Aussagenlogik, Methode von Quine, Natürliches Schließen, Konjuktive und Disjunktive Normalform

Importancy	
Complete	☐
Notes	☐
Readings	☐

Syntax der Aussagenlogik

- **AT** eine Menge von **atomaren Formeln (Atomen)**
- Elemente von **AT** werden mit p, q, r bezeichnet

> 💡 Wahrheitswertsymbole: $True \quad False$
> Junktoren: $\neg \quad \vee \quad \wedge \quad \rightarrow$

Formeln in der Aussagenlogik sind induktiv definiert:

1. eine atomare Formel p ist eine Formel
2. ein Wahrheitswertsymbol (True, False) ist eine **Formel**
3. wenn A und B **Formeln** sind, dann sin auch die Folgenden, **Formeln:**
   a. $\neg A \quad (A \wedge B) \quad (A \vee B) \quad (A \rightarrow B)$

Folgender Ausdruck A ist eine Formel:

$$((p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$$

Präzedenz

Präzedenz steht für die Wertigkeit der einezelnen Symbole

> $\rightarrow$ ist recht-assoziativ: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

> $\neg > \vee, \wedge > \rightarrow$

Beispiel der Anwendung von Präzedenzen (spart Klammern ein)

$\neg p \wedge q \rightarrow r \vee s$ statt $((\neg p \wedge q) \rightarrow (r \vee s))$

Wahrheitswertbelegung

1. **T** und **F** sind **Wahrheitswerte** (Achtung: hier dürfen wir nicht 0, 1 verwenden)
2. die **Belegung v:** $AT \rightarrow \{T, F\}$**,** assoziiert Atome mit Wahrheitswerten

Beispiel:

Betrachte die Atome p, q und r, sowie die folgende belegung:

$$v(a) = \begin{cases} T & a = p \\ F & a = q \\ F & a = r \end{cases}$$

hier schreibt man auch $v(p) = T,\ v(q) = F,\ v(r) = F$

Semantik zu Aussagenlogik

Wir erweitern die Belegung v zu einem **Wahrheitswert** für Formeln:

$$\overline{v}(p) = \mathsf{v}(p) \qquad \overline{v}(\mathsf{True}) = \mathsf{T} \qquad \overline{v}(\mathsf{False}) = \mathsf{F}$$

$$\overline{v}(\neg A) = \begin{cases} \mathsf{T} & \overline{v}(A) = \mathsf{F} \\ \mathsf{F} & \overline{v}(A) = \mathsf{T} \end{cases}$$

$$\overline{v}(A \wedge B) = \begin{cases} \mathsf{T} & \overline{v}(A) = \overline{v}(B) = \mathsf{T} \\ \mathsf{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{v}(A \vee B) = \begin{cases} \mathsf{F} & \overline{v}(A) = \overline{v}(B) = \mathsf{F} \\ \mathsf{T} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{v}(A \rightarrow B) = \begin{cases} \mathsf{T} & \overline{v}(A) = \mathsf{F} \text{ oder } \overline{v}(B) = \mathsf{T} \\ \mathsf{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wahrheitstabellen

Sei A eine Formel; die **Wahrheitstabelle von A** listet alle relevanten Belegungen von v zusammen mit dem Wahrheitswert $\bar{v}(A)$ auf. **Stell dir v wie die "Funktion von:".**

Betrachte die Formel:

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Wir stellen die folgende Wahrheitstabelle auf:

p	q	$(p \rightarrow \neg q)$	$(\neg q \rightarrow \neg p)$	$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
T	T	F	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Beispiel 1a)

Wichtige Definitionen

sei A eine Formel

1. wenn eine **Belegung** v existiert, sodass $\bar{v}(A) = T$, heißt A erfüllbar
   a. einfach gesagt: wenn der Wahrheitswert der gesamten Belegung T ist
2. wenn keine solche Belegung existiert, heißt A unerfüllbar
   a. einfach gesagt: wenn kein einziges Mal T vorkommt
3. wenn für alle Belegungen $v, \bar{v}(A) = T$, heißt A gültig oder Tautologie
   a. einfach gesagt: wenn für jede einzelne Belegung True vorliegt, beispielweise in **1a)** wenn p und q beide **False** sind.

