Name	Matrikelnummer	Studiengang

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra + Vertiefung

Do. 7. Februar 2019

Sie können in jedes Kästchen entweder **w** (wahr), **f** (falsch) oder **nichts** schreiben.

Jede korrekt beantwortete Frage gibt einen Punkt, für jede unkorrekt beantwortete Frage wird ein Punkt abgezogen. Eine nicht beantwortete Frage zählt null Punkte.

Negative Gesamtpunkte in einer einzelnen Aufgabe werden auf Null aufgerundet.

Insgesamt können **64 + 12** Punkte erzielt werden.

1. Lineare Gleichungssysteme, Körper und Matrizen.

1.1. Entscheiden Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q}):$$

- ☐ A ist invertierbar über $\mathbb{Q}$.
- ☐ Es gibt $b \in \mathbb{Q}^3$ mit $L(A, b) = \emptyset$.
- ☐ A lässt sich mit elementaren Zeilenumformungen auf eine Zeilenstufenform mit genau 2 Pivots bringen.
- ☐ Das homogene lineare Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A besitzt nur die triviale Lösung.

1.2. Entscheiden Sie:

- ☐ Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lässt sich jede Matrix mit Einträgen aus einem Körper in Zeilenstufenform bringen.
- ☐ Besitzt eine Matrix A in Zeilenstufenform mehr Spalten als Pivots, so besitzt jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit A als Koeffizientenmatrix eine Lösung.
- ☐ Die Summe zweier Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems ist stets wieder eine Lösung.
- ☐ Eine quadratische Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist die Einheitsmatrix.

1.3. Sei K ein Körper. Entscheiden Sie, ob für alle $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$ gilt:

- ☐ Ist $c \in L(A, b)$ und $d \in L(A, 0)$, so ist $c + d \in L(A, b)$.
- ☐ Sind $c, d \in L(A, b)$, so ist $c - d \in L(A, 0)$.
- ☐ Ist $c \in L(A, 0)$ und $\lambda \in K$, so ist $\lambda c \in L(A, 0)$.
- ☐ Aus $L(A, 0) \neq \{0\}$ folgt $L(A, b) \neq \emptyset$.

1.4. Sei K ein Körper. Entscheiden Sie:

- ☐ Für jedes $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$.
- ☐ $A, B \in \mathrm{GL}_m(K) \Rightarrow AB \in \mathrm{GL}_m(K)$.
- ☐ $A \in \mathrm{GL}_m(K) \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = m$.
- ☐ $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ bildet mit der bekannten Addition und Multiplikation von Matrizen einen kommutativen Ring.

1.5. Entscheiden Sie:

- ☐ Es gibt einen Körper mit genau 23 Elementen.
- ☐ $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).
- ☐ In einem Körper können Elemente mehr als ein multiplikativ Inverses besitzen.
- ☐ $\mathbb{Z}$ ist ein Körper (mit der bekannten Addition und Multiplikation).

1.6. Entscheiden Sie:

- ☐ $\mathbb{C}$ ist ein kommutativer Ring (mit der bekannten Addition und Multiplikation).
- ☐ Für $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kann $ab = 0$ gelten.
- ☐ Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z|^2 = z\overline{z}$.
- ☐ Der Betrag einer komplexen Zahl ist stets eine reelle Zahl.

2. Vektorräume und lineare Abbildungen.

2.1. Sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Entscheiden Sie:

- ☐ V besitzt eine Basis.
- ☐ Jedes Erzeugendensystem von V ist eine Basis.
- ☐ Je zwei Basen von V bestehen aus gleich vielen Vektoren.
- ☐ Jedes System linear unabhängiger Vektoren von V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

2.2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $V = \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ jeweils $\mathbb{R}$-Untervektorräume sind (bezüglich der bekannten Addition und skalaren Multiplikation):

- ☐ $\{f \in V \mid f(0) = 0\}$.
- ☐ $\{f \in V \mid f(0) = 1\}$.
- ☐ $\{f \in V \mid f(1) = 0\}$.
- ☐ $\{f \in V \mid f(a) \geq 0 \text{ für alle } a \in [0,1]\}$.

2.3. Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_m \in V$. Entscheiden Sie:

- ☐ Es ist $\mathrm{Span}_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ ein Untervektorraum von V.
- ☐ Es ist $\mathrm{Span}_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ ein Untervektorraum von K^m.
- ☐ Es ist $\mathrm{Span}_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ die Vereinigung aller Untervektorräume von V, welche $v_1, \ldots, v_m$ enthalten.
- ☐ Es ist $\mathrm{Span}_K(\{v_1, \ldots, v_m\})$ die Menge aller linear unabhängiger Teilmengen von $\{v_1, \ldots, v_m\}$.

