universität innsbruck
Institut für Mathematik

Lineare Algebra
Wintersemester 2021/22

Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 10

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
(z.B. bis Mo. 10. Jänner 2022, 08:00 Uhr)

Aufgabe 37
Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen jeweils eine Basis für Kern und Bild:

(a) $\phi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2 - x_3, x_2 + 2x_1 - x_3)$
(b) $\phi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (x_1, x_2, x_3) \mapsto (7x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_3 - 6x_1)$
(c) $\phi_3 : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}); A \mapsto A^t - \mathrm{spur}(A) \cdot I$

Zur Erinnerung für $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$ gilt $\mathrm{spur}(A) := \sum_{i=1}^m A_{ii}$.

Aufgabe 38
Sei $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 4. Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen $\phi_i : V \to V$ linear sind:

(a) $\phi_1 : p \mapsto p(0)$ - Auswertung in 0
(b) $\phi_2 : p \mapsto p'$ - (formale) Ableitung nach t
(c) $\phi_3 : p \mapsto 2p + 2$
(d) $\phi_4 : p \mapsto t \cdot p' + t^2 \cdot p(1)$.

Aufgabe 39
Sei $\psi \colon V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen

(a) Sind $v_1, \dots, v_m$ in V_1 linear unabhängig, so sind $\psi(v_1), \dots, \psi(v_m)$ in V_2 linear unabhängig.
(b) Sind $\psi(v_1), \dots, \psi(v_m)$ in V_2 linear unabhängig, so sind $v_1, \dots, v_m$ in V_1 linear unabhängig.
(c) Wenn ψ bijektiv ist, dann ist $\psi^{-1} \colon V_2 \to V_1$ ebenfalls linear.
(d) Aus $\dim_K(\psi(V_1)) = \dim_K(V_2)$ folgt, dass ψ bijektiv ist.

Aufgabe 40
Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix über dem Körper $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Was ist der Rang, wenn wir A als Matrix über dem Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ auffassen? Finden Sie jeweils eine invertierbare Untermatrix von maximaler Größe.