

双轴各向异性介质中回线源瞬变电磁三维拟态有限体积正演算法研究

周建美^{*1}, 刘文韬¹, 李貅¹, 戚志鹏¹, 刘航¹

1 长安大学地质工程与测绘学院, 西安 710054

摘要 本文采用模拟离散的有限体积法实现了双轴各向异性地层回线源瞬变电磁三维正演。首先引入内积定义, 采用自然边界条件, 将瞬变电磁法的控制方程转化为弱形式表示。将计算区域划分为一系列的控制体积单元, 采用交错网格对控制方程进行模拟有限体积空间离散, 包括旋度算子离散和空间内积离散。基于斯托克斯定理的旋度积分定义公式实现旋度算子离散。中点平均实现电导率双轴各向异性的空间内积离散, 从而得到离散化的控制方程。时间步迭代采用无条件稳定的欧拉后向差分格式。并通过均匀全空间中稳定电流回线源的磁场解析表达式得到回线源初始时刻的电磁场分布。为了同时保证计算精度和效率, 本文采用分段等间隔的时间步迭代, 利用直接法求解器 PARDISO 实现其快速求解。最后通过对比层状模型和各向异性半空间模型的正演计算结果, 验证了本文算法的计算精度和计算效率; 计算三维双轴各向异性模型的正演响应可知, 水平方向电导率变化对电磁响应产生显著影响, 而垂直方向的电导率变化对电磁响应几乎没有影响。产生这一现象的主要原因是回线源产生的感应电流主要是水平方向的, 因此响应主要受到水平方向电导率的影响, 垂直方向的电导率影响很小。

关键词 瞬变电磁; 三维正演; 模拟有限体积法; 各向异性

Research on 3D mimetic finite volume method for loop-source TEM response on biaxial anisotropic formation

Zhou Jianmei^{*1}, Liu Wentao¹, Li Xiu¹, Qi Zhipeng¹

1 College of Geology Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710054

Abstract In this paper, a 3D forward modeling of loop-source transient electromagnetic (TEM) response in biaxial anisotropic formation is proposed by using the mimetic finite volume method (MFVM). Firstly, the definition of inner product is introduced, and the governing equation of TEM method is transformed into weak form under the natural boundary condition. The computational domain is divided into a series of control volume units. The staggered grid is used to simulate the finite volume space discretization of

基金项目 国家自然科学基金重点项目 (51139004), 中国博士后基金项目 (332100150023) 和中央高校基金项目 (310826151055) 联合资助

作者简介 周建美, 男, 1987 年生, 博士, 长安大学讲师, 主要从事电磁法正反演算法研究. (Email: zhoujm@chd.edu.cn)

the governing equations, including the curl operator discretization and the spatial inner product discretization. Discretization of curl operator is based on Stokes' Theorem. Discretization of inner product in biaxial anisotropic formation is based on midpoint average. Backward Euler time stepping method, which is unconditionally stable, is chosen to discretize the governing equation in time. Electromagnetic field distribution at the initial time is obtained by solving the magnetic field of the stable current loop source in the uniform space. When solving the governing equations in time, the MFVM adopts double time step size each m constant time steps (where m is an input parameter) and uses direct method solver PARDISO to ensure the accuracy and efficiency where the coefficient matrix just need to decompose only once for each m time step. Finally, the computational accuracy and computational efficiency of the proposed algorithm are verified by comparing the results of the forward modeling with the layered model and the anisotropic half-space model. The forward response of the 3D biaxial anisotropy model shows that the horizontal conductivity has a significant impact on the electromagnetic response, while the vertical direction of the conductivity change has little effect. The main reason is that the induced current generated by the loop source is mainly horizontal, so the response is mainly affected by the conductivity in the horizontal direction, the conductivity in the vertical direction has little effect.

Keyword transient electromagnetic; 3D forward modeling; finite volume method; anisotropy

1 引言

回线源瞬变电磁法作为一种重要的电磁勘探方法,以其显著的优点(经济、无损、快速、信息丰富、分辨率强等)广泛应用于金属矿产勘探、煤田灾害探测、地下断层划分、地下水探测、隧道超前地质预报等领域(李貅和薛国强, 2013)。三维正演能够为勘探最优化设计提供有力帮助,是三维反演和成像技术发展的前提。薛国强和李貅(2008), Börner (2010), 李建慧和朱自强(2012)综述了瞬变电磁三维正演算法的研究进展。

按照空间离散的不同处理方法,模拟复杂地层模型的瞬变电磁三维正演算法主要包括有限差分法(Wang and Hohmann, 1993), 有限体积法(Haber and Oldenburg, 2002), 有限元法(Um, 2010)。其中有限体积法是一种基于守恒特性的空间离散方法。该方法将计算区域离散为一个个控制体积,在控制体积的离散网格上对原始方程进行积分,利用斯托克斯定理得到控制体积边界上的环量积分形式,通过对边界上的环量进行离散得到相应的离散方程。有限差分法是直接根据微分方程导出,不涉及积分过程,导数离散借助于Taylor展开,离散精

度主要取决于对导数处理的精度，因此不能保证物理量的守恒特性(Mackie等, 1994)。与有限差分法相比，有限体积离散是根据积分方程导出的（对每一个控制体积进行积分），其精度不仅取决于对导数处理的精度，还取决于积分的精度，而且积分过程能够保证物理量的守恒特性。与有限元法一样，有限体积法也适用于结构化(Haber and Oldenburg, 2002)或非结构化网格(Jahandari and Farquharson, 2015)。基于这些特点，有限体积法在电磁场三维正演模拟中得到了较广泛的应用(Haber and Oldenburg, 2002; Weiss and Constable, 2006; Haber and Heldmann, 2007; 杨波，徐义贤和何展翔, 2012; 张烨和汪宏年, 2012; Marchant and Haber, 2014; Jahandari and Farquharson, 2015)。

近年来一种改进的有限体积空间离散方法——基于模拟离散的有限体积法(MFVM)得到了大力的发展。模拟有限体积算法除了保持有限体积法的守恒特性和适用于非结构化网格的特性外，该算法还能够更有效的处理复杂构造，比如各向异性和强非均匀性区域的离散，同时避免产生各种非物理伪解(Castillo and Miranda, 2013)。Hyman和Shashkov (1997a, 1997b)系统的给出了MFVM的数学基础，基于支撑算子理论构建了一次算子和导出算子（梯度GRAD, 旋度CURL和散度DIV）在逻辑正交网格下的离散，实现了任意二阶算子（比如DIV GRAD, CURL CURL）的离散，并给出了精确的内积离散方法。MFVM已经应用于多孔介质(Hyman and Shashkov, 2001)、流体动力学(Barbosa and Daube, 2005)、图像处理(Yuan and Sheng, 2007)、广义相对论(Bartolo, 2004)以及电磁场(Hyman and Shashkov, 1999; Haber and Ruthotto, 2014; 彭荣华和胡祥云, 2016)的数值模拟。Lipnikov等人(2014)总结了MFVM的最新进展。

随着电磁勘探方法的发展，越来越多的学者认识到电导率各向异性在地下构造中分布的普遍性以及对电磁响应数据解释的影响(Everett and Constable, 1999; Collins, 2006; Li and Dai, 2011; Dennis, 2012; Mattsson, 2013; Martí, 2013; Yin, 2016)。本文研究采用模拟有限体积算法实现双轴各向异性地层(Everett and Constable, 1999)回线源瞬变电磁三维正演。首先引入内积定义，采用简单的自然边界条件，将瞬变电磁法的控制方程转化为弱形式表示。将计算区域划分为一系列的控制体积单元，采用交错网格对弱形式的控制方程进行有限体积空间离散，包括旋度算子离散和空间内积离散(Hyman and Shashkov, 1999)。旋度算子离散基于斯托克斯定理的旋度积分定义公式。采用中点原则实现电导率双轴各向异性的空间内积离散，从而得到离散化的控制方程。时间步迭代采用无条件稳定的欧拉后向差格式(Haber and Oldenburg, 2002)。并通过均匀全空间中稳定电流回线源的磁场解析表达式，给出回线源初始时刻的电磁场分布。为了同时保证计算精度和效率，本文采用分段等间

隔的时间步迭代，利用直接法实现其快速求解。最后通过各向异性半空间模型、层状模型和三维模型的正演计算结果对比，验证本文算法的计算精度，通过典型三维各向异性模型的计算分析各向异性对瞬变电磁响应的影响。

