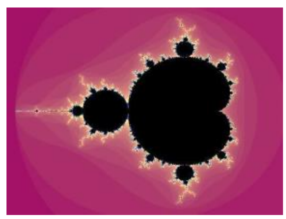
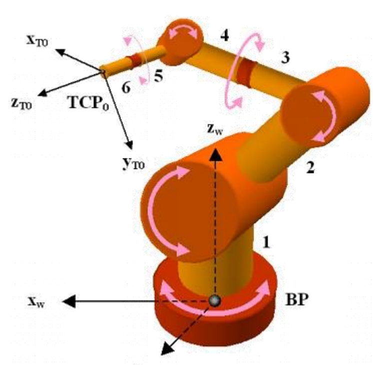
Angewandte Mathematik
Komplexe Zahlen

Dr. Marcel Ritter
Univ.-Prof. Dr. Matthias Harders
Sommersemester 2022



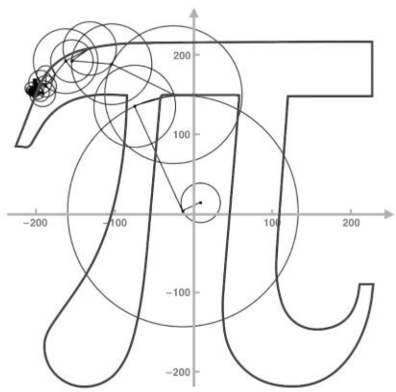
Motivation

- Quaternionen (Erweiterung der komplexen Zahlen) zur Darstellung von Rotationen (z.B. in der Robotik)



Motivation

- Verwendung der komplexer Zahlen in der Notation der Fourier-Transformation (z.B. Epizyklen-Zeichnung)



Inhalt

- **Komplexe Zahlen**
- Komplexe Nullstellen
- Eulersche Formel
- Fourier-Transformation
- Quaternionen

Komplexe Zahlen

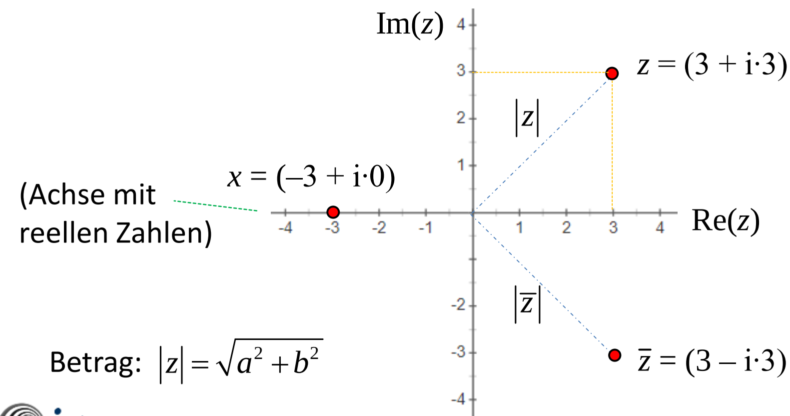
- Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist ein Körper (siehe auch VL Lineare Algebra)
  $$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$
- Auf dem Körper $(\mathbb{C},+,\cdot)$ der komplexen Zahlen sind Addition und Multiplikation definiert als
  $$(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d)=\left((a+c)+\mathrm{i}(b+d)\right)$$
  $$(a+\mathrm{i}b)\cdot(c+\mathrm{i}d)=\left((ac-bd)+\mathrm{i}(ad+bc)\right)$$
- Hierbei wird die imaginäre Zahl (Einheit) i verwendet, für welche gilt:
  $$\mathrm{i}^2=-1 \qquad \mathrm{i}=\sqrt{-1}$$

Komplexe Zahlen

- Eine Zahl $z = (a + \mathrm{i}b) \in \mathbb{C}$ kann auch als Tupel (a,b) geschrieben werden
- Man erhält den Realteil von z durch die Abbildung $\mathrm{Re}(z) = a$, sowie den Imaginärteil durch $\mathrm{Im}(z) = b$
- Somit kann eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ dargestellt werden als komplexe Zahle $(x, 0) = (x + \mathrm{i}\cdot 0)$ in $\mathbb{C}$
- Insbesondere ist somit $\mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$
- Für komplexe Zahlen $z = (a + \mathrm{i}b)$ existieren konjugiert komplexe Zahlen $\overline{z} = (a - \mathrm{i}b)$; mit diesen gilt:
  $$z = z_1/z_2 = (z_1/z_2)\cdot(\overline{z}_2/\overline{z}_2) = (z_1\cdot\overline{z}_2)\big/|z_2|^2$$

Komplexe Zahlenebene

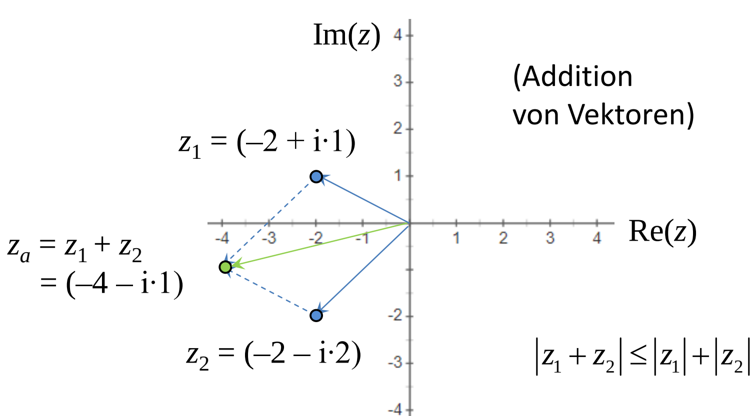
- Komplexe Zahlen können als Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$ über ihren Real- und Imaginärteil dargestellt werden



