1. **Problem**
   Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

   (a) Die Formel $(\mathtt{s} \wedge \neg\mathtt{w}) \rightarrow \mathtt{True}$ ist eine Tautologie.
   (b) Die Formel $(\mathtt{s} \rightarrow \mathtt{w}) \rightarrow (\mathtt{g} \vee \neg\mathtt{s} \vee \mathtt{w})$ ist unerfüllbar.
   (c) Die Formel $\mathtt{False} \rightarrow (\mathtt{s} \wedge \neg\mathtt{w})$ ist eine Tautologie.
   (d) Die Formel $((\mathtt{s} \rightarrow \mathtt{g}) \wedge (\mathtt{s} \rightarrow \mathtt{w})) \rightarrow (\mathtt{s} \rightarrow (\mathtt{w} \wedge \mathtt{g}))$ ist eine Tautologie.
   (e) Die Formel $\mathtt{w} \wedge (\mathtt{False} \wedge (\mathtt{True} \vee \mathtt{s})) \wedge \mathtt{g} \wedge \mathtt{s}$ ist erfüllbar aber keine Tautologie.
   (f) Die Formel $(\mathtt{w} \wedge \mathtt{s}) \vee (\neg\mathtt{w} \wedge \neg\mathtt{s}) \vee (\mathtt{s} \wedge \neg\mathtt{w}) \vee (\neg\mathtt{s} \wedge \mathtt{w})$ ist eine Tautologie.
   (g) Die Formel $(\neg\mathtt{b} \wedge (\mathtt{n} \rightarrow \mathtt{b})) \rightarrow \neg\mathtt{n}$ ist eine Tautologie.
   (h) Die Formel $(\mathtt{w} \vee \neg(\mathtt{n} \rightarrow \mathtt{b})) \wedge (\mathtt{s} \rightarrow \mathtt{w})$ ist unerfüllbar.
   (i) Die Formel $(\mathtt{w} \vee \mathtt{s}) \wedge (\mathtt{w} \vee \neg\mathtt{s}) \wedge (\neg\mathtt{w} \vee \neg\mathtt{s}) \wedge (\neg\mathtt{w} \vee \mathtt{s})$ ist unerfüllbar.
   (j) Die Formel $((\mathtt{s} \rightarrow (\mathtt{w} \wedge \mathtt{g})) \wedge (\mathtt{w} \rightarrow \mathtt{n})) \rightarrow ((\mathtt{g} \rightarrow \neg\mathtt{b}) \rightarrow (\mathtt{s} \rightarrow \mathtt{b}))$ ist erfüllbar aber keine Tautologie.

   Solution

   (a) Wahr.
   (b) Falsch. Die Formel ist *eine Tautologie*.
   (c) Wahr.
   (d) Wahr.
   (e) Falsch. Die Formel ist *unerfüllbar*.
   (f) Wahr.
   (g) Wahr.
   (h) Falsch. Die Formel ist *erfüllbar aber keine Tautologie*.
   (i) Wahr.
   (j) Wahr.

2. **Problem**
   Sei $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra und sei $F = x_1 + (\sim(x_2) \cdot x_1)$ ein Boolscher Ausdruck. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

   (a) F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f : B^2 \rightarrow B$ definiert als:

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

   (b) F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f : B^2 \rightarrow B$ definiert als:

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(c) F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f : B^2 \to B$ definiert als:

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(d) F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f : B^2 \to B$ definiert als:

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

(e) Keine der Aussagen ist stimmig.

Solution

(a) Falsch
(b) Falsch
(c) Falsch
(d) Wahr
(e) Falsch

3. **Problem**
Welche der folgenden Aussagen ist immer richtig, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1\rangle$ eine Boolesche Algebra ist?

(a) Für alle $a, b \in B$ gilt $a + b = a + \sim(b)a$.
(b) Für alle $a, b \in B$ gilt $a + b = a + \sim(a)b$.
(c) Für alle $a \in B$ gilt $a + \sim(a) = 1$.
(d) $\langle B; \cdot, 1\rangle$ ist ein Ring.
(e) Für alle $a \in B$ gilt $a \cdot \sim(a) = 1$.

