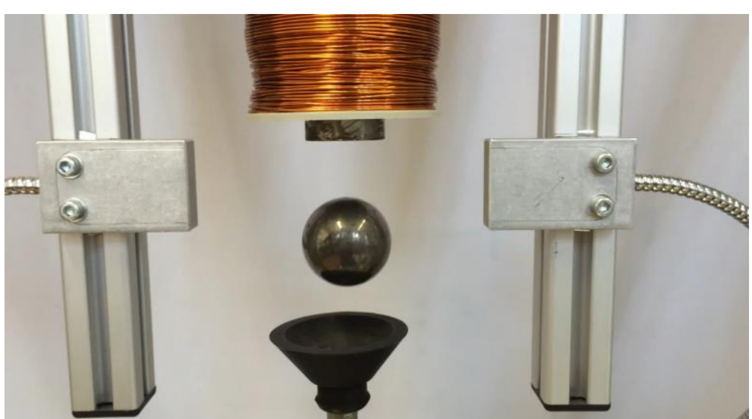
Angewandte Mathematik
Folgen und Reihen

Dr. Marcel Ritter
Univ.-Prof. Dr. Matthias Harders
Sommersemester 2022

Einführungsfilme



Einführungsfilme

JPEG 25

JPEG 50

JPEG 75

JPEG 95

Inhalt

- Einführung
- Folgen und Reihen
- Taylorreihe
- Fourierreihe

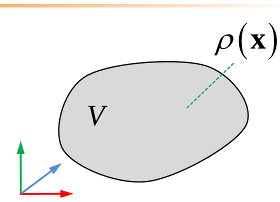
Inhalt

- **Einführung**
- Folgen und Reihen
- Taylorreihe
- Fourierreihe

Motivation

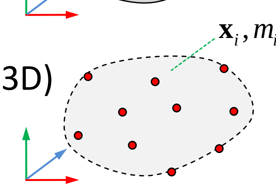
- Massenmittelpunkt (kontinuierliche, nicht konstante Masseverteilung, 3D)

$$\mathbf{x}_{CM} = \frac{1}{m}\int_V \mathbf{x}\rho(\mathbf{x})\,dV \qquad m = \int_V \rho(\mathbf{x})\,dV$$



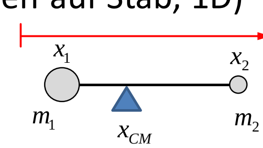
- Massenmittelpunkt (N Punktmassen, 3D)

$$\mathbf{x}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{x}_i \Big/ m \qquad m = \sum_{i=1}^{N} m_i$$



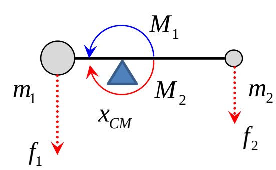
- Massenmittelpunkt (zwei Punktmassen auf Stab, 1D)

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



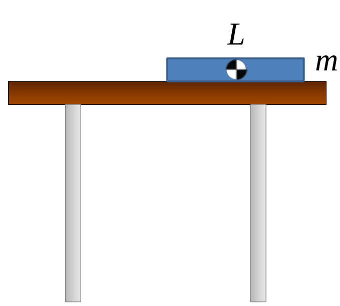
Motivation

- Auf starre Körper einwirkende externe Kräfte können Verschiebungen und Rotationen verursachen
- Ein freier starrer Körper rotiert nicht, wenn sich die Drehmomente bzgl. des Massemittelpunktes aufheben
- Eine Rotationsbewegung resultiert, wenn der Kraft-angriffspunkt nicht mit dem Massemittelpunkt zusammenfällt



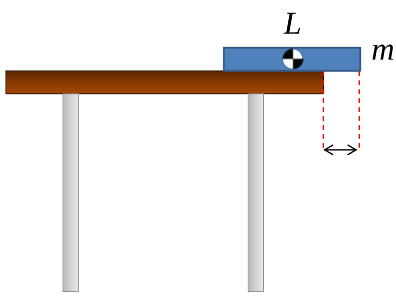
Motivation

- „Buchstapel-Problem“



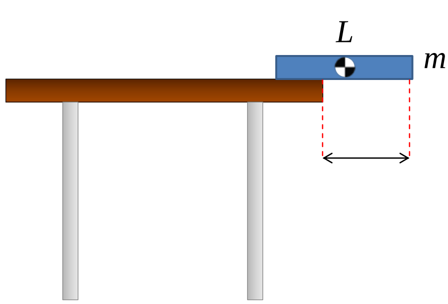
Motivation

- „Buchstapel-Problem“



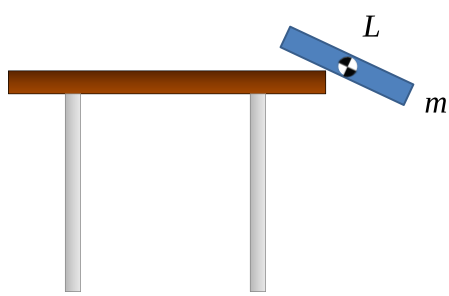
Motivation

- „Buchstapel-Problem“



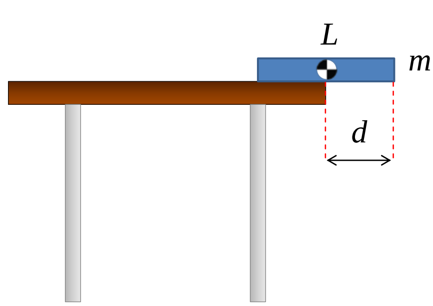
Motivation

- „Buchstapel-Problem“



Motivation

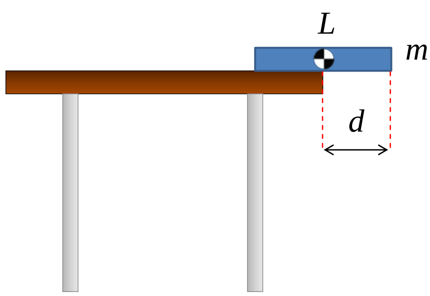
- „Buchstapel-Problem“



Motivation

- „Buchstapel-Problem“

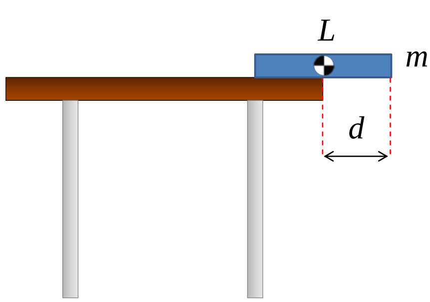
$$i = 1 : d = \frac{L}{2}$$



Motivation

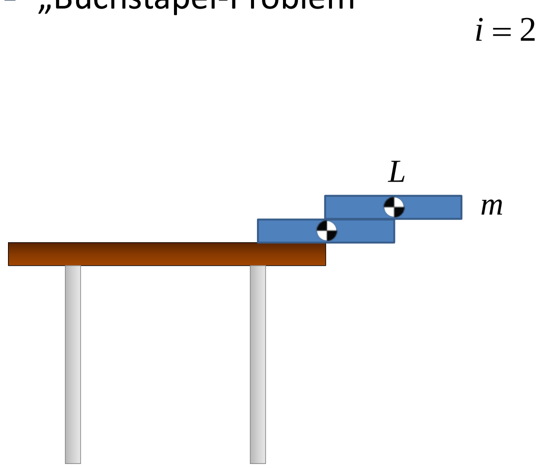
- „Buchstapel-Problem“

$$i = 1 : d_1 = \frac{L}{2}$$



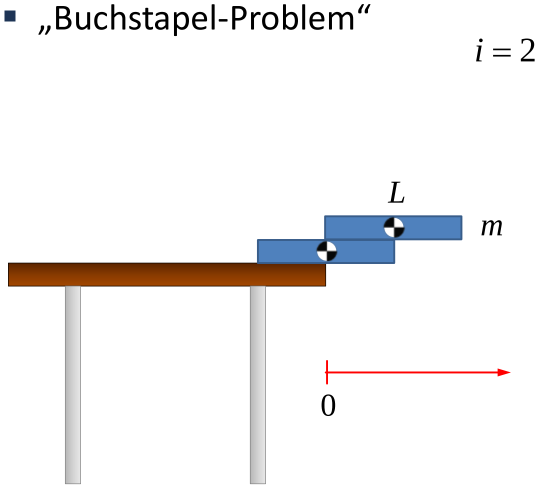
Motivation

- „Buchstapel-Problem"