💡 $\models$ heißt " es folgt"

Konsequenzrealation

$\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$ gilt genau dann wenn für alle Belegungen v:

$\bar{v}(A_1) = T, \ldots, \bar{v}(A_n) = T$ impliziert $\bar{v}(B) = T$

- statt $\varnothing \models A$; schreiben wir $\models A$
- wenn $\varnothing \models A$ gilt dann ist A eine Tautologie

Definition (Äquivalenz)

$A \equiv B$, gilt wenn $A \models B\ und\ B \models A$

> $A \equiv B$ gilt gdw. $(A \to B) \land (B \to A)$ eine Tautologie ist

Konjunktionen und Disjunktionen sind assoziativ und kommutativ!

Äquivalenzregeln 1&2

Lenma (Elementare Äquivalenzen):

$$
\begin{array}{cccc}
\neg\neg A \equiv A \quad A \lor \text{True} \equiv \text{True} & A \land \text{True} \equiv A & A \to \text{True} \equiv \text{True} \\
A \lor \text{False} \equiv A & A \land \text{False} \equiv \text{False} & A \to \text{False} \equiv \neg A \\
A \lor A \equiv A & A \land A \equiv A & \text{True} \to A \equiv A \\
A \lor \neg A \equiv \text{True} & A \land \neg A \equiv \text{False} & \text{False} \to A \equiv \text{True} \\
 & & A \to A \equiv \text{True}
\end{array}
$$

Lenma (Distributivgesetze und Andere):

$$
\begin{array}{cc}
A \to B \equiv \neg A \lor B & \neg(A \to B) \equiv A \land \neg B \\
A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C) & A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)
\end{array}
$$

Lenma (Absorptionsgesetze):

$$
\begin{array}{cc}
A \land (A \lor B) \equiv A & A \lor (A \land B) \equiv A \\
A \land (\neg A \lor B) \equiv A \land B & A \lor (\neg A \land B) \equiv A \lor B
\end{array}
$$

Lenma (Gestetze von De Morgan):

$$
\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B \quad \neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B
$$

Gleiches durch Gleiches ersetzen

Man kann eine Teilformel A einer Formel B ist ein Teilausdruck von B, heißt man kann Teilasudrücke ersetzen wenn sie Äquivalent sind.

1. *A, B Formeln und E, F Teilformeln von A, B*
2. *Gelte $E \equiv F$*
3. *B ist das Resultat der Ersetzung von E durch F in A*

Dann gilt $A \equiv B$

Beispiel

Wir betrachten die folgende Äquivalenz

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

mit der folgenden Formel

$$(p \to q) \wedge r$$

Nun gilt

$$(\underline{p \to q}) \wedge r \equiv (\underline{\neg p \vee q}) \wedge r$$

Methode von Quine

Lenma:

A ist eine Formel und p ein Atom in A

1. A ist eine Tautologie gdw.
   a. $A\{p \mapsto True\}$ ist Tautologie und $A\{p \mapsto False\}$ ist Tautologie
2. A ist unerfüllbar gdw.
   a. $A\{p \mapsto True\}$ unerfüllbar und $A\{p \mapsto False\}$ unerfüllbar

Beispiel:

Wir betrachten die Formel F und erkennen dass F eine Tautologie ist.

$$\boxed{F := [(p \wedge q \to r) \wedge (p \to q)] \to (p \to r)}$$

Beweis anhand der Methode von Quine:

Die Methode liefert die folgenden Anforderungen

1 $(\text{True} \wedge q \to r) \wedge (\text{True} \to q) \to (\text{True} \to r) =: G$ ist Tautologie

2 $(\text{False} \wedge q \to r) \wedge (\text{False} \to q) \to (\text{False} \to r)$ ist Tautologie

