Angewandte Mathematik für die Informatik

Dr. Marcel Ritter

Univ.-Prof. Dr. Matthias Harders

Sommersemester 2022

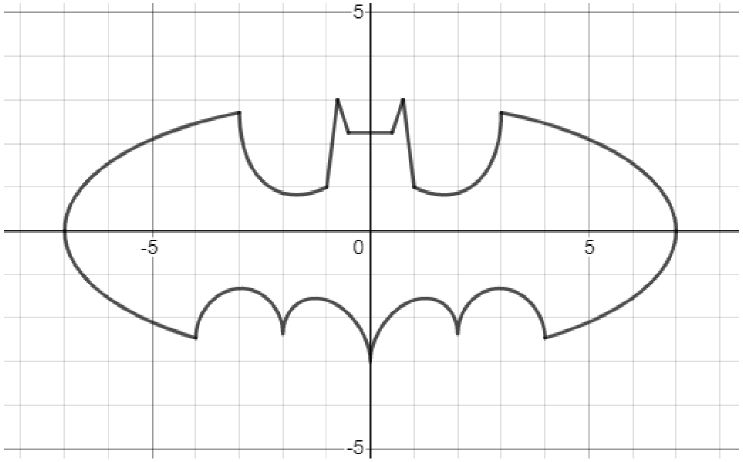
$$\left(\left(\frac{x}{7}\right)^2\sqrt{\frac{||x|-3|}{|x|-3}}+\left(\frac{y}{3}\right)^2\sqrt{\frac{\left|y+\frac{3\sqrt{33}}{7}\right|}{y+\frac{3\sqrt{33}}{7}}}-1\right)\left(\left|\frac{x}{2}\right|-\left(\frac{3\sqrt{33}-7}{112}\right)x^2-3+\sqrt{1-(||x|-2|-1)^2}-y\right)\left(9\sqrt{\frac{|(|x|-1)\,(|x|-0.75)|}{(1-|x|)\,(|x|-0.75)}}-8|x|-y\right)$$

$$\left(3|x|+0.75\sqrt{\frac{|(|x|-0.75)\,(|x|-0.5)|}{(0.75-|x|)\,(|x|-0.5)}}-y\right)\left(2.25\sqrt{\frac{|(x-0.5)\,(x+0.5)|}{(0.5-x)\,(0.5+x)}}-y\right)\left(\frac{6\sqrt{10}}{7}+(1.5-0.5|x|)\sqrt{\frac{||x|-1|}{|x|-1}}-\frac{6\sqrt{10}}{14}\sqrt{4-((|x|-1)^2)}-y\right)=0i$$

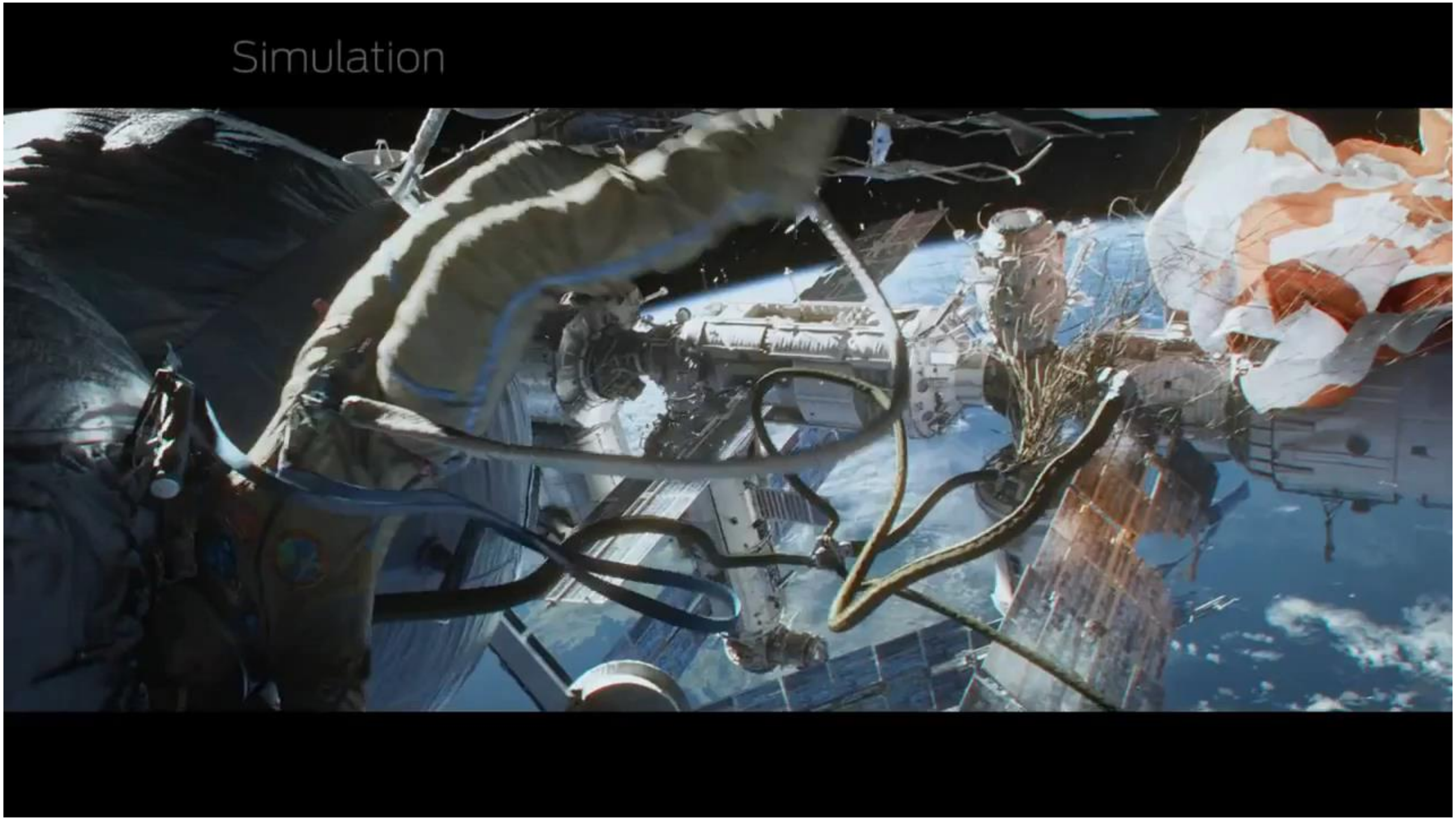
Angewandte Mathematik für die Informatik

Dr. Marcel Ritter
Univ.-Prof. Dr. Matthias Harders

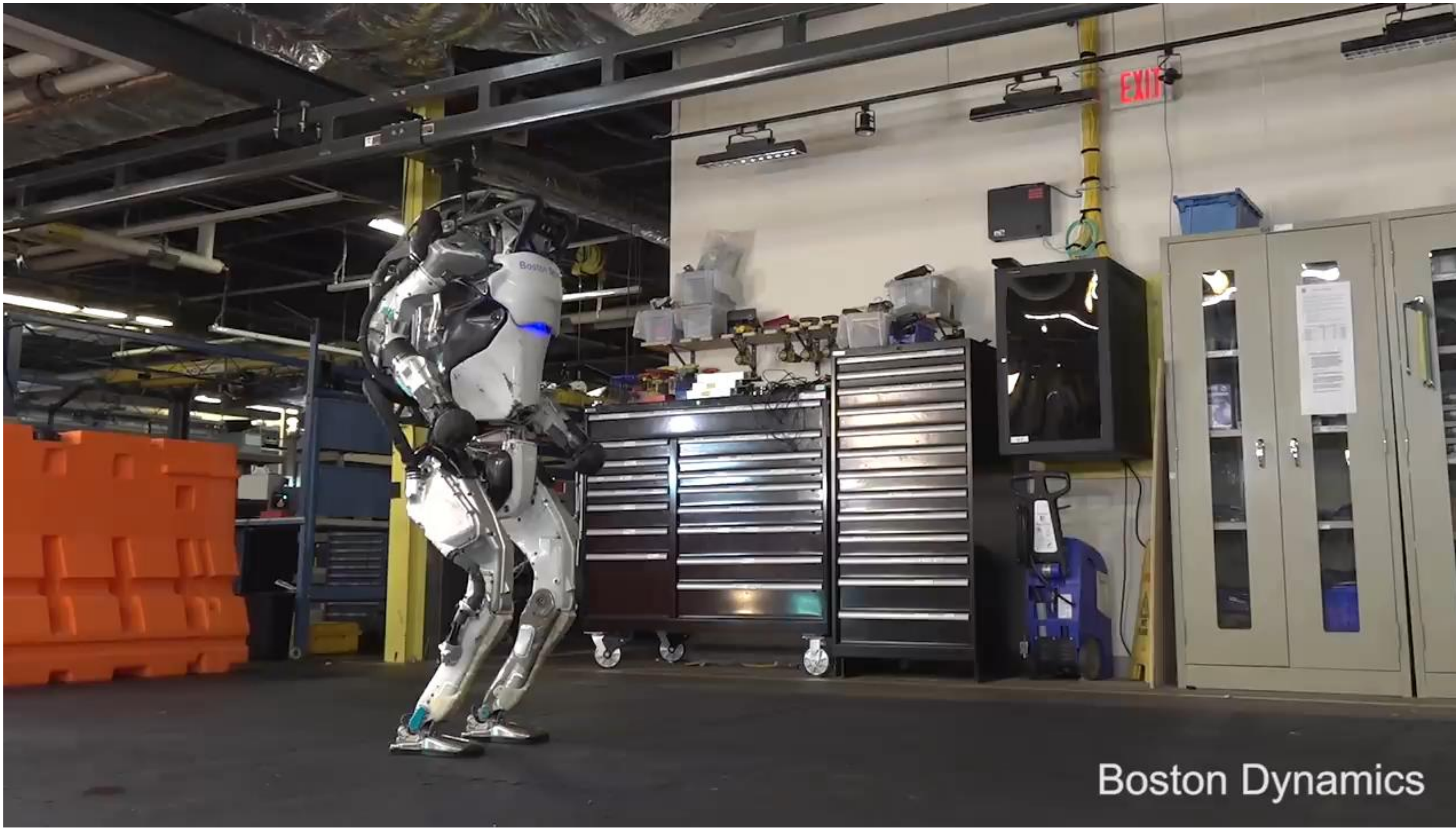
Sommersemester 2022



Einführungsfilme



Einführungsfilme



Einführungsfilme

Ziele der Vorlesung

- Vermittlung von Grundwissen der Analysis
- Verständnis grundlegender Methoden der Angewandten und Numerischen Mathematik
- Einsicht in konkrete Anwendungen mathematischer Techniken in Bereichen der Informatik
- Verstehen zentraler Aspekte der praktischen Umsetzung und Implementierung
- Vorbereitung auf konkrete Nutzung der erlernten Techniken in der Angewandten Informatik
- **Voraussetzungen:** VL Lineare Algebra

Beispiele: Mathematik in der Informatik

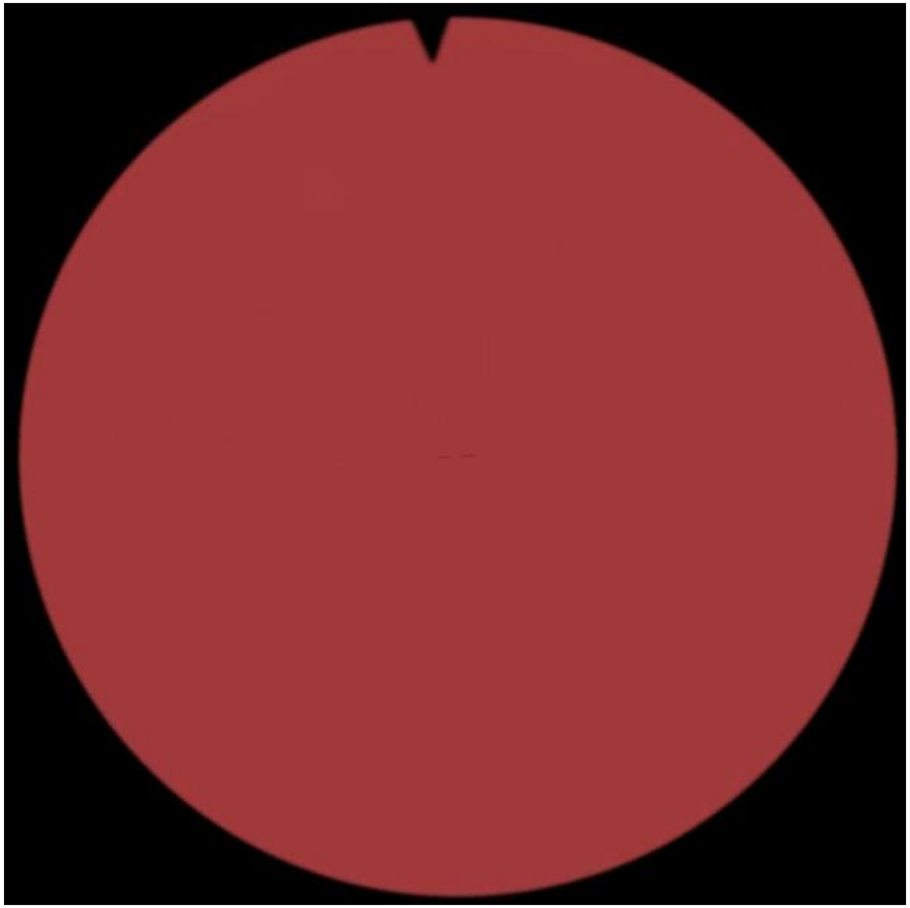
- Logik: z.B. Testen von Programmen
- Lineare Algebra: z.B. Robotik, Computergrafik
- Algebraische Strukturen: z.B. Kryptographie, Hashing
- Differentialrechnung: z.B. Dateninterpolation
- Differentialgleichungen: z.B. Physikbasierte Simulation
- Fourier-Analyse: z.B. Datenkompression

Gruppe Interaktive Grafik und Simulation

- Gegründet im Februar 2014 durch Matthias Harders
- Forschung und Lehre im Bereich **Physikalisch-basierter Simulation**, **Computer Haptik**, **Virtuelle/ Erweiterte Realität**
- Team
  - Dr. Marcel Ritter (PostDoc), Prof. Yeongmi Kim (Affiliated)
  - Stephanie Autherith, Viktor Daropoulos, Stefano Fogarollo, Hassam Malik, Adela Moravova, Nikolaus Rauch, Johannes Sappl, Yunus Schmirander, Stefan Spiß (Doktoranden)
- http://igs.uibk.ac.at/

Beispiel Forschung – Chirurgiesimulation

Beispiel Forschung – Chirurgiesimulation



Vorlesungen IGS Gruppe

Sem 5 *Winter*	Sem 6 *Sommer*	Sem 1 *Winter*	Sem 2 *Sommer*	Sem 3 *Winter*	Sem 4 *Sommer*
Visual Computing	Advanced Computer Graphics	Optimierung und numerische Berechnung	Wahrnehmung, Interaktion und Robotik	Computer Haptik	
Vertiefungs - seminar	Vertiefungs - seminar	Signalver-arbeitung und algo-rithmische Geometrie	Master-seminar	Master-seminar	
	Bachelor-arbeit		Physically-based simulation		Master-arbeit

Kontaktdetails

Dr. Marcel Ritter

- Email: marcel.ritter@uibk.ac.at
- Büro: ICT 3N04
- Sprechstunde: *gerne auf Anfrage*

Univ. Prof. Dipl.-Inf. Dr. Matthias Harders

- Email: matthias.harders@uibk.ac.at
- Büro: ICT 3N09
- Sprechstunde: *gerne auf Anfrage*

