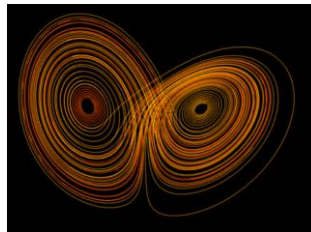


Angewandte Mathematik Differentialgleichungen

Dr. Marcel Ritter
Univ.-Prof. Dr. Matthias Harders
Sommersemester 2022



Einführungsfilme

ACIN

AUTOMATION & CONTROL INSTITUTE
INSTITUT FÜR AUTOMATISIERUNGS-
& REGELUNGSTECHNIK

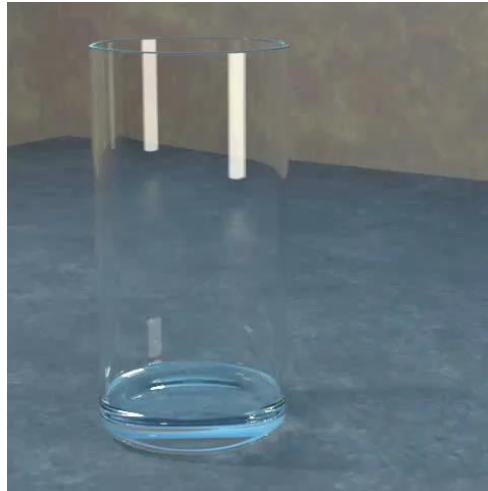
**TU
WIEN**

Triple Pendulum on a Cart Swing-up and Swing-down

Two-degrees-of-freedom design:
Constrained feedforward & optimal feedback control

© CDS - Complex Dynamical System Group, 2011

Einführungsfilme



Inhalt

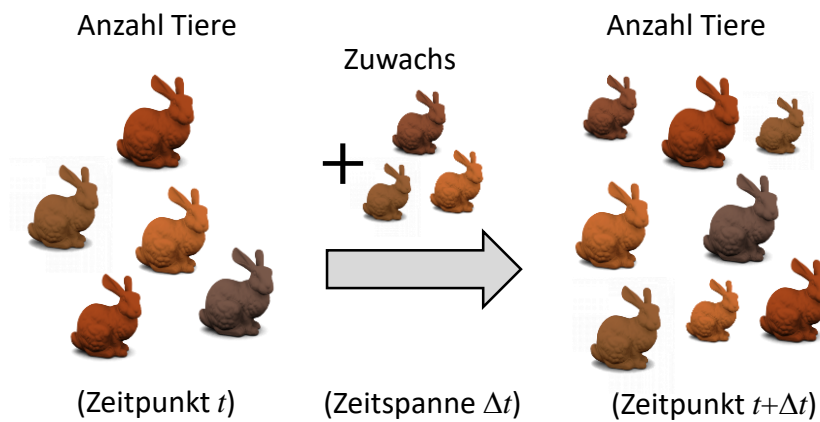
- Einführung
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Partielle Differentialgleichungen
- Numerische Lösung

Inhalt

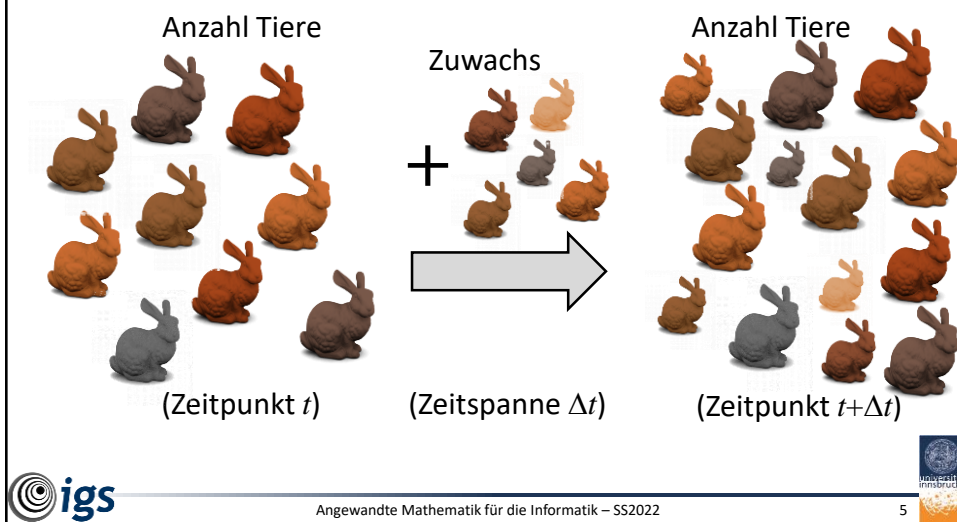
- Einführung
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Partielle Differentialgleichungen
- Numerische Lösung