Motivation

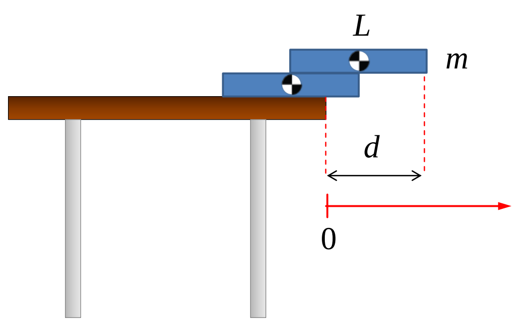
- „Buchstapel-Problem"



Motivation

- „Buchstapel-Problem“

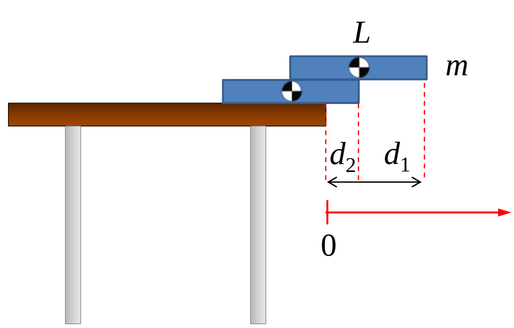
$i = 2$



Motivation

- „Buchstapel-Problem“

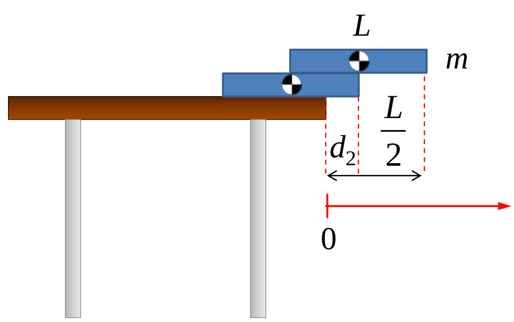
$i = 2$



Motivation

- „Buchstapel-Problem“

$i = 2$

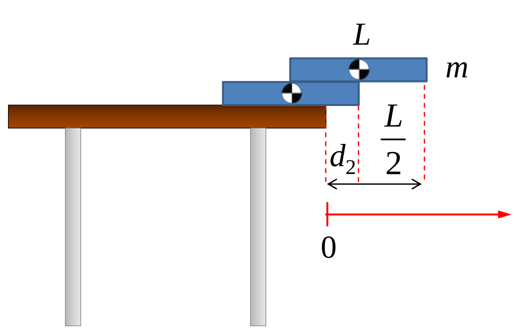


Motivation

- „Buchstapel-Problem“

$i = 2$

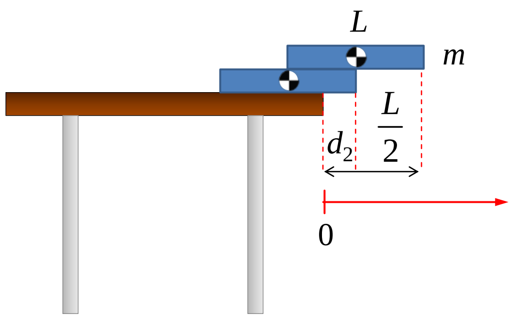
$$0 = \frac{mx_1 + mx_2}{m + m}$$



Motivation

- „Buchstapel-Problem“

$$i = 2 \qquad 0 = \frac{md_2 - m\left(L/2 - d_2\right)}{m+m}$$



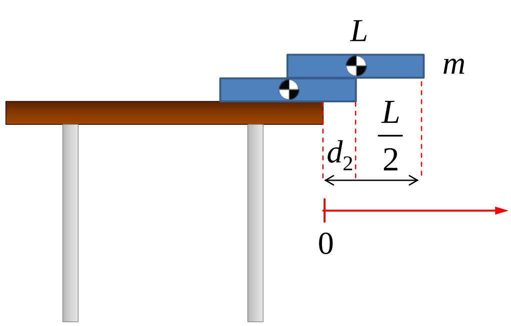
Motivation

- „Buchstapel-Problem“

$$i = 2 \qquad 0 = \frac{md_2 - m\left(L/2 - d_2\right)}{m+m}$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{L}{4}$$

$$\Rightarrow d = d_1 + d_2 = \frac{L}{2} + \frac{L}{4}$$



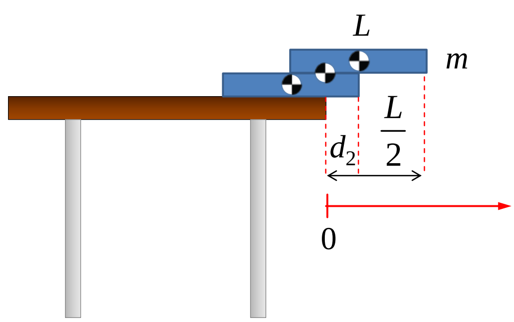
Motivation

- „Buchstapel-Problem“

$$i = 2 \qquad 0 = \frac{md_2 - m\left(L/2 - d_2\right)}{m+m}$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{L}{4}$$

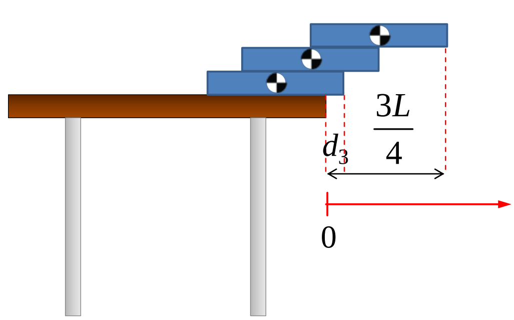
$$\Rightarrow d = d_1 + d_2 = \frac{L}{2} + \frac{L}{4}$$



