R University

Statistics Exam 2021-06-22 **Exam ID 00001**

Name: ______________________________

Student ID: ______________________________

Signature: ______________________________

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	
1.	X		X				X			[X]
2.	X	X	X	X	X	X		X	X	[X]
3.		X								
4.		X		X						
5.		X	X		X					
6.	X									[X]
7.			X						X	[X]
8.		X			X		X	X	X	[ ]
9.			X	X	X	X		X	X	[ ]

10.	(a)		(b)		(c)	X	(d)	X	(e)	X	(f)	X	(g)	

Statistics Exam: 00001

1. **Problem**
   Welche der folgenden Aussagen sind richtig?
   a) Die Formel $(\mathtt{s} \to \mathtt{k}) \to (\mathtt{n} \vee \neg\mathtt{s} \vee \mathtt{k})$ ist eine Tautologie.
   b) Die Formel $(\mathtt{s} \wedge \neg\mathtt{k}) \to \mathtt{True}$ ist erfüllbar aber keine Tautologie.
   c) Die Formel $(\neg\mathtt{k} \vee \neg\mathtt{s}) \vee (\mathtt{k} \wedge \mathtt{s})$ ist eine Tautologie.
   d) Die Formel $(\neg\mathtt{y} \wedge (\mathtt{h} \to \mathtt{y})) \to \neg\mathtt{h}$ ist unerfüllbar.
   e) Die Formel $(\mathtt{s} \to \neg\mathtt{s}) \wedge (\neg\mathtt{s} \to \mathtt{s})$ ist erfüllbar aber keine Tautologie.
   f) Die Formel $\neg\mathtt{False} \wedge \neg((\neg\mathtt{k} \wedge \neg\mathtt{s}) \vee \neg\mathtt{n})$ ist unerfüllbar.
   g) Die Formel $\mathtt{s} \wedge \mathtt{k} \wedge ((\mathtt{True} \vee \mathtt{s}) \wedge \mathtt{False}) \wedge \mathtt{n}$ ist unerfüllbar.
   h) Die Formel $((\mathtt{s} \to \mathtt{k}) \wedge (\mathtt{s} \to \mathtt{n})) \to (\mathtt{s} \to (\mathtt{n} \wedge \mathtt{k}))$ ist unerfüllbar.
   i) Die Formel $(\mathtt{s} \wedge \neg\mathtt{k}) \vee (\neg\mathtt{s} \wedge \neg\mathtt{k}) \vee (\mathtt{k} \wedge \neg\mathtt{s}) \vee (\mathtt{s} \wedge \mathtt{k})$ ist erfüllbar aber keine Tautologie.
   j) Die Formel $((\mathtt{k} \to \mathtt{h}) \wedge (\mathtt{s} \to (\mathtt{n} \wedge \mathtt{k}))) \to ((\mathtt{n} \to \neg\mathtt{y}) \to (\mathtt{s} \to \mathtt{y}))$ ist erfüllbar aber keine Tautologie.

   Solution

   a) Wahr.
   b) Falsch. Die Formel ist *eine Tautologie*.
   c) Wahr.
   d) Falsch. Die Formel ist *eine Tautologie*.
   e) Falsch. Die Formel ist *unerfüllbar*.
   f) Falsch. Die Formel ist *erfüllbar aber keine Tautologie*.
   g) Wahr.
   h) Falsch. Die Formel ist *eine Tautologie*.
   i) Falsch. Die Formel ist *eine Tautologie*.
   j) Wahr.

2. **Problem**
   Betrachten Sie die folgende Belegung v der Atome p, q und r. Welche der folgenden Formeln evaluieren unter dieser Belegung zu T?

$$\mathrm{v}(a) = \begin{cases} \mathrm{T} & a = p \\ \mathrm{F} & a = q \\ \mathrm{T} & a = r \end{cases}$$

   a) $(\neg q \vee p) \wedge r$
   b) $p \to (q \to p)$
   c) $(q \wedge p) \vee (p \vee (q \wedge r))$
   d) $(r \wedge p) \to (p \vee r)$
   e) $r \to (q \wedge p \to q)$
   f) $\neg p \to (p \wedge q)$
   g) $r \wedge p \to q \wedge r$
   h) $r \vee p \vee q \vee (p \to r)$
   i) $q \vee (p \wedge r) \vee \neg q$
   j) $(r \vee p) \wedge \neg(p \to q)$

   Solution

   a) Wahr

b) Wahr
c) Wahr
d) Wahr
e) Wahr
f) Wahr
g) Falsch
h) Wahr
i) Wahr
j) Wahr

3. **Problem**
Sei $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra und sei $F = \sim(x_1) + (x_1 \cdot \sim(x_2))$ ein Boolscher Ausdruck. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f : B^2 \to B$ definiert als:

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

b) F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f : B^2 \to B$ definiert als:

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

c) F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f : B^2 \to B$ definiert als:

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

d) F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f : B^2 \to B$ definiert als:

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

e) Keine der Aussagen ist stimmig.

