1.1 Welche der folgenden Eigenschaften erfüllt die Funktion $f(x) = x^2 - x$? Kreuzen Sie die richtige Antwort an. (**1,5 Punkte**) *Raten lohnt sich nicht; Punkte werden abgezogen bei falscher Antwort.*

O Die Funktion ist monoton steigend für $x \in (0, \infty)$.

O Die Funktion ist ungerade.

X Streng monoton fallend für $x \in (-\infty, 1/2)$. X

O Die Funktion ist gerade.

$f(x) = x(x-1)$

$f(0)$? $x_1 = 0$

$x_2 = 1$

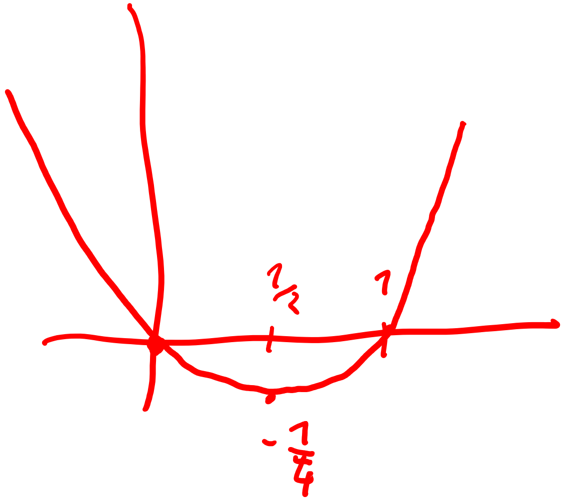
$f'(x) = 2x - 1$

$f'(0) = 0 = 2x - 1$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$



2.1 Welches ist die korrekte gemischte partielle Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ der Funktion

$f(x,y) = \tan x \cdot e^{-xy}$?

Kreuzen Sie die richtige Antwort an. (**1,5 Punkte**) *Raten lohnt sich nicht; Punkte werden abgezogen bei falscher Antwort.*

O $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-xy}\left(-xy \tan x - \frac{x}{\cos^2 x} + \tan x\right)$

O $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-xy}\left(xy \tan x - \frac{1}{\sin^2 x} - \tan x\right)$

X $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-xy}\left(xy \tan x - \frac{x}{\cos^2 x} - \tan x\right)$

O $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -xy \operatorname{atan} x \cdot e^{-xy}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

NR:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tan x \cdot e^{-xy}\right) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{-xy} + \tan x \cdot e^{-xy} \cdot (-y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{-xy} \cdot (-x) + \tan x \cdot e^{-xy} (-x) \cdot (-y) + \tan x \cdot e^{-xy} (-1)$$

$$= e^{-xy}\left(x \cdot y \tan x - \frac{x}{\cos^2 x} - \tan x\right)$$

2.2 Stellen Sie die Geradengleichung der Tangente an der Stelle $x_0 = 4$ an der Funktion $f(x) = \sqrt{x} + 2x$ auf. An welcher Stelle schneidet sich die Gerade mit der x-Achse? Welcher Algorithmus wendet so eine Rechnung wiederholt an? **(2 Punkte)**

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f(4) = \sqrt{4} + 2 \cdot 4 = 2 + 8 = 10$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 2 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2$$

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} + 2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

$$g(x) = 2{,}25(x - 4) + 10 = 2{,}25x + 1$$

$$g(x) \overset{!}{=} 0 = 2{,}25x + 1 \rightarrow \frac{9}{4}x = -1 \rightarrow x = -\frac{4}{9} = \underline{\underline{-0{,}\dot{4}}}$$

→ Das Newton Verfahren

3.1 Gegeben ist das folgende Anfangswertproblem:

- Differentialgleichung: $y'(t) = 1 + t \cdot \sqrt{y(t)}$
- Anfangswertbedingung: $y(0) = 4$
- Schrittweite: $h = 0{,}5$

Bestimmen Sie die numerische Näherung von $y(0{,}5)$ über das explizite Euler-Verfahren (Startzeit ist $t = 0$). Notieren Sie alle Zwischenschritte und Berechnungen. (**1,5 Punkte**)

$$y(t+h) = y(t) + h\, y'(t)$$

$$y(0{,}5) = y(0) + 0{,}5\, y'(0)$$

$$= 4 + 0{,}5\left(1 + \underbrace{\cancel{0\sqrt{4}}}_{0}\right) = \underline{\underline{4{,}5}}$$

4.1 Ermitteln Sie das unbestimmte Doppel-Integral der Funktion:

$$f(x,y) = (\sin^2 y + \cos^2 y) \cdot \ln(x), \qquad \text{mit} \qquad \iint f(x,y)\,dx\,dy.$$

Hinweis: Führen Sie zuerst eine partielle Integration bezüglich x als Nebenrechnung durch.

