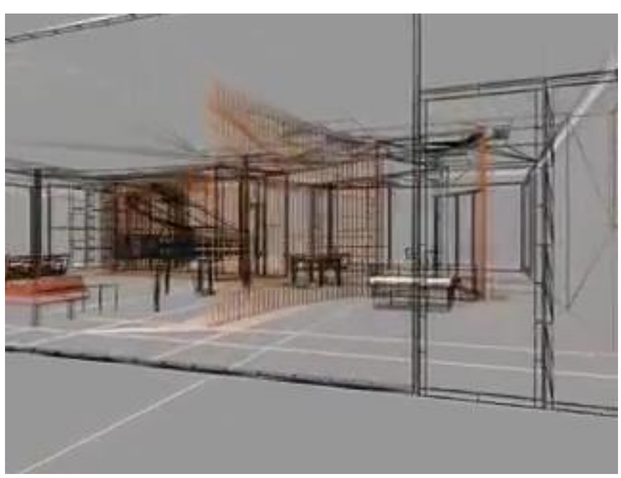
Angewandte Mathematik
Integralrechnung

Dr. Marcel Ritter
Univ.-Prof. Dr. Matthias Harders
Sommersemester 2022

Einführungsfilm



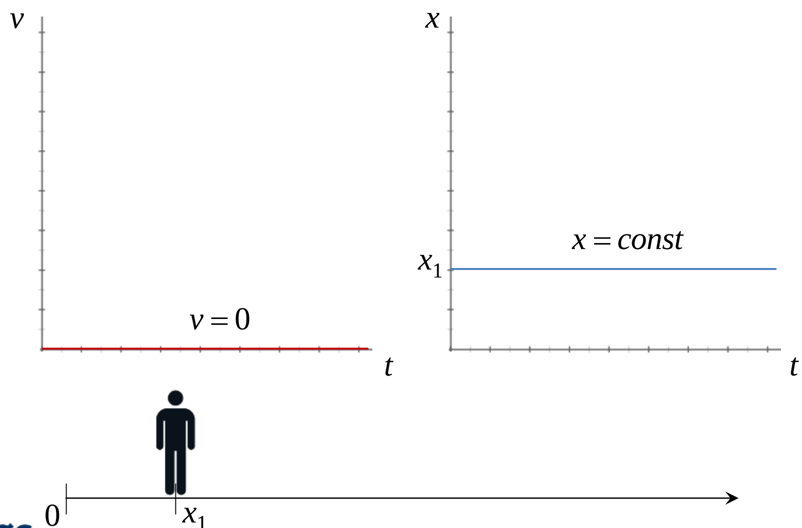
Inhalt

- Einführung
- Sätze der Integralrechnung
- Integrationsregeln
- Mehrdimensionale Integration
- Anwendungen

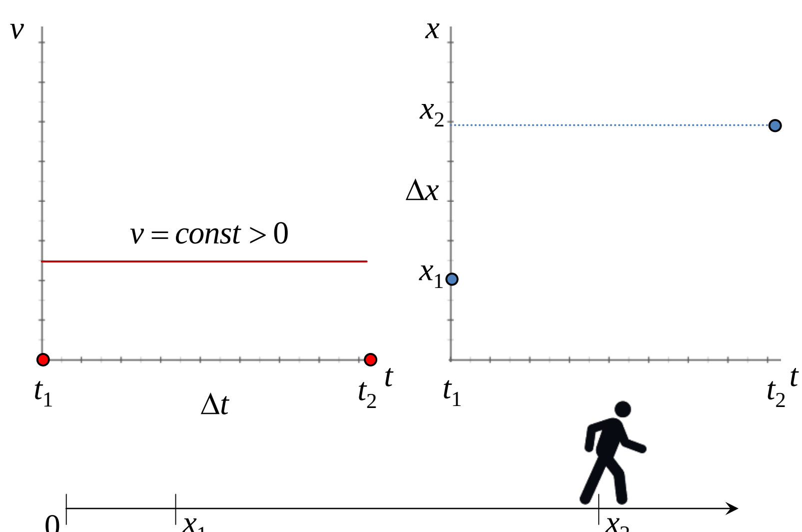
Inhalt

- **Einführung**
- Sätze der Integralrechnung
- Integrationsregeln
- Mehrdimensionale Integration
- Anwendungen

