Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 5

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
(z.B. bis So. 8. November 2020, 23:59 Uhr)

Aufgabe 17

Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Das zu $a \in G$ inverse Element bezeichnen wir mit a^{-1}. Zeigen Sie, dass für $a, b, c \in G$ stets gilt

(a) $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$
(b) $(a^{-1})^{-1} = a$.
(c) $a * c = b * c \;\Rightarrow\; a = b$.

Lösung: (a) Wir müssen zeigen dass $b^{-1} * a^{-1}$ das inverse Element zu $a * b$ ist. Dazu rechnen wir

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e$$
$$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * (a^{-1} * a) * b = b^{-1} * e * b = b^{-1} * b = e.$$

Da das inverse Element eindeutig bestimmt ist, beweist das die Aussage.

(b) Wir müssen zeigen dass a das inverse Element zu a^{-1} ist. Dazu rechnen wir

$$a^{-1} * a = e \quad \text{und} \quad a^{-1} * a = e.$$

Da das inverse Element eindeutig bestimmt ist, beweist das die Aussage.

(c) Wir multiplizieren die Gleichung $a * c = b * c$ von rechts mit c^{-1} und erhalten dadurch

$$a = a * e = a * c * c^{-1} = b * c * c^{-1} = b * e = b.$$

□

Häufige Probleme bei Aufgabe 17:

- Man darf hier nicht einfach mit Brüchen arbeiten. a^{-1} steht für *das inverse Element zu a*. Es als $\frac{1}{a}$ zu schreiben fügt keine neue Erkenntnis hinzu und verleitete höchstens zu falschen oder nicht gerechtfertigten Schlüssen.
- Es dürfen keine aus den reellen Zahlen bekannten Rechenregeln einfach benutzt werden. Jeder einzelne Schluss muss allein mit den Gruppenaxiomen gerechtfertigt werden können.
- Die Gruppe ist nicht als kommutativ vorausgesetzt!
- Man darf in einem Beweis nicht die zu beweisende Aussage voraussetzen und daraus eine wahre Aussage ableiten. Man muss umgekehrt eine wahre Aussage voraussetzen und daraus die zu beweisende Aussage ableiten.

Aufgabe 18

Sei $G = \{g, h\}$ eine zweielementige Menge. Bestimmen Sie alle Verknüpfungen

$$*\colon G \times G \to G,$$

welche G zu einer Gruppe machen (zum Beispiel durch Angabe der Verknüpfungstafeln).

Lösung: Jede Gruppe braucht ein neutrales Element e. Für $G = \{g, h\}$ gibt es 2 Möglichkeiten, entweder 1) $e = g$ oder 2) $e = h$.
Falls $e = g$, muss gelten $g * g = e * e = e = g$, $g * h = e * h = h$ und $h * g = h * e = h$. Jedes Element der Gruppe braucht ein inverses Element, also auch h. Da schon $h * g = h \neq e$ gilt, muss h das inverse Element zu h sein also $h * h = e = g$.
Im Fall $e = h$ argumentiert man analog und es ergibt sich

$$1)\ e = g \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|cc} * & g & h \\ \hline g & g & h \\ h & h & g \end{array} \qquad \text{und} \qquad 2)\ e = h \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|cc} * & g & h \\ \hline g & h & g \\ h & g & h \end{array}.$$

□

Häufige Probleme bei Aufgabe 18:

- Bitte argumentieren Sie auch, warum Ihre Verknüfpungstafeln wirklich eine Gruppenstruktur liefern.

Aufgabe 19

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 2.2.13 ("$\mathbb{C}$ ist ein Körper").

Lösung: Wir müssen zuerst zeigen, dass $\mathbb{C}$ eine Abelsche Gruppe bezüglich + ist. Wir verwenden dabei, dass $(\mathbb{R}, +)$ eine Abelsche Gruppe ist, abgekürzt mit $\star$.

