Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 6

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
(z.B. bis So. 15. November 2020, 23:59 Uhr)

Aufgabe 21

Sei M eine nichtleere Menge. Für $X, Y \subseteq M$ definieren wir $X\Delta Y$ wie in Aufgabe 4, sowie $X \circ Y := M \setminus (X\Delta Y)$.

(a) Sind $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ und/oder $(\mathcal{P}(M), \circ)$ Gruppen?
(b) Sind $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$ und/oder $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cup)$ Ringe?

Lösung: a) Für $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ haben wir in Aufgabe 4a) bereits die Assoziativität und in 4b) die Kommutativität bewiesen.
Wir zeigen als nächstes die Existenz eines neutralen Elements, nämlich $e = \emptyset$. Für $X \subseteq M$ beliebig gilt

$$X\Delta\emptyset = (X \cup \emptyset) \setminus (X \cap \emptyset) = X \setminus \emptyset = X. \quad \checkmark$$

(Wegen der Kommutativität, müssen wir $\emptyset\Delta X$ nicht extra überprüfen.)
Zum Schluss zeigen wir, dass für jede Menge $X \subseteq M$ eine inverses Element existiert, nämlich $X^{-1} = X$:

$$X\Delta X = (X \cup X) \setminus (X \cap X) = X \setminus X = \emptyset = e. \quad \checkmark.$$

Damit ist gezeigt, dass $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ eine Abelsche Gruppe ist.
Wir überprüfen als nächstes die Assoziativität von $\circ$:

$m \in$	X	Y	Z	$X\Delta Y$	$X \circ Y$	$(X \circ Y)\Delta Z$	$(X \circ Y) \circ Z$
	w	w	w	f	w	f	w
	w	w	f	f	w	w	f
	w	f	w	w	f	w	f
	w	f	f	w	f	f	w
	f	w	w	w	f	w	f
	f	w	f	w	f	f	w
	f	f	w	f	w	f	w
	f	f	f	f	w	w	f

$m \in$	X	Y	Z	$Y\Delta Z$	$Y \circ Z$	$X\Delta(Y \circ Z)$	$X \circ (Y \circ Z)$
	w	w	w	f	w	f	w
	w	w	f	w	f	w	f
	w	f	w	w	f	w	f
	w	f	f	f	w	f	w
	f	w	w	f	w	w	f
	f	w	f	w	f	f	w
	f	f	w	w	f	f	w
	f	f	f	f	w	w	f

Aus der Gleichheit der jeweils letzten Spalte folgt die Assoziativität von $\circ$.
Die Kommutativität von $\circ$ folgt aus der Kommutativität von Δ:

$$X \circ Y = M \setminus (X \Delta Y) = M \setminus (Y \Delta X) = Y \circ X. \quad \checkmark$$

Die ganze Menge M ist das neutrale Element bezüglich $\circ$

$$M \circ X = M \setminus (M \Delta X) = M \setminus [(X \cup M) \setminus (X \cap M)] = M \setminus [M \setminus X] = X. \quad \checkmark$$

Jedes $X \subseteq M$ ist wieder zu sich selbst invers bezüglich $\circ$,

$$X \circ X = M \setminus [X \Delta X] = M \setminus [(X \cup X) \setminus (X \cap X)] = M \setminus [X \setminus X] = M \setminus \emptyset = M. \quad \checkmark$$

Damit ist gezeigt, dass auch $(\mathcal{P}(M), \circ)$ eine Abelsche Gruppe ist.

b)

$m \in$	X	Y	Z	$X \cap Y$	$(X \cap Y) \cap Z$	$Y \cap Z$	$X \cap (Y \cap Z)$
	w	w	w	w	w	w	w
	w	w	f	w	f	f	f
	w	f	w	f	f	f	f
	w	f	f	f	f	f	f
	f	w	w	f	f	w	f
	f	w	f	f	f	f	f
	f	f	w	f	f	f	f
	f	f	f	f	f	f	f

Aus der Gleichheit der 5. und 7. Spalte folgt die Assoziativität von $\cap$.
Es gilt, dass $e = M \neq \emptyset$ neutrales Element bezüglich $\cap$ ist, da $X \cap M = X = M \cap X$ für alle $X \subseteq M$.
Zu guter Letzt überprüfen wir die Distributivgesetze. Da $X \cap Y = Y \cap X$ gilt, reicht es eines zu überprüfen.

