3 Übungsklausur

Sie können in jedes Kästchen entweder **w** (wahr), **f** (falsch) oder **nichts** schreiben.

Jede richtig beantwortete Frage gibt einen Punkt, für jede falsch beantwortete Frage wird ein Punkt abgezogen. Eine nicht beantwortete Frage zählt null Punkte. Negative Gesamtpunkte in einer einzelnen Aufgabe werden auf Null aufgerundet.

Insgesamt können bei dieser Beispielklausur, welche dem Aufbau nach der im Wintersemester 2018/19 abgehaltenen Klausur entspricht, 80 Punkte erzielt werden. Auf einen Notenschlüssel wird explizit verzichtet. Viel Freude beim Lösen!

Um die gegebenen Antworten rascher zu kontrollieren, befindet sich anbei eine Tabelle. Bitte den jeweiligen Buchstaben (w,f) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer der Aufgabe schreiben oder das Feld unausgefüllt lassen!

Aufgabe / Antwort	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	2.1	2.2	2.3	2.4
1										
2										
3										
4										

Aufgabe / Antwort	2.5	2.6	2.7	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	4.3
1										
2										
3										
4										

1. Lineare Gleichungssysteme, Körper und Matrizen

1.1 $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ seien Mengen, wobei $\mathcal{M} = \{0, 1, 3, 5\}$ und $\mathcal{N} = \{a, 1, e, 4\}$. Entscheiden Sie:

	$\mathcal{M} \times \mathcal{N} = \{(0,a), (0,1), (0,e), (0,4), (1,a), (1,e), (1,4), (3,a), (3,1), (3,e), (3,4), (5,a), (5,1), (5,e), (5,4)\}$
	Auf der Menge $\mathcal{M}$ gibt es die Indentitätsfunktion.
	In der Vereinigung der beiden Mengen $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ befinden sich acht Elemente.
	$f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ mit $0 \mapsto e, 1 \mapsto a, 3 \mapsto 4, 5 \mapsto 1$ ist eine Funktion.

1.2 Entscheiden Sie:

	Die Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen assoziativ.
	Die Matrizenmultiplikation ist bezüglich der Addition im Allgemeinen distributiv.
	Die Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen kommutativ.
	Im Allgemeinen gilt: $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$, wenn $A, B \in K^{n \times n}$.

1.3 Entscheiden Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{Q}) :$$

	A lässt sich mittels elementaren Zeilenumformungen auf eine Zeilenstufenform mit zwei Pivotspalten bringen.
	Falls die zu A inverse Matrix existiert, ist $A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.
	Ändert man bei der transponierten Matrix von A die letzte Zeile in eine Nullzeile, ist die neu entstandene Matrix über $\mathbb{Q}$ nicht invertierbar.
	A ist invertierbar über $\mathbb{Q}$.

1.4 Entscheiden Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{Q}):$$

	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Produkt von Elementarmatrizen)
	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Produkt von Elementarmatrizen)
	$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$
	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Produkt von Elementarmatrizen)

1.5 Entscheiden Sie:

	Ein lineares Gleichungssystem mit gleich vielen Gleichungen wie Unbekannten hat immer genau eine Lösung.
	Die Summe zweier Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems ist stets wieder eine Lösung.
	Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat immer mindestens eine Lösung.
	Ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{C}$ hat keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen.

1.6 Entscheiden Sie:

	$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sei ein Körper. Das multiplikativ inverse Element zu $z = (a, b) \neq (a, 0)$ ist $z^{-1} = (\frac{a}{a^2 - b^2}, \frac{-b}{a^2 - b^2})$.
	Sei R ein Ring. Dann ist $R^\times$ eine Gruppe bezüglich $\cdot$.
	Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist im Körper der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ enthalten.
	Es gibt einen Körper mit genau 79 Elementen.

