

多變量變異數分析的顯著性考驗

傅粹馨 *

多變量統計方法於研究中之重要性有三：一、控制實驗錯誤率之膨大；二、反映社會的真實面；三、同時考量依變項間之關係。多變量變異數分析 (multivariate analysis of variance; MANOVA) 是多變量統計方法之一，其顯著性之檢定有四：Wilks' lambda (Λ)，Pillai's trace (V)，Hotelling trace (T) 和 Roy's greatest root (θ)。用 SAS 與 SPSS 執行 MANOVA 時， Λ ，V，T， θ 均列於報表中。

本文內容包括：一、特徵值在 MANOVA 中所扮演的角色；二、MANOVA 之顯著性考驗；三、 Λ ，V，T， θ 之 F 考驗；四、實例分析；五、四種考驗統計量數之抉擇。

壹、前言

近年來於各領域研究中，多變量統計方法之使用已是相當普遍，如多變量變異數分析 (multivariate analysis of variance, MANOVA)、多變量共變數分析 (multivariate analysis of covariance, MANCOVA)、典型相關分析 (canonical analysis, CA)、主成份分析 (principal component analysis, PCA)、因素分析 (factor analysis, FA)、區別分析 (discriminant analysis, DA)、集群分析 (cluster analysis)、徑路分析 (path analysis) 等等。本文重點在 MANOVA 之顯著性考驗，內容包括：一、多變量分析之重要性；二、MANOVA 的四種顯著性考驗（附資料分析）。旨在提供使用該統計法者一些相關訊息，對此四種顯著性考驗有更深一層之認識。

貳、多變量分析之重要性

多變量分析之重要性可分為三方面 (Fish, 1988; Haase & Ellis, 1987; Thompson, 1994)：一、控制實驗的第一類型錯誤率；二、研究結果之類推；三、瞭解依變項間之關係，這些是採用多個單變量分析 (multiple univariate analyses) 所無法做到的。茲將上述三項，分別說明如下：

* 本文作者為國立高雄師範大學教育學系副教授



一、控制實驗的第一類型錯誤率

當依變項間沒有相關時，表一說明了每一個比較之錯誤率 ($\text{testwise } \alpha ; \theta$) 與實驗錯誤率 (experimentwise type I error rate; α_{EW}) 的關係。 α_{EW} 可由以下之公式計算出， $\alpha_{EW} \leq 1 - (1 - \alpha_{PC})^P$ ，P 是依變項之個數。當研究中只分析一個依變項或只做一項檢定時， $\alpha_{PC} = \alpha_{EW}$ ；而當分析二個以上之依變項或作二個以上之檢定時， α_{EW} 就愈膨大 (inflation)，換言之， α_{EW} 與依變項之個數成正相關，如當 $\alpha = .05$ ，二個依變項彼此無關時， $\alpha_{EW} \leq 1 - (1 - .05)^2 = .0975$ ；當有五個依變項 (彼此間無相關) 時， $\alpha_{EW} \leq 1 - (1 - .05)^5 = .23$ ，此時之 α_{EW} 則不是我們想像中的 α_{PC} ；當依變項間有相關時，則 α_{EW} 會在 α_{PC} 與 α_{EW} 之間，如果 28 個依變項，則 α_{EW} 居於 .05 至 .76 之間 (Fish, 1988)。

表一 當依變項間無相關時， α_{EW} 之計算

$1 - (1 - \alpha_{PC})^{**}$			檢定次數	α_{EW}
1 - (1 - 0.05)	**		1=	
1 - (0.95)	**		1=	
1 - 0.95		=		0.05
$\alpha_{PC} = .01$				
1 - (1 - 0.01)	**		5=	0.049101
1 - (1 - 0.01)	**		10=	0.095618
1 - (1 - 0.01)	**		20=	0.182093
$\alpha_{PC} = .05$				
1 - (1 - 0.05)	**		5=	0.226219
1 - (1 - 0.05)	**		10=	0.401263
1 - (1 - 0.05)	**		20=	0.641514

(取自 Fish, 1988. **代表乘方)

二、研究結果之類推

Thompson (1986) 指出，社會科學研究者之興趣在於探究問題的多種原因 (multiple causes) 和多種結果 (multiple outcomes)，而非單一之因果，若採單變量之分析方式，也許扭曲了問題的真相；亦有人提出多變量的研究問題，卻採單變量的解法，同樣地扭曲了事實的原委，他同時舉例分析且說明了：執行兩個 ANOVA (依變項分別為 X 與 Y)，但 F 值均不顯著，若採用多變量分析，則 Δ 值顯著，產生兩種截然不同的結果。再者，多變量分析較能反映社會的真實面 (Fish, 1988)，Thompson (1994) 認為這點比前面所提之控制第一類型錯誤率來得重要。



