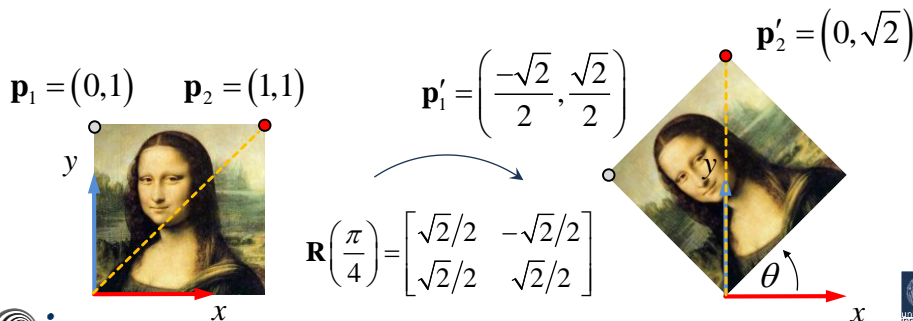
$$\theta = \arccos(z/r)$$



2D Rotationsmatrix

- Rotation um den Ursprung mit Winkel θ (gegen den Uhrzeigersinn), Abbildung $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\theta) \mathbf{p}$$



2D Rotationsmatrix – Herleitung

- Eine Variante der Herleitung:

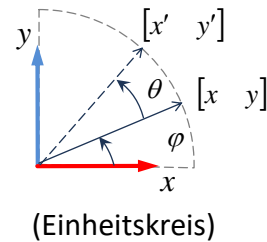
$$\begin{array}{lcl} x = \cos \varphi & & x' = \cos(\varphi + \theta) \\ y = \sin \varphi & \wedge & y' = \sin(\varphi + \theta) \end{array}$$

$$x' = \cos(\varphi + \theta) = \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta$$

$$y' = \sin(\varphi + \theta) = \sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Inhalt

- Koordinatensysteme
- **Parametrische Abbildungen**
- Weitere Funktionen
- Weitere Differentialrechnung
- Weitere Integralrechnung

Parametrische Abbildungen

- Abbildungen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ können in Parameterdarstellung (als Parametrisierung) angegeben werden, mit Parametern t_i

$$f(t_1, \dots, t_n) = (x_1(t_1, \dots, t_n), \dots, x_m(t_1, \dots, t_n))^T$$

- Von besonderem Interesse sind Kurven in 2D und 3D

$$f(t) = (x(t), y(t))^T \quad f(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$$

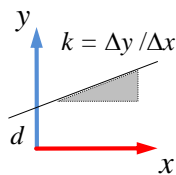
sowie Oberflächen in 3D

$$f(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))^T$$



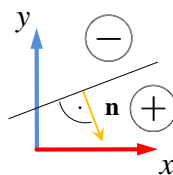
Parametrisierung – Beispiele

- Darstellung von Linien in 2D



$$y = kx + d$$

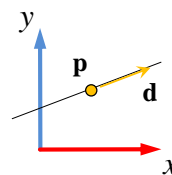
(Lineare Funktion)



$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + c = 0$$

(Implizite Form)



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

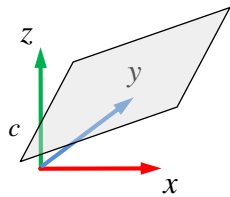
$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$$

(Parameterform)



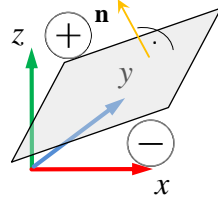
Parametrisierung – Beispiele

■ Darstellung von Ebenen in 3D



$$z = ax + by + c$$

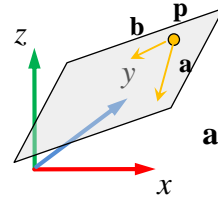
(Lineare Funktion)



$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + c = 0$$

(Implizite Form)



$$\mathbf{a} \neq \lambda \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

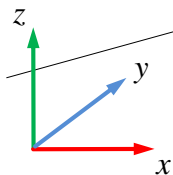
$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

(Parameterform)



Parametrisierung – Beispiele

■ Darstellung von Linien in 3D

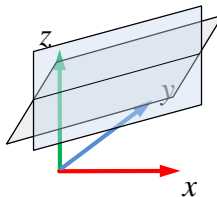


$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$$

$$\frac{x - p_x}{d_x} = \frac{y - p_y}{d_y} = \frac{z - p_z}{d_z}\}$$

$$d_x, d_y, d_z \neq 0$$

(Symm. Gleichung)



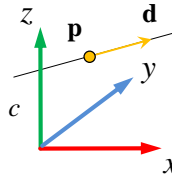
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x} + c_1 = 0 \wedge$$

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x} + c_2 = 0\}$$

$$\mathbf{n}_1 \neq \lambda \cdot \mathbf{n}_2$$

(Schnitt zweier Ebenen)



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$$

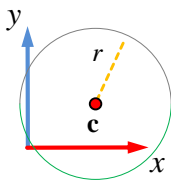
$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$$

(Parameterform)



Parametrisierung – Beispiele

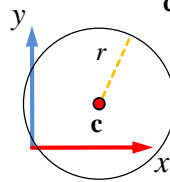
■ Darstellung von Kreisen in 2D



$$y = c_y + \sqrt{r^2 - (x - c_x)^2}$$

$$y = c_y - \sqrt{r^2 - (x - c_x)^2}$$

(Funktionsgleichungen)

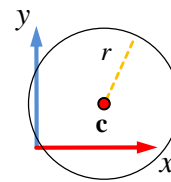


$$(x - c_x)^2 +$$

$$(y - c_y)^2 - r^2 = 0$$

(Implizite Form)

$$\mathbf{c} = (c_x, c_y)^T$$



$$x = c_x + r \cdot \cos t$$

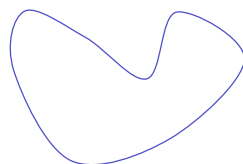
$$y = c_y + r \cdot \sin t$$

(Parameterform)

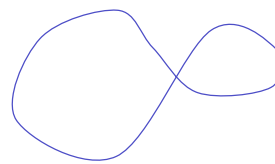


Parameterdarstellung von Kurven

- Eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird Parameterdarstellung einer stetigen Kurve in \mathbb{R}^n genannt
- Diese hat den Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$; sie ist geschlossen wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$
- Eine (offene/geschlossene) Kurve ist eine Jordankurve, wenn $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ für $a < t < t' < b$ (keine Schnittpunkte)



(Jordankurve)



(keine Jordankurve)



