1. **Problem**
   Welche der folgenden Aussagen zu Normalformen einer aussagenlogischen Formeln $A$ ist richtig?

   (a) Jede konjunktive Normalform von $A$ ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen.
   (b) Jede Formel $A$ besitzt sowohl eine konjunktive wie eine disjunktive Normalform.
   (c) Jede Formel $A$ besitzt eine disjunktive, nicht jedoch eine konjunktive Normalform.
   (d) Jede disjunktive Normalform von $A$ ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Atomen.
   (e) Jede Formel $A$ besitzt eine konjunktive, nicht jedoch eine disjunktive Normalform.

   **Solution**
   Jede aussagenlogische Formel besitzt sowohl eine konjunktive wie eine disjunktive Normalform.

   (a) Falsch.
   (b) Wahr.
   (c) Falsch.
   (d) Falsch.
   (e) Falsch.

2. **Problem**
   Sei $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1\rangle$ eine Boolesche Algebra und sei $F = x_1 \cdot (x_2 + \sim (x_1))$ ein Boolescher Ausdruck. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

   (a) $F$ ist äquivalent zur Booleschen Funktion $f\colon B^2 \to B$ mit

| $s_1$ | $s_2$ | $f(s_1, s_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

   (b) $F$ ist kein algebraischer Ausdruck.

   (c) $F$ ist äquivalent zur Booleschen Funktion $f\colon B^2 \to B$ mit

| $s_1$ | $s_2$ | $f(s_1, s_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

   (d) $F$ ist äquivalent zur Booleschen Funktion $f\colon B^2 \to B$ mit

| $s_1$ | $s_2$ | $f(s_1, s_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

(e) $F$ ist äquivalent zur Booleschen Funktion $f\colon B^2 \to B$ mit

| $s_1$ | $s_2$ | $f(s_1, s_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

**Solution**
Der Boolesche Ausdruck $F = x_1 \cdot (x_2 + \sim(x_1))$ kann wie folgt vereinfacht werden

$$x_1 \cdot (x_2 + \sim(x_1)) = x_1 x_2 + x_1 \sim(x_1) = x_1 x_2$$

Es handelt sich also gerade um das logische Und und damit die entsprechende Boolesche Funktion die einzige richtige Antwort.

(a) Falsch.
(b) Falsch.
(c) Falsch.
(d) Falsch.
(e) Wahr.

3. **Problem**
Welche der folgenden Anordnungen der Chomsky-Hierarchie ist richtig? Zur Erinnerung:

$$\mathcal{L}_3 = \text{reguläre Sprachen}$$
$$\mathcal{L}_2 = \text{kontextfreie Sprachen}$$
$$\mathcal{L}_1 = \text{kontextsensitive Sprachen}$$

(a) $\mathcal{L}_3 \not\subseteq \mathcal{L}_1 \not\subseteq \mathcal{L}_2 \not\subseteq \mathcal{L} \not\subseteq \mathcal{L}_0$
(b) $\mathcal{L}_3 \supseteq \mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}$
(c) $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$
(d) $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$
(e) $\mathcal{L}_3 \not\supseteq \mathcal{L}_2 \not\supseteq \mathcal{L}_1 \not\supseteq \mathcal{L}_0 \not\supseteq \mathcal{L}$

**Solution**
Die Chomsky-Hierarchie ordnet die Ausdruckstärke von Klassen formaler Sprachen. Dabei sind die regulären Sprachen $\mathcal{L}_3$ am ausdruckschwächsten, gefolgt von den kontextfreie Sprachen $\mathcal{L}_2$ und den kontextsensitive Sprachen $\mathcal{L}_1$ und den rekursiv aufzählbaren Sprachen $\mathcal{L}_0$.

Also gilt jedenfalls $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$. Außerdem sind alle Beziehungen strikt.

(a) Falsch.
(b) Falsch.
(c) Wahr.
(d) Falsch.
(e) Falsch.

4. **Problem**
Welche der folgenden Aussagen zu Registermaschinen ist richtig?

(a) Sei $L$ eine Sprache, die von einer RM berechnet wird. Dann kann $L$ nur dann von einer TM berechnet werden, wenn $L$ regulär ist.

(b) Jede partielle Funktion $f$ von den natürlichen Zahlen in die natürlichen Zahlen, die berechenbar auf einer RM ist, kann auch von einer kontextfreien Grammatik berechnet werden.