三、瞭解依變項間之關係

多變量分析可同時考量數個依變項的關係，此為多個單變量分析所無法達成的，因單變量分析的假設是依變項間的相關為零。再者，單變量分析是將各依變項作逐一的分析，這與多變量之將所有依變項之最大線性組合 (optimal linear combination) 來作分析，意義上是不同的。例如，將身高與體重之資料各作單變量之分析，得到的結論，分別是就身高的和體重的；若分析身高與體重資料之線性組合（多變量），則可解釋為體型大小之分析，而非單純的身高與體重。

參、MANOVA 的四種顯著性考驗

在單變量變異數分析 (ANOVA) 中，如主要效果 (A 因子) 或交互作用 (A * B) 之顯著性考驗，所使用之公式為 $F_A = MS_A / MS_w$ 或 $F_{AB} = MS_{AB} / MS_w$ ，F 值愈大，則檢定愈容易達到統計上的顯著水準。在 MANOVA 時，使用最普遍之檢定為 Λ ，則 $\Lambda_A = |Q_e| / |Q_h + Q_e|$ ， $\Lambda_{AB} = |Q_e| / |Q_{AB} + Q_e|$ ，均以矩陣之方式表示。獨立樣本單因子之 ANOVA，其總離均差平方和 (SS) 可以 $SS_{total} = SS_A + SS_{error}$ ；在 MANOVA，則以 $T = H_A + E$ 表示 (T, H, E 均為矩陣)。若為獨立樣本二因子等組之 ANOVA，其總離均差平和則為 $SS_{total} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_{error}$ ；在 MANOVA，則 $T = H_A + H_B + H_{AB} + E$ 。

在 ANOVA 中之 F 值是唯一的解，然而在 MANOVA 之顯著性考驗，情形則不然，茲就下列五項加以說明：一特徵值在 MANOVA 中所扮演的角色；二 MANOVA 之顯著性考驗：Wilks' lambda (Λ)、Pillai's trace (V)、Hotelling trace (H) 與 Roy's greatest root (θ)；三 Λ 、V、T、 θ 之 F 考驗之近似值 (F-test approximation)；四單因子、二因子 ANOVA 與單因子、二因子 MANOVA 之異同；五四種考驗統計量數之抉擇。

一、特徵值在 MANOVA 中所扮演的角色

艾根值或特徵值 (eigenvalue 或 characteristic root) 在多變量變異數分析、典型相關分析中扮演著重要的角色，在 MANOVA 中的四種考驗統計量數均與特徵值有密切的關係 (Stevens, 1996) (詳見本文二)。特徵值 (λ) 的個數為 s， $s = \min(k-1, p)$ ，於單因子 MANOVA 時，若有四組 ($k = 4$)，三個依變項 ($p = 3$)，則有三個特徵值 ($s = 3$)；若為 2×3 之二因子 MANOVA，二個依變項，則 A、B、A * B 相對應的 S 個數分別為 1, 2 與 2。每個特徵值均是由各因子之矩陣 $H - 1$ (亦即 H/E) 中所抽取出來的。若 $H_A E^{-1}$ 則表示 A 因子組間之離均差平方和與交乘積和之矩陣 (sum-of-square-cross-product, SSCP matrix) 除以殘差之 SSCP 矩陣。

二、MANOVA 之顯著性考驗

MANOVA 之顯著性考驗統計量數有四種：1. Wilks' lambda，以 Λ 表示 (Olson, 1976，以 W 表示)；2. Pillai's trace，以 V 表示；3. Hotelling's trace，以 T 表示；4. Roy's greatest root，以 θ 表示 (Olson, 1976，以 R 表示)。上述四個量數均受特徵值 (λ) 的影響，茲將各種



統計量數之計算公式與關聯強度 (η^2) 列於表二。對關聯強度有興趣者，可參看 Haase (1991)。

表二 MANOVA 四種考驗顯著性量數與關聯強度 (η^2) 之計算公式

名稱	Wilks's Λ	Pillai's V	Hotelling's T	Roy's θ
公式	$\Lambda = \prod_{i=1}^s \frac{1}{1 + \lambda_i}$	$V = \sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i}$	$T = \sum_{i=1}^s \lambda_i$	$\theta = \frac{\lambda_{\max}}{1 + \lambda_{\max}}$
η^2	$\eta_W^2 = 1 - \Lambda / s$	$\eta_V^2 = V / s$	$\eta_T^2 = \frac{T / s}{1 + T / s}$	$\eta_R^2 = \theta$
$\lambda_1 = 2.64$.27	.73	2.64	.73
η^2	.73	.73	.73	.73
$\lambda_1 = 8.55, \lambda_2 = .02$.10	.92	8.57	.90
η^2	.68	.46	.81	.90