2 正演算法

瞬变电磁三维正演算法分为空间离散和时间迭代两部分内容。本文采用模拟有限体积算法实现空间离散，采用隐式时间步迭代算法实现时间迭代。

2.1 空间离散的模拟有限体积算法

控制方程

瞬变电磁法对应的时间域 Maxwell 方程，忽略位移电流：

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mu^{-1} \vec{B} - \vec{\sigma} \vec{E} = \vec{s} \quad (1b)$$

其中 \vec{E} 是电场强度矢量， \vec{B} 是磁感应强度矢量， t 是时间， $\vec{\sigma} = \text{diag}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ 是各向异性的电导率张量， μ 是磁导率， \vec{s} 是外加源项。

为了求解方程 (1)，还需要补充边界条件和初始条件。本文采用简单的自然边界条件 (Haber and Ruthotto, 2014)：

$$\vec{B} \times \vec{n} = 0 \quad (2a)$$

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad (2b)$$

对于回线源瞬变电磁法，在 $t=0$ 时刻空间中只存在稳定的磁场分布，即初始条件为：

$$\vec{B}(0) = \vec{B}_0 \quad (3)$$

其中 \vec{B}_0 为 $t=0$ 时刻空间中的磁场分布。

弱形式表示

与有限元方法一样，MFVM 处理弱形式的控制方程。按照泛函分析理论， \vec{E} 和 \vec{B} 位于不

同的 Sobolev 空间 (Volakis 等, 2006), 即 $\vec{E} \in H(\text{Curl}; \Omega)$, $\vec{B} \in H(\text{Div}; \Omega)$ 。定义内积为:

$$(\vec{A}, \vec{G}) = \int_{\Omega} \vec{A} \cdot \vec{G} dV \quad (4)$$

其中 \vec{A} 和 \vec{G} 为空间 $H(\text{Curl}; \Omega)$ 或 $H(\text{Div}; \Omega)$ 中的任意参数。

为了得到弱形式的控制方程, 引入与 \vec{E} 位于相同的 Sobolev 空间的参数 \vec{W} 、与 \vec{B} 位于相同的 Sobolev 空间的参数 \vec{F} 。将方程(1a)与 \vec{F} 做内积, 方程(1b)与 \vec{W} 做内积, 得到:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}, \vec{F}) + (\nabla \times \vec{E}, \vec{F}) = 0 \quad (5a)$$

$$(\nabla \times (\mu^{-1} \vec{B}), \vec{W}) - (\vec{\sigma} \vec{E}, \vec{W}) = (\vec{s}, \vec{W}) \quad (5b)$$

利用分部积分公式:

$$(\nabla \times (\mu^{-1} \vec{B}), \vec{W}) = (\mu^{-1} \vec{B}, \nabla \times \vec{W}) - \int_{\partial\Omega} \mu^{-1} \vec{W} \cdot (\vec{B} \times \vec{n}) dS \quad (6)$$

根据边界条件 $\vec{B} \times \vec{n} = 0|_{\partial\Omega}$, 利用公式(6), 得到弱形式的控制方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}, \vec{F}) + (\nabla \times \vec{E}, \vec{F}) = 0 \quad (7a)$$

$$(\mu^{-1} \vec{B}, \nabla \times \vec{W}) - (\vec{\sigma} \vec{E}, \vec{W}) = (\vec{s}, \vec{W}) \quad (7b)$$

由方程(7)可知, 由于 \vec{E} 和 \vec{W} 位于相同的 Sobolev 空间 $H(\text{Curl}; \Omega)$, 因此空间离散只需要求取空间 $H(\text{Curl}; \Omega)$ 参数的旋度即可。对比方程(1), 弱形式控制方程不要求取 \vec{B} 的旋度, 由于求取旋度是一种微分运算, 因此弱形式控制方程弱化了对电磁场的可微性。

空间离散

设定整个网格剖分区域的 6 个面均为规则矩形, 采用正交规则矩形网格, 在 x、y 和 z 三个方向上离散网格单元数为 n_x 、 n_y 和 n_z 。典型的控制体积网格单元如图 1 所示, 定义网格中心点为 (i, j, k) 。根据方程(1a), \vec{E} 的旋度对应 \vec{B} , 定义 \vec{E} 在网格棱边中心, 三个方向的场点分别为 $E_{i, j \pm 1/2, k \pm 1/2}^x$ 、 $E_{i \pm 1/2, j, k \pm 1/2}^y$ 和 $E_{i \pm 1/2, j \pm 1/2, k}^z$, 定义 \vec{B} 在网格面中心, 三个方向的场点分别为 $B_{i \pm 1/2, j, k}^x$ 、 $B_{i, j \pm 1/2, k}^y$ 和 $B_{i, j, k \pm 1/2}^z$ 。

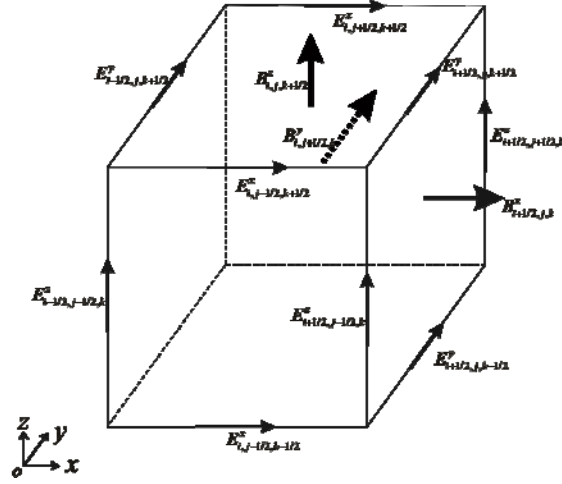


图 1 网格单元 (i, j, k)

Fig.1 grid cell (i, j, k)

由公式(7)可知，空间离散主要包含两部分内容：旋度算子离散和空间内积离散。MFV 采用积分形式的斯托克斯定理处理电场旋度的离散。对于网格单元 (i, j, k) ，在 x 、 y 和 z 三个方向上的单元网格长度记为 h_{xi} 、 h_{yj} 和 h_{zk} 。单元网格 6 个表面分别记为 $S_{i\pm 1/2,j,k}$ 、 $S_{i,j\pm 1/2,k}$ 和 $S_{i,j,k\pm 1/2}$ 。以表面 $S_{i+1/2,j,k}$ 为例，计算电场的旋度 x 方向的分量，即关于表面 $S_{i+1/2,j,k}$ 的投影为：

$$(\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n}_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{h_{yj}h_{zk}} \oint_{\partial S_{i+1/2,j,k}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (8)$$

根据中点积分规则可以得到方程(8)右端项线积分的离散表示为：

$$\oint_{\partial S_{i+1/2,j,k}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = h_{yj} \left[-E_{i+1/2,j,k+1/2}^y + E_{i+1/2,j,k-1/2}^y \right] + h_{zk} \left[E_{i+1/2,j+1/2,k}^z - E_{i+1/2,j-1/2,k}^z \right] \quad (9)$$

同理计算电场的旋度 y 方向分量为：

$$(\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n}_{i,j+1/2,k} = \frac{\left[h_{xi} \left(-E_{i,j+1/2,k+1/2}^x + E_{i,j+1/2,k-1/2}^x \right) + h_{zk} \left(E_{i+1/2,j+1/2,k}^z - E_{i-1/2,j+1/2,k}^z \right) \right]}{h_{xi}h_{zk}} \quad (10)$$

计算电场的旋度 z 方向分量为：

$$(\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n}_{i,j,k+1/2} = \frac{\left[h_{xi} \left(-E_{i,j+1/2,k+1/2}^x + E_{i,j-1/2,k+1/2}^x \right) + h_{yj} \left(E_{i+1/2,j,k+1/2}^y - E_{i-1/2,j,k+1/2}^y \right) \right]}{h_{xi}h_{yj}} \quad (11)$$

根据公式(8)-(11)，可以将旋度算子整理为矩阵形式：

$$\nabla \times \vec{E} = \text{CURL} \mathbf{e} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{e} \quad (12)$$

其中 \mathbf{P} 为包含剖分网格所有表面面积的对角矩阵, \mathbf{L} 为包含剖分网格所有棱边长度的对角矩阵, \mathbf{e} 是网格中电场 \vec{E} 的矩阵表示形式, \mathbf{C} 为包含 0 和 ± 1 的矩阵, 其形式表达为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}_{yz} & -\mathbf{D}_{zy} \\ -\mathbf{D}_{xz} & 0 & \mathbf{D}_{zx} \\ \mathbf{D}_{xy} & -\mathbf{D}_{yx} & 0 \end{bmatrix}_{nb \times ne}$$