Organisation

Vorlesung

- Zeit: freitags, 10:15–13:00 (mit Pausen)
- Kreditpunkte: 4,5 ECTS-AP

Proseminar

- Zeit: dienstags (Beginn war am 8. März)
  2x 8:15–10:00/ 2x 10:15–12:00/ 4x 14:15–16:00
- Ort: verschiedene RR
- Kreditpunkte: 3 ECTS-AP

Organisation

Proseminarleiter

- Adela Moravova, Hassam Malik , Juliette Opdenplatz, Stefano Fogarollo, Markus Walzthöni, Nikolaus Rauch, Stephanie Autherith

Tutorium

- Zeit: freitags, 14:15–15:45; Beginn 11.3.; Ort: HS C
- Tutor: Christian Dalvit
  christian.dalvit@student.uibk.ac.at
- Fokus auf Beantwortung technischer Fragen, Fragen zu Übungsaufgaben, Fragen zur Vorlesung

Benotung

Vorlesung

- Klausur: Freitag, 1. Juli, 10:15 (2. Ende Sept)
- Keine technischen Hilfsmittel erlaubt
- Bereitgestellte Formelsammlung, vorab verfügbar

Proseminar

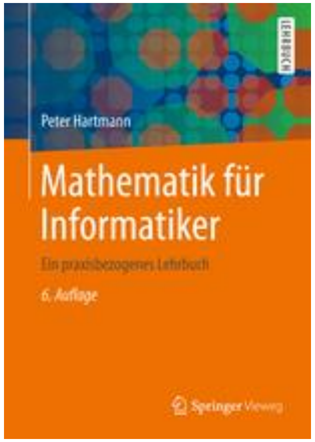
- Aufgabenblatt pro Woche, vorab verfügbar im OLAT
- Theoretische sowie kleine Programmier-Aufgaben

Unterlagen

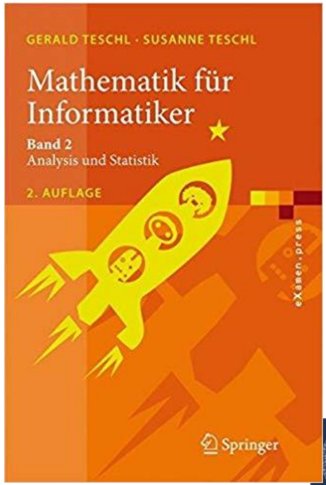
- Vorlesungsfolien in OLAT (PDF Format; spätestens am Tag vor Vorlesung)
- Selbsttests werden zum jeweiligen Kapitel dienstags nach den Proseminaren in OLAT bereitgestellt
- Informationen zur Vorlesung auf der Webseite http://igs.uibk.ac.at/ ($\rightarrow$ Teaching)
- Allgemeine Buchempfehlungen
- Bei Unklarheiten Fragen stellen

Buchempfehlungen

- P. Hartmann, **Mathematik für Informatiker Ein praxisbezogenes Lehrbuch**, 6. Auflage, eBook ISBN 978-3-658-03416-0, Springer, 2016.

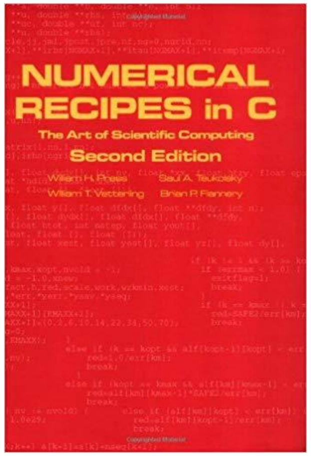


- G. Teschl und S. Teschl, **Mathematik für Informatiker: Band 2 – Analysis und Statistik**, 3. Auflage, ISBN 978-3540724513, Springer, 2014.

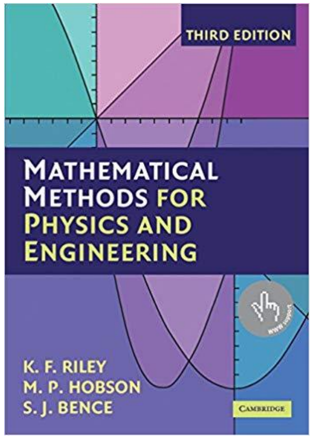


Buchempfehlungen

- W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, B. Flannery, **Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing**, 2. Auflage, ISBN 0-521-43108-5, Cambridge University Press, 2002.



- K. Riley, M. Hobson, S. Bence, **Mathematical Methods for Physics and Engineering**, 3rd edition, 978-0521679718, Cambridge University Press, 2006.



Vorlesungsplan

Datum	Thema	Proseminar
11.03.22	Einführung, Grundlagen, Funktionen	*(Beginn zuvor am 8.3.)*
18.03.22	Differentialrechnung	
25.03.22	Integralrechnung	
01.04.22	Differentialgleichungen	
08.04.22	Weitere Funktionen	
	Osterferien	
29.04.22	Reihen und Folgen	
06.05.22	Numerische Auswertung von Funktionen	
13.05.22	Lösung von Gleichungssystemen	
20.05.22	Interpolation	
27.05.22	Zufallszahlen	
03.06.22	Komplexe Zahlen	
10.06.22	Klausurvorbereitung	
01.07.22	**Klausur**	

Inhalt

- Grundlagen
- Eigenschaften von Funktionen
- Polynome
- Trigonometrische Funktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen

Inhalt

- **Grundlagen**
- Eigenschaften von Funktionen
- Polynome
- Trigonometrische Funktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen

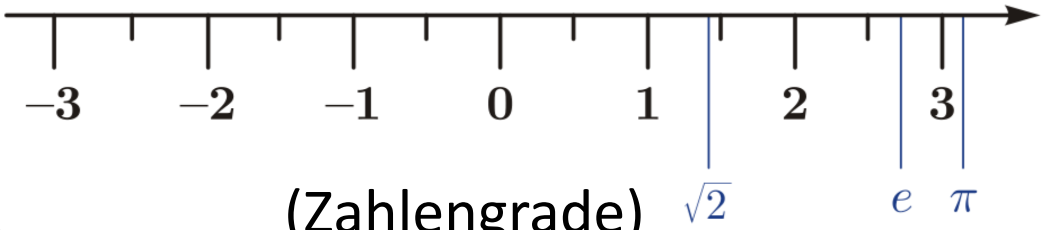
Mathematische Notation

- Mengenklammern $\{,\}$
- Teilmenge, Obermenge $\subseteq, \supseteq$
- Element von, nicht Element von $\in, \notin$
- Vereinigung, Durchschnitt, Differenz $\cup, \cap, \setminus$
- Für alle, es existiert (mindestens) ein $\forall, \exists$
- Skalare $a, b, \ldots; \alpha, \beta, \ldots$
- Vektoren, Matrizen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$
- Summenzeichen, Produktzeichen $\sum$ $\prod$
- Logische Folgerung $\Rightarrow$

Zahlenmengen

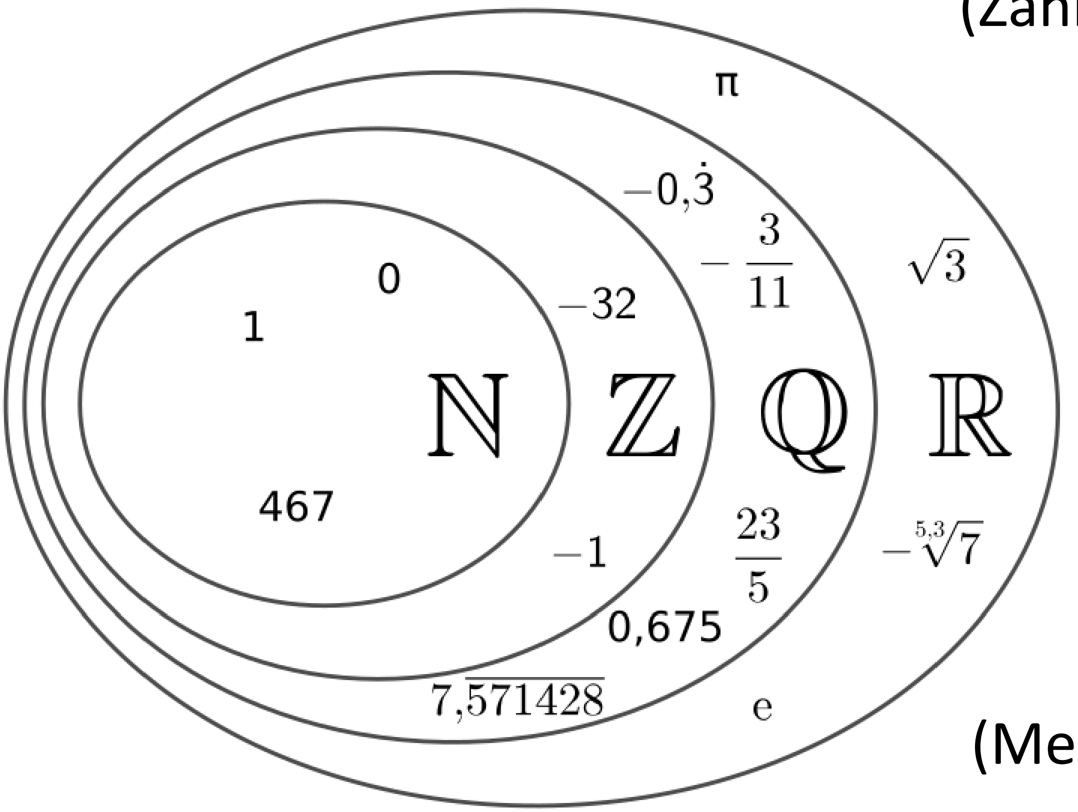
- Natürliche Zahlen $\mathbb{N} := \{0,1,2,3,\dots\}$ (auch $\mathbb{N}_0$)
- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{\dots -2, -1,0,1,2,\dots\}$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} | a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$
- Reelle Zahlen $\mathbb{R}$
  (formale Definition über Axiome)
- Positive reelle Zahlen $\mathbb{R}_0^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$
- Irrationale Zahlen $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (z.B. $\pi, \sqrt{2}$)
- Primzahlen $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ (z.B. $2,3,5,7$)
- Komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \{a + i \cdot b | a,b \in \mathbb{R}\}$
  (Thema am 12. Juni)

Zahlenmengen – Visuelle Darstellungen



(Zahlengrade)

[http://commons.wikimedia.org]



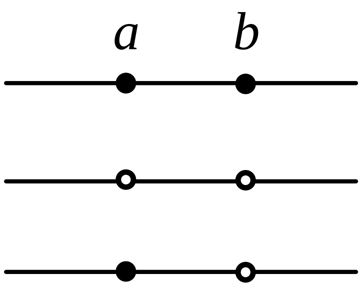
(Mengendiagramm)

Axiome der Reellen Zahlen

- Reelle Zahlen sind mathematisch formell gegeben als ein *vollständig geordneter Körper* $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$; (bis auf Isomorphie existiert nur genau ein solcher Körper)
- Definition über Körperaxiome, Anordnungsaxiome, und das Vollständigkeitsaxiom
- Körperaxiome (siehe VL Lineare Algebra):
  - Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz, für Addition $(+)$ bzw. Multiplikation $(\cdot)$
  - Existenz neutraler $(0,1)$ und inverser $(-a,\ a^{-1})$ Elemente, für Addition $(+)$ und Multiplikation $(\cdot)$

Ordnungsrelationen und Intervalle

- Anordnungsaxiome (Auswahl)
  - Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine Beziehung („Trichotomie“):
    $$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$
  - Für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$, mit $c > 0$ gilt („Monotonie Multiplikation)“:
    $$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$$
- Intervalle (Beispiele)
  - Geschlossen $\quad [a,b] = \{x \in \mathbb{R}:\ a \leq x \leq b\}$
  - Offen $\quad]a,b[= \{x \in \mathbb{R}:\ a < x < b\}$
  - Halboffen $\quad [a,b[= \{x \in \mathbb{R}:\ a \leq x < b\}$



für $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$

Vektorräume

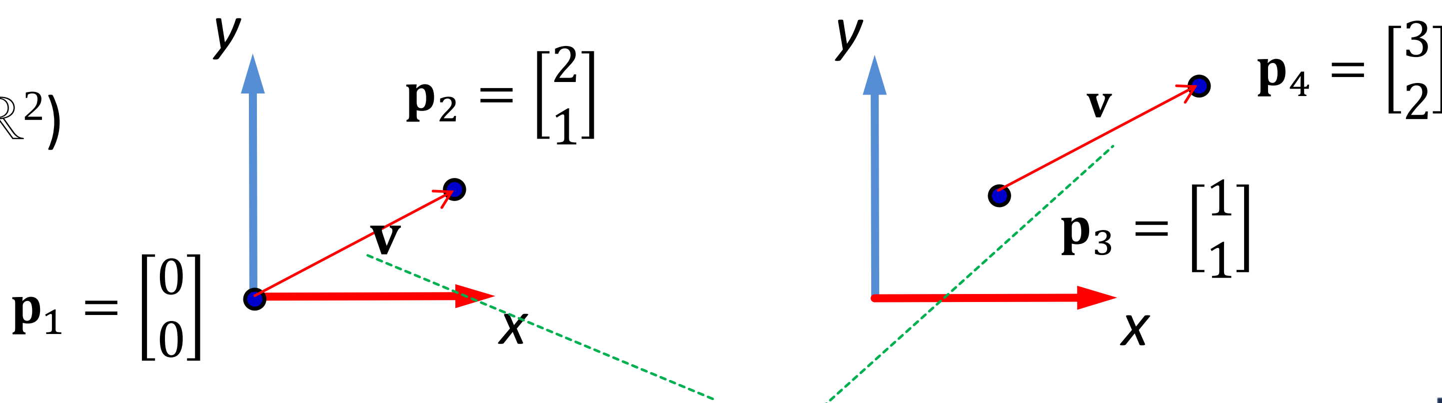
- Ein K-Vektorraum (linearer Raum) ist eine algebraische Struktur, definiert über einem Körper K sowie einer Skalarmultiplikation (siehe VL Lineare Algebra)
- Beispiele Vektorräume:
  - Matrizen fester Größe in $\mathbb{R}^{n \times m}$
  - (Algebraische) (Spalten-)Vektoren fester Größe in $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

Vektoren in Geometrie

- Analytische Geometrie: Beachte Unterschied zwischen Punkten und (geometrischen) Vektoren in kartesischen Koordinatensystemen
- Punkt in $\mathbb{R}^3$ $\quad \mathbf{p} = [x \quad y \quad z]^T$ $\quad$ (Position)
- Vektor in $\mathbb{R}^3$ $\quad \mathbf{v} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T$ (Länge und Richtung)

(Beispiel in $\mathbb{R}^2$)



$$\mathbf{v} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Inhalt

- Grundlagen
- **Eigenschaften von Funktionen**
- Polynome
- Trigonometrische Funktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen

Funktionsbegriff

- Zuordnung/Relation zwischen (Teil-)Mengen
- Abbildung mittels Funktion $f: D \to Z$, von Definitionsmenge D auf einen Wert der Zielmenge Z
- Fokus in der Vorlesung zum Großteil auf reellen Funktionen $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $Z \subseteq \mathbb{R}^k$, mit einer ($n = 1$) oder mehreren ($n > 1$) Veränderlichen (sowie $k \geq 1$)
- Schreibweise, reelle Funktion einer Veränderlichen:

(Beispiel) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \to x^2$ oder $y = x^2$ oder $f(x) = x^2$

(unabhängige Variable) (abhängige Variable)