2.4. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

- ☐ Wenn φ injektiv ist, ist φ auch surjektiv.
- ☐ Es ist φ stets surjektiv.
- ☐ Es kann $\dim V < \dim \mathrm{Bild}(\varphi)$ gelten.
- ☐ Aus $\dim \mathrm{Bild}(\varphi) < \dim V$ folgt, dass φ nicht injektiv ist.

2.5. Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}$-linear sind:

- ☐ $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1; (a,b)^t \mapsto a - b^2$.
- ☐ $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x,y)^t \mapsto (2x - y, 3y)$.
- ☐ $\varphi\colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]; p \mapsto p + p'$.
- ☐ $\varphi\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1; a \mapsto a + 1$.

3. Determinanten.

3.1. Sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Entscheiden Sie:

- [ ] Die Determinante $\det\colon \mathrm{Mat}_m(K) \to K$ ist eine K-lineare Abbildung.
- [ ] Es gilt $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_m(K)$.
- [ ] Die Determinante einer Matrix ändert sich unter elementaren Zeilenumformungen nicht.
- [ ] Aus $\det(A) \neq 0$ folgt $L(A, b) \neq \emptyset$ für alle $b \in K^m$.

3.2. Entscheiden Sie:

- [ ] Es gilt $A \cdot A^{\mathrm{adj}} = I_2$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.
- [ ] $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ist genau dann invertierbar wenn $\det(A) = 1$ gilt.
- [ ] Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist Null.
- [ ] Für $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}^3$ gilt $\det(a_1, a_2, a_3) = -\det(a_2, a_3, a_1)$.

3.3. Entscheiden Sie:

- [ ] Die Regel von Sarrus gilt für Matrizen der Größe 4.
- [ ] Für $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$ gilt $A^{\mathrm{adj}} \in \mathrm{Mat}_{m-1}(K)$.
- [ ] Es gilt
$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$
- [ ] Der Rang einer Matrix ist die größte Größe einer quadratischen Untermatrix mit Determinante $\neq 0$.

4. Allgemeine Beweisaufgaben.

4.1. Sei V ein Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und $v_1, v_2 \in V$. Entscheiden Sie:

- ☐ Aus $\varphi(v_1) = 7v_1$ und $\varphi(v_2) = 7v_2$ folgt $\varphi(v) = 7v$ für alle $v \in \operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$.
- ☐ Sind v_1, v_2 linear unabhängig, so auch $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$.
- ☐ Sind $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$ linear unabhängig, so auch v_1, v_2.
- ☐ Aus $v_2 - v_1 \in \operatorname{Kern}(\varphi)$ folgt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$.

4.2. Sei K ein Körper, $A \in \operatorname{Mat}_m(K)$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$. Entscheiden Sie:

- ☐ $\operatorname{rang}(A) < m$.
- ☐ A hat Diagonalgestalt.
- ☐ Aus $A^2 v = Av$ folgt $Av = 0$.
- ☐ Es gibt keine Matrizen mit $A^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

5. Vertiefung.

5.1. Entscheiden Sie:

- ☐ Jede rationale Zahl kann als Äquivalenzklasse eines Paares natürlicher Zahlen aufgefasst werden.
- ☐ Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ besitzt genau n verschiedene n-te Wurzeln.
- ☐ Jede n-te Einheitswurzel ist eine primitive n-te Einheitswurzel.
- ☐ Die komplexe Zahl $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ ist eine n-te Einheitswurzel.

5.2. Sei $\varphi\colon \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}; p \mapsto p'$, sowie $\underline{v} = (1, t, t^2, t^3)$, $\underline{w} = (1, t, t^2)$. Entscheiden Sie:

- ☐ Es gilt $M_{\underline{v},\underline{w}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- ☐ Es gilt $M_{\underline{v},\underline{w}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- ☐ Jede zwei Darstellungsmatrizen von φ sind äquivalent.
- ☐ Es gibt Basen von $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ und $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, bezüglich derer die Darstellungsmatrix von φ gerade

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

5.3. Sei K ein Körper und V, W zwei K-Vektorräume. Entscheiden Sie:

- ☐ Für den Dualraum V' von V gilt $V' = \mathrm{Lin}_K(V, V)$.
- ☐ Ist V endlich-dimensional, so gilt $\dim(V) = \dim(V')$.
- ☐ Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Für die duale Abbildung von φ gilt dann $\varphi^*\colon V' \to W'$.
- ☐ Zu jeder Basis eines endlich-dimensionalen Raums V existiert die duale Basis von V'.