(1) a)

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \cos(7-4x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} + \int \cos(7-4x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{Subst. for second part: } u = 7-4x, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{-4}$$

$$= \int x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\cos(u)}{-4}\,\mathrm{d}u$$

$$= \int x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \cos(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C_1 - \frac{1}{4}\sin(u) + C_2$$

Resubstitution:

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C_1 - \frac{1}{4}\sin(7-4x) + C_2$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{4}\sin(7-4x) + C$$

b)

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}\,\mathrm{d}x = \text{Substitution: } u = x^3+3x, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{3x^2+3}$$

$$= \int \frac{x^2+1}{u} \cdot \frac{1}{3x^2+3}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{x^2+1}{u} \cdot \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u| + C$$

Resubstitution:

$$= \frac{1}{3}\ln\left|x^3+3x\right| + C$$

c)

$$\int \frac{x-1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-1}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \ln(x+1) + C$$

d)

$$\int \sin(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = \text{partial integration with: } f(x) = x, g'(x) = \sin(x)$$

$$\to f(x) = x, f'(x) = 1, g'(x) = \sin x, g(x) = -\cos x$$

$$= -x\cdot\cos x - \int 1\cdot(-\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -x\cdot\cos x + \sin x + C$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\int_0^8 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= [x=\sinh u, \mathrm{d}x = \cosh u\,\mathrm{d}x] \\
&= \int_0^{\sinh^{-1}(8)} \cosh u^2\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sinh^{-1}(8)} \cosh(2u)+1\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{u}{2} + \frac{\sinh 2u}{4}\bigg|_0^{\sinh^{-1}(8)} \\
&= \frac{u}{2} + \frac{\sinh 2u}{4}\bigg|_0^{\sinh^{-1}(8)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sinh^{-1}(8) + \frac{1}{2}\sinh\left(2\sinh^{-1}(8)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sinh^{-1}(8) + 8\cosh\left(\sinh^{-1}(8)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sinh^{-1}(8) + 8\sqrt{65}\right) \\
&\approx 33.637
\end{aligned}
$$

```julia
# Approximiere (*) mit einer adaptiven Gauss-Kronrod Quadratur
using QuadGK
quadgk(x -> sqrt(1 + x^2), 0.0, 8.0)
```

(3) Eine Skizze ist in Abbildung 1 geplottet.

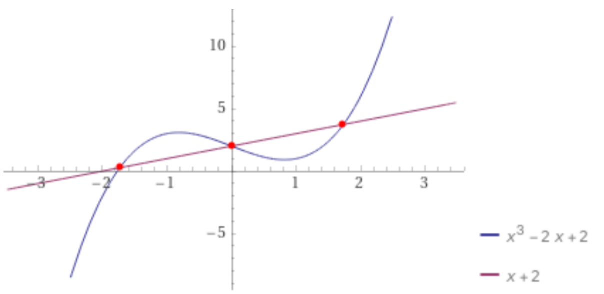

Abbildung 1: The enclosed area between the polynomial function and the line should be comuted

Both functions are given as:

$$f(x) = x^3 - 2x + 2, g(x) = x + 2$$

$$
\begin{aligned}
A = A_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}} &= \int f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\sqrt{3}}^{0} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\sqrt{3}} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^3 - 2x + 2) - (x + 2)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\sqrt{3}} (x+2) - (x^3 - 2x + 2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\sqrt{3}}^{0} x^3 - 3x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\sqrt{3}} -x^3 + 3x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{\sqrt{3}} \\
&= \left[\frac{x^2(x^2-6)}{4}\right]_{-\sqrt{3}}^{0} + \left[\frac{x^2(6-x^2)}{4}\right]_{0}^{\sqrt{3}} \\
&= (0 - \frac{3(3-6)}{4}) + (\frac{3(6-3)}{4} - 0) \\
&= 4.5
\end{aligned}
$$

(4) a) Die Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
v(t) = v(t) - v(0) &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} v(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t v'(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 1.5t & 0 \le t \le 60 \\ 90 & 60 < t \le 150 \\ 90 - \frac{t^2}{300} + t - 75 & 150 < t \le 300 \end{cases}
\end{aligned}
$$

und geplottet in Abbildung 2.