Solution

a) Falsch
b) Wahr
c) Falsch
d) Falsch
e) Falsch

4. **Problem**
Welche der folgenden Aussagen sind immer richtig, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1\rangle$ eine Boolesche Algebra ist?

a) Für alle $a \in B$ gilt $a + \sim(a) = 0$.

b) $\langle B; \cdot, 1\rangle$ ist ein kommutativer Monoid.
c) $\langle B; \cdot, 1\rangle$ ist ein Ring.
d) Für alle $a \in B$ gilt $a + \sim(a) = 1$.
e) Für alle $a, b \in B$ gilt $a + b = a + \sim(b)a$.

Solution

a) Falsch.
b) Wahr. Dies ist eines der Grundgesetze der Boolschen Algebra.
c) Falsch.
d) Wahr. Dies ist eines der Grundgesetze der Boolschen Algebra.
e) Falsch.

5. **Problem**
Sei E die Menge mit den folgenden drei Gleichungen:
$\sim(x) \cdot x = 0 \qquad x \cdot x = x \qquad x \cdot y = y \cdot x \qquad (E)$
Markieren Sie die korrekten Aussagen.

a) $E \models x \cdot 0 = 0$
b) $E \models x \cdot \sim(x) = 0$
c) Sei $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}; \cdot^{\mathcal{C}}, \sim^{\mathcal{C}}, 0^{\mathcal{C}}\rangle$ eine Algebra mit

$\cdot^{\mathcal{C}}$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\sim^{\mathcal{C}}$	
0	1
1	0

$0^{\mathcal{C}}$	
	0

Es gilt $\mathcal{C} \models x \cdot 0 = 0$.

d) Sei $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}; \cdot^{\mathcal{C}}, \sim^{\mathcal{C}}, 0^{\mathcal{C}}\rangle$ eine Algebra mit

$\cdot^{\mathcal{C}}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\sim^{\mathcal{C}}$	
0	1
1	0

$0^{\mathcal{C}}$	
	0

Es gilt $\mathcal{C} \models x \cdot 0 = 0$.

e) Sei $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}; \cdot^{\mathcal{C}}, \sim^{\mathcal{C}}, 0^{\mathcal{C}}\rangle$ eine Algebra mit

$\cdot^{\mathcal{C}}$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\sim^{\mathcal{C}}$	
0	1
1	0

$0^{\mathcal{C}}$	
	0

Es gilt $\mathcal{C} \models E$.

f) Sei $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}; \cdot^{\mathcal{C}}, \sim^{\mathcal{C}}, 0^{\mathcal{C}}\rangle$ eine Algebra mit

$\cdot^{\mathcal{C}}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\sim^{\mathcal{C}}$	
0	1
1	0

$0^{\mathcal{C}}$	
	0

Es gilt $\mathcal{C} \models E$.

Solution

a) Falsch
b) Wahr
c) Wahr

d) Falsch
e) Wahr
f) Falsch

6. **Problem**
Betrachten Sie die formalen Sprachen $L = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$, $M = \{1, 11, 101, 111\}$ und $N = \{0, 1\}^*$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?
a) $L \cup M = \{\epsilon, 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$
b) $L \cup (M \cap N) = \{\epsilon, 0, 1, 10, 100, 101, 110, 111\}$
c) $(L \cup M) \cap N = \varnothing$
d) $L \cap N = \{\epsilon, 0, 1, 11, 100, 110\}$
e) $L \cup M = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$
f) $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$
g) $(L \cap M) \cup N = \{\epsilon, 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$
h) Keine der Antworten
i) $(L \cup M) \cap N = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$
j) $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$

Solution

a) Wahr.
b) Falsch.
c) Falsch.
d) Falsch.
e) Falsch.
f) Falsch.
g) Falsch.
h) Falsch.
i) Falsch.
j) Wahr.