$m \in$	X	Y	Z	$Y \Delta Z$	$X \cap (Y \Delta Z)$	$X \cap Y$	$X \cap Z$	$(X \cap Y) \Delta (X \cap Z)$
	w	w	w	f	f	w	w	f
	w	w	f	w	w	w	f	w
	w	f	w	w	w	f	w	w
	w	f	f	f	f	f	f	f
	f	w	w	f	f	f	f	f
	f	w	f	w	f	f	f	f
	f	f	w	w	f	f	f	f
	f	f	f	f	f	f	f	f

Aus der Gleichheit der 5. und der 8. Spalte folgt damit, dass $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$ ein (kommutativer) Ring ist.
Wir zeigen, dass $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cup)$ kein Ring ist, weil kein Element $E \neq \emptyset$ existiert, sodass $E \cup X = X$ für alle X. Angenommen, es existiert $E \subseteq M$, sodass $E \cup X = X$ für alle $X \subseteq M$. Insbesondere muss dann gelten für $X = \emptyset$, dass

$$E = E \cup \emptyset = E \cup X = X = \emptyset.$$

Da die neutralen Elemente der beiden Operationen verschieden sein müssen, ist $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cup)$ kein Ring. $\square$

Häufige Probleme bei Aufgabe 21:

- Das neutrale Element muss für alle Elemente der Gruppe stets das gleiche sein, es darf nicht vom jeweiligen Element abhängen.
- Inverse Elemente müssen beidseitig invers sein, das muss man auch zeigen.

Aufgabe 22

Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c \in R$ gilt:

(a) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.
(b) $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$.
(c) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Gilt für $a \neq 0$ auch immer $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$?

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot a - 0 \cdot a = (0+0) \cdot a - 0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a - 0 \cdot a = 0 \cdot a \quad \checkmark \\ 0 &= a \cdot 0 - a \cdot 0 = a \cdot (0+0) - a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0 = a \cdot 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} -(a \cdot b) = 0 - (a \cdot b) \overset{(a)}{=} a \cdot 0 - (a \cdot b) &= a \cdot (-b + b) - (a \cdot b) \\ &= a \cdot (-b) + a \cdot b - (a \cdot b) = a \cdot (-b) \quad \checkmark \\ -(a \cdot b) = 0 - (a \cdot b) \overset{(a)}{=} 0 \cdot b - (a \cdot b) &= (-a + a) \cdot b - (a \cdot b) \\ &= (-a) \cdot b + a \cdot b - (a \cdot b) = (-a) \cdot b \quad \checkmark \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch wieder zeigen, dass $(-a) \cdot b$ und $a \cdot (-b)$ beide additiv invers zu $a \cdot b$ sind, indem man sie einfach addiert und zeigt dass 0 herauskommt.

(c)

$$a \cdot b \overset{17b)}{=} -[-(a \cdot b)] \overset{(b)}{=} -[a \cdot (-b)] \overset{(b)}{=} (-a) \cdot (-b) \quad \checkmark$$

Die zweite Aussage stimmt nicht. Dazu wählen wir $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_6$. Dann gilt für $2 \neq 0$, dass $2 \cdot 3 = 0 = 2 \cdot 0$ aber $3 \neq 0$. $\square$

Häufige Probleme bei Aufgabe 22:

- Alle Aussagen müssen ausschließlich aus den Ringaxiomen hergeleitet werden!
- Inverse Elemente bezüglich der Mulitplikation existieren in einem Ring im Allgemeinen nicht. Man darf also nicht einfach mit a^{-1} multiplizieren.
- Die Ringmultiplikation muss nicht kommutativ sein.

Aufgabe 23

Zeigen Sie Assoziativ- und Distributivgesetze für die Matrixrechnung (d.h. die Aussagen von Satz 2.3.5. (*ii*) und (*iii*)).

