Aufgaben zur Linearen Algebra - Blatt 4

elektronische Abgabe im OLAT Kurs des Proseminars
Achtung: da Montag 2.11. ein Feiertag ist, sind Sonderregelungen möglich

Aufgabe 13
Bestimmen Sie die reelle Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -3x_1 & - & 6x_2 & - & 8x_3 & - & 9x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 0. \end{array}$$

Lösung. Wir stellen die Koeffizientenmatrix A des homogenen Gleichungssystems auf und bringen sie mit elementaren Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -6 & -8 & -9 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -5 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7/2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich x_4 als einzige freie Variable, für die wir den allgemeinen Wert $d \in \mathbb{R}$ einsetzen. Die dritte Gleichung lautet dann $-7/2x_3 - 5d = 0$, woraus sich

$$x_3 = -10d/7$$

ergibt. Die zweite Gleichung lautet dann $-6x_2 - 5(-10d/7) - 6d = 0$, woraus sich

$$x_2 = 4d/21$$

ergibt. Die erste Gleichung lautet dann $x_1 - 10d/7 + d = 0$, woraus sich

$$x_1 = 3d/7$$

ergibt. Damit erhalten wir die Lösungsmenge

$$L(A, 0) = \{(3d/7, 4d/21, -10d/7, d) \mid d \in \mathbb{R}\}.$$

Wenn man zum Beispiel d durch $21d$ ersetzt (das durchläuft immer noch komplett die reellen Zahlen) ergibt sich noch eine etwas schönere Darstellung:

$$L(A, 0) = \{(9d, 4d, -30d, 21d) \mid d \in \mathbb{R}\}.$$ □

Häufige Probleme bei Aufgabe 13:

- Eine Lösung des Gleichungssystems ist ein 4-Tupel von reellen Zahlen. Die Lösungsmenge ist also eine Menge von solchen 4-Tupeln, d.h. eine Teilmenge von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 14
Bestimmen Sie die reelle Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems, einmal für $a = (1, 0, 1)$ und einmal für $a = (0, 2, 2)$.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a_1 \\ -3x_1 & - & 6x_2 & - & 8x_3 & = & a_2 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & a_3. \end{array}$$

Lösung. Wir stellen die erweiterte Koeffizientenmatrix (A, a) des Gleichungssystems auf und bringen sie mit elementaren Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_1 \\ -3 & -6 & -8 & a_2 \\ 4 & 1 & -1 & a_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_1 \\ 0 & -3 & -5 & a_2 + 3a_1 \\ 0 & -3 & -5 & a_3 - 4a_1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & a_1 \\ 0 & -3 & -5 & a_2 + 3a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -7a_1 - a_2 + a_3 \end{array}\right).$$

Für $a = (1, 0, 1)$ ergibt sich $-7a_1 - a_2 + a_3 = -7 + 1 = -6 \neq 0$, also besitzt das Gleichungssystem keine Lösung. Für $a = (0, 2, 2)$ ergibt sich $-7a_1 - a_2 + a_3 = -2 + 2 = 0$, also besitzt das Gleichungssystem eine Lösung. Es ergibt sich die freie Variable x_3, für die wir $d \in \mathbb{R}$ einsetzen. Die zweite Gleichung lautet dann $-3x_2 - 5d = a_2 + 3a_1 = 2$ und damit ergibt sich

$$x_2 = -2/3 - 5d/3.$$

Die erste Gleichung lautet dann $x_1 - 2/3 - 5d/3 + d = a_1 = 0$ und daraus ergibt sich $x_1 = 2/2 + 2d/3$. Damit erhalten wir die folgende Lösungsmenge

$$L(A, a) = \{(2/3 + 2d/3, -2/3 - 5d/3, d) \mid d \in \mathbb{R}\}.$$

Auch hier könnte man zur Verschönerung statt d auch $3d$ einsetzen und erhielte

$$L(A, a) = \{(2/3 + 2d, -2/3 - 5d, 3d) \mid d \in \mathbb{R}\}.$$ □

Aufgabe 15

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt das folgende Gleichungssystem eine reelle Lösung? Wieviele Lösungen gibt es dann jeweils?

$$\begin{array}{rcrcrcr} -9x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ 5x_1 & - & 5x_2 & + & \lambda x_3 & = & 0. \end{array}$$

Lösung. Wir stellen die erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems auf und bringen sie mit elementaren Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \\ 5 & -5 & \lambda & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 35/9 & 46/9 & -2/3 \\ 0 & -35/9 & 35/9 + \lambda & 5/3 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 35/9 & 46/9 & -2/3 \\ 0 & 0 & 9 + \lambda & -1 \end{array}\right).$$

Es gibt also genau dann eine Lösung, wenn $9 + \lambda \neq 0$ gilt, also für $\lambda \neq -9$. Da es dann keine freien Variablen gibt, existiert dann stets genau eine Lösung. □

Häufige Probleme bei Aufgabe 15:

- Das λ ist hier ein Parameter, der stellvertretend für eine reelle Zahl steht. Diese Zahl ist ein Koeffizient des Gleichungssystems. Abhängig von der expliziten Wahl gibt es dann Lösungen oder nicht. Obwohl das System für unendliche viele Wahlen von λ lösbar ist, hat es dann jeweils trotzdem nur eine Lösung! Das λ ist also nicht mit einer freien Variablen zu verwechseln.

Aufgabe 16

Finden Sie ein reelles Polynom vom Grad höchstens 4, also einen Ausdruck der Gestalt

$$p = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4$$

mit $c_0, \dots, c_4 \in \mathbb{R}$, für das gilt:

$$p(-2) = -7,\ p(-1) = 2,\ p(0) = 1,\ p(1) = 2,\ p(2) = -7.$$

Lösung. Wir suchen nach Koeffizienten $c_0, \dots, c_4$ eines geeigneten Polynoms p. Die erste Bedingung $p(-2) = 7$ bedeutet dabei gerade

$$c_0 - 2c_1 + 4c_2 - 8c_3 + 16c_4 = -7.$$

Die anderen Bedingungen führen entsprechend zu

$$\begin{aligned} c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 &= 2 \\ c_0 &= 1 \\ c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 2 \\ c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 + 16c_4 &= -7. \end{aligned}$$

Es handelt sich hier um ein lineares Gleichungssystem, dessen erweiterte Koeffizientenmatrix wir wieder auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -7 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & -7 \end{array}\right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 16 & -8 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 18 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 14 & -10 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 12 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & -12 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 12 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & -24 \end{array}\right). \end{aligned}$$

Wir sehen hier schon, dass genau eine Lösung existiert. Diese können wir auch wie üblich bestimmen, wir erhalten $c_4 = -1, c_3 = 0, c_2 = 2, c_1 = 0, c_0 = 1$. Das gesuchte Polynom lautet also

$$p = 1 + 2t^2 - t^4. \qquad \square$$