Parameterdarstellung von Kurven

- Für eine Kurve können unterschiedliche Parameterdarstellungen existieren; die Durchlaufgeschwindigkeiten können sich unterscheiden

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$\gamma_1(t) = \left(t^3, \frac{1}{4}(t^3 - 1)^2 + 1 \right)$$

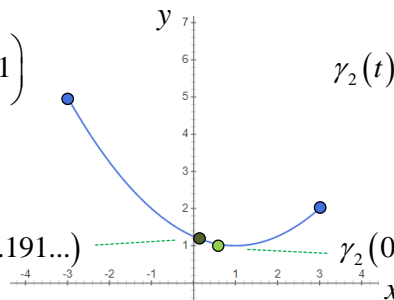
$$t \in [\sqrt[3]{-3}, \sqrt[3]{3}]$$

$$\gamma_2(t) = \left(t, \frac{1}{4}(t-1)^2 + 1 \right)$$

$$t \in [-3, 3]$$

$$\gamma_1(0.5) = (0.125, 1.191\dots)$$

$$\gamma_2(0.5) = (0.5, 1.0625)$$



Tangentialvektor

- Eine stetige Kurve mit differenzierbarer Parameterdarstellung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird glatt genannt, wenn alle Teilfunktionen $\gamma_i(\cdot)$ in $[a, b]$ differenzierbar sind und

$$\dot{\gamma}(\tau) = (\gamma'_1(\tau), \dots, \gamma'_n(\tau)) \neq (0, \dots, 0) \quad \forall \tau \in [a, b]$$

- Für eine geschlossene Kurve gelte zusätzlich $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$
- Der Tangentialvektor an Stelle $\gamma(\tau)$ ist gegeben durch

$$\mathbf{t}(\tau) = \dot{\gamma}(\tau) / \|\dot{\gamma}(\tau)\| \quad \text{mit} \quad \|\dot{\gamma}(\tau)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\gamma'_i(\tau))^2}$$

- Der Tangentialvektor hat (euklidische) Länge von 1

$$\|\mathbf{t}(\tau)\| = 1$$



Tangentialvektor – Beispiel

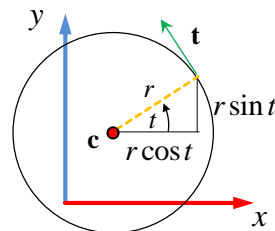
- Kreis in 2D um Punkt $\mathbf{c} = (c_x, c_y)^T$ mit Radius r

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} c_x + r \cdot \cos t \\ c_y + r \cdot \sin t \end{pmatrix} \quad (\text{Parameterform})$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \end{pmatrix} \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r$$

$$\Rightarrow \mathbf{t}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{t}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$



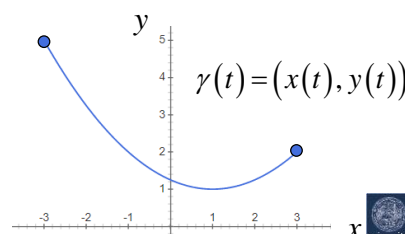
Bogenlänge einer Kurve

- Die Länge einer stetigen Kurve in \mathbb{R}^n mit differenzierbarer Parameterdarstellung γ im Intervall $[a, b]$ ist gegeben als:

$$L = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n (\gamma'_i(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

- Insbesondere für den Spezialfall $\gamma(t) = (t, f(t))$ in \mathbb{R}^2

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$



Bogenlänge einer Kurve – Herleitung

- Betrachtung in 2D – Annäherung durch Polygonzug

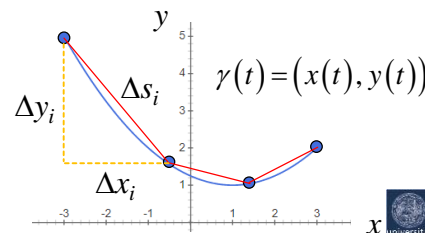
$$L \approx \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\tilde{t}_i) \Delta t)^2 + (y'(\hat{t}_i) \Delta t)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(\tilde{t}_i)^2 + y'(\hat{t}_i)^2} \Delta t \quad \tilde{t}_i, \hat{t}_i \in [t_i, t_i + \Delta t]$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(\tilde{t}_i)^2 + y'(\hat{t}_i)^2} \Delta t$$

$$= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$



Bogenlänge einer Kurve – Beispiele

- Bestimmung des Kreisumfangs über Parameterdarstellung, für $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} c_x + r \cdot \cos t & c_y + r \cdot \sin t \end{pmatrix}^T$$

$$L = \int_0^{2\pi} \left(r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t \right)^{\frac{1}{2}} dt = r \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi r$$

- Bestimmung des Viertelkreisbogens mittels Funktion

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad 0 \leq x \leq r \quad (\text{uneigentliches Integral})$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \lim_{c \nearrow r} \int_0^c \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx$$



Bogenlänge einer Kurve – Beispiele

- Bestimmung des Kreisumfangs über Parameterdarstellung, für $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} c_x + r \cdot \cos t & c_y + r \cdot \sin t \end{pmatrix}^T$$

$$L = \int_0^{2\pi} \left(r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t \right)^{\frac{1}{2}} dt = r \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi r$$

- Bestimmung des Viertelkreisbogens mittels Funktion

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad 0 \leq x \leq r \quad (\text{uneigentliches Integral})$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx =$$



Bogenlänge einer Kurve – Beispiele

- Bestimmung des Kreisumfangs über Parameterdarstellung, für $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} c_x + r \cdot \cos t & c_y + r \cdot \sin t \end{pmatrix}^T$$

$$L = \int_0^{2\pi} \left(r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t \right)^{\frac{1}{2}} dt = r \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi r$$

- Bestimmung des Viertelkreisbogens mittels Funktion

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad 0 \leq x \leq r \quad (\text{uneigentliches Integral})$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

$$= r \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \Big|_0^r = r \arcsin(1) - r \arcsin(0) =$$



Bogenlänge einer Kurve – Beispiele

- Bestimmung des Kreisumfangs über Parameterdarstellung, für $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} c_x + r \cdot \cos t & c_y + r \cdot \sin t \end{pmatrix}^T$$

$$L = \int_0^{2\pi} \left(r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t \right)^{\frac{1}{2}} dt = r \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi r$$

- Bestimmung des Viertelkreisbogens mittels Funktion

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad 0 \leq x \leq r \quad (\text{uneigentliches Integral})$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

$$= r \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \Big|_0^r = r \arcsin(1) - r \arcsin(0) = r \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi r}{2}$$



