📘 Chapter 18（節錄版）：三維特徵值與特徵向量模組

- ## 0_📖 本章導讀（Chapter Overview）

🎯 學習目標

- 理解 AX = λX 的代數與幾何意涵
- 建立特徵方程式 Det(A − λI) = 0 並求解 λ
- 解釋特徵向量在二維與三維空間中的方向與交線關係
- 使用 Scratch 與 Python 模擬特徵值解法與向量方向變化
- 應用盛金公式解一元三次特徵方程式
- 掌握平面交線、法向量與特徵基底的幾何情境
- 應用特徵值分析於 PCA、地質應力與資料降維場景

🧠 核心技能模組

能力模組	說明
矩陣與行列式運算	2x2 與 3x3 行列式、反矩陣、Cramer’s Rule
特徵方程式建構	λI − A = 0 → Det(A − λI) = 0
特徵向量幾何解釋	正交性、交線方向、空間基底
Scratch 模擬能力	積木模擬矩陣乘法與向量動畫
Python 對照能力	使用 numpy/sympy 進行矩陣運算與視覺化
盛金公式應用	求解一元三次特徵值並分析根型態
空間建模能力	使用 cross(N1,N2) 推導交線與法向量

- ## 🧩 Part 1：學習動機與矩陣運算基礎

為何學習特徵值與特徵向量？

應用領域	說明
📊 PCA（主成分分析）	資料降維與特徵抽取
🧠 機器學習	特徵空間轉換與分類方向
🪨 地質應力分析	主應力方向與變形軸
🧮 Cramer's Rule	多元聯立方程式求解與矩陣反解

🔧 矩陣與行列式運算

- 二維矩陣：
- 若 A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，如令 DetA=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$=$a_{11} \times a_{22} - a_{12}a \times_{21}$，
- 又如 DetA$\neq$ **0**，則 A 之反矩陣$(inverse\ matrix)A^{-1}$，
- A^{-1}=$\begin{bmatrix} a_{22} & \boldsymbol{-a_{12}} \\ \boldsymbol{-a_{21}} & \boldsymbol{a_{11}} \end{bmatrix}$/DetA
-
- 三維矩陣：
- 如$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{bmatrix}$，則 DetA=a$\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$-b$\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$+c$\begin{vmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} \end{vmatrix}$
- =a$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix}$-d$\begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix}$+$\boldsymbol{g}$ $\begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \end{vmatrix}$
-
- Python 實作：

```
python
def det2(a, b, c, d):
    return a * d - b * c

def det3(a, b, c, d, e, f, g, h, i):
    return a * det2(e, f, h, i) - b * det2(d, f, g, i) + c * det2(d, e, g, h)
```

- # 📊 Part 2：特徵方程式與幾何意義

✅ 特徵方程式定義

📐 幾何解釋矩陣 A，A=$\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$，向量 X，X=$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

常數矩陣 D

D = $\begin{bmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \end{bmatrix}$，則前述之三平面可以寫成

AX=D

另定義 I =$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

令變數λ，則λIX=D

即

AX=$\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \end{bmatrix}$..............(eq1)

λIX=λ$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \end{bmatrix}$… … … … ….(eq2)

$\lambda x = d1,\ \lambda y = d2,\ \lambda z = d3$即,x=d1/λ, y=d2/λ, z=d3/λ,

合併可寫成 AX=λIX，或

$\begin{bmatrix} a11-\lambda & a12 & a13 \\ a21 & a22-\lambda & a23 \\ a31 & a32 & a33-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$… … … . (eq3)，或

$\begin{bmatrix} \lambda-a11 & -a12 & -a13 \\ -a21 & \lambda-a22 & -a23 \\ -a31 & a32 & \lambda-a33 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$................(eq4)

從上面之數學運算，eq1 為空間不通過{0,0,0}之三平面;