Anforderungen in Baumform:

$$(p \wedge q \to r) \wedge (p \to q) \to (p \to r)$$

$\{p \mapsto \text{True}\}$: G

$\{p \mapsto \text{False}\}$:

$$(\text{False} \wedge q \to r) \wedge (\text{False} \to q) \to (\text{False} \to r)$$
$$\equiv$$
$$(\text{False} \to r) \wedge (\text{False} \to q) \to \text{True}$$
$$\equiv$$
$$\text{True} \wedge \text{True} \to \text{True}$$
$$\equiv$$
$$\text{True}$$

Übrige Anforderungen

3 G ist Tautologie

$$\overbrace{(\mathsf{True} \land q \to r) \land (\mathsf{True} \to q) \to (\mathsf{True} \to r)}^{G}$$
$$\equiv$$
$$(q \to r) \land q \to r$$

$\{q \mapsto \mathsf{True}\}$

$$(\mathsf{True} \to r) \land \mathsf{True} \to r \equiv r \land \mathsf{True} \to r \equiv r \to r \equiv \mathsf{True}$$

$\{q \mapsto \mathsf{False}\}$

$$(\mathsf{False} \to r) \land \mathsf{False} \to r \equiv \mathsf{True} \land \mathsf{False} \to r \equiv \mathsf{False} \to r \equiv \mathsf{True}$$

Es gibt keine weiteren Anforderungen mehr, also ist F eine Tautologie

💡 Wichtig bei der Methode von Quine ist es die Äquivalenzregeln zu kennen und anwenden zu können!

Natürliches Schließen (alle Interferenzregeln)

Für die Bestimmung der Gültigkeit einer Formel nutzen wir das Kalkül **NK** des natürlichen Schließens.

Dieser Kalkül ist **"passend"**, da alle verwendeten Regeln korrekt sind und alle Regeln gemeinsam vollständig sind. Das heißt, sämtliche in **NK** ableitbaren Formeln sind tatsächlich Tautologien **(„Korrektheit")** und andererseits sind sämtliche Tautologien auch wirklich ableitbar **(„Vollständigkeit")**.

Für das Natürliches Schließen gibt es eine Reihe von Inferenzregeln:

In den Regeln wird für die Allgemienheit A, B, C als Formeln benutzt, dabei kann man Analog einfach die Atome einsetzen, um die Regeln anzuwenden.

Allgemein kann man die Ausdrücke unter dem Strich herleiten indem man die Regeln über dem Striuch andwendet oder besser gesagt, wenn die Regeln über dem Strcih zutreffen.

Es gibt die **Einführung (introduction : i) und die Elimination (elimination : e)**

💡 $\models$ bedeutet "folgt", aber $\vdash$ bedeutet "ableitbar"

Beispiele von Aufgabenstellungen:

1. $\vdash \neg p \to (p \to q)$
2. $r,\ q,\ r \land q \to s\ \vdash\ s$

Bei 1) ist die Aufgabenstellung ohne Annahme gegeben, was oft impliziert das man Boxen verwenden muss un eigene Annahmen treffen kann.

Bei 2) sind mehrere Annahmen gegeben, was oft impliziert das man "meistens" keine Boxen braucht und es keine Annahmen gibt sonderen Prämissen (hier: $r, q\ und\ r \land q \to s$)

Allgemein gilt das innere Boxen auf die äußeren zugreifen können, aber nicht anders herum. Dies insbesondere wichtig, wenn man eine viele Boxen öffnen muss.

💡 **WICHTIG:** Man muss Schritt für Schritt arbeiten und jeden einzelnen Schritt recht anschreiben! Fehler passieren oft bei den Negationsregeln.

