

Algebra

Sei \mathcal{B} eine Boolesche Algebra mit der Trägermenge B .

- (a) Zeigen Sie das erste Gesetz von de Morgan für \mathcal{B} .

$$\sim(a) \cdot \sim(b) = \sim(a + b) .$$

[8 Punkte]

- (b) Gilt die gezeigte Aussage auch für die Mengenalgebra?

[2 Punkte]

Hinweis. Verwenden Sie für den Beweis die Eindeutigkeit des Komplements in der Booleschen Algebra. Für alle $a, b \in B$:

$$\text{Wenn } a + b = 1 \text{ und } ab = 0, \text{ dann } b = \sim(a) .$$

Komplexitätstheorie

Sudoku, wörtlich „Ziffern dürfen nur einmal vorkommen“ ist ein populäres japanischen Zahlenpuzzle, das auf einem 9×9 Gitter gespielt wird. Wie der Name schon sagt, dürfen die Ziffern von 1 bis 9 jeweils nur einmal in den (i) Zeilen, (ii) Spalten und (iii) 3×3 Blöcken vorkommen.

Zeigen Sie dass Sudoku in NP liegt. Das heißt, Sie fassen Sudoku als formale Sprache

$$\text{SUDOKU} := \{S \mid S \text{ ist ein lösbares Sudokupuzzle}\} ,$$

auf und zeigen $\text{SUDOKU} \in \text{NP}$.

[10 Punkte]

Hinweis. Sie können eine beliebige Codierung von Sudokus annehmen, zum Beispiel ist S durch eine 9×9 Matrix repräsentierbar, wobei für die Einträge gilt $x_{ij} \in \{1, \dots, 9, \sqcup\}$.

$$\begin{array}{cccccccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} & x_{29} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & & \dots & & x_{37} & x_{38} & x_{39} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & & \dots & & x_{47} & x_{48} & x_{49} \\ & & & & \vdots & & & & \\ x_{91} & x_{92} & x_{93} & x_{94} & x_{95} & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99} \end{array}$$

Der Eintrag \sqcup bedeutet, dass die entsprechende Zelle leer ist.