(本表之上半部取自 Haase 和 Ellis, 1987)

將表二之四個公式的特性說明如下：

(一) Wilks' lambda (Λ 或 W)

每個特徵值加1之倒數之連乘積 ($\prod_{i=1}^s$)，則得 Λ 值， $\Lambda = 1 - \theta$ 。

(Maracuilo & Levin, 1983)。

(二) Pillai's trace (V)

每個特徵值加1之倒數之總和，則得 V 值。

(三) Hotelling's trace (T)

所有特徵值之和即為 T 值。

(四) Roy's greatest root (θ 或 R)

重點放在最大特徵值上，其餘的特徵值不予考慮。

茲舉例說明之，當只有一個特徵值 ($\lambda = 2.64$) 時，與二個特徵值時 ($\lambda_1 = 8.55, \lambda_2 = .02$)， Λ, V, T, θ 值分別列於表二之下半部。由此可知， V 與 T 均與特徵值之總和 (Σ) 有關，而與倒數之連續相乘積 (product) 有關，唯獨 θ 只涉及最大的特徵值 (Tabachnick & Fidell, 1989)。

值得注意的一點，於 SAS 報表中，Roy's 值是採用 $\theta = \lambda_{\max}$ (Freund & Littell, 1981; Freund, Littell, & Spector, 1986)。

三、 Λ, V, T, θ 之 F 考驗近似值

MANOVA 之四種顯著考驗之統計量數中，以 Λ 統計量數常被採用， Λ 值愈小，愈容易達到統



計上的顯著水準，若 Λ 小於 $U_{\alpha(P,K-1,N-K)}$ (林清山, 民 80 , P. 405)，則 Λ 值達顯著水準，換言之， Λ 值顯著與否，要對照 U 分配之 U 值。若採 θ 統計量數，則 θ 值要大於 $\theta_{\alpha(s,m,n)}$ (林清山, 民 80 , P. 406)，則 θ 值達顯著水準。可知， Λ 與 θ 各有其對照之分配表。

用 SAS 與 SPSS 執行 MANOVA 後，所呈現之數值並非如上所述，而是將量數透過轉換 (transformation) 而成為近似的 F 分配 (approximately an F distribution)，而有 F 值。當資料只有二組時，F 值可藉下列公式求得 (Maraculo & Levin, 1983)，但當資料為三組時，計算公式複雜，請詳參 Haase 和 Ellis (1987)。

$$F(\Lambda) = ((N - P - 1)/P) * ((1 - \Lambda)/\Lambda)$$

$$F(\theta) = ((N - P - 1)/P) * (\theta/(1 - \theta))$$

$$F(T) = ((N - P - 1)/P) * \lambda$$

(N 為人數， P 為依變項之個數， $F(\theta)$ 之計算適用於 SPSS 之執行結果)。

當執行 MANOVA 時，只有二組資料 (Hotelling's T)，則 Λ 、V、T 和 θ 之 F 值均相同 (見表三，表四)；資料若為三組以上，則 F 值互異 (見表五、表六、表七)。Haase 和 Ellis (1987) 指出，SAS 報表中之 Roy's θ 顯著性的 F 值不用為宜，因其非正確的估計值，若需要，最好以自由度 (s, m, n) 對照 θ 分配表 (林清山, 民 80 ; SPSS, 1986)。s, m, n 之計算公式如下： $s = \min(K - 1, P)$ ； $m = (|K - P - 1| - 1)/2$ ； $n = (N - K - P - 1)/2$ 。 N 為人數； K 為組數； P 為依變項個數。此 (s, m, n) 之數值，於 SAS 與 SPSS 執行 MANOVA 時，均會列出供作參考。SPSS 與 SAS 報表不同處在於：SPSS 報表上 Roy's 處只列出 θ 值 ($\theta = \lambda \max / (1 + \lambda \max)$)，其餘空白；而 SAS 列出最大的特徵值為 θ 值，且列出 F 值與其他相關資料。