7. **Problem**
Welche der folgenden Aussagen bezüglich der Chomsky-Hierarchie sind wahr?
Beachten Sie:
- $\mathcal{L}_3$ ist die Menge der regulären Sprachen.
- $\mathcal{L}_2$ ist die Menge der kontextfreien Sprachen.
- $\mathcal{L}_1$ ist die Menge der kontextsensitiven Sprachen.
- $\mathcal{L}_0$ ist die Menge der rekursiv aufzählbaren Sprachen.
- $\mathcal{L}$ ist die Menge der formalen Sprachen.

(Mit $\subset$ bezeichnen wir die echte Mengeninklusion.)
a) $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_0$
b) Eine kontextfreie Sprache ist auch regulär
c) Alle beschränkten Sprachen sind auch rekursiv aufzählbar
d) Die Chomsky-Hierarchie ist eine Hierarchie weder über formale Sprachen noch Grammatiken
e) $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L}_3$
f) $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$
g) $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_3$
h) Eine reguläre Sprache ist auch kontextsensitiv

i) Die Chomsky-Hierarchie ist eine Hierarchie über Grammatiken
j) Alle regulären Sprachen sind auch kontextfrei

Solution

a) Falsch
b) Falsch
c) Wahr
d) Falsch
e) Falsch
f) Falsch
g) Falsch
h) Wahr
i) Falsch
j) Wahr

8. **Problem**
Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{P, F, C\}, \{\pi, \mathrm{e}, +, -, *, /, 0, 1, 2, ..., 9\}, R, P)$ mit den Regeln:

$$P \rightarrow C \mid F \mid (P + P) \mid (P - P) \mid (P * P) \mid (P/P)$$
$$F \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid ... \mid 9 \mid FF$$
$$C \rightarrow \pi \mid \mathrm{e}$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen bezüglich den Lücken (Einträge mit einer Box $\boxed{\cdot}$) in der Tabelle des rekursiven Inferenz Verfahrens, sodass $((\pi/13) + (4 * \mathrm{e})) \in L(P)$.

Ableitung	Schritt	Variable	Regel	Rekursion
π	1	C	$C \rightarrow \boxed{a}$	
4	2	F	$F \rightarrow 4$	
1	3	F	$F \rightarrow 1$	
3	4	F	$F \rightarrow 3$	
13	5	F	$F \rightarrow FF$	3, 4
e	6	$\boxed{e}$	$C \rightarrow \mathrm{e}$	
$\boxed{b}$	7	P	$P \rightarrow C$	1
4	8	P	$\boxed{f}$	2
13	9	P	$P \rightarrow F$	5
e	10	P	$\boxed{c} \rightarrow C$	6
$(4 * \mathrm{e})$	11	P	$P \rightarrow (P * P)$	8, 10
$(\pi/13)$	12	P	$P \rightarrow (P/P)$	$\boxed{d}$
$((\pi/13) + (4 * \mathrm{e}))$	13	P	$P \rightarrow (P + P)$	12, 11

a) 4 gehört in Lücke $\boxed{\text{a}}$
b) π gehört in Lücke $\boxed{\text{b}}$
c) C gehört in Lücke $\boxed{\text{a}}$
d) P gehört in Lücke $\boxed{\text{f}}$
e) $P \rightarrow F$ gehört in Lücke $\boxed{\text{f}}$
f) $P \rightarrow C$ gehört in Lücke $\boxed{\text{f}}$
g) C gehört in Lücke $\boxed{\text{e}}$

h) $7,9$ gehört in Lücke $\boxed{\text{d}}$

i) π gehört in Lücke $\boxed{\text{a}}$

j) F gehört in Lücke $\boxed{\text{c}}$

Solution

Ableitung	Schritt	Variable	Regel	Rekursion
π	1	C	$C \to \pi$	
4	2	F	$F \to 4$	
1	3	F	$F \to 1$	
3	4	F	$F \to 3$	
13	5	F	$F \to FF$	$3, 4$
e	6	C	$C \to \mathrm{e}$	
π	7	P	$P \to C$	1
4	8	P	$P \to F$	2
13	9	P	$P \to F$	5
e	10	P	$P \to C$	6
$(4 * \mathrm{e})$	11	P	$P \to (P * P)$	$8, 10$
$(\pi/13)$	12	P	$P \to (P/P)$	$7, 9$
$((\pi/13) + (4 * \mathrm{e}))$	13	P	$P \to (P + P)$	$12, 11$

a) Falsch
b) Wahr
c) Falsch
d) Falsch
e) Wahr
f) Falsch
g) Wahr
h) Wahr
i) Wahr
j) Falsch