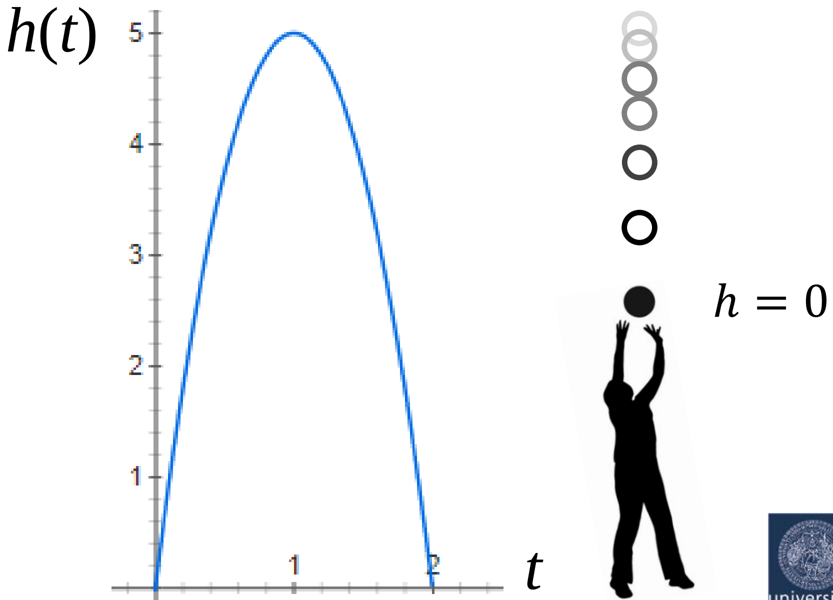
Anwendungsbeispiel

- Wurf eines Balles senkrecht in die Höhe, mit Abwurf-geschwindigkeit $v = 10$ m/sec
- Beschreibung der „Höhe“ h als Funktion der Zeit t (mit einigen Vereinfachungen, z.B. kein Luftwiderstand)

$$h(t) = 10t - \frac{g}{2}t^2$$
$$\approx 10t - 5t^2$$

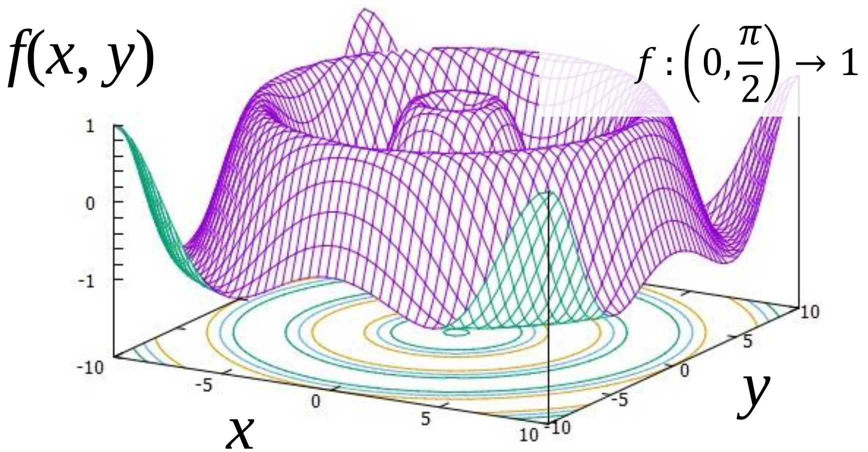
(mit Erdbeschleunigung g)

Beachte auch: $h(t) \geq 0$



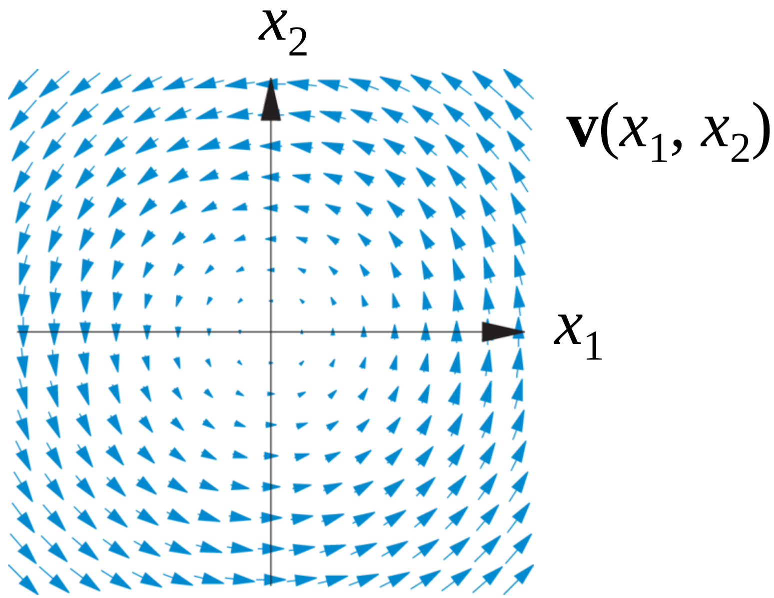
Funktionen Mehrerer Veränderlicher

- Definitions- sowie auch Zielmenge können höhere Dimensionen aufweisen
- Beispiele:



$$f(x, y) = \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

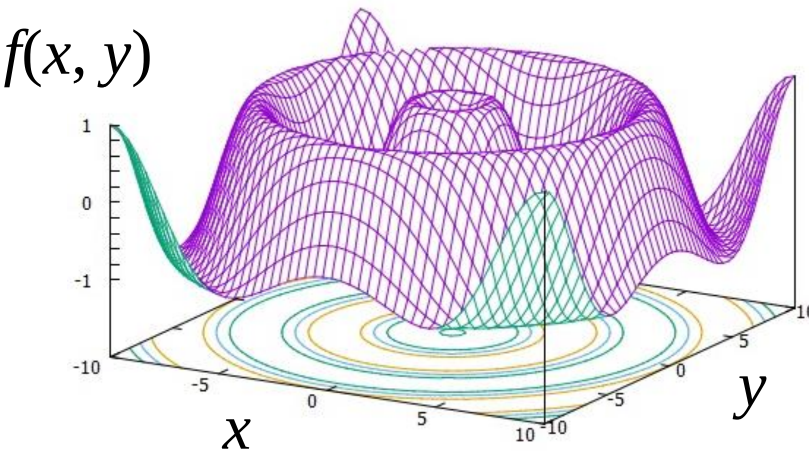


$$\mathbf{v}(x_1, x_2) = [-x_2 \quad x_1]^T$$

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

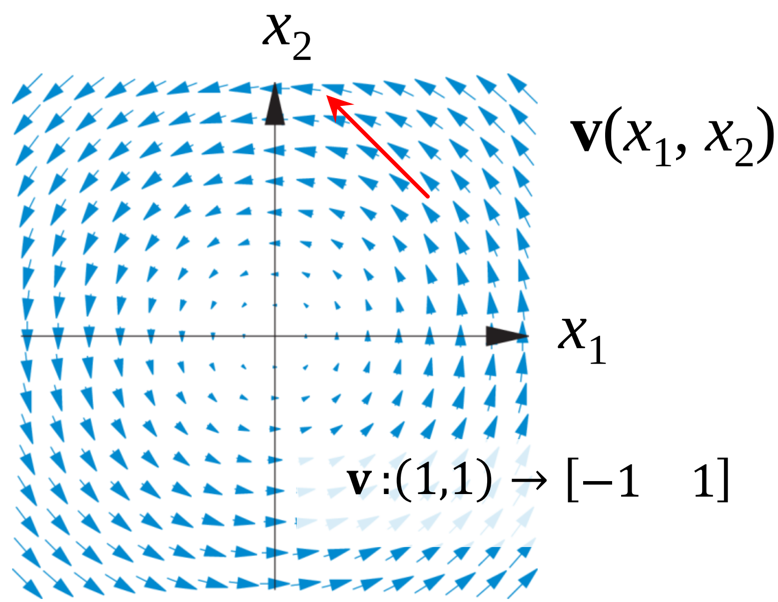
Funktionen Mehrerer Veränderlicher

- Definitions- sowie auch Zielmenge können höhere Dimensionen aufweisen
- Beispiele:



$$f(x, y) = \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

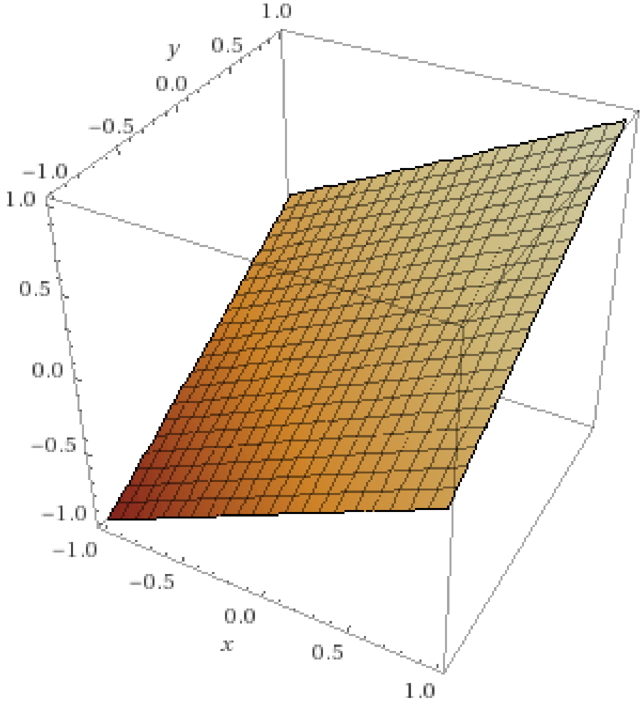
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$



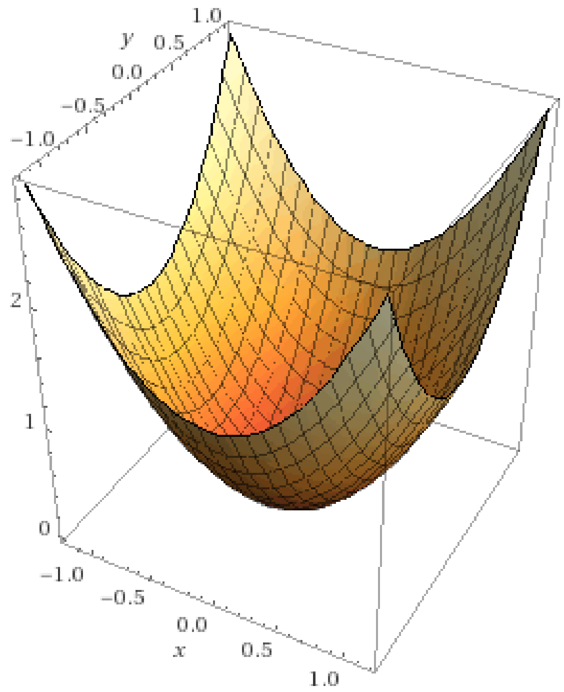
$$\mathbf{v}(x_1, x_2) = [-x_2 \quad x_1]^T$$

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

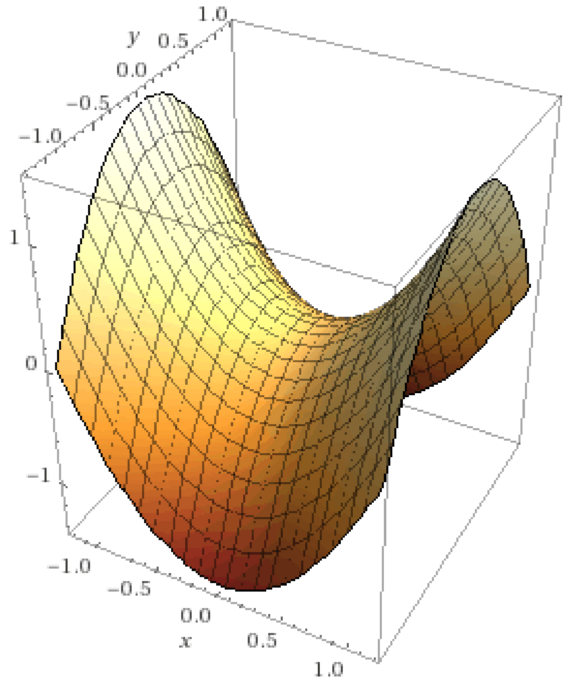
Weitere Beispielvisualisierungen



$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)$$



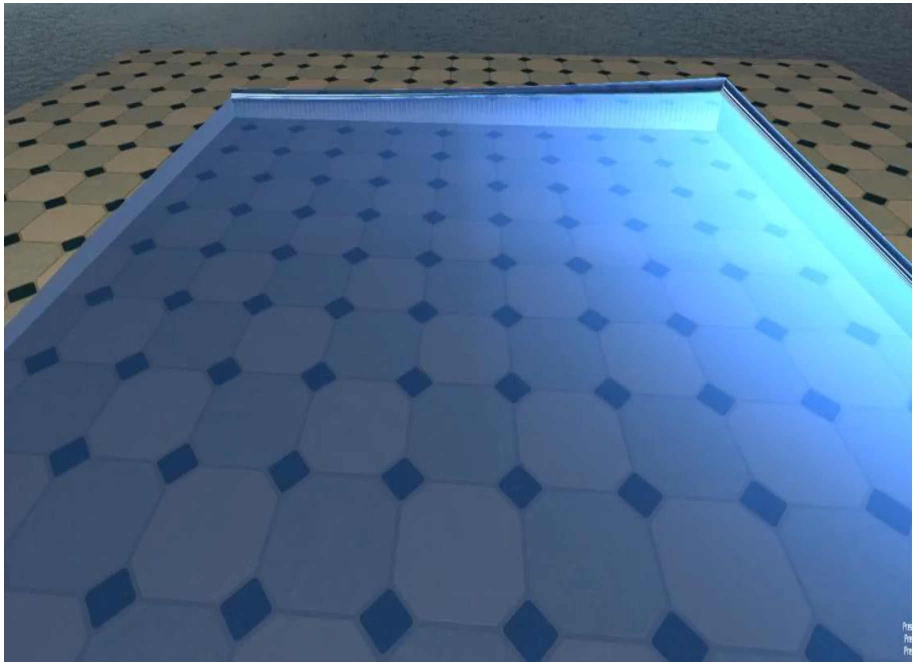
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

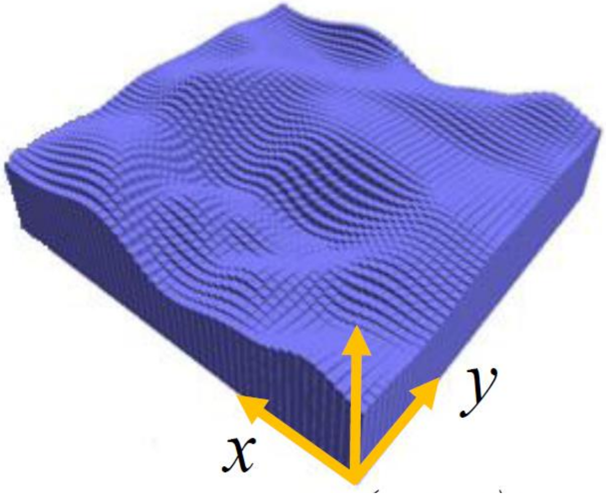


$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

Beispiel Multivariate Funktion

- Berechnung Wasseroberfläche



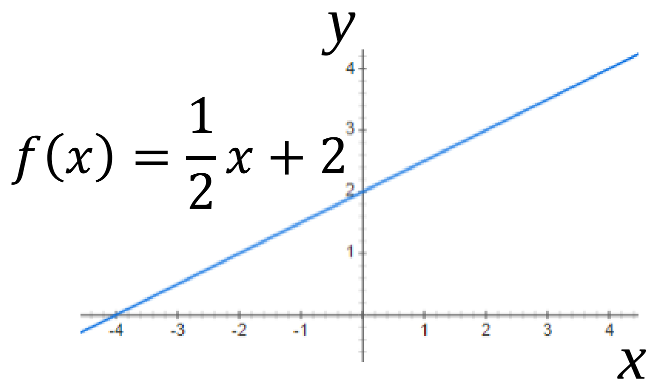


$u(x, y, t)$

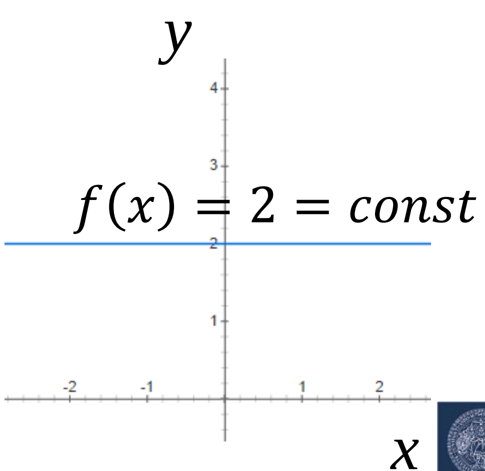
(Wasserhöhe u ist Funktion von 2D Position x,y, sowie Zeit t)