四、單因子、二因子 ANOVA 與單因子、二因子 MANOVA 之異同

MANOVA 與 ANOVA 之基本結構相同，唯一不同處為 MANOVA 同時處理多個依變項，且 MANOVA 亦能處理 ANOVA 的問題，然而 ANOVA 却不能處理 MANOVA 的問題。

文中已陳述特徵值在 MANOVA 中所扮演的角色，亦說明了四種顯著性統計量數 (Λ 、V、T、 θ) 與特徵值的關係，及其以 F 近似值作顯著性之檢定，故採 SAS 和 SPSS 作資料分析，使前項之說明更為具體。

分析之資料取自吳明隆 (民 82) 之國小學生電腦態度之研究，自其中隨機抽取 350 名作分析，分析的變項如下：自變項包括性別、年級 (五、六年級)、學電腦時間 (四個類別)，各自變項水準分別為 2, 2 與 4。依變項分別為電腦態度、特質焦慮與控制信念。本文提供統計分析結果，但不作意義上的解釋。擬分析的事項分列如下：(一) 單因子 ANOVA，同時採 MANOVA；(二) 二因子不等組 ANOVA，同時採 MANOVA；(三) 單因子 MANOVA (SAS 與 SPSS)；(四) 二因子不等組 MANOVA (SAS 與 SPSS)。

(一) 單因子 ANOVA，同時採 MANOVA

變項說明：自變項：性別；依變項：電腦態度。

方法：t 檢定，GLM, MANOVA。

相同的資料，以上述三種方法分析，結果列於表三。



表三 t 檢定與 MANOVA 之結果
t 檢定

	N	M	SD	df	t	P
女	170	108.0647	14.4898	348	-2.2855	.0229
男	180	111.7944	15.9509			
MANOVA						
Error SSCP = 81025.68 Type III SSCP FOR SEX = 1216.21 $\lambda = .0150$						
S=1 M=-0.5 N=173.5						
Statistic		Value	F	Num DF	Den DF	Pr > F
Wilks' Lambda		0.98521174	5.2236	1	348	0.0229
Pillai's Trace		0.01478826	5.2236	1	348	0.0229
Hotelling-Lawley Trace		0.01501023	5.2236	1	348	0.0229
Roy's Greatest Root		0.01501023	5.2236	1	348	0.0229
GLM						
Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F	
A1	1	1216.2144631	1216.2144631	5.22	0.0229	
Error	348	81025.6826797	232.8324215			

從表三中可得知：三種方法之結果相同。

1. 由 t 檢定，得知 $t = -2.2855$, $P = .0229$ 。

2. 採 MANOVA 時， Λ , V , T , θ 之 F 值均為 5.2236, $P = .0229$, 符合 $F = t^2$ 。

因本資料只有二組，故有一特徵值 ($\lambda = .015$)， Λ , V , T , θ 之值可依表二之公式得之。 $S = 1$, $M = -.05$, $N = 173.5$ 亦可由前述公式得之，誤差之 SSCP = 81025.68，性別變項之 SSCP = 1216.21。因本資料分析只有一個依變項，故 SSCP 是一個純量 (scalar) 而非矩陣 (matrix) 。

3. 表之下半部為採一般線性模式 (GLM) 之解法，F 值為 5.22, $P = .0229$ ，性別之 SS 為 1216.21 與誤差之 SS 為 81025.68，即為 MANOVA 之二個 SSCP 。