Motivation

- „Buchstapel-Problem“

$$i = 3$$



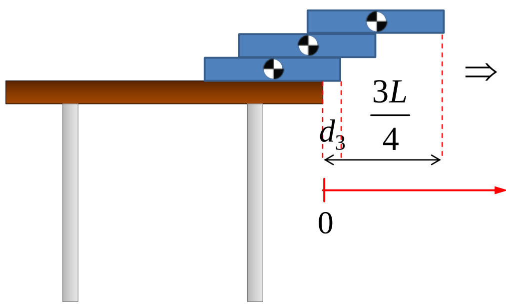
Motivation

- „Buchstapel-Problem"

$$i=3 \quad 0=\frac{2md_3-m\left(L/2-d_3\right)}{2m+m}$$

$$\Rightarrow d_3=\frac{L}{6}$$

$$\Rightarrow d=d_1+d_2+d_3=\frac{L}{2}+\frac{L}{4}+\frac{L}{6}$$



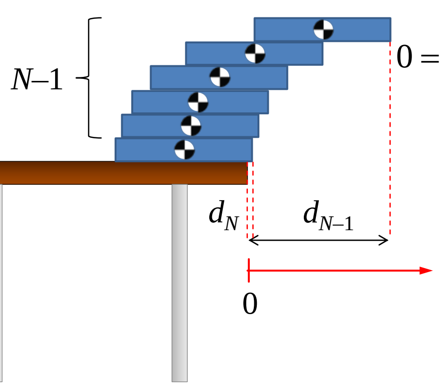
Motivation

- „Buchstapel-Problem"

$$i=N$$

$$0=\frac{(N-1)md_N-m\left(L/2-d_N\right)}{(N-1)m+m}$$

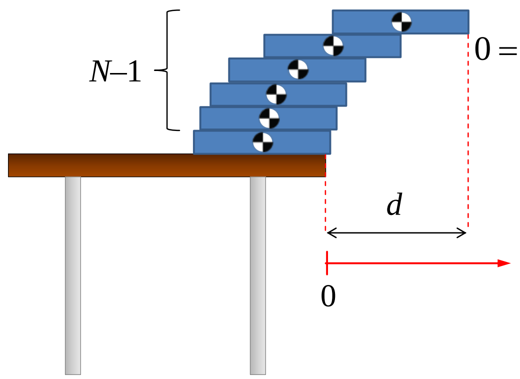
$$\Rightarrow d_N=\frac{L}{2N}$$



Motivation

- „Buchstapel-Problem“

$$i = N$$



$$0 = \frac{(N-1)md_N - m(L/2 - d_N)}{(N-1)m + m}$$

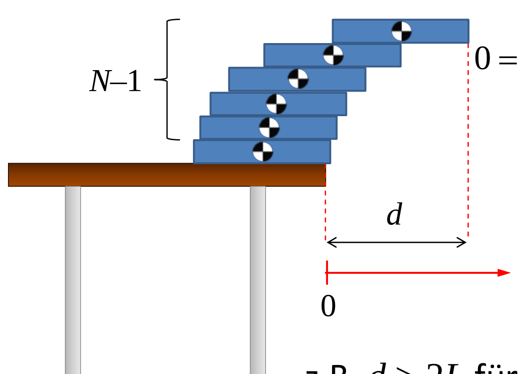
$$\Rightarrow d_N = \frac{L}{2N}$$

$$\Rightarrow d = \sum_{i=1}^{N} \frac{L}{2i}$$

Motivation

- „Buchstapel-Problem“

$$i = N$$



$$0 = \frac{(N-1)md_N - m(L/2 - d_N)}{(N-1)m + m}$$

$$\Rightarrow d_N = \frac{L}{2N}$$

$$\Rightarrow d = \sum_{i=1}^{N} \frac{L}{2i}$$

z.B. $d > 2L$ für $N = 31$

Motivation

- „Buchstapel-Problem" – Verhalten für $N \to \infty$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{L}{2i} = \lim_{N\to\infty} \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right) = \infty$$

- Beweisskizze (harmonische Reihe)

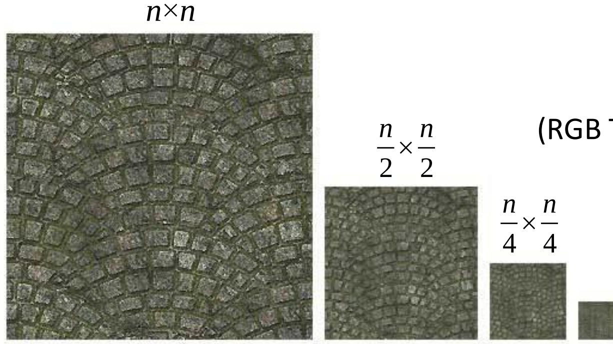
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots >$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}+\ldots \to \infty$$

Motivation

- MIP-Mapping in Computergrafik

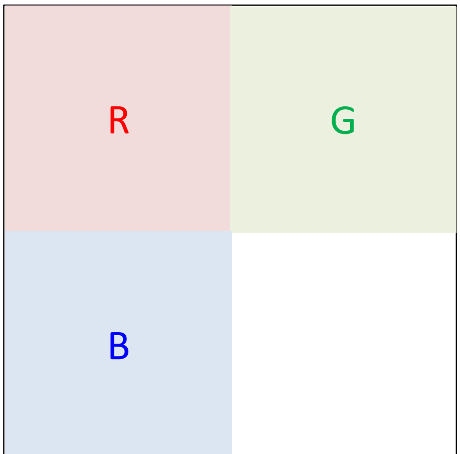
$n \times n$ $\qquad \frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ $\qquad \frac{n}{4} \times \frac{n}{4}$ $\qquad$ (RGB Texturen)



Stufe 0 1 2 3 … N

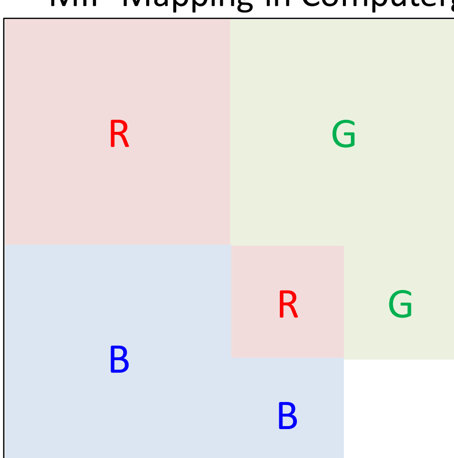
Motivation

- MIP-Mapping in Computergrafik – Speicherbedarf



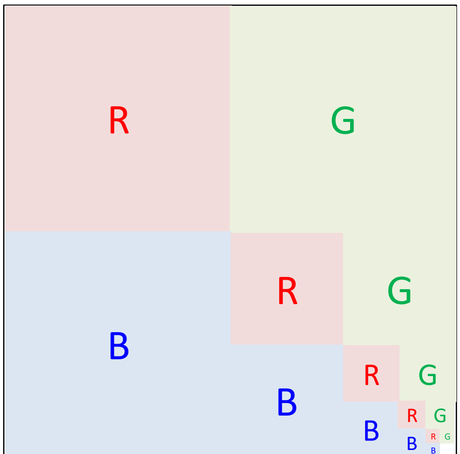
Motivation

- MIP-Mapping in Computergrafik – Speicherbedarf



Motivation

- MIP-Mapping in Computergrafik – Speicherbedarf



$$S = M + \frac{M}{4} + \frac{M}{4 \cdot 4} + \frac{M}{4 \cdot 4 \cdot 4} + \ldots$$

$$= M \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{4^i}$$ (geometrische Reihe)

$$M \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = M \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} M$$

$$= M + \frac{1}{3} M$$

(Speicherbedarf $1/3$ höher)

Inhalt

- Einführung
- **Folgen und Reihen**
- Taylorreihe
- Fourierreihe

Zahlenfolgen

- Für die Menge M ist eine (Zahlen-)Folge aus M eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M,\ n \to a_n = \varphi(n)$
- Schreibweisen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ oder nur (a_n) bzw. a_n
- Der Index muss nicht bei 0 oder 1 beginnen
- Folgen können endlich oder unendlich sein, und z.B. durch (Teil-)Aufzählung der Glieder dargestellt werden

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

- Alternativ kann die Darstellung durch die Funktionsgleichung, als Rekursion oder als Algorithmus erfolgen

