

Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 2

Abgabe bis spätestens Mo. 18. Oktober 2021, 08:00 Uhr

Aufgabe 5

Für eine nichtleere Menge Ω und eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ ist die Komplementärmenge A^c (auch kurz das Komplement A^c), definiert als $A^c = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$. Für eine beliebige, nichtleere Indexmenge I und Teilmengen $A_i \subseteq \Omega$ für $i \in I$ ist die Vereinigung definiert als $\bigcup_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I : \omega \in A_i\}$.

Zeigen Sie die De Morgan'sche Formeln:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \left(\bigcap_{i \in I} A_i^c \right)^c \quad \text{und} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \left(\bigcup_{i \in I} A_i^c \right)^c.$$

Aufgabe 6

(A) Sei V die Menge aller Vögel. Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf V in Hinblick auf Symmetrie, Reflexivität und Transitivität:

- (a) $R_1 = \{(A, B) \mid A \text{ balzt vor } B\}$
- (b) $R_2 = \{(A, B) \mid A \text{ baut ein Nest mit } B\}$
- (c) $R_3 = \{(A, B) \mid A \text{ ist aus einem Ei geschlüpft, dass } B \text{ gelegt hat}\}$
- (d) $R_4 = \{(A, B) \mid \exists C \in V : (C, A) \in R_3 \wedge (C, B) \in R_3\}$

(B) Geben Sie für jede der drei Eigenschaften *reflexiv*, *symmetrisch*, *transitiv* eine Relation auf einer selbst gewählten Menge an, die diese Eigenschaft hat, die anderen beiden jedoch nicht.

Aufgabe 7

Prüfen Sie nach, ob die angegebenen Relationen auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation, eine partielle Ordnung oder eine vollständige Ordnung sind.

- (a) $R_1 = \{(x, y) \mid x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \geq y_2\}$
- (b) $R_2 = \{(x, y) \mid x_1 - y_2 = y_1 - x_2\}$
- (c) $R_3 = \{(x, y) \mid |x_1| + |x_2| \leq |y_1| + |y_2|\}$
- (d) $R_4 = \{(x, y) \mid x_1 + y_1 = x_2 + y_2\}$

Aufgabe 8

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Auf \mathbb{Z} definieren wir folgende Relation:

$$M_n := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : x = y + nz\}.$$

Zeigen Sie, dass es sich bei M_n um eine Äquivalenzrelation handelt und bestimmen Sie die Anzahl ihrer Äquivalenzklassen.