Betrag: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Komplexe Zahlenebene

- Beispieloperationen – geometrische Interpretation

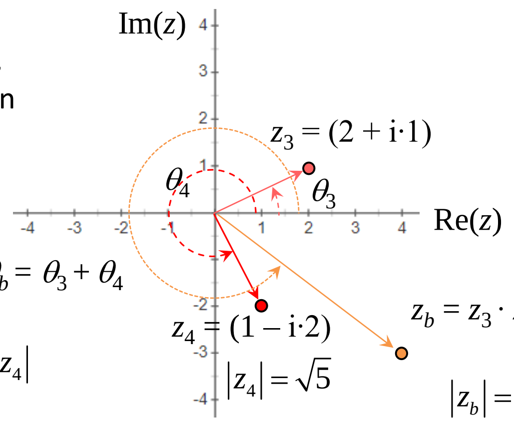


$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Komplexe Zahlenebene

- Beispieloperationen – geometrische Interpretation

(Addition von Winkeln, Multiplikation von Längen)



$|z_3| = \sqrt{5}$

$\theta_b = \theta_3 + \theta_4$

$z_b = z_3 \cdot z_4 = (4 - i\cdot 3)$

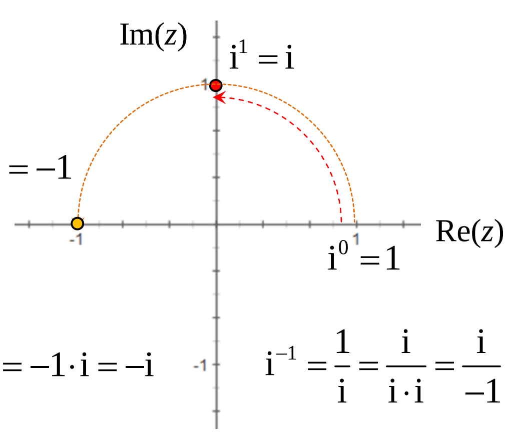
$|z_3 \cdot z_4| \leq |z_3| \cdot |z_4|$

$|z_4| = \sqrt{5}$

$|z_b| = 5$

Komplexe Zahlenebene

- Potenzen der imaginären Einheit



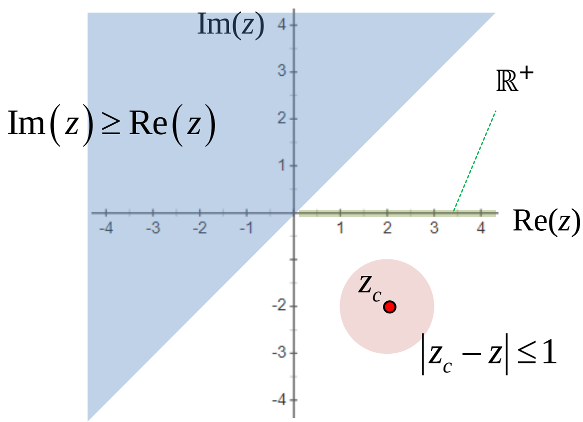
$i^2 = i \cdot i = -1$

$i^3 = i \cdot i \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$

Komplexe Zahlenebene

- Beispiele einiger Bereiche der Ebene

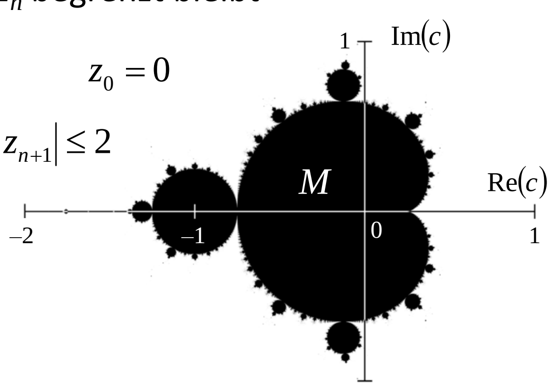


Mandelbrot-Menge

- Gegeben als Menge M von komplexen Zahlen c, für die die folgende quadratische Rekursionsgleichung (oder Folge) für z_n begrenzt bleibt

$$z_{n+1} = (z_n)^2 + c \qquad z_0 = 0$$

$$c \in M \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} |z_{n+1}| \leq 2$$



Inhalt

- Komplexe Zahlen
- **Komplexe Nullstellen**
- Eulersche Formel
- Fourier-Transformation
- Quaternionen

Fundamentalsatz der Algebra

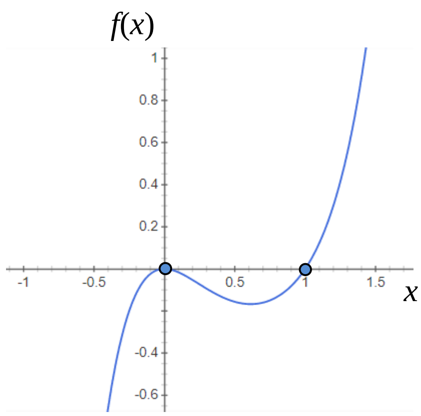
- Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$
- Ebenso hat jedes nicht-konstante Polynom vom Grad n mit komplexen Koeffizienten genau n komplexe Nullstellen (unter Berücksichtigung der Vielfachheit)
- Beispiele:

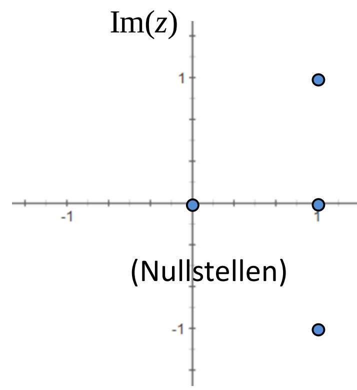
$$x^2+1=0 \qquad \Leftrightarrow x=\pm\mathrm{i} \qquad (x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})=0$$

$$x^3-x^2+x-1=0 \qquad \Leftrightarrow x=\pm\mathrm{i} \vee x=1 \qquad (x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})(x-1)=0$$

Fundamentalsatz der Algebra

- Weiteres Beispiel: $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2$
$$= x^2 (x-1)\big(x-(1-i)\big)\big(x-(1+i)\big)$$





(Nullstellen)

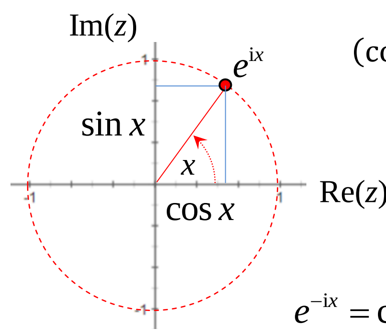
Inhalt

- Komplexe Zahlen
- Komplexe Nullstellen
- **Eulersche Formel**
- Fourier-Transformation
- Quaternionen