Lösung: Zu zeigen ist, dass $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ für $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(R)$, $B \in \mathrm{Mat}_{n,p}(R)$ und $C \in \mathrm{Mat}_{p,q}(R)$.
Es gilt

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \Leftrightarrow \quad [(A \cdot B) \cdot C]_{ij} = [A \cdot (B \cdot C)]_{ij} \quad \begin{array}{l} \forall i = 1 \ldots m, \\ \forall j = 1 \ldots q. \end{array}$$

Für $i \in \{1 \dots m\}$ und $j \in \{1 \dots q\}$ beliebig gilt

$$\begin{aligned}
[(A \cdot B) \cdot C]_{ij} &\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{p} (A \cdot B)_{ik} C_{kj} \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{n} A_{in} B_{nk} \right) C_{kj} \\
&\overset{\text{R Ring}}{=} \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n} A_{in} B_{nk} C_{kj} \overset{\text{R Ring}}{=} \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} A_{in} B_{nk} C_{kj} \\
&\overset{\text{R Ring}}{=} \sum_{\ell=1}^{n} A_{in} \left(\sum_{k=1}^{p} B_{nk} C_{kj} \right) \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{\ell=1}^{n} A_{in} (B \cdot C)_{nj} \overset{\text{Def.}}{=} [A \cdot (B \cdot C)]_{ij}. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Zu zeigen ist, dass $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ für $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(R)$ und $B, C \in \mathrm{Mat}_{n,p}(R)$. Wir verwenden wieder, dass zwei Matrizen gleich sind, wenn alle ihre Einträge gleich sind. Für $i \in \{1 \dots m\}$ und $j \in \{1 \dots p\}$ beliebig gilt

$$\begin{aligned}
[A \cdot (B + C)]_{ij} &\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (B + C)_{kj} \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (B_{kj} + C_{kj}) \\
&\overset{\text{R Ring}}{=} \sum_{k=1}^{n} (A_{ik} B_{kj} + A_{ik} C_{kj}) \overset{\text{R Ring}}{=} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik} C_{kj} \\
&\overset{\text{Def.}}{=} (A \cdot B)_{ij} + (A \cdot C)_{ij} \overset{\text{Def.}}{=} (A \cdot B + A \cdot C)_{ij}. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Schlussendlich ist zu zeigen, dass $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ für $B, C \in \mathrm{Mat}_{m,n}(R)$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,p}(R)$. Für $i \in \{1 \dots m\}$ und $j \in \{1 \dots p\}$ beliebig gilt

$$\begin{aligned}
[(B + C) \cdot A]_{ij} &\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{n} (B + C)_{ik} A_{kj} \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{n} (B_{ik} + C_{ik}) A_{kj} \\
&\overset{\text{R Ring}}{=} \sum_{k=1}^{n} (B_{ik} A_{kj} + C_{ik} A_{kj}) \overset{\text{R Ring}}{=} \sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{kj} + \sum_{k=1}^{n} C_{ik} A_{kj} \\
&\overset{\text{Def.}}{=} (B \cdot A)_{ij} + (C \cdot A)_{ij} \overset{\text{Def.}}{=} (B \cdot A + C \cdot A)_{ij}. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

$\square$

Häufige Probleme bei Aufgabe 23:

- Es reicht nicht, den Beweis nur für 2×2-Matrizen zu führen.
- Machen Sie sich stets klar welche Eigenschaften Sie verwenden und warum Sie das dürfen.

Aufgabe 24

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
2x_1 & & & + & 3x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\
 & & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 2
\end{array}$$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{2\cdot 1Z+2Z}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{2\cdot 2Z+3Z}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \overset{\cdot 3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{1Z+3Z}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Aus der dritten Zeile bekommen wir $x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 2$, was durch Addition von $2x_4 + x_5$ auf beiden Seiten zu $x_3 = 2 + 2x_4 + x_5$ führt.
Analog liefert die zweite Zeile $x_2 + x_4 + 3x_5 = 3$, was durch Addition von $4x_4 + 2x_5$ zu $x_2 = 3 + 4x_4 + 2x_5$ führt, und die erste Zeile $x_1 + x_4 + 4x_5 = 2$, was durch Addition von $4x_4 + x_5$ zu $x_1 = 2 + 4x_4 + x_5$. Wir bekommen also

$$\begin{aligned} L &= \{(2 + 4x_4 + x_5, 3 + 4x_4 + 2x_5, 2 + 2x_4 + x_5, x_4, x_5) \mid x_4, x_5 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\} \\ &= \{(2 + 4a + b, 3 + 4a + 2b, 2 + 2a + b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

□

Häufige Probleme bei Aufgabe 24:

- Notationen wie $\frac{1}{2}$ im Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sollten Sie besser vermeiden, benutzen Sie notfalls lieber 2^{-1}. Schöner (und meistens sogar eher einfacher) wäre es, Sie würden nur die Bezeichnungen $0, 1, 2, 3, 4$ in den Rechnungen verwenden.