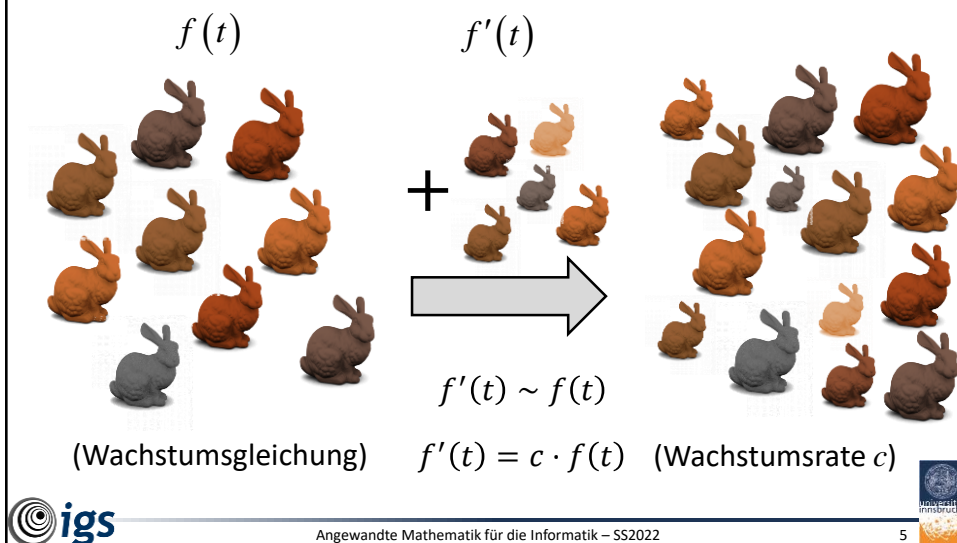
Motivation



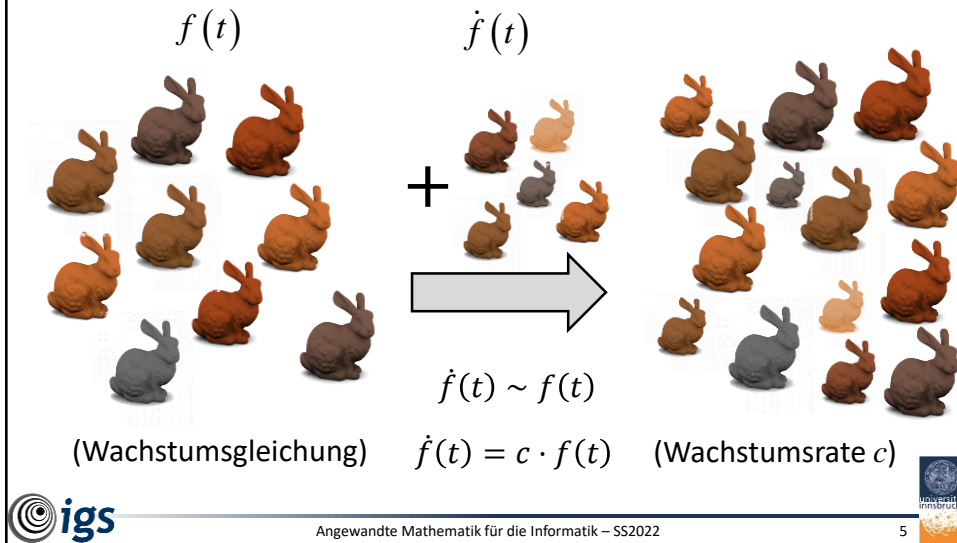
Motivation



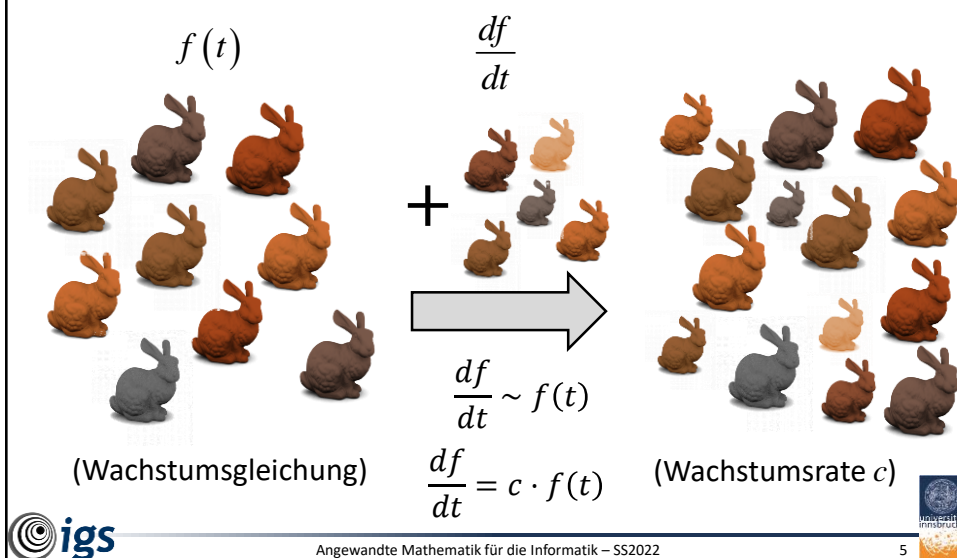
Motivation



Motivation



Motivation

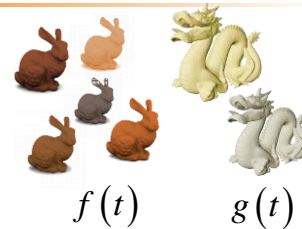


Motivation

- Räuber-Beute Modell
(Lotka-Volterra Gleichungen)

$$\dot{f}(t) = \alpha \cdot f(t) - \beta \cdot f(t) g(t)$$

$$\dot{g}(t) = \delta \cdot f(t) g(t) - \gamma \cdot g(t)$$



- Populationen Beute sowie Räuber $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
(gesuchte Funktionen) mit Konstanten $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}^+$

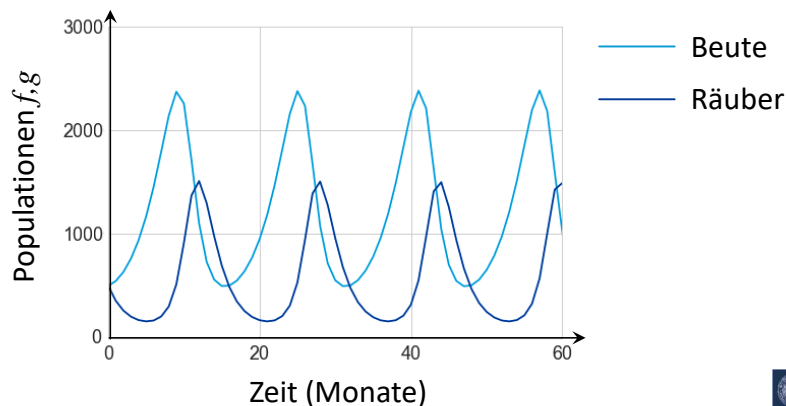
- Modell-Parameter

- Wachstumsrate Beute α , Sterberate Räuber γ (keine Beute)
- Verzehrrate Beute je Räuber β , Wachstumsrate Räuber bei verzehrter Beute δ



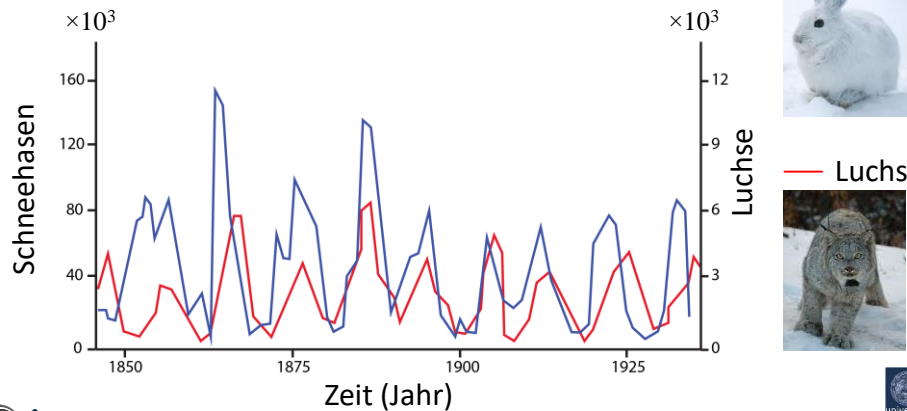
Motivation

- Beispielsimulation: Veränderung über Zeit



Motivation

- Vergleich: gemessene Populationsdaten

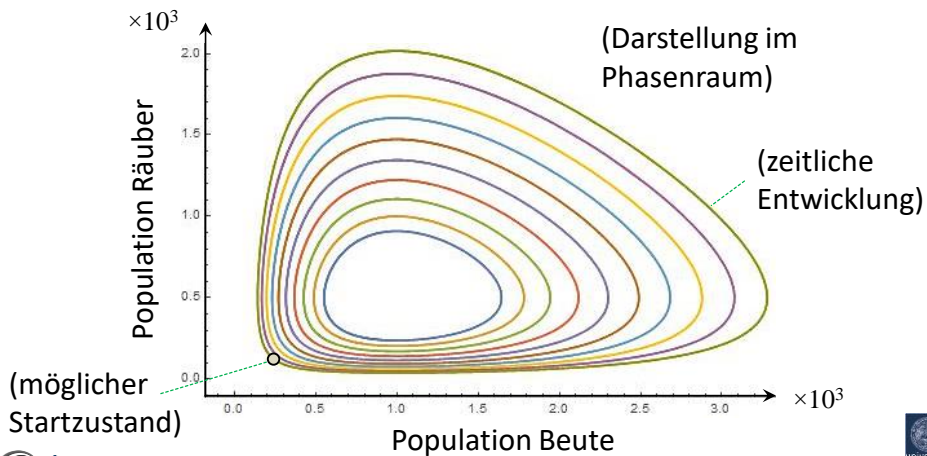


Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

8

Motivation

- Beispielsimulation: Räuber-Beute Graph

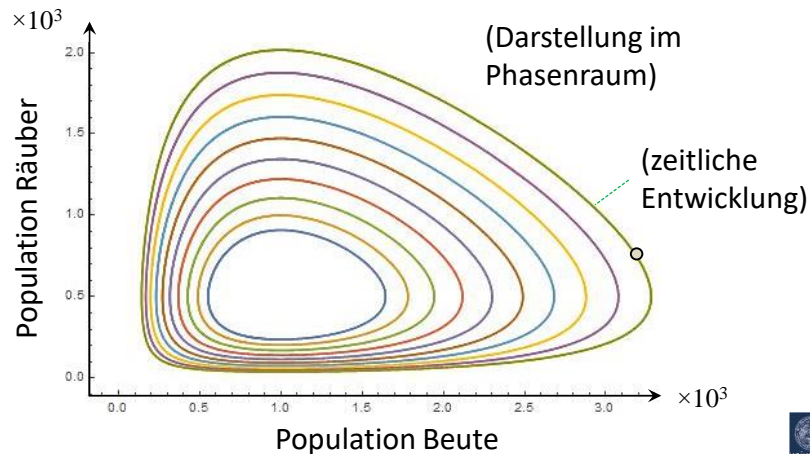


Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

9

Motivation

- Beispielsimulation: Räuber-Beute Graph



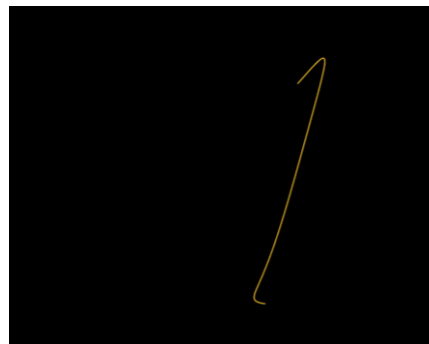
Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