4. θ 值為 λ 值 (.015)，因此處只有一個特徵值，故 H 與 θ 之值是相同的，在 SAS 報表中是如此。而 SPSS 報表中則不然。

(二)二因子不等組 ANOVA，同時採 MANOVA

變項說明：自變項：性別與年級；依變項：電腦態度。

方法：ANOVA 與 MANOVA 。

本資料為不等組之二因子 ANOVA，採用 SAS 之 GLM，將 SS1 至 SS4 的資料均列出，比照 MANOVA 的結果（見表四）。

表四 二因子不等組 ANOVA 與 MANOVA 分析

Source	DF	Sum of Squares		Mean Square	F Value	Pr > F
		Model	Error			
Model	3	1612.0793539	537.3597846		2.31	0.0765
Error	346	80629.8177890	233.0341555			
Corrected Total	349	82241.8971429				
GLM						
Source	DF	SS	Mean Square	F Value	Pr > F	
(Type I)	SEX	1	1216.2145	1216.2145	5.22	0.0229
	GRADE	1	31.0643	31.0643	0.13	0.7153
	SEX*GRADE	1	364.8006	364.8006	1.57	0.2117
(Type II)	SEX	1	1201.7962	1201.7962	5.16	0.0238
	GRADE	1	31.0643	31.0643	0.13	0.7153
	SEX*GRADE	1	364.8006	364.8006	1.57	0.2117
(Type III)	SEX	1	1229.2090	1229.2090	5.27	0.0222
	GRADE	1	37.0761	37.0761	0.16	0.6902
	SEX*GRADE	1	364.8006	364.8006	1.57	0.2117
(Type IV)	SEX	1	1229.2090	1229.2090	5.27	0.0222
	GRADE	1	37.0761	37.0761	0.16	0.6902
	SEX*GRADE	1	364.8006	364.8006	1.57	0.2117
MANOVA						
(SEX)	S=1	M=-0.5	N=172.5			
Statistic		Value	F	Num DF	Den DF	Pr > F
Wilks' Lambda		0.98498383	5.2748	1	346	0.0222
Pillai's Trace		0.01501617	5.2748	1	346	0.0222
Hotelling-Lawley Trace		0.01524509	5.2748	1	346	0.0222
Roy's Greatest Root		0.01524509	5.2748	1	346	0.0222
(GRADE)	S=1	M=-0.5	N=172.5			
Statistic		Value	F	Num DF	Den DF	Pr > F
Wilks' Lambda		0.99954038	0.1591	1	346	0.6902
Pillai's Trace		0.00045962	0.1591	1	346	0.6902
Hotelling-Lawley Trace		0.00045983	0.1591	1	346	0.6902
Roy's Greatest Root		0.00045983	0.1591	1	346	0.6902
(SEX*GRADE)	S=1	M=-0.5	N=172.5			
Statistic		Value	F	Num DF	Den DF	Pr > F
Wilks' Lambda		0.99549599	1.5654	1	346	0.2117
Pillai's Trace		0.00450401	1.5654	1	346	0.2117
Hotelling-Lawley Trace		0.00452439	1.5654	1	346	0.2117
Roy's Greatest Root		0.00452439	1.5654	1	346	0.2117
ERROR	SSCP =	80629.8178				
SEX	SSCP =	1229.2090	; λ = .0152451			
GRADE	SSCP =	37.0761	; λ = .0004598			
SEX*GRADE	SSCP =	364.8006	; λ = .0045244			

由表四中得知：二種方法之結果相同。

1.就 ANOVA 之分析，此處採 SS II 之結果，亦即採古典迴歸法（林清山，民78），性別之



SS 為 1229.2090，F 值為 5.27 (P=.0222)；年級之 SS 為 37.0761，F 值為 .16 (P=.6902)；交互作用之 SS 為 364.8006，F 值為 1.57 (P=.2117)。

2. 就 MANOVA 分析，其性別、年級與交互作用之 SSCP 分別列於表四之下半部，其值與 SS II 之結果相同。
3. 因性別、年級及交互作用之自由度均為 1，故各有一個相對應的特徵值，分別是 .0152451，.0004598 與 .0045244（見表四之下半部）。
4. 就性別、年級與交互作用之 H 與 θ 之值是相同的，因各只有一個特徵值。
5. 亦可採階層法 (SS I) 或古典實驗法 (SS II)，結果不再列表呈現。

(三) 單因子 MANOVA (SAS 與 SPSS)

變項說明：自變項：學電腦時間（分為四類：(1)不到半年(2)半年至一年(3)一年至二年(4)二年以上。）依變項：電腦態度、控制信念與特質焦慮。

方法：分別用 SAS 與 SPSS 執行 MANOVA 將結果摘列於表五。

表五 單因子 MANOVA 之結果

(SAS)		E = Error SS & CP Matrix						
		Y1	Y2	Y3				
Y1		80561.911052	-2045.537024	-5348.961296				
Y2		-2045.537024	8975.2536168	381.57194617				
Y3		-5348.961296	381.57194617	6519.8208964				
H = Type III SS&CP Matrix for: YEARS								
		Y1	Y2	Y3				
Y1		1679.9860907	230.2855955	-67.80441822				
Y2		230.2855955	53.02066888	-8.554803317				
Y3		-67.80441822	-8.554803317	3.3676749896				
Characteristic								
		Root						
		0.0264483575						
		0.0019062609						
		0.0000977964						
S=3 M=-0.5 N=171.5								
Statistic		Value	F	Num DF	Den DF	Pr > F		
Wilks' Lambda		0.97228444	1.0807	9 837.3562	0.3744			
Pillai's Trace		0.02776729	1.0775	9 1038	0.3766			
Hotelling-Lawley Trace		0.02845241	1.0833	9 1028	0.3722			
Roy's Greatest Root		0.02644836	3.0504	3 346	0.0287			
NOTE: F Statistic for Roy's Greatest Root is an upper bound.								
(SPSS)								
Multivariate Tests of Significance (S = 3, M = -1/2, N = 171)								
Test Name	Value	Approx. F	Hypothesis DF	Error DF	Sig. of F			
Pillai's	.02777	1.07747	9.00	1038.00	.377			
Hotellings	.02845	1.08330	9.00	1028.00	.372			
Wilks	.97228	1.08073	9.00	837.36	.374			
Roy's	.02577							
Eigenvalues								
Root No.	Eigenvalue							
1	.026							
2	.002							
3	.000							