- Assoziativität:

$$\begin{aligned}[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] + (c_1, c_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) \\ &= ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2) \\ &\overset{\star}{=} (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)) \\ &= (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\ &= (a_1, a_2) + [(b_1, b_2)] + (c_1, c_2)] \quad \checkmark\end{aligned}$$

- Kommutativität:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ &\overset{\star}{=} (b_1 + a_1, b_2 + a_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \quad \checkmark\end{aligned}$$

- Neutrales Element: $(0, 0)$ ✓siehe Skript.
- Inverses Element: Wir zeigen $-(a_1, a_2) = (-a_1, -a_2)$

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) &= (a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2)) \overset{\star}{=} (0, 0) \\ (-a_1, -a_2) + (a_1, a_2) &= ((-a_1) + a_1, (-a_2) + a_2) \overset{\star}{=} (0, 0) \quad \checkmark\end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir, dass die Multiplikation $\cdot$ auf $\mathbb{C}$ assoziativ und kommutativ ist. Wir verwenden, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper ist, abgekürzt mit $\star$.

- Assoziativität:

$$\begin{aligned}[(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)] \cdot (c_1, c_2) &= (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot (c_1, c_2) \\ &= ((a_1 b_1 - a_2 b_2) c_1 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) c_2, (a_1 b_1 - a_2 b_2) c_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) c_1) \\ &\overset{\star}{=} (a_1 (b_1 c_1 - b_2 c_2) - a_2 (b_2 c_1 + b_1 c_2), a_1 (b_1 c_2 + b_2 c_1) + a_2 (b_1 c_1 - a_2 b_2)) \\ &= (a_1, a_2) \cdot (b_1 c_1 - b_2 c_2, b_1 c_2 + b_2 c_1) \\ &= (a_1, a_2) \cdot [(b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2)] \quad \checkmark\end{aligned}$$

- Kommutativität:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) &= (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &\overset{\star}{=} (b_1 a_1 - b_2 a_2, b_1 a_2 + a_1 b_2) = (b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) \quad \checkmark\end{aligned}$$

Im Skript wurde bereits gezeigt, dass $(1,0) \neq (0,0)$ das neutrale Element der Multiplikation ist und dass jedes Element $a = (a_1, a_2) \neq (0,0)$ ein multiplikativ inverses Element hat. Das heißt die Menge der Einheiten ist $\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$.
Wir müssen also nur noch zeigen, dass die Distributivgesetze erfüllt sind.

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2) \cdot [(b_1, b_2)] + (c_1, c_2)] &= (a_1, a_2) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\
&= (a_1(b_1 + c_1) - a_2(b_2 + c_2), a_1(b_2 + c_2) + a_2(b_1 + c_1)) \\
&\stackrel{\star}{=} (a_1b_1 + a_1c_1 - a_2b_2 - a_2c_2, a_1b_2 + a_1c_2 + a_2b_1 + a_2c_1) \\
&\stackrel{\star}{=} (a_1b_1 - a_2b_2 + a_1c_1 - a_2c_2, a_1b_2 + a_2b_1 + a_1c_2 + a_2c_1) \\
&= (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1c_1 - a_2c_2, a_1c_2 + a_2c_1) \\
&= (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \cdot (c_1, c_2) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

- $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ folgt aus $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ und der Kommutativität bezüglich $\cdot$.

$\square$

Häufige Probleme bei Aufgabe 19:

- Vergessen Sie keine der vielen Eigenschaften, die für einen Körper nachgerechnet werden müssen.

Aufgabe 20

Bestimmen Sie die Lösungsmenge (in $\mathbb{C}^2$) des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}
i \cdot x - y &= 1 \\
x - i \cdot y &= 1 - i.
\end{aligned}$$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 1 \\ 1 & -i & 1-i \end{array}\right) \stackrel{1Z \cdot i}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -i & i \\ 1 & -i & 1-i \end{array}\right) \stackrel{1Z+2Z}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -i & i \\ 0 & -2i & 1 \end{array}\right)$$

Aus $-2iy = 1$ folgt durch Multiplikation mit i, dass $-2i^2y = 2y = i$, also $y = \frac{i}{2}$. Weiters muss daher $-x - \frac{i^2}{2} = i$ gelten und damit $x = \frac{1}{2} - i$. Die Lösungsmenge besteht also aus einem Element: $L = \{(\frac{1}{2} - i, \frac{i}{2})\}$. $\square$

Häufige Probleme bei Aufgabe 20:

- Komplexe Brüche sollten keinen Imaginäranteil im Zähler haben. Ein komplexer Bruch kann immer in so eine Form gebracht werden:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bci+adi+bdi^2}{c^2-d^2i^2} = \frac{ac-bd+(bc+ad)i}{c^2+d^2}.$$