Lineare (und Konstante) Funktionen

- Abbildung $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = kx + d \quad k, d \in \mathbb{R}$
- Graph ist Gerade mit
  - Konstanter Steigung k
  - Schnitt der y-Achse/Ordinate bei d
  - Nullstelle (d.h. $f(x) = 0$) bei $x = -d/k$



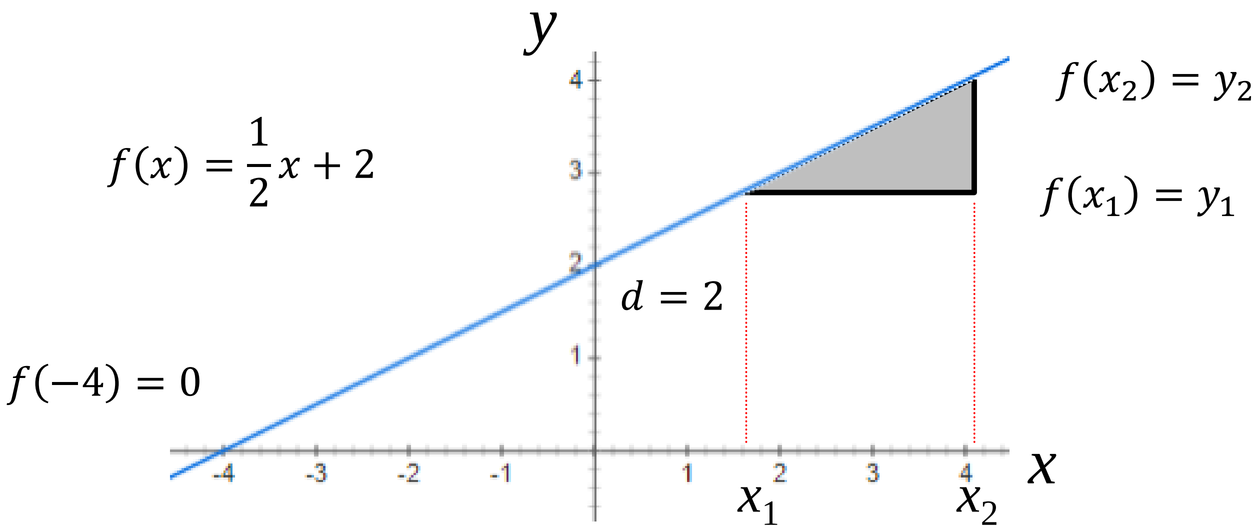
- Für $k = 0$ resultiert die konstante Abbildung: $f(x) = d$
- Allgemein handelt es sich ($k \neq 0$) um Polynomfunktionen ersten Grades (diese bilden auch einen Vektorraum)



Lineare Funktionen über 2 Punkte

- Funktion kann auch über zwei gegebene Punkte auf Gerade, $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$ ermittelt werden

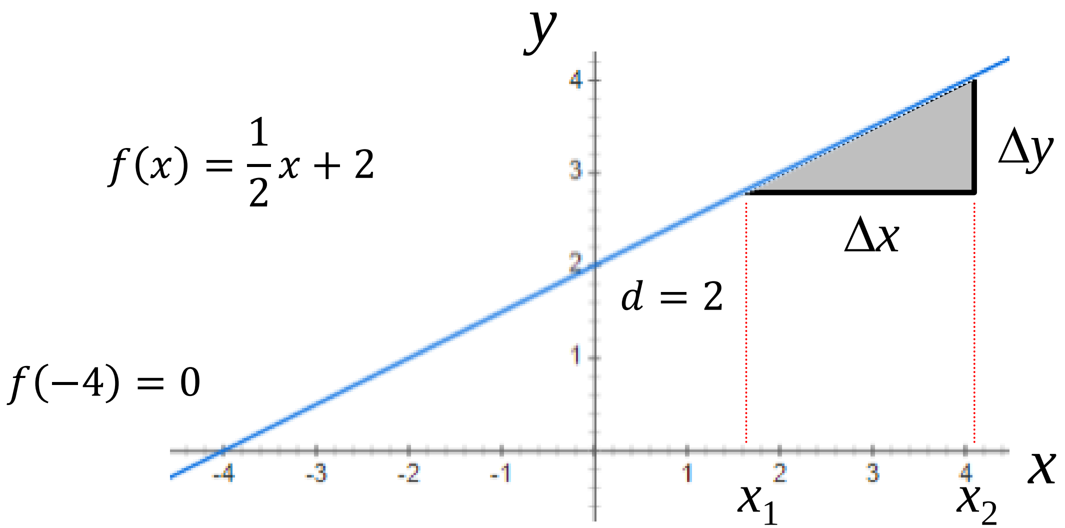
$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2} \qquad d = y_{1,2} - k x_{1,2}$$



Lineare Funktionen über 2 Punkte

- Funktion kann auch über zwei gegebene Punkte auf Gerade, $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$ ermittelt werden

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} \qquad d = y_{1,2} - kx_{1,2}$$



Potenzfunktionen

- Eine Potenzfunktion ist gegeben als Abbildung

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x)=ax^k \qquad a,k\in\mathbb{R}$$

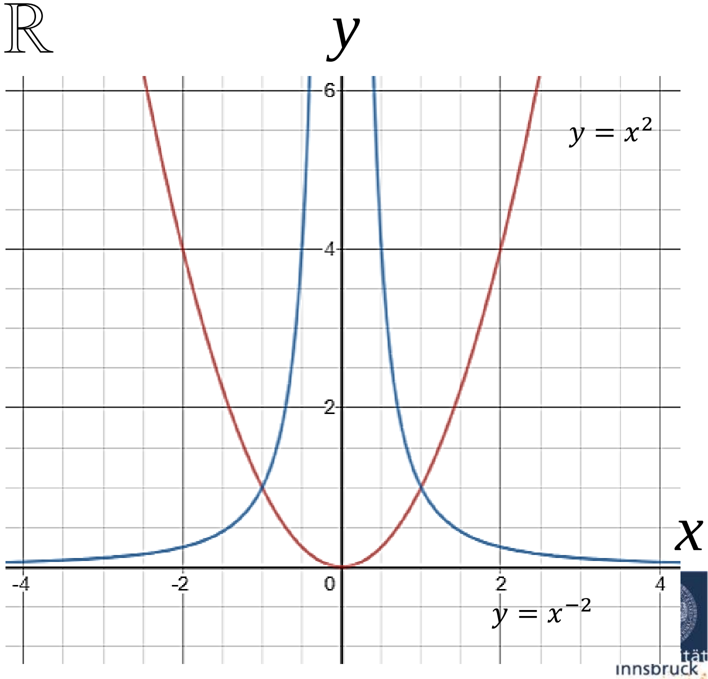
(für $k\in\mathbb{Z}$ sprechen wir von einem Monom)

- Einige Rechenregeln für $x,y,k,m\in\mathbb{R}$

$$(x\cdot y)^k = x^k\cdot y^k \qquad x^0 = 1$$

$$x^k\cdot x^m = x^{(k+m)} \qquad x^1 = x$$

$$\left(x^k\right)^m = x^{k\cdot m} = (x^m)^k \qquad x^{-k} = \frac{1}{x^k}$$



Potenzfunktionen

- Eine Potenzfunktion ist gegeben als Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = ax^k \qquad a, k \in \mathbb{R}$$

(für $k \in \mathbb{Z}$ sprechen wir von einem Monom)

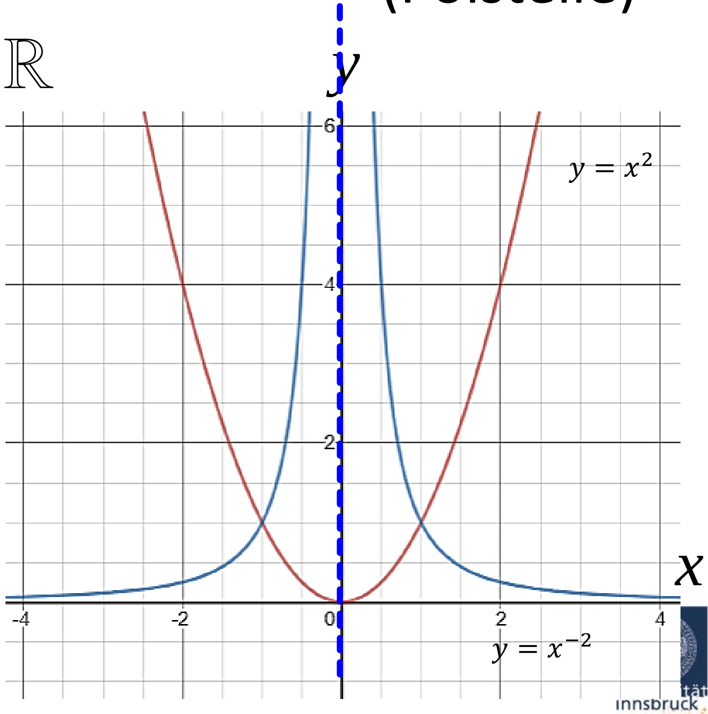
- Einige Rechenregeln für $x,y,k,m \in \mathbb{R}$

$$(x \cdot y)^k = x^k \cdot y^k \qquad x^0 = 1$$

$$x^k \cdot x^m = x^{(k+m)} \qquad x^1 = x$$

$$\left(x^k\right)^m = x^{k \cdot m} = (x^m)^k \qquad x^{-k} = \frac{1}{x^k}$$

(Polstelle)



Umkehrfunktion

- Die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f ordnet jedem Funktionswert y sein Argument x zu (siehe auch VL Lineare Algebra)
- Funktion f ist invertierbar, wenn diese streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist
- Es gilt $\quad f\left(f^{-1}(x)\right) = x \qquad f^{-1}\left(f(x)\right) = x$
- Beispiel: $\quad f(x) = \frac{1}{2}x + 2 \qquad f^{-1}(x) = 2x - 4$
- Beachte: $\quad f^{-1} \neq \frac{1}{f}$

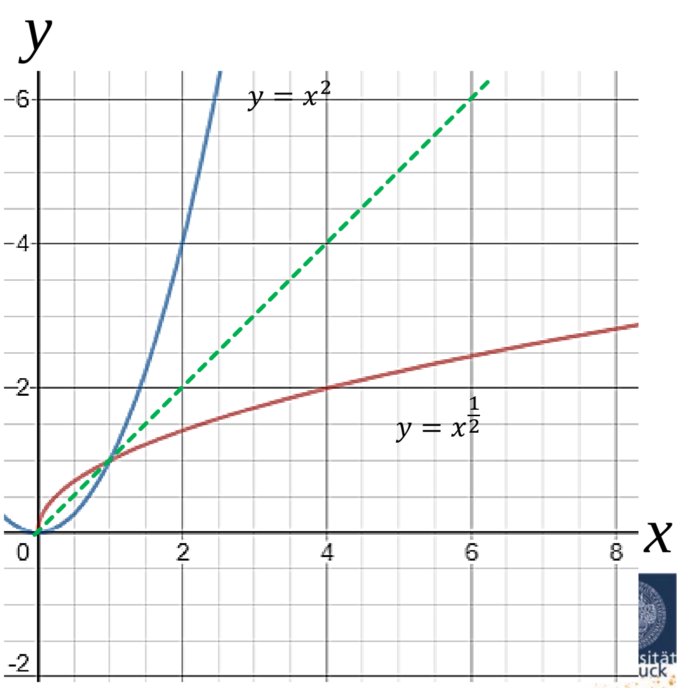
Wurzelfunktionen

- Die Wurzelfunktion ist die Umkehrfunktion (inverse Funktion) der Potenzfunktion

$$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \qquad f(x) = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}} \qquad k \in \mathbb{R}$$

- Insbesondere: $\left(\sqrt[k]{x}\right)^k = x^{\frac{k}{k}} = x$

- Beachte: Wurzel als Zahl, z.B. $\sqrt{2}$ gegenüber Lösung(en) einer Gleichung $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$



Verwendungsbeispiel

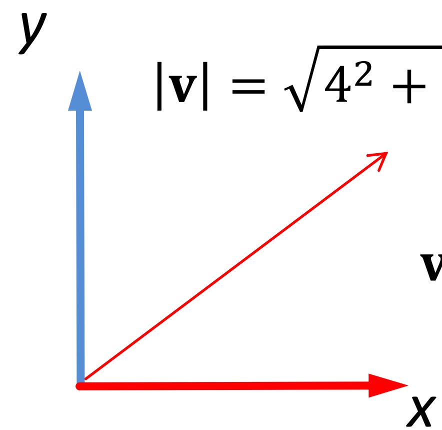
- Länge/Betrag eines Vektors $\mathbf{v} = [a_1 \quad \cdots \quad a_n]^T \qquad a_i \in \mathbb{R}$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{{a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2}$$

(oder als Norm: ‖·‖)

- Insbesondere in 3D $\mathbf{v} = [x \quad y \quad z]^T \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(Beispiel in 2D)



$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Einheitsvektor (normierter Vektor)

$$|\mathbf{v}^0| = 1 \qquad |\mathbf{v}^0| = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

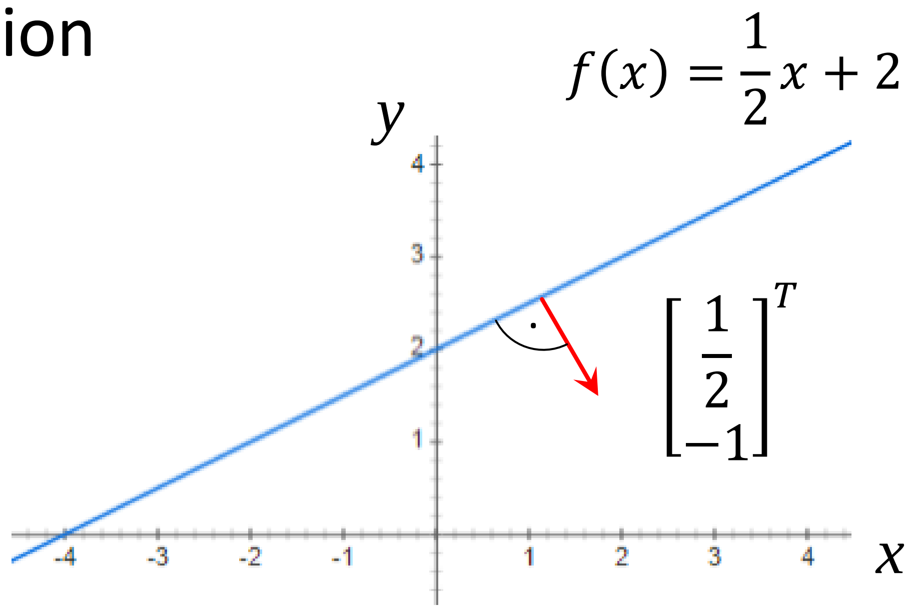
Implizite Funktionen

- Eine (explizite) Funktion, z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ kann auch durch eine implizite Gleichung $F(x, y) = 0$ definiert werden
- Beispiel: lineare Funktion

