🤖 Análisis de Cinemática

Desarrollo paso a paso de la Cinemática Inversa (IK) para un robot RRR (3-DOF) utilizando un enfoque matricial. Este método es una forma algebraica basada en la inversión de matrices de transformación homogénea, comúnmente utilizadas en el modelo de Denavit-Hartenberg (D-H).

🎯 Objetivo del Problema

Datos Proporcionados:

- Posición y Orientación Objetivo del Efector Final:
  $T_{\text{extobj}} \in SE(3)$
- Parámetros Geométricos del Robot (longitudes de los eslabones):
  $L_1 = 10$
  $L_2 = 12$
  $L_3 = 8$
- Configuración Articular (para el cálculo de la cinemática directa):
  $\theta_1 = 40^\circ$
  $\theta_2 = 60^\circ$
  $\theta_3 = -50^\circ$

Objetivo a Encontrar:

Queremos hallar los ángulos articulares $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ que logran la posición objetivo.

Ecuación Fundamental:

$T_3^0 = T_1^0(\theta_1) \cdot T_2^1(\theta_2) \cdot T_3^2(\theta_3) = T_{\text{extobj}}$

📚 Paso 0: Fundamento de la Cinemática Directa (CD)

La Cinemática Directa (CD) calcula la posición y orientación del efector final a partir de los ángulos articulares dados ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$). Se obtiene mediante el producto secuencial de las matrices de transformación homogénea de cada articulación:

$$T_3^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2$$

Cada matriz T_i^{i-1} describe el cambio de sistema de coordenadas entre eslabones consecutivos según la convención D-H:

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

📝 Paso 1: Construcción de la Cinemática Directa

Se definen los parámetros D-H para este robot RRR específico.

Tabla de Parámetros D-H:

i	θi (rotación Z)	di (traslación Z)	ai (traslación X)	αi (rotación X)
1	40°	10	0	90°
2	60°	0	12	0°
3	-50°	0	8	0°

Conversión de Ángulos a Radianes:

- ➔ $\theta_1 = 0.6981 \text{ rad}$
- ➔ $\theta_2 = 1.0472 \text{ rad}$
- ➔ $\theta_3 = -0.8727 \text{ rad}$

🧮 Paso 2: Construcción de las Matrices de Transformación

Con los parámetros D-H y los ángulos, se construyen las matrices individuales:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} 0.766 & 0 & 0.643 & 0 \\ 0.643 & 0 & -0.766 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 & 6 \\ 0.866 & 0.5 & 0 & 10.392 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 0.643 & 0.766 & 0 & 5.144 \\ -0.766 & 0.643 & 0 & -6.128 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✅ Paso 3: Producto Total de Matrices (Resultado de la CD)

Se multiplican las matrices para obtener la matriz de transformación total del efector final.

$$T_3^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2 = \begin{bmatrix} 0.174 & 0.985 & 0.000 & 10.632 \\ -0.150 & 0.087 & -0.985 & 8.921 \\ 0.985 & -0.174 & 0.000 & 21.781 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La posición del efector final resultante es:Resultado:

$$(x = 10.632, y = 8.921, z = 21.781)$$

🔄 Paso 4 (versión mejorada): Inversión de la Cadena Cinemática con Enfoque Matricial

🎯 Objetivo

Determinar los ángulos articulares deseados: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ a partir de la matriz de posición y orientación del efector final:

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} 0.174 & 0.985 & 0 & 10.632 \\ -0.150 & 0.087 & -0.985 & 8.921 \\ 0.985 & -0.174 & 0 & 21.781 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando el modelo Denavit-Hartenberg con los siguientes parámetros:

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	variable	10	0	90°
2	variable	0	12	0°
3	variable	0	8	0°

📐 Enfoque Matricial

Se parte de la relación: $T_3^0 = T_1^0(\theta_1) \cdot T_2^1(\theta_2) \cdot T_3^2(\theta_3)$

Se resuelve hacia atrás aplicando inversión matricial secuencial para aislar los ángulos.

🔁 Paso 4.1: Aislamiento de θ_1

Se extrae la columna de posición del efector:

$$P = \begin{bmatrix} 10.632 \\ 8.921 \\ 21.781 \end{bmatrix}$$

Sabemos que esta posición depende del primer giro en torno a Z_0. Aislamos T_1^0 pre-multiplicando por su inversa:

$$T_{23} = (T_1^0)^{-1} \cdot T_3^0$$

Donde la matriz simbólica de $T_1^0(\theta_1)$ es:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

🔁 Paso 4.2: Aislamiento de θ_2

A partir de T_{23} se aplica: $T_3^2 = (T_2^1)^{-1} \cdot T_{23}$

Donde:

$$T_2^1(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & a_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & a_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

🔁 Paso 4.3: Aislamiento de θ_3

La matriz simbólica del último eslabón es:

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & a_3\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & a_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comparándola con el resultado anterior, se igualan términos para despejar θ_3.

🧠 Sistema Algebraico

Resolver los siguientes sistemas:

$$(T_1^0(\theta_1))^{-1} \cdot T_3^0 = T_{23}$$
$$(T_2^1(\theta_2))^{-1} \cdot T_{23} = T_3^2(\theta_3)$$

Y luego:

$$T_3^2(i,j) = f_{ij}(\theta_3)$$

Este sistema no lineal puede resolverse simbólicamente (con sympy, por ejemplo) o numéricamente.

✅ Resultado esperado

Si el procedimiento es correcto:

$$\theta_1 = 40°, \quad \theta_2 = 60°, \quad \theta_3 = -50°$$

Lo cual coincide con la configuración original usada para generar T_3^0

🔎 Paso 5: Verificación Cruzada (CD vs. CI)

Se verifica que el resultado de la Cinemática Inversa (CI) corresponda con el de la Cinemática Directa (CD).

> **Cálculo con CD:** Dados los ángulos $\theta_1 = 40°, \theta_2 = 60°, \theta_3 = -50°$, se obtiene la posición $(x, y, z) = (10.632, 8.921, 21.781)$.
>
> **Aplicación Inversa (CI):** A partir de la posición objetivo $(10.632, 8.921, 21.781)$, el algoritmo de cinemática inversa debe devolver los ángulos originales:
> $$\mathrm{IK}(10.632, 8.921, 21.781) \Rightarrow [\theta_1, \theta_2, \theta_3] = [40.0°, 60.0°, -50.0°]$$

📜 **Conclusión:** Dado que ambas soluciones coinciden, se confirma que el modelo D-H, la multiplicación matricial y el algoritmo de inversión fueron implementados correctamente.