Altklausur Lineare Algebra
Tim Netzer / Karin Schnass
1. Prüfungstermin WS 2021/22 (09.02.2022)

Teillösung

Name	Matrikelnummer	Studiengang

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra + Vertiefung

Fr. 9. Februar 2022

Sie können in jedes Kästchen entweder **w** (wahr), **f** (falsch) oder **nichts** schreiben.

Jede korrekt beantwortete Frage gibt einen Punkt, für jede unkorrekt beantwortete Frage wird ein Punkt abgezogen. Eine nicht beantwortete Frage zählt null Punkte.

Negative Gesamtpunkte in einer einzelnen Aufgabe werden auf Null aufgerundet.

Insgesamt können **64 + 16** Punkte erzielt werden.

Nur VO	Punkte	64–57	56–49	48–41	40–33	32–0
Nur Vertiefung	Punkte	16/15	14/13	12/11	10/9	8–0
VO+Vertiefung	Punkte	80–71	70–61	60–51	50–41	40–0
	Note	1	2	3	4	5

45

1. Lineare Gleichungssysteme, Körper und Matrizen.

1.1. Eine Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ eines vom Parameter $\lambda \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ abhängigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sieht wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & 1 \end{array}\right)$$

Entscheiden Sie:

F ☐ $\lambda = 2$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems.

1 ~~W~~ ☐ Das Gleichungssystem hat immer genau eine Lösung, egal welchen Wert λ annimmt.

[W] Für $\lambda = 0$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

[ ] Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems lautet

$$L(A, b) = \left\{ \left(2(2+\lambda)^{-1}, 2\lambda \cdot (2+\lambda)^{-1}, (2+\lambda)^{-1}\right) \mid \lambda \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \setminus \{1\} \right\}.$$

1.2. Entscheiden Sie:

[W] Wenn eine Matrix (über einem Körper) ein Produkt von Elementarmatrizen ist, so ist sie invertierbar.

3 [W] Die einzige invertierbare quadratische Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist die Einheitsmatrix.

[W] Jede elementare Zeilenumformung einer Matrix lässt sich auch durch Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix von links erreichen.

[ ] Ist eine quadratische Matrix nicht invertierbar, so besitzt mindestens ein inhomoges Gleichungssystem mit dieser Koeffizientenmatrix keine Lösung.

1.3. Entscheiden Sie:

[W] $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$ bildet mit der bekannten Addition und Multiplikation von Matrizen einen Ring.

4 [W] Für $A, B \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$ folgt aus $AB \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ immer $A, B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$.

[W] $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = m$.

[F] $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ bildet mit der bekannten Multiplikation von Matrizen eine abelsche Gruppe.

1.4. Es sei A eine 3×6-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$. Entscheiden Sie:

3

- [ ] Sind $y, z \in \mathbb{Q}^6$ Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, so ist $y + 6z$ ebenfalls eine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.
- [F] Ist $\mathrm{Rang}(A) = 3$, so ist der Lösungsraum $L(A, 0)$ des homogenen linearen Gleichungssystems nulldimensional.
- [F] Ist $b \in \mathbb{Q}^3 \backslash \{0\}$ und sind $y, z \in \mathbb{Q}^6$ Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$, so ist $y - 6z$ ebenfalls eine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.
- [W] Das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ besitzt mindestens eine nichttriviale Lösung.

1.5. Entscheiden Sie in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ (mit den üblichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$):

3

- [W] $4 \cdot 5 = 9$
- [F] $3 - 10 = 7$
- [ ] $5^{-1} = 9$
- [W] $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ ist ein kommutativer Ring.

1.6. Entscheiden Sie in $\mathbb{C}$:

2

- [F] $\mathrm{Re}\,(i(1 + i)) = 1$
- [ ] $i^{-1} = -i$
- [ ] $\mathrm{Im}\,\left((1 + 2i) \cdot (1 - i)^{-1}\right) = \frac{3}{2}i$
- [W] $i^5 = i$

2. Vektorräume und lineare Abbildungen.

2.1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension 7. Entscheiden Sie:

4

- [W] Jedes System linear unabhängiger Vektoren aus V kann zu einer Basis von V ergänzt werden.
- [F] Je 7 Vektoren aus V bilden ein Erzeugendensystem von V.
- [F] Aus 8 Vektoren in V kann stets eine Basis von V ausgewählt werden.
- [F] Sind $v_1, \ldots, v_7$ Vektoren in V, so dass je 6 von ihnen linear unabhängig sind, so sind $v_1, \cdots, v_7$ linear unabhängig.

