Allgemeine Informationen: Dieses Aufgabenblatt enthält schriftliche und/oder Programmieraufgaben. Bitte kombinieren Sie alle Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben zu einem einzelnen PDF Dokument, welches Sie nach folgendem Schema benennen: `{lastname}-written.pdf`. Sie können Ihre Lösungen auch scannen oder fotografieren. Achten Sie in diesem Fall auf die Lesbarkeit. Es werden JPEG/PNG Bilddateien akzeptiert welche wie folgt benannt werden müssen:
`{exercisenumber}-{lastname}-written.{jpeg/png}`.
Stellen Sie sicher, dass alle Rechenschritte nachvollziehbar sind und kombinieren Sie nicht zu viele kleine Schritte zu einem einzelnen.
Die Programmieraufgaben müssen in *Julia* gelöst sein und Ihr Quellcode sollte nach folgendem Schema benannt sein: `{exercisenumber}-{lastname}.jl`.

(1) (1 Punkt) Bestimmen Sie den Grenzwerte (sofern vorhanden) für jede der Folgen:

a) (0.25 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 45n - 15}{\sqrt{36n^4 - 16n - 32}}$$

b) (0.25 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin(n)$$

c) (0.25 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(2\frac{n^2}{4} \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}\right)$$

d) (0.25 Punkte) **Hinweis**: Die Regel von de L'Hôpital sagt aus, dass für zwei differenzierbare Funktionen f und g wobei $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ in einem unbestimmten Ausdruck resultiert, Folgendes gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} n^5 e^{-n}$$

(2) (2 Punkte) Konvergieren die folgenden Reihen?

a) (0.5 Punkte) Benutzen Sie das Quotientenkriterium um zu zeigen, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Hinweis: Das Quotientenkriterium macht Gebrauch von:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Folgende Fälle werden unterschieden:

- falls $L < 1$, die Reihe konvergiert,
- falls $L > 1$, die Reihe divergiert,
- falls $L = 1$, keine Aussage.

b) (0.5 Punkte) Benutzen Sie das Integralkriterium um zu zeigen, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2}.$$

Hinweis: Nach dem Integralkriterium konvergiert eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ nur, falls das Integral $\lim_{a\to\infty} \int_1^a f(n)\mathrm{d}n$ konvergiert.

c) (0.5 Punkte) Benutzen Sie das Majorantenkriterium um zu zeigen, dass folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+n+4}.$$

Hinweis: Das Majorantenkriterium sagt aus, dass, falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert und $0 \leq a_n \leq b_n$, dann konvergiert auch die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

d) (0.5 Punkte) Benutzen Sie das Leibniz-Kriterium um zu zeigen, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}.$$

Hinweis: Das Leibniz-Kriterium sagt aus, dass eine Reihe, welche als $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ausgedrückt werden kann, konvergiert, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

i. $|a_n|$ monoton fallend ist (prüfen Sie ob $|a_{n+1}| \leq |a_n|$)

ii. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(3) (2 Punkte) Durch die *Taylorreihe* einer ableitbaren Funktion $f(x)$ wird diese an einem Punkt a approximiert:

$$\begin{aligned} f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots, \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \end{aligned}$$

mit $f^{(k)}(a)$ der k-ten Ableitung von f in Punkt a.

a) (1.0 Punkt) Schreiben Sie die Summe der ersten 8 Terme der Taylorreihe der Funktion $f(x) = \sin(x)$ in Punkt $a = 0$ an.
Zeigen Sie, dass diese Reihe mit der folgenden Formel geschrieben werden kann:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{1}$$

b) (0.5 Punkte) Verwenden Sie Julia um die Formel (1) zu implementieren und die Taylorreihe für $n = 5$, $n = 10$ und $n = 15$ zu plotten (siehe Abbildung unten). Verwenden Sie die Vorlage `sine.jl`.

c) (0.5 Punkte) Plotten Sie für jeden Wert von n den absoluten Fehler zwischen der Taylorreihen-Approximation und der realen Funktion $\sin(x)$. Verwenden Sie die Vorlage `sine.jl`.

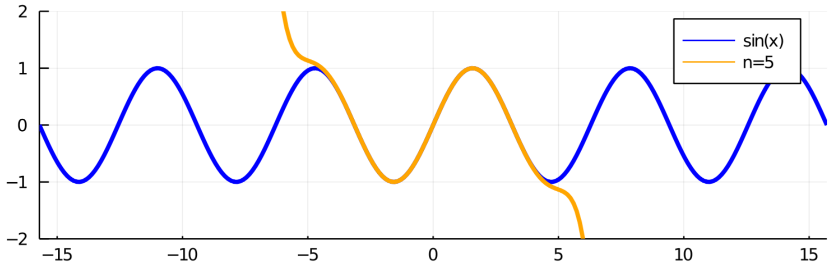

Abbildung 1: Grafik der Funktion $\sin(x)$ (blau) und ihrer Taylorreihen-Approximation für $n = 5$.

(4) (2 Punkte) Eine periodische, stückweise stetige Funktion f auf dem Interval $[-\pi, \pi]$ kann als Fourierreihe dargestellt werden:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k sin(kx),$$

mit folgenden Koeffizienten:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x, \quad k \geq 0$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \mathrm{d}x, \quad k \geq 1.$$

Berechnen Sie die Terme für $k \in \{1, 3, 5\}$ der Fourierreihe für $f(x)$ mit der Periode 2π:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ -1 & 0 < x < \pi \end{cases} .$$

Fügen Sie a_0, a_k, b_k in die entsprechenden Zeilen in die `fourier.jl` Datei ein und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Abbildung 2.

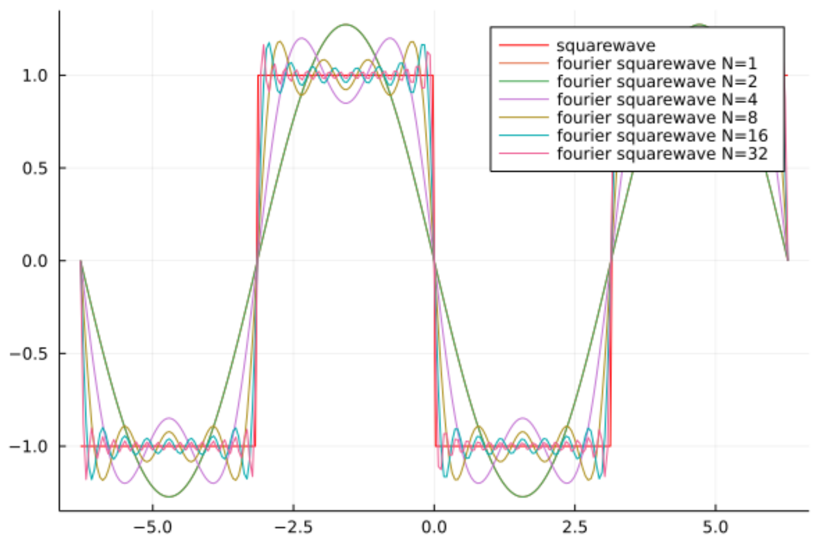

Abbildung 2: Plot eines Rechteckimpulses und (N-te) Partialsummen der dazugehörigen Fourierreihe.