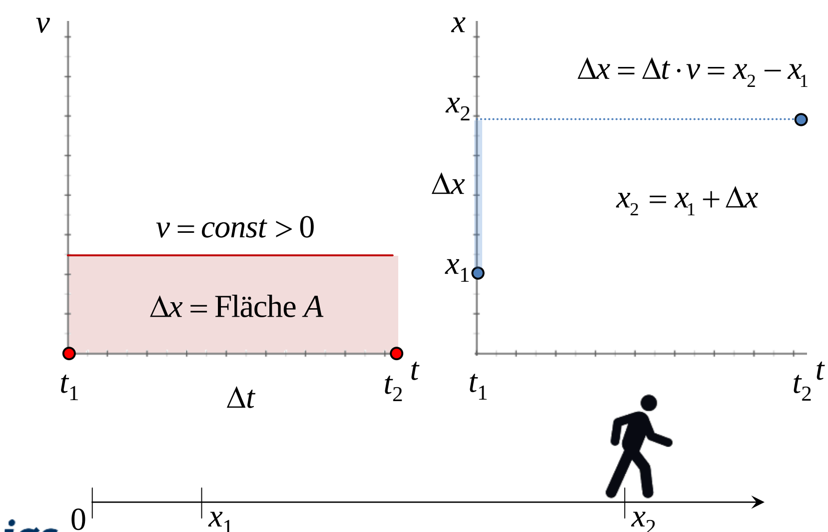
Motivation



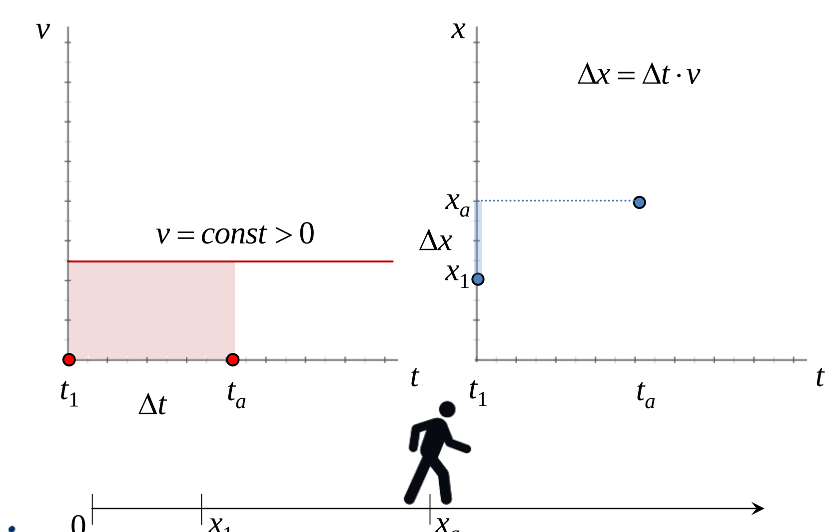
Motivation



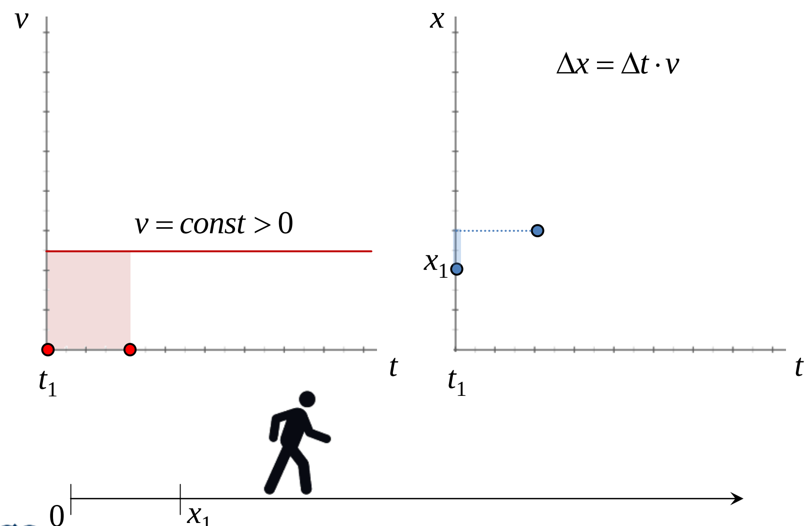
Motivation



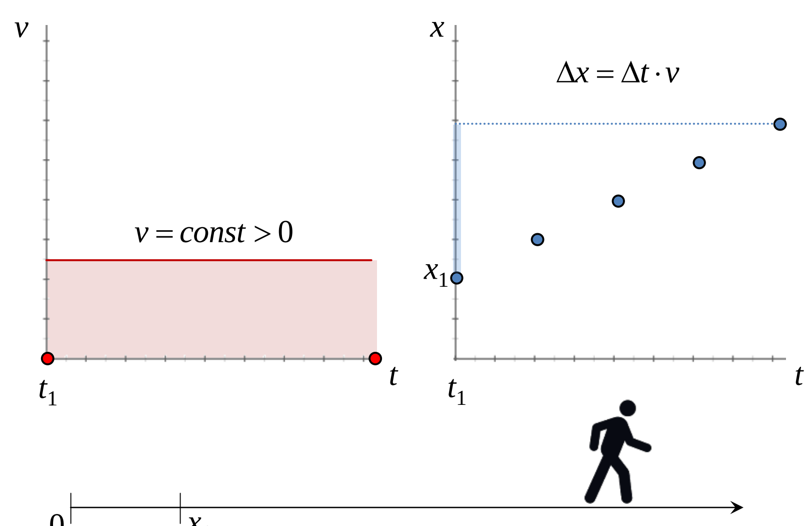
Motivation



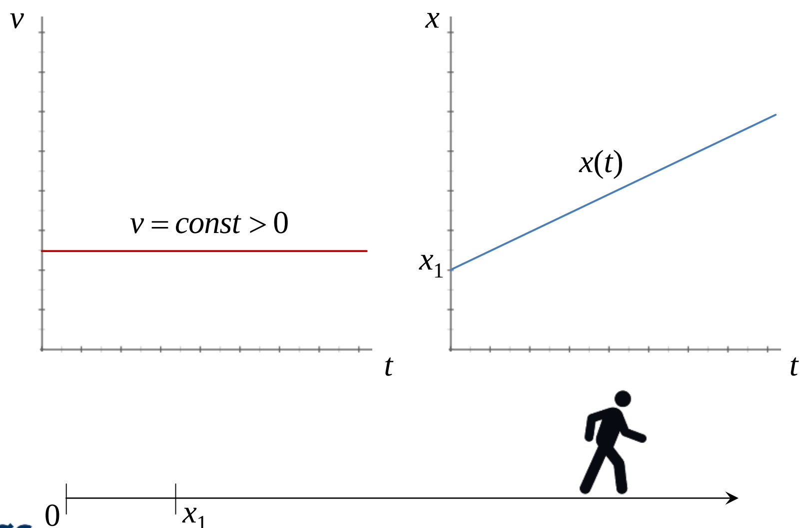
Motivation



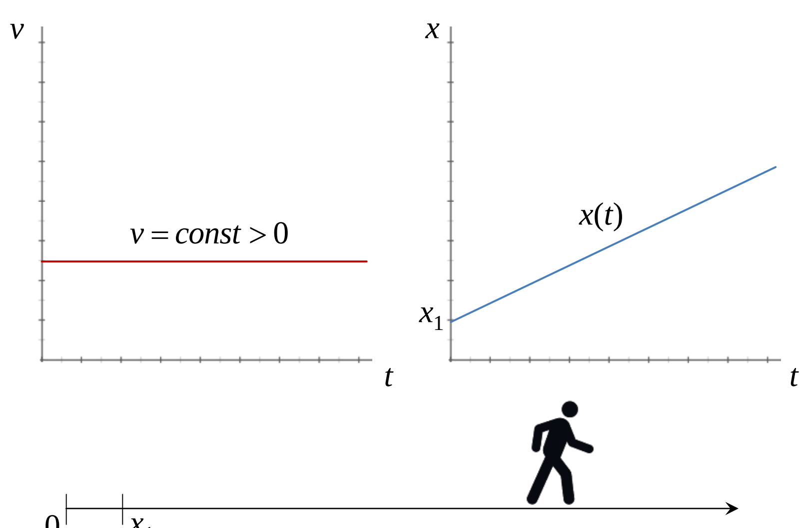
Motivation



Motivation

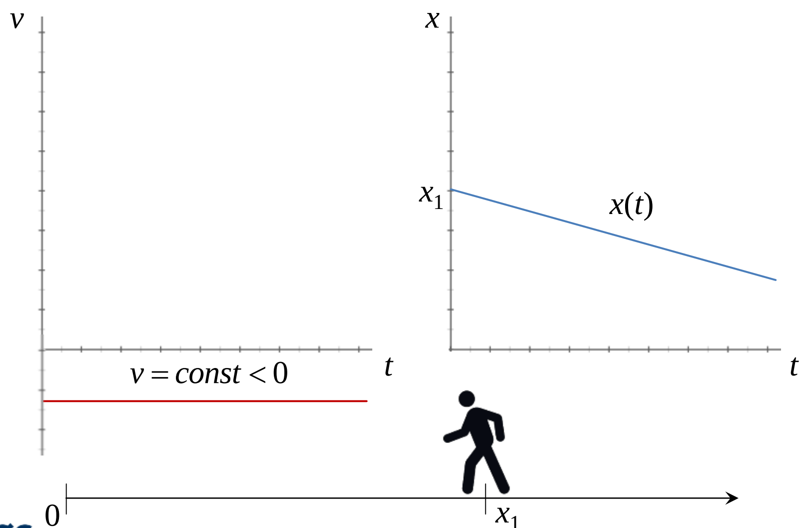


Motivation

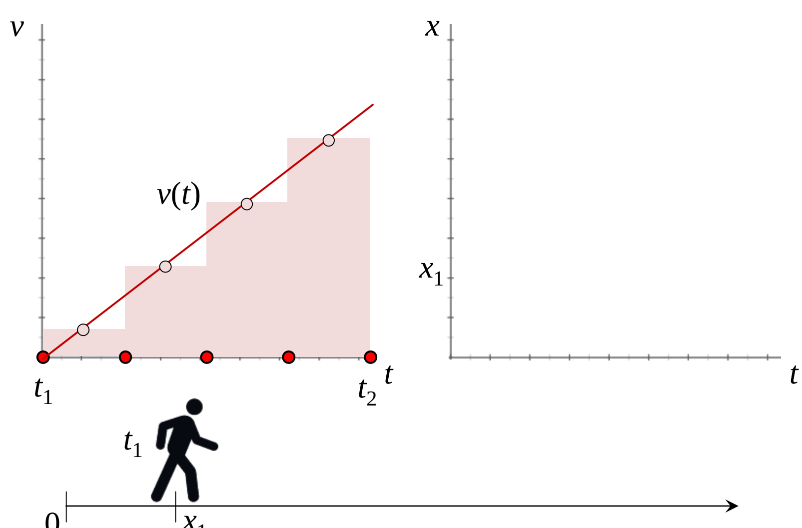


Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022 4

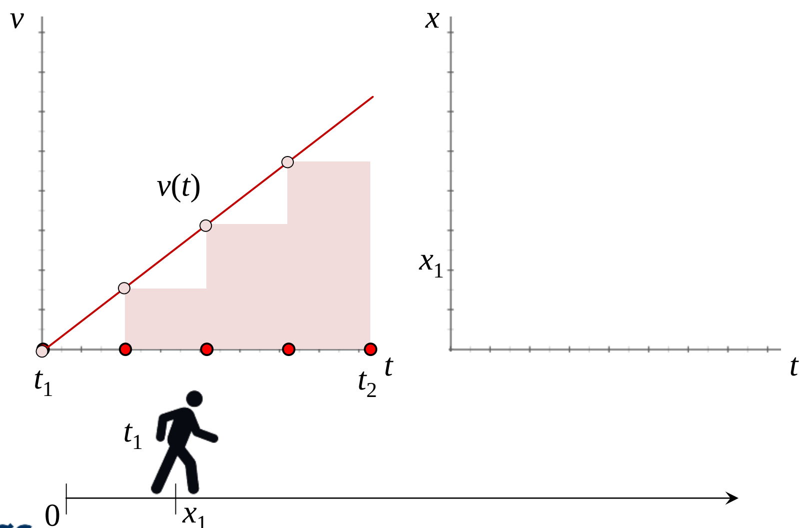
Motivation



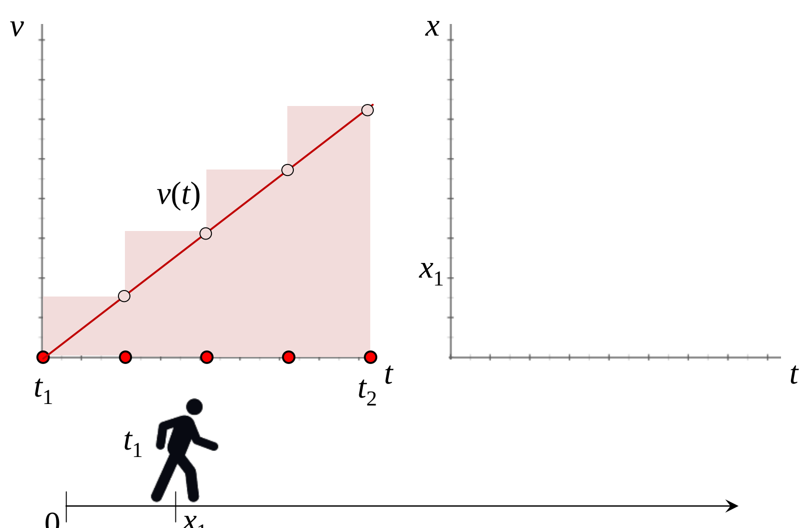
Motivation



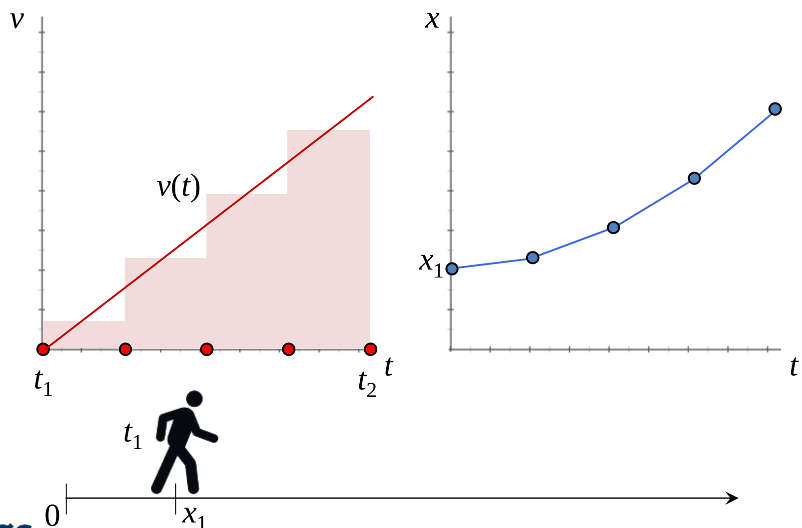
Motivation



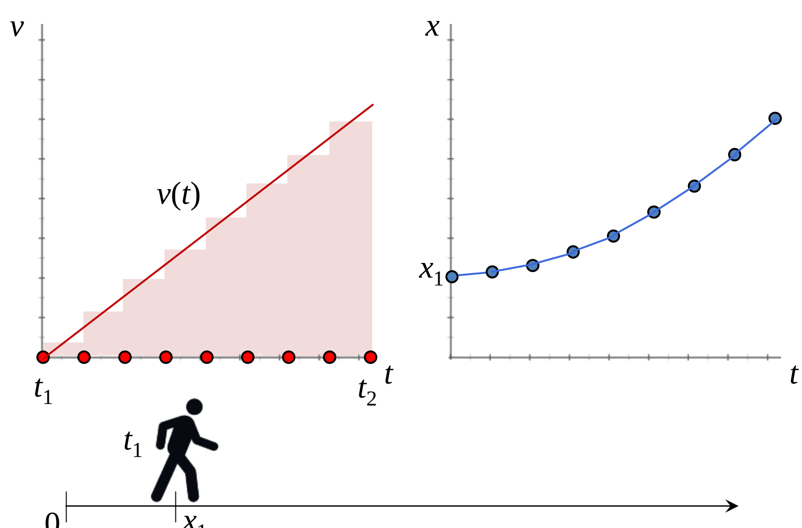
Motivation



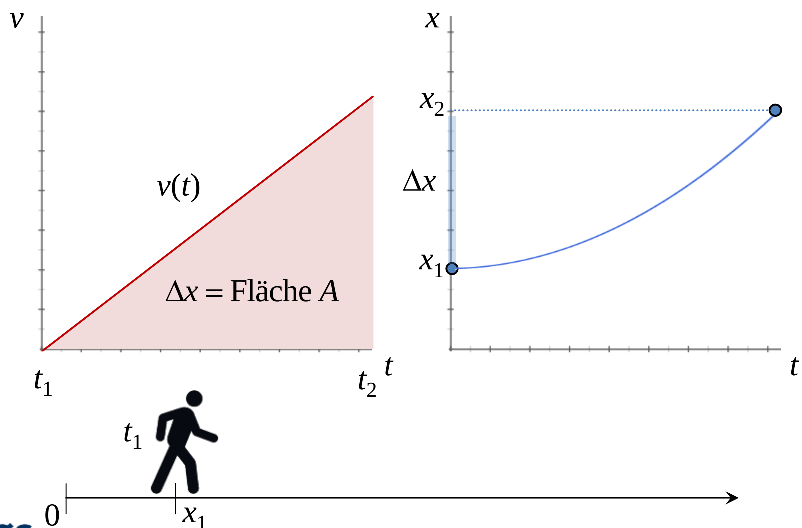
Motivation



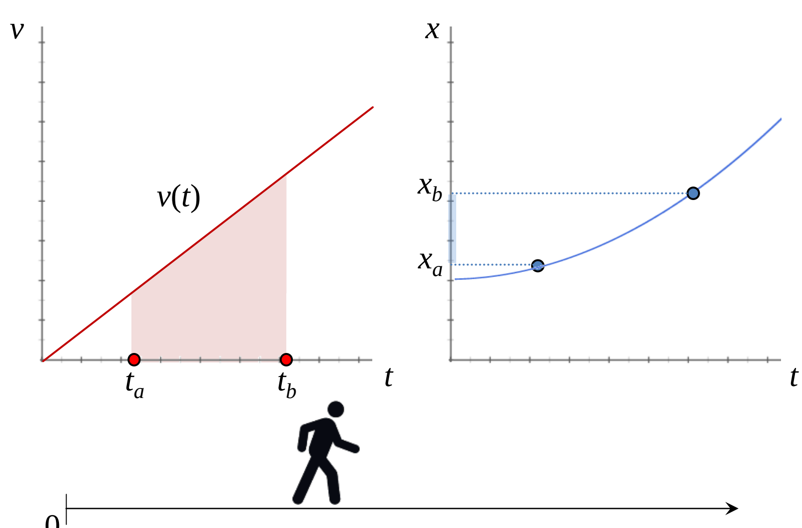
Motivation



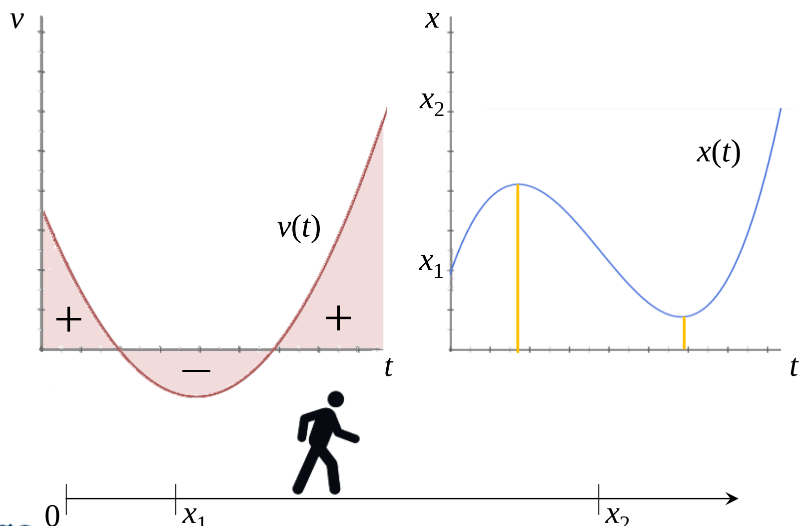
Motivation



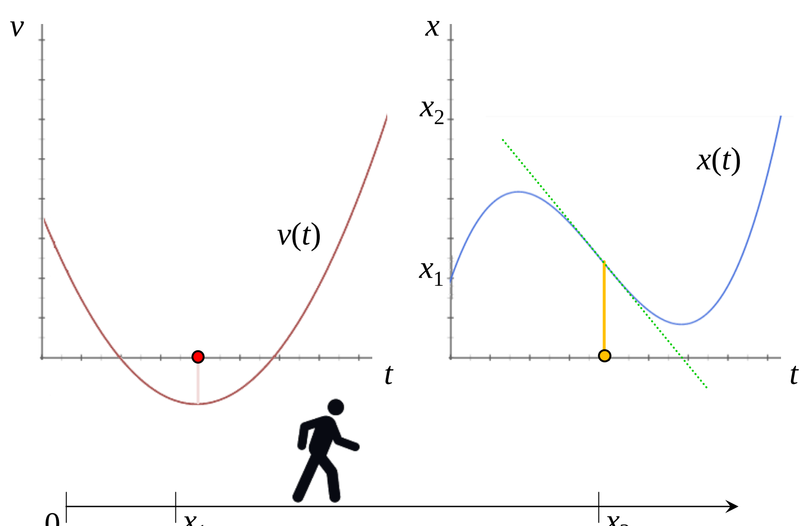
Motivation



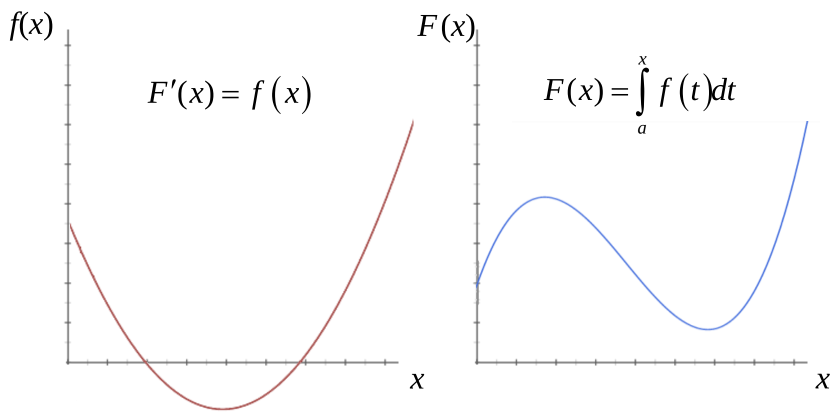
Motivation



Motivation



Motivation



Inhalt

- Einführung
- **Sätze der Integralrechnung**
- Integrationsregeln
- Mehrdimensionale Integration
- Anwendungen

Definitionen

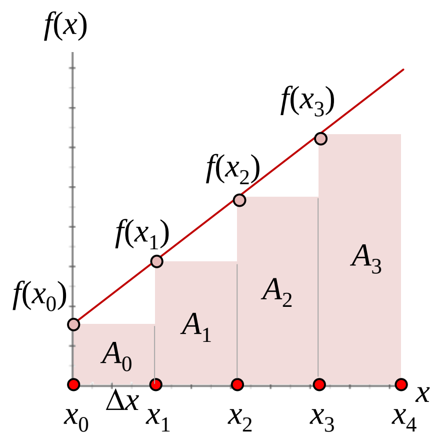
- Annäherung der Fläche unter Funktion (hier eine Untersumme)