9

Motivation

- Deterministisch-chaotisches Verhalten
(Lorenz-Attraktor)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$



- Gesuchte Funktionen
 $x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (abhängig von t)
mit Konstanten $\sigma, \rho, \beta \in \mathbb{R}^+$

Differentialgleichung/en (DGL)

- DGL setzen eine unbekannte, gesuchte Funktion (welche z.B. eine physikalische Größe beschreibt) in Beziehung mit einer oder mehreren ihrer Ableitungen
- Oft verwendet zur Beschreibung physikalischer Gesetze und Phänomene (z.B. Erhaltungssätze)
- Insbesondere zur Modellierung dynamischer Prozesse (z.B. Wachstum oder Zerfall)



Differentialgleichungen

- In DGL sind eine oder mehrere unbekannte Funktion/en gesucht, die diese Gleichung(en) erfüllen
- Bisher haben wir nur Gleichungen/Ungleichungen betrachtet, in denen die gesuchten Unbekannten bestimmte Zahlenwerte darstellen (z.B. Nullstellen)
- Schreibweise: in DGL wird anstatt $f(x)$ oft $y(x)$ verwendet, bzw. sogar nur die unbekannte Funktion y notiert (d.h. ohne Nennung der Variablen)

$$\frac{df(t)}{dt} = c \cdot f(t) \qquad \dot{y} = c \cdot y$$

Allgemeine und Spezielle Lösungen

- Beispiel Wachstumsgleichung $\dot{y} = \lambda \cdot y$
- Mögliche Lösung $y(t) = e^{\lambda t}$, denn es gilt

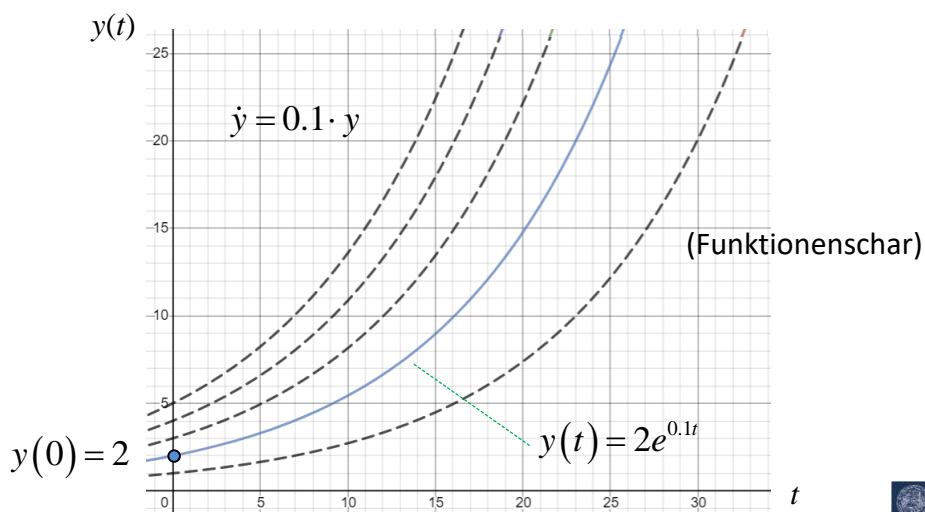
$$\dot{y} = (y(t))' = (e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$$
- Weitere (allgemeine) Lösungen $y(t) = ke^{\lambda t}$, denn

$$\dot{y} = (y(t))' = (ke^{\lambda t})' = \lambda ke^{\lambda t}$$
- Exakte (spezielle) Lösung wird fixiert durch Hinzunahme von Randbedingung bzw. eines Anfangswertes, z.B. zur Zeit $t = 0$ (Anfangswertproblem)

(Beispiel) $\dot{y} = 0.1 \cdot y \wedge y(0) = 2 \Rightarrow y(t) = 2e^{0.1t}$



Allgemeine und Spezielle Lösungen



Differentialgleichungen – Arten

- **Gewöhnliche Differentialgleichungen (GDGL)**

beschreiben unbekannte Funktionen mittels ihrer Ableitungen, hinsichtlich einer Veränderlichen

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = m\mathbf{a}(t) = m\ddot{\mathbf{x}}(t) \quad (3D \text{ Bewegungsgleichung})$$

(Zeit t)

- **Partielle Differentialgleichungen (PDGL)**

beschreiben unbekannte Funktionen mittels ihrer Ableitungen, hinsichtlich mehrerer Veränderlicher

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad (1D \text{ Wellengleichung})$$

(Ort x) (Zeit t)



Ordnung

- Eine Differentialgleichung, in der die Ableitungen der unbekannten Funktion y bis zur n -ten Ordnung auftreten, hat die Ordnung n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)})$$

- Beispiele:

$$y' = a(x) \cdot y + b(x) \quad (\text{GDGL 1. Ordnung})$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \quad (\text{PDGL 2. Ordnung})$$



Linearität

- Eine lineare Differentialgleichung ist durch ein lineares Polynom gegeben, mittels der unbekannten Funktion und ihrer Ableitungen, in der Form

$$a_n(\cdot) y^{(n)} + a_{n-1}(\cdot) y^{(n-1)} + \dots + a_1(\cdot) y' + a_0(\cdot) y + b(\cdot) = 0$$

mit differenzierbaren, aber nicht notwendigerweise linearen Funktionen (oder Konstanten) $a_i(\cdot)$ und $b(\cdot)$

- Es dürfen somit z.B. keine Funktionen auf die Ableitungen angewandt werden, sowie auch keine Produkte zwischen diesen gebildet werden



Linearität – Beispiele

- Lineare DGL

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

- Nicht-lineare DGL

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad y'' = 2 \cos(y)$$



Differentialgleichungssysteme

- DGL können in Systeme von (evtl. gekoppelten) Differentialgleichungen zusammengefasst werden
- Häufiges Beispiel: lineare Systeme von GDGL erster Ordnung, mit n unbekannten Funktionen y_i , sowie allgemeinen Funktionen $a_{ij}(x)$ und $b_i(x)$

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{aligned}$$



Beispiel Benennung DGL

- Deterministisch-chaotisches Verhalten (Lorenz-Attraktor)

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \qquad \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \qquad \frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

- Art des Modells
 - Gewöhnliche DGL (Abhängig von Zeit t als Variable)
 - GDGL 1. Ordnung (nur 1. Ableitungen vorhanden)
 - Gekoppeltes System mit drei unbekannten Funktionen x, y, z
 - Nichtlinear (z.B. aufgrund von Term xy und xz)
 - Üblicherweise als Anfangswertproblem betrachtet



Inhalt

- Einführung
- **Gewöhnliche Differentialgleichungen**
- Partielle Differentialgleichungen
- Numerische Lösung



Explizite und Implizite GDGL

- Eine GDGL n -ter Ordnung mit unbekannter Funktion y , deren Ableitungen, sowie der unabhängigen Veränderlichen x wird implizit genannt in der Form:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

- Durch Auflösung der Gleichung nach der höchsten Ableitung $y^{(n)}$, ist sie in expliziter Form darstellbar

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

- Beispiel:

$$a(\sin(y'))^2 - bxy = 0$$

(implizit)

$$y'' = \ln(a + (y')^2)$$

(explizit)



Homogene und Inhomogene GDGL

- In einer GDGL n -ter Ordnung können Terme, die nicht von der unbekannten Funktion abhängen separiert werden:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = g(x)$$

- Die GDGL wird homogen genannt für $g(x) = 0$, bzw. inhomogen für $g(x) \neq 0$
- Die Funktion $g(x)$ wird auch Störfunktion genannt
- Oft werden zuerst allgemeine Lösungen für eine homogene GDGL bestimmt, und dann spezifisch für die Störfunktion eine partikuläre Lösung



