

# Chapter 20（節錄版）：精靈移動作 幾何運算模組

## • Part 1：本章導讀與學習目標

### 學習目標

- 使用 Scratch 精靈移動模擬幾何交點與誤差最小化
- 推導直線外點的垂足與反射點
- 模擬圓與直線交點、圓外切線點與平行線構造
- 使用向量參數化與矩陣方程求解交點座標
- 應用向量投影、叉積與旋轉公式進行幾何推導
- 將幾何運算轉化為 Scratch 程式邏輯並視覺化展示

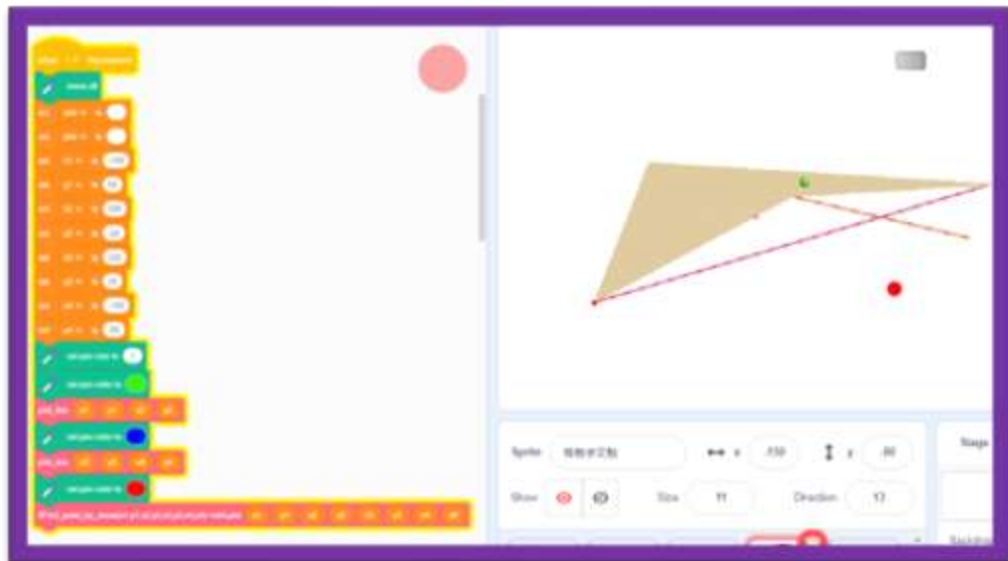
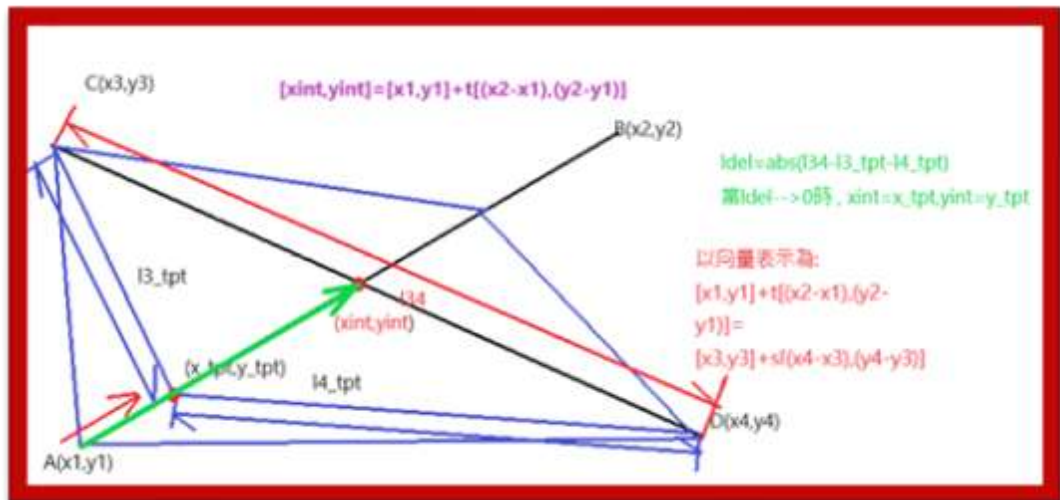
### 核心技能模組

| 能力模組     | 說明                   |
|----------|----------------------|
| 精靈移動模擬   | 微步長移動精靈，尋找交點與誤差最小位置  |
| 向量參數化    | 使用向量表示直線與點，進行交點與投影計算 |
| 投影與反射推導  | 利用點積與中點公式推導反射點座標     |
| 圓與直線交點   | 解二次方程求交點座標           |
| 切線點構造    | 分解向量為投影與垂直分量，構造切點座標  |
| 平行線與旋轉公式 | 使用向量平移與三角函數計算旋轉後座標   |