Inhalt

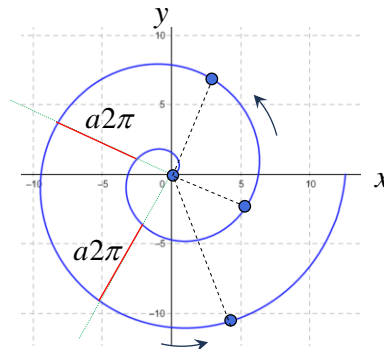
- Koordinatensysteme
- Parametrische Abbildungen
- Weitere Funktionen**
- Weitere Differentialrechnung
- Weitere Integralrechnung



Archimedische Spirale

- Pfad des Endpunkts eines konstant wachsenden Strahls, rotierend mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

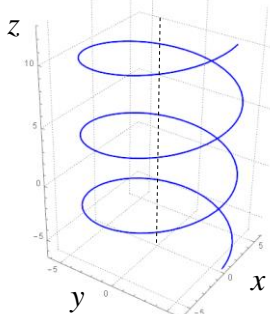
$$\gamma(\theta) = (a \cdot \theta \cdot \cos \theta \quad a \cdot \theta \cdot \sin \theta)^T \quad \theta > 0, a \in \mathbb{R}^+$$



Schraubenlinie

- Pfad des Endpunkts eines Strahls konstanter Länge, rotierend mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, und stetig wachsender Höhe

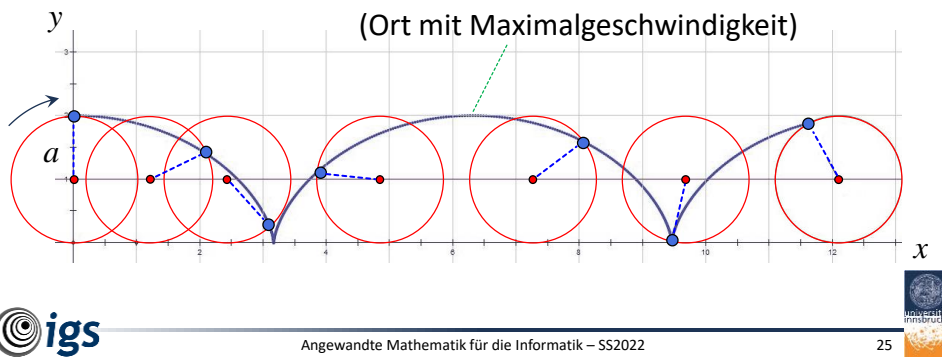
$$\gamma(\theta) = (a \cdot \cos \theta \quad a \cdot \sin \theta \quad b \cdot \theta)^T \quad \theta \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}^+$$



Zykloide

- Pfad eines Punktes am Rand eines Rades, welches gleichmäßig auf einer Ebene abrollt (Rollkurve)

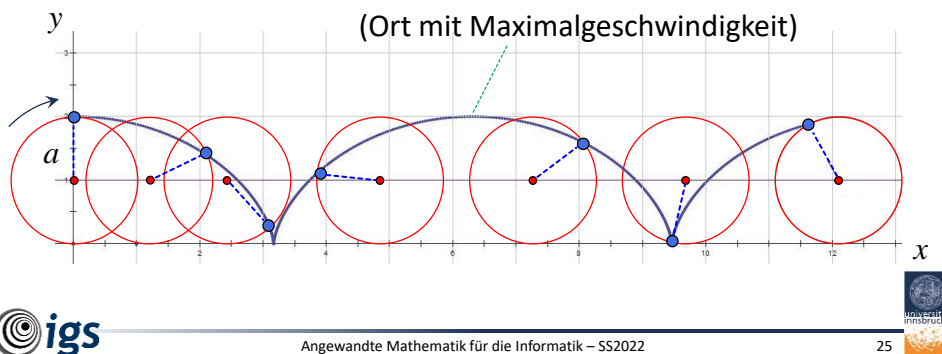
$$\gamma(\theta) = (a(\theta + \sin \theta) \quad a(1 + \cos \theta))^T \quad \theta > 0, a \in \mathbb{R}^+$$



Zykloide

- Pfad eines Punktes am Rand eines Rades, welches gleichmäßig auf einer Ebene abrollt (Rollkurve)

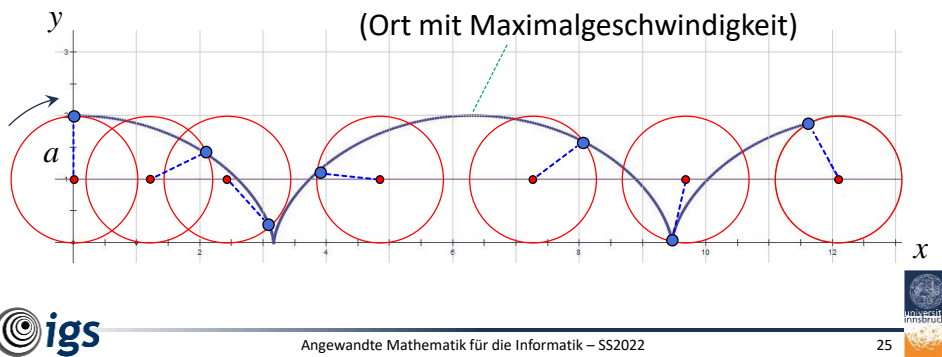
$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} a(\theta + \sin \theta) \\ a(1 + \cos \theta) \end{pmatrix} \quad \theta > 0, a \in \mathbb{R}^+$$



Zykloide

- Pfad eines Punktes am Rand eines Rades, welches gleichmäßig auf einer Ebene abrollt (Rollkurve)

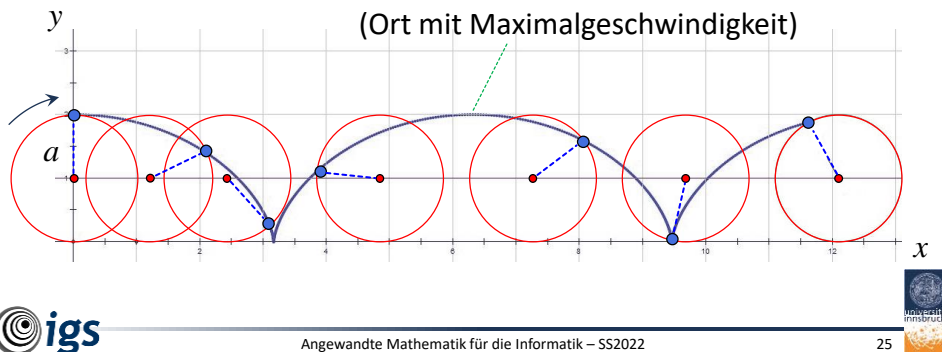
$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} a(\theta + \sin \theta) \\ a(1 + \cos \theta) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \theta > 0, a \in \mathbb{R}^+$$