Eulersche Formel

- Erweiterung der Definition der Exponentialfunktion auf komplexe Zahlen

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x \qquad x \in \mathbb{R}$$



$(\cos x, \sin x) \in \mathbb{C}$

(Eulersche Identität)

$$e^{\mathrm{i}\pi} = \cos \pi + \mathrm{i} \sin \pi$$
$$= -1 + \mathrm{i} \cdot 0 = -1$$

$$e^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i} \sin x$$

Eulersche Formel

- Herleitung über Taylorreihen von e^x, $\sin x$ und $\cos x$
  - Siehe Proseminar

Eulersche Formel

- Jede komplexe Zahl $z = (a + \mathrm{i}b) \neq 0$ kann somit auch dargestellt werden in der Form

  $$z = r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}$$

- Es gilt mit einer komplexen Zahl $z = (a + \mathrm{i}b)$

  $$e^z = e^{a+\mathrm{i}b} = e^a \cdot e^{\mathrm{i}b} = e^a \left(\cos b + \mathrm{i} \sin b\right)$$

- Damit z.B. auch

  $$z = z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 \cdot e^{\mathrm{i}\varphi_1}\right)\left(r_2 \cdot e^{\mathrm{i}\varphi_2}\right) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$$ (Addition der Winkel)

- Darstellung komplexer Zahlen somit auch in Form von Polarkoordinaten (r,φ)

Komplexe Exponentialfunktion

- Die komplexe Exponentialfunktion ist periodisch mit der Periode $2\pi\mathrm{i}$; mit komplexer Zahl $z = (a + \mathrm{i}b)$:

  $$\begin{aligned} e^{z+k2\pi\mathrm{i}} &= e^{a+\mathrm{i}(b+k2\pi)} \\ &= e^a \cos(b+k2\pi) + \mathrm{i}\sin(b+k2\pi) \\ &= e^a \cos(b) + \mathrm{i}\sin(b) = e^a e^{\mathrm{i}b} = e^z \end{aligned}$$

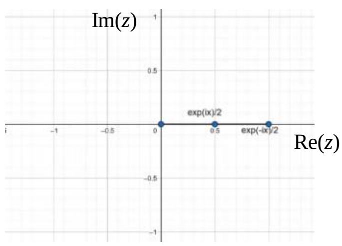
- Zusammenhang zwischen Trigonometrischen Funktionen und komplexen Exponentialfunktionen

  $$\cos x = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

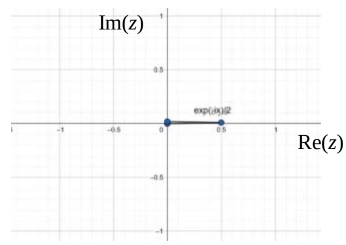
Eulersche Formel

- Zusammenhang graphisch:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$



$\cos x$

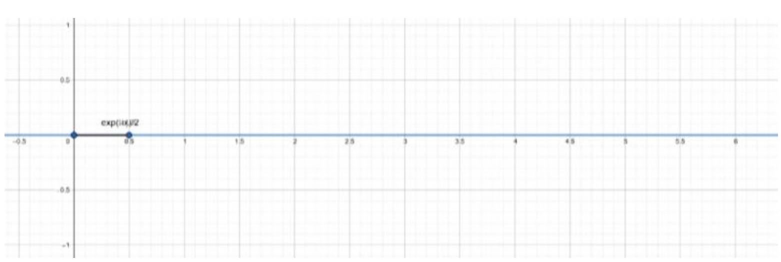


$i \sin x$

Eulersche Formel

- Zusammenhang graphisch:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$



https://www.geogebra.org/calculator/rgtfghvx

Inhalt

- Komplexe Zahlen
- Komplexe Nullstellen
- Eulersche Formel
- **Fourier-Transformation**
- Quaternionen

Fourier-Transformation

- Die (kontinuierliche) Fourier-Transformation einer integrierbaren, reellen, skalaren Funktion $f(x)$ ist gegeben als:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mathrm{i}2\pi u \cdot x} dx$$

- Gemäß der Eulerschen Formel ist dies äquivalent zu:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\cos(2\pi u \cdot x) - \mathrm{i}\sin(2\pi u \cdot x)\right) dx$$

- In verwandten Schreibweisen wird manchmal der konstante Term aus dem Integral gezogen

Fourier-Transformation

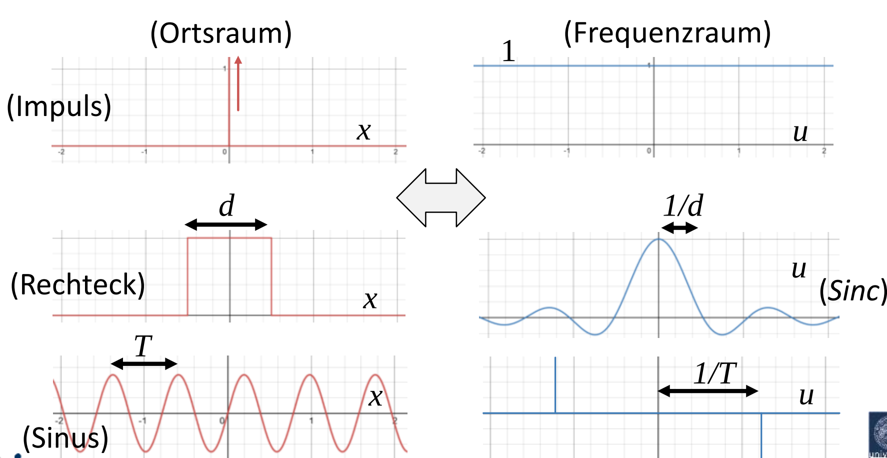
- Die entsprechende inverse Transformation lautet:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{\mathrm{i}2\pi x \cdot u} du$$