Solution

(a) Falsch.
(b) Wahr. Die Gleichung bezeichnet eines der Absorptionsgesetze.
(c) Wahr. Dies ist eines der Grundgesetze der Boolschen Algebra.
(d) Falsch.
(e) Falsch.

4. **Problem**
Betrachten Sie die formalen Sprachen $L = \{\epsilon, \mathsf{0}, \mathsf{10}, \mathsf{100}, \mathsf{110}\}$, $M = \{\mathsf{1}, \mathsf{11}, \mathsf{101}, \mathsf{111}\}$ und $N = \{\mathsf{0}, \mathsf{1}\}^*$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $(L \cap M) \cup N = \{\epsilon, \mathsf{0}, \mathsf{1}, \mathsf{10}, \mathsf{11}, \mathsf{100}, \mathsf{101}, \mathsf{110}, \mathsf{111}\}$
(b) $L \cup M = \{\mathsf{0}, \mathsf{1}, \mathsf{10}, \mathsf{11}, \mathsf{100}, \mathsf{101}, \mathsf{110}, \mathsf{111}\}$
(c) $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, \mathsf{0}, \mathsf{10}, \mathsf{11}, \mathsf{100}, \mathsf{101}, \mathsf{110}, \mathsf{111}\}$
(d) Keine der Antworten

(e) $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 1, 11, 101, 111\}$
(f) $(L \cup M) \cap N = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$
(g) $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$
(h) $L \cap N = \{\epsilon, 0, 1, 10, 11, 100\}$
(i) $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$
(j) $L \cup M = \{\epsilon, 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$

Solution

(a) Falsch.
(b) Falsch.
(c) Falsch.
(d) Falsch.
(e) Falsch.
(f) Falsch.
(g) Falsch.
(h) Falsch.
(i) Wahr.
(j) Wahr.

5. **Problem**
Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{C, V\}, \{\mathsf{v}, \mathsf{o}\}, R, C)$.

Regeln R der Grammatik G:

$$C \to \epsilon \mid V\mathsf{v}$$
$$V \to \mathsf{v}V \mid C$$

Welche der folgenden Aussagen sind im Bezug auf diese Grammatik korrekt?

(a) Die Grammatik erzeugt eine kontextfreie Sprache
(b) Die Grammatik ist beschränkt
(c) Keine der Aussagen ist korrekt
(d) Die Grammatik erzeugt eine rekursiv aufzählbare Sprache
(e) Die Grammatik erzeugt eine reguläre Sprache
(f) Die Grammatik ist kontextsensitiv
(g) Die Grammatik ist rechtslinear
(h) Die Grammatik ist kontextfrei
(i) Die Grammatik erzeugt eine beschränkte Sprache
(j) Die Grammatik erzeugt eine kontextsensitive Sprache

Solution

(a) Wahr
(b) Falsch
(c) Falsch

(d) Wahr
(e) Wahr
(f) Falsch
(g) Falsch
(h) Wahr
(i) Wahr
(j) Wahr

6. **Problem**
Welche der folgenden Ableitungen sind im Bezug auf die Grammatik $G = (\{S, T, U\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, R, S)$ korrekt? (Die Ableitung kann auch partiell sein.)

Regeln R der Grammatik G:

$$\begin{aligned} S &\to \mathsf{a}T\mathsf{b} \mid \mathsf{a}U \mid \epsilon \\ \mathsf{a}T\mathsf{b} &\to \mathsf{aaa}T\mathsf{bb} \mid \mathsf{aa}T\mathsf{bbb} \mid \mathsf{b}T\mathsf{a} \mid S\mathsf{bb} \\ U &\to \mathsf{aa}U \mid S\mathsf{c} \end{aligned}$$