(c) Für jede Sprache $L$, die von einer RM akzeptiert wird, existiert ein endlicher Automat, der $L$ akzeptiert.

(d) Jede totale Funktion $f$ von den natürlichen Zahlen in die natürlichen Zahlen, die in einer beliebigen Programmiersprache implementiert ist, kann auch auf einer RM berechnet werden.

(e) Es gibt Funktionen $f\colon N^k \to N$, wobei $N$ die natürlichen Zahlen bezeichnet, die auf einer TM berechenbar sind, die nicht auf einer RM berechenbar sind.

**Solution**
Die meisten bekannten Programmiersprachen sind Turing vollständig, das heißt sie können jede Funktion implementieren, die auch eine Turingmaschine implementieren kann. Umgekehrt ist jeder Algorithmus, der in einer beliebigen Programmiersprache implementiert ist, auch auf einer Turingmaschine programmierbar. Dies gilt insbesonders auch für Funktionen $f$ von den natürlichen Zahlen in die natürlichen Zahlen.

Da Turingmaschinen und Registermaschinen gleich mächtig sind, ist die einzig korrekte Aussage, dass jede totale Funktion $f$ von den natürlichen Zahlen in die natürlichen Zahlen, die in einer beliebigen Programmiersprache implementiert ist, kann auch auf einer RM berechnet werden.

(a) Falsch.

(b) Falsch.

(c) Falsch.

(d) Wahr.

(e) Falsch.

5. **Problem**
Betrachten Sie die folgende Inferenz im Hoare Kalkül, wobei eine Vorbedinung durch die $P$ abstrahiert wurde:

$$\frac{\{\qquad P \qquad\}\ x_1 := x_1 + 1\ \{x_1 + x_2 = b\}}{\{x_1 + x_2 = b - 1\}\ x_1 := x_1 + 1\ \{x_1 + x_2 = b\}}$$

Welche der folgenden Vorbedingungen kann korrekt für $P$ eingesetzt werden?

(a) $x_1 + x_2 - 1 = b$.

(b) $x_1 + x_2 = b + 1$.

(c) $x_1 - x_2 = b$.

(d) $x_1 + x_2 = b$.

(e) $x_1 + x_2 = b - 1$.

(f) $x_1 + 1 + x_2 = b$.

**Solution**
Das Program besteht aus einer einzelnen Zuweisung, also muss in der ersten Zeile das Axioms [z] ausgeführt werden und danach findet eine Abschwächung statt. Wir müssen also die Regeln des Axioms untersuchen und erkennen, dass für $P$ nur $(x_1 + 1) + x_2 = b$ eingesetzt werden kann.

(a) Falsch.

(b) Falsch.

(c) Falsch.
(d) Falsch.
(e) Falsch.
(f) Wahr.

6. **Problem**
Welche der folgenden Aussagen zur Komplexitätstheorie ist falsch?

(a) Jedes Problem in $\mathsf{P}$ kann durch einen Polynomzeit Verifikator gelöst werden.
(b) Es ist nicht bekannt, ob die Komplexitätsklasse $\mathsf{NP}$ unter Komplement abgeschlossen ist.
(c) Es gibt bereits einen Algorithmus der das SAT Problem in Zeit $n^2$ entscheidet.
(d) Die Klasse $\mathsf{NP}$ ist genau die Klasse der Probleme, die $\mathsf{N}$icht in $\mathsf{P}$olynomieller Zeit auf einer Turingmaschine gelöst werden können.
(e) Das Problem SAT is vollständig für die Klasse $\mathsf{NP}$.
(f) Der Begriff der Vollständigkeit einer Klasse ist abhängig von der Definition der verwendeten Reduktionen.

**Solution**
Es ist derzeit nicht bekannt, dass das Program die Erfüllbarkeit einer aussagenlogischen Formel festzustellen in Zeit $n^2$ entscheidbar ist. Das ist möglich, aber unwahrscheinlich. Im Besonderen würde das die unwahrscheinliche Gleichung $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ implizieren. Dh. die einzig falsche Aussage ist, dass es einen Algorithmus gibt, der das SAT Problem in Zeit $n^2$ entscheidet.

(a) Falsch.
(b) Falsch.
(c) Falsch.
(d) Falsch.
(e) Wahr.
(f) Falsch.