$$A \approx \sum_{k=0}^{3} A_k = \sum_{k=0}^{3} \Delta x f(x_k)$$

bzw. allgemeiner

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} A_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x f(x_k)$$

$$\Delta x = (x_n - x_0)/n$$



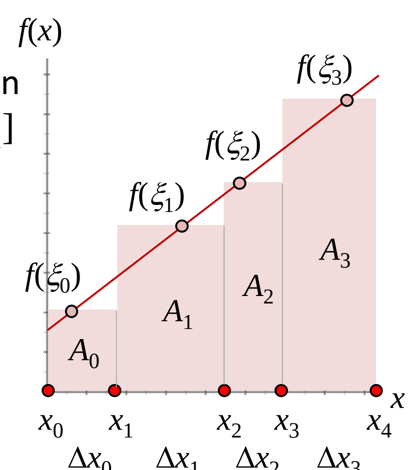
Definitionen

- Für eine beliebige Zerlegung des Intervalls, sowie beliebigen Zwischenpunkten $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ erhalten wir als Näherung die Riemannsumme

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k f(\xi_k)$$

mit Längen $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

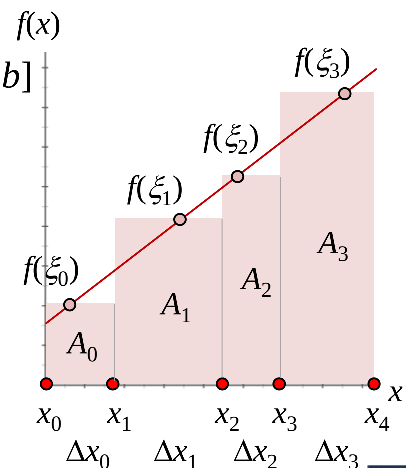
(Beachte: A_k können < 0 sein)



Definitionen

- Wir nennen eine Funktion (Riemann-)integrierbar auf $[a,b]$ wenn als Grenzwert existiert

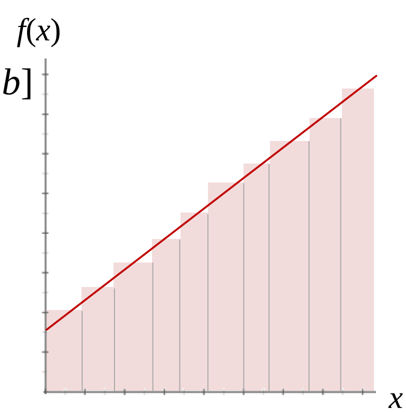
$$\lim_{n\to\infty,\Delta x_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right)\Delta x_k = \int_a^b f\left(x\right)dx$$



Definitionen

- Wir nennen eine Funktion (Riemann-)integrierbar auf $[a,b]$ wenn als Grenzwert existiert

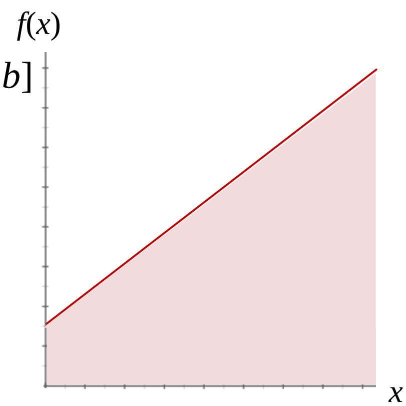
$$\lim_{n\to\infty,\Delta x_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right)\Delta x_k = \int_a^b f\left(x\right)dx$$



Definitionen