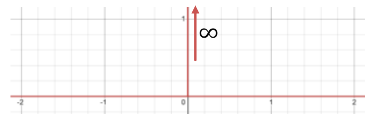
- Die Transformation, d.h. die Auswertung des Integrals kann auch als Operator notiert werden $F(u) = \mathcal{F}[f(x)]$
- Die Fourier-Transformation kann als unendliche Summe in einer Fourier-Reihe gesehen werden, die dadurch in ein Integral übergeht
- Die diskreten Koeffizienten der Fourier-Reihe gehen damit in eine kontinuierliche Funktion über

Fourier-Transformation

- Beispiele: Transformation von Signalen



Fourier-Transformation – Dirac Funktion



- Ist keine echte Funktion
  - ➔ Linearform
- Als ‚convenience' von Dirac 1930 eingeführt
  - In ‚Principles of Quantum Mechanics'
- Grob:

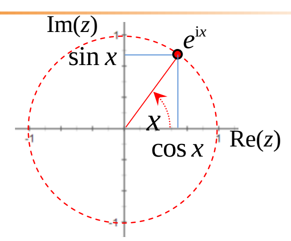
$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

- Insbesondere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

(NB: Lebesgue Integral)

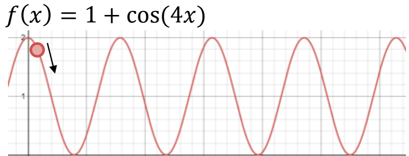
Fourier-Transformation – Geometrische Interpretation

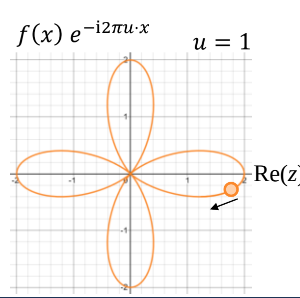


- Ortsraum zu Frequenzraum

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi u\cdot x}dx$$

$f(x) = 1 + \cos(4x)$

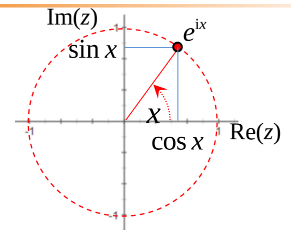




Fourier-Transformation – Geometrische Interpretation

- Ortsraum zu Frequenzraum

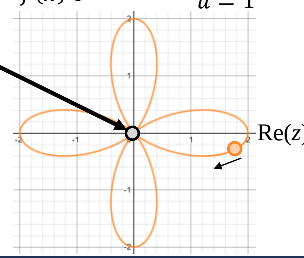
$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi u \cdot x} dx$$