Konjunktion

	Einführung	Elimination	
$\land$	$\dfrac{A \quad B}{A \land B}\ \land: i$	$\dfrac{A \land B}{A}\ \land: e$	$\dfrac{A \land B}{B}\ \land: e$

Wenn A und B als Prämissen vorliegen, kann durch die Introduction $\land$ eingeführt werden.

$$\frac{p \to q \quad q \to p}{(p \to q) \land (q \to p)}\ \land: i$$

Wenn $A \land B$ als Prämisse vorliegt, dann kann durch die Elimination $\land$ entfernt werden, dabei belibt einer der beiden Formeln übrig (egal ob A oder B)

$$\frac{(p \to q) \land (q \to p)}{p \to q}\ \land: e \qquad \frac{(p \to q) \land (q \to p)}{q \to p}\ \land: e$$

Disjunktion

	Einführung		Elimination
$\lor$	$\dfrac{A}{A \lor B}\ \lor: i$	$\dfrac{B}{A \lor B}\ \lor: i$	$\dfrac{A \lor B \quad \boxed{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} B \\ \vdots \\ C \end{array}}}{C}\ \lor: e$

Wenn A oder B existieren dann kann man durch die Introduction $\lor$ und eine beliebige Formel B eingeführt werden.

$$\frac{p}{p \lor \neg p}\ \lor: i \qquad \frac{\neg p}{p \lor \neg p}\ \lor: i$$

Es kann auch anders funktionieren, heißt man kann auch A einführen, wenn B gegeben ist.

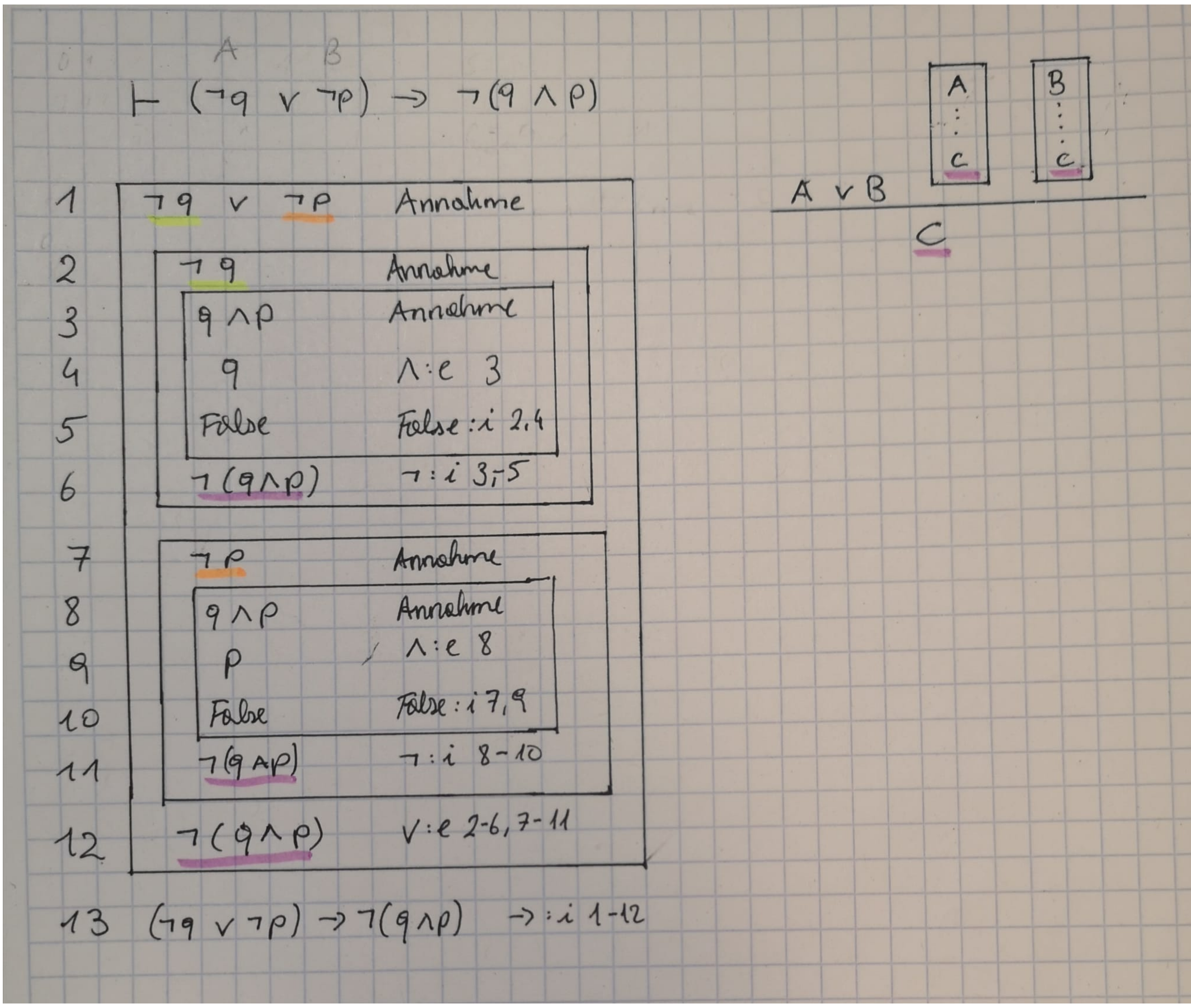
Um $\lor$ zu eliminieren, muss A und B jeweils seperat angenommen werden, sollten beide zu der gleichen Ableitung kommen, dann bleibt wie in der Abbildung nur noch C übrig. Hierbei ist es wichtig A und B in eigene Boxen anzunehmen und schließen.