其中, nb 为剖分网格所有表面数, ne 为剖分网格所有棱边数, $\mathbf{D}_{ij}(i, j = x, y, z)$ 为各方

向上的差分矩阵, 如 $\mathbf{D}_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{[nz*ny*(nx+1)] \times [(nz+1)*ny*(nx+1)]}$,

$nr, r = x, y, z$ 分别表示各方向网格数

由公式(7)可知, 空间内积离散包含两种不同类型: 位于面中心点的参数内积 (\vec{B}, \vec{F}) 和位于棱边中心的参数内积 $(\vec{\sigma E}, \vec{W})$ 。设定网格单元内部的电导率均一, 内积计算可以采用简单的中心点算术平均来求得。

对于网格单元 (i, j, k) 中, 面中心点参数内积即:

$$(\vec{B}, \vec{F}) = \sum_{i,j,k} \int_{\Omega_{i,j,k}} (B_{i,j,k}^x F_{i,j,k}^x + B_{i,j,k}^y F_{i,j,k}^y + B_{i,j,k}^z F_{i,j,k}^z) dV \quad (13)$$

由于 \vec{B} 和 \vec{F} 都定义在网格面中心, 对于一个网格单元, 在一个方向上有 2 个面中心, 因此:

$$\int_{\Omega_{i,j,k}} (B_{i,j,k}^x F_{i,j,k}^x) dV = v_{i,j,k} \left(\frac{B_{i-1/2,j,k}^x F_{i-1/2,j,k}^x + B_{i+1/2,j,k}^x F_{i+1/2,j,k}^x}{2} \right) \quad (14a)$$

$$\int_{\Omega_{i,j,k}} (B_{i,j,k}^y F_{i,j,k}^y) dV = v_{i,j,k} \left(\frac{B_{i,j-1/2,k}^y F_{i,j-1/2,k}^y + B_{i,j+1/2,k}^y F_{i,j+1/2,k}^y}{2} \right) \quad (14b)$$

$$\int_{\Omega_{i,j,k}} (B_{i,j,k}^z F_{i,j,k}^z) dV = v_{i,j,k} \left(\frac{B_{i,j,k-1/2}^z F_{i,j,k-1/2}^z + B_{i,j,k+1/2}^z F_{i,j,k+1/2}^z}{2} \right) \quad (14c)$$

其中 $v_{i,j,k}$ 是网格单元 (i, j, k) 的体积。综合公式(13)和(14), 采用矩阵形式表示, 即为:

$$(\vec{B}, \vec{F}) = \mathbf{f}^T \mathbf{M}_f \mathbf{b} \quad (15)$$

其中 \mathbf{f} 和 \mathbf{b} 为 \vec{F} 和 \vec{B} 的矩阵表示形式, \mathbf{M}_f 的具体形式如下:

$$\mathbf{M}_f = \text{diag} \begin{pmatrix} (\mathbf{A}_{fx})^T \mathbf{v} \\ (\mathbf{A}_{fy})^T \mathbf{v} \\ (\mathbf{A}_{fz})^T \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (16)$$

其中 \mathbf{v} 为包含所有剖分网格单元体积的对角矩阵, $\mathbf{A}_{fr}, r = x, y, z$ 分别对应 B_x 、 B_y 和 B_z 的平均, 具体形式为

$$\mathbf{A}_{fr} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & & \\ & 1/2 & 1/2 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}_{nc \times nr} \quad (17)$$

其中, nc 为剖分网格单元数, nr 为剖分网格 r 方向表面数。

棱边中心的参数内积 $(\bar{\sigma} \vec{E}, \vec{W})$ 离散, 同样是将参数平均到网格单元中心位置, 与面中心点参数内积离散方法类似, 主要的不同点在于: 对于一个网格单元, 在每个方向上有 4 条棱边, 因此每条棱边上的场值比重为 1/4 (如图 2 所示)。定义在网格体中心处的电导率是各向异性的, 即沿不同方向的电导率是不同的。电导率各向异性的这一特性正好与内积计算相结合 (如图 2 所示), 不同方向的内积 $(\bar{\sigma} \vec{E}, \vec{W})$ 计算采用不同的电导率, 从而得到棱边中心的参数内积 $(\bar{\sigma} \vec{E}, \vec{W})$ 离散的矩阵表示为:

$$(\bar{\sigma} \vec{E}, \vec{W}) = \mathbf{e}^T \mathbf{M}_{\sigma_e} \mathbf{w} \quad (18)$$

其中 \mathbf{w} 为 \vec{W} 的矩阵表示形式, \mathbf{M}_{σ_e} 的具体形式为:

$$\mathbf{M}_{\sigma_e} = \text{diag} \begin{pmatrix} (\mathbf{A}_{ex})^T \mathbf{v}_{\sigma_x} \\ (\mathbf{A}_{ey})^T \mathbf{v}_{\sigma_y} \\ (\mathbf{A}_{ez})^T \mathbf{v}_{\sigma_z} \end{pmatrix} \quad (19)$$

\mathbf{v}_{σ_x} , \mathbf{v}_{σ_y} 和 \mathbf{v}_{σ_z} 分别为包含所有网格单元体积与该网格单元不同方向电导率的乘积的

对角矩阵, $\mathbf{A}_{er}, r = x, y, z$ 代表定义在网格棱边中心的 E_r 平均到网格中心的转换矩阵。

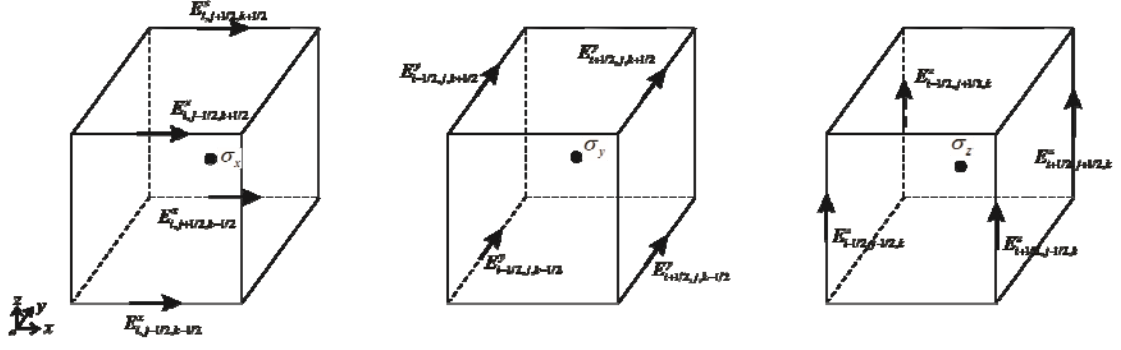


图 2 网格单元中 \mathbf{E} 与 σ 位置分布图

Fig.2 location of \mathbf{E} and σ in grid cell

矩阵表示

在得到了旋度离散和内积离散的具体形式后，我们可以给出控制方程(7)的完整离散，用矩阵形式表示，即为：

$$\mathbf{f}^T \mathbf{M}_f \mathbf{b}_t + \mathbf{f}^T \mathbf{M}_f \text{CURL} \mathbf{e} = 0 \quad (20a)$$

$$\mathbf{w}^T \text{CURL}^T \mathbf{M}_{f\mu} \mathbf{b} - \mathbf{w}^T \mathbf{M}_{e\sigma} \mathbf{e} = \mathbf{w}^T \mathbf{M}_e \mathbf{s} \quad (20b)$$

由于 \mathbf{f} 和 \mathbf{w} 是任意引入的参数 \vec{F} 和 \vec{W} 对应的矩阵形式，因此公式(20)两边可以消去 \mathbf{f} 和 \mathbf{w} ，得到控制方程空间离散的矩阵表示为：

$$\mathbf{b}_t + \text{CURL} \mathbf{e} = 0 \quad (21a)$$

$$\text{CURL}^T \mathbf{M}_{f\mu} \mathbf{b} - \mathbf{M}_{e\sigma} \mathbf{e} = \mathbf{M}_e \mathbf{s} \quad (21b)$$

