Aussagenlogik

Prüfen Sie folgende aussagenlogische Formel mit Hilfe der Methode von Quine auf die Eigenschaften Erfüllbarkeit und Tautologie.

$$((\neg C \lor D) \land (\neg(A \land B) \land E)) \to \neg((A \land B) \lor \neg E) \quad .$$

`[16 Punkte]`

Formale Sprachen

Gegeben sei die Grammatik G_1

$$G_1 = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, R, S)$$

wobei R wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} S &\to AS \mid B \\ A &\to aAc \mid Aa \mid \epsilon \\ B &\to bBb \mid \epsilon \end{aligned}$$

(a) Um welchen Typ von Grammatik handelt es sich bei der Grammatik G_1? Begründen Sie Ihre Antwort. `[4 Punkte]`

(b) Beschreiben Sie die Sprache, die von der Grammatik G_1 akzeptiert wird. `[4 Punkte]`

(c) Geben Sie eine Linksableitung in Bezug auf G_1 für das Wort $aaccabb$ an. `[4 Punkte]`

(d) Es sei folgende Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ gegeben:

$$L = \{x \mid x \in \Sigma^* \text{ enthält mindestens drei aufeinanderfolgende } a\} \quad .$$

Geben Sie eine rechtslineare Grammatik G_2 für die Sprache L an. `[4 Punkte]`

Berechenbarkeitstheorie

Schreiben Sie folgende `while`-Programme

(a) $P_c(x_i, x_j, x_k)$ welches den Inhalt von x_i nach x_j kopiert (der Wert von x_i ist unveränder nach der Ausführung von P_c). `[4 Punkte]`

(b) $P_+(x_i, x_j, x_k, x_l, x_m)$ welches nach der Ausführung in x_i die Summe von $x_j + x_k$ enthält und x_j, x_k den selben (Sie können P_c verwenden unabhängig von der vorherigen Teilaufgabe). `[6 Punkte]`

(c) $P_\cdot(x_i, x_j, x_k, x_l, x_m, x_n, x_o)$ welches nach der Ausführung in x_i das Produkt von $x_j \cdot x_k$ enthält und x_j, x_k jeweils den ursprünglichen Wert. (Sie können P_c, P_+ verwenden unabhängig von den vorherigen Teilaufgaben). `[6 Punkte]`

Sie können keine zusätzlichen Register verwenden.

Komplexitätstheorie

Betrachten Sie das *Rucksackproblem*. Es sind n verschiedene Gegenstände mit einem bestimmten Gewicht g_i und Wert w_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) gegeben. Aus diesen Gegenständen soll eine Auswahl getroffen werden, die in einen Rucksack mitgenommen werden können.

Der Rucksack darf maximal ein Gewicht von G bekommen (andernfalls würden wir unter dem Gewicht zusammenbrechen). Gleichzeitig sollen zumindest Gegenstände in einem Wert von W eingepackt werden (andernfalls wäre der Inhalt des Rucksacks nutzlos). Formal drücken wir das wie folgt aus. Das Problem ist gelöst, wenn es eine Indexmenge $I \subseteq \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ gibt, sodass für $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ gilt:

$$\sum_{i_j \in I} g_{i_j} \leqslant G$$

$$\sum_{i_j \in I}^{n} w_{i_j} \geqslant W$$

(a) Geben Sie (i) eine lösbare und (ii) eine unlösbare Instanz des Problems an, indem Sie die Parameter entsprechend setzen. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. `[3 Punkte]`

(b) Bezeichne $((g_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}, (w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}, G, W)$ eine bestimmte Instanz des Rucksackproblems. Geben Sie an welche Information (welches *Zertifikat*) Sie benötigen, um schnell (also in polynomieller Zeit) entscheiden zu können, dass das Problem lösbar ist. `[3 Punkte]`

(c) Das Problem ist NP-vollständig. Geben Sie in Pseudocode einen Algorithmus an, der für eine fixe Instanz und ein geeignetes Zertifikat in polynomieller Zeit überprüft, dass das Problem lösbar ist. Sie sollen also einen polytime Verifikator beschreiben. Begründen Sie Ihre Antwort. `[10 Punkte]`