## • Part 2：精靈移動法幾何模擬

### 兩直線交點

- 精靈沿 AB 線段移動，計算與 CD 線段的距離誤差
- 找出誤差最小點即為交點
- 使用距離差值  $l_{del}$  最小化策略



## 垂足點與反射點

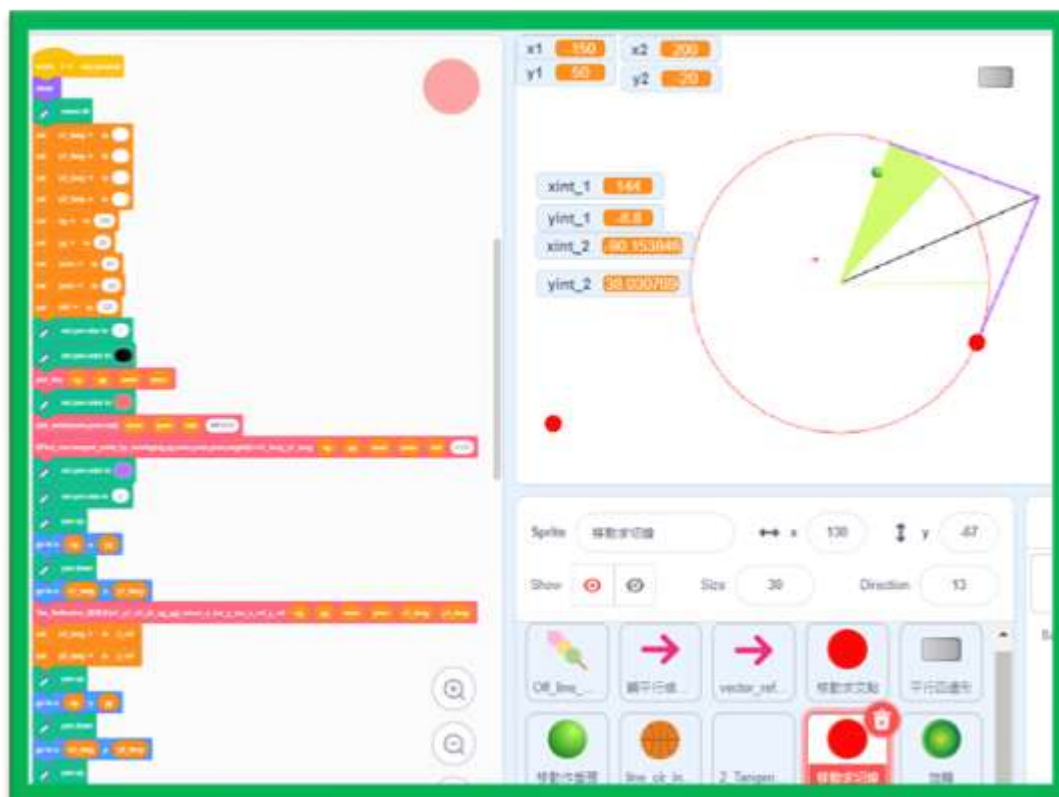
- 精靈沿 AB 線段移動，尋找與外部點 G 距離平方誤差最小點
- 推導垂足點後，使用中點公式計算反射點 G'

## 圓與直線交點

- 精靈沿直線移動，當與圓心距離等於半徑時即為交點
- 第二交點可由對稱點計算

## ✂ 圓上的兩切線點

- 利用畢氏定理與直角三角形關係求出切點
- 精靈移動至切點並繪製切線



## • 📁 Part 3：向量解法模組

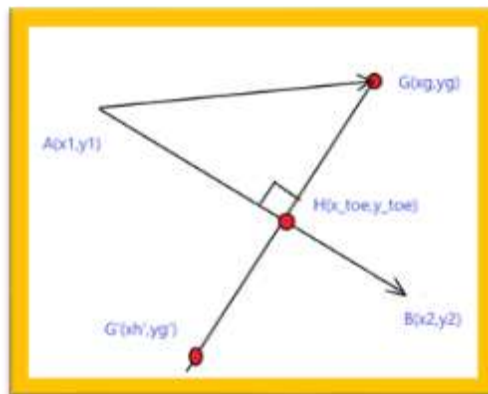
### 兩直線交點（向量參數化）

- 設向量  $AB = b - a$ ， $CD = d - c$
- 解矩陣方程求參數  $t$
- 交點座標： $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$