2. Vektorräume und lineare Abbildungen

2.1 V sei ein endlich erzeugter Vektorraum über den Körper K. Entscheiden Sie:

	Eine Basis von V ist ein linear abhängiges Erzeugendensystem von V.
	Nimmt man von einer Basis von V einen Vektor weg, hat man immer noch ein Erzeugendensystem von V.
	Pro Vektorraum gibt es nur ein System linear unabhängiger Vektoren, das sich zu einer Basis von V ergänzen lässt.
	$(v_1, \cdots, v_m)$ heißt K-Erzeugendensystem von V, falls $\mathrm{Span}_K(\{v1, \cdots, v_{m-1}\}) = V$ ist.

2.2 V sei ein endlich erzeugter Vektorraum über den Körper K. Entscheiden Sie:

	Für jeden Körper K existiert der Nullvektorraum.
	Der Durchschnitt einer beliebigen Familie von Untervektoraumen von V ist wieder ein Untervektorraum.
	Jeder affine Unterraum ist ein Untervektorraum.
	U_1, U_2 seien Untervektorräume von V. Dann gilt $\mathrm{Span}_K(U_1 \cap U_2) = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$.

2.3 Es sei U der Vektorraum aller reellen 4×4 Matrizen mit der Eigenschaft, dass alle einträge in der dritten Spalte 0 sind, V der Vektorraum aller Translationen in $\mathbb{R}^3$ und W der Lösungsraum der homogenen linearen Gleichung $x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$. Entscheiden Sie:

	Die Dimension von U, V beziehungsweise W ist: $4, 6$ bzw. 4.
	Die Dimension von U, V beziehungsweise W ist: $16, 3$ bzw. 3.
	Die Dimension von U, V beziehungsweise W ist: $12, 3$ bzw. 3.
	Die Dimension von U, V beziehungsweise W ist: $12, 6$ bzw. 4.

2.4 Entscheiden Sie:

	Verschiedene Basen eines endlich erzeugten Vektorraums V über K enthalten gleich viele Elemente.
	Verschiedene Basen eines endlich erzeugten Vektorraums V über K enthalten nicht gleich viele Elemente.
	Der Begriff „Vektorraum“ kann erst nach Definition des Terminus „Vektor“ eingeführt werden.
	Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystem ist ein Vektorraum.

2.5 Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen K-linear sind:

	$\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3, x \mapsto x^3$
	$\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, x \mapsto 3 \cdot x + 2$
	$\mathbb{Q}^{4\times 4} \to \mathbb{Q}^{4\times 4}, A \mapsto A_{11} + A_{22}$
	$\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$

2.6 Entscheiden Sie:

	Ein Isomorphismus ist immer bijektiv.
	Jede bijektive lineare Abbildung ist ein Isomorphismus.
	Die lineare Abildung $\phi : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn $Kern(\phi) = \{0\}$ ist.
	Es gilt $dim_K(V) = dim_K(Kern(\phi)) + dim_K(Bild(\phi))$, wenn V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, W ein weiterer K-Vektorraum und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung ist.

2.7 Entscheiden Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 & 2 \\ 15 & 12 & 21 & 4 \\ 27 & 20 & 33 & 6 \end{pmatrix} \in Mat_{3,4}(\mathbb{Q}) :$$

	$rang(A) = 2$
	Im Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ weißt die Matrix den Rang 2 auf.
	Es gilt: $rang(A) = dim_K(Kern(\mu \cdot A))$
	Der Rang der Matrix A ist gleich der Größe einer invertierbaren Untermatrix von A.

3. Determinanten

3.1 Gegeben ist die folgende Permutation in Matrizenschreibweise

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 7 & 8 & 4 & 6 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie:

	Die Permuation σ hat genau drei elementfremde Zykel.
	Die Zahl 9 ist der einzige Fixpunkt von σ.
	Die inverse Permutation von σ in Matrizenschreibweise erhält man, indem man die Permutation von oben nach unten liest.
	Die Signatur von σ ist 1.