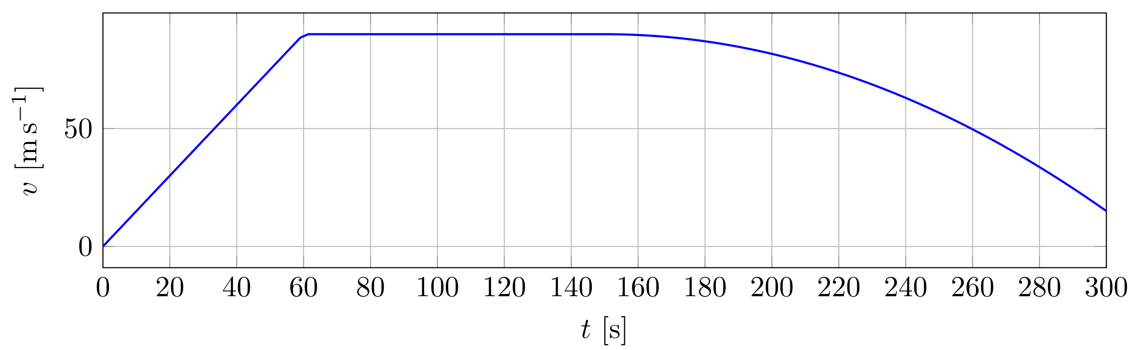

Abbildung 2: Geschwindigkeit $v(t)$.

Die Position ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
x(t) = x(t) - x(0) &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} x(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t x'(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 0.75t^2 & 0 \le t \le 60 \\ 2700 + 90t - 5400 & 60 < t \le 150 \\ 10800 - \frac{t^3}{900} + \frac{t^2}{2} + 15t - 9750 & 150 < t \le 300 \end{cases}
\end{aligned}
$$

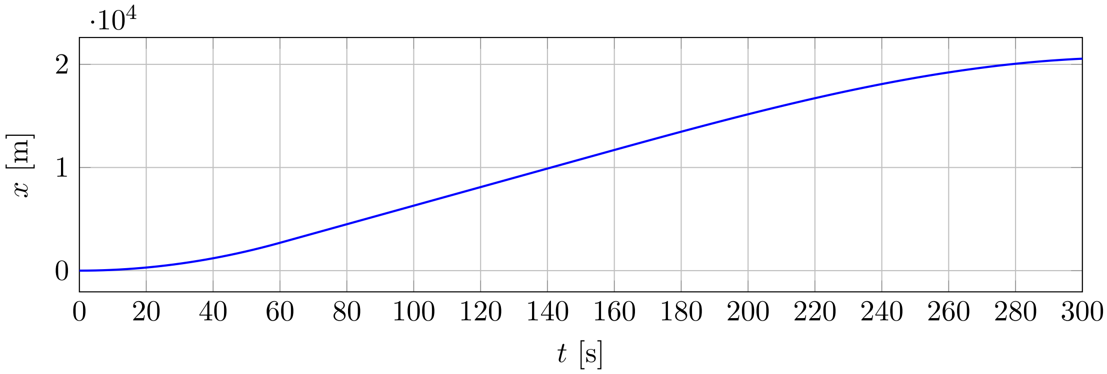

Abbildung 3: Position $x(t)$.

und geplottet in Abbildung 3. Nach $t = 300$ Sekunden ist die Position

$$x(300) = 20550\,.$$

b) Vergleiche das *Julia* Skript `acceleration.jl`.

c) Wir approximieren die Fläche unter der Kurve mit Rechtecken. Falls die Schrittweite 1 beträgt ist auf nichts speziell zu achten. Falls die Schrittweite jedoch auf 5 vergrößert wird müssen die Funktionswerte a_j und v_j vor der Summation mit einem Faktor von 5 multipliziert werden, siehe Abbildung 4.