- Wir nennen eine Funktion (Riemann-)integrierbar auf $[a,b]$ wenn als Grenzwert existiert

$$\lim_{n\to\infty,\Delta x_k\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

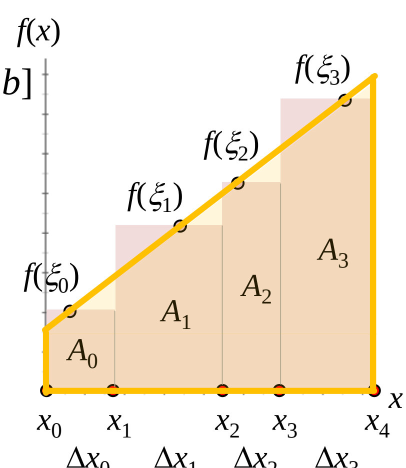


Definitionen

- Wir nennen eine Funktion (Riemann-)integrierbar auf $[a,b]$ wenn als Grenzwert existiert

$$\lim_{n\to\infty,\Delta x_k\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Dieser Grenzwert ist das bestimmte Integral von f auf $[a,b]$
- Anschaulich: die (vorzeichen-behaftete) Fläche



Eigenschaften Bestimmte Integrale

- Für integrierbare Funktionen f, g mit Konstanten $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x \in [a,b]$ gilt:
  - Für $f(x) \geq 0$: $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
  - Für $f(x) \leq 0$: $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$
  - Für $f(x) \leq g(x)$: $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ (Monotonie)

Eigenschaften Bestimmte Integrale

- Für eine integrierbare Funktion f mit Konstanten $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Notation

- Bezeichnungen

(Stilisiertes „**S**“umme) (Integrand) (Integrationsvariable x)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

(Integrationsgrenzen a,b) (Differential dx, hier Teil der Notation)