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$0 = \frac{1}{2}x + 2 - y$$

$$0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2$$



Implizite Funktionen

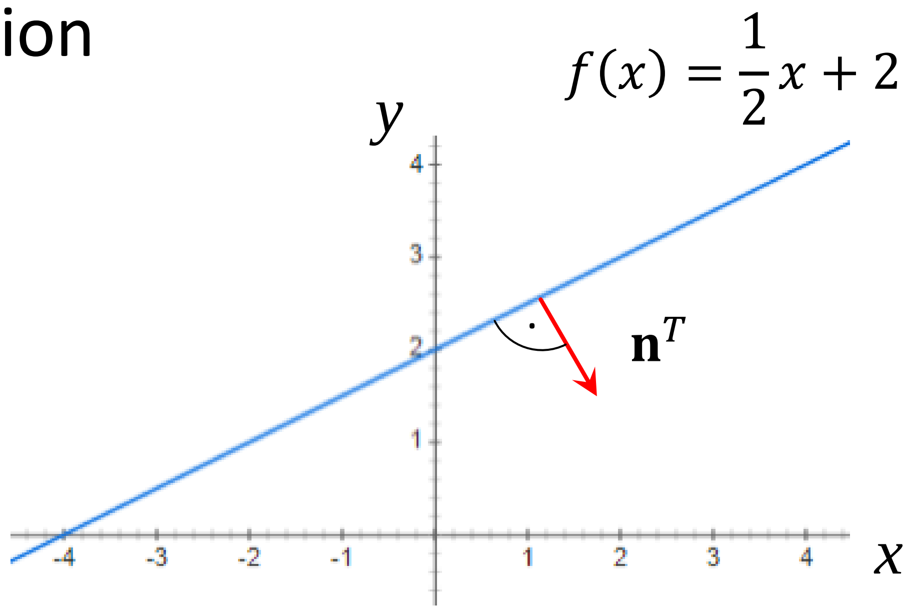
- Eine (explizite) Funktion, z.B. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ kann auch durch eine implizite Gleichung $F(x, y) = 0$ definiert werden
- Beispiel: lineare Funktion

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$0 = \frac{1}{2}x + 2 - y$$

$$0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2$$

$$0 = \mathbf{n}^T \mathbf{x} + 2$$



Implizite Funktionen

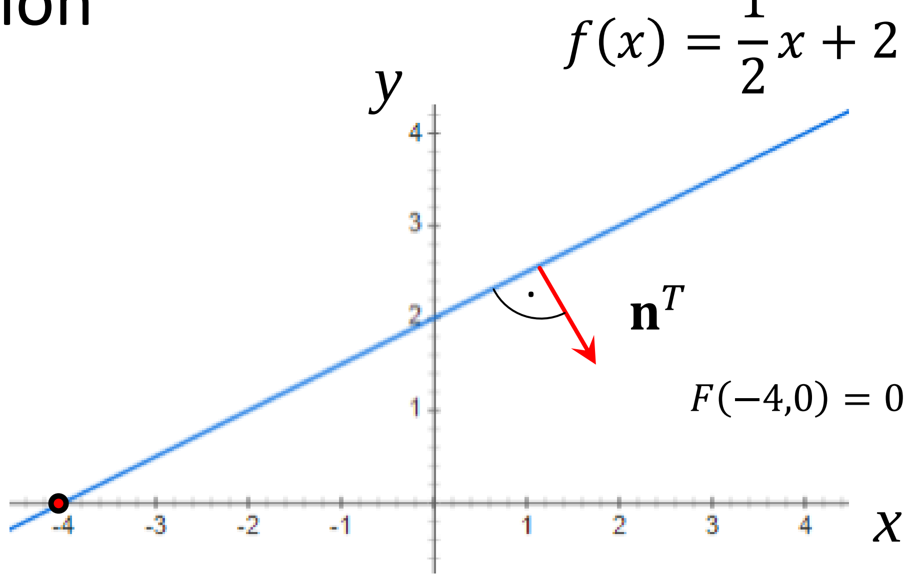
- Eine (explizite) Funktion, z.B. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ kann auch durch eine implizite Gleichung $F(x, y) = 0$ definiert werden
- Beispiel: lineare Funktion

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$0 = \frac{1}{2}x + 2 - y$$

$$0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2$$

$$0 = \mathbf{n}^T \mathbf{x} + 2$$



Implizite Funktionen

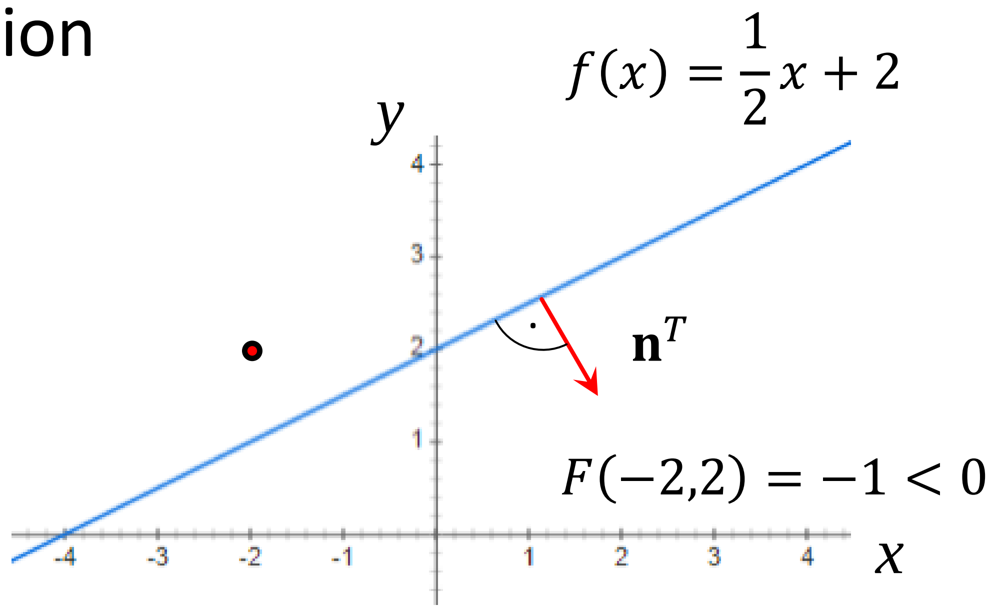
- Eine (explizite) Funktion, z.B. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ kann auch durch eine implizite Gleichung $F(x, y) = 0$ definiert werden
- Beispiel: lineare Funktion

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$0 = \frac{1}{2}x + 2 - y$$

$$0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2$$

$$0 = \mathbf{n}^T\mathbf{x} + 2$$



Implizite Funktionen

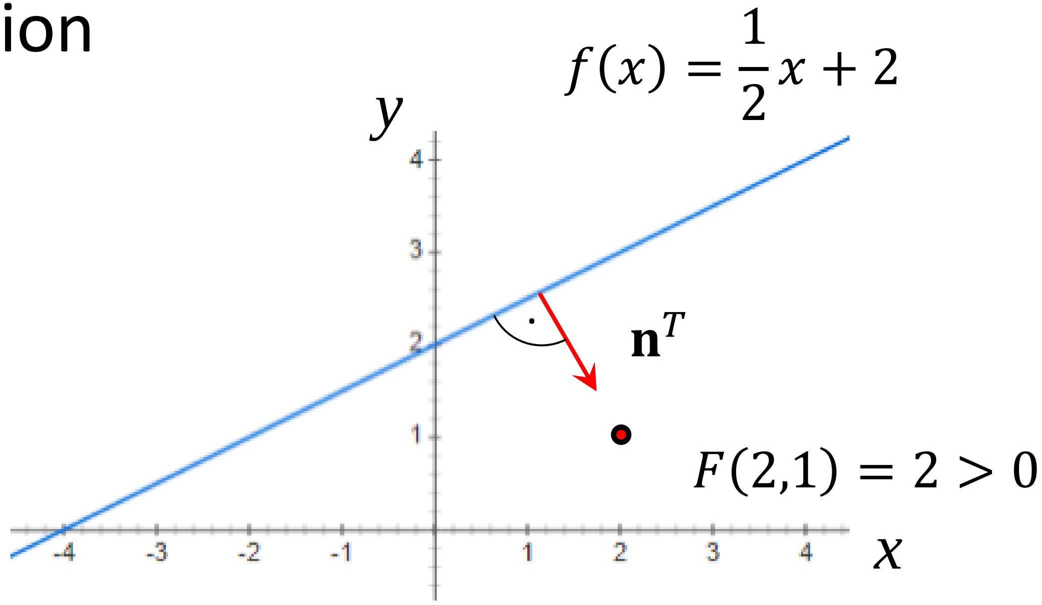
- Eine (explizite) Funktion, z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ kann auch durch eine implizite Gleichung $F(x, y) = 0$ definiert werden
- Beispiel: lineare Funktion

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$0 = \frac{1}{2}x + 2 - y$$

$$0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2$$

$$0 = \mathbf{n}^T \mathbf{x} + 2$$



Implizite Funktionen

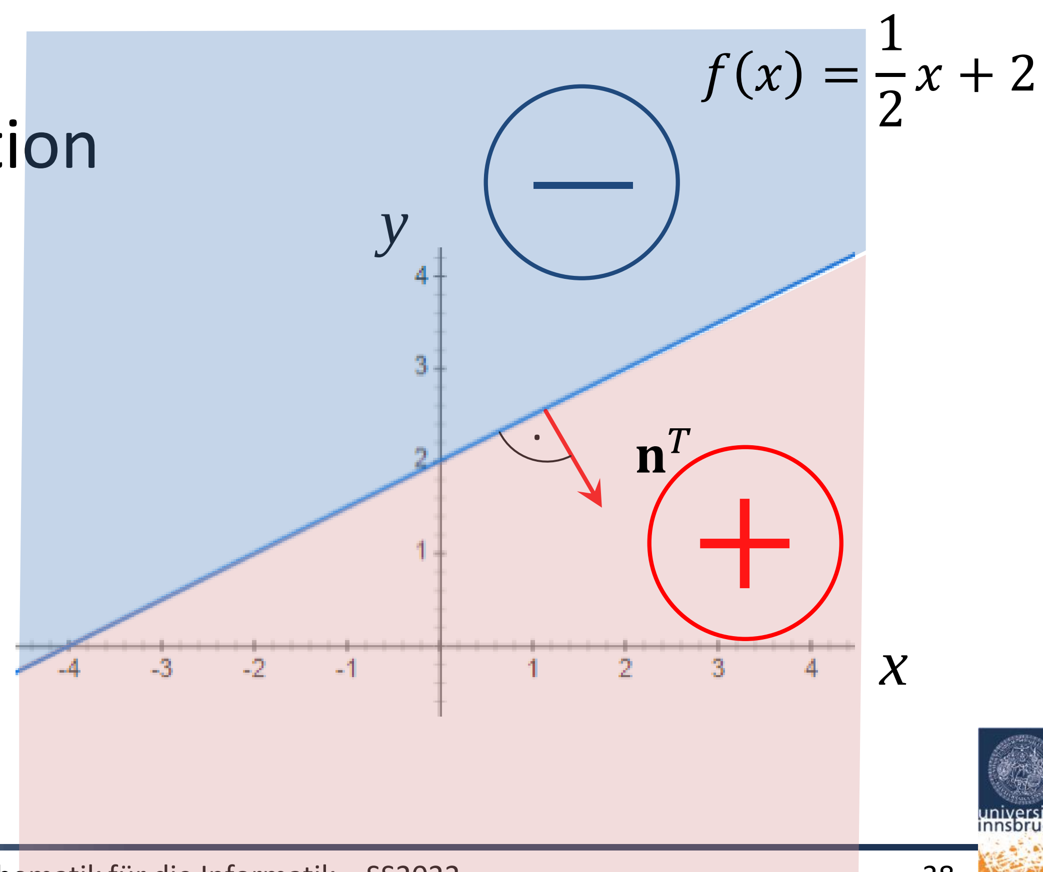
- Eine (explizite) Funktion, z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ kann auch durch eine implizite Gleichung $F(x, y) = 0$ definiert werden
- Beispiel: lineare Funktion

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$0 = \frac{1}{2}x + 2 - y$$

$$0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2$$

$$0 = \mathbf{n}^T\mathbf{x} + 2$$



Implizite Funktionen

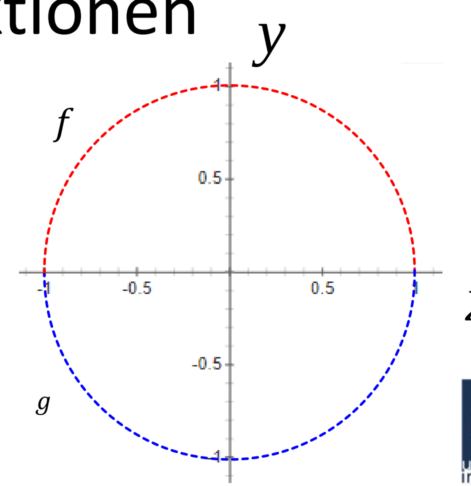
- Beispiel: Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ (mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung)

  $$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

- Achtung: für jedes $x \in (-1, 1)$ gibt es zwei Werte $y_{1,2} = \pm\sqrt{1-x^2}$ für die gilt $F(x, y_{1,2}) = 0$
- Der Graph besteht somit aus zwei Funktionen

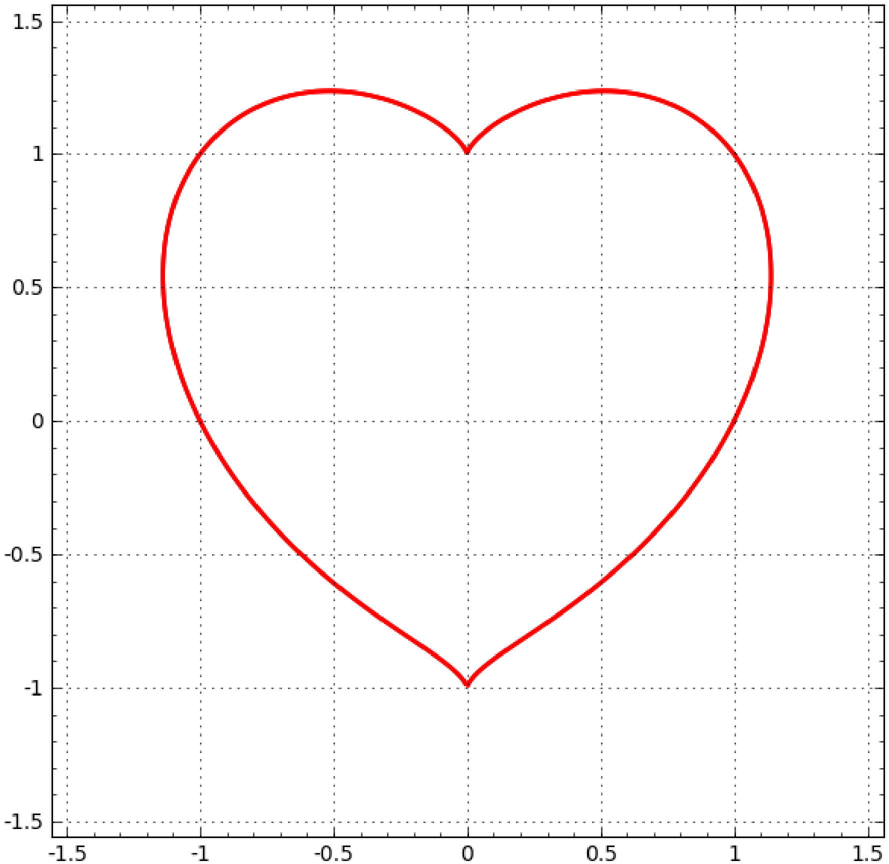
$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \to \sqrt{1-x^2}$$

$$g : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \to -\sqrt{1-x^2}$$



Implizite Funktionen

- Beispiel: $F(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2y^3 = 0$



Betrags- und Signumfunktion

- Betragsfunktion: Abstand einer reellen Zahl von Null

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

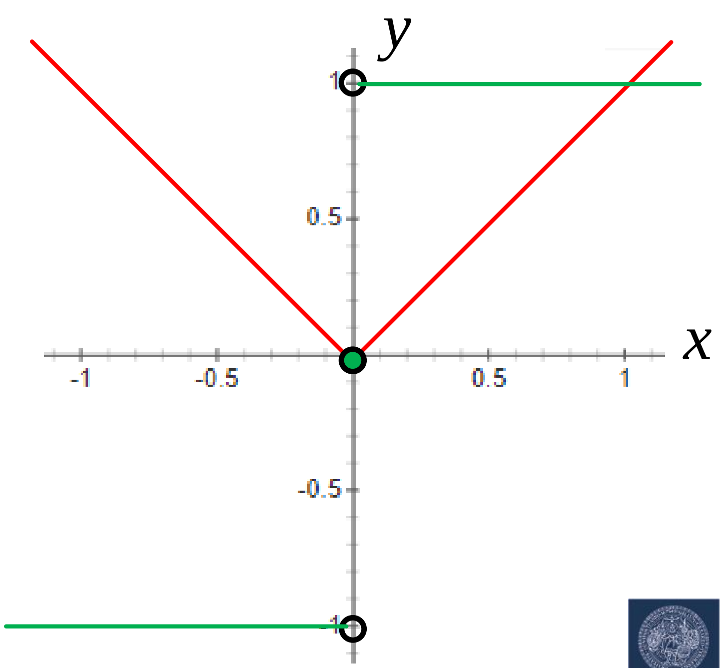
(manchmal: $\mathrm{abs}(x)$)