Zykloide

- Pfad eines Punktes am Rand eines Rades, welches gleichmäßig auf einer Ebene abrollt (Rollkurve)

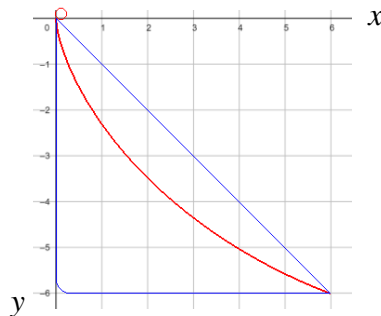
$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} a(\theta + \sin \theta) \\ a(1 + \cos \theta) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \theta > 0, a \in \mathbb{R}^+$$



Brachistochrone

- Pfad auf dem ein Massepunkt in kürzester Zeit vom Start- zum tieferen Endpunkt gelangt (nur Gravitation)

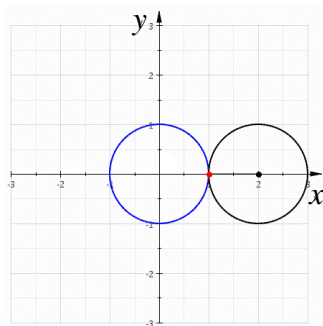
$$\gamma(\theta) = (a(\theta - \sin \theta) \quad a(-1 + \cos \theta))^T \quad \theta > 0, a \in \mathbb{R}^+$$



Kardioide

- Pfad eines Punktes am Rand eines Rades, welches gleichmäßig auf einem 2. Rad gleichen Radius rollt

$$\gamma(\theta) = (2a(1 - \cos \theta) \cos \theta \quad 2a(1 - \cos \theta) \sin \theta)^T \quad 0 \leq \theta < 2\pi, a \in \mathbb{R}^+$$

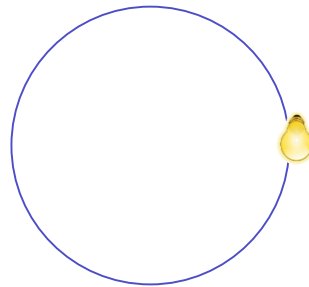
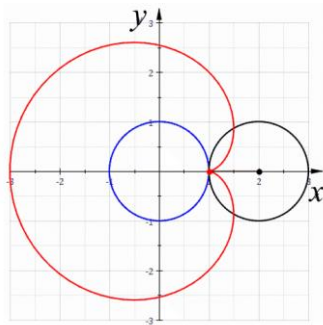


Kardioide

- Pfad eines Punktes am Rand eines Rades, welches gleichmäßig auf einem 2. Rad gleichen Radius rollt

$$\gamma(\theta) = (2a(1 - \cos \theta) \cos \theta \quad 2a(1 - \cos \theta) \sin \theta)^T$$

$$0 \leq \theta < 2\pi, a \in \mathbb{R}^+$$

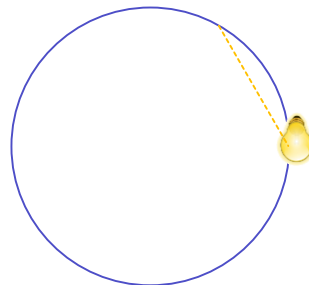
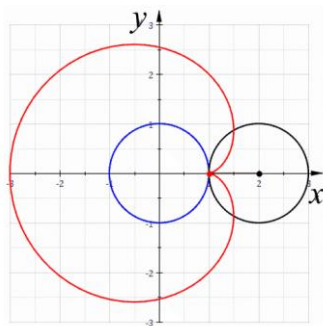


Kardioide

- Pfad eines Punktes am Rand eines Rades, welches gleichmäßig auf einem 2. Rad gleichen Radius rollt

$$\gamma(\theta) = (2a(1 - \cos \theta) \cos \theta \quad 2a(1 - \cos \theta) \sin \theta)^T$$

$$0 \leq \theta < 2\pi, a \in \mathbb{R}^+$$

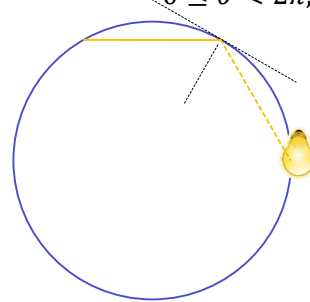
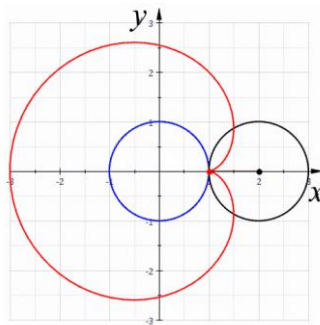


Kardioide

- Pfad eines Punktes am Rand eines Rades, welches gleichmäßig auf einem 2. Rad gleichen Radius rollt

$$\gamma(\theta) = (2a(1 - \cos \theta) \cos \theta \quad 2a(1 - \cos \theta) \sin \theta)^T$$

$$0 \leq \theta < 2\pi, a \in \mathbb{R}^+$$

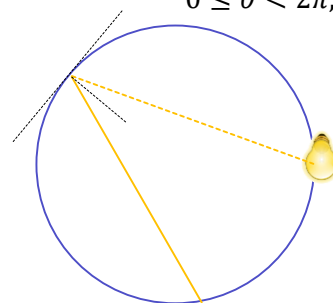
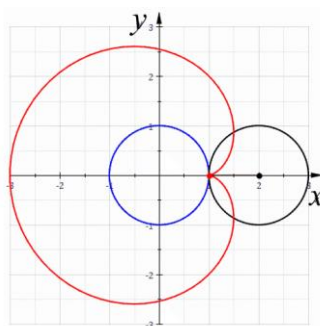


Kardioide

- Pfad eines Punktes am Rand eines Rades, welches gleichmäßig auf einem 2. Rad gleichen Radius rollt

$$\gamma(\theta) = (2a(1 - \cos \theta) \cos \theta \quad 2a(1 - \cos \theta) \sin \theta)^T$$

$$0 \leq \theta < 2\pi, a \in \mathbb{R}^+$$

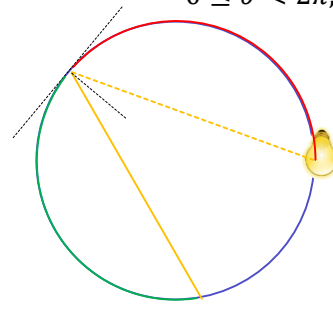
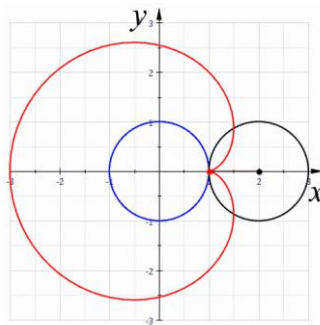