2.2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen des Vektorraums $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ jeweils $\mathbb{R}$-Untervektorräume sind (bezüglich der bekannten Addition und skalaren Multiplikation):

2

- [W] $\{f \in V \mid f(7) = 0\}$
- [ ] $\{f \in V \mid f(a) = -f(-a) \text{ für alle } a \in \mathbb{N}\}$
- [F] $\{f \in V \mid f(0) = 7\}$
- [ ] $\{f \in V \mid \exists B \geq 0 \; \forall a \in \mathbb{R}\colon |f(a)| \leq B\}$

2.3. Sei V ein K-Vektorraum und $w_1, \ldots, w_m \in V$. Entscheiden Sie:

0

- [F] Es ist $\mathrm{Span}_K(\{w_1, \ldots, w_m\})$ die Menge aller Untervektorräume von V, welche $w_1, \ldots, w_m$ enthalten.
- [W] Es ist $\mathrm{Span}_K(\{w_1, \ldots, w_m\})$ der größte Untervektorraum von V, der $\{w_1, \ldots, w_m\}$ enthält.
- [F] Es ist $\mathrm{Span}_K(\{w_1, \ldots, w_m\})$ die Menge aller K-Linearkombinationen der Vektoren $w_1, \ldots, w_m$.
- [ ] Die Dimension von $\mathrm{Span}_K(\{w_1, \ldots, w_m\})$ ist endlich.

2.4. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

③

- [W] Wenn φ nicht surjektiv ist, ist $\dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi)) > 0$.
- [ ] φ ist genau dann injektiv, wenn $\varphi(0) = 0$ gilt.
- [F] Für alle $x, y \in V$ ist $\varphi(x - y) + 2\varphi(-x) = -\varphi(y)$.
- [F] Aus $\dim \mathrm{Kern}(\varphi) < \dim(V)$ folgt, dass φ nicht injektiv ist.

2.5. Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}$-linear sind:

④

- [W] $\varphi\colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]; p \mapsto p'' + p(7)$
- [F] $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y)^t \mapsto (x - y, y - 1)^t$
- [F] $\varphi\colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}^1; p \mapsto p(7) + 7$
- [F] $\varphi\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2; a \mapsto (a, a^7)^t$

3. Determinante und Eigenwerte.

3.1. Es sei B eine reelle 7×7-Matrix mit $\det(B) = -1$. Die Spalten von B seien mit $b_1, \dots, b_7$ bezeichnet, also $B = (b_1, \dots, b_7)$. Entscheiden Sie:

- [ ] $\det(-B) = 1$
- [F] $\det\left((b_2, b_1, b_4, b_3, b_5, b_6, b_7, b_8)\right) = 1$
- [ ] $\det\left((b_2 - b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8)\right) = -1$
- [F] $\det(B^{-1}) = 1$.

3.2. Entscheiden Sie für den Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

- [ ] Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_7(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ mit $\det(A) = 0$ hat mindestens eine Nullspalte.
- [W] $A \in \mathrm{Mat}_7(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ist genau dann invertierbar wenn $\det(A) = 1$ gilt.
- [F] Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist stets ungleich Null.
- [F] $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

3.3. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

- [F] Es besitzt φ in K mindestens einen Eigenwert.
- [W] Die Menge $\{v \in V \mid \varphi(v) = 7v\}$ ist ein Untervektorraum von V.
- [W] Für $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_A genau die Eigenwerte von μ_A.
- [W] Für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ besitzt $\mu_A\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ den Eigenwert 1.

4. Allgemeine Beweisaufgaben.

4.1. Sei V ein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum, $\varphi: V \to V$ eine lineare Abbildung und $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \neq v_2$. Entscheiden Sie:

0 1

- [W] Sind $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$ linear unabhängig, so auch v_1, v_2.
- [W] Aus $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ folgt $v_1 - v_2 \in \mathrm{Kern}(\varphi)$.
- [ ] Es gilt $v_1 + v_1 \in \mathrm{Kern}(\varphi)$.
- [W] Sind v_1, v_2 linear unabhängig, so auch $v_1, v_1 + v_2$.