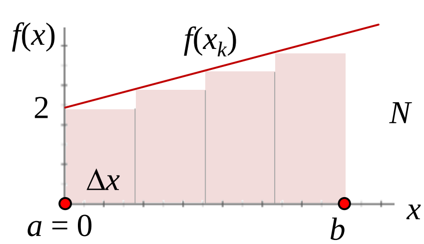
- Variablenname wählbar: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\theta)\,d\theta$

Beispiel – Berechnung Fläche

- Untersumme von $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ mit variablem b; $a=0$

$$A \approx \sum_{k=0}^{N-1} \Delta x f(x_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N}\left(\frac{1}{2}x_k + 2\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N}\left(\frac{1}{2}(a + k\Delta x) + 2\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N}\left(\frac{1}{2}\left(a + k\frac{b-a}{N}\right) + 2\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b}{N}\left(k\frac{b}{2N} + 2\right)$$

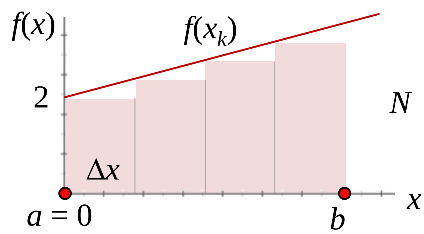


Beispiel – Berechnung Fläche

- Untersumme von $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ mit variablem b; $a=0$

$$A \approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b^2}{2N^2}k + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2b}{N} = \frac{b^2}{2N^2}\sum_{k=0}^{N-1} k + N\frac{2b}{N} = \frac{b^2}{2N^2}\frac{(N-1)N}{2} + 2b$$

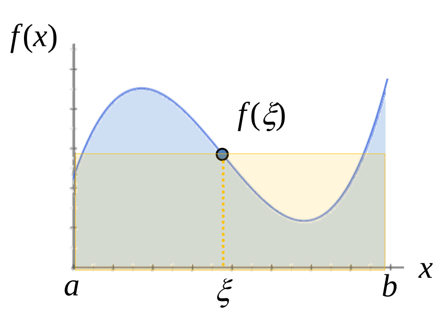
$$\lim_{N\to\infty} \frac{b^2}{4}\frac{(N-1)N}{N^2} + 2b = \frac{1}{4}b^2 + 2b$$



Mittelwertsatz der Integralrechnung

- Es sei Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, somit integrierbar; dann existiert ein $\xi \in [a,b]$, so dass gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$



Mittelwertsatz der Integralrechnung

- Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich somit auch ein Mittelwert einer kontinuierlichen Funktion ermitteln:

$$\bar{f} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$$

- Mögliche Alternative: Quadratisches Mittel

$$\bar{f} = \sqrt{\frac{1}{(b-a)} \int_a^b (f(x))^2 dx}$$

Definition Stammfunktion

- Eine differenzierbare Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in [a,b]$ gilt: $F'(x) = f(x)$
- Wenn F_1 und F_2 verschiedene Stammfunktionen von f sind, dann muss $F_1 - F_2 = c \in \mathbb{R}$ sein

$$(F_1(x)+c)' = (F_1(x))' + (c)' = f(x) + 0 = (F_2(x))'$$

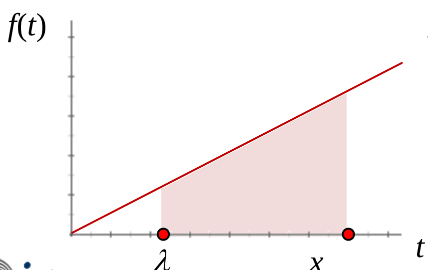
- Beachte: Existenz einer Stammfunktion impliziert nicht Riemann-Integrierbarkeit, und Riemann-Integrierbarkeit impliziert nicht die Existenz einer Stammfunktion

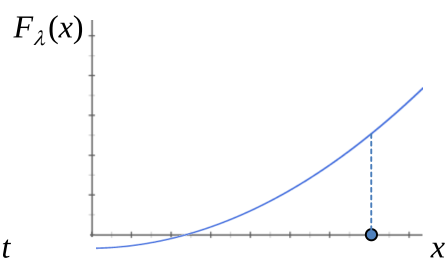
Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung

- Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, sowie $\lambda \in [a,b]$, dann ist die Abbildung

$$F_\lambda(x) = \int_\lambda^x f(t)\,dt$$

eine Stammfunktion von f, d.h. $F_\lambda'(x) = f(x)$



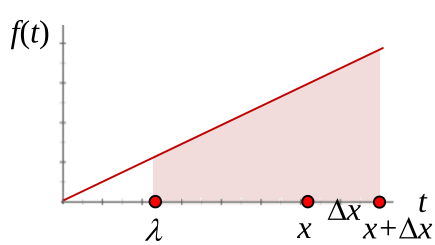


Beweisführung

- Differenzenquotient

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{F_\lambda(x+\Delta x)-F_\lambda(x)}{\Delta x} =$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\int_\lambda^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_\lambda^{x} f(t)\,dt\right)$$

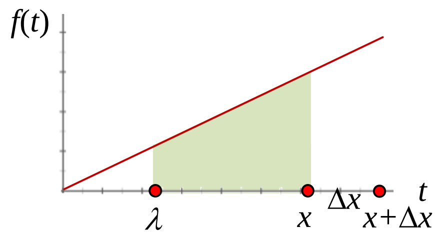


Beweisführung

- Differenzenquotient

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{F_\lambda(x+\Delta x)-F_\lambda(x)}{\Delta x}=$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{\lambda}^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_{\lambda}^{x} f(t)dt\right)$$

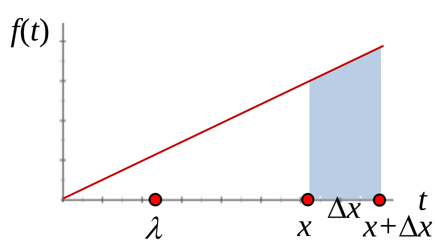


Beweisführung

- Differenzenquotient

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{F_\lambda(x+\Delta x)-F_\lambda(x)}{\Delta x}=$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{\lambda}^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_{\lambda}^{x} f(t)dt\right)=\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt$$



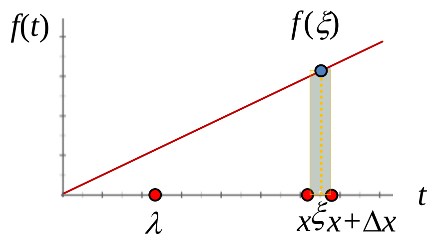
Beweisführung

- Gemäß Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = \frac{1}{\Delta x} f(\xi)\Delta x = f(\xi) \qquad \xi \in [x, x+\Delta x]$$

- Differentialquotient

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x) \qquad \text{da } \xi \to x \text{ wenn } \Delta x \to 0$$



Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung

- Sei Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Stamm-funktion von Funktion f, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Beweis: $F_\lambda(x)$ ist Stammfunktion von f, somit gilt für eine beliebige Stammfunktion $F(x) = F_\lambda(x) + c$; und speziell mit $\lambda = a$ ergibt sich somit:

$$F(b) - F(a) = F_a(b) + c - (F_a(a) + c) = \int_a^b f(t)dt + c - \left(\int_a^a f(t)dt + c\right)$$

$$= \int_a^b f(t)dt + c - 0 - c = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

Unbestimmtes Integral

- Eine beliebige Stammfunktion einer integrierbaren Funktion f kann als unbestimmtes Integral notiert werden (d.h. ohne Nennung konkreter Grenzen)

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

- Darstellung nicht eindeutig, da $F(x) + c$ auch eine Stammfunktion ist
- In bestimmten Integralen hebt sich die Konstante auf

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

Anmerkungen

- Der Hauptsatz verbindet zwei zentrale Gebiete der Analysis: Integral- und Differentialrechnung
- In der moderneren Mathematik existieren andere Integralbegriffe; häufig wird anstatt des Riemann- das Lebesgue-Integral verwendet
- Vorgehen Flächenberechnungen
  - Bestimmung Stammfunktion (ggbfs. Probe)
  - Eventuell Integrationsgrenzen bestimmen
  - Auswertung Stammfunktion an Grenzen
  - Falls erforderlich Vorzeichen der Flächen beachten

Inhalt

- Einführung
- Sätze der Integralrechnung
- **Integrationsregeln**
- Mehrdimensionale Integration
- Anwendungen