Integrieren Sie dann nach y. **(2 Punkte)**

$$f(x,y) = 1 \cdot \ln(x)$$

$$\iint 1 \cdot \ln(x)\, dx\, dy \qquad \int f' g = f \cdot g - \int f \cdot g' + C$$

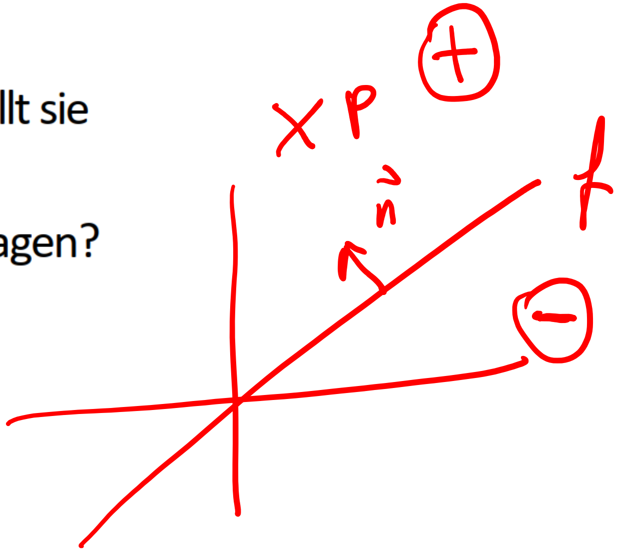
$$\text{NR} \quad \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\ln x}\, dx = x \cdot \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx + C = x \ln x - x + C$$

$$\int (x \ln x - x + C)\, dy = xy \ln x - xy + Cy + D$$

5.1 Gegeben sei der Vektor $\underline{\boldsymbol{n}} = [\ 0{,}41 \quad 0{,}41 \quad -0{,}82\ ]^T$ und die Gleichung

$f(x,y,z) = n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 1 = 0$. Wie wird diese Funktionsform genannt und was stellt sie Geometrisch dar? Was können Sie über den Punkt $\boldsymbol{p} = [\ 2 \quad 1 \quad 1\ ]^T$ bezüglich f aussagen?

(1,5 Punkte)



Implizite Funktion

Ebene im 3D

$$f(2,1,1) = \begin{pmatrix} 0{,}41 \\ 0{,}41 \\ -0{,}82 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 = \cancel{0{,}82} + 0{,}41 - \cancel{0{,}82} + 1 = 1{,}41 > 0$$

p liegt nicht auf d. Ebene in positiver Richtung von n.

6.1 Überprüfen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz mit dem *Quotientenkriterium*.

(1,5 Punkte)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{n!}$$

$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}_{} \overset{?}{<} 1$$

$$\frac{\frac{4^n}{(n+1)!}}{\frac{4^{n-1}}{n!}} = \frac{4^n}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{4^{n-1}} = \frac{4 \cdot \cancel{4^{n-1}}}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{4^{n-1}}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4}{n+1} = 0 \overset{!}{<} 1$$

$\Rightarrow$ konvergent

7.1 Berechnen Sie das Integral im Intervall $[0, 4]$ einer diskret gegeben Funktion mit Hilfe der Trapezregel. (**1,5 Punkte**). Hinweis: Veranschaulichen Sie bei Bedarf die diskrete Funktion und das Integral mit einer Skizze.

$f(x_k)$	1	6	18	38	66
x_k	0	2	4	6	8

$$Q[f] = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2}$$

$$= \underbrace{\frac{4-0}{2}}_{\cancel{2}} \left(\frac{6+1}{\cancel{2}} + \frac{18+6}{\cancel{2}} \right) = 7 + 24 = \underline{\underline{31}}$$

8.1 Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 3 \\ 8 & 18 & 10 \end{pmatrix}$. **(2,5 Punkte)**

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \cdot A = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 3 \\ 8 & 18 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{4} & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix} - A_1$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \cdot A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - A_2 = U$$

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-2}}_{L} \cdot \underbrace{A_2}_{U}$$