(a) $S \Rightarrow \mathsf{a}T\mathsf{b} \Rightarrow \mathsf{aa}T\mathsf{bbb} \Rightarrow \mathsf{aaaa}T\mathsf{bbbb} \Rightarrow \mathsf{aaaaa}T\mathsf{bbbbbb} \Rightarrow \mathsf{aaaab}T\mathsf{abbbbb}$
(b) $S \Rightarrow \mathsf{a}T\mathsf{b} \Rightarrow ST\mathsf{bb} \Rightarrow \mathsf{a}U\mathsf{bb} \Rightarrow \mathsf{a}S\mathsf{cbb} \Rightarrow \mathsf{aa}U\mathsf{cbb}$
(c) $T \Rightarrow \mathsf{a}T\mathsf{b} \Rightarrow \mathsf{aaa}T\mathsf{bb} \Rightarrow \mathsf{aaaa}T\mathsf{bbbb} \Rightarrow \mathsf{aaaaa}T\mathsf{bbbbbb}$
(d) $S \Rightarrow \mathsf{a}T\mathsf{b} \Rightarrow \mathsf{aaaa}T\mathsf{bbbb} \Rightarrow \mathsf{aaaaa}T\mathsf{bbbbbb} \Rightarrow \mathsf{aaaab}T\mathsf{abbbbb}$
(e) $S \Rightarrow \mathsf{aaaaaa}T\mathsf{bbbbb} \Rightarrow \mathsf{aaa}T\mathsf{bb} \Rightarrow \mathsf{aaaa}T\mathsf{bbbb} \Rightarrow \mathsf{a}T\mathsf{b} \Rightarrow \mathsf{aaaaaaa}T\mathsf{bbbbbbb}$
(f) $S \Rightarrow \mathsf{a}T\mathsf{b} \Rightarrow \mathsf{aa}T\mathsf{bbb} \Rightarrow \mathsf{a}S\mathsf{bbbb} \Rightarrow \mathsf{aa}U\mathsf{bbbb}$
(g) $\mathsf{aaaa}T\mathsf{bbbbbbb} \Rightarrow \mathsf{a}T\mathsf{b} \Rightarrow \mathsf{aa}T\mathsf{bbb} \Rightarrow \mathsf{aaa}T\mathsf{bbbbb} \Rightarrow S \Rightarrow \mathsf{aaaaa}T\mathsf{bbbbbbbbb}$
(h) $S \Rightarrow \mathsf{a}T\mathsf{b} \Rightarrow \mathsf{aa}T\mathsf{bbb} \Rightarrow \mathsf{aaa}T\mathsf{bbbbb} \Rightarrow \mathsf{aaaaa}T\mathsf{bbbbbb} \Rightarrow \mathsf{aaaaaaa}T\mathsf{bbbbbbb}$
(i) $S \Rightarrow \mathsf{a}T\mathsf{b} \Rightarrow S\mathsf{bb}$
(j) $S \Rightarrow \mathsf{a}T\mathsf{b} \Rightarrow \mathsf{aaa}T\mathsf{bb} \Rightarrow \mathsf{aaaaaa}T\mathsf{bbbbb} \Rightarrow \mathsf{aaaaa}S\mathsf{bbbbbb}$

Solution

(a) Wahr
(b) Falsch
(c) Falsch
(d) Falsch
(e) Falsch
(f) Wahr
(g) Falsch
(h) Wahr
(i) Wahr
(j) Falsch

7. **Problem**
Welche der folgenden Aussagen bezüglich der Chomsky-Hierarchie sind wahr?
Beachten Sie:

- $\mathcal{L}_3$ ist die Menge der regulären Sprachen.
- $\mathcal{L}_2$ ist die Menge der kontextfreien Sprachen.
- $\mathcal{L}_1$ ist die Menge der kontextsensitiven Sprachen.
- $\mathcal{L}_0$ ist die Menge der rekursiv aufzählbaren Sprachen.
- $\mathcal{L}$ ist die Menge der formalen Sprachen.

(Mit $\subset$ bezeichnen wir die echte Mengeninklusion.)