Kardioide

- Pfad eines Punktes am Rand eines Rades, welches gleichmäßig auf einem 2. Rad gleichen Radius rollt

$$\gamma(\theta) = (2a(1 - \cos \theta) \cos \theta \quad 2a(1 - \cos \theta) \sin \theta)^T$$

$$0 \leq \theta < 2\pi, a \in \mathbb{R}^+$$

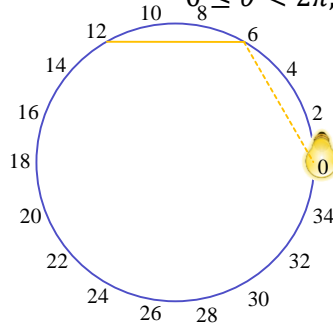
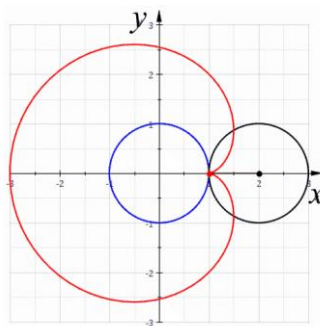


Kardioide

- Pfad eines Punktes am Rand eines Rades, welches gleichmäßig auf einem 2. Rad gleichen Radius rollt

$$\gamma(\theta) = (2a(1 - \cos \theta) \cos \theta \quad 2a(1 - \cos \theta) \sin \theta)^T$$

$$0 \leq \theta < 2\pi, a \in \mathbb{R}^+$$

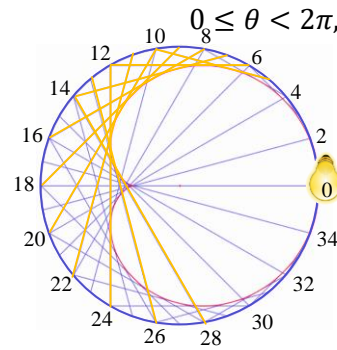
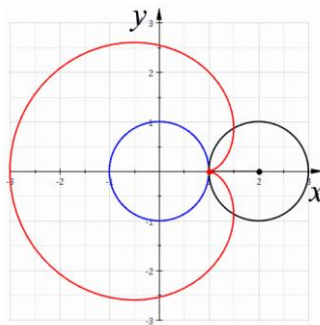


Kardioide

- Pfad eines Punktes am Rand eines Rades, welches gleichmäßig auf einem 2. Rad gleichen Radius rollt

$$\gamma(\theta) = (2a(1 - \cos \theta) \cos \theta \quad 2a(1 - \cos \theta) \sin \theta)^T$$

$0 \leq \theta < 2\pi, a \in \mathbb{R}^+$

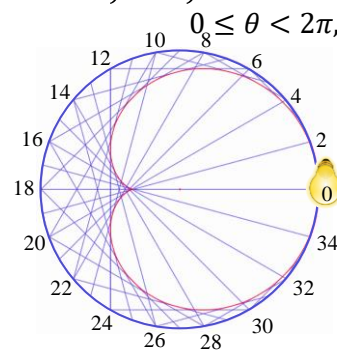
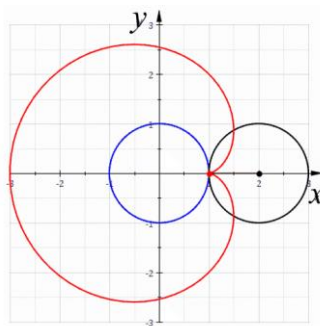


Kardioide

- Pfad eines Punktes am Rand eines Rades, welches gleichmäßig auf einem 2. Rad gleichen Radius rollt

$$\gamma(\theta) = (2a(1 - \cos \theta) \cos \theta \quad 2a(1 - \cos \theta) \sin \theta)^T$$

$0 \leq \theta < 2\pi, a \in \mathbb{R}^+$

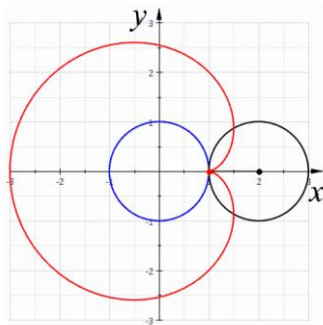


Kardioide

- Pfad eines Punktes am Rand eines Rades, welches gleichmäßig auf einem 2. Rad gleichen Radius rollt

$$\gamma(\theta) = (2a(1 - \cos \theta) \cos \theta \quad 2a(1 - \cos \theta) \sin \theta)^T$$

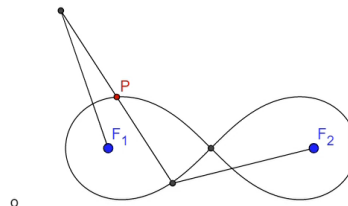
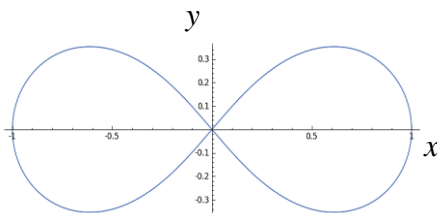
$$0 \leq \theta < 2\pi, a \in \mathbb{R}^+$$



Lemniskate

- Schleifenförmige Kurve in der Ebene, in der Form einer liegenden Acht (bzw. Unendlichzeichen ∞)

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0, \quad a \in \mathbb{R}^+$$



Inhalt

- Koordinatensysteme
- Parametrische Abbildungen
- Weitere Funktionen
- **Weitere Differentialrechnung**
- Weitere Integralrechnung