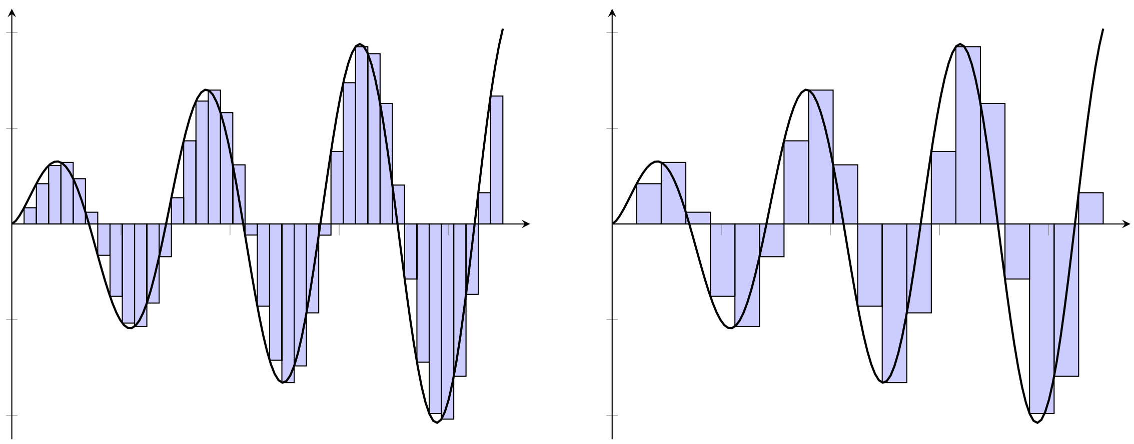

Abbildung 4: Der Bereich unter der Funktionskurve wird in Rechtecke aufgeteilt. Die Fläche jeder dieser Formen wird in Abhängigkeit von einer kleineren (links) oder größeren (rechts) Schrittweite berechnet. Die Addition aller dieser kleinen Flächenelemente ergibt eine numerische Näherung für ein bestimmtes Integral.

(5) a)

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^8 \int_{-4}^4 -\sqrt{\frac{5}{4}}x^2 + 2y + 80 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= -\sqrt{\frac{5}{4}} \cdot 8 \int_0^8 x^2 \mathrm{d}x + 2 \cdot 8 \int_{-4}^4 y\mathrm{d}y + 80 \cdot 8 \cdot 8 \\
&= -4\sqrt{5}\frac{x^3}{3}\bigg|_{x=0}^8 + 16\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=-4}^4 + 5120 \\
&= 5120 - \frac{2048\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}$$

b)

$$\partial_x f = -\sqrt{5}x$$

$$\partial_y f = 2$$

$$(1, 0, \partial_x f)^\intercal \times (0, 1, \partial_y f)^\intercal = (1, 0, -\sqrt{5}x)^\intercal \times (0, 1, 2)^\intercal = (\sqrt{5}x, -2, 1)^\intercal$$

$$\left|(\sqrt{5}x, -2, 1)^\intercal\right| = \sqrt{5x^2 + (-2)^2 + 1} = \sqrt{5}\sqrt{1 + x^2}$$

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^8 \int_{-4}^4 |(1, 0, \partial_x f)^T \times (0, 1, \partial_y f)^T| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{5} \int_0^8 \int_{-4}^4 \sqrt{1 + x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= 8\sqrt{5} \int_0^8 \sqrt{1 + x^2}\mathrm{d}x \\
&\overset{(\star)}{=} 4\sqrt{5}\left(\sinh^{-1}(8) + 8\sqrt{65}\right)
\end{aligned}$$