Group 1

(1) Welche der folgenden Systeme sind Systeme linearer Gleichungen für $x, y \in \mathbb{R}$:

a)

$$\begin{aligned} x + y &= -1 \\ z &= 2 \\ x - \frac{1}{2}z &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4x - |y| &= -3 \\ x + 9y + 2 &= 30 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y &= 0.5 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 8x - y - \sin\frac{\pi}{2} &= 6 \\ \sqrt{9}x - 10y &= -7 \\ 3x - 18 &= -15 \end{aligned}$$

(2) Was ist die Inverse der Matrix $\mathbf{A}$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Gruppe 2

(1) Schreib das folgende lineare Gleichungssystem in Matrixform:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_2 + x_3 &= -9 \\ 2x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(2) Finden Sie eine Lösung für das gegebene System.

Gruppe 3

(1) Sie sollen das folgende System lösen:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

a) $\mathbf{A_i}$ stellt die Matrix $\mathbf{A}$ dar, wobei die Spalte i wird ersetzt durch $\mathbf{b}$. Schreiben Sie die Matricen $\mathbf{A_1}$ und $\mathbf{A_2}$ an und berechnen Sie die Determinanten. Berechne auch die Determinante von $\mathbf{A}$.

b) Berenchen Sie die Lösung x unter Verwendung der Formel:

$$x_i = \frac{det(\mathbf{A_i})}{det(\mathbf{A})}$$

Gruppe 4

(1) Beschreiben Sie den Prozess der Berechnung der LU-Zerlegung einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (wie in der Vorlesung).

(2) Berechnen Sie die ersten beiden temporären Matrizen $\mathbf{L_{(0)}}$ und $\mathbf{A_{(1)}}$ für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Gruppe 5

(1) Schreiben Sie die Iterationsregel für eine einzelne Unbekannte des *Jacobi*-Verfahrens auf. Berechnen Sie den ersten Iterationsschritt, d.h. $\mathbf{x^{(1)}}$, für das System linearer Gleichungen mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Betrachte alle Einträge der Anfangsschätzung $\mathbf{x^{(0)}}$ als eins.

(2) Berechne das Residuum und seine euklidische Norm für $\mathbf{x^{(0)}}$ und $\mathbf{x^{(1)}}$.

Gruppe 6

(1) Gegeben sei die diskretisierte 1D Laplace-Gleichung:

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = 0.$$

Nehmen Sie eine Raumdiskretisierung mit $N = 4$ an und die bekannten Randwerte $u_0 = u_4 = 1$. Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in Matrixform $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ für den Lösungsvektor $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$.

(2) Ist die Konvergenz der *Jacobi*- und *Gauß-Seidel*-Verfahrens für diese Systemmatrix garantiert?

Gruppe 7

(1) Erklären Sie das Verfahren zur Berechnung der Cholesky-Zerlegung einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (wie in der Vorlesung besprochen).

(2) Berechnen SIe die Zerlegung für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 26 & 23 \\ 3 & 23 & 137 \end{bmatrix}$$