將表五之內容說明如下：

1. 表之上半部為 SAS 之結果，下半部為 SPSS 之結果。

2. SAS 報表部分：

(1)列出 E 之 SSCP 與 H 之 SSCP，再求出 HE^{-1} 之三個特徵值 (characteristic root)，因 $s = \min(k - 1, p) = \min(4 - 1, 3) = 3$ 。三個特徵值由大 (.02645) 至小 (.00010) 依序排列。

(2) A, V, T 與 θ 之 F 值均不相同，因有三個特徵值。此處 θ 之 F 值是較寬鬆的估計，如同報表上所述，是屬上限 (upper bound)，正確之臨界值應查 θ 分配表。

3. SPSS 報表部分：

(1)此處之 F 值標以 Approx. F，這是與 SAS 報表不同處。

(2)其 A, V, T 值與 SAS 報表同，但 Roy's 之 θ 值則不同。SAS 採最大之特徵值，而 SPSS 採 $\lambda_{\max} / (1 + \lambda_{\max})$ 。

(3) SPSS Roy's 只列 θ 值，不列 F 值，需要者，請自行查表。

(4)三個特徵值與 SAS 報表之特徵值相同。

四二因子 MANOVA (SAS 與 SPSS)

變項說明：自變項：性別與學習電腦時間（分四類）。

依變項：電腦態度與特質焦慮。

方法：分別用 SAS 與 SPSS 執行二因子 MANOVA，將結果分別摘列於表六與表七。

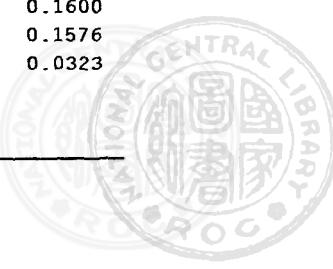
表六 二因子 MANOVA 之結果 (SAS)

***** SEX *****							
Characteristic Root = 0.0829619007							
	Statistic	Value	F	Num DF	Den DF	Pr > F	
Wilks' Lambda		0.92339352	14.1450	2	341	0.0001	
Pillai's Trace		0.07660648	14.1450	2	341	0.0001	
Hotelling-Lawley Trace		0.08296190	14.1450	2	341	0.0001	
Roy's Greatest Root		0.08296190	14.1450	2	341	0.0001	
***** YEARS *****							
Characteristic Root				Characteristic Root			
0.0259693515				0.0014796221			
S=2	M=0	N=170					
Statistic		Value	F	Num DF	Den DF	Pr > F	
Wilks' Lambda		0.97324795	1.5516	6	682	0.1588	
Pillai's Trace		0.02678945	1.5477	6	684	0.1600	
Hotelling-Lawley Trace		0.027444897	1.5554	6	680	0.1576	
Roy's Greatest Root		0.02596935	2.9605	3	342	0.0323	

.bpr Ok..Ok.0.75

NOTE: F Statistic for Roy's Greatest Root is an upper bound.

NOTE: F Statistic for Wilks' Lambda is exact.



表六 二因子 MANOVA 之結果 (SAS)(續)

***** SEX * YEARS *****

Characteristic Root	Characteristic Root
0.0100725911	0.0014887869

S=2 M=0 N=170

Statistic	Value	F	Num DF	Den DF	Pr > F
Wilks' Lambda	0.98855610	0.6560	6	682	0.6853
Pillai's Trace	0.01145872	0.6569	6	684	0.6846
Hotelling-Lawley Trace	0.01156138	0.6551	6	680	0.6860
Roy's Greatest Root	0.01007259	1.1483	3	342	0.3296

NOTE: F Statistic for Roy's Greatest Root is an upper bound.

NOTE: F Statistic for Wilks' Lambda is exact.

