Tut. 1.12.

Thema: Determinante & Permutationen (Video 10 & 11)

Permutationen

Permutation := Abbildung einer endlichen Menge in sich selbst

bezeichnet man meistens mit σ

⇝ Eine Permutation entspricht stehts einer Umordnung einer (endlichen) Menge

1. Element	□		1. Element	*
2. Element	△	$\xrightarrow{\sigma}$	2. Element	□
3. Element	○		3. Element	○
4. Element	*		4. Element	△

formal: $\sigma: M \to M$

$n \mapsto \sigma(n)$

→ Die Menge aller Permutationen auf der Menge M wird mit S_n bezeichnet. Dabei ist n die Mächtigkeit der Menge.

⇝ Da Permutationen immer auf endlichen Mengen wirken, kann man M stehts als $\{1, 2, \dots n\}$ darstellen. Dabei wird jedes Element mit seiner Position in der Liste assoziiert.

$\Rightarrow$ Der passende Isomorphismus wäre im Bsp also

$$f: M \to \{1, 2, 3, 4\}$$
$$\square \mapsto 1$$
$$\triangle \mapsto 2$$
$$\circ \mapsto 3$$
$$\ast \mapsto 4$$

womit man σ als $\ast$

$$\sigma: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$$
$$1 \mapsto \sigma(1) = 2$$
$$2 \mapsto \sigma(2) = 4$$
$$3 \mapsto \sigma(3) = 3$$
$$4 \mapsto \sigma(4) = 1$$

darstellen kann.

$\to$ Da eine Permutation einer Umordnung entspricht, ist jede Permutation bijektiv. $\leadsto$ jedes $n \in M$ wird genau 1mal getroffen

$\to$ Da Permutationen nur auf endlichen Mengen existieren gibt es (auf einer Menge) auch nur endlich viele Permutationen.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten Permutationen an zu geben:

1) Matrixschreibweise

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$\leadsto$ im Prinzip das Gleiche wie $\ast$

! Hintereinanderausführung $\neq$ Matrixmult. !

⇝ Hintereinanderausführung durch ablesen von links nach rechts

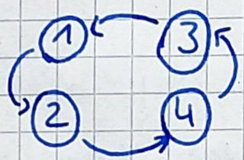
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & & \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & \downarrow & & \downarrow \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Inverse durch verstauschen der Zeilen

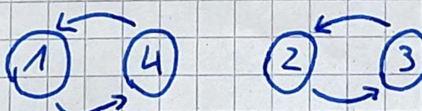
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

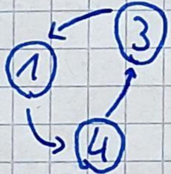
II) Zykelschreibweise

Bei der Zykelschreibweise beginnt man bei einer Zahl (meistens 1) schreibt der Reihe nach ihre Funktionswerte auf.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$  $= (1\ 2\ 4\ 3)$

Es kann auch vorkommen, dass eine Permutation aus mehreren Zyklen besteht.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$  $= (1\ 4)(2\ 3)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$  $(2) = (1\ 4\ 3)$

(2) schreibt man meistens nicht dazu

Inverse findet man durch umdrehen der Reihenfolge

$$(1\ 2\ 4\ 3)^{-1} = (3\ 4\ 2\ 1) = (1\ 3\ 4\ 2)$$

schreibt man mit der kleinsten Zahl am Anfang

⇝ in der Zykelschreibweise kommt jede Zahl genau 1mal vor. Man nennt sie „elementfremd"

⇝ die Anzahl an elementfremden Zyklen ist für jede Permutation eindeutig bestimmt.