$$\frac{\text{True} \lor \text{False} \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{True} \\ \text{True} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{False} \\ \text{True} \end{array}}}{\text{True}}\ \lor: e$$

Hier ein Paar beispiele für die Elimination:

Nun wollen wir noch $p \lor q \vdash q \lor p$ zeigen:

1	$p \lor q$	Prämisse	
2	p A	Prämisse	A
3	$q \lor p$	2, $\lor: i$	⋮ C
4	q B	Prämisse	B
5	$q \lor p$	4, $\lor: i$	⋮ C
6	$q \lor p$	1,2-3,4-5, $\lor: e$	



Implikation (wird häufig verwendet)

	Einführung	*Elimination*
$\to$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l} A \\ \vdots \\ B \end{array}}}{A \to B}\ {\color{red}\to: \mathrm{i}}$	$\dfrac{A \quad A \to B}{B}\ {\color{red}\to: \mathrm{e}}$

Man kann $\to$ einführen, wenn innerhalb einer Box A am Anfang steht und man B schließen kann, dann darf man die Implikation einführen.

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l} \text{False} \\ \text{True} \end{array}}}{\text{False} \to \text{True}}\ \to: \mathrm{i}$$

Wenn A bei einer Implikation doppelt vorkommt, dann darf man die Implikation eliminieren und nur B hinschreiben.

$$\dfrac{p \quad p \to q}{q}\ \to: \mathrm{e}$$

Negationsregeln

	Einführung	*Elimination*
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l} A \\ \vdots \\ \text{False} \end{array}}}{\neg A}\ \neg : \text{i}$	$\dfrac{A \quad \neg A}{\text{False}}\ \neg : \text{e}$
False		$\dfrac{\text{False}}{A}\ \text{False} : \text{e}$
$\neg\neg$		$\dfrac{\neg\neg A}{A}\ \neg\neg : \text{e}$

Die einzige Introduction von einer Negation ist die Einführung von $\neg$, welches man durchführen kann wenn aus A innerhalb einer Box **False** zu schließen ist.

Wenn A und $\neg A$ vorliegt, dann darf man **False** daraus schließen. Wichtig hierbei ist das bei dieser Elimination ein False entsteht, welches dann in der selben Introduction verwendet werden kann.

Axiome für die Aussagenlogik nach Frege und Łukasiewicz

Das Kalkül NK ist nicht der einzige vollständige Kalkül für die Aussagenlogik. Das Axiomssystem nach Frege und Łukasiewicz mit Inferenzregel Modus Ponens ist **korrekt und vollständig** für die Aussagenlogik.

Axiome für die Aussagenlogik nach Frege und Łukasiewicz

$$
\begin{array}{ll}
(1) & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\
(2) & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
(3) & (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)
\end{array}
$$