Weitere Beispiellösungen für GDGL

- Beispiel: eine lineare GDGL 2. Ordnung

$$y'' + y = 0$$

- Allgemeine Lösungen

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Nachprüfen

$$\begin{aligned} (y(x))'' &= (c_1 \sin x + c_2 \cos x)'' \\ &= (c_1 \cos x - c_2 \sin x)' = -c_1 \sin x - c_2 \cos x \end{aligned}$$

- Bestimmung der speziellen Lösung z.B. durch Annahme von Anfangsbedingungen für y und y'



Weitere Beispiellösungen für GDGL

- Beispiel: eine lineare GDGL 2. Ordnung

$$x^2 y'' + x^2 y' - 2y = 0$$

- Eine mögliche Lösung

$$y(x) = 1 - \frac{2}{x}$$

- Nachprüfen

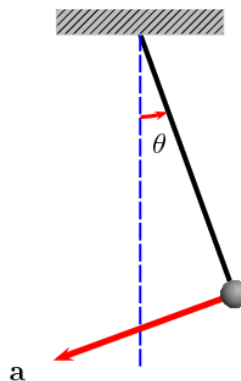
$$y'(x) = \frac{2}{x^2} \quad y''(x) = -\frac{4}{x^3}$$

$$-x^2 \frac{4}{x^3} + x^2 \frac{2}{x^2} - 2 \left(1 - \frac{2}{x} \right) = -\frac{4}{x} + 2 - 2 + \frac{4}{x} = 0$$



Modellierung Ideales Fadenpendel

[<http://commons.wikimedia.org>]



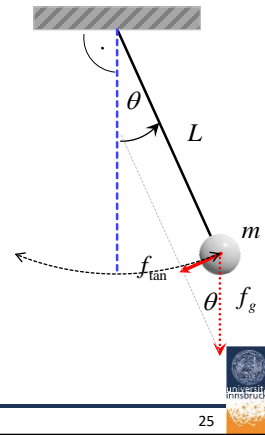
Modellierung Ideales Fadenpendel

- Punktemasse m an masselosem Faden der Länge L , keine Energiedissipation, Kreisbewegung in Ebene
- Bewegung nach Newton (2. Gesetz)

$$f_{\text{tan}} = m \cdot a_{\text{tan}}$$

- Tangentialkraft

$$f_{\text{tan}} = \sin(-\theta) f_g$$



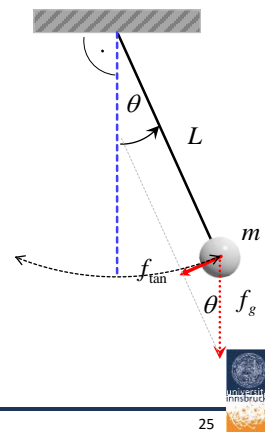
Modellierung Ideales Fadenpendel

- Punktemasse m an masselosem Faden der Länge L , keine Energiedissipation, Kreisbewegung in Ebene
- Bewegung nach Newton (2. Gesetz)

$$f_{\text{tan}} = m \cdot a_{\text{tan}}$$

- Tangentialkraft

$$f_{\text{tan}} = -\sin(\theta) f_g$$



Modellierung Ideales Fadenpendel

- Punktemasse m an masselosem Faden der Länge L , keine Energiedissipation, Kreisbewegung in Ebene
- Bewegung nach Newton (2. Gesetz)

$$f_{\text{tan}} = m \cdot a_{\text{tan}}$$

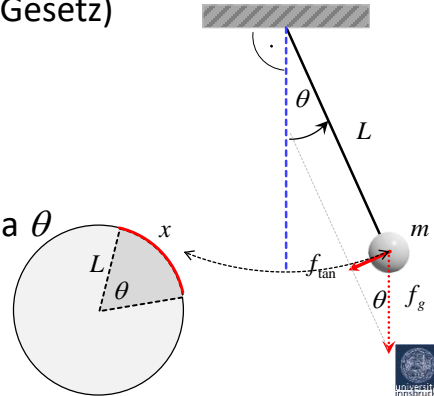
- Tangentialkraft

$$f_{\text{tan}} = -\sin(\theta)mg$$

- Tangentialbeschleunigung via θ

$$a_{\text{tan}} = \dot{v}_{\text{tan}} = \ddot{x}_{\text{tan}}$$

$$x = \theta L$$



Modellierung Ideales Fadenpendel

- Punktemasse m an masselosem Faden der Länge L , keine Energiedissipation, Kreisbewegung in Ebene
- Bewegung nach Newton (2. Gesetz)

$$f_{\text{tan}} = m \cdot a_{\text{tan}}$$

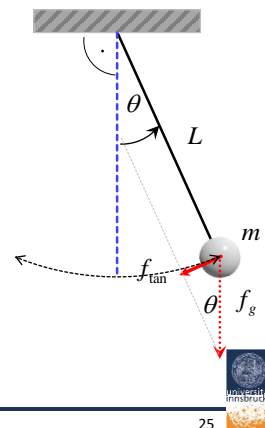
- Tangentialkraft

$$f_{\text{tan}} = -\sin(\theta)mg$$

- Tangentialbeschleunigung via θ

$$a_{\text{tan}} = \dot{v}_{\text{tan}} = \ddot{x}_{\text{tan}}$$

$$x = \theta L \Rightarrow a_{\text{tan}} = \frac{d^2}{dt^2} \theta L$$



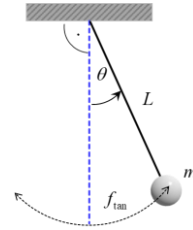
Modellierung Ideales Fadenpendel

- Bewegungsgleichung

$$-\sin(\theta)mg = Lm \frac{d^2}{dt^2} \theta$$

- Nicht-lineare, implizite, homogene GDGL 2. Ordnung für unbekannte Funktion $\theta(t)$
- Es existieren für diese Gleichung keine einfachen, elementaren Lösungen
- Darstellung als System von zwei GDGL 1. Ordnung

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta = -\frac{g}{L} \sin(\theta)$$



Modellierung Ideales Fadenpendel

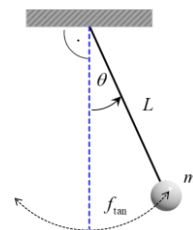
- Bewegungsgleichung (unabhängig von m)

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0$$

- Nicht-lineare, implizite, homogene GDGL 2. Ordnung für unbekannte Funktion $\theta(t)$
- Es existieren für diese Gleichung keine einfachen, elementaren Lösungen
- Darstellung als System von zwei GDGL 1. Ordnung

$$\frac{d}{dt} \omega = -\frac{g}{L} \sin(\theta)$$

$$\frac{d}{dt} \theta = \omega$$



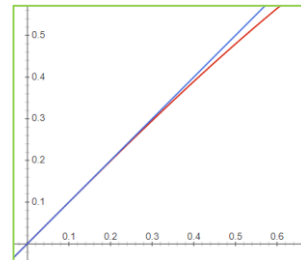
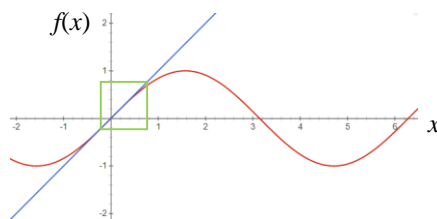
Mathematisches Fadenpendel

- Näherung bei kleinen Winkeln (ca. $<15^\circ$)

$$\theta \approx \sin(\theta)$$

- Resultierende Vereinfachung (bei kleinen Winkeln)

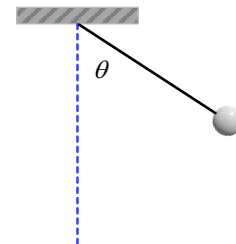
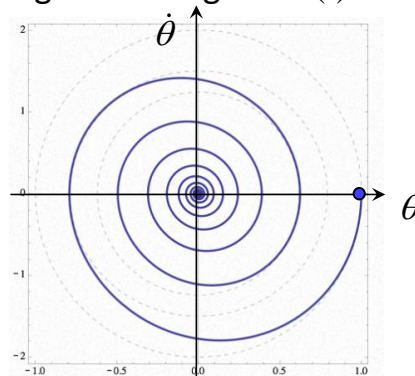
$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad (\text{lineare GDGL})$$



Darstellung im Phasenraum

- Visualisierung möglicher Zustände eines dynamischen Systems, z.B. für ein Fadenpendel über Winkel $\theta(t)$ und Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}(t)$