Elementare Integrationsregeln

- Für integrierbare Funktionen f, g mit Konstanten $a, b, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $a < b$ gilt:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda_1 f(x)dx = \lambda_1 \int_a^b f(x)dx$$

somit auch

$$\int_a^b (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx = \lambda_1 \int_a^b f(x)dx + \lambda_2 \int_a^b g(x)dx$$

(Integration ist ein linearer Operator)

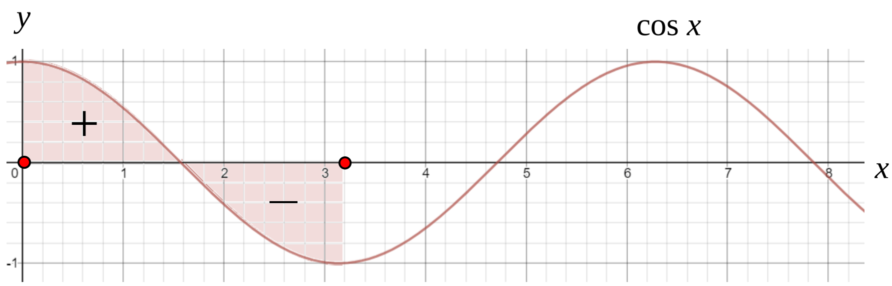
Auswahl Einiger Integrale/Stammfunktionen

- Beispiele
  - Integrale von Konstanten $\int k\,dx = kx + c, \qquad k \in \mathbb{R}$
  - Integral eines Bereiches $\int_a^b dx = \int_a^b 1 \cdot dx = x\Big|_a^b = b - a$
  - Integrale von Potenzen $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, \qquad k \neq -1$
  - Integral Quadratwurzel $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\sqrt{x}^3}{3} + c$

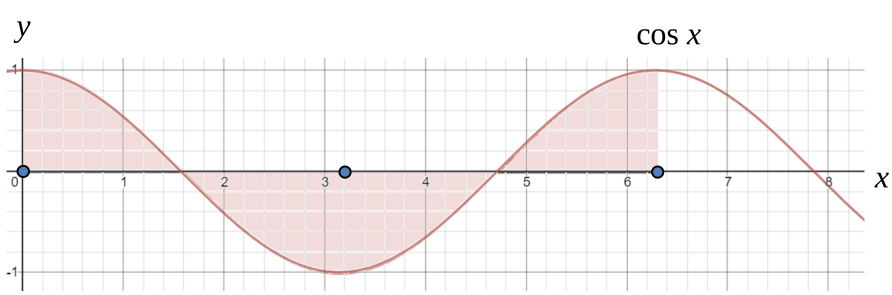
Auswahl Einiger Integrale/Stammfunktionen

- Beispiele
  - Integrale von *e* $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c, \qquad k \neq 0$
  - Integral vom Kehrwert $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \qquad x \neq 0$
  - Integral vom Cosinus $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
  - Integral von *ln* $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + c, \qquad x > 0$

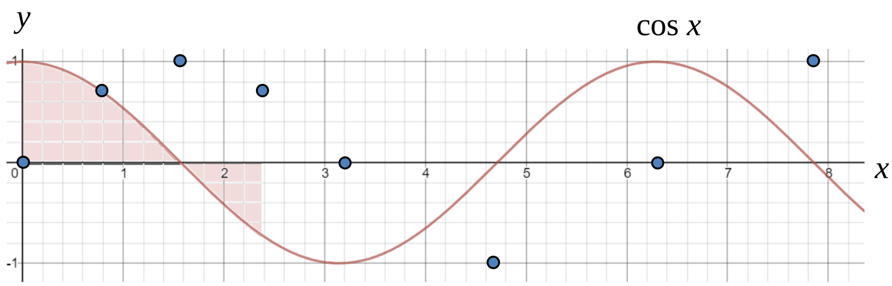
Beispielvisualisierung – Integral von Cosinus



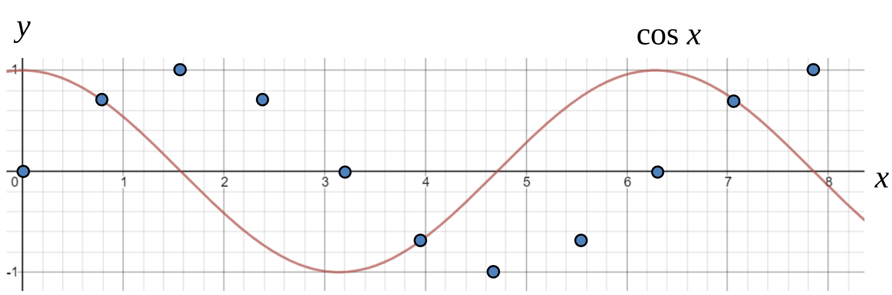
Beispielvisualisierung – Integral von Cosinus



Beispielvisualisierung – Integral von Cosinus

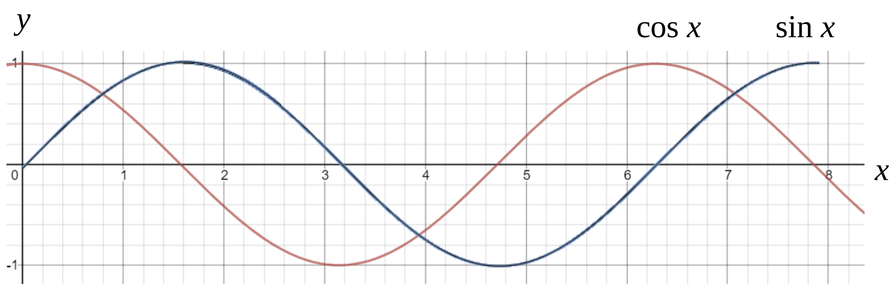


Beispielvisualisierung – Integral von Cosinus



Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

Beispielvisualisierung – Integral von Cosinus



Partielle Integration

- Seien zwei Funktionen $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$, auf $[a,b]$ stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

  (entsprechend auch für bestimmte Integrale)

- Beweis basiert auf Produktregel

$$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\int \big(f(x) \cdot g(x)\big)'\, dx = \int f'(x) \cdot g(x)\, dx + \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\, dx + \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Berechnung Integrale – Beispiele

- Fläche zwischen Funktion $f(x) = \sin x$ und x-Achse im Intervall $[0,\pi]$

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = -\cos(x)\Big|_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 - (-1) = 2$$

- Stammfunktion von $\cos^2 x$

$$\int \cos^2 x\, dx = \sin x \cdot \cos x - \int -\sin^2 x\, dx =$$

$$\sin x \cdot \cos x - \int \cos^2 x - 1\, dx = \sin x \cdot \cos x - \int \cos^2 x\, dx + \int 1\, dx$$

$$\Rightarrow 2\int \cos^2 x\, dx = \sin x \cdot \cos x + x$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(\sin x \cdot \cos x + x)$$

Substitutionsregel

- Sei Funktion $g : [a,b] \to I \subseteq \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sowie Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

$$\int_a^b f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx = F(x)\Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

- Beispiel: Fläche des halben Einheitskreises

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \underset{x=\sin t}{=} \int_{\sin^{-1}(-1)}^{\sin^{-1}(1)} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\ dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\, \cos t\ dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}(\cos t\ \sin t\ + t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi/2$$

Substitutionsregel

- Beispiel: Nebenrechnungen
  - Grenzen umrechnen: $x = \sin t \quad \rightarrow \quad t = \sin^{-1} x$

    Untere Grenze: $x = -1 \quad \rightarrow \quad t_u = \sin^{-1} -1 = -\frac{\pi}{2}$

    Obere Grenze: $x = 1 \quad \rightarrow \quad t_o = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$
  - Differential: $x = \sin t \qquad / \cdot \frac{d}{dt}$

$$\frac{d}{dt} x = \frac{d}{dt} \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \ \rightarrow dx = \cos t \ dt$$

Nicht-Elementar Integrierbare Funktionen

- Elementare Funktionen bestehen aus „einfachen“ grundlegenden Funktionen (z.B. Polynome, Kreisfunktionen, Logarithmen, Exponentialfunktionen)
- Funktionen deren Stammfunktionen nicht mithilfe elementaren Funktionen darstellbar sind, werden nicht-elementar integrierbar genannt
- Beispiele: $\int e^{x^2} dx \qquad \int \sqrt{\ln x}\, dx \qquad \int \frac{\sin x}{x} dx$
- Beachte aber:

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(x)\, dx = f(t) \quad \text{z.B.} \quad \frac{d}{dt} \int_a^t e^{x^2} \sqrt{\ln x} \frac{\sin x}{x}\, dx = e^{t^2} \sqrt{\ln t} \frac{\sin t}{t}$$