Zahlenfolgen – Beispiele

- Folge der Primzahlen (natürliche Zahlen > 1 mit genau zwei verschiedenen Teilern, d.h. 1 und die Zahl selber)

$$(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots)$$

- Fibonacci-Zahlen (durch Rekursion)

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad n \geq 3, \qquad a_1 = a_2 = 1$$

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$$

- Fibonacci-Zahlen (durch Funktionsgleichung)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad n \geq 1$$

Konvergenz von Folgen

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert (ist konvergent), wenn ab einem bestimmten Index n_0 alle Folgeglieder beliebig nahe beim Grenzwert liegen

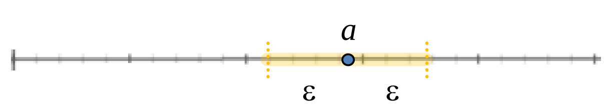
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

(Beispielfolge)

Konvergenz von Folgen

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert (ist konvergent), wenn ab einem bestimmten Index n_0 alle Folgeglieder beliebig nahe beim Grenzwert liegen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

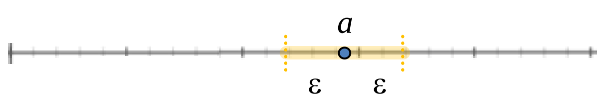


(Beispielfolge)

Konvergenz von Folgen

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert (ist konvergent), wenn ab einem bestimmten Index n_0 alle Folgeglieder beliebig nahe beim Grenzwert liegen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

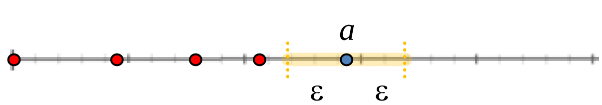


(Beispielfolge)

Konvergenz von Folgen

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert (ist konvergent), wenn ab einem bestimmten Index n_0 alle Folgeglieder beliebig nahe beim Grenzwert liegen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

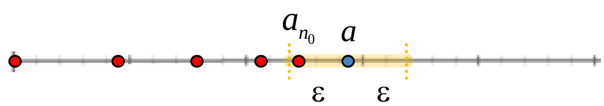


(Beispielfolge)

Konvergenz von Folgen

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert (ist konvergent), wenn ab einem bestimmten Index n_0 alle Folgeglieder beliebig nahe beim Grenzwert liegen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

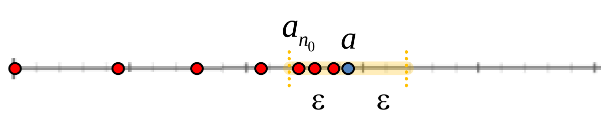


(Beispielfolge)

Konvergenz von Folgen

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert (ist konvergent), wenn ab einem bestimmten Index n_0 alle Folgeglieder beliebig nahe beim Grenzwert liegen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$



(Beispielfolge)

Konvergenz von Folgen

- Eine Folge mit Grenzwert $a = 0$ wird Nullfolge genannt
- Konvergiert eine Folge gegen einen Grenzwert, dann ist dieser eindeutig bestimmt (d.h. höchstens ein Grenzwert existiert)
- Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen den Grenzwert der Folge
- Eine nicht konvergierende Folge nennt man divergent
- Beispiel:

$$a_n = (-1)^n = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots) \qquad \text{(nicht konvergent)}$$

Rechenregeln für Grenzwerte

- Für konvergente Folgen (a_n), (b_n) sowie eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{(insbesondere } \lim_{n\to\infty} c = c \text{)}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \qquad \text{(angenommen } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \text{)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|$$

Rechenbeispiel

- Finde Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ $\quad a_n = \dfrac{4n^4+2n^2+2}{7n^4+100n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^4+2n^2+2}{7n^4+100n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4} \frac{4+2/n^2+2/n^4}{7+100/n^3}$$

$$= \frac{4+\lim\limits_{n\to\infty} 2/n^2 + \lim\limits_{n\to\infty} 2/n^4}{7+\lim\limits_{n\to\infty} 100/n^3} = \frac{4+2\cdot\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^2 + 2\cdot\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^4}{7+100\cdot\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^3}$$

$$= \frac{4+0+0}{7+0} = \frac{4}{7} \qquad \text{(mit } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k>0\text{)}$$

Reihen

- Eine (unendliche) Reihe ist eine Folge der Form $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ jeweils mit Teil-/Partialsummen (für bestimme m)

$$z_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$$

- Existiert ein Grenzwert a der Teilsummen, dann nennt man diesen den Wert der Reihe und schreibt

$$\lim_{m\to\infty} z_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$$

- Reihenkonvergenz ist somit gegeben durch Konvergenz der Folge der Partialsummen z_m

Geometrische Reihen

- Konstanter Quotient zwischen Folgegliedern $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$
- Summe der ersten m Potenzen von $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{m-1} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-1} = \frac{1-q}{1-q}\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-1}\right)$$

$$= \frac{(1-q) + \left(q - q^2\right) + \left(q^2 - q^3\right) + \ldots + \left(q^{m-1} - q^m\right)}{1-q} = \frac{1-q^m}{1-q}$$

- Beispiele:

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \left(1 - \frac{1}{32}\right) \Big/ \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{31}{16}$$

$$\sum_{k=0}^{3} 3^k = 1 + 3 + 9 + 27 = (1-81)/(1-3) = 40$$

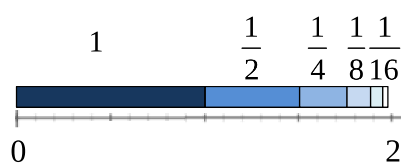
Geometrische Reihen

- Konvergenzverhalten für $|q| < 1$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} q^k = \lim_{m\to\infty} \frac{1-q^m}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

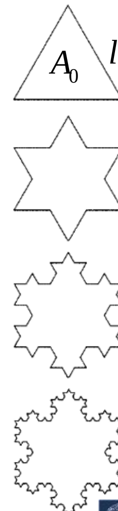
- Beispiele:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$



$$0.\overline{9} = 0.999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \ldots = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

Geometrische Reihen – Koch-Schneeflocke



- Fraktale Struktur, erzeugt z.B. mit Lindenmayer-System (Kurve stetig, aber nicht differenzierbar)
- Gesamtfläche (für Iterationen $n \to \infty$)

$$A_G = A_0 + 3\frac{A_0}{9} + 3\cdot 4\frac{A_0}{9\cdot 9} + 3\cdot 4\cdot 4\frac{A_0}{9\cdot 9\cdot 9} + \ldots$$

$$= A_0\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right) = A_0\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-4/9}\right) = A_0\frac{8}{5}$$

- Länge Gesamtumfang (für Iterationen $n \to \infty$)

$$l_G = \lim_{n\to\infty} 3 l_0 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \infty$$

Quotientenkriterium

- Eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$
  - ist absolut konvergent, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \qquad n \in \mathbb{N}$$

  - ist divergent, wenn

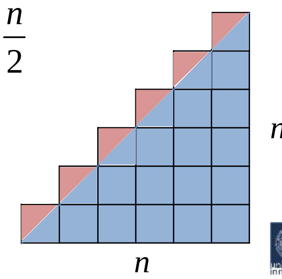
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$$

Arithmetische Reihen

- Konstante Differenz zwischen Folgegliedern $d = a_{n+1} - a_n$
- Beispiel – Summe der ersten n natürlichen Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n = \frac{1}{2} 2\cdot(1+2+\ldots+n) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2+\ldots+n+ \\ 1+2+\ldots+n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1+ & 2 & +\ldots+n+ \\ n+ & (n-1) & +\ldots+1 \end{pmatrix}}_{n \text{ mal}} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$