9. **Problem**
Betrachten Sie folgende Registermaschine $R = ((x_i)_{1 \leq i \leq 4}, P)$ mit dem Programm P, mit Startwert in Register x_1 und Ergebnis in x_3 nach der Berechnung. (NB. Wir verwenden eine Abkürzung für

direkte Zuweisungen von Werten in ein Register, wie in der Vorlesung besprochen.)

$$
\begin{array}{l}
x_3 := 0; \\
x_2 := x_1; \\
x_4 := x_2; \\
\text{while } (x_1 \neq 0) \text{ do} \\
\quad x_1 := x_1 - 1; \\
\quad \text{while } (x_2 \neq 0) \text{ do} \\
\quad\quad x_2 := x_2 - 1; \\
\quad\quad x_3 := x_3 + 1; \\
\quad \text{end;} \\
\quad x_2 := x_4; \\
\text{end;} \\
\text{while } (x_2 \neq 0) \text{ do} \\
\quad x_3 := x_3 + 1; \\
\quad x_2 := x_2 - 1; \\
\text{end;} \\
x_2 := x_4; \\
\text{while } (x_2 \neq 0) \text{ do} \\
\quad x_3 := x_3 + 1; \\
\quad x_2 := x_2 - 1; \\
\text{end;} \\
x_3 := x_3 + 1; \\
x_3 := x_3 + 1; \\
x_3 := x_3 + 1;
\end{array}
$$

Die Antwortmöglichkeiten bestehen aus verschiedenen Spezifikationen/Aussagen, welche die Registermaschine R beschreiben sollen. Welche der folgenden Aussagen über die Registermaschine R sind korrekt?

a) Die Registermaschine R multipliziert die Werte aus Register x_1 und x_2 und speichert das Ergebnis in Register x_3.
b) Das Register x_3 hat nach dem Ende der Berechnung der Registermaschine den Wert 0.
c) Das Register x_4 hat nach dem Ende der Berechnung der Registermaschine den Startwert n der zuvor in Register x_1 war.
d) Die Registermaschine benutzt genau 4 Register.
e) In der Berechnung der Registermaschine kommt eine Multiplikation vor.
f) Die Registermaschine R berechnet für den Wert n aus Register x_1 das Ergebnis des Polynoms $n^2 + n + n + 2 + 1$.
g) Die Registermaschine R berechnet für den Wert n aus Register x_1 das Ergebnis des Polynoms $n^2 + 2n$.
h) Das Register x_3 hat nach dem Ende der Berechnung der Registermaschine einen Wert größer als 0.
i) Die Registermaschine R berechnet für den Wert n aus Register x_1 das Ergebnis des Polynoms $n^2 + 2n + 3$.
j) Die Registermaschine benutzt genau 3 Register.

Solution

a) Falsch
b) Falsch
c) Wahr
d) Wahr

e) Wahr
f) Wahr
g) Falsch
h) Wahr
i) Wahr
j) Falsch

10. **Problem**

Betrachten Sie die Turingmaschine $M = (\{s, p, t, r\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ

	$\vdash$	0	1	$\sqcup$
s	$(s, \vdash, R)$	$(s, 0, R)$	$(p, 1, L)$	$(r, \sqcup, R)$
p	$(t, \vdash, R)$	$(p, 1, L)$	$(p, 1, L)$	$(r, \sqcup, R)$

Wir nehmen an, dass die Turingmaschine immer auf dem Startsymbol $\vdash$ startet und nur Eingaben der Form $\vdash x\sqcup^\infty$ mit $x \in \{0, 1, \sqcup\}^*$ bekommt. Die Länge des Inputs bezeichnet die Länge von x, im Folgenden also $n = |x|$.

Markieren Sie korrekte Aussagen.

a) Für den Input $\vdash \sqcup\sqcup 01$ hält M auf der Ausgabe $\vdash 1111$.
b) Es existiert ein Input der Länge n, so dass die Turingmaschine M mindestens $2n^2 + 5$ Schritte ausführt.
c) Der Input $\vdash 0010$ wird akzeptiert.
d) Der Input $\vdash 001$ wird von M akzeptiert.
e) Die Turingmaschine führt für jeden Input der Länge n maximal $6n + 5$ Schritte aus.
f) Für den Input $\vdash 001 \sqcup 10$ hält M auf der Ausgabe $\vdash 111 \sqcup 10$.
g) Der Input $\vdash 0 \sqcup 1$ wird von M akzeptiert.

Solution

a) Falsch
b) Falsch
c) Wahr
d) Wahr
e) Wahr
f) Wahr
g) Falsch