## 📏 投影點與反射點

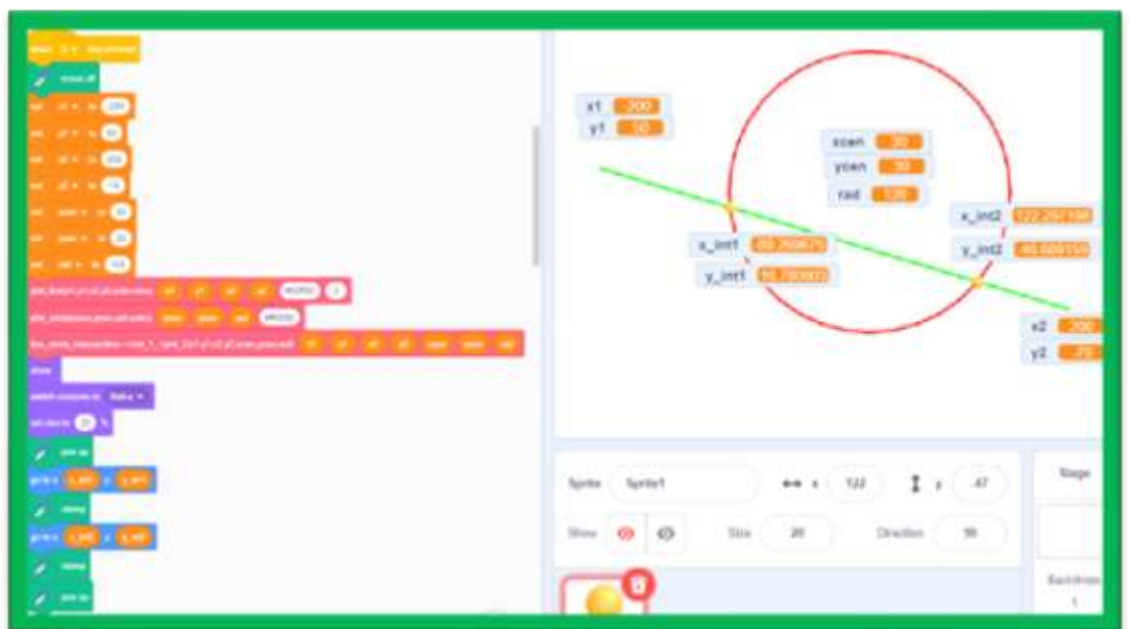
- 投影公式： $t = \frac{\text{dot}(g - a, b - a)}{\|b - a\|^2}$

- 垂足點： $H = a + t(b - a)$
- 反射點： $G' = 2H - G$



## ○ 直線與圓交點

- 將直線參數化代入圓方程
- 得到二次方程  $At^2 + Bt + C = 0$
- 解出  $t_1, t_2 \rightarrow$  得到交點座標



## ✂ 圓外切線點

- 計算投影係數  $k$  與垂直分量  $l$
- 構造單位向量  $u$  與垂直向量  $v$

- 切點： $P=c+kd\pm lv$   
 $P = c + kd \pm lv$

### 平行線構造

- 將向量 AG 平移至 B 點
- 平行線端點  $P = B + (G - A)$

### 點旋轉

- 使用旋轉公式：
$$\begin{aligned} x' &= x_0 + dx \cos \theta - dy \sin \theta \\ y' &= y_0 + dx \sin \theta + dy \cos \theta \end{aligned}$$

## ✖ Part 4：幾何運算總結

•

| 類型     | 解法            |
|--------|---------------|
| 交點問題   | 向量參數化與矩陣方程    |
| 投影與反射  | 點積投影與中點公式     |
| 直線與圓交點 | 參數化代入圓方程形成二次式 |
| 圓的切點   | 向量分解為投影與垂直分量  |
| 平行線構造  | 向量平移          |
| 點旋轉    | 三角函數計算旋轉座標    |

## 📄 Part 5：Scratch 實作習作模組（A - E）

| 編號 | 模組名稱       | 主題         | 延伸挑戰          |
|----|------------|------------|---------------|
| A  | 精靈交點尋找器    | 精靈移動找交點    | 交點動畫、誤差驗證器    |
| B  | 垂足與反射模擬器   | 精靈移動找垂足與反射 | 投影向量顯示器       |
| C  | 圓與直線交點動畫模組 | 精靈移動找交點    | 第二交點計算器、座標標示器 |
| D  | 圓外切線構造模組   | 精靈移動至切點    | 單位向量動畫、切線驗證器  |

|   |         |         |              |
|---|---------|---------|--------------|
| E | 點旋轉動畫模組 | 精靈繞中心旋轉 | 旋轉角度滑桿、向量顯示器 |
|---|---------|---------|--------------|