2.2 隐式时间步迭代算法

时间步离散采用无条件稳定的欧拉后向差分格式(Haber and Oldenburg,2002)，即：

$$\mathbf{b}_t^n = \frac{\mathbf{b}^n - \mathbf{b}^{n-1}}{\Delta t} \quad (22)$$

将公式(22)代入到公式(21)，得到离散控制方程为：

$$\left(\text{CURL}^T \mathbf{M}_{f\mu} \text{CURL} + \Delta t^{-1} \mathbf{M}_{e\sigma} \right) \mathbf{e}^n = \Delta t^{-1} \text{CURL}^T \mathbf{M}_{f\mu} \mathbf{b}^{n-1} - \Delta t^{-1} \mathbf{M}_e \mathbf{s}^n \quad (23a)$$

$$\mathbf{b}^n = \mathbf{b}^{n-1} - \Delta t \text{CURL} \mathbf{e}^n \quad (23b)$$

由公式(21a)可以得到 $\mathbf{b}_t^n = -\text{CURL} \mathbf{e}^n$ 。

初始场

对于回线源瞬变电磁装置，在电流关断之前，空间中只存在稳定电流产生的静态磁场，该静态磁场分布与模型电导率无关，该静态磁场即为 $t = 0$ 时刻空间中的磁场分布 $\mathbf{b}^0 = \mathbf{b}(0)$ 。如果不考虑模型中的磁导率变化，即假定地下模型的磁导率与空气磁导率相同，均为真空磁导率 μ_0 ，则柱坐标系中全空间的磁矢势可以解析的表示为(Bladel,2007):

$$A_\phi(\mathbf{r}, z) = \frac{\mu_0 I}{k\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) P - Q \right] \quad (24)$$

其中回线源中心点位置 (x_0, y_0, z_0) ，回线源半径为 a ，接收点位置 (x_r, y_r, z_r) ， $x = x_r - x_0$ ，

$y = y_r - y_0$ ， $z = z_r - z_0$ ， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $k = \sqrt{\frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}}$ ， $P = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$ 和

$Q = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$ 分别为第一类和第二类椭圆积分。将柱坐标系中磁矢势转化到直

角坐标系中，即 $A_x = A_\phi \cdot \frac{-y}{r}$ ， $A_y = A_\phi \cdot \frac{x}{r}$ ， $A_z = 0$ 。根据磁场与磁矢势的关系

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (25)$$

即可得到初始时刻的磁场。对比公式(25)和公式(1a)，可知 \vec{A} 与 \vec{E} 位于相同的 Sobolev 空间，

即 \vec{A} 与 \vec{E} 在离散网格中位于同一位置。利用公式(24)，计算离散网格棱边中点位置的磁矢势，

利用公式(25)，即可以得到 $t = 0$ 时刻空间中的磁场分布，表示为矩阵形式：

$$\mathbf{b}^0 = \text{CURL} \mathbf{a} \quad (26)$$

采用磁矢势求得磁场而不是直接采用解析形式的磁场表示式，主要是考虑到公式(26)能够保

证初始时刻的磁场 \mathbf{b}^0 是无散的(Hyman and Shashkov, 1999)，即 $\nabla \cdot \vec{B}(0) \equiv 0$ ，根据模拟有限

体积法的特点，则能够保证之后的磁场 \mathbf{b}^n 总是无散的。

线性方程组的求解

在得到初始场 \mathbf{b}^0 之后, 通过求解时间步迭代的线性方程组(23) ($\mathbf{s}^n = \mathbf{0}$) 即可得到不同时刻的电磁场响应。该方程组的求解可以采用迭代法 (Haber and Oldenburg, 2002) 或直接法 (Um, 2010)。直接法对矩阵条件数不敏感, 能有效处理多右端项问题 (Um, 2010; Yin, 2016), 本文采用直接法求解器 PARDISO (Schenk and Gartner, 2004) 求解线性方程组(23)。为了同时保证计算精度和效率, 本文选取分段等间隔的时间步长 (Um, 2010)。

3 数值实例

采用层状地层模型和各向异性均匀半空间模型, 通过与解析解的比较, 验证本文算法(简称为 MFVTD) 的计算精度。通过对典型三维各向异性模型的计算, 分析各向异性对瞬变电磁响应的影响。本文计算设备为 32G 内存、四核主频 3.6GHz 的 Intel i7 CPU 的台式电脑。

3.1 层状地层模型

首先采用层状地层模型, 通过与一维解析解结果 (Ward and Hohmann, 1988) 对比, 验证本文算法的计算精度。层状地层模型参数如图 3 所示, 空气层电导率设置为 10^{-6}S/m , 在电导率为 0.01S/m 半空间地层中存在一个顶部埋深 50m、层厚 50m、电导率 0.1S/m 的低阻层。发射源为地表圆形回线框, 半径为 10m, 发射电流为 1A, 接收回线中心点的 dB_z/dt 和 B_z 。采用非均匀网格剖分, 最小网格长度为 5m, 网格放大系数为 1.3, 总的网格单元数为 $37 \times 37 \times 52$ 。最小时间步长为 $1 \times 10^{-7} \text{s}$, 每间隔 200 步时间步长增大一倍, 总的时间步迭代次数为 1800 次。采用直接法求解器 PARDISO 求解, 需 9 次系数矩阵分解, 1800 次方程求解, 总的计算时间为 350s。与 1D 解析解的对比结果如图 4 所示, 其中图 4a 为接收回线中心点的 dB_z/dt 响应, 图 4b 为 dB_z/dt 三维响应与一维响应的相对误差; 图 4c 为接收回线中心点的 B_z 响应, 图 4d 为 B_z 三维响应与一维响应的相对误差。由图 4 可知, B_z 三维响应与一维响应的相对误差都在 3% 以内, dB_z/dt 三维响应与一维响应的相对误差稍大, 但除了早期 (0.02ms 以内) 的相对误差略大, 其他时间区域的相对误差都 3% 以内。采用本文

MFVM 算法计算的层状模型响应与解析解吻合的很好，说明本文算法是有效的。

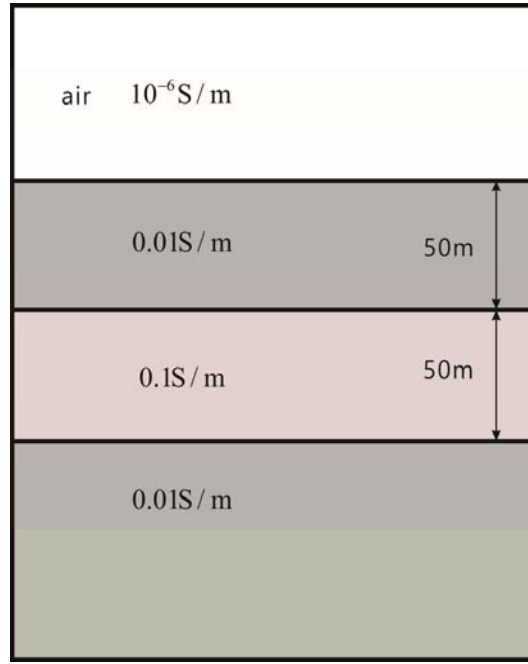


图 3 层状地层模型

Fig.3 layered earth model

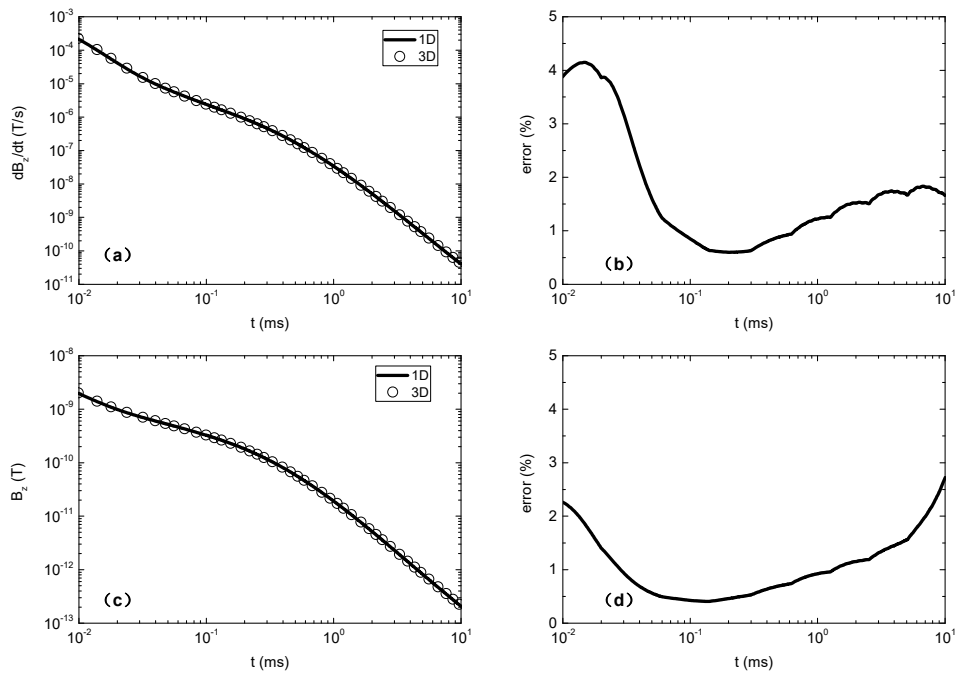


图 4 层状模型 3D 解与 1D 解的对比

(a) dB_z/dt ; (b) dB_z/dt 相对误差; (c) B_z ; (d) B_z 相对误差

Fig.4 Comparison of 3D results with 1D solutions for layered earth model

(a) dB_z/dt ; (b) relative errors for dB_z/dt ; (c) B_z ; (d) relative errors for B_z