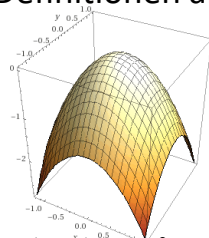


Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

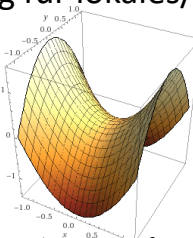


Extrema Multivariater Funktionen

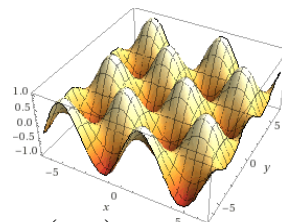
- Gegeben: skalare multivariate Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$
- Funktion f hat in \mathbf{x}_0 ein lokales Maximum genau dann wenn $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ für alle \mathbf{x} in einer Umgebung von \mathbf{x}_0
- Wenn $\forall \mathbf{x} \in D: f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$, ist \mathbf{x}_0 ein globales Maximum
- Definitionen analog für lokales/globales Minimum



$$f(x, y) = -x^2 - y^2$$



$$f(x, y) = x^2 - y^2$$



$$f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$$



Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

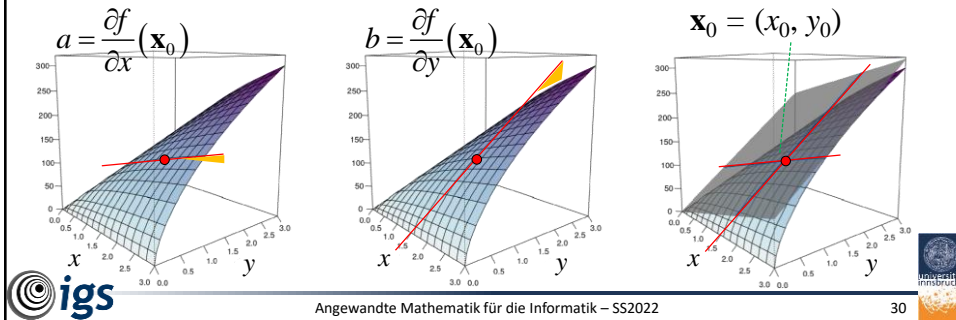
29



Tangentialebene

- Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei in einem Punkt $\mathbf{x}_0 \in D$ stetig und partiell differenzierbar, dann ist die Tangentialebene bei \mathbf{x}_0 gegeben als

$$z = g(x, y) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)(y - y_0) = ax + by + c$$



30

Tangentialhyperebenen

- Für eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ erhalten wir allgemeiner eine Tangentialhyperebene bei \mathbf{x}_0 als

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\Delta x_n$$

mit $\Delta x_i = x_i - x_{0,i}$ und $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$

- Funktion g ist die Linearisierung von f in \mathbf{x}_0
- Man bezeichnet einen Term df als totales Differential (im Gegensatz zu den partiellen Ableitungen)

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

31

Innere und Stationäre Punkte

- Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein innerer Punkt, wenn dieser nicht auf dem Rand ∂D liegt
- Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar in \mathbf{x}_0 und habe dort ein Extremum, dann gilt

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$$
- Ein solcher Punkt wird stationärer Punkt von f genannt
- Anschaulich: in stationären Punkten ist die Tangentialebene waagerecht (insbesondere $D \subseteq \mathbb{R}^2$)
- Bedingung ist wiederum notwendig, aber noch nicht hinreichend (Definitheit der Hesse-Matrix prüfen)



Hesse-Matrix

- Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei zweimal stetig differenzierbar; in der (symmetrischen) $n \times n$ Hesse-Matrix werden alle zweiten partiellen Ableitungen gesammelt

$$\mathbf{H}_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix}$$



Definitheit von Matrizen

- Eine symmetrische, reelle $n \times n$ Matrix \mathbf{A} ist:
 - Positiv definit, wenn $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$
 - Positiv semidefinit, wenn $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$
 - Negativ definit, wenn $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$
 - Negativ semidefinit, wenn $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Positiv definit, wenn } \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \\ \text{Positiv semidefinit, wenn } \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \\ \text{Negativ definit, wenn } \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0 \\ \text{Negativ semidefinit, wenn } \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0 \end{array} \right\} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

- Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit, da}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2a^2 - 2ab + 2b^2 = \frac{(2a-b)^2 + 3b^2}{2} > 0$$



Definitheit über Eigenwerte

- Über die Eigenwerte einer Matrix kann Definitheit entschieden werden.
- Die Eigenwerte λ einer Matrix \mathbf{A} werden über das charakteristische Polynom berechnet:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

- Mit den Eigenwerten λ_i und \mathbf{I} der Einheitsmatrix
- Die Matrix ist

- Positiv definit: $\lambda_i > 0$
- Positiv semidefinit: $\lambda_i \geq 0$
- Negativ definit: $\lambda_i < 0$
- Negativ semidefinit: $\lambda_i \leq 0$
- Ansonsten indefinit



Definitheit über Eigenwerte

▪ Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ -4 & \lambda - 10 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 10) - (-4)(-4) = 0$$

$$\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0$$

$$A \text{ symmetrisch \& } \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 6 - \sqrt{32} \\ \lambda_2 = 6 + \sqrt{32} \end{array} \right\} > 0 \rightarrow \text{positiv definit}$$



Art eines Extremums

- Die Krümmung einer multivariaten Funktion kann über die Hesse-Matrix untersucht werden
- Sei \mathbf{x}_0 ein Extremum einer multivariaten Funktion f
Ist die Hesse-Matrix an dieser Stelle ausgewertet:
 - Positiv definit, dann findet sich an \mathbf{x}_0 ein lokales Minimum
 - Negativ definit, dann findet sich an \mathbf{x}_0 ein lokales Maximum
 - Indefinit, dann handelt es sich bei \mathbf{x}_0 um einen Sattelpunkt
- Ist diese semidefinit, dann ist so keine Aussage möglich
- Die Definitheit kann z.B. über Vorzeichen der Eigenwerte oder die Hauptminoren untersucht werden



Rechenbeispiele

- Art der lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

- Suche nach stationären Punkten

$$\nabla f = (2(x-2) \quad 2(y-1) \quad 2(z+1))^T = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x, y, z) = (2, 1, -1)$$

- Hesse-Matrix ist für die gewählte Funktion konstant (allgemein würde am Punkt $(2, 1, -1)$ ausgewertet werden)

$$\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrix ist positiv definit, somit liegt ein lokales Minimum vor (in diesem Falle sogar ein globales Minimum)



Rechenbeispiele

- Art der lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x + xy^2$$

- Suche nach stationären Punkten

$$\nabla f = (x^2 - 1 + y^2 \quad 2xy)^T = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x, y) = (0, \pm 1) \vee (\pm 1, 0)$$

- Hesse-Matrix an Punkten $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$ auswerten

$$\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_f(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Positiv definit \Rightarrow

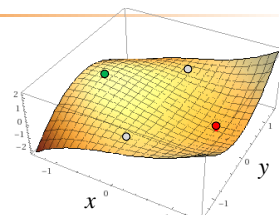
lokales Minimum •

Negativ definit \Rightarrow

lokales Maximum •

Indefinit \Rightarrow

Sattelpunkte ◦



Jacobi-Matrix

- Eine vektorwertige Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, sei stetig differenzierbar; in der $m \times n$ Jacobi-Matrix werden alle ersten partiellen Ableitungen gesammelt

$$\mathbf{J}_f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

(für $m = 1$ ist dies der transponierte Gradient)