(Gedämpfte Schwingung)

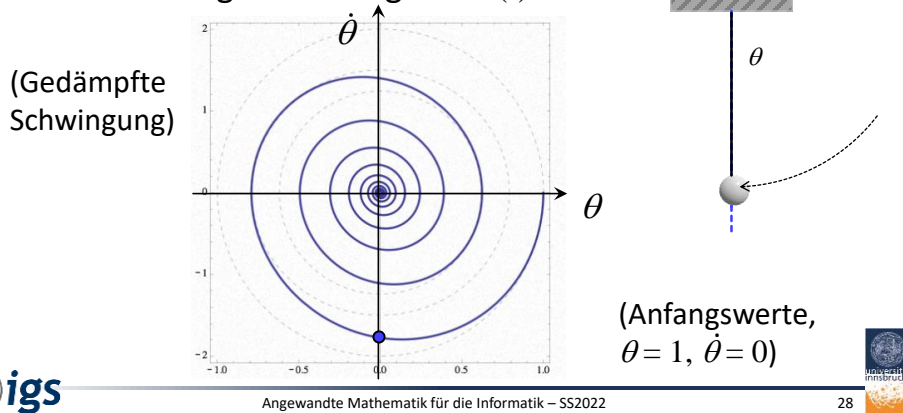


(Anfangswerte,
 $\theta = 1, \dot{\theta} = 0$)



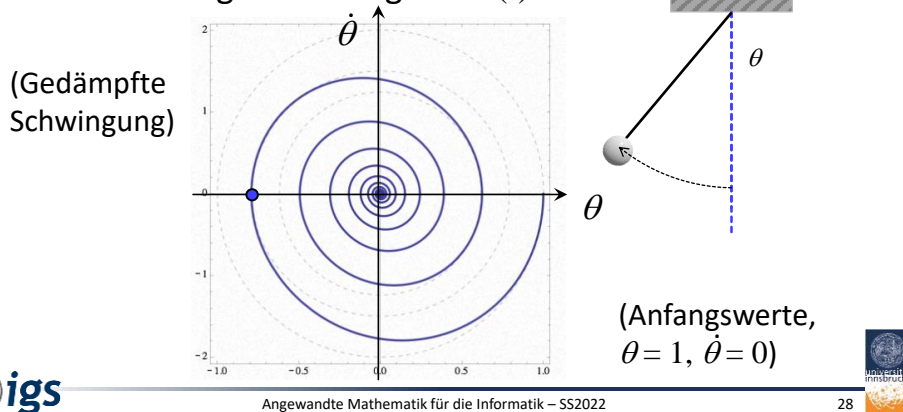
Darstellung im Phasenraum

- Visualisierung möglicher Zustände eines dynamischen Systems, z.B. für ein Fadenpendel über Winkel $\theta(t)$ und Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}(t)$



Darstellung im Phasenraum

- Visualisierung möglicher Zustände eines dynamischen Systems, z.B. für ein Fadenpendel über Winkel $\theta(t)$ und Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}(t)$



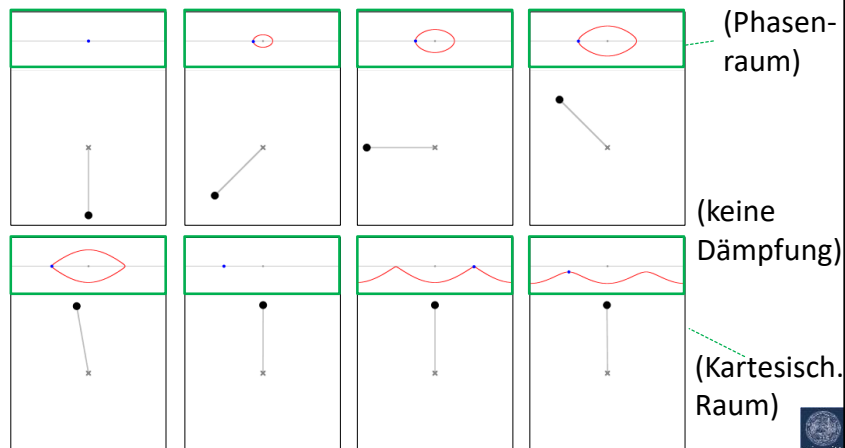
Darstellung im Phasenraum

- Welches Phasenbild passt zu diesem Verhalten?



Darstellung im Phasenraum

- Abhängigkeit vom Anfangszustand (Startwerten)

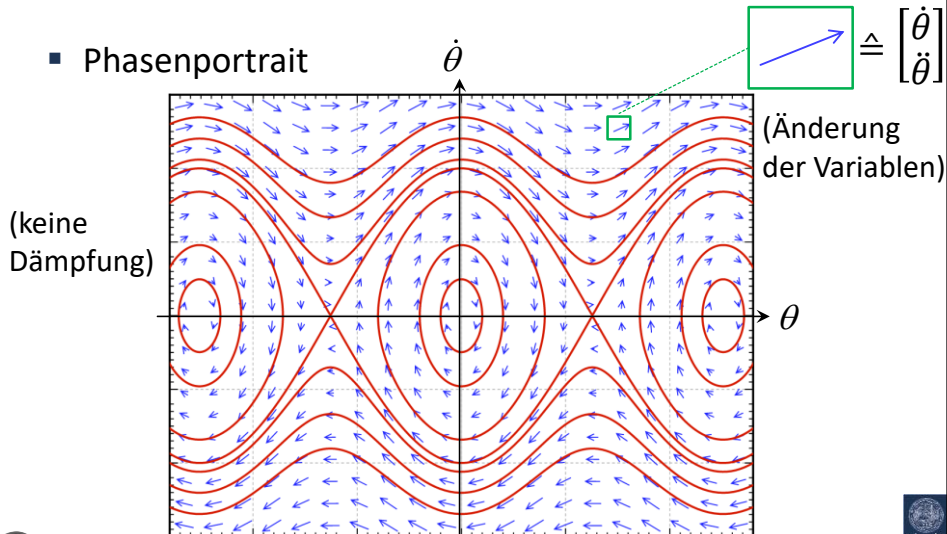


[<http://commons.wikimedia.org>]



Darstellung im Phasenraum

■ Phasenportrait



Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

30



Aspekte bei Analytischer Lösung von DGL

- Existenz von Lösungen: Untersuchung von Bedingungen so dass Lösungen existieren
- Eindeutigkeit von Lösungen: Reduktion mehrerer Lösungen durch Bedingungen auf eine Lösung
- Abhängigkeit von Anfangswerten: Verhalten bei geringer Änderung der Anfangszustände
- Aber: in vielen Fällen ist eine analytische Lösung nicht mehr möglich (statt dessen numerische Ansätze)



Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

31



Beispiel Elementar Lösbarer GDGL

- Lineare GDGL mit konstanten Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

- Ansatz

$$y = e^{\lambda x} \quad y' = \lambda e^{\lambda x} \quad y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

- Einsetzen

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \dots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

(charakteristisches Polynom der linearen GDGL)



Beispiel Elementar Lösbarer GDGL

- Annahme: das charakteristische Polynom P hat n reelle und voneinander verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, dann ist eine allgemeine Lösung:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \quad c_i \in \mathbb{R}$$

- Beispiel:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 2$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$



Auswahl Elementar Lösbarer GDGL

- Explizite lineare GDGL 1. Ordnung

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

- Bernoulli-Differentialgleichung

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)(y(x))^k \quad k \neq 0, 1, k \in \mathbb{R}$$

- Separable Differentialgleichungen (trennbare Variablen)

$$y'(x) = f(y(x)) \cdot g(x)$$

- Spezielle GDGL 1. Ordnung (durch Substitution)

$$y'(x) = f(ax + by(x) + c)$$



Separable Differentialgleichungen

$$y'(x) = f(y(x)) \cdot g(x)$$

- Lösung über Trennung der Variablen und Integration

$$\frac{dy}{dx} = f(y(x)) \cdot g(x) \Rightarrow \frac{dy}{f(y(x))} = g(x) dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{f(y(x))} dy = \int g(x) dx$$