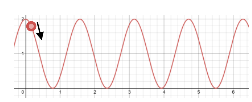
Schwerpunkt bei u

$f(x) = 1 + \cos(4x)$

$f(x)\, e^{-i2\pi u \cdot x}$ $\quad u = 1$

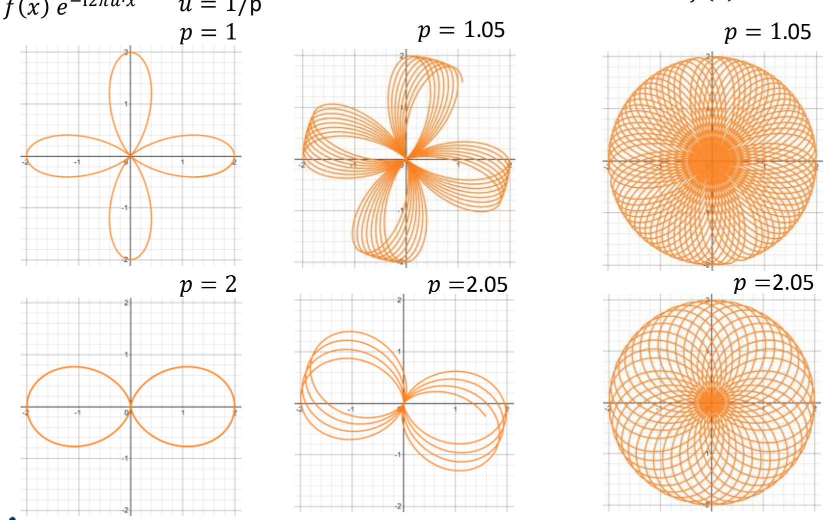


Fourier-Transformation – Geometrische Interpretation

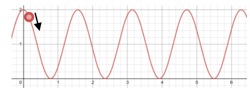


$f(x) = 1 + \cos(4x)$

$f(x)\, e^{-i2\pi u \cdot x}$ $\quad u = 1/p$

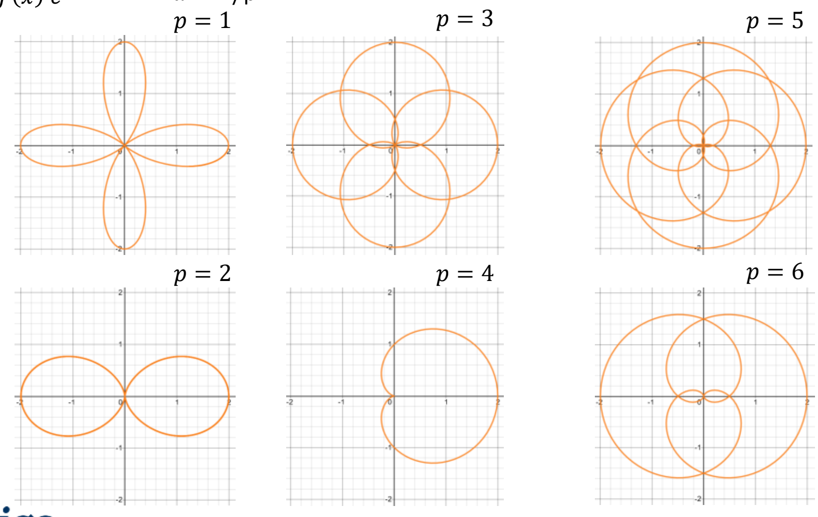


Fourier-Transformation – Geometrische Interpretation

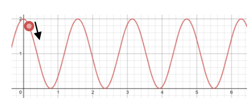


$f(x)\,e^{-i2\pi u\cdot x}$ $\quad u = 1/\mathrm{p}$

$f(x) = 1 + \cos(4x)$

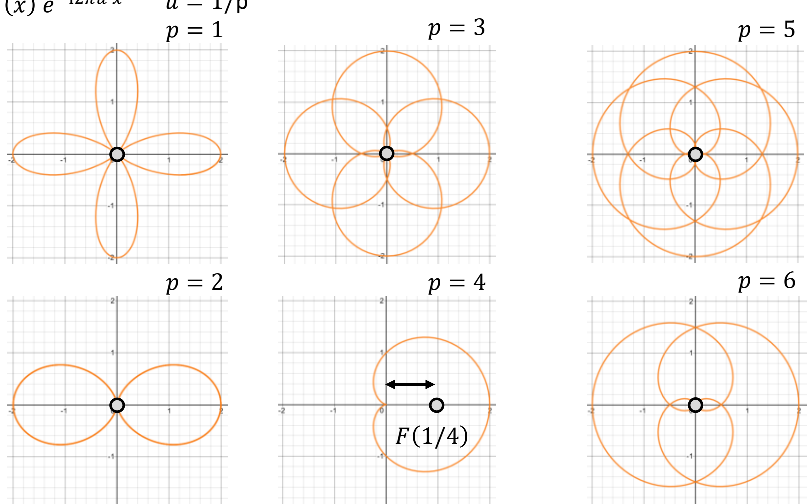


Fourier-Transformation – Geometrische Interpretation



$f(x)\,e^{-i2\pi u\cdot x}$ $\quad u = 1/\mathrm{p}$

$f(x) = 1 + \cos(4x)$

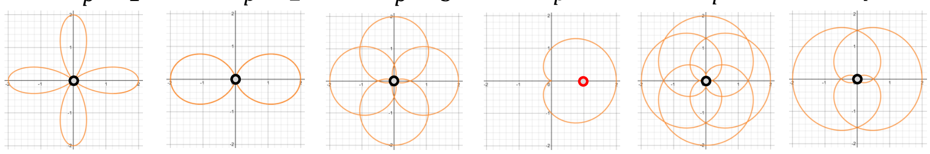


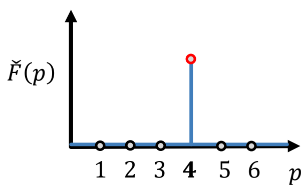
Fourier-Transformation – Geometrische Interpretation

$f(x) = 1 + \cos(\mathbf{4}x)$

$f(x)\, e^{-i2\pi u \cdot x}$ $\quad u = 1/\mathrm{p}$

$p = 1$ $\quad p = 2$ $\quad p = 3$ $\quad p = \mathbf{4}$ $\quad p = 5$ $\quad p = 6$





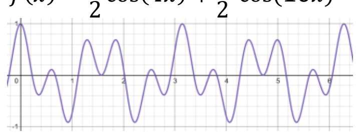
$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi u \cdot x} dx$$

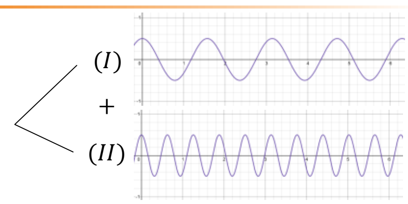
$$\check{F}(p) = F(1/u)$$

https://www.desmos.com/calculator/bxpaqgasxz

Fourier-Transformation – Geometrische Interpretation

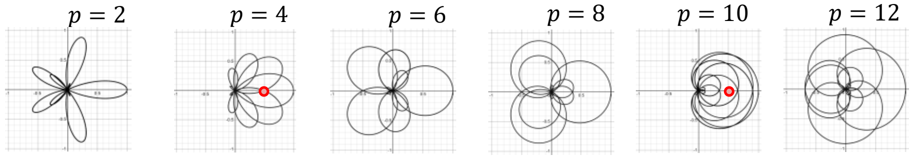
$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(\mathbf{4}x) + \frac{1}{2}\cos(\mathbf{10}x)$$



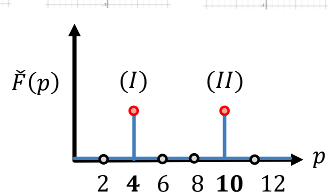


$f(x)\, e^{-i2\pi u \cdot x}$

$p = 2$ $\quad p = 4$ $\quad p = 6$ $\quad p = 8$ $\quad p = 10$ $\quad p = 12$

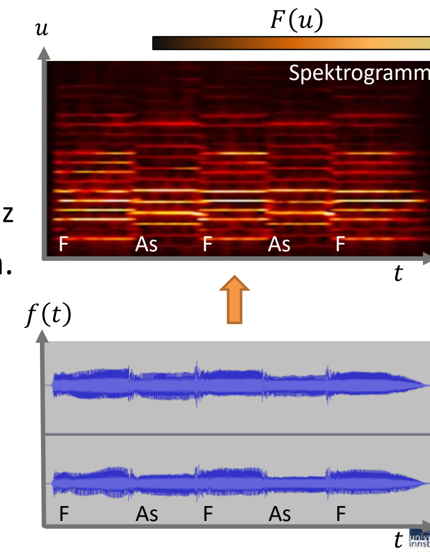


$u = 1/\mathrm{p}$



Fourier-Transformation – Anwendung

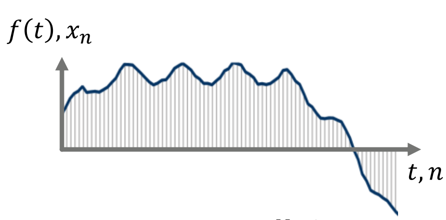
- Audiobearbeitung
  - Zb. Filter im Frequenzraum
- Klangfarbe aus Obertönen
  - Vielfache der Grundfrequenz
- Diskrete Fourier-Transform.