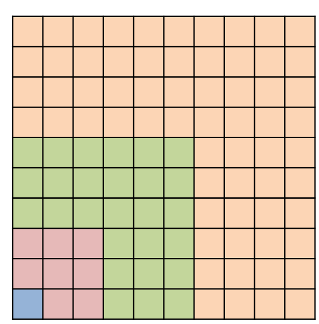
(Gaußsche Summenformel)

Arithmetische Reihen

- Weitere Beispiele

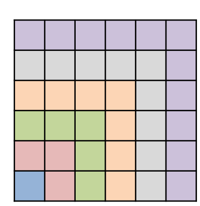
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(Summe erste n Kubikzahlen)



$$\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$$

(Summe erste n ungerade Zahlen)



Fakultät

- Produkt der ersten n natürlichen Zahlen ($n > 0$) ist die Fakultät von n

$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n! \qquad\qquad 0! = 1$$

- Die Anzahl Permutationen (ohne Wiederholungen) einer n-elementigen Menge ist gegeben durch n!
- Beispiel:

  $M = \{A,B,C\}$; $|M| = n = 3$, somit 3! = 6 Permutationen

  $P(M) = \{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$

Fakultät – Erweiterungen

- Näherung für große n (Stirling-Formel)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad\qquad n \in \mathbb{N}$$

- Erweiterung auf reelle (und auch komplexe) Zahlen durch die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \qquad\qquad x > 0$$

- Einige Eigenschaften

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$x \cdot \Gamma(x) = \Gamma(x+1) \qquad \Gamma(1) = 1 \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Binomischer Lehrsatz

- Ermittlung der Potenzen eines Binoms $(x + y)$ durch Ausmultiplizieren

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \qquad n \in \mathbb{N}$$

- Mit Binomialkoeffizienten gegeben als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{\left(k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1\right)\left((n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1\right)}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots\frac{n-k+1}{k} \qquad n \geq k$$

Binomialkoeffizienten

- Eigenschaften

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{(Symmetrie)}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(Pascalsches Dreieck)

$k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$, $k = 5$

1							$n = 0$
1	1						$n = 1$
1	2	1					$n = 2$
1	3	3	1				$n = 3$
1	4	6	4	1			$n = 4$
1	5	10	10	5	1	$\ddots$	$n = 5$
1	6	15	20	15	6	1	$\vdots$

Binomialkoeffizienten

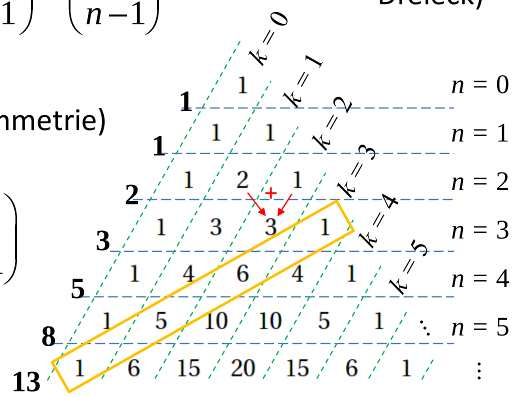
- Eigenschaften

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \qquad \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$$

(Pascalsches Dreieck)

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$ (Symmetrie)

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$$



Binomialkoeffizienten

- Anzahl Möglichkeiten, k Elemente aus einer Menge von n Elementen auszuwählen (ohne Wiederholung)
- Herleitung:
  - Für das erste Element bestehen n Wahlmöglichkeiten, für das zweite (n–1), für das k-te (n–k +1), insgesamt also $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$
  - Für jedes k-Tupel gibt es $k!$ Permutationen der Elemente; da die Reihenfolge unerheblich ist, muss durch $k!$ geteilt werden

A	B	C	D	E
●	●	●		
●	●		●	
●	●			●
●		●	●	
●		●		●
●			●	●
	●	●	●	
	●	●		●
	●		●	●
		●	●	●

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

$$\binom{5}{3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}=10$$

Binomialkoeffizienten

- Anzahl Möglichkeiten, k Elemente aus einer Menge von n Elementen auszuwählen (ohne Wiederholung)
- Herleitung:
  - Für das erste Element bestehen n Wahlmöglichkeiten, für das zweite $(n–1)$, für das k-te $(n–k+1)$, insgesamt also $n\cdot(n–1)\cdot\ldots\cdot(n–k+1)$
  - Für jedes k-Tupel gibt es $k!$ Permutationen der Elemente; da die Reihenfolge unerheblich ist, muss durch $k!$ geteilt werden

A	B	C	D	E
●	●	●	●	
●	●	●		●
●	●		●	●
●		●	●	●
	●	●	●	●

$$\binom{5}{4}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=5$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

Binomialkoeffizienten

- Anzahl Möglichkeiten, k Elemente aus einer Menge von n Elementen auszuwählen (ohne Wiederholung)
- Herleitung:
  - Für das erste Element bestehen n Wahlmöglichkeiten, für das zweite $(n–1)$, für das k-te $(n–k+1)$, insgesamt also $n\cdot(n–1)\cdot\ldots\cdot(n–k+1)$
  - Für jedes k-Tupel gibt es $k!$ Permutationen der Elemente; da die Reihenfolge unerheblich ist, muss durch $k!$ geteilt werden

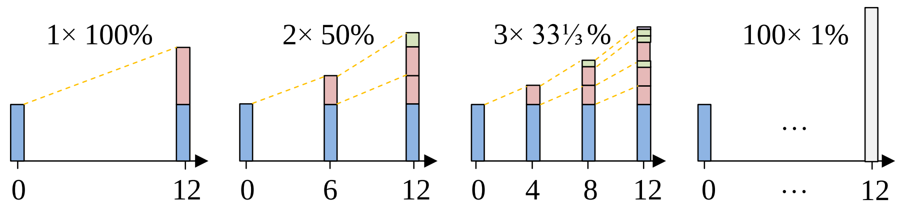
A	B	C	D	E
●				
	●			
		●		
			●	
				●

$$\binom{5}{1}=\frac{5}{1}=5$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

Exponentialfunktion

- Wachstum eines Vermögens über ein Jahr, bei Verzinsung in n Schritten mit $(100/n)$%



$$\left(1+\frac{1}{1}\right)=2 \qquad \left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25 \qquad \left(1+\frac{1}{3}\right)^3\approx 2.37 \qquad \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}\approx 2.7048$$

(Wachstum eines Startvermögens)

Exponentialfunktion

- Grenzwertverhalten der Folge $\quad a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

n	1	2	4	12	365	1 000	10 000	100 000
a_n	2	2.25	2.441	2.613	2.714	2.7169	2.71814	2.71827

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2.7182818284$$ (Eulersche Zahl)

- Folgendarstellung der Exponentialfunktion

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$$

Exponentialfunktion

- Gemäß Binomischem Lehrsatz (für natürliche Zahl n)

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k$$

- Annahme: Exponentialfunktion kann auch als unendliche Summe ($n \to \infty$) dargestellt werden

$$e^x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

- Gesucht: unbekannte Koeffizienten c_i
- Bestimmung von c_0 durch Einsetzen $x = 0$

$$e^0 = 1 = c_0 + c_1 0 + c_2 0^2 + c_3 0^3 + \ldots + c_n 0^n + \ldots \Rightarrow c_0 = 1$$