3

4.2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_7(\mathbb{Q})$ mit $A^2 = I_7$. Entscheiden Sie:

- [W] $\det(A) \neq 0$.
- [ ] $A = I_7$.
- [~~W~~] A hat Diagonalgestalt.
- [F] Es kann $\det(A) = 2$ gelten.

1

5. Vertiefung.

5.1. Es sei x eine komplexe Zahl. Entscheiden Sie:

(2)

- [W] x besitzt in $\mathbb{C}$ eine 7-te Wurzel.
- [ ] $x \cdot \overline{x}$ ist reell und ≤ 0.
- [ ] Aus $x^7 = 1$ folgt $|x| = 1$.
- [F] Es gilt $|x - \overline{x}| = 2\mathrm{Im}(x)$.

5.2. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, sowie $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Entscheiden Sie:

(1)

- [F] $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) \quad \Rightarrow \quad U_1 = U_2$.
- [F] $\dim(U_1 + U_2) \geq \dim(U_1) + \dim(U_2)$.
- [ ] Wenn $U_1 \not\subseteq U_2$ und $\dim(U_2) = \dim(V) - 1$, so gilt $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) - 1$.
- [W] Es gibt eine lineare Abbildung $\psi: V \to V$ mit $\mathrm{Kern}(\psi) = U_1$ und $\mathrm{Bild}(\psi) = U_2$.

5.3. Sei $\varphi: \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 1}; p \mapsto 7p' - p(0)$, sowie $\underline{v} = (1, t, t^2)$ und $\underline{w} = (1, 1 + t)$. Entscheiden Sie:

(1)

- [F] Es gilt $M_{\underline{v},\underline{w}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$.
- [F] Es gilt $M_{\underline{v},\underline{w}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -14 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$.
- [ ] φ ist surjektiv.
- [F] Es gibt Basen $\underline{v}_1$ von $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ und $\underline{v}_2$ von $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$mit

$$M_{\underline{v}_1,\underline{v}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.4. Seien V, W zwei endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

- ☐ Für $v_1 \neq v_2$ aus V existiert stets ein $f \in V'$ mit $f(v_1) \neq f(v_2)$.
- F Für die duale Abbildung von φ gilt $\varphi': V' \to W'$.
- ☐ Für jedes $f \in W'$ gilt $\varphi'(f) = f \circ \varphi$.
- ☐ Wenn φ surjektiv ist, ist φ' injektiv.

1

Altklausur Lineare Algebra
Tim Netzer / Karin Schnass
1. Prüfungstermin WS 2021/22 (09.02.2022)

leerer Übungsteil

Name	Matrikelnummer	Studiengang

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra + Vertiefung

Fr. 9. Februar 2022

Sie können in jedes Kästchen entweder **w** (wahr), **f** (falsch) oder **nichts** schreiben.

Jede korrekt beantwortete Frage gibt einen Punkt, für jede unkorrekt beantwortete Frage wird ein Punkt abgezogen. Eine nicht beantwortete Frage zählt null Punkte.

Negative Gesamtpunkte in einer einzelnen Aufgabe werden auf Null aufgerundet.

Insgesamt können **64 + 16** Punkte erzielt werden.

Nur VO	Punkte	64–57	56–49	48–41	40–33	32–0
Nur Vertiefung	Punkte	16/15	14/13	12/11	10/9	8–0
VO+Vertiefung	Punkte	80–71	70–61	60–51	50–41	40–0
	Note	1	2	3	4	5

45

1. Lineare Gleichungssysteme, Körper und Matrizen.

1.1. Eine Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ eines vom Parameter $\lambda \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ abhängigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sieht wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & 1 \end{array}\right)$$

Entscheiden Sie:

$\lambda = 2$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems.

Das Gleichungssystem hat immer genau eine Lösung, egal welchen Wert λ annimmt.

Für $\lambda = 0$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems lautet

$$L(A,b) = \left\{ \left(2(2+\lambda)^{-1}, 2\lambda \cdot (2+\lambda)^{-1}, (2+\lambda)^{-1}\right) \mid \lambda \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \setminus \{1\} \right\} .$$

1.2. Entscheiden Sie:

Wenn eine Matrix (über einem Körper) ein Produkt von Elementarmatrizen ist, so ist sie invertierbar.