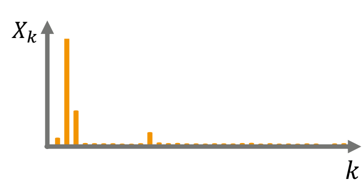


Fourier-Transformation – Diskret

- Diskretes Signal
  - *Abtastrate* > 2 · *Frequenz*$_{max}$
    (Nyquist-Shannon-Abtasttheorem)

Diskrete Fourier Transformation (DFT)



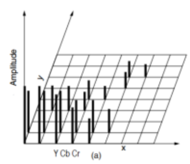


$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

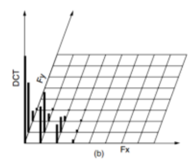
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right]$$

Fourier-Transformation – JPG

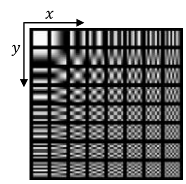
- JPG Kompression:
  - Diskrete Cosinus-Transformation (DCT) in 2D
  - Aufteilen des Bildes in 8x8 Pixel Blöcke (pro Kanal)



Pixelwerte



DCT Koeffizienten



Basisfunktionen

⟷

Linearkombination

https://www.researchgate.net/publication/268523100 https://eeweb.engineering.nyu.edu/~yao/EE3414/JPEG.pdf

Fourier-Transformation – JPG

- JPG Kompression:
  - DCT Matrix wird komponentenweise dividiert und gerundet (quantisiert)

$$\begin{array}{cc} & x \\ y & \begin{bmatrix} -415 & -33 & -58 & 35 & 58 & -51 & -15 & -12 \\ 5 & -34 & 49 & 18 & 27 & 1 & -5 & 3 \\ -46 & 14 & 80 & -35 & -50 & 19 & 7 & -18 \\ -53 & 21 & 34 & -20 & 2 & 34 & 36 & 12 \\ 9 & -2 & 9 & -5 & -32 & -15 & 45 & 37 \\ -8 & 15 & -16 & 7 & -8 & 11 & 4 & 7 \\ 19 & -28 & -2 & -26 & -2 & 7 & -44 & -21 \\ 18 & 25 & -12 & -44 & 35 & 48 & -37 & -3 \end{bmatrix} \end{array} / \begin{bmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & -3 & -6 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

DCT Koeffizienten Quantisierungsmatrix (aus Standard)

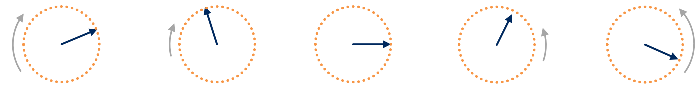
  - Die vielen entstehenden Nullen können dann komprimiert werden (diagonale Indexbereiche)

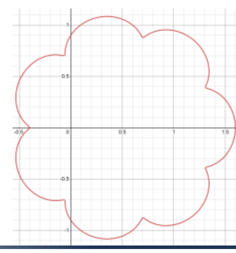
https://en.wikipedia.org/wiki/Quantization_(image_processing)#Quantization_matrices

Fourier-Transformation – Epizyklen

- Linearkombination von Rotationen im Komplexen

Frequenz: [cylces/sec] … -2 -1 0 1 2 …

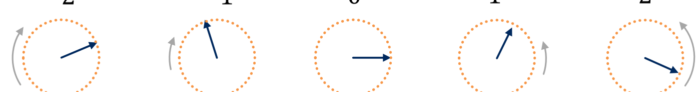




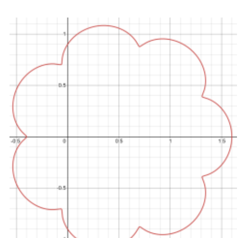
Fourier-Transformation – Epizyklen

- Linearkombination von Rotationen im Komplexen

Frequenz: [cylces/sec] … -2 -1 0 1 2 …



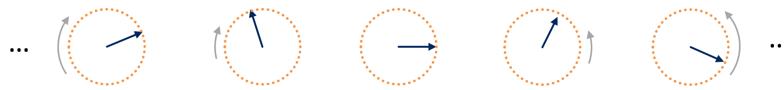
Rotation: $e^{-2\,2\pi i\,t}$ $e^{-1\,2\pi i\,t}$ 1 $e^{1\,2\pi i\,t}$ $e^{2\,2\pi i\,t}$

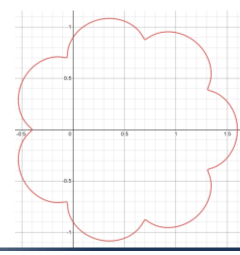


Fourier-Transformation – Epizyklen

- Linearkombination von Rotationen im Komplexen

Frequenz: [cylces/sec]	…	-2	-1	0	1	2	…
Rotation:		$e^{-2\,2\pi i\,t}$	$e^{-1\,2\pi i\,t}$	1	$e^{1\,2\pi i\,t}$	$e^{2\,2\pi i\,t}$	
Länge:		c_{-2}	c_{-1}	c_0	c_1	c_2	

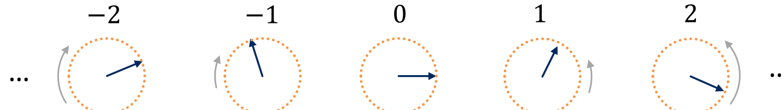




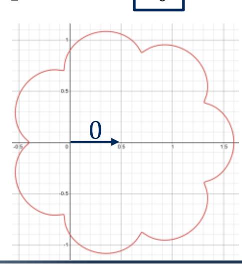
Fourier-Transformation – Epizyklen

- Linearkombination von Rotationen im Komplexen

Frequenz: [cylces/sec]	…	-2	-1	0	1	2	…
Rotation:		$e^{-2\,2\pi i\,t}$	$e^{-1\,2\pi i\,t}$	$\boxed{1}$	$e^{1\,2\pi i\,t}$	$e^{2\,2\pi i\,t}$	
Länge:		c_{-2}	c_{-1}	$\boxed{c_0}$	c_1	c_2	



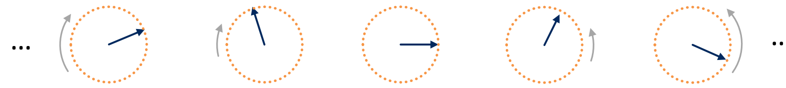
$$f(t) = 0.5$$
$$c_0$$



Fourier-Transformation – Epizyklen

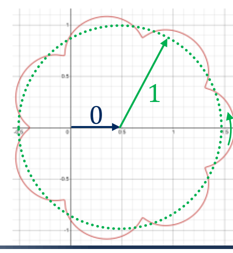
- Linearkombination von Rotationen im Komplexen