3.2 各向异性半空间模型

采用 Yin (2016)的各向异性检验模型，验证本文算法计算各向异性地层响应的有效性。模型如图 5 所示，发射源为边长 20m 的方形回线源，发射电流为 1A，距离地面高度为 30m，

接收回线中心点的 dB_z/dt 和 B_z 。分别计算地层电阻率为 $\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0.1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{S/m}$ 和

$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0.1 \end{pmatrix} \text{S/m}$ 的模型，对应 Yin(2016)文章中 $\varphi = 0^\circ$ 和 $\varphi = 90^\circ$ 的情况。采用非均匀网格剖分，最小网格长度为 2m，网格放大系数为 1.3，总的网格单元数为 $45 \times 45 \times 44$ 。

最小时间步长为 $2 \times 10^{-7} \text{s}$ ，每间隔 200 步时间步长增大一倍，总的时间步迭代次数为 1600 次。采用直接法求解器 PARDISO 求解，需 8 次系数矩阵分解，1600 次方程求解，一次正演总的计算时间为 441s。两种算法的对比结果如图 6 所示，其中图 6a 为接收回线中心点的 dB_z/dt 响应，图 6b 为接收回线中心点的 B_z 响应。由图 6 可知，采用本文 MFVM 算法计算的各向异性模型响应与 Yin(2016)计算的结果吻合的很好，进一步说明了本文算法的有效性。

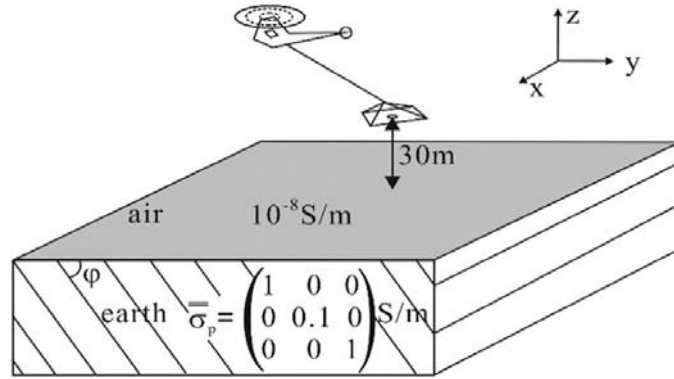


图 5 各向异性地层模型

Fig.5 anisotropic earth model

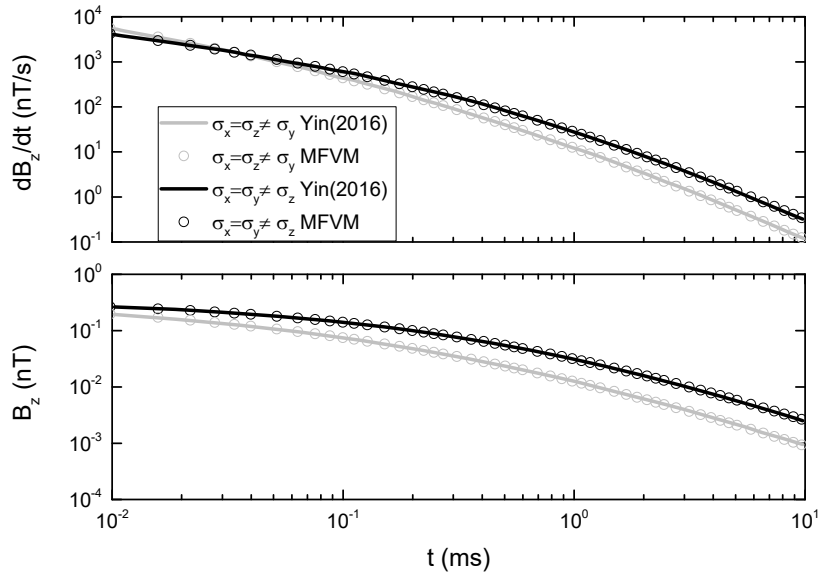


图 6 MFVM 解与 Yin(2016)解的对比。(a) dB_z/dt ; (b) B_z

Fig.6 Comparison of results by MFVM with Yin(2016). (a) dB_z/dt ; (b) B_z

3.3 三维垂直接触带模型

采用 Li (2017)的三维垂直接触带模型, 通过与三维矢量有限元计算结果比较, 进一步验证本文算法的计算精度。该模型最早是由 Commer 和 Newman (2004) 在计算电性源瞬变电磁响应时设计的。模型如图 7 所示, 地表下方是厚度 50m、电导率为 0.1S/m 的覆盖层, 覆盖层下由两部分的垂直接触带构成, 电导率分别为 0.01S/m 和 0.00333333S/m。垂直接触带中间存在一个电阻率为 1S/m 的三维复杂形状的低阻体, 沿走向的长度为 400m, 宽度为 100m, 厚度近似为 500m, 具体的形状如图 7a 所示。空气层电导率设置为 10^{-6} S/m。发射线圈为 100m×100m 的方形回线框, 发射线框的中心点坐标为 (0,50,0)m, 4 个观测点分别位于 (0,50,0)m, (0,150,0)m, (0,450,0)m 和 (0,1050,0)m。采用非均匀网格剖分, 最小网格长度为 10m, 网格放大系数为 1.4, 总的网格单元数为 $58 \times 40 \times 53$, 具体的剖分如图 7b 所示, 总的计算时间为 1060s。本文计算结果与 Li(2017)采用的矢量有限元算法的对比结果如图 8 所示, 由图 8 可知, 两种方法计算的不同观测点处的响应重合的非常好, 进一步说明了本文算法计算的结果是可靠的。