III) Transpositionsschreibweise

Transposition := Zykel der Länge 2

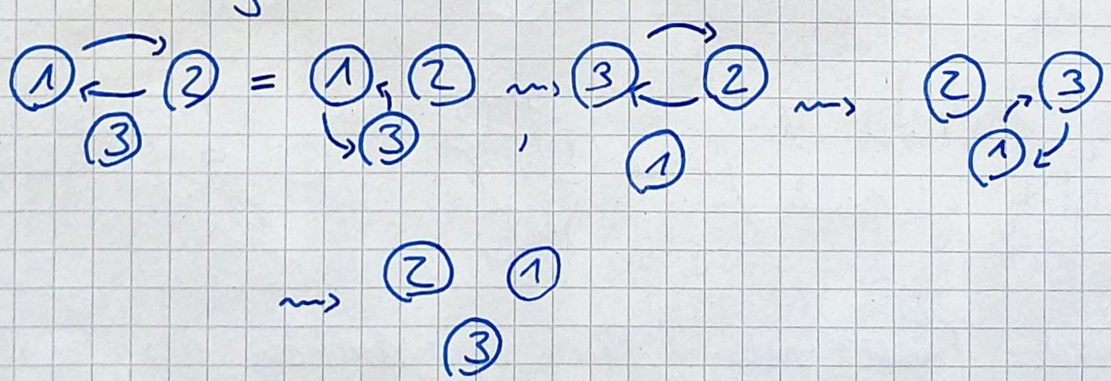
⇝ Vertauschung von 2 Elementen

Man kann jeden Zykel (& damit jede Permutation) als Produkt von Transpositionen schreiben.

$(1\,2\,4\,3) = (1\,2)(2\,4)(4\,3)$

⇝ „Jede beliebige Vertauschung meiner n Elemente kann ich erreichen, indem ich nach einander 2 Elemente tausche"

Die Anzahl der Transpositionen ist dabei nicht eindeutig!



Aber sie ist immer gerade oder ungerade ($\Leftrightarrow$ eindeutig in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

⇝ Deshalb def man eine neue Abb.

$$\operatorname{sign}(\sigma) := (-1)^s$$

wobei s die Zahl der Transpositionen ist.

Die Determinante

↳ oft interessieren wir uns bei Matrizen für ihre Eigenschaften, ohne sie explizit nachrechnen zu wollen

zB. ob A invertierbar ist, ohne extra A^{-1} aus zu rechnen

Hierfür verwendet man meist Determinanten. Die Determinante einer Matrix ist eine Zahl, in der viel Information über A steckt.

zB ist $\det A \neq 0$ wenn A invertierbar ist

$$\det: \mathrm{Mat}_m(K) \longrightarrow K$$

„Leibnitzformel"

$$A \longmapsto \det(A) = \sum_{\forall \sigma \in S_m} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(m),m}$$

⇝ det ist also eine Summe von Produkten. Da in jedem Produkt $\operatorname{sign}(\sigma)$ vorkommt, bestimmt die Signatur das Vorzeichen. Die anderen m Faktoren sind Elemente der Matrix. Da die Permutation σ bijektiv ist, wird in jedem Produkt ein Matrixelement aus jeder Zeile gewählt.

Bsp.: Betrachte Mat. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Menge S_3 ist $\left\{ \underset{sign=1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}, \underset{sign=-1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}, \underset{sign=-1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}, \underset{sign=-1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{sign=1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{sign=1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \right\}$

Daher wäre $\det A = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{21} a_{33} - a_{31} a_{22} a_{13} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} = 12 - 0 - 0 - 4 + 0 + 14 = 22$

Auch wenn det über Leibnitz formel definiert ist, berechnet man sie meistens anders.

Die Determinante erfüllt allg. folgende Eigenschaften:

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertierbar

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(BA)$

$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$

wenn A in Zeilenstufenform ist, gilt

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

weil alle anderen Summanden 0 sind.

Daher drückt man in der Praxis A als Produkt von einer Mat in Zeilenstufenform & Gaußschen-Elementarmatrizen aus & verwendet

$$\det(A) = \det\Big(\underbrace{\tilde{A}}_{\text{A in Zeilenstufenform}} \prod_{i=1}^{n} E_i\Big) = \det(\tilde{A})\det(E_1)\det(E_2)\dots\det(E_n)$$

wobei E_i eine Gaußsche Elementarmatrix ist &

$\det(P_{ij}) = -1$

$\det(S_i(\lambda)) = \lambda$

$\det(M_j^i(\lambda)) = 1$

Bsp.: bestimme $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{2\cdot II}{\underset{2 IV}{=}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & 8 & 0 \end{pmatrix} \overset{II-I}{\underset{IV-3I}{=}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -9 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -1 & -15 \end{pmatrix} \overset{IV-4II}{\underset{III\cdot 2}{=}}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -9 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 35 & -11 \end{pmatrix} \overset{III+II}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 35 & -11 \end{pmatrix} \overset{IV+5III}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -26 \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

$\det \tilde{A} = 2 \cdot 2 \cdot (-7) \cdot (-26) = 728$.

wir haben nie 2 Zeilen vertauscht & 3 mal eine Zeile mit 2 multipliziert.

$\Rightarrow \det(A) = \frac{1}{8}\det(\tilde{A}) = 91$

↳ da wir mit 2 multipliziert haben um auf $\tilde{A}$ zu kommen, müssen wir mit 1/2 mult. um auf A zu kommen