Exponentialfunktion

- Bestimmung von c_1 durch Einsetzen $x = 0$ in erste Ableitung

$$\left(e^x\right)' = e^x = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots$$

$$e^0 = c_1 + 2c_2 0 + 3c_3 0^2 + \ldots + nc_n 0^{n-1} + \ldots \qquad \Rightarrow c_1 = 1$$

- Bestimmung von c_n über n-te Ableitung

$$\left(e^x\right)^{(2)} = 2c_2 + 2\cdot 3c_3 x + \ldots + (n-1)nc_n x^{n-2} + \ldots \qquad \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$$

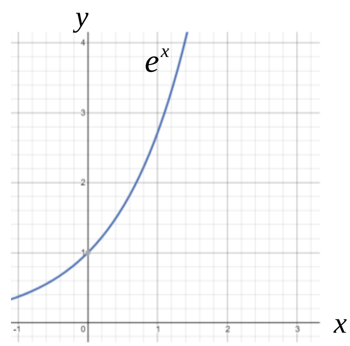
$$\left(e^x\right)^{(3)} = 2\cdot 3c_3 + 2\cdot 3\cdot 4c_4 x \ldots + (n-2)(n-1)nc_n x^{n-3} + \ldots \Rightarrow c_3 = \frac{1}{2\cdot 3}$$

$$\left(e^x\right)^{(n)} = n!c_n + 2\cdot \ldots \cdot (n+1)c_{n+1} x + \ldots \qquad \Rightarrow c_n = \frac{1}{n!}$$

Exponentialfunktion

- Darstellung als unendliche Reihe

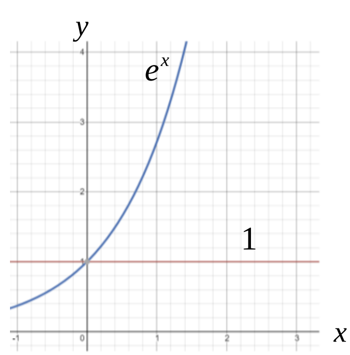
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$



Exponentialfunktion

- Darstellung als unendliche Reihe

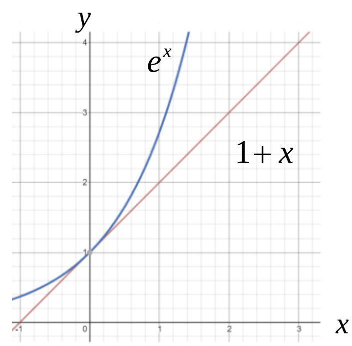
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$



Exponentialfunktion

- Darstellung als unendliche Reihe

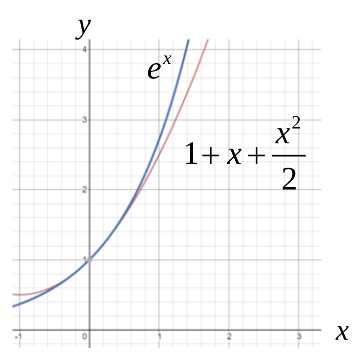
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$



Exponentialfunktion

- Darstellung als unendliche Reihe

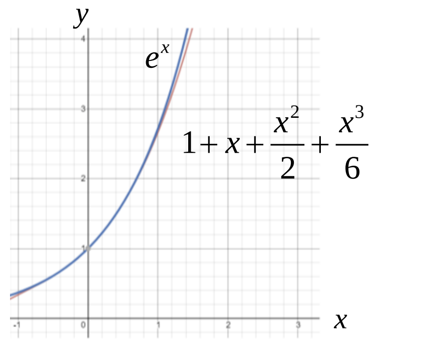
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$



Exponentialfunktion

- Darstellung als unendliche Reihe

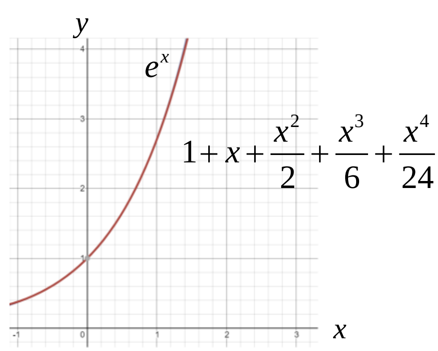
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$



Exponentialfunktion

- Darstellung als unendliche Reihe

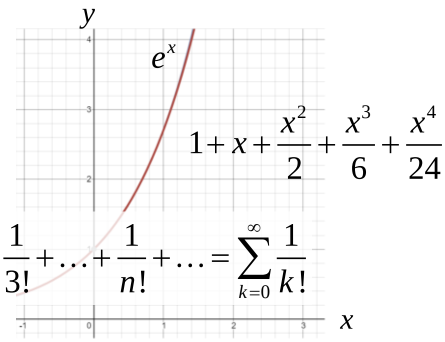
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$



Exponentialfunktion

- Darstellung als unendliche Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$



$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Inhalt

- Einführung
- Folgen und Reihen
- **Taylorreihe**
- Fourierreihe

Potenzreihen

- Eine reelle Potenzreihe ist ein Polynom vom „Grad ∞“ (für Veränderliche x) mit Koeffizienten $c_i \in \mathbb{R}$ sowie Entwicklungspunkt/Zentrum $a \in \mathbb{R}$
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + c_3 (x-a)^3 + \ldots$$
- Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$
- Beispiel: die geometrische Reihe als Potenzreihe mit $c_i = 1$ und Entwicklungspunkt 0
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

Potenzreihen – Konvergenz

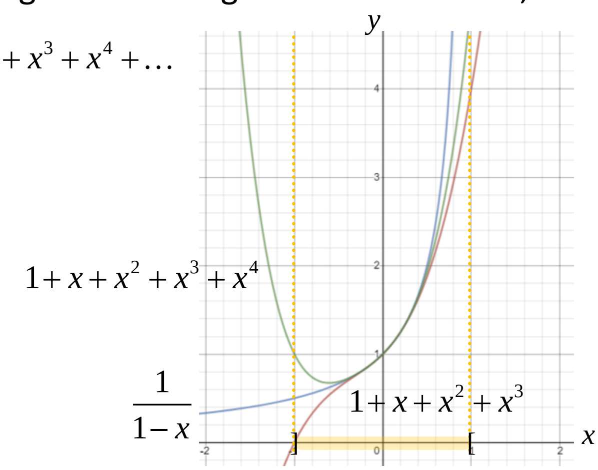
- Die Menge M, für die eine Potenzreihe konvergiert, ist deren Konvergenzintervall; dieses ist immer symmetrisch um den Entwicklungspunkt
- Die beiden Grenzen vom Intervall M können offen oder geschlossen sein, z.B. $]a–R, a+R[$ oder $[a–R, a+R]$, jeweils mit Konvergenzradius $R > 0$
- Beispiel: die geometrische Reihe mit $c_i = 1$ konvergiert für $x \in M =]–1,1[$ und divergiert sonst
- Es kann $R = 0$ sein, die Reihe konvergiert dann nur für $x = a$; oder $R = \infty$, dann konvergiert diese $\forall x \in \mathbb{R}$

Potenzreihen – Konvergenz

- Beispiel: Konvergenzintervall geometrische Reihe, $a = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

$$M =]-1,1[$$



Differenzieren und Integrieren

- Potenzreihen können im Inneren des Konvergenz-intervalls gliedweise differenziert und integriert werden
- Das Konvergenzintervall bleibt dabei erhalten
- Beispiel: $\int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C \qquad |x| < 1$

$$\Rightarrow \ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} dx + C = -\int 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots dx + C$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots + C = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} + C \qquad |x| < 1$$