- Beispiel: Dreiecksungleichung

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

- Signumfunktion: Zuordnung Vorzeichen zu reeller Zahl

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}, \; x \in \mathbb{R}$$



Operationen mit Funktionen

- Im Vergleich zur Funktion $f(x)$, ist der Graph von $g(x)$:
  - Um $\pm c$ entlang der y-Achse verschoben: $g(x) = f(x) \pm c$
  - Um $\pm c$ entlang der x-Achse verschoben: $g(x) = f(x \mp c)$
  - Um c entlang der y-Achse gestaucht/gestreckt: $g(x) = c \cdot f(x)$
  - Um c entlang der x-Achse gestaucht/gestreckt: $g(x) = f(c \cdot x)$
  - An der y-Achse gespiegelt: $g(x) = f(-x)$
  - An der x-Achse gespiegelt: $g(x) = -f(x)$
  - Eine Punktspiegelung am Ursprung: $g(x) = -f(-x)$
  - Gegeben durch „Hochklappen" negativer Werte: $g(x) = |f(x)|$

Operationen mit Funktionen

- Für Funktionen f: $A \to B$ und g: $B \to C$ ist eine Verknüpfung/Komposition definiert als

$$(g \circ f): A \to C, \qquad (g \circ f)(x) \to \big(g(f(x))\big), \qquad x \in A$$

- Im Allgemeinen: $g \circ f \neq f \circ \mathrm{g}$
- Weitere Verknüpfungen sind möglich, z.B.:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

- Notation (Beispiel): $f \cdot f = f^2$
- Beachte (Beispiel): $\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2)$

Eigenschaften von Funktionen

- Wir bezeichnen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als...
  - Gerade, falls $f(x) = f(-x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$
  - Ungerade, falls $f(x) = -f(-x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$
  - Monoton steigend, falls $f(x) \leq f(y),\ \forall\, x,y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$
  - Monoton fallend, falls $f(x) \geq f(y),\ \forall\, x,y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$
  - Streng monoton steigend, falls $f(x) < f(y),\ \forall\, x,y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$
  - Streng monoton fallend, falls $f(x) > f(y),\ \forall\, x,y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$
  - Periodisch mit Periode T, $f(x) = f(x+T),\ \forall\, x \in \mathbb{R};\quad T \in \mathbb{R}$

Inhalt

- Grundlagen
- Eigenschaften von Funktionen
- **Polynome**
- Trigonometrische Funktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen

Definition Polynom

- Eine Polynomfunktion in $\mathbb{R}$ ist definiert als Abbildung

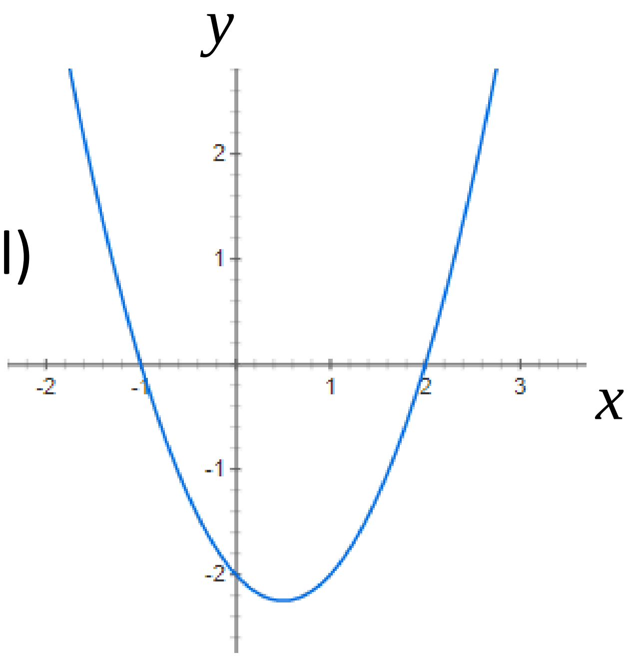
$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

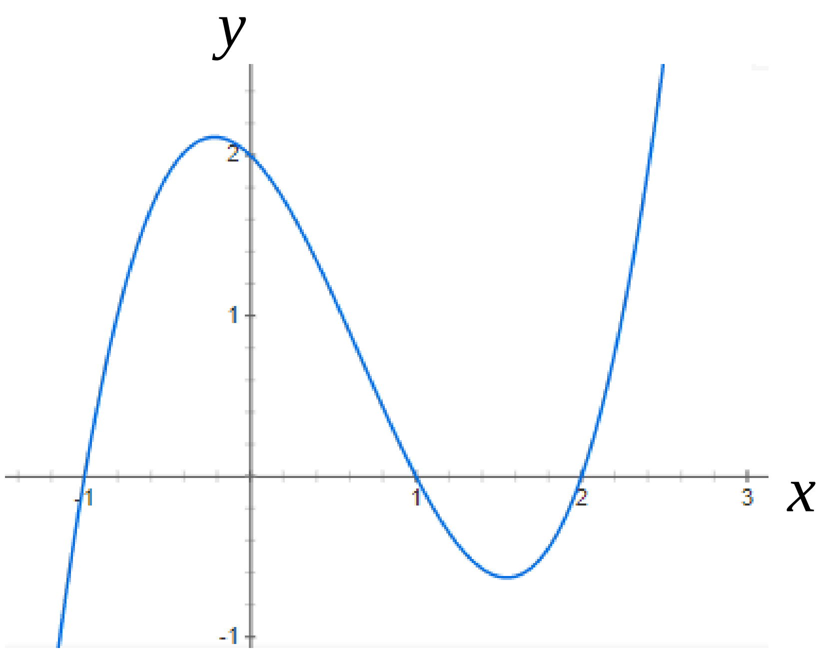
- Es gilt $a_n \neq 0$; das Polynom hat den Grad $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$
- Speziell bezeichnete Polynome sind z.B.
  - Konstante Funktionen; Grad 0 $\quad p(x) = a_0$
  - Lineare Funktionen; Grad 1 $\quad p(x) = a_1 x + a_0$
  - Quadratische Funktionen; Grad 2 $\quad p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
  - Kubische Funktionen; Grad 3 $\quad p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
- Ein Polynom mit $a_n = 1$ ist normiert

Definition Polynom

- Beispiele:

(Parabel)





$p(x) = x^2 - x - 2$

$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Nullstellen von Polynomen

- Ein Wert $x_0 \in \mathbb{R}$: $p(x_0) = 0$ ist eine reelle Nullstelle eines Polynoms (später behandeln wir allgemeiner $x_0 \in \mathbb{C}$)
- Polynome ungeraden Grades, mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ haben mindestens eine reelle Nullstelle
- Nullstellen können mehrfach auftreten; werden somit auch nach ihren Vielfachheiten unterschieden, z.B.:
  $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, hat die dreifache Nullstelle $x_{0,1,2} = 1$
- Ein Polynom vom Grad n kann höchstens n reelle Nullstellen aufweisen (inklusive Vielfachheiten)

Faktorisierung von Polynomen

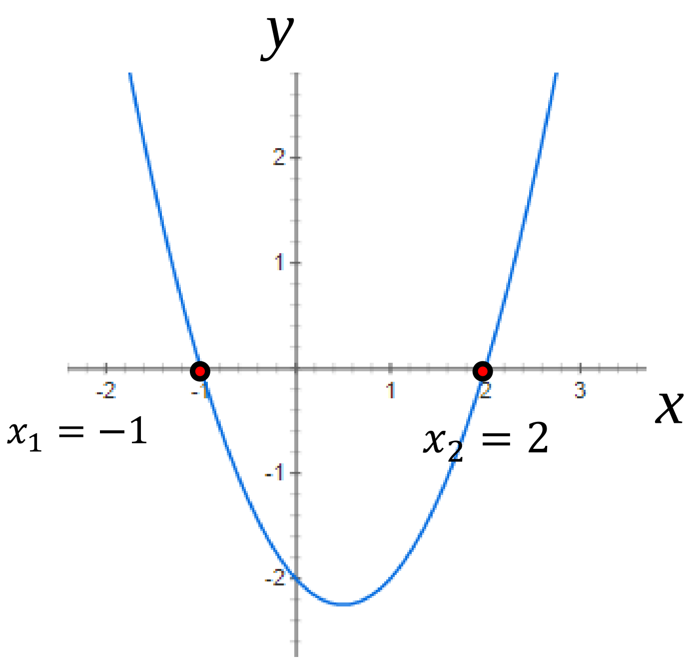
- Für paarweise verschiedene Nullstellen $x_0,\ldots, x_k$ mit Vielfachheiten $m_0,\ldots, m_k$ kann ein normiertes Polynom eindeutig notiert werden in der Form

$$p(x) = (x - x_k)^{m_k} \ldots (x - x_1)^{m_1}(x - x_0)^{m_0} \cdot q(x)$$

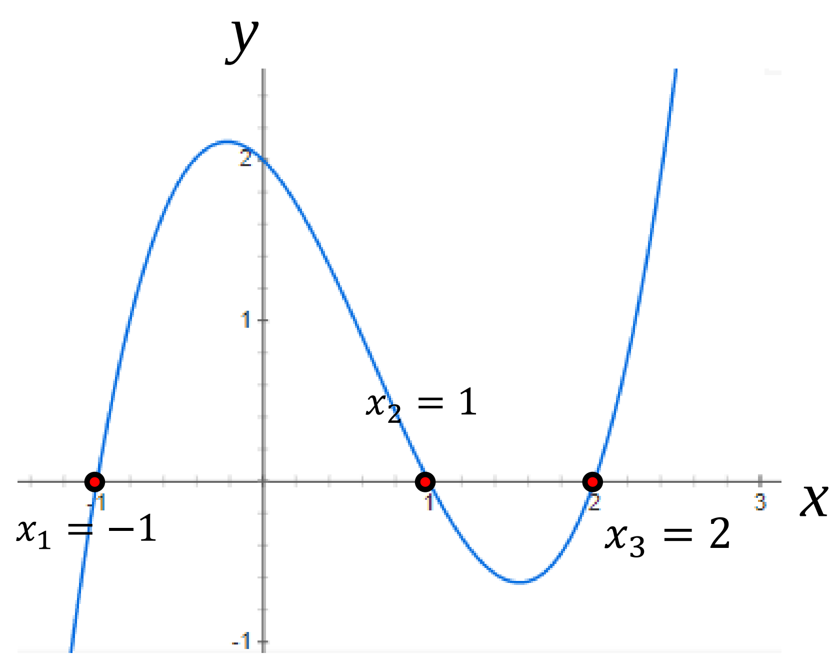
  mit Restpolynom $q(x)$ ohne reelle Nullstellen, und $q(x_i) \neq 0$, für $i = 0,\ldots,k$
- Man findet in Graphen, an Nullstellen mit…
  - Ungerader Vielfachheit, einen Schnittpunkt mit der x-Achse
  - Gerader Vielfachheit, einen Berührpunkt mit der x-Achse

Nullstellen und Faktorisierung von Polynomen

- Beispiele:



$p(x) = (x+1)(x-2)$



$p(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$

Formeln für Nullstellen

- Für quadratische, kubische und quartische Polynome gibt es allgemeine Lösungsformeln
- Beispiel:
  - Quadratische Gleichung $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$
  - Nullstellen $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
  - Falls Diskriminante $D = b^2 - 4ac > 0$, gibt es zwei verschiedene Nullstellen
  - Bei $D = 0$ gibt es eine doppelte Nullstelle (Berührpunkt)
  - Bei $D < 0$ gibt es keine Nullstelle in $\mathbb{R}$

Rationale Funktionen

- Eine rationale Funktion ist gegeben als Quotient zweier Polynome

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0},\ q(x) \neq 0$$

- Eine rationale Funktion ist an den Nullstellen von $q(x)$ nicht definiert (Polstellen)
- Ist ein Wert $x_0 \in \mathbb{R}$ gleichzeitig Nullstelle von $p(x)$ und $q(x)$, dann kann $f(x)$ (gegebenenfalls sogar mehrfach) mit $(x - x_0)$ gekürzt werden (bei entsprechend eingeschränktem Definitionsbereich)

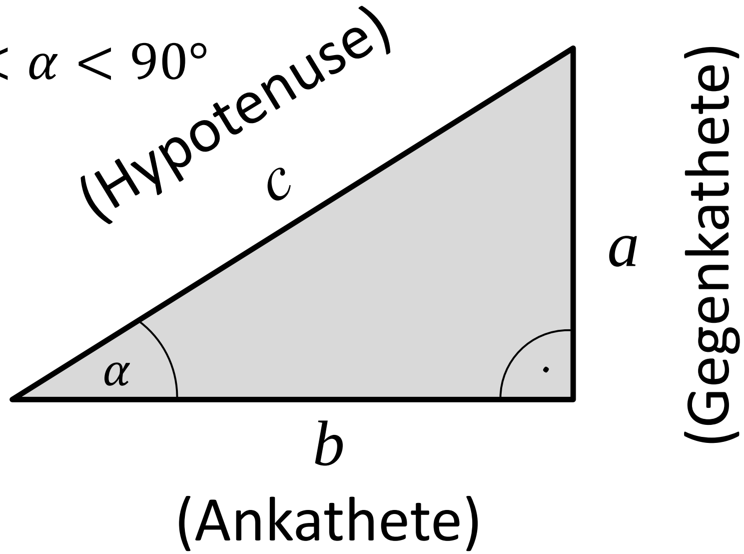
Inhalt

- Grundlagen
- Eigenschaften von Funktionen
- Polynome
- **Trigonometrische Funktionen**
- Exponential- und Logarithmusfunktionen

Trigonometrische Funktionen

- Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen) beschreiben ursprünglich Verhältnisse in Dreiecken
- Häufig auch Anwendung bei periodischen Vorgängen (z.B. Bewegung Pendel oder Masse-Feder Systeme)

$0° < \alpha < 90°$



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \text{(Sinus)}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \text{(Cosinus)}$$