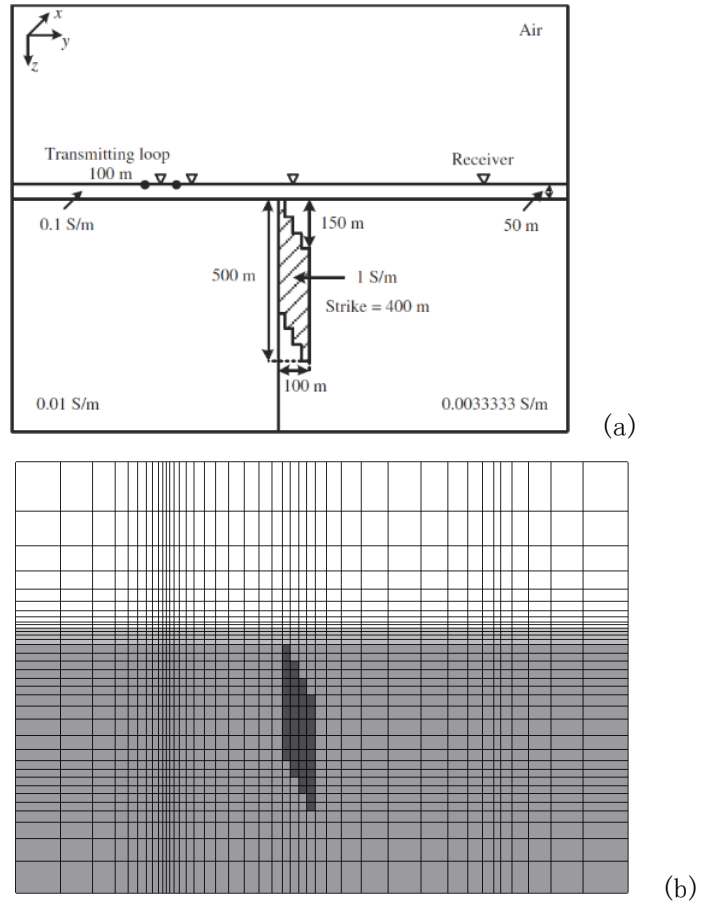


图 7 三维模型 (Li, 2017)。 (a) 模型图, (b) 网格剖分图。

Fig.7 3D earth model (Li, 2017). (a)model, (b) grid for model

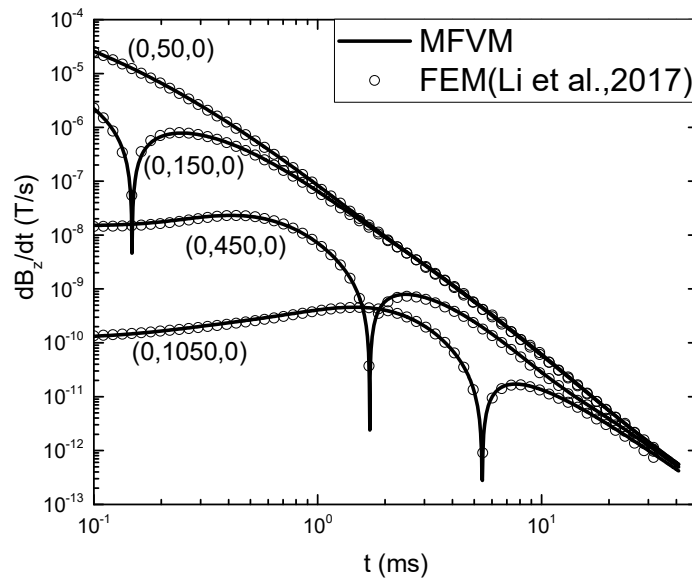


图 8 MFVM 解与 Li(2017)解的对比。

Fig.8 Comparison of results by MFVM with Li(2017).

3.4 各向异性分析

计算典型的三维各向异性地层模型的回线源瞬变电磁响应,分析各向异性对瞬变电磁响应的影响。模型参数如图 9a 所示,在电阻率为 σ_1 半空间地层中存在一个顶部埋深 50m,长宽高尺寸为 $100\text{m} \times 100\text{m} \times 50\text{m}$ 、电阻率为 σ_2 的低阻异常体。发射源为地表圆形回线框,半径为 10m,发射电流为 1A。计算 2 个观测点的响应:(1) 发射回线中心对应低阻矩形块中心,即图 9a 中 s1 处;(2) 发射回线中心偏离低阻矩形块中心 70m,即图 9a 中 s2 处。接收回线中心点的 dB_z/dt 和 B_z 。分别分析 σ_1 和 σ_2 为各向异性时对瞬变电磁响应的影响。

首先计算发射回线中心位于 s1 处的瞬变电磁响应。计算 σ_2 为各向异性对瞬变电磁响应

的影响。即设定 $\sigma_1 = 0.01\text{S/m}$, 分别讨论电导率各向同性 $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & & \\ & 0.1 & \\ & & 0.1 \end{pmatrix} \text{S/m}$, 电

导率各向异性 $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & & \\ & 1 & \\ & & 0.1 \end{pmatrix} \text{S/m}$ 和 $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & & \\ & 0.1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{S/m}$ 的情况。采用非均匀网

格剖分, x 和 y 方向最小网格长度为 10m, z 方向最小网格长度为 5m, 异常体区域采用均匀网格剖分, 网格放大系数为 1.3, 总的网格单元数为 $45 \times 45 \times 52$, 具体的网格剖分如图 9b

所示。选取最小时间步长为 $1 \times 10^{-7}\text{s}$, 每间隔 200 步时间步长增大一倍, 总的时间步迭代次数为 1800 次。采用 MFVTD 计算的正演结果如图 10 所示, 其中图 10a 为接收回线中心点的

dB_z/dt 响应, 图 10b 为接收回线中心点的 B_z 响应。由图 10 可知, 水平方向电导率各向异

性(即 $\sigma_x = \sigma_z \neq \sigma_y$)会导致 B_z 和 dB_z/dt 产生较大的变化(见图 10 中深灰色实线); 但垂

直方向的电导率各向异性(即 $\sigma_x = \sigma_y \neq \sigma_z$)对 B_z 和 dB_z/dt 响应几乎没有影响(见图 10 中黑色虚线)。

计算 σ_1 为各向异性对瞬变电磁响应的影响。即设定 $\sigma_2 = 0.1\text{S/m}$, 分别讨论电导率

各向同性 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0.01 & & \\ & 0.01 & \\ & & 0.01 \end{pmatrix} \text{S/m}$, 电导率各向异性 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0.01 & & \\ & 0.1 & \\ & & 0.01 \end{pmatrix} \text{S/m}$ 和

$\bar{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0.01 & & \\ & 0.01 & \\ & & 0.1 \end{pmatrix} \text{S/m}$ 的情况。网格划分和时间步长选取与 $\bar{\sigma}_2$ 为各向异性时相同。

正演结果如图 11 所示，其中图 11a 为接收回线中心点的 dB_z/dt 响应，图 11b 为接收回线中心点的 B_z 响应。由图 11 可知，水平方向电导率各向异性（即 $\sigma_x = \sigma_z \neq \sigma_y$ ）会导致 B_z 和 dB_z/dt 产生较大的变化（见图 11 中深灰色实线）；但垂直方向的电导率各向异性（即 $\sigma_x = \sigma_y \neq \sigma_z$ ）对 B_z 和 dB_z/dt 响应几乎没有影响（见图 11 中黑色虚线）。

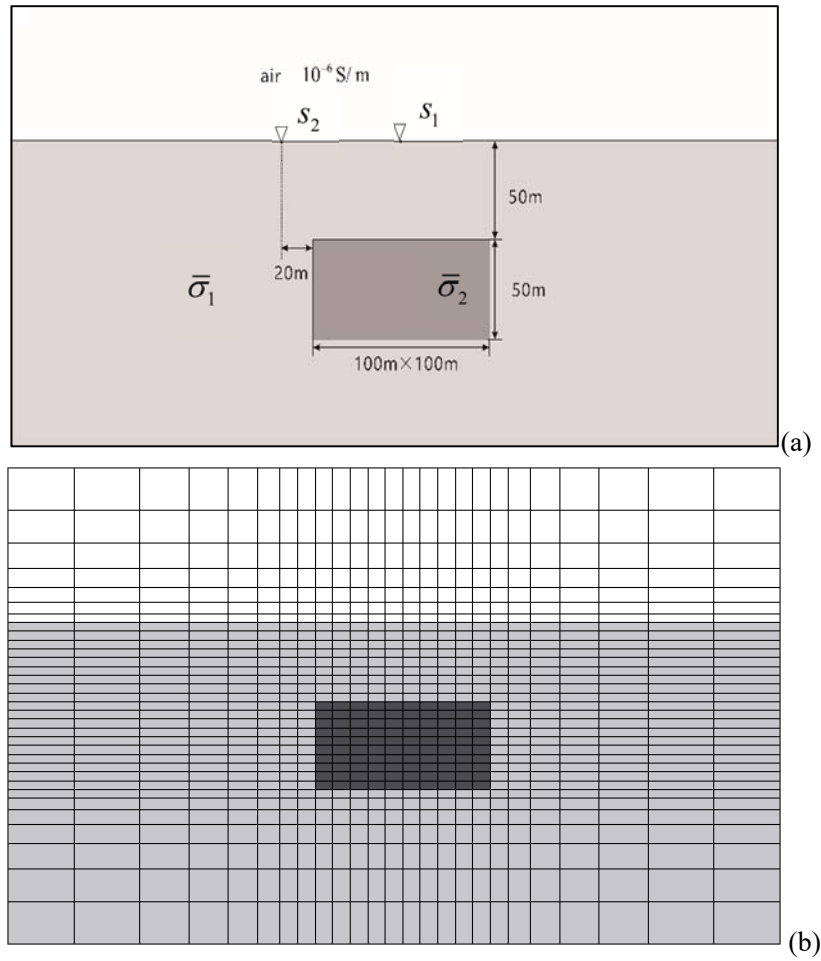


图 9 三维地层模型。(a) 模型示意图；(b) 网格剖分图

Fig.7 layered earth model. (a)model; (b)grid for model.