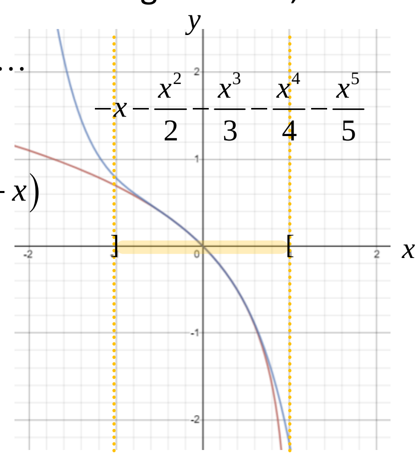
sowie $\ln(1-0) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k}{k} + C \Rightarrow C = 0$

Differenzieren und Integrieren

- Beispiel: Annäherung natürlicher Logarithmus, $a = 0$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$$M = \left]-1,1\right[$$



Approximation Glatter Funktionen

- Linearisierung von f in $x_0 = a$

$$f(x) \approx g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

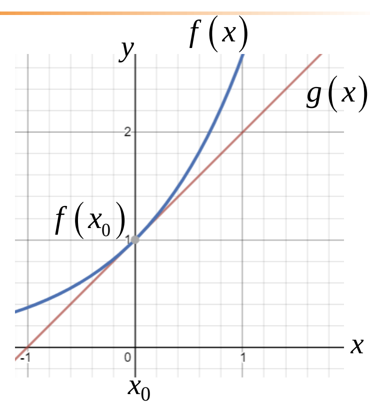
- Herleitung über Hauptsatz der Integral-/Differentialrechnung

$$\int_{x_0}^{x} f'(\tilde{x})d\tilde{x} = f(\tilde{x})\Big|_{x_0}^{x} = f(x) - f(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(\tilde{x})d\tilde{x}$$

$$\approx f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(x_0)d\tilde{x} = f(x_0) + f'(x_0)\int_{x_0}^{x} d\tilde{x}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Approximation Glatter Funktionen

- Linearisierung von f' in $x_0 = a$

$$f'(x) \approx f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)$$

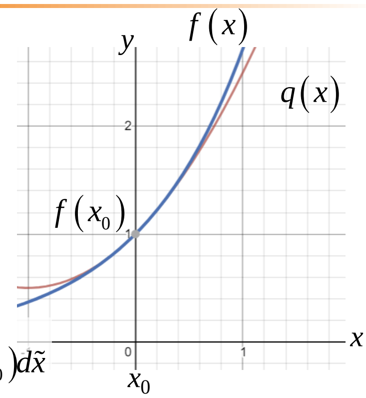
- Einsetzen in Integral

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(\tilde{x})d\tilde{x}$$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(\tilde{x}_0) + f''(\tilde{x})(\tilde{x} - \tilde{x}_0)d\tilde{x}$$

$$\approx f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(\tilde{x}_0) + f''(\tilde{x}_0)(\tilde{x} - \tilde{x}_0)d\tilde{x}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{1}{2}(x - x_0)^2 = q(x)$$



Satz von Taylor

- Die unendliche Taylorreihe einer glatten (n-mal differenzierbaren) Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

- Das n-te Taylorpolynom an der Stelle $x = x_0 + h$

$$T_{f,n}(x) = T_{f,n}(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(h)^k$$

$$= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

- Mit wachsendem n nähert $T_{f,n}$ die Funktion f bei x_0 immer besser an

Taylorreihe – Beispiel

- Entwicklung von $f(x) = \sin x$, bei $x_0 = 0$ (in diesem speziellen Fall sprechen wir von einer Maclaurin-Reihe)

$$f^{(k)}(x) = (\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \qquad k \in \mathbb{N}$$

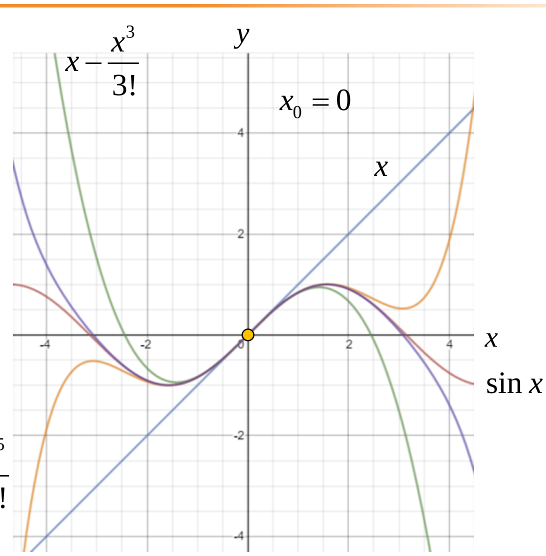
$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ -1^{(k-1)/2} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Taylorreihe – Beispiel

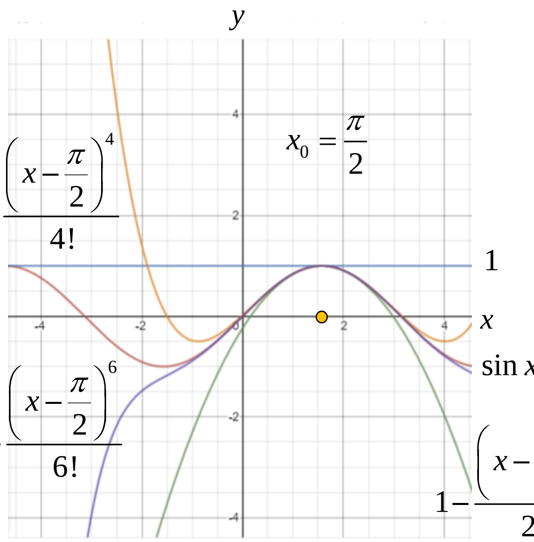
- Entwicklung von $\sin x$



Taylorreihe – Beispiel

- Entwicklung von $\sin x$

$$1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}$$



$$1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!}$$

$$1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}$$

Rechenbeispiel

- Entwicklung bei $x_0 = 1$ von $f(x)=x^3+3x^2+x$

$f^{(1)}(x)=3x^2+6x+1 \qquad f^{(1)}(1)=10 \qquad f^{(0)}(1)=5$

$f^{(2)}(x)=6x+6 \qquad f^{(2)}(1)=12$

$f^{(3)}(x)=6 \qquad f^{(3)}(1)=6 \qquad f^{(k)}(x)=0, k\geq 4$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k=\frac{5}{0!}+\frac{10}{1!}(x-1)+\frac{12}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3$$

$$=5+10x-10+6x^2-12x+6+x^3-3x^2-3x-1$$

$$=x^3+3x^2+x$$

(die Taylorreihe eines Polynoms ist das Polynom selber)

Multivariate Taylorreihe

- Beispiel: 2. Taylorpolynom der skalaren, 2-mal partiell differenzierbaren Funktion $f(x,y) = f(\mathbf{x})$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, um den Entwicklungspunkt $\mathbf{a} = (a,b)$

$$T_{f,2}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + (\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \nabla f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \mathbf{H}_f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})$$

bzw. mit ausgeschriebenen Termen

$$T_{f,2}(x,y) = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) +$$
$$\frac{1}{2!}\left((x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2(x-a)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(y-b) + (y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right)$$

(quadratische Näherung von f bei $\mathbf{a}$)