表七 二因子 MANOVA 之結果 (SPSS)

***** SEX * YEARS *****

Multivariate Tests of Significance (S = 2, M = 0, N = 169 1/2)

Test Name	Value	Approx. F	Hypoth. DF	Error DF	Sig. of F
Pillai's	.01146	.65691	6.00	684.00	.685
Hotellings	.01156	.65514	6.00	680.00	.686
Wilks	.98856	.65603	6.00	682.00	.685
Roy's	.00997				

Eigenvalues

Root No.	Eigenvalue
1	.010
2	.001

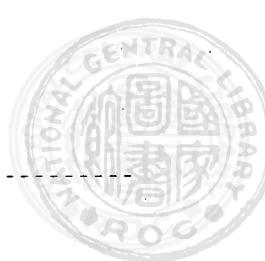
***** YEARS *****

Multivariate Tests of Significance (S = 2, M = 0, N = 169 1/2)

Test Name	Value	Approx. F	Hypoth. DF	Error DF	Sig. of F
Pillai's	.02679	1.54773	6.00	684.00	.160
Hotellings	.02745	1.55544	6.00	680.00	.158
Wilks	.97325	1.55161	6.00	682.00	.159
Roy's	.02531				

Eigenvalues

Root No.	Eigenvalue
1	.026
2	.001



表七 二因子 MANOVA 之結果 (SPSS)(續)

Multivariate Tests of Significance ($S = 1, M = 0, N = 169 1/2$)

Test Name	Value	Approx. F	Hypoth. DF	Error DF	Sig. of F
Pillai's	.07661	14.14500	2.00	341.00	.000
Hotellings	.08296	14.14500	2.00	341.00	.000
Wilks	.92339	14.14500	2.00	341.00	.000
Roy's	.07661				

Eigenvalues

Root No.	Eigenvalue
1	.083

將表六與表七綜合說明如下：

1. 此為二因子 MANOVA，故同二因子 ANOVA，每一個主要效果與交互作用均作檢定，呈現次序稍有不同：SAS 是主要效果先，交互作用後；而 SPSS 之呈現次序則相反。
2. SAS 與 SPSS 內容上大同小異，唯一差異是 Roy's 之值。

五、四種考驗統計量數之抉擇

就 Λ , T , V , θ 四種考驗顯著性統計量數，何者是最佳的選擇，是一個複雜的問題，沒有任何一種方法是普遍地優於或劣於其他方法，但可就考驗力 (power) 和強韌性 (robust) 兩方面分別加以討論。

(一) 考驗力

Λ , T , V , θ 四種方法之相對的考驗力，須視特徵值之結構而定。當只有唯一的特徵值或多個特徵值，而第一個特徵值占絕大的比重，Olson (1976) 稱此為集中結構 (concentrated noncentrality structure)，如 Hand 和 Taylor (1987, P.77) 所舉的例子：有二個特徵值，分別為 4.391 與 .006。於此情形下，Olson 認為考驗力依 θ , T , Λ , V 之次序，依次遞減，換言之，Roy's θ 是最具考驗力。若各個特徵值之大小差不多，Olson (1976) 稱此為分散結構 (diffuse noncentrality structure)，如 Hand 和 Taylor (1987, P.77) 之例子：有二個特徵值，分別為 7.372 和 4.631。於此情形下，Olson 認為 V 最具考驗力， Λ , T , R 次之，但三者間之考驗力差異不大 (Olson, 1976, 1979; Stevens, 1979)。除了注意考驗力之外，尚需留意強韌性。

(二) 強韌性

F 檢定需符合以下之假設：1. 樣本須源自欲研究之母群；2. 資料呈多變量常態分配 (multivariate normal distribution)；3. 依變項之組內變異數同質與各組之依變項間相關係數相等。統計檢定具強韌性是，在違反上述假設的情境下，其犯第一類型錯誤率仍與原訂之 θ 十分接近，亦即不因違反假設，而影響檢定之結果。Olson (1976) 與 Stevens (1979) 指出，於違反假設時，Pillai's V 是較佳的選擇，而不應選擇 Roy's θ ，因此情境下，其犯第一類型錯誤率會增

加。

Olson (1976) 提供使用 MANOVA 者的建議：當誤差之自由度 (df_e) 少於 $10P$ 乘以欲檢定變項之自由度 (df_h) 時，顯著性之檢定採 Pillai's V；若 df_e 大於 $10P$ 乘以 df_h ，採 V, A, T 任何之一皆可。如 $df_e = 341$, $df_h = 2$, $p = 2$ ，則 $341 > 10 * 2 * 2$ ，則顯著性檢定採 V, A, T 皆宜。就考驗力和強韌性為考量的標準，則以 Pillai's V 為宜，而 Roy's θ 較不被接受 (Bird & Hadzi-Pavlovic, 1983; Elliott & Barcikowski, 1993; Stevens, 1979)。

參考書目

吳明隆（民 82）：國民小學學生電腦態度及其相關因素之研究。國立高雄師範大學教育研究所碩士論文。

林清山（民 78）：一般線性迴歸法在細格人數不等多因子設計的應用。測驗年刊，36 輯，95-116。

林清山（民 80）：多變項分析統計法。台北：東華。

Advanced statistics SPSS/PC+ for the IBM PC XT/AT (1986). Chicago IL: SPSS Inc.