接下来计算发射回线中心位于 s_2 处的瞬变电磁响应。分别计算 $\bar{\sigma}_2$ 为向异性和 $\bar{\sigma}_1$ 为各向异性对瞬变电磁响应的影响。模型参数设置和网格剖分与发射回线中心位于 s_1 处时保持相同，计算结果如图 12 和图 13 所示， B_z 和 dB_z/dt 响应与发射源位于 s_1 处的响应特征基

本一致。综合图 10~图 13，可知主要是水平方向电导率各向异性（即 $\sigma_x = \sigma_z \neq \sigma_y$ ）对电磁响应产生影响，垂直方向的电导率各向异性（即 $\sigma_x = \sigma_y \neq \sigma_z$ ）对 B_z 和 dB_z/dt 响应几乎没有影响。产生这一现象的原因是回线源产生的感应电流主要是水平方向的，因此主要受到水平方向电导率的影响，而垂直方向的电导率影响很小。

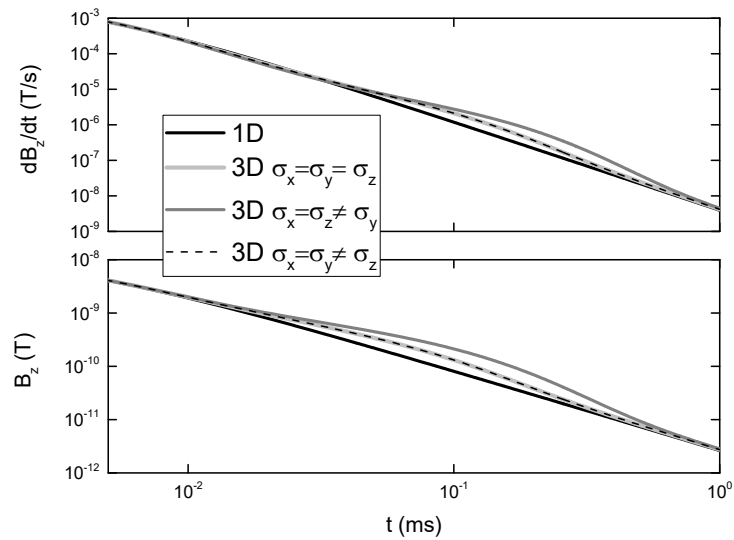


图 10 s_1 处不同各向异性 $\bar{\sigma}_2$ 模型的瞬变电磁响应。(a) dB_z/dt ; (b) B_z

Fig.10 TEM response in s_1 for different anisotropic $\bar{\sigma}_2$. (a) dB_z/dt ; (b) B_z

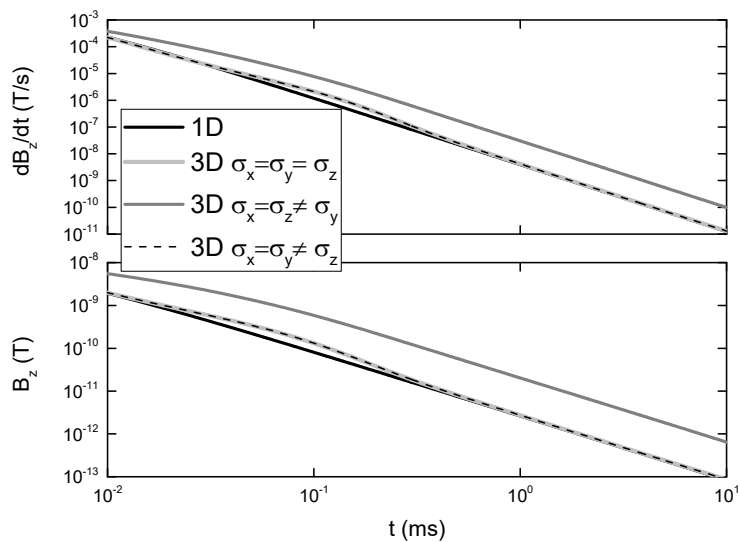


图 11 s_1 处不同各向异性 $\bar{\sigma}_1$ 模型的瞬变电磁响应。(a) dB_z/dt ; (b) B_z

Fig.11 TEM response in s_1 for different anisotropic $\bar{\sigma}_1$. (a) dB_z/dt ; (b) B_z

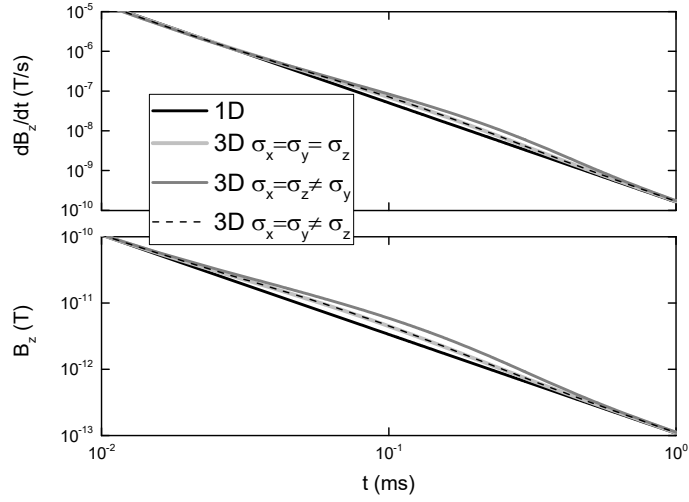


图 12 s_2 处不同各向异性 $\bar{\sigma}_2$ 模型的瞬变电磁响应。(a) dB_z/dt ; (b) B_z

Fig.12 TEM response in s_2 for different anisotropic $\bar{\sigma}_2$. (a) dB_z/dt ; (b) B_z

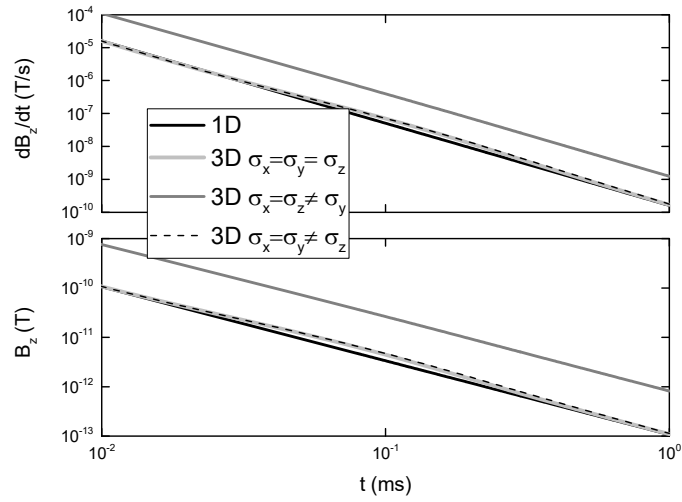


图 13 s_2 处不同各向异性 $\bar{\sigma}_1$ 模型的瞬变电磁响应。(a) dB_z/dt ; (b) B_z

Fig.13 TEM response in s_2 for different anisotropic $\bar{\sigma}_1$. (a) dB_z/dt ; (b) B_z

4 结论

本文采用模拟有限体积算法实现了双轴各向异性地层回线源瞬变电磁三维正演。从弱形式表示的控制方程出发，采用交错网格对控制方程进行模拟有限体积空间离散，包括旋度算子离散和空间内积离散。基于斯托克斯定理的旋度积分定义公式实现旋度算子离散。

中点平均实现电导率双轴各向异性的空间内积离散。时间步迭代采用无条件稳定的欧拉后向差分格式。并通过均匀全空间中稳定电流回线源的磁场解析表达式得到初始时刻的电磁场分布。为了同时保证计算精度和效率,本文采用分段等间隔的时间步迭代,利用直接法求解器 PARDISO 实现其快速求解。

通过层状模型和各向异性半空间模型的正演计算结果对比,验证了本文算法的计算精度和计算效率。计算三维双轴各向异性模型的正演响应可知,水平方向电导率变化对电磁响应产生显著影响,而垂直方向的电导率变化对电磁响应几乎没有影响。产生这一现象的主要原因是回线源产生的感应电流主要是水平方向的,因此响应主要受到水平方向电导率的影响,垂直方向的电导率影响很小。

模拟有限体积分算法能够有效处理复杂模型的三维正演计算。未来的工作包括引入更复杂的内积形式、采用逻辑正交网格和非结构化网格,实现完全各向异性、包含不规则形状的复杂模型的三维快速正演响应。