Rechenbeispiel

- Entwicklung bei $\mathbf{a} = (1,1)$ von $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ $\quad x \neq -y$

$$f(1,1) = 0 \qquad f_x = \left.\frac{2y}{(x+y)^2}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{2} \qquad f_y = \left.\frac{-2x}{(x+y)^2}\right|_{(1,1)} = -\frac{1}{2}$$

$$f_{xx} = \left.\frac{-4y}{(x+y)^3}\right|_{(1,1)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{xy} = \left.\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}\right|_{(1,1)} = 0 \qquad f_{yy} = \left.\frac{4x}{(x+y)^3}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{2}$$

somit ist das 2. Taylorpolynom von f um $\mathbf{a}$

$$T_{f,2}(x,y) = (x-1)\frac{1}{2} - (y-1)\frac{1}{2} - (x-1)^2\frac{1}{4} + (y-1)^2\frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left(y^2 - x^2\right) + (x-y)$$

Inhalt

- Einführung
- Folgen und Reihen
- Taylorreihe
- **Fourierreihe**

Fourierreihen

- Vorschau auf Fourier-Analyse (spätere Vorlesung)
- Eine periodische, stückweise stetige Funktion f auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ kann als Fourierreihe dargestellt werden

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \cdot x) + b_k \sin(k \cdot x))$$

  mit Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(k \cdot x)\, dx, \quad k \geq 0$$

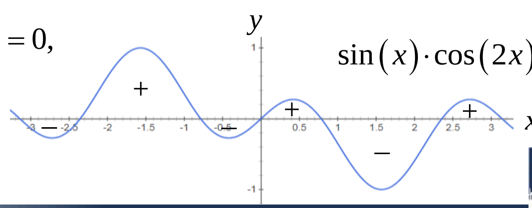
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(k \cdot x)\, dx, \quad k \geq 1$$

Fourierreihen

- An Stellen x, an denen f stetig ist, konvergiert die Reihe gegen den Funktionswert $f(x)$
- An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Reihe gegen den Mittelwert aus links- & rechtsseitigem Grenzwert
- Die trigonometrischen Funktionen stellen die orthogonalen Basisfunktionen der Zerlegung dar

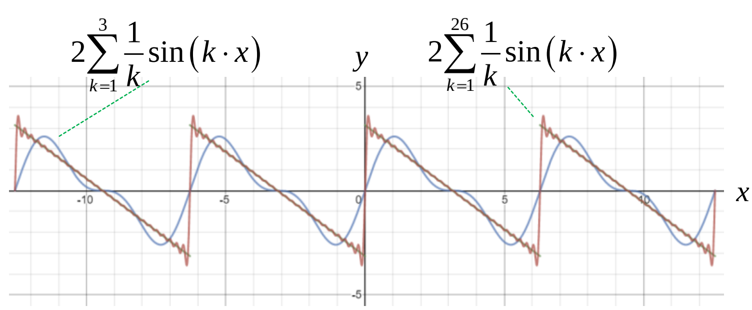
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot x)\sin(m \cdot x)\,dx = 0,$$

$k, m \in \mathbb{Z}$



Fourierreihen

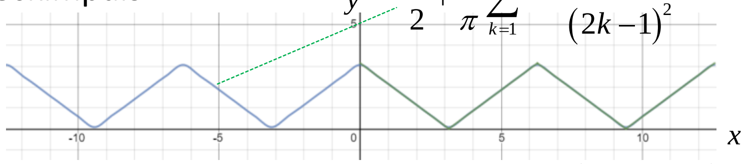
- Mit einer endlichen Anzahl Gliedern erhält man eine Approximation der Funktion (das trigonometrische Polynom)
- Beispiel: (fallende) Sägezahnschwingung



Fourierreihen – Weitere Beispiele

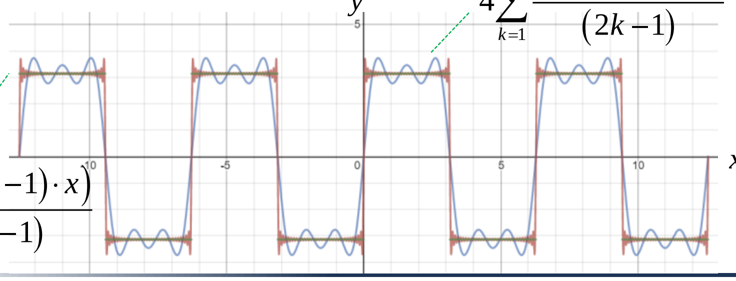
- Dreieckimpuls

$$\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{4}\frac{\cos\left((2k-1)\cdot x\right)}{(2k-1)^2}$$



- Rechteckimpuls

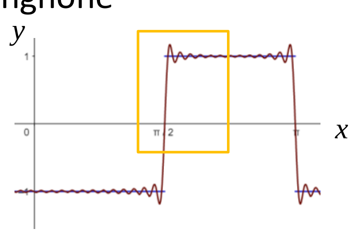
$$4\sum_{k=1}^{3}\frac{\sin\left((2k-1)\cdot x\right)}{(2k-1)}$$

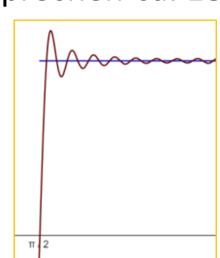


$$4\sum_{k=1}^{32}\frac{\sin\left((2k-1)\cdot x\right)}{(2k-1)}$$

Gibbs'sches Phänomen

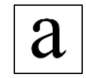
- An Unstetigkeitsstellen treten Überschwingungen („Ringing artifacts") auf
- Durch Hinzufügen weiterer Summenglieder können diese nicht eliminiert werden
- Über-/Unterschwingungen entsprechen ca. 18% der Sprunghöhe

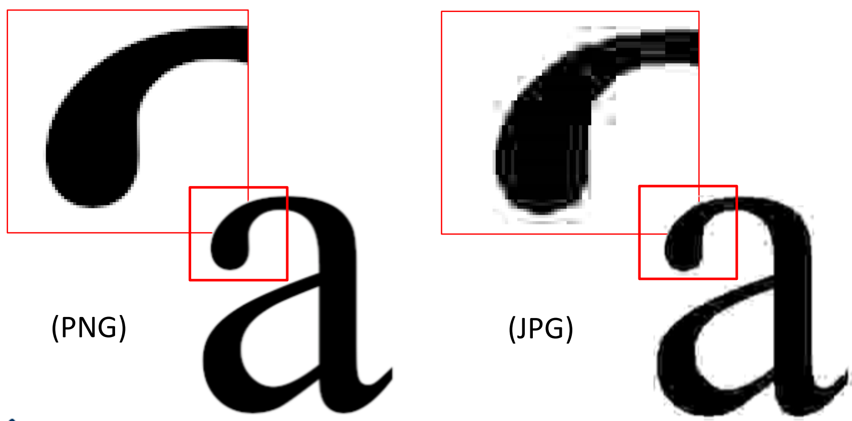




Praktisches Beispiel

- Kompressionsartefakte





Einige Hilfreiche Weblinks

- On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) (kostenlose Online-Datenbank von gesammelten Folgen ganzer Zahlen)

  http://oeis.org/?language=german

Vorlesungsplan

Datum	Thema	Proseminar
11.03.22	Einführung, Grundlagen, Funktionen	*(Beginn zuvor am 8.3.)*
18.03.22	Differentialrechnung	
25.03.22	Integralrechnung	
01.04.22	Differentialgleichungen	
08.04.22	Weitere Funktionen	
	Osterferien	
29.04.22	Reihen und Folgen	
06.05.22	Numerische Auswertung von Funktionen	
13.05.22	Lösung von Gleichungssystemen	
20.05.22	Interpolation	
27.05.22	Zufallszahlen	
03.06.22	Komplexe Zahlen	
10.06.22	Klausurvorbereitung	
01.07.22	**Klausur**	