Frequenz: [cylces/sec]	-2	-1	0	1	2



Rotation:	$e^{-2\ 2\pi i\ t}$	$e^{-1\ 2\pi i\ t}$	1	$e^{1\ 2\pi i\ t}$	$e^{2\ 2\pi i\ t}$
Länge:	c_{-2}	c_{-1}	c_0	c_1	c_2

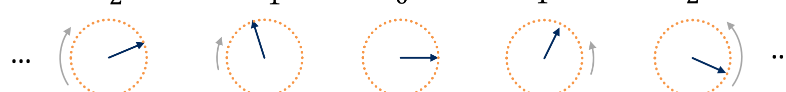
$$f(t) = \underbrace{0.5}_{c_0} + \underbrace{1.0}_{c_1}e^{2\pi i\, t}$$



Fourier-Transformation – Epizyklen

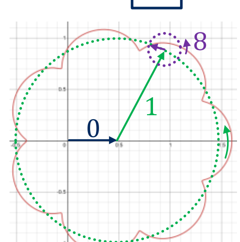
- Linearkombination von Rotationen im Komplexen

Frequenz: [cylces/sec]	-2	-1	0	1	2



Rotation:	$e^{-2\ 2\pi i\ t}$	$e^{-1\ 2\pi i\ t}$	1	$e^{1\ 2\pi i\ t}$	$e^{2\ 2\pi i\ t}$
Länge:	c_{-2}	c_{-1}	c_0	c_1	c_2

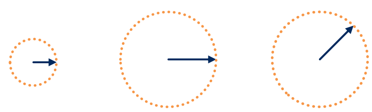
$$f(t) = \underbrace{0.5}_{c_0} + \underbrace{1.0}_{c_1}e^{2\pi i\, t} + \underbrace{0.1}_{c_8}e^{8\ 2\pi i\ t}$$



Fourier-Transformation – Epizyklen

- Summierte Komponente: $c_n e^{n\,2\pi i\,t}$
  - c_n … Länge und Startrotation (Komplex)

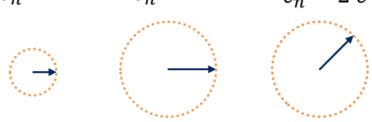
$c_n = 1$ $\quad$ $c_n = 2$ $\quad$ $c_n = 2\,e^{i\pi/4} = \sqrt{2} + i\,\sqrt{2}$



Fourier-Transformation – Epizyklen

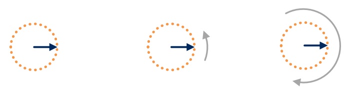
- Summierte Komponente: $c_n e^{n\,2\pi i\,t}$
  - c_n … Länge und Startrotation (Komplex)

$c_n = 1$ $\quad$ $c_n = 2$ $\quad$ $c_n = 2\,e^{i\pi/4} = \sqrt{2} + i\,\sqrt{2}$



  - n … Rotationsrichtung und Geschwindigkeit

$n = 0$ $\quad$ $n = 1$ $\quad$ $n = -4$



Fourier-Transformation – Epizyklen

- Funktion insgesamt: $f(t) = \sum_n c_n e^{n\,2\pi i\,t}$
- Berechnung der Koeffizienten c_n

$$\int_0^1 f(t)dt = ?$$

Fourier-Transformation – Epizyklen

- Funktion insgesamt: $f(t) = \sum_n c_n e^{n\,2\pi i\,t}$
- Berechnung der Koeffizienten c_n

$$\int_0^1 f(t)dt = ?$$

$$= \int_0^1 \left(\ldots + c_{-1}e^{-1\,2\pi i\,t} + c_0 e^{0\,2\pi i\,t} + c_1 e^{1\,2\pi i\,t} + c_2 e^{2\,2\pi i\,t} + \cdots \right)\, dt =$$

Fourier-Transformation – Epizyklen

- Funktion insgesamt: $f(t) = \sum_n c_n e^{n\,2\pi i\,t}$
- Berechnung der Koeffizienten c_n

$$\int_0^1 f(t)dt = ?$$

$$= \int_0^1 (\ldots + c_{-1}e^{-1\,2\pi i\,t} + c_0 e^{0\,2\pi i\,t} + c_1 e^{1\,2\pi i\,t} + c_2 e^{2\,2\pi i\,t} + \cdots)\ dt =$$

$$= \cdots \int_0^1 c_{-1}e^{-1\,2\pi i\,t}dt + \int_0^1 c_0 dt + \int_0^1 c_1 e^{1\,2\pi i\,t}dt + \int_0^1 c_2 e^{2\,2\pi i\,t}dt + \ldots =$$

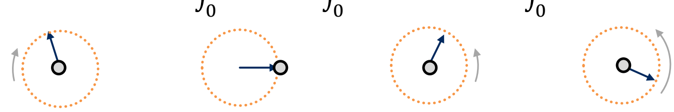
Fourier-Transformation – Epizyklen

- Funktion insgesamt: $f(t) = \sum_n c_n e^{n\,2\pi i\,t}$
- Berechnung der Koeffizienten c_n

$$\int_0^1 f(t)dt = ?$$

$$= \int_0^1 (\ldots + c_{-1}e^{-1\,2\pi i\,t} + c_0 e^{0\,2\pi i\,t} + c_1 e^{1\,2\pi i\,t} + c_2 e^{2\,2\pi i\,t} + \cdots)\ dt =$$

$$= \cdots \int_0^1 c_{-1}e^{-1\,2\pi i\,t}dt + \int_0^1 c_0 dt + \int_0^1 c_1 e^{1\,2\pi i\,t}dt + \int_0^1 c_2 e^{2\,2\pi i\,t}dt + \ldots =$$



Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022 38

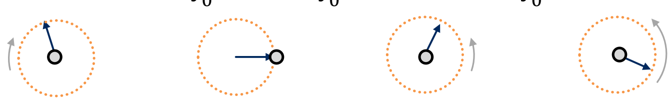
Fourier-Transformation – Epizyklen

- Funktion insgesamt: $f(t) = \sum_n c_n e^{n\,2\pi i\,t}$
- Berechnung der Koeffizienten c_n

$$\int_0^1 f(t)dt = ?$$

$$= \int_0^1 (\,\ldots + c_{-1}e^{-1\,2\pi i\,t} + c_0 e^{0\,2\pi i\,t} + c_1 e^{1\,2\pi i\,t} + c_2 e^{2\,2\pi i\,t} + \cdots\,)\ dt =$$

$$= \cdots \int_0^1 c_{-1}e^{-1\,2\pi i\,t}dt\ + \int_0^1 c_0 dt\ + \int_0^1 c_1 e^{1\,2\pi i\,t}dt\ + \int_0^1 c_2 e^{2\,2\pi i\,t}dt\ +\ \ldots =$$



$\rightarrow 0$ $\quad c_0$ $\quad \rightarrow 0$ $\quad \rightarrow 0$

Fourier-Transformation – Epizyklen

- Berechnung der Koeffizienten c_n

$$\int_0^1 f(t)\ e^{-1\,2\pi i\,t}\ dt = ?$$

$$= \int_0^1 (\,\ldots + c_{-1}e^{(-1-1)\,2\pi i\,t} + c_0 e^{(0-1)\,2\pi i\,t} + c_1 e^{(1-1)\,2\pi i\,t} \ldots\,)\ dt =$$

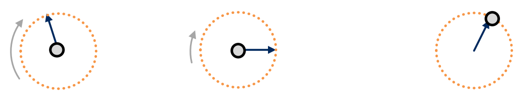
Fourier-Transformation – Epizyklen

- Berechnung der Koeffizienten c_n

$$\int_0^1 f(t)\; e^{-1\,2\pi i\,t}\; dt = ?$$

$$= \int_0^1 (\,\dots + c_{-1}e^{(-1-1)\,2\pi i\,t} + c_0 e^{(0-1)\,2\pi i\,t} + c_1 e^{(1-1)\,2\pi i\,t} \dots\,)\; dt =$$

$$= \dots \int_0^1 c_{-1}e^{-2\,2\pi i\,t}dt \;+ \int_0^1 c_0 e^{-1\,\pi i\,t}dt \;+ \int_0^1 c_1\, \underbrace{e^{0\,2\pi i\,t}}_{1}\, dt \;+\; \dots =$$



$\rightarrow 0$ $\rightarrow 0$ c_1

Fourier-Transformation – Epizyklen

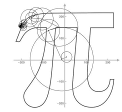
- Berechnung der Koeffizienten c_n
  - Kontinuierlich

$$c_n = \int_0^1 f(t)\; e^{-n\,2\pi i\,t}\; dt$$

  - Diskret mit *N* komplexen Zahlen (oder 2D Punkten) z_j:

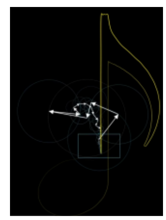
$$c_n \approx \sum_{j=1}^{N} z_j\; e^{-n\,2\pi i}$$

Fourier-Transformation – Epizyklen



- Näherung einer 2D Kurve über Epizyklen-koeffizienten (diskret)
  1. Berechnung von (vielen) Punkten entlang der Kurve
  2. Berechnen der Koeffizienten c_n
     Anzahl Koeffizienten je nach Genauigkeit der Näherung
  3. Näherung:

$$f(t) = \sum_n c_n e^{n\,2\pi i\,t}$$

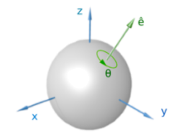


https://youtu.be/-qgreAUpPwM

Inhalt

- Komplexe Zahlen
- Komplexe Nullstellen
- Eulersche Formel
- Fourier-Transformation
- **Quaternionen**

Quaternionen – Ausblick



- Rotationen in 3D können mit Quaternion beschrieben werden
- Die Rotation mit einem Winkel θ um eine Achse $\boldsymbol{v}$

$$q = \underbrace{w}_{Re(Q)} + \underbrace{v_x i + v_y j + v_z k}_{Im(Q)}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k$$
$$ji = -k$$
$$ij = -ji$$

$$Q(\boldsymbol{v}, \theta) = e^{\frac{\theta}{2}(v_x i + v_y j + v_z k)}$$

$$Q(\boldsymbol{v}, \theta) = \cos\left(\theta/_2\right) + (v_x i + v_y j + v_z k)\sin\left(\theta/_2\right)$$

Quaternionen – Ausblick

- Rotation durch Multiplikation (Hamiltonprodukt)
  - $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_B \boldsymbol{q}_A \ (\neq \boldsymbol{q}_A \boldsymbol{q}_B)$ (Aneinanderreihen von Rotationen)
  - $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q}\ \boldsymbol{p}\ \boldsymbol{q}^{-1}$ (Rotation einen Punktes $\boldsymbol{p}$)
- Kompaktere Beschreibung von Rotationen in 3D
  - Matrix 3x3 Komponenten → Quaternion 4 Komponenten
- Stabilere Eigenschaften
  - Verhindert singulären Rotationszustand
- Leicht zu Interpolieren (Animationen)
- (Äquivalent zu 3D Rotor der geometrischen Algebra)

Einige Hilfreiche Weblinks

- „3 Blue 1 Brown“ zu FT – A Visual Introduction
  https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY
- Aktuelles zu JPG https://jpeg.org
- „3 Blue 1 Brown“ zu *Epizyklen-Zeichnungen* (u.a.)
  https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k

Vorlesungsplan

Datum	Thema	Proseminar
11.03.22	Einführung, Grundlagen, Funktionen	*(Beginn zuvor am 8.3.)*
18.03.22	Differentialrechnung	
25.03.22	Integralrechnung	
01.04.22	Differentialgleichungen	
08.04.22	Weitere Funktionen	
	Osterferien	
29.04.22	Reihen und Folgen	
06.05.22	Numerische Auswertung von Funktionen	
13.05.22	Lösung von Gleichungssystemen	
20.05.22	Interpolation	
27.05.22	Zufallszahlen	
03.06.22	Komplexe Zahlen	
10.06.22	Klausurvorbereitung	
01.07.22	**Klausur**	