Separable Differentialgleichungen

▪ Beispiel: $y' - (y)^2 x = 0$

$$\frac{dy}{dx} - (y)^2 x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = (y)^2 x$$

$$\frac{dy}{(y)^2} = x dx \quad \bigg/ \int$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int x dx \Rightarrow -y^{-1} + C_f = \frac{1}{2} x^2 + C_g \Rightarrow y = -\frac{2}{x^2 + C}$$



Inhalt

- Einführung
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- **Partielle Differentialgleichungen**
- Numerische Lösung



Partielle Differentialgleichungen

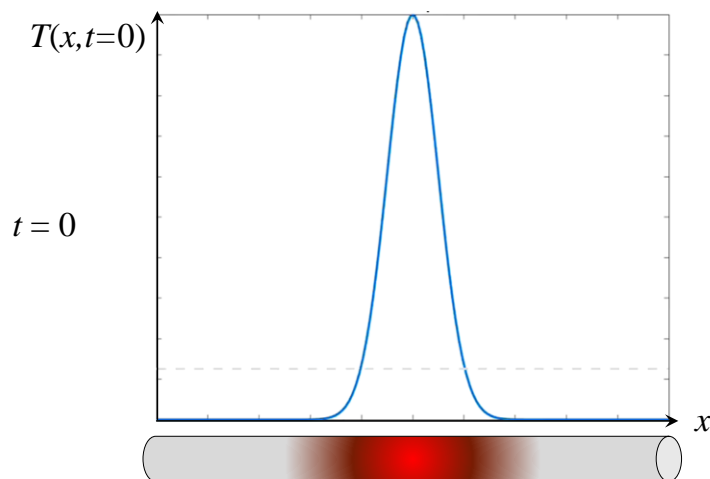
- Beschreibung unbekannter Funktionen mittels ihrer Ableitungen, hinsichtlich mehrerer Veränderlicher
- Beispiel: homogene Wärmeleitungsgleichung (bzw. allgemeine Diffusionsgleichung) in 1D

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \mu \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

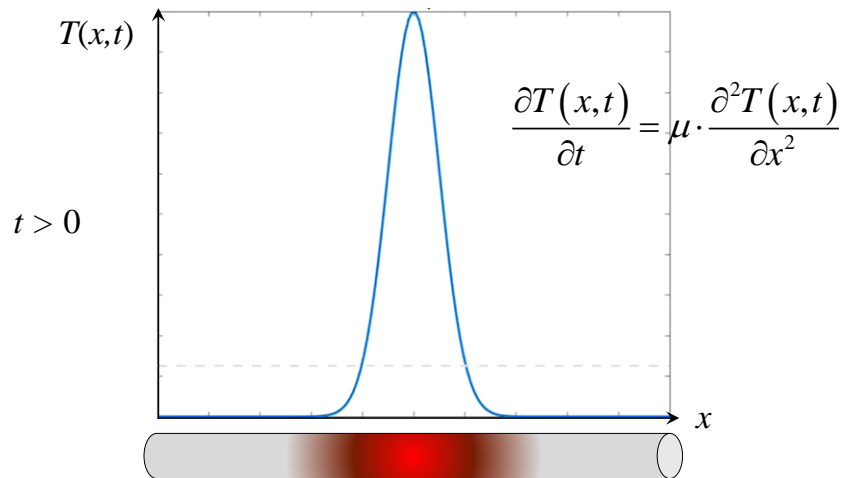
- Änderung der Temperatur als Funktion T , in 1D an einem Ort x , über die Zeit t
- Parameter ist Temperaturleitfähigkeit (bzw. Diffusionskonstante) $\mu > 0$



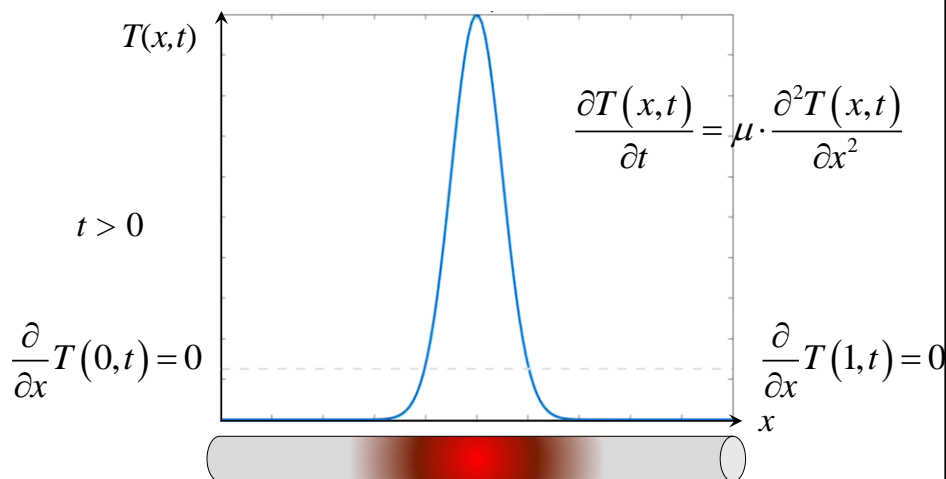
Wärmeleitungsgleichung in 1D



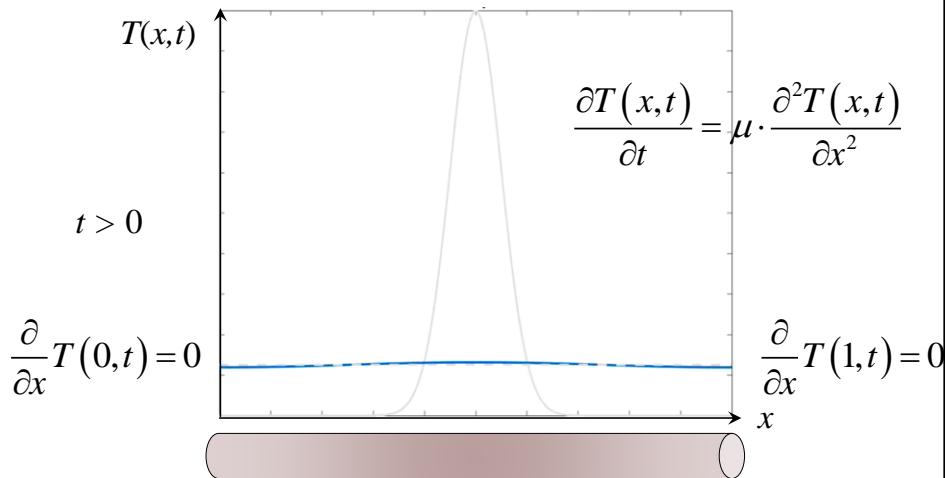
Wärmeleitungsgleichung in 1D



Wärmeleitungsgleichung in 1D



Wärmeleitungsgleichung in 1D

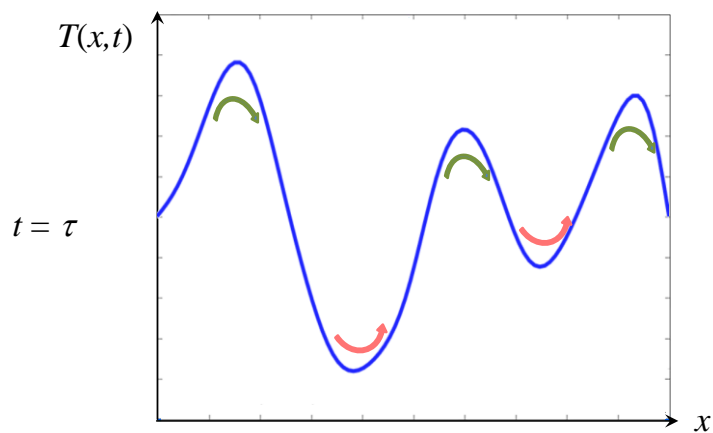


Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

38



Wärmeleitungsgleichung in 1D



$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \mu \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

(Änderung proportional zur Krümmung)