(a) $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_0$
(b) $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$
(c) $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$
(d) Alle regulären Sprachen sind auch rekursiv aufzählbar
(e) $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2$
(f) Die Chomsky-Hierarchie ist eine Hierarchie über Grammatiken
(g) Die Chomsky-Hierarchie ist eine Hierarchie über formale Sprachen und Grammatiken
(h) Eine rekursiv aufzählbare Sprache ist auch beschränkt
(i) Eine rekursiv aufzählbare Sprache ist auch kontextsensitiv
(j) Alle regulären Sprachen sind auch kontextsensitiv

Solution

(a) Falsch
(b) Wahr
(c) Falsch
(d) Wahr
(e) Falsch
(f) Falsch
(g) Falsch
(h) Falsch
(i) Falsch
(j) Wahr

8. **Problem**

Betrachten Sie die Turingmaschine $M = (\{s, t, r, q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, \{\vdash, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \sqcup\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ

	$\vdash$	a	b	c	$\sqcup$
s	$(s, \vdash, R)$	$(q_0, \vdash, R)$	$(r, \sqcup, R)$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$
q_0	$\cdot$	(q_0, a, R)	(q_0, b, R)	(q_0, c, R)	$(q_1, \sqcup, L)$
q_1	$(r, \vdash, R)$	$(r, \sqcup, R)$	$\boxed{3}$	$(r, \sqcup, R)$	$\cdot$
q_2	$\boxed{4}$	(q_2, a, L)	(q_2, b, L)	(q_2, c, L)	$\cdot$
q_3	$\cdot$	$(r, \sqcup, R)$	$(r, \sqcup, R)$	$(r, \sqcup, R)$	$\boxed{5}$

Beantworten Sie die folgenden Fragen bezüglich den Lücken in der Zustandstabelle, sodass $\mathsf{L}(M) = \{\mathsf{a}^n\mathsf{c}\mathsf{b}^n \mid n \geq 0\}$. Beachten Sie, dass $\cdot$ einen beliebigen Übergang anzeigt (diese Situationen werden nicht erreicht). Die Übergänge für die Zustände t und r sind ebenfalls irrelevant, da diese Zustände nie mehr verlassen werden können.

(a) $(t, \sqcup, R)$ gehört in Lücke $\boxed{1}$

(b) $(r, \sqcup, R)$ gehört in Lücke $\boxed{1}$

(c) $(q_3, \sqcup, R)$ gehört in Lücke $\boxed{2}$

(d) $(s, \vdash, L)$ gehört in Lücke $\boxed{4}$

(e) $(q_0, \vdash, R)$ gehört in Lücke $\boxed{4}$

(f) $(q_2, \sqcup, L)$ gehört in Lücke $\boxed{3}$

(g) $(r, \sqcup, R)$ gehört in Lücke $\boxed{5}$

(h) $(q_2, \sqcup, L)$ gehört in Lücke $\boxed{5}$

(i) $(q_3, \sqcup, L)$ gehört in Lücke $\boxed{2}$

(j) $(q_2, \sqcup, R)$ gehört in Lücke $\boxed{3}$

Solution

	$\vdash$	a	b	c	$\sqcup$
s	$(s, \vdash, R)$	$(q_0, \vdash, R)$	$(r, \sqcup, R)$	$(q_3, \sqcup, R)$	$(r, \sqcup, R)$
q_0	$\cdot$	(q_0, a, R)	(q_0, b, R)	(q_0, c, R)	$(q_1, \sqcup, L)$
q_1	$(r, \vdash, R)$	$(r, \sqcup, R)$	$(q_2, \sqcup, L)$	$(r, \sqcup, R)$	$\cdot$
q_2	$(s, \vdash, R)$	(q_2, a, L)	(q_2, b, L)	(q_2, c, L)	$\cdot$
q_3	$\cdot$	$(r, \sqcup, R)$	$(r, \sqcup, R)$	$(r, \sqcup, R)$	$(t, \sqcup, R)$

(a) Falsch

(b) Falsch

(c) Falsch

(d) Falsch

(e) Falsch

(f) Wahr

(g) Falsch

(h) Falsch

(i) Falsch

(j) Falsch