Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 3

Abgabe bis spätestens Mo. 25. Oktober 2021, 08:00 Uhr
Achtung: da Dienstag 26.10. ein Feiertag ist, sind bei einigen PS-Gruppen Sonderregelungen möglich

Aufgabe 9

Sei $f\colon M \to T$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Für $N \subseteq M$ und $S \subseteq T$ gilt
$$N \subseteq f^{-1}\left(f(N)\right) \text{ und } f\left(f^{-1}(S)\right) \subseteq S.$$

(b) Für $S_1, S_2 \subseteq T$ gilt
$$f^{-1}\left(S_1 \cup S_2\right) = f^{-1}\left(S_1\right) \cup f^{-1}\left(S_2\right)$$
$$\text{und } f^{-1}\left(S_1 \cap S_2\right) = f^{-1}\left(S_1\right) \cap f^{-1}\left(S_2\right)$$

(c) Für $N_1, N_2 \subseteq M$ zeigen oder widerlegen Sie die Aussagen
$$f\left(N_1 \cup N_2\right) = f\left(N_1\right) \cup f\left(N_2\right) \quad \text{und} \quad f\left(N_1 \cap N_2\right) = f\left(N_1\right) \cap f\left(N_2\right).$$

Aufgabe 10

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

(a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x \cdot y$
(b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 1.$
(c) $f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (3x + y, y - 2x).$
(d) $f_4\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto (x^2, y, x + y^2).$

Aufgabe 11

Seien $f\colon M \to N, g\colon N \to O, h\colon O \to P$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
(b) Sind f und g injektiv, so auch $g \circ f$.
(c) Sind f und g surjektiv, so auch $g \circ f$.
(d) Sind f und g bijektiv, so auch $g \circ f$ und es gilt
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Aufgabe 12

Seien $f\colon M \to N, g\colon N \to O, h\colon O \to P$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
(b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.
(c) Ist g injektiv und $g \circ f$ surjektiv, dann ist f surjektiv.
(d) Ist f surjektiv und $g \circ f$ injektiv, dann ist g injektiv.
(e) Sind $g \circ f$ und $h \circ g$ bijektiv, so sind f, g, h bijektiv.