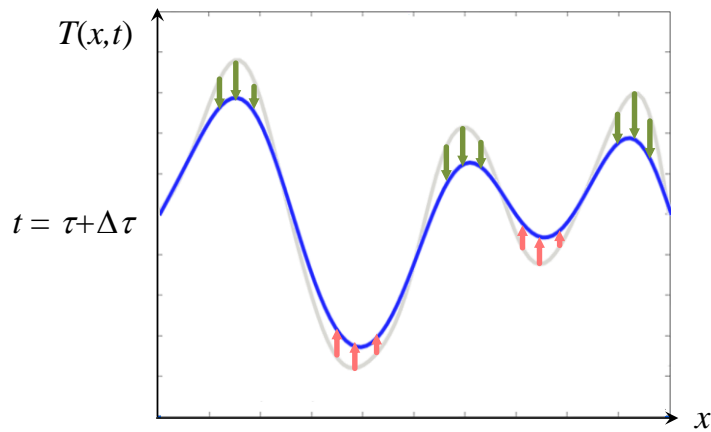


Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

39



Wärmeleitungsgleichung in 1D

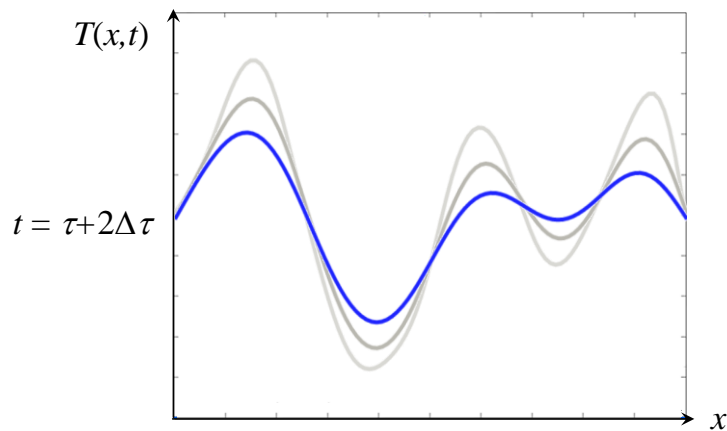


$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \mu \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

(Änderung proportional zur Krümmung)



Wärmeleitungsgleichung in 1D



$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \mu \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

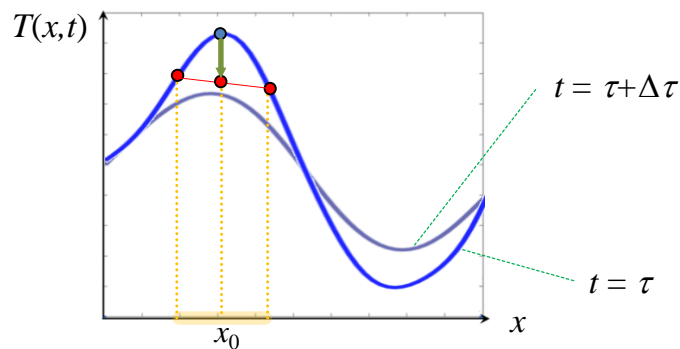
(Änderung proportional zur Krümmung)



Wärmeleitungsgleichung in 1D

- Intuition hinter der Formulierung

$$\frac{\partial^2 T(x_0, t)}{\partial x^2} \approx \frac{T(x_0 - h, t) + T(x_0 + h, t) - 2T(x_0, t)}{h^2}$$

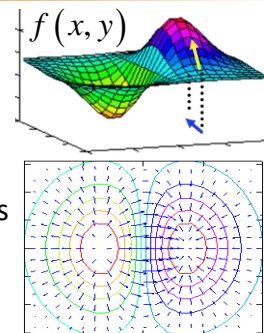


Differentialoperatoren

- Nabla (“Del”) Operator

- Bildet skalare Felder auf Vektoren ab
- Gradient auf einem Skalarfeld
- Vektoren in Richtung des größten Anstiegs

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$



- Beispiel: Gradient auf einem 2D Skalarfeld

$$\nabla f = \text{grad } f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) f = \left(\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

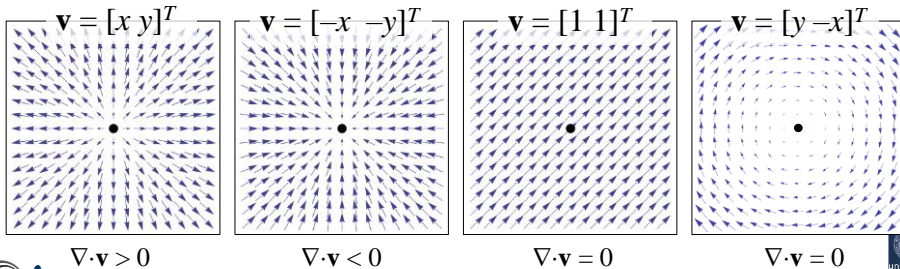
(im Folgenden Beschränkung auf Beispiele in 2D)

Differentialoperatoren

■ Divergenz Operator (2D Beispiel)

- Bildet Vektoren eines Vektorfeldes auf Skalare ab
- Vorzeichen deutet z.B. auf Quelle oder Senke im Vektorfeld hin

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \quad \mathbf{v}(x,y) = [v_1 \ v_2]^T$$



Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

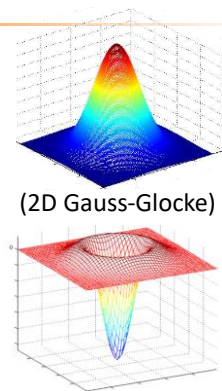
42

Differentialoperatoren

■ Laplace Operator (2D Beispiel)

- Bildet skalare Felder auf Skalare ab
- Beschreibt die Differenz zwischen einem Wert und dem Durchschnitt in seiner Nachbarschaft

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$



(2D Gauss-Glocke)

(Laplace von Gauss-Glocke)

■ Laplace Operator auf Skalarfeld

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$



Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

43

Klassifizierung PDGL 2. Ordnung

- Physikalische Phänomene werden oft als lineare partielle DGL 2. Ordnung modelliert, z.B. in 2D

$$a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{xy} + c \cdot u_{yy} + d \cdot u_x + e \cdot u_y + k \cdot u = g(x, y)$$

- Typ dieser PDGL hängt von den Parametern ab

- **Hyperbolisch:** $b^2 - 4ac > 0$
- **Parabolisch:** $b^2 - 4ac = 0$
- **Elliptisch:** $b^2 - 4ac < 0$

(Diskriminante)



Hyperbolische PDGL

- Beschreiben typischerweise Phänomene der Wellenausbreitung (z.B. Schwingung Saite, Wasser, Licht, etc.)
- Meistens zeitabhängige Prozesse, mit gegebenen Anfangswert- und/oder Randbedingungen
- Beispiel: 1D Wellengleichung

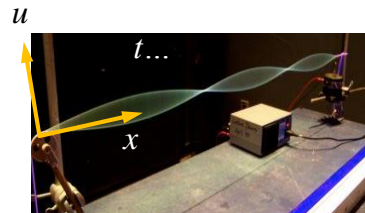
$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$u(x, t)$$

$$u(x, 0) = g(x)$$

$$x \in [0, L]$$

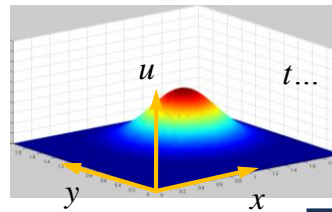
$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t \in [0, T]$$



Parabolische PDGL

- Beschreiben typischerweise Diffusionsprozess (z.B. Wärmeleitung, Vermischung von Chemikalien)
- Meistens zeitabhängige Prozesse, mit gegebenen Anfangswert- und/oder Randbedingungen
- Beispiel: 1D Wärmediffusion (unten: 2D Beispiel)

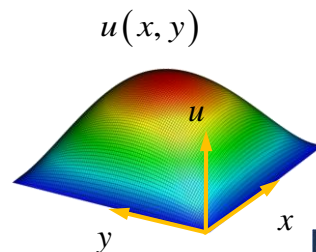
$$\begin{aligned}
 u_t &= \alpha u_{xx} + f & u(x, t) \\
 u(x, 0) &= g(x) & x \in [0, L] \\
 u(0, t) &= c_1 & t \in [0, T] \\
 u(L, t) &= c_2
 \end{aligned}$$