Eq2 亦為為空間三平面分別垂直於 x，y，z 軸，eq3 或 eq4 為 eq1 及 Eq2 座標平移結果，將 eq3 或 eq4 寫成聯立方程式:

(a11—λ)x+a12·y+a13·z=0-..................(eq5)

a21·x+(a22·y—λ)+a23·z=0..................(eq6) a31·x+a32·y+(a33－λ)·z=0 ....(eq7)

dot([(a11－λ),a12,a13],[x,y,z])=0-------(eq8)

dot([a21,(a22－λ),a23],[x.y.z])=0.............(eq9)

dot([a31,a32,(a33-λ)],[x,y,z])=0.............(eq10)

eq_5(eq8)，eq6(eq9)，eq7(eq10)分別為通過座標原點[0,0,0]，法線分別為[(a11－λ),a12·,a13]，[a21,(a22－λ),a23·]及[a31·,a32·,(a33－λ)之平面。

因此特徵向量之解答，就是過原點三平面之交點求解問題(eq5~eq7)。

- 特徵向量是方向不變的向量
- 特徵值 λ 是縮放比例
- 幾何上表示三個通過原點的平面，其交點即為特徵向量
- 使用向量叉積：
  - V1=cross(N1,N2)
  - V2=cross(N2,N3)
  - V3=cross(N3,N1)

- ## Part 3：二維與三維特徵向量解析

二維範例

- 矩陣 A：[1322]\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}
- 特徵值：λ=−1,4\lambda = -1, 4
- 特徵向量：

- x+y=0x + y = 0 → 向量如 [1, -1]
- 3x−2y=03x - 2y = 0 → 向量如 [1, 3/2]

📐 正規化

- u=[1,1]u = [1, 1] → [0.7071,0.7071][0.7071, 0.7071]
- v=[1,2/3]v = [1, 2/3] → [0.8320,−0.5547][0.8320, -0.5547]

📐 三維特徵向量幾何解釋

- AX = λX → 三平面交線即為特徵向量
- 若三向量互相垂直：
  - dot(vi,vj)=0\text{dot}(v_i, v_j) = 0
  - cross(vi,vj)=±vk\text{cross}(v_i, v_j) = \pm v_k
- Python 實例展示：
  - 特徵值：[1.9840, 2.0136, 2.0023]
  - 特徵向量矩陣：3 個互相垂直的向量
  - 點積 ≈ 0，叉積符合右手座標系方向

🔧 Part 4：Scratch 特徵值與盛金公式模擬

- 使用 Scratch 模擬 Det(A − λI) 展開與 λ 解法
- 使用盛金公式求解一元三次方程式
- 顯示 AX = λX 的動畫，角色沿特徵向量方向移動
- 可加入根分類器與特徵值排序器模組

🔣 Part 5：重點整理與幾何總結

檢驗方式	結果
dot(v_1, v_2) ≈ 0	垂直
cross(v_1, v_2) = ±v_3	右手或左手座標系
平面關係	特徵向量解法

三平面平行	任一法向量方向皆為特徵向量
兩平面平行、一不平行	取不平行法向量與平行法向量叉積
三平面不平行	任兩法向量叉積即為交線方向

- ## 📝 Part 6：延伸習作模組總覽（A－K）

編號	模組名稱	主題	延伸挑戰
A	特徵值解法模擬器	Det(A － λI) 解法流程	根分類器、特徵值排序器
B	特徵向量方向動畫	AX = λX 動畫	正交基底動畫、交線模擬器
C	Python PCA 模組	協方差矩陣 → 主成分	資料投影、壓縮模擬器
D	Scratch/Python 對照模組	公式轉換與動畫展示	雙語運算器、同步動畫
E	特徵值解法模擬器（進階）	λ 試根與行列式動畫	根分類器、PCA 主軸選取
F	特徵向量方向動畫（進階）	λ 對向量方向影響	正交基底動畫、交線模擬器
G	特徵向量正規		