Bird, K. D., & Hadzi-Pavlovic, D. (1983). Simultaneous test procedures and the choice of a test statistic in MANOVA. Psychological Bulletin, 93(1), 167-178.

Elliott, R.S., & Barcikowski, R.S. (1993, April). Multivariate test statistics and their approximations: Some problems. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Atlanta. (ERIC Document Reproduction Service No. 359 231).

Fish, L. J. (1988). Why multivariate methods are usually vital. Measurement and Evaluation in Counseling and Development, 21, 130-137.

Freund, R. J., & Littell, R. C. (1981). SAS for linear models: A guide to the ANOVA and GLM procedures. Cary, NC: SAS Institute Inc.

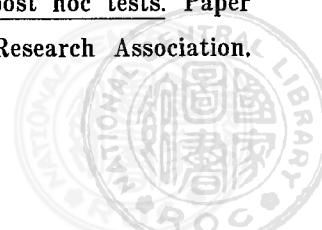
Freund, R. J., Littell, R. C., & Spector, P. C. (1986). SAS system for linear models. Cary, NC: SAS Institute Inc.

Haase, R.F. (1991). Computational formulas for multivariate strength of association from approximate F and χ^2 tests. Multivariate Behavioral Research, 26(2), 227-245.

Haase, R. F., & Ellis, M. V. (1987). Multivariate analysis of variance. Journal of Counseling Psychology, 34(4), 404-413.

Hand, D.J., & Taylor, C.C. (1987). Multivariate analysis of variance and repeated measures: A practical approach for behavioral scientists. New York, NY: Chapman & Hall.

Heausler, N. L. (1987, January). A primer on MANOVA omnibus and post hoc tests. Paper presented at the annual meeting of the Southwest Educational Research Association, Dallas. (ERIC Document Reproduction Service No. 281 852).



- Marascuilo, L. A. & Levin, J. R. (1983). Multivariate statistics in the social sciences: A researcher's guide. Monterey, CA: Brooks/Cole Publishing company.
- Olson, C. L. (1976). On choosing a test statistic in multivariate analysis of variance. Psychological Bulletin, 83(4), 579-586.
- Olson, C. L. (1979). Practical considerations in choosing a MANOVA test statistic: A rejoinder to Stevens. Psychological Bulletin, 86(6), 1350-1352.
- Stevens, J. (1979). Comment on Olson: Choosing a test statistic in multivariate analysis of variance. Psychological Bulletin, 86(2), 355-360.
- Stevens, J. (1996). Applied multivariate statistics for the social sciences (3rd ed.). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.
- Tabachnick, B. G., & Fidell, L. S. (1989). Using multivariate statistics (2nd ed.). New York, NY: Haper & Row.
- Thompson, B. (1986). Two reasons why multivariate methods are usually valid. Paper presented at the annual meeting of the Mid-South Educational Research Association, Memphis.
- Thompson, B. (1994, February). Why multivariate methods are usually vital in research: Some basic concepts. Paper presented at the biennial meeting of the southwestern society for research in human development, Austin. (ERIC Document Reproduction Service No. 367 687).



Multivariate test statistics in multivariate analysis of variance

Tsuey-Shing Fu

There are three reasons why multivariate methods are so important in research. First, multivariate methods limit the inflation of type I experimentwise error rate. Second, multivariate methods honor the nature of reality. Third, multivariate methods take into consideration the intercorrelations among the dependent variables.

The four classic multivariate analysis of variance (MANOVA) tests of statistical significance are Wilks' lambda (Λ), Hotelling trace (T), Pillai's trace (V), and Roy's greatest root (θ). V, T, and are shown in SAS and SPSS printout for MANOVA. The subjects of this paper including as follows: (1) the role of eigenvalue in MANOVA; (2) multivariate test statistics; (3) F-test approximation to .V, T, and θ ; (4) examples of SAS and SPSS, and (5) choosing a multivariate test statistic.