Elliptische PDGL

- Beschreiben typischerweise zeitunabhängige Zustände minimaler Energie (z.B. Deformation einer Membran)
- Meistens (quasi-)statische Situationen, mit gegebenen Randbedingungen
- Beispiel: 2D Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned}
 u_{xx} + u_{yy} &= \nabla^2 u = \Delta u = f \\
 u(x, y) &= g(x, y) \quad (x, y) \in \partial\Omega
 \end{aligned}$$



Inhalt

- Einführung
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Partielle Differentialgleichungen
- **Numerische Lösung**



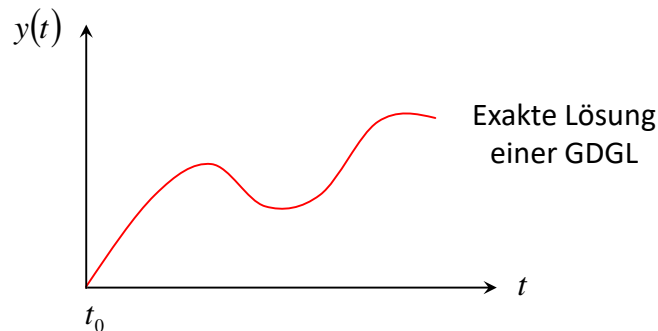
Lösung von Differentialgleichungen

- Analytische Lösungen können oft nur für sehr einfache Probleme gefunden werden
- Erlaubt Berechnung exakter Lösung $y(t)$, für jede Zeit t
- Numerische Analyse zielt auf die automatische Berechnung von Näherungslösungen ab
- Verschiedene numerische Löser existieren
- Beispiel für eine Lösungsstrategie
 - Finite Differenzen: Annäherung der Ableitungen durch Differenzenformeln auf gegebenem Gitter/Netz



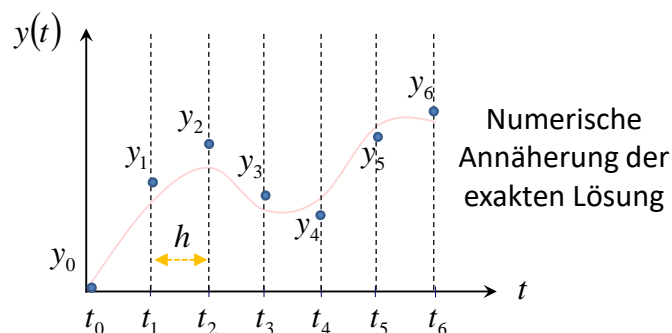
Numerische Lösung von DGL

- Berechnet Näherungen y_n an die exakte Lösung $y(t_n)$
- Jeweils zu einem bestimmten Zeitpunkt $t_n = t_0 + n \cdot h$
(meist basierend auf vorherigen Lösungen y_{n-1}, y_{n-2}, \dots)



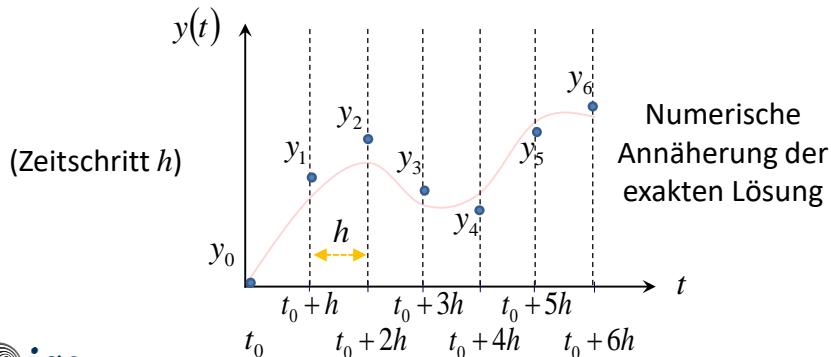
Numerische Lösung von DGL

- Berechnet Näherungen y_n an die exakte Lösung $y(t_n)$
- Jeweils zu einem bestimmten Zeitpunkt $t_n = t_0 + n \cdot h$
(meist basierend auf vorherigen Lösungen y_{n-1}, y_{n-2}, \dots)



Numerische Lösung von DGL

- Berechnet Näherungen y_n an die exakte Lösung $y(t_n)$
- Jeweils zu einem bestimmten Zeitpunkt $t_n = t_0 + n \cdot h$
(meist basierend auf vorherigen Lösungen y_{n-1}, y_{n-2}, \dots)



Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

49



Beispiel Numerische Lösung

- Explizites Eulerverfahren (Euler 1768) zur Lösung eines Anfangswertproblems einer GDGL 1. Ordnung

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

- Iterative Berechnung der angenäherten Lösung

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n), \quad f(t_n, y_n) = y'_n$$

- Generelle Vorgehensweise im Lösungsprozess

- Start mit dem bekannte Anfangswert y_0 zur Zeit t_0
- Berechnung der Ableitung zu t_n (anfangs $n=0$) mittels DGL
- Schritt von t_n nach $t_n + h$ entlang der (angenäherten) Tangente (d.h. über Ableitung an t_n)

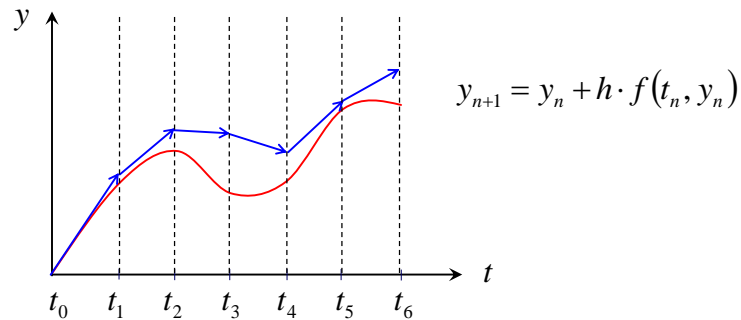


Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

50



Visualisierung Eulerverfahren



- Numerische Lösung weist beträchtlichen Fehler auf
- Fehler abhängig von Schrittgröße, sowie Genauigkeit der numerischen Methode

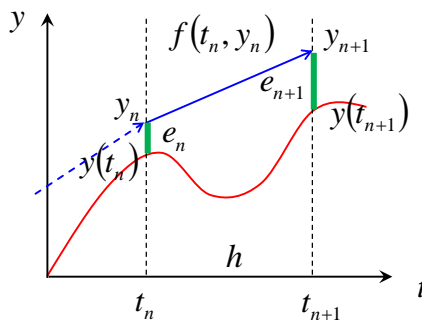


Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

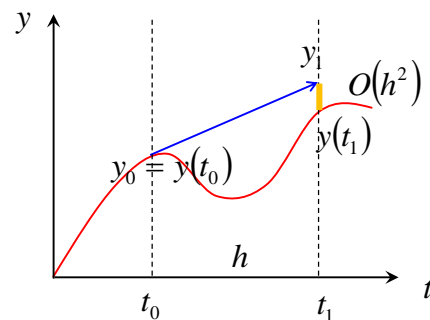
51



Fehler in Numerischen Methoden



Globaler
Diskretisierungsfehler



Lokaler
Diskretisierungsfehler



Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

52



Einige Hilfreiche Weblinks

- Weiteres Beispiel für hilfreiches Online-Lehrmaterial:
Kurs von Prof. Gilbert Strang (MIT OpenCourseWare)
- Teil A: „Highlights of Calculus“
https://ocw.mit.edu/resources/res-18-005-highlights-of-calculus-spring-2010/highlights_of_calculus/
- Teil B: „Derivatives“
https://ocw.mit.edu/resources/res-18-005-highlights-of-calculus-spring-2010/highlights_of_calculus/



Vorlesungsplan

Datum	Thema	Proseminar
11.03.22	Einführung, Grundlagen, Funktionen	(Beginn zuvor am 8.3.)
18.03.22	Differentialrechnung	
25.03.22	Integralrechnung	
01.04.22	Differentialgleichungen	
08.04.22	Weitere Funktionen	
Osterferien		
29.04.22	Reihen und Folgen	
06.05.22	Numerische Auswertung von Funktionen	
13.05.22	Lösung von Gleichungssystemen	
20.05.22	Interpolation	
27.05.22	Zufallszahlen	
03.06.22	Komplexe Zahlen	
10.06.22	Klausurvorbereitung	
01.07.22	Klausur	