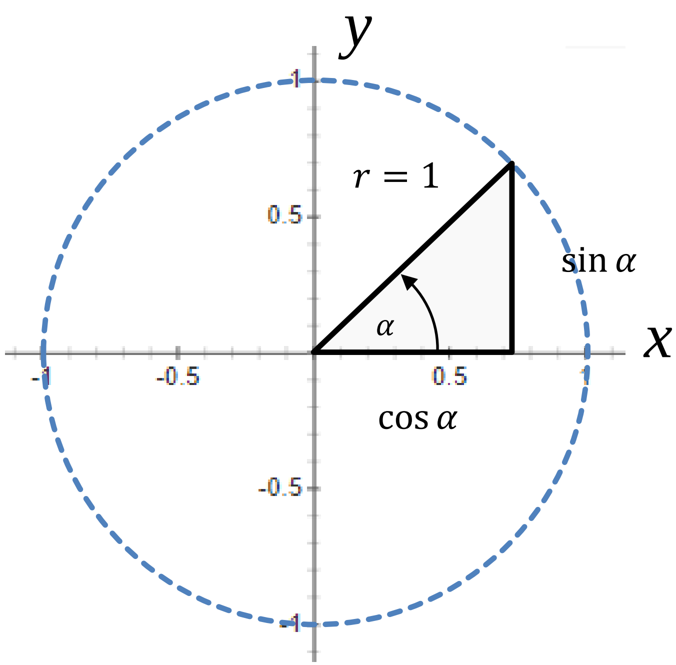
$$\mathbb{R} \to [-1,1]$$

Trigonometrische Funktionen

- Verhältnisse im **Einheitskreis**
- Winkel α wird üblicherweise im Bogenmaß (rad) angegeben

$$180° = \pi \quad (\text{rad})$$

$$\alpha(\text{rad}) = \frac{\pi}{180°}\alpha°$$



- Gemäß Satz des Pythagoras gilt

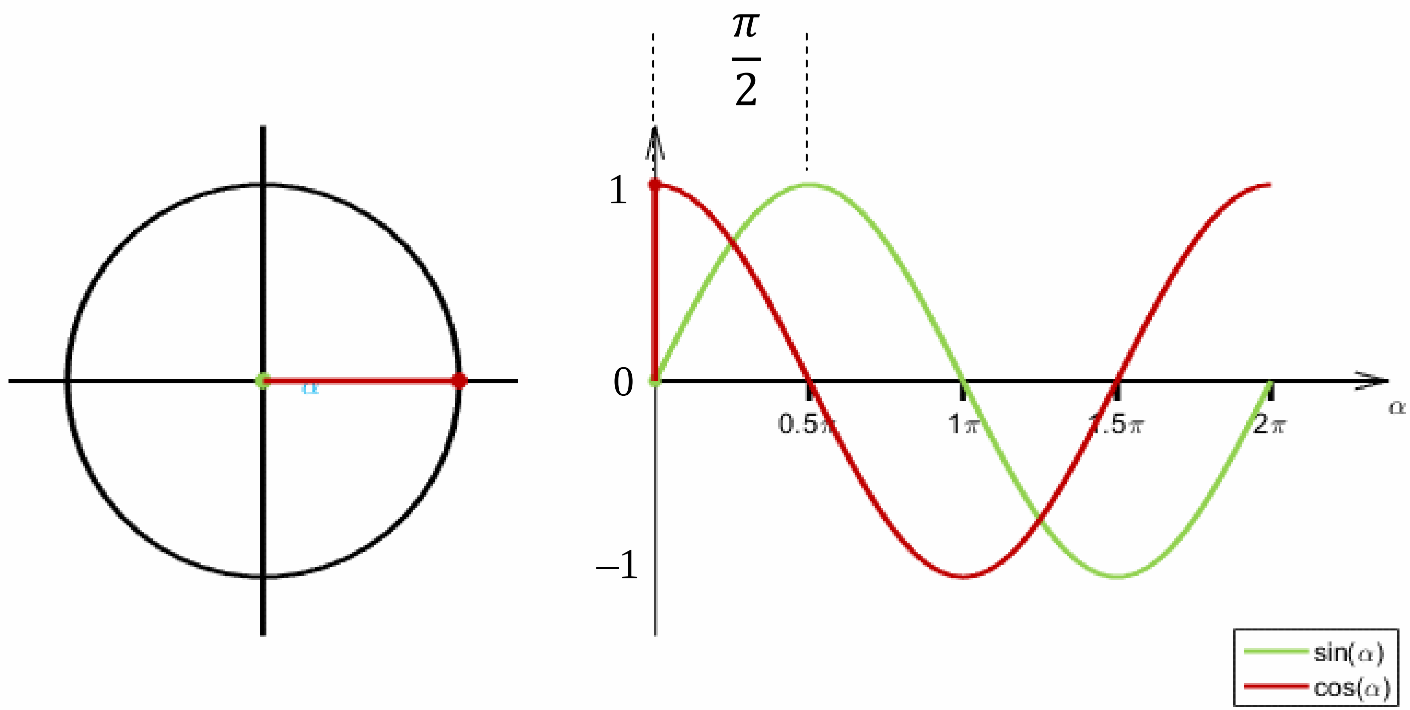
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

- Periode und Phasenverschiebung, z.B.

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi k)\,, \qquad k \in \mathbb{Z} \qquad\qquad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$$

Visualisierung Kreisfunktionen

[http://commons.wikimedia.org]



Formeln für Kreisfunktionen

- Beispiel: Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

- Geometrischer Beweis (erste Teil-Identität)

Formeln für Kreisfunktionen

- Beispiel: Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

- Geometrischer Beweis (erste Teil-Identität)

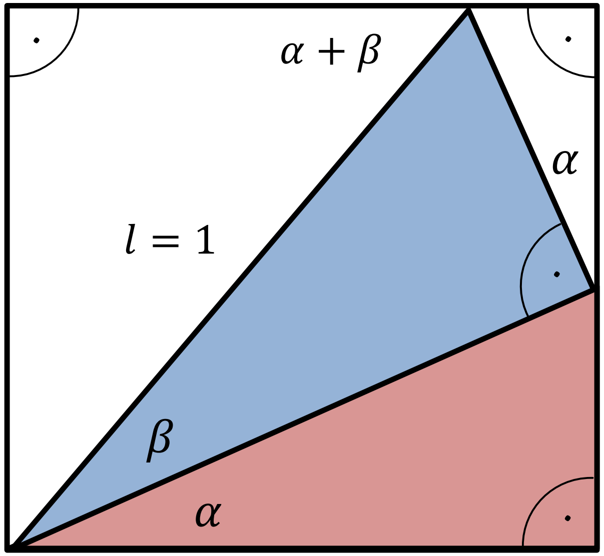
Formeln für Kreisfunktionen

- Beispiel: Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

- Geometrischer Beweis (erste Teil-Identität)



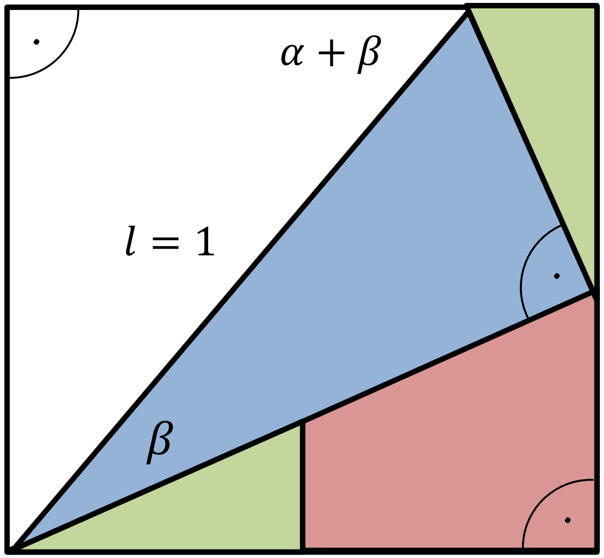
Formeln für Kreisfunktionen

- Beispiel: Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

- Geometrischer Beweis (erste Teil-Identität)



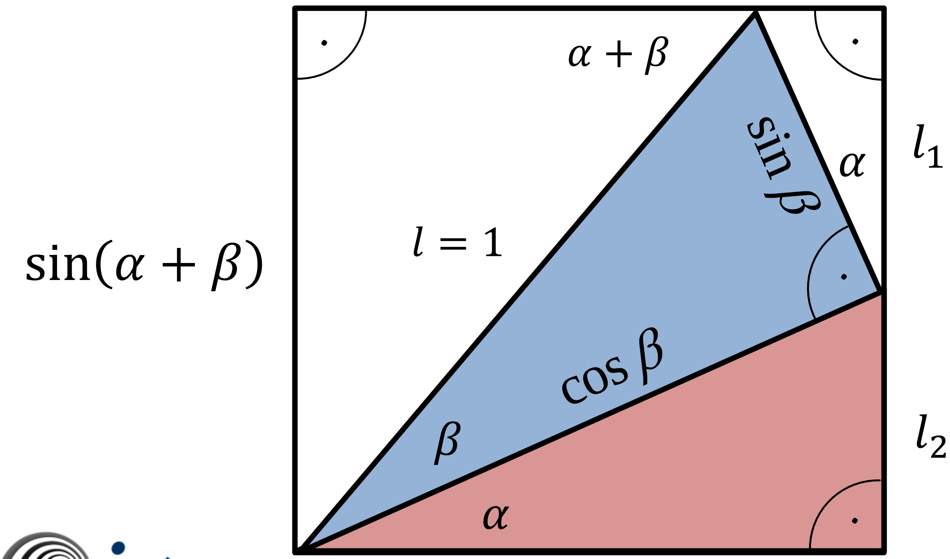
Formeln für Kreisfunktionen

- Beispiel: Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

- Geometrischer Beweis (erste Teil-Identität)



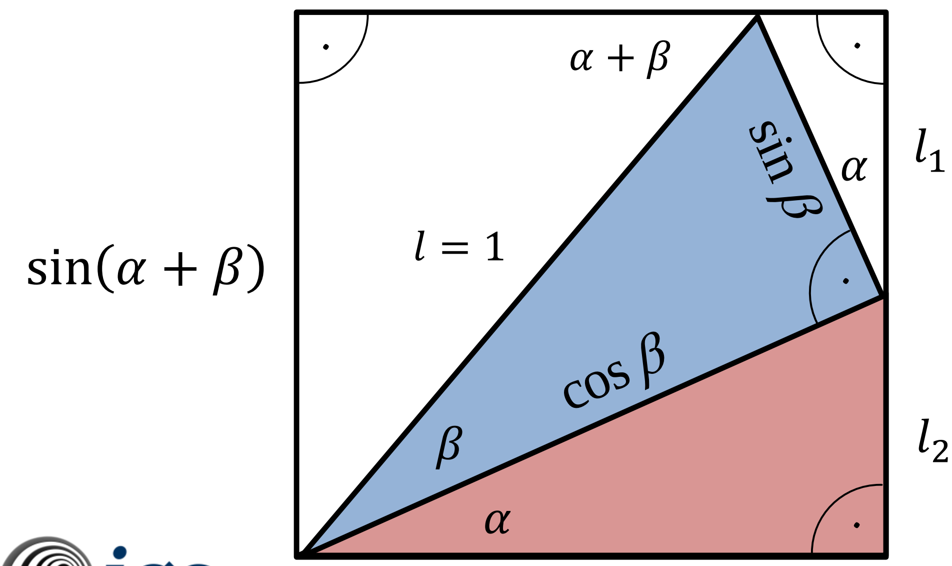
Formeln für Kreisfunktionen

- Beispiel: Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

- Geometrischer Beweis (erste Teil-Identität)



$$\sin(\alpha + \beta) = l_1 + l_2$$

$$\cos \alpha = \frac{l_1}{\sin \beta} \quad \Rightarrow l_1 = \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

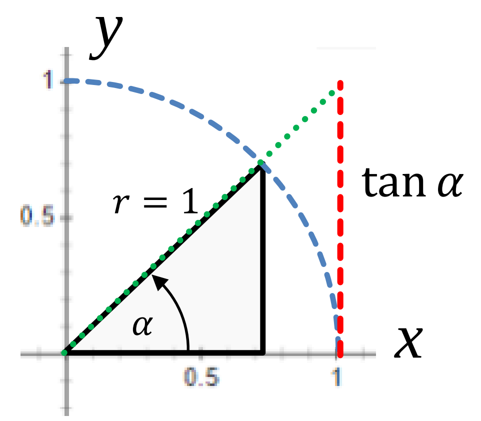
$$\sin \alpha = \frac{l_2}{\cos \beta} \quad \Rightarrow l_2 = \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

Weitere Kreisfunktionen

- Tangens und Cotangens

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$$

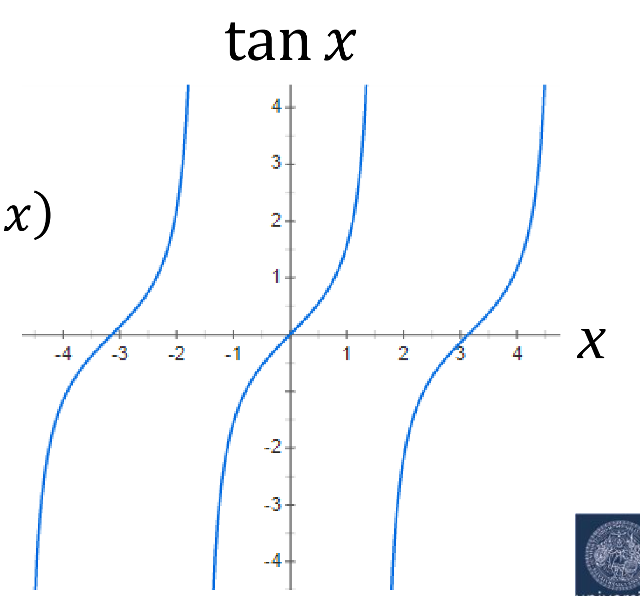
$$\tan\colon \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$



- Beispiele Symmetrien

$$\sin(x) = -\sin(-x) \qquad \tan(x) = -\tan(-x)$$

$$\cos(x) = \cos(-x)$$



- Umkehrfunktionen, z.B.