Multivariates Newton-Verfahren

- Verfahren bei differenzierbaren Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x_{n+1} = x_n - (1/f'(x_n)) \cdot f(x_n)$$
- Verfahren für differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_n))^{-1} f(\mathbf{x}_n)$$
- Um die Invertierung der Matrix zu vermeiden, wird über die Lösung eines Gleichungssystems vorgegangen

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_n) \Delta \mathbf{x}_n = -f(\mathbf{x}_n)$$

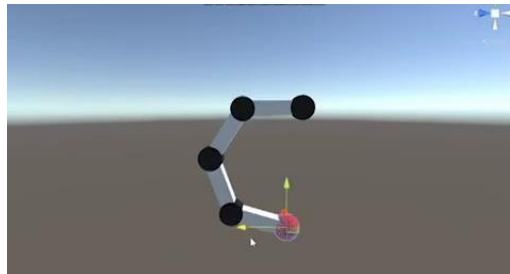
$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{x}_n$$

(das Gleichungssystem wird in jedem Schritt z.B. mit einem numerischen Verfahren gelöst)



Anwendungsbeispiel

- Bestimmung der Winkel von Armen eines Roboters oder virtuellen Avatars bei gegebener Position (sowie evtl. Rotation) des Endeffektors



Multivariate Kettenregel

- Für differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Für differenzierbare Funktionen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$,
 $t \rightarrow (x_1(t), \dots, x_n(t))^T = \mathbf{x}(t)$, sowie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(\mathbf{x})$

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx_1}{dt}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx_n}{dt}(t) = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

- In der Physik wird oft eine verkürzte Schreibweise verwendet, z.B. für die Fälle $n = 1, 2$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dt} \qquad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Rechenbeispiel

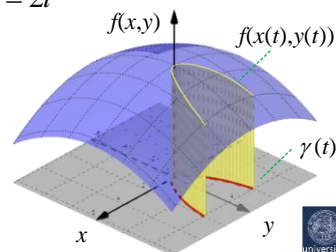
- Änderung einer Funktion $f(x(t), y(t))$ (z.B. Temperatur einer Platte) entlang einer Kurve $\gamma(t) = (t, t^2)$

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$f(x, y) = 6 - 0.05(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -0.1x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -0.1y \quad \frac{dx}{dt} = 1 \quad \frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = -0.1x - 0.1y \cdot 2t$$



Rechenbeispiel

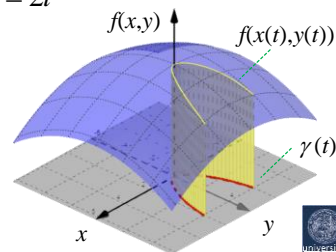
- Änderung einer Funktion $f(x(t), y(t))$ (z.B. Temperatur einer Platte) entlang einer Kurve $\gamma(t) = (t, t^2)$

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$f(x, y) = 6 - 0.05(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -0.1x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -0.1y \quad \frac{dx}{dt} = 1 \quad \frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = -0.1t - 0.1t^2 \cdot 2t$$



Rechenbeispiel

- Änderung einer Funktion $f(x(t), y(t))$ (z.B. Temperatur einer Platte) entlang einer Kurve $\gamma(t) = (t, t^2)$

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

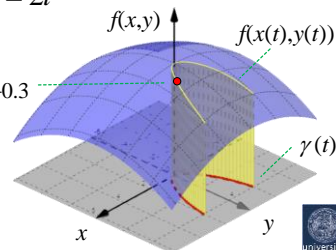
$$f(x, y) = 6 - 0.05(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -0.1x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -0.1y \quad \frac{dx}{dt} = 1 \quad \frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = -0.1t - 0.2t^3$$

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(1) = -0.3$$

$$\frac{d}{dt} \left(6 - 0.05 \left(t^2 + (t^2)^2 \right) \right) = -0.1t - 0.2t^3$$



Inhalt

- Koordinatensysteme
- Parametrische Abbildungen
- Weitere Funktionen
- Weitere Differentialrechnung
- Weitere Integralrechnung**



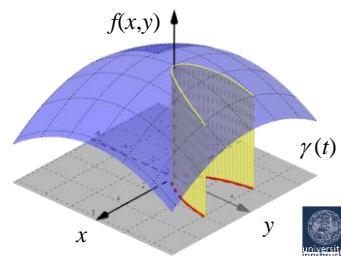
Kurvenintegral 1. Art

- Gegeben sei die Kurve $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^k$, sowie die skalare Funktion $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$
- Durch Unterteilung der Kurve in Teilstücke und Auswertung der Funktion innerhalb dieser erhalten wir wieder eine Riemannsumme

$$S = \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_i)) \Delta s_i$$

- Für die Längen der Teilstücke gilt

$$\Delta s_i = \|\gamma(t_i) - \gamma(t_i + \Delta t)\| = \|\gamma'(\tilde{t}_i)\| \Delta t$$

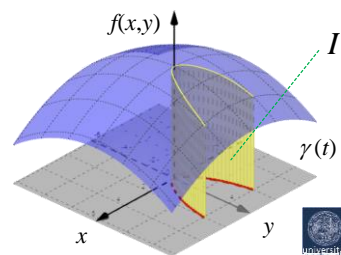


Kurvenintegral 1. Art

- Schließlich erhalten wir über Grenzwertbildung

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_i)) \|\gamma'(t_i)\| \Delta t = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_C f ds$$

- Für $k = 2$ ist dies anschaulich die (vorzeichenbehaftete) Fläche zwischen der Kurve in der xy -Ebene und dem Graphen der skalaren Funktion
- Für $f(\mathbf{x}) = 1$ ergibt das Integral die Länge der Kurve
- Bei einer geschlossenen Kurve schreibt man speziell: $\oint f ds$



Rechenbeispiel

- Kurvenintegral 1. Art im Intervall $[0, 3/4]$

$$\gamma(t) = \left(\cos t \quad \sin t \quad \frac{4}{3}t^{3/2} \right)^T \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4t}$$

$$\int_a^b \left((x(t))^2 + (y(t))^2 \right) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4t} dt$$

$$\int_a^b (\cos^2 t + \sin^2 t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4t} dt$$

$$\int_0^{3/4} \sqrt{1+4t} dt = \frac{1}{4} \frac{2}{3} (1+4t)^{3/2} \Big|_0^{3/4} = \frac{1}{6} (8-1) = \frac{7}{6}$$