3.2 Sei $A \in Mat_m(K)$. Entscheiden Sie:

	$det(A^T) = -det(A)$
	Wenn A eine untere Dreiecksmatrix ist, dann ist $det(A) = A_{11} \cdot A_{22} \cdots A_{mm}$.
	Nur wenn $K = \mathbb{R}$ gilt, ist $det(A)$ eine K-lineare Abbildung.
	Besitzt A zwei identische Zeilen oder Spalten, so gilt: $det(A) = 0$

3.3 Im folgenden sind einige (angebliche) Eigenschaften von Determinanten aufgelistet. Entscheiden Sie:

	$det(A \cdot B) = det(B \cdot A) = det(B) \cdot det(A)$
	$det(A + B) = det(A) + det(B)$
	$det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$
	$det(\tau \cdot A) = sign(\tau) \cdot det(A)$, wobei τ eine Permutation ist.

3.4 Entscheiden Sie:

	Für $A \in Mat_m(K)$ gilt: $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in GL_m(K)$
	Die Regel von Sarrus gilt ab Matrizen der Größe 3.
	Im Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gilt: $det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 21$
	In $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gilt: $det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 0$

4. Eigenwerte, Eigenvektoren und allgemeine Beweisaufgaben

4.1 ϕ sei ein Endomorphismus. Entscheiden Sie:

	Die Menge aller Eigenwerte von ϕ nennt man das Spektrum von ϕ.
	Für $A \in Mat_m(K)$ und $\lambda \in K$ gilt: λ ist Eigenwert von $\mu \cdot A \Leftrightarrow det(\lambda I_m - A) = 0$.
	Für $A \in Mat_m(K)$ und $\lambda \in K$ gilt: $\lambda I_m - A$ ist nicht invertierbar $\Leftrightarrow Bild(\lambda I_m - A) = 0$.
	Eine Matrix $A \in Mat_m(K)$ hat höchstens m verschiedene Eigenwerte.

4.2 Entscheiden Sie für:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R})$$

	A hat genau einen Eigenwert - nämlich 1.
	A hat genau zwei Eigenwerte - nämlich 1 und 5.
	A hat keinen Eigenwert in $\mathbb{R}$.
	A hat genau zwei Eigenwerte - nämlich 0 und 4.

4.3 Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Entscheiden Sie:

	$\forall \lambda, \gamma \in K, v \in V : 0 \cdot v = 0$
	$\forall \lambda, \gamma \in K, v \in V : (v \neq 0 \wedge \lambda \neq \gamma) \Rightarrow \lambda \cdot v \neq \gamma \cdot v$
	$\forall \lambda, \gamma \in K, v \in V : (\lambda^2 + \gamma) \cdot v = (\lambda^2 + v) \cdot \gamma$
	$\forall \lambda, \gamma \in K, v \in V : (-\lambda \cdot \gamma) \cdot v = -(\lambda \cdot \gamma \cdot v)$

4 Antworten

4.1 Übungsblätter

Antwort \ Blatt.Aufgabe	1.5	1.6	2.6	3.5	3.6	4.5	4.6	5.5	5.6	7.6
1				f	f		x	f		f
2			x	f	w	x		f	x	f
3	x	x		f	f			w		w
4	x			w	w			f		f
5										

4.2 Übungsklausur

Antwort \ Aufgabe	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	2.1	2.2	2.3	2.4
1	f	w	f	w	f	f	f	w	f	w
2	w	w	f	f	w	w	f	w	f	f
3	f	f	w	w	w	f	f	f	w	f
4	w	f	w	w	w	w	f	f	f	w

Antwort \ Aufgabe	2.5	2.6	2.7	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	4.3
1	w	w	w	f	f	w	f	w	f	w
2	f	w	f	f	w	f	f	w	w	w
3	w	w	f	f	f	w	f	f	f	f
4	w	w	f	w	w	w	w	w	f	w