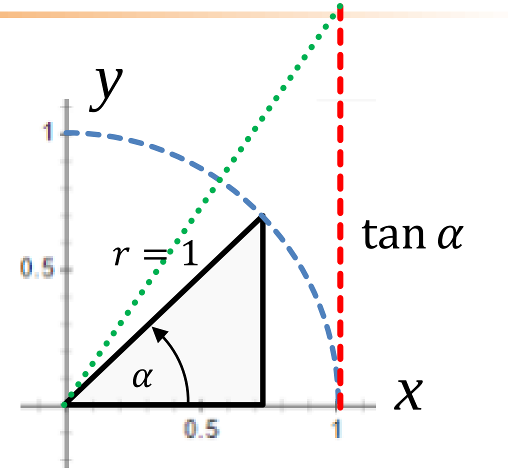
$$\arcsin(\sin x) = x$$

Weitere Kreisfunktionen

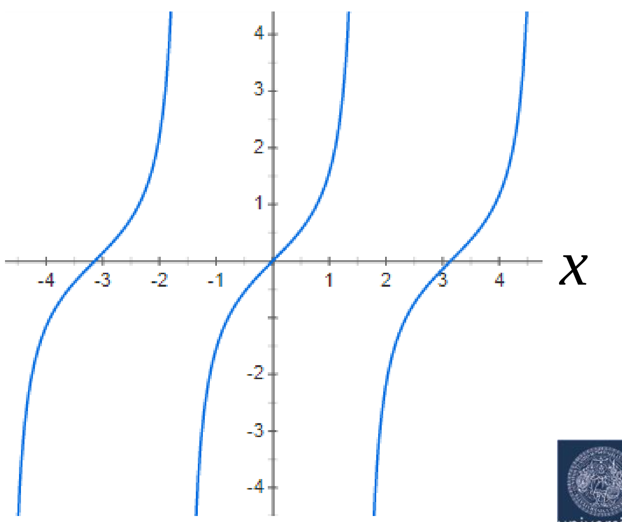
- Tangens und Cotangens

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$$

$$\tan: \mathbb{R}\setminus\left\{k\pi + \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$



tan x



- Beispiele Symmetrien

$$\sin(x) = -\sin(-x)$$

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

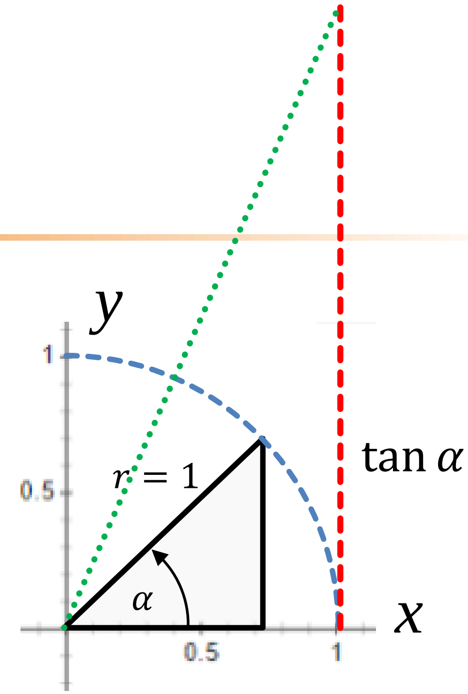
- Umkehrfunktionen, z.B.

$$\arcsin(\sin x) = x$$

Weitere Kreisfunktionen

- Tangens und Cotangens

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$$



$$\tan\colon \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$

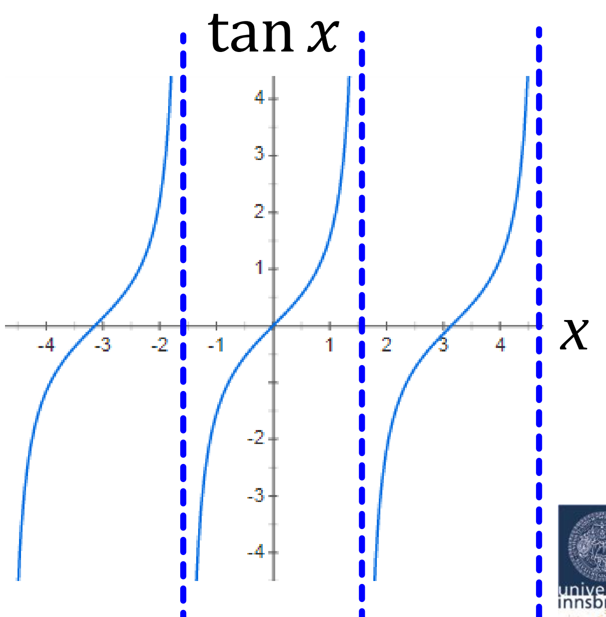
- Beispiele Symmetrien

$$\sin(x) = -\sin(-x)$$

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

- Umkehrfunktionen, z.B.

$$\arcsin(\sin x) = x$$



Anwendungsbeispiel

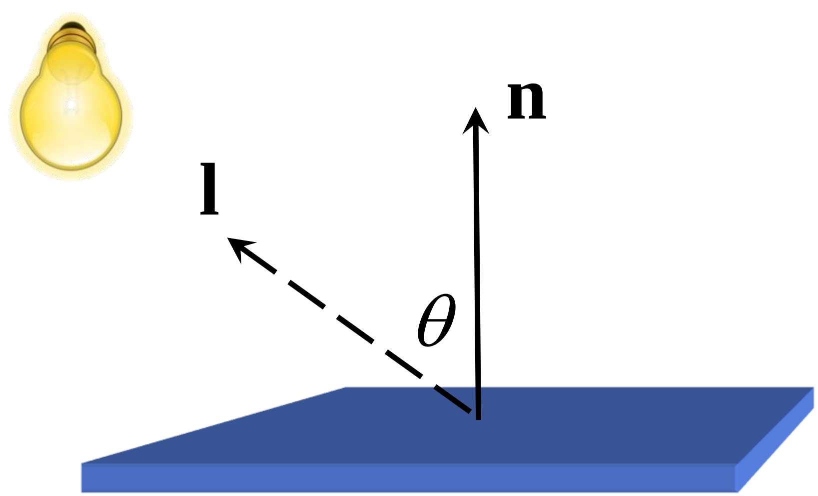
- Rotationsmatrizen für Drehung in 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\theta = 45° = \frac{\pi}{4} \;\; (\text{rad})$$

Anwendungsbeispiel

- Cosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren, für Berechnung der Lichtreflektion in Computergrafik



$$\mathbf{n}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^3$$

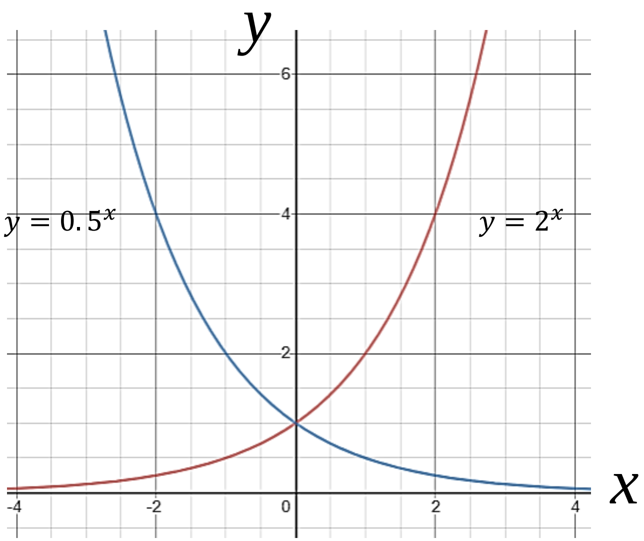
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{l}|}$$

Inhalt

- Grundlagen
- Eigenschaften von Funktionen
- Polynome
- Trigonometrische Funktionen
- **Exponential- und Logarithmusfunktionen**

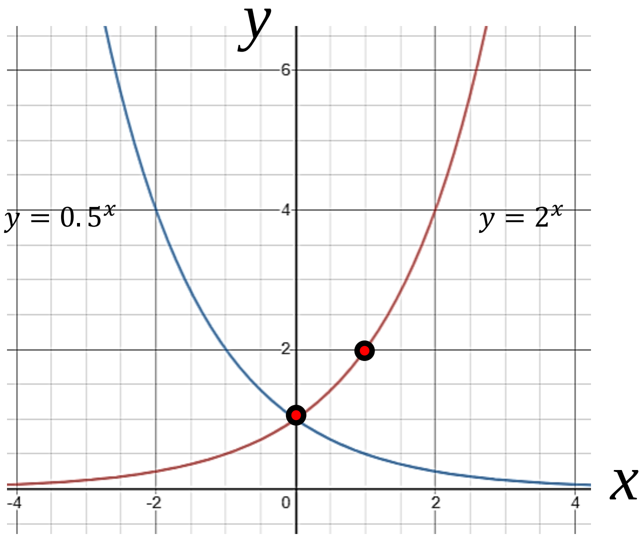
Exponentialfunktionen

- Zur Beschreibung z.B. von Wachstumsprozessen
- Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \to a^x$ mit Basis $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ (d.h. die Variable der Funktion ist der Exponent)
- Funktion ist streng monoton steigend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$



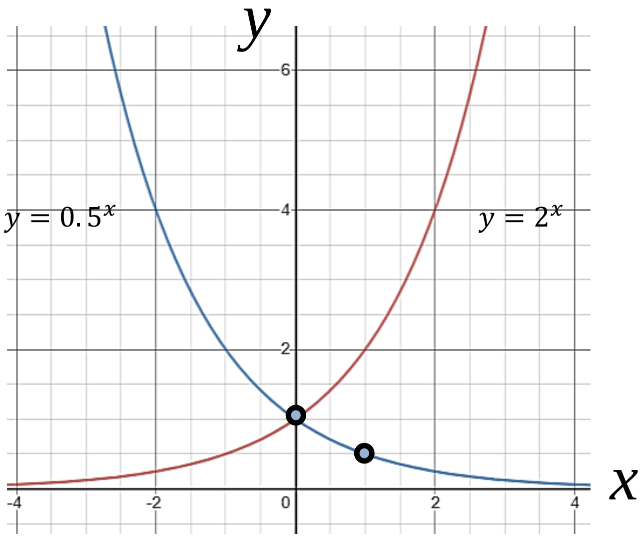
Exponentialfunktionen

- Zur Beschreibung z.B. von Wachstumsprozessen
- Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \to a^x$ mit Basis $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$ (d.h. die Variable der Funktion ist der Exponent)
- Funktion ist streng monoton steigend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$



Exponentialfunktionen

- Zur Beschreibung z.B. von Wachstumsprozessen
- Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \to a^x$ mit Basis $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ (d.h. die Variable der Funktion ist der Exponent)
- Funktion ist streng monoton steigend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$



Exponentialfunktionen

- Einige Rechenregeln (siehe auch Potenzfunktionen)

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \qquad a^0 = 1$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad a^1 = a$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

- Sonderfall: $a = e = 2.7182818\ldots$ (Eulersche Zahl)

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \exp(x) = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

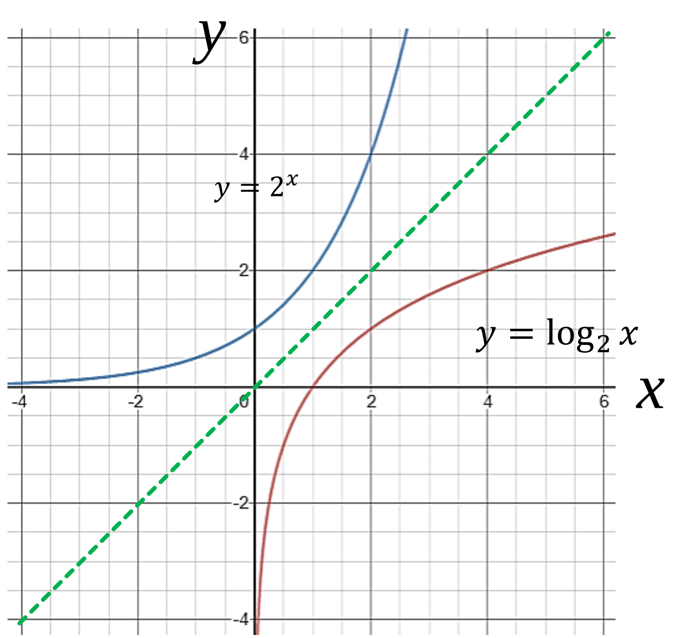
(mehr Details in folgenden Vorlesungen)

Logarithmusfunktionen

- Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$

  $f^{-1}(x) = \log_a x$ $\quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (Logarithmus zur Basis $a \in \mathbb{R}^+$)

- Rechenbeispiel: $2^3 = 8$ $\quad \log_2 8 = 3$



Logarithmusfunktionen

- Einige Rechenregeln

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(x^k\right) = k \log_a x$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = -\log_a\left(\frac{y}{x}\right)$$

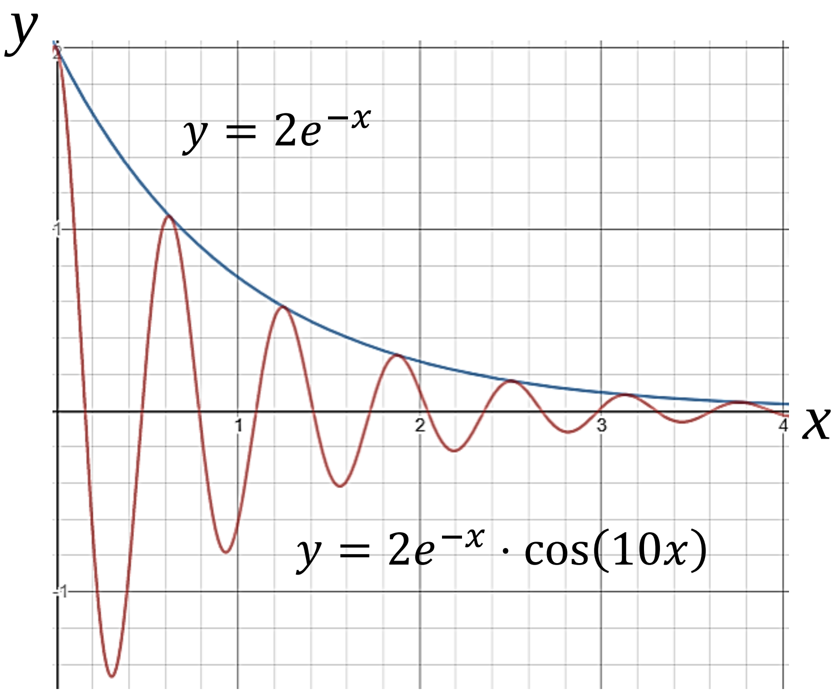
$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

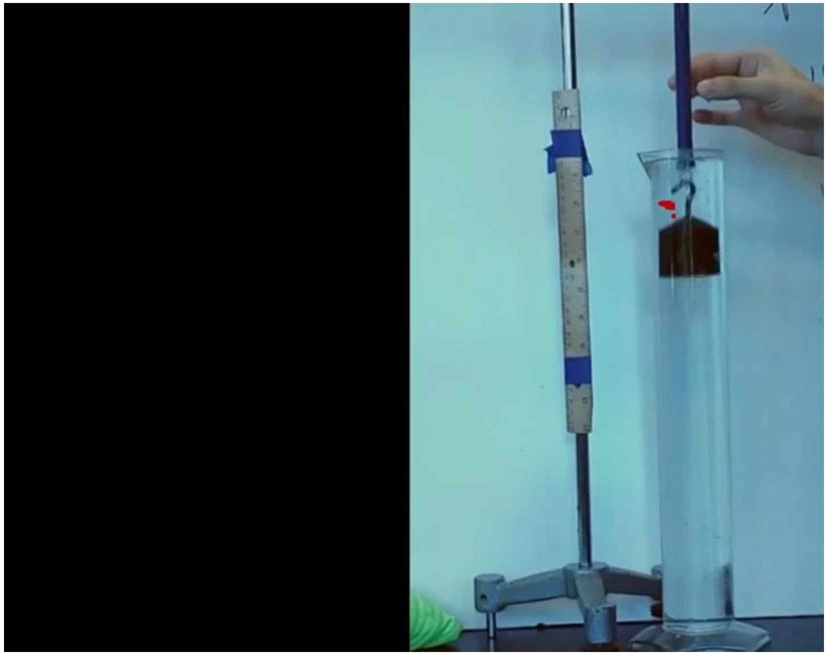
- Natürlicher Logarithmus (Basis e)

$$\log_e x = \ln x$$

Anwendungsbeispiel

- Gedämpfte Schwingung





Einige Hilfreiche Weblinks

- Mathematische Online-Enzyklopädie (Beispiel 1)
  https://mathepedia.de/
- Mathematische Online-Enzyklopädie (Beispiel 2)
  http://www.aleph1.info/?call=Home
- YouTube-Kanal „3 Blue 1 Brown“ (u.a. zu *Calculus*)
  https://www.youtube.com/watch?v=WUvTyaaNkzM&list=PLZHQObOWTQDMsr9K-rj53DwVRMYO3t5Yr
- Online Funktionsplotter
  https://www.desmos.com/calculator

Vorlesungsplan

Datum	Thema	Proseminar
11.03.22	Einführung, Grundlagen, Funktionen	*(Beginn zuvor am 8.3.)*
18.03.22	Differentialrechnung	
25.03.22	Integralrechnung	
01.04.22	Differentialgleichungen	
08.04.22	Weitere Funktionen	
	Osterferien	
29.04.22	Reihen und Folgen	
06.05.22	Numerische Auswertung von Funktionen	
13.05.22	Lösung von Gleichungssystemen	
20.05.22	Interpolation	
27.05.22	Zufallszahlen	
03.06.22	Komplexe Zahlen	
10.06.22	Klausurvorbereitung	
01.07.22	**Klausur**	