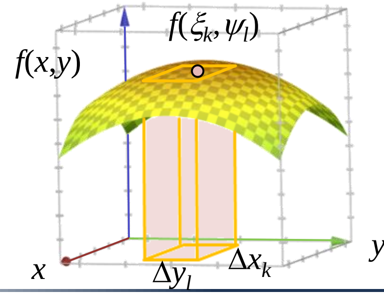
Inhalt

- Einführung
- Sätze der Integralrechnung
- Integrationsregeln
- **Mehrdimensionale Integration**
- Anwendungen

Riemannsumme in 2D

- Approximation des Volumens unter der Fläche einer skalaren Funktion in 2D im Bereich $D = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$

$$V \approx \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} \Delta x_k \Delta y_l\, f\left(\xi_k,\psi_l\right) \qquad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}],\ \psi_l \in [y_l, y_{l+1}]$$



$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$
$$\Delta y_l = y_{l+1} - y_l$$

Bestimmtes Integral in 2D (Doppelintegral)

- Sei Funktion $f(x,y)$ stückweise stetig auf dem Bereich $D = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$, dann erhalten wir wiederum über Grenzwertbildung das Volumen unter der Fläche als:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dxdy$$

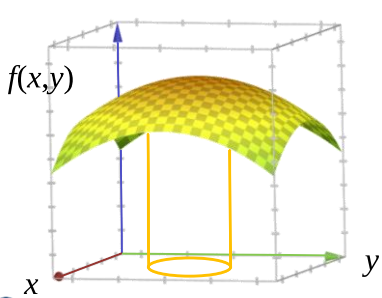
- Dieses Volumen ist ebenso vorzeichenbehaftet
- Beispiel: Volumen unter Ebene $f(x,y) = 3$ in $[1,3]\times[2,3]$

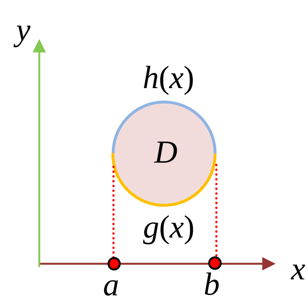
$$V = \int_2^3\int_1^3 3\;dxdy = \int_2^3\left(3x\Big|_1^3\right)dy = \int_2^3(9-3)\,dy = \int_2^3 6dy = 6y\Big|_2^3 = 6$$

Bestimmtes Integral im Normalbereich in 2D

- Der Bereich der Integration kann allgemeiner durch Funktionen bestimmt werden
- Ein Normalbereich bzgl. der x-Achse ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\; g(x) \le y \le h(x)\}$$





Bestimmtes Integral im Normalbereich in 2D

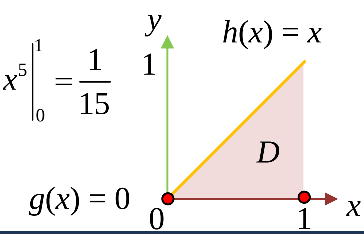
- Integral auf einem Normalbereich bzgl. der x-Achse

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

- Beispiel: Integral von $f(x,y) = xy^2$ auf Dreiecksregion

$$\iint_D xy^2 dxdy = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{x} xy^2 dy\right)dx =$$

$$\int_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{3}xy^3\Big|_0^x\right)dx = \int_{x=0}^{1}\frac{1}{3}x^4 dx = \frac{1}{15}x^5\Big|_0^1 = \frac{1}{15}$$



Bestimmtes Integral im Normalbereich in 2D

- Integral auf einem Normalbereich bzgl. der y-Achse

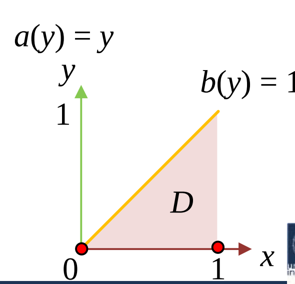
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{y=g}^{h}\left(\int_{x=a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

- Beispiel: Integral von $f(x,y) = xy^2$ auf Dreiecksregion

$$\iint_D xy^2 dxdy = \int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y}^{1} xy^2 dx\right)dy =$$

$$\int_{y=0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_y^1\right)dy = \int_{x=0}^{1}\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^4 dy =$$

$$\frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{10}y^5\Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$



Mehrdimensionale Integrale im Normalbereich

- Nicht-Normalbereiche können häufig als eine Vereinigung von Normalbereichen behandelt werden
- Mehrfachintegrale können damit durch mehrere Einfachintegrale berechnet werden
- Die Reihenfolge bei der Integration ist zu beachten, mit den entsprechenden Begrenzungsfunktionen
- Ein wichtiges Element ist die korrekte Beschreibung der Integrationsgrenzen des mehrdimensionalen Bereiches

Dreifachintegrale

- Dreifachintegral der Funktion $f(x,y,z)$ auf Bereich Ω

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{a_3}^{b_3}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dxdydz$$

- Dreifachintegral über einen Normalbereich Ω in 3D

$$\Omega = \{(x_1,x_2,x_3) : a_1 \le x_1 \le b_1,\ a_2(x_1) \le x_2 \le b_2(x_1),\ a_3(x_1,x_2) \le x_3 \le b_3(x_1,x_2)\}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{x_1=a_1}^{b_1}\left(\int_{x_2=a_2(x_1)}^{b_2(x_1)}\left(\int_{x_3=a_3(x_1,x_2)}^{b_3(x_1,x_2)} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\right)dx_2\right)dx_1$$

Satz von Fubini

- Ein Integral einer stetigen Funktion über einen Normalbereich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ kann durch iterative Ausführung von eindimensionalen Integrationen berechnet werden
- Es sei mit Intervallen $I_j = [a_j,b_j]$, $a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, n$, sowie dem Bereich $\Omega = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ und stetigem f:

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_\Omega f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n =$$
$$\int_{I_n}\left(\cdots\left(\int_{I_2}\left(\int_{I_1}\left(f(x_1,\ldots,x_n)\right)dx_1\right)dx_2\right)\cdots\right)dx_n$$

- Änderung der Reihenfolge der Variablen bzw. der Integrationen ändert das Ergebnis nicht

Notation

- Integrale über Flächen/Volumen abgekürzt notiert:

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dxdy = \int_A f dA \qquad \int_{a_3}^{b_3}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_V f dV$$

mit $dA = dxdy$, $dV = dxdydz$ (Flächen-/Volumenelement)

- Schreibweise der Integration als Operator:

$$\int_A f\ dA = \int_A dA\, f \qquad \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{D_1} dy \int_{D_2} dx\, f(x,y)$$

- Flächeninhalt/Volumen als Integral über ebene Bereiche

$$\int_A dA = \iint_A 1\, dA = A \qquad \int_V dV = \iiint_V 1\, dV = V$$

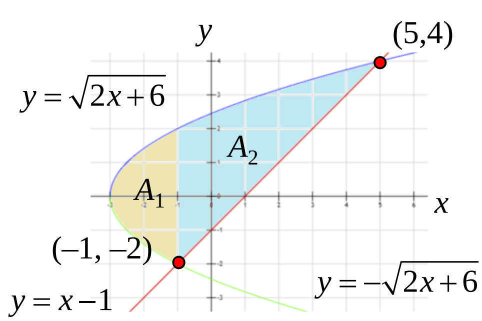
Inhalt

- Einführung
- Sätze der Integralrechnung
- Integrationsregeln
- Mehrdimensionale Integration
- **Anwendungen**

Berechnung Fläche Zwischen Funktionen

- Fläche A zwischen f: $x = ½y^2 – 3$ und g: $y = x – 1$
- Schnittpunkte finden für Integrationsgrenzen

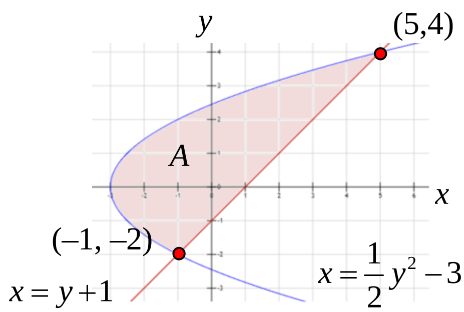
$$\frac{1}{2}y^2 - 3 = y + 1 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 8 = 0 \Leftrightarrow (y+2)(y-4) = 0$$