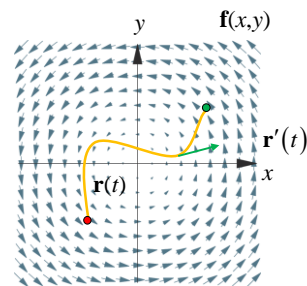
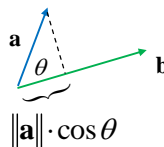


Kurvenintegral 2. Art

- Gegeben sei die Kurve $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$, sowie die vektorwertige Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ (d.h. ein Vektorfeld)
- Integration der Tangentialkomponenten der Vektoren des Vektorfeldes entlang der Kurve:

$$I = \int_C \mathbf{f} ds = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \theta$$

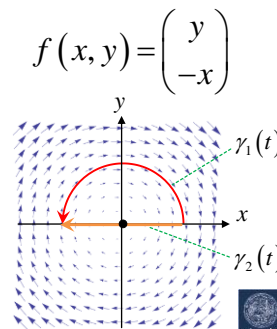


Rechenbeispiele

■ Kurvenintegrale 2. Art

$$\gamma_1(t) = (\cos t \quad \sin t)^T \quad \gamma_1'(t) = (-\sin t \quad \cos t)^T \quad t \in [0, \pi]$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi (y(t) \quad -x(t)) \cdot (-\sin t \quad \cos t) dt \\ &= \int_0^\pi (\sin t \quad -\cos t) \cdot (-\sin t \quad \cos t) dt \\ &= -\int_0^\pi \sin^2 t + \cos^2 t dt = -\int_0^\pi 1 dt = -\pi \end{aligned}$$

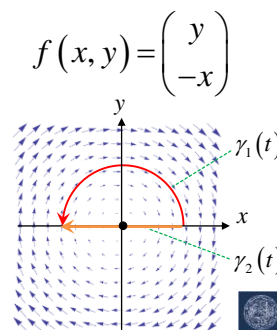


Rechenbeispiele

■ Kurvenintegrale 2. Art

$$\gamma_2(t) = (1-2t \quad 0)^T \quad \gamma_2'(t) = (-2 \quad 0)^T \quad t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (y(t) \quad -x(t)) \cdot (-2 \quad 0) dt \\ &= \int_0^1 (0 \quad 2t-1) \cdot (-2 \quad 0) dt \\ &= \int_0^1 0 dt = 0 \end{aligned}$$

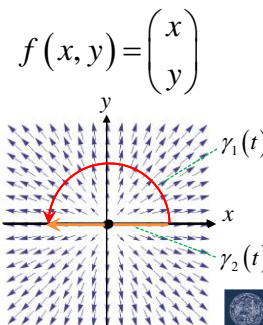


Rechenbeispiele

■ Kurvenintegrale 2. Art

$$\gamma_1(t) = (\cos t \quad \sin t)^T \quad \gamma_1'(t) = (-\sin t \quad \cos t)^T \quad t \in [0, \pi]$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi (x(t) \quad y(t)) \cdot (-\sin t \quad \cos t) dt \\ &= \int_0^\pi (\cos t \quad \sin t) \cdot (-\sin t \quad \cos t) dt \\ &= \int_0^\pi -\cos t \sin t + \sin t \cos t dt = \int_0^\pi 0 dt = 0 \end{aligned}$$

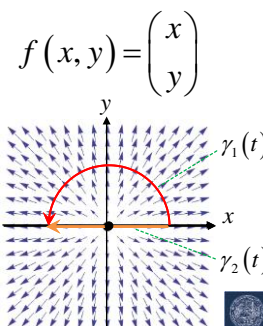


Rechenbeispiele

■ Kurvenintegrale 2. Art

$$\gamma_2(t) = (1-2t \quad 0)^T \quad \gamma_2'(t) = (-2 \quad 0)^T \quad t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x(t) \quad y(t)) \cdot (-2 \quad 0) dt \\ &= \int_0^1 (1-2t \quad 0) \cdot (-2 \quad 0) dt \\ &= \int_0^1 -2 + 4t dt = -2t + 2t^2 \Big|_0^1 = -2 + 2 = 0 \end{aligned}$$



Kurvenintegral 2. Art in Gradientenfeldern

- Es sei Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ das Gradientenfeld einer skalaren Funktion $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, somit also $\mathbf{f} = \nabla g$

- Gemäß der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{d}{dt} g(\mathbf{r}(t)) = \nabla g(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

- In diesem Falle gilt für das Kurvenintegral 2. Art:

$$I = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} g(\mathbf{r}(t)) dt = g(\mathbf{r}(b)) - g(\mathbf{r}(a))$$

Es ist somit unabhängig vom Weg

- Insbesondere gilt in diesem Falle auch $\oint \mathbf{f} d\mathbf{r} = 0$



Anwendungsbeispiel

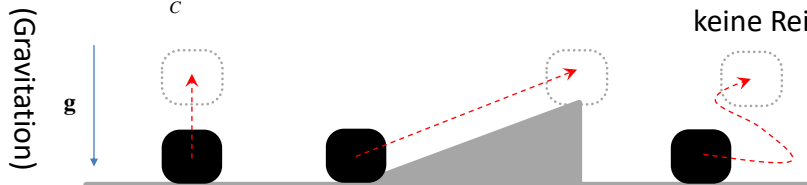
- Bei konstanter Kraft und linearer Verschiebung ist physikalische Arbeit gegeben als Skalarprodukt

$$W = \mathbf{f} \cdot \mathbf{r} \quad (\text{Arbeit} = \text{Kraft} \times \text{Weg})$$

- Ist der Weg nicht linear und/oder die Kraft nicht konstant entlang des Weges berechnet man

$$W = \int_C \mathbf{f} d\mathbf{r}$$

(idealisiert, z.B. keine Reibung)



Einige Hilfreiche Weblinks

- Freie Lehrmaterialien im gemeinnützigen LibreTexts Projekt, gestartet durch die UC Davies:

<https://math.libretexts.org/Bookshelves>

- Kostenpflichtiger Service mit Materialien und Beispielpunkten:

<https://brilliant.org/>



Vorlesungsplan

Datum	Thema	Proseminar
11.03.22	Einführung, Grundlagen, Funktionen	(Beginn zuvor am 8.3.)
18.03.22	Differentialrechnung	
25.03.22	Integralrechnung	
01.04.22	Differentialgleichungen	
08.04.22	Weitere Funktionen	
Osterferien		
29.04.22	Reihen und Folgen	
06.05.22	Numerische Auswertung von Funktionen	
13.05.22	Lösung von Gleichungssystemen	
20.05.22	Interpolation	
27.05.22	Zufallszahlen	
03.06.22	Komplexe Zahlen	
10.06.22	Klausurvorbereitung	
01.07.22	Klausur	