Die einzige invertierbare quadratische Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist die Einheitsmatrix.

Jede elementare Zeilenumformung einer Matrix lässt sich auch durch Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix von links erreichen.

Ist eine quadratische Matrix nicht invertierbar, so besitzt mindestens ein inhomoges Gleichungssystem mit dieser Koeffizientenmatrix keine Lösung.

1.3. Entscheiden Sie:

$\mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$ bildet mit der bekannten Addition und Multiplikation von Matrizen einen Ring.

Für $A, B \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$ folgt aus $AB \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ immer $A, B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$.

$A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = m$.

$\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ bildet mit der bekannten Multiplikation von Matrizen eine abelsche Gruppe.

1.4. Es sei A eine 3×6-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$. Entscheiden Sie:

Sind $y, z \in \mathbb{Q}^6$ Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, so ist $y + 6z$ ebenfalls eine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

Ist $\text{Rang}(A) = 3$, so ist der Lösungsraum $L(A, 0)$ des homogenen linearen Gleichungssystems nulldimensional.

Ist $b \in \mathbb{Q}^3 \backslash \{0\}$ und sind $y, z \in \mathbb{Q}^6$ Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$, so ist $y - 6z$ ebenfalls eine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ besitzt mindestens eine nichttriviale Lösung.

1.5. Entscheiden Sie in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ (mit den üblichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$):

$4 \cdot 5 = 9$

$3 - 10 = 7$

$5^{-1} = 9$

$\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ ist ein kommutativer Ring.

1.6. Entscheiden Sie in $\mathbb{C}$:

$\text{Re}\,(i(1+i)) = 1$

$i^{-1} = -i$

$\text{Im}\,\left((1+2i) \cdot (1-i)^{-1}\right) = \frac{3}{2}i$

$i^5 = i$

2. Vektorräume und lineare Abbildungen.

2.1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension 7. Entscheiden Sie:

Jedes System linear unabhängiger Vektoren aus V kann zu einer Basis von V ergänzt werden.

Je 7 Vektoren aus V bilden ein Erzeugendensystem von V.

Aus 8 Vektoren in V kann stets eine Basis von V ausgewählt werden.

Sind $v_1, \ldots, v_7$ Vektoren in V, so dass je 6 von ihnen linear unabhängig sind, so sind $v_1, \cdots, v_7$ linear unabhängig.

2.2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen des Vektorraums $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ jeweils $\mathbb{R}$-Untervektorräume sind (bezüglich der bekannten Addition und skalaren Multiplikation):

$\{f \in V \mid f(7) = 0\}$

$\{f \in V \mid f(a) = -f(-a) \text{ für alle } a \in \mathbb{N}\}$

$\{f \in V \mid f(0) = 7\}$

$\{f \in V \mid \exists B \geq 0\ \forall a \in \mathbb{R}\colon |f(a)| \leq B\}$

2.3. Sei V ein K-Vektorraum und $w_1, \ldots, w_m \in V$. Entscheiden Sie:

Es ist $\mathrm{Span}_K(\{w_1, \ldots, w_m\})$ die Menge aller Untervektorräume von V, welche $w_1, \ldots, w_m$ enthalten.

Es ist $\mathrm{Span}_K(\{w_1, \ldots, w_m\})$ der größte Untervektorraum von V, der $\{w_1, \ldots, w_m\}$ enthält.

Es ist $\mathrm{Span}_K(\{w_1, \ldots, w_m\})$ die Menge aller K-Linearkombinationen der Vektoren $w_1, \ldots, w_m$.

Die Dimension von $\mathrm{Span}_K(\{w_1, \ldots, w_m\})$ ist endlich.

2.4. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

Wenn φ nicht surjektiv ist, ist $\dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi)) > 0$.

φ ist genau dann injektiv, wenn $\varphi(0) = 0$ gilt.

Für alle $x, y \in V$ ist $\varphi(x - y) + 2\varphi(-x) = -\varphi(y)$.

Aus $\dim \mathrm{Kern}(\varphi) < \dim(V)$ folgt, dass φ nicht injektiv ist.