Berechnung Fläche Zwischen Funktionen

- Integration hinsichtlich y-Achse im Intervall $[-2,4]$
- Da $f(y) \leq g(y)$ in $[-2,4]$

$$A = \int_{-2}^{4} (y+1) - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3\right) dy = -\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 4y\Big|_{-2}^{4} = 18$$



Bewegung – Kinematische Größen

- Positionsänderung als Integral der Geschwindigkeit

$$\int_0^t v(t)dt = x(t) - x(0) \Rightarrow x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)dt$$

- Allgemeiner Zusammenhang zwischen den Größen

$$\text{Position/Weg } x(t) \underset{\int dt}{\overset{\frac{d}{dt}}{\rightleftarrows}} \text{Geschwindigkeit } v(t) \underset{\int dt}{\overset{\frac{d}{dt}}{\rightleftarrows}} \text{Beschleunigung } a(t)$$

Massenmittelpunkt

- Ein (physikalischer) Körper in 3D mit Volumen V und konstanter Dichte ρ hat Masse $m = V\cdot\rho$
- Bei einer kontinuierlichen, nicht konstanten Masse-verteilung im Körper ergibt sich die Masse als

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x})\,dV = \int_V \rho(x,y,z)\,dV$$

- Der Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) eines solchen Körpers kann bestimmt werden via

$$\mathbf{x}_M = \frac{1}{m}\int_V \mathbf{x}\rho(\mathbf{x})\,dV = \frac{1}{m}\int_V [x \quad y \quad z]^T \rho(x,y,z)\,dV$$

Massemittelpunkt – Beispiel Dreieck in 2D

- Berechnung über Integrale (sollte hier [⅓ ⅓] ergeben)
- „Masse" bei konstanter Dichte ρ = 3 kg/m³

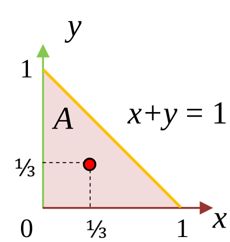
$$m = \int_A \rho(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} 3\,dy\,dx = 3\int_0^1 y\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$3\int_0^1 1 - x\; dx = 3x - \frac{3}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

- Schwerpunkt (Position in 2D)

$$\mathbf{x}_M = \frac{1}{m}\int_A \mathbf{x}\rho(x,y)\,dA =$$

$$\left[\frac{1}{m}\int_A x\rho(x,y)\,dA \quad \frac{1}{m}\int_A y\rho(x,y)\,dA\right]^T$$



Massemittelpunkt – Beispiel Dreieck in 2D

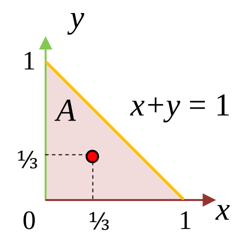
- Beispiel Berechnung x-Komponente

$$\frac{1}{m}\int_A x\rho(x,y)\,dA = \frac{2}{3}\int_0^1\int_0^{1-x} x3\,dydx = 2\int_0^1 xy\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$2\int_0^1 x(1-x)\,dx = 2\int_0^1 x - x^2 dx = x^2 - \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

- Berechnung y-Komponente analog
- In einem Dreieck natürlich einfacher gegeben durch

$$\mathbf{x}_M = \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)$$



Uneigentliche Integrale

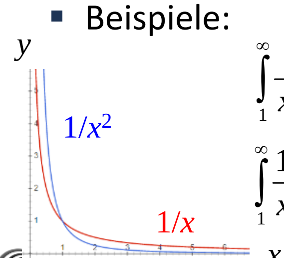
- Betrachtung des Verhaltens bestimmter Integrale bei Grenzwertbildung hinsichtlich Integrationsgrenzen, z.B.

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \lim_{c\nearrow b}\int_a^c f(x)\,dx$$

- In verkürzter Schreibweise wird Grenze ∞ angegeben
- Beispiele:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1$$

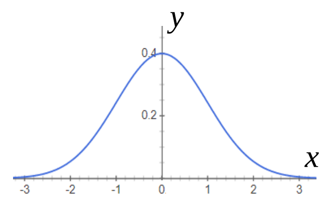
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\ln|x|\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\ln|b| - 0\right) = \infty$$



Normierung Normalverteilung

- Gaußsche Glockenkurve (Normalverteilung) in 1D, mit Mittelwert $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = 1$
- Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



- Zugehörige Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Insbesondere gilt: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

Skalarprodukt für Funktionen

- In der VL Lineare Algebra sind K-Vektorräume mit der Skalarmultiplikation vorgestellt worden
- Beispiel: Skalarprodukt bei Vektoren in 3D

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- Durch stetige und beschränkte reellwertige Funktionen auf Intervall $[a,b]$ wird auch ein K-Vektorraum gebildet
- Entsprechendes Skalarprodukt:

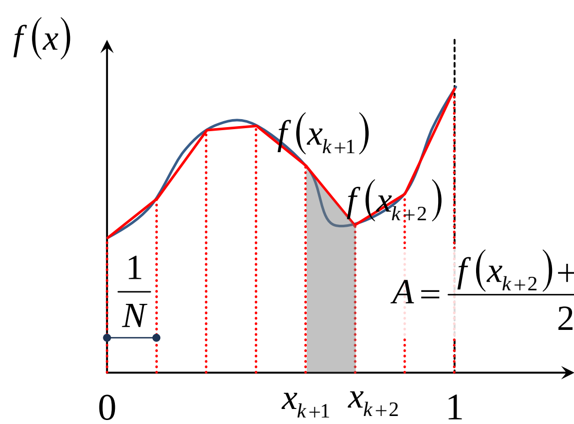
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx \qquad (L^2 \text{ - Skalarprodukt})$$

Vorschau - Lösung Einfacher Differentialgleichungen

- Eine trennbare Differentialgleichung hat die Form
$$y'(x) = f\left(y(x)\right) \cdot g(x)$$
- Lösung über Trennung der Variablen und Integration
$$\frac{dy}{dx} = f\left(y(x)\right) \cdot g(x) \Rightarrow \frac{dy}{f\left(y(x)\right)} = g(x)\,dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{f\left(y(x)\right)} dy = \int g(x)\,dx$$
- Beispiel: $y' - (y)^2 x = 0$
$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int x dx \Rightarrow -y^{-1} + C_f = \frac{1}{2} x^2 + C_g \Rightarrow y = -\frac{2}{x^2 + C}$$

Vorschau – Numerische Quadratur

- Trapezregel

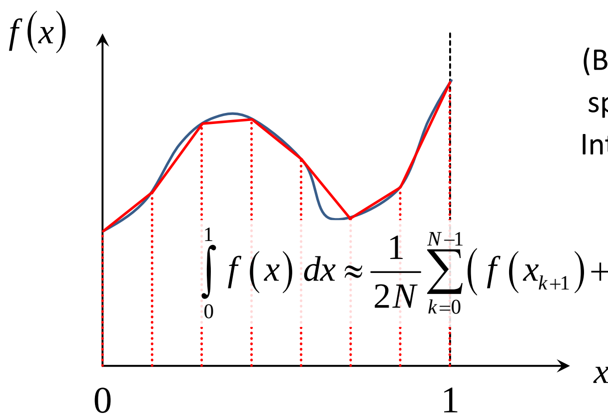


(Beachte: hier spezifisch für Intervall [0,1])

$$A = \frac{f(x_{k+2}) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \frac{1}{N}$$

Vorschau – Numerische Quadratur

- Trapezregel



$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x_{k+1})+f(x_k)\right)$$

(Beachte: hier spezifisch für Intervall $[0,1]$)

Einige Hilfreiche Weblinks

- Khan Academy – Spendenfinanzierte Webseite mit Lehrmaterialien, auch für Mathematik
  https://www.khanacademy.org/math/

- mathe-online – Österreichische Initiative zum Aufbau von Online-Materialien für Mathematik, z.B.
  https://www.mathe-online.at/nml/materialien/innsbruck/

Vorlesungsplan

Datum	Thema	Proseminar
11.03.22	Einführung, Grundlagen, Funktionen	*(Beginn zuvor am 8.3.)*
18.03.22	Differentialrechnung	
25.03.22	Integralrechnung	
01.04.22	Differentialgleichungen	
08.04.22	Weitere Funktionen	
	Osterferien	
29.04.22	Reihen und Folgen	
06.05.22	Numerische Auswertung von Funktionen	
13.05.22	Lösung von Gleichungssystemen	
20.05.22	Interpolation	
27.05.22	Zufallszahlen	
03.06.22	Komplexe Zahlen	
10.06.22	Klausurvorbereitung	
01.07.22	**Klausur**	