Reference

- Barbosa E, Daube O. 2005. A finite difference method for 3D incompressible flows in cylindrical coordinates. *Computers & Fluids*, 34(8): 950-971.
- Bartolo C D, Gambini R, Pullin J. 2004. Consistent and mimetic discretizations in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 46(3): 336-354.
- Bladel J G V. 2007. *Electromagnetic Fields*, 2nd Edition. IEEE Press.
- Börner R U. 2010. Numerical modelling in geo-electromagnetics: advances and challenges. *Surveys in Geophysics*, 31(2): 225-245.
- Castillo J E, Miranda G F. 2013. *Mimetic Discretization Methods*. Crc Press.
- Collins J L, Everett M E, Johnson B. 2006. Detection of near-surface horizontal anisotropy in a weathered metamorphic schist at Llano Uplift (Texas) by transient electromagnetic induction. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 158(2-4): 159-173.
- Dennis Z R, Cull J P. 2012. Transient electromagnetic surveys for the measurement of near-surface electrical anisotropy. *Journal of Applied Geophysics*, 76(1): 64-73.
- Everett M E, Constable S. 1999. Electric dipole fields over an anisotropic seafloor: theory and application to the structure of 40Ma Pacific Ocean lithosphere. *Geophysical Journal International*, 136(1): 41-56.
- Haber E, Ascher U, Oldenburg D W. 2002. 3D forward modelling of time domain electromagnetic data. SEG 72nd Annual Meeting.
- Haber E, Heldmann S. 2007. An octree multigrid method for quasi-static Maxwell's equations with highly discontinuous coefficients. *Journal of Computational Physics*, 223(2): 783-796.

- Haber E, Ruthotto L. 2014. A multiscale finite volume method for Maxwell's equations at low frequencies. *Geophysical Journal International*, 199(2): 1268-1277.
- Hyman J M, Shashkov M. 1997. Natural discretizations for the divergence, gradient, and curl on logically rectangular grids. *Computers & Mathematics with Applications*, 33(4), 81-104.
- Hyman J M, Shashkov M. 1997. Adjoint operators for the natural discretizations of the divergence, gradient and curl on logically rectangular grids. *Applied Numerical Mathematics*, 25(4): 413-442.
- Hyman J M, Shashkov M. 1999. Mimetic discretizations for Maxwell's equations. *Journal of Computational Physics*, 151(2): 881-909.
- Hyman J, Morel J, Shashkov M, et al. 2001. Mimetic Finite Difference Methods for Diffusion Equations. *Computational Geosciences*, 6(3-4): 333-352(20).
- Jahandari H, Farquharson C G. 2015. Finite-volume modelling of geophysical electromagnetic data on unstructured grids using potentials. *Geophysical Journal International*, 202(3): 1859-1876.
- Lipnikov K, Manzini G, Shashkov M. 2014. Mimetic finite difference method. *Journal of Computational Physics*, 2014. 257: 1163-1227.
- Li J H, Zhu Z Q, Zeng S H, et al. 2012. Progress of forward computation in transient electromagnetic method. *Progress in Geophys. (in Chinese)*, 27(4): 1393-1400, doi: 10: 6038/j. issn. 1004-2903.2012.04.013.
- Li, J., Farquharson, C.G. and Hu, X., 2017. 3D vector finite-element electromagnetic forward modeling for large loop sources using a total-field algorithm and unstructured tetrahedral grids. *Geophysics*, 82(1): E1-E16.
- Li X, Xue G Q. 2013. Study on Pseudo-seismic Migration Imaging of Transient Electromagnetic Method. Science Press (in Chinese).
- Li Y, Dai S. 2011. Finite element modelling of marine controlled-source electromagnetic responses in two-dimensional dipping anisotropic conductivity structures. *Geophysical Journal International*, 185(2): 622-636.
- Li Z H, Huang Q H. 2014. Application of the complex frequency shifted perfectly matched layer absorbing boundary conditions in transient electromagnetic method modeling. *Chinese J. Geophysics (in Chinese)*, 57(4): 1292-1299.
- Mackie R L. 1994. Three-dimensional electromagnetic modeling using finite difference equations: The magnetotelluric example. *Radio Science*, 29(4): 923-935.
- Mattsson J, Engelmark F, Anderson C. 2013. Towed streamer EM: The challenges of sensitivity and anisotropy. *First Break*, 31(6).
- Marchant D, Haber E, Oldenburg D W. 2014. Three-dimensional modeling of IP effects in time-domain electromagnetic data. *Geophysics*, 79(6): E303-E314.
- Martí A. 2014. The role of electrical anisotropy in magnetotelluric responses: From modelling and dimensionality analysis to inversion and interpretation. *Surveys in Geophysics*, 35(1):179-218.
- Peng R H, HU X Y, Han B, et al. 2016. 3D frequency-domain CSEM forward modeling based on

- the mimetic finite-volume method. Chinese J. Geophysics (in Chinese), 59(10): 3927-3939.
- Sun H F, Li X, Li S C, et al. 2013. Three-dimensional FDTD modeling of TEM excited by a loop source considering ramp time. Chinese J. Geophysics (in Chinese), 2013, 56(3): 1049-1064.
- Schenk, O. and Gärtner, K, 2004. Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with PARDISO. Future Generation Computer Systems, 20(3): 475-487.
- Um E S, Harris J M, Alumbaugh D L. 3D time-domain simulation of electromagnetic diffusion phenomena: A finite-element electric-field approach. Geophysics, 2010. 75(4): F115-F126.
- Volakis, J L, Sertel K, Usner B C, 2006. Frequency Domain Hybrid Finite Element Methods for Electromagnetics. Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics, 1(1): 1-156.
- Weiss, C J, Constable S. 2006. Mapping thin resistors and hydrocarbons with marine EM methods, Part II—Modeling and analysis in 3D. Geophysics, 71(6): G321-G332.
- Wang T, Hohmann G W. 1993. A finite-difference, time-domain solution for three-dimensional electromagnetic modeling. Geophysics, 58(6): 797-809.
- Ward S, Hohmann G. 1998. Electromagnetic Theory for Geophysical Applications, Electromagnetic Methods in Applied Geophysics. Investigations in Geophysics. Society of Exploration Geophysicists, 1(3): 131-311.
- Xue G Q, Li X, Di Q Y. 2008. Research progress in TEM forward modeling and inversion calculation. Progress in Geophys. (in Chinese), 23(4): 1165-1172.
- Yang B, Xu Y X, et al. 3D frequency-domain modeling of marine controlled source electromagnetic responses with topography using finite volume method. Chinese J. Geophysics (in Chinese), 2012, 55(4): 1390-1399.
- Yin C C, Qi Y F, Liu Y H. 2016. 3D time-domain airborne EM modeling for an arbitrarily anisotropic earth. Journal of Applied Geophysics, 131: 163-178.
- Yuan G, Sheng Z. 2007. Analysis of accuracy of a finite volume scheme for diffusion equations on distorted meshes. Journal of Computational Physics, 224(2): 1170-1189.
- Zhang Y, Wang H N, Tao H G, et al. Finite volume algorithm to simulate 3D responses of multi-component induction tools in inhomogeneous anisotropic formation based on coupled scalar-vector potentials. Chinese J. Geophysics (in Chinese), 2012, 55(6): 2141-2152.

附中文参考文献

- 李建慧, 朱自强, 曾思红, 等. 2012. 瞬变电磁法正演计算进展. 地球物理学进展, 27(4): 1393-1400.
- 李貅, 薛国强. 2013. 瞬变电磁法拟地震偏移成像研究. 科学出版社.
- 李展辉, 黄清华. 2014. 复频率参数完全匹配层吸收边界在瞬变电磁法正演中的应用. 地球物理学报, 57(4): 1292-1299, doi:10.6038/cjg20140426.
- 彭荣华, 胡祥云, 韩波 等. 2016. 基于拟态有限体积法的频率域可控源三维正演计算. 地

球物理学报, 59(10): 3927-3939.

孙怀凤, 李貅, 李术才 等. 2013. 考虑关断时间的回线源激发 TEM 三维时域有限差分正演. 地球物理学报, 56(3): 1049-1064, doi:10.6038/cjg20130333.

薛国强, 李貅, 底青云. 2008. 瞬变电磁法正反演问题研究进展. 地球物理学进展, 23(4): 1165-1172.

杨波, 徐义贤, 何展翔. 2012. 考虑海底地形的三维频率域可控源电磁响应有限体积法模拟. 地球物理学报, 55(4): 1390-1399.

张烨, 汪宏年, 陶宏根 等. 2012. 基于耦合标势与矢势的有限体积法模拟非均匀各向异性地层中多分量感应测井三维响应. 地球物理学报, 55(6): 2141-2152.