2.5. Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}$-linear sind:

$\varphi\colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]; p \mapsto p'' + p(7)$

$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y)^t \mapsto (x - y, y - 1)^t$

$\varphi\colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}^1; p \mapsto p(7) + 7$

$\varphi\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2; a \mapsto (a, a^7)^t$

3. Determinante und Eigenwerte.

3.1. Es sei B eine reelle 7×7-Matrix mit $\det(B) = -1$. Die Spalten von B seien mit $b_1, \ldots, b_7$ bezeichnet, also $B = (b_1, \ldots, b_7)$. Entscheiden Sie:

$$\det(-B) = 1$$

$$\det\left((b_2, b_1, b_4, b_3, b_5, b_6, b_7, \cancel{b_8})\right) = 1$$

$$\det\left((b_2 - b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, \cancel{b_8})\right) = -1$$

$$\det(B^{-1}) = 1.$$

3.2. Entscheiden Sie für den Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_7(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ mit $\det(A) = 0$ hat mindestens eine Nullspalte.

$A \in \mathrm{Mat}_7(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ist genau dann invertierbar wenn $\det(A) = 1$ gilt.

Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist stets ungleich Null.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

3.3. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

Es besitzt φ in K mindestens einen Eigenwert.

Die Menge $\{v \in V \mid \varphi(v) = 7v\}$ ist ein Untervektorraum von V.

Für $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_A genau die Eigenwerte von μ_A.

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ besitzt $\mu_A\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ den Eigenwert 1.

4. Allgemeine Beweisaufgaben.

4.1. Sei V ein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum, $\varphi: V \to V$ eine lineare Abbildung und $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \neq v_2$. Entscheiden Sie:

Sind $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$ linear unabhängig, so auch v_1, v_2.

Aus $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ folgt $v_1 - v_2 \in \mathrm{Kern}(\varphi)$.

Es gilt $v_1 + v_1 \in \mathrm{Kern}(\varphi)$.

Sind v_1, v_2 linear unabhängig, so auch $v_1, v_1 + v_2$.

4.2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_7(\mathbb{Q})$ mit $A^2 = I_7$. Entscheiden Sie:

$\det(A) \neq 0$.

$A = I_7$.

A hat Diagonalgestalt.

Es kann $\det(A) = 2$ gelten.

5. Vertiefung.

5.1. Es sei x eine komplexe Zahl. Entscheiden Sie:

x besitzt in $\mathbb{C}$ eine 7-te Wurzel.

$x \cdot \overline{x}$ ist reell und ≤ 0.

Aus $x^7 = 1$ folgt $|x| = 1$.

Es gilt $|x - \overline{x}| = 2\mathrm{Im}(x)$.

5.2. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, sowie $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Entscheiden Sie:

$\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) \quad \Rightarrow \quad U_1 = U_2$.

$\dim(U_1 + U_2) \geq \dim(U_1) + \dim(U_2)$.

Wenn $U_1 \not\subseteq U_2$ und $\dim(U_2) = \dim(V) - 1$, so gilt $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) - 1$.

Es gibt eine lineare Abbildung $\psi: V \to V$ mit $\mathrm{Kern}(\psi) = U_1$ und $\mathrm{Bild}(\psi) = U_2$.

5.3. Sei $\varphi: \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 1}; p \mapsto 7p' - p(0)$, sowie $\underline{v} = (1, t, t^2)$ und $\underline{w} = (1, 1+t)$. Entscheiden Sie:

Es gilt $M_{\underline{v},\underline{w}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$.

Es gilt $M_{\underline{v},\underline{w}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -14 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$.

φ ist surjektiv.

Es gibt Basen $\underline{v}_1$ von $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ und $\underline{v}_2$ von $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$mit

$$M_{\underline{v}_1,\underline{v}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.4. Seien V, W zwei endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

Für $v_1 \neq v_2$ aus V existiert stets ein $f \in V'$ mit $f(v_1) \neq f(v_2)$.

Für die duale Abbildung von φ gilt $\varphi': V' \to W'$.

Für jedes $f \in W'$ gilt $\varphi'(f) = f \circ \varphi$.

Wenn φ surjektiv ist, ist φ' injektiv.