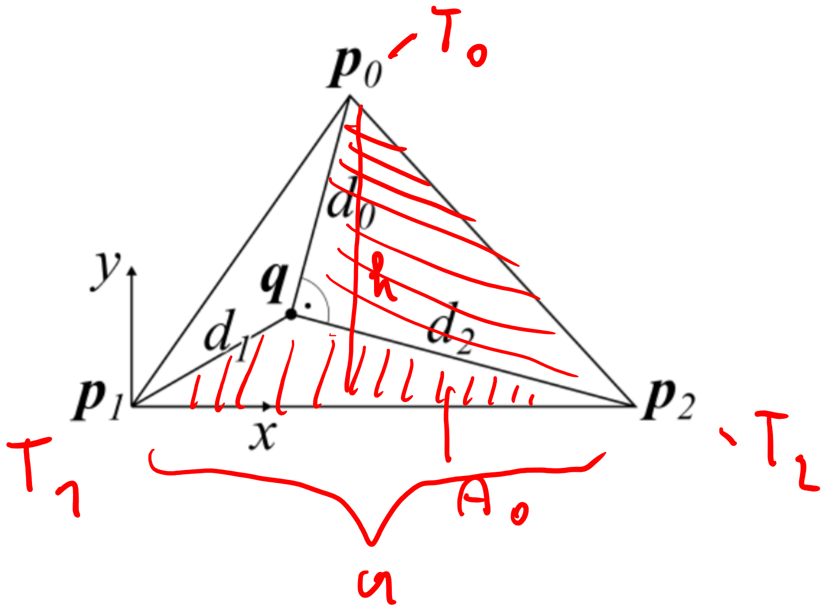
$$L = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{L_1^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} - L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = L \cdot U$$

8.1 Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 3 \\ 8 & 18 & 10 \end{pmatrix}$. **(2,5 Punkte)**

9.1 Gegeben sei ein Dreieck mit den Punkten in 2D: $p_0 = [2.6\ \ 3.\dot{6}\ ]^T$, $p_1 = [0\ \ 0]^T$, $p_2 = [6\ \ 0]^T$ mit zugehörigen Temperaturen: $T_0 = 12$, $T_1 = 6$, $T_2 = 10$. Berechnen Sie die Temperatur T_q an der Stelle $q = [\,1.9\ \ 1.1\,]^T$ mit Hilfe Baryzentrischer Koordinaten. Weiters sind die folgenden Längen gegeben (siehe Skizze): $d_0 = 2.6$, $d_1 = 2.2$, $d_2 = 4.2$. **(2,5 Punkte)**

Hinweis: Runden Sie Zwischenergebnisse auf eine Kommastelle.



$3{,}3 : 11 = 0{,}3$
33
ok

$\lambda_0 = \frac{3{,}3}{11} = 0{,}3$

$\lambda_1 = \frac{5{,}5}{11} = 0{,}5$

$\lambda_2 = 1 - 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2$

$T_q = \lambda_0 T_0 + \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$

$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_2 = 1 - \lambda_0 - \lambda_1$

$\lambda_0 = \frac{A_0}{A} \qquad \lambda_1 = \frac{A_1}{A}$

$A = a \cdot h \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot 3{,}\dot{6} \cdot \frac{1}{2} = \cancel{3} \cdot \frac{11}{\cancel{3}} = 11$

$A_0 = a \cdot h_0 \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot 1{,}1 \cdot \frac{1}{2} = 3{,}3$

$A_1 = d_2 \cdot d_0 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}2 \cdot 2{,}6 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}2 \cdot 1{,}3$

$1{,}26$

$5{,}46 \approx 5{,}5$

$T_q = 0{,}3 \cdot 12 + 0{,}5 \cdot 6 + 0{,}2 \cdot 10 =$
$= 3{,}6 + 3 + 2 = \underline{8{,}6}$

10.1 Berechnen Sie die ersten 4 Terme der Halton34 Sequenz (n = 1, 2, 3, 4). Berechnen Sie dazu die zugehörigen Terme der van-der-Corput Sequenzen zur Basis 3 und 4. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle. **(2,0 Punkte)**

n	1	2	3	4
Basis 3	001	002	010	011
Inv	0,100	0.200	0,010	0,110
Dez	1/3	2/3	1/9	$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=4/9$
Basis 4	001	002	003	010
Inv	0,100	0,200	0.300	0,010
Dez	1/4	1/2	3/4	1/16
Halton 34	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$	$(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{9}, \frac{3}{4})$	$(\frac{4}{9}, \frac{1}{16})$