Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Кафедра вычислительной техники

Лабораторная работа № 1 по дисциплине ”Теория принятия решений”

Вариант 1

Выполнили:

Айтуганов Д. А.
Чебыкин И. Б.

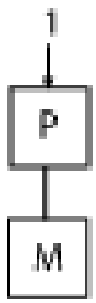
Группа: Р3401

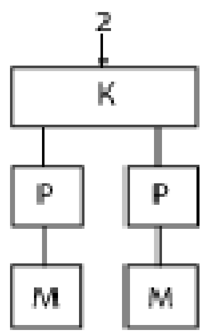
Санкт-Петербург, 2018

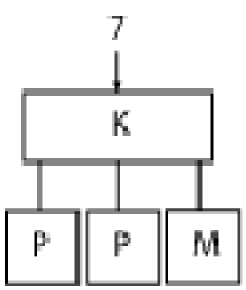
Многокритериальный выбор структуры вычислительной системы

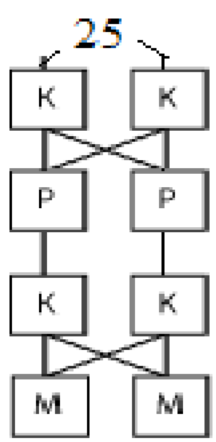
Исходные данные

$$P := \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.92 \\ 0.99 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda0 := 0$$









Выполнение

Расчет надежности структур

1. $P1 := P_0 \cdot P_1 \qquad P1 = 0.828$

2. $P2 := P_2 \cdot \left[1 - \left(1 - P_0 \cdot P_1\right)^2\right] \qquad P2 = 0.961$

6. $P3 := P_2 \cdot \left[1 - \left(1 - P_1\right)^3\right] \cdot P_2 \cdot P_1 \qquad P3 = 0.901$

7. $P4 := P_2 \cdot \left[1 - \left(1 - P_0\right)^2 \cdot \left(1 - P_1\right)\right] \qquad P4 = 0.989$

25. $Ptemp := P_2 \cdot \left[1 - \left[1 - P_2 \cdot \left[1 - \left(1 - P_0\right)^2 \cdot \left(1 - P_1\right)\right]\right] \cdot \left[1 - \left(1 - P_0\right)^2 \cdot \left(1 - P_1\right)\right]\right]$

$P5 := 1 - (1 - Ptemp)^2 \qquad P5 = 0.9995$

Расчет λ для каждой из структур

$\lambda(\lambda 0) := 0.8 \cdot \lambda 0$

1. Given

   $V_0 \cdot \lambda 0 < 1 \quad V_1 \cdot \lambda 0 < 1$

   $L1 := \mathrm{Maximize}(\lambda, \lambda 0) \quad L1 = 0.25$

2. Given

   $V_2 \cdot \lambda 0 < 1 \quad V_0 \cdot \frac{\lambda 0}{2} < 1 \quad V_1 \cdot \frac{\lambda 0}{2} < 1$

   $L2 := \mathrm{Maximize}(\lambda, \lambda 0) \quad L2 = 0.5$

6. Given

   $V_2 \cdot \lambda 0 < 1 \quad V_1 \cdot \lambda 0 < 1 \quad V_0 \cdot \frac{\lambda 0}{3} < 1$

   $L3 := \mathrm{Maximize}(\lambda, \lambda 0) \quad L3 = 0.5$

7. Given

   $V_2 \cdot \lambda 0 < 1 \quad V_1 \cdot \frac{1}{3}\lambda 0 < 1 \quad V_0 \cdot \frac{\frac{2}{3}\lambda 0}{2} < 1$

   $L4 := \mathrm{Maximize}(\lambda, \lambda 0) \quad L4 = 0.75$

25. Given

   $V_2 \cdot \frac{\lambda 0}{2} < 1 \quad V_0 \cdot \frac{\frac{1}{2}\lambda 0}{2} < 1 \quad V_1 \cdot \frac{\frac{1}{4}\lambda 0}{2} < 1$

   $L5 := \mathrm{Maximize}(\lambda, \lambda 0) \quad L5 = 1$

Расчет среднего времени пребывания в каждой из структур

1. $$T1 := \frac{V_0}{1 - V_0 \cdot \frac{\lambda(L1)}{1}} + \frac{V_1}{1 - V_1 \cdot \frac{\lambda(L1)}{1}} \qquad T1 = 23.333$$

2. $$T2 := \frac{V_2}{1 - V_2 \cdot \frac{\lambda(L2)}{1}} + \frac{V_0}{1 - V_0 \cdot \frac{\lambda(L2)}{2}} + \frac{V_1}{1 - V_1 \cdot \frac{\lambda(L2)}{2}} \qquad T2 = 25$$

6. $$T3 := \frac{V_2}{1 - V_2 \cdot \frac{\lambda(L3)}{1}} + \frac{V_0}{1 - V_0 \cdot \frac{\lambda(L3)}{3}} + \frac{V_2}{1 - V_2 \cdot \frac{\lambda(L3)}{1}} + \frac{V_1}{1 - V_1 \cdot \frac{\lambda(L3)}{1}} \qquad T3 = 21.905$$

7. $$T4 := \frac{V_2}{1 - V_2 \cdot \frac{\lambda(L4)}{1}} + \frac{V_0}{1 - V_0 \cdot \frac{\frac{2}{3}\lambda(L4)}{2}} + \frac{V_1}{1 - V_1 \cdot \frac{\frac{1}{3}\lambda(L4)}{1}} \qquad T4 = 25.833$$

25. $$T5 := \frac{V_2}{1 - V_2 \cdot \frac{\lambda(L5)}{2}} + \frac{V_0}{1 - V_0 \cdot \frac{\frac{1}{2}\lambda(L5)}{2}} + \frac{V_1}{1 - V_1 \cdot \frac{\frac{1}{4}\lambda(L5)}{2}} \qquad T5 = 24.167$$

Расчет стоимостей структур

1. $C1 := C_1 + C_0 \qquad C1 = 11$

2. $C2 := (2 C_0) + (2 C_1) + C_2 \qquad C2 = 23$

6. $C3 := (3 C_0) + C_1 + 2 \cdot C_2 \qquad C3 = 23$

7. $C4 := 2 \cdot C_0 + C_1 + C_2 \qquad C4 = 17$

25. $C5 := (2 C_0) + 2 C_1 + 2 \cdot C_2 \qquad C5 = 24$

Полученные вектора (P,T,λ,C)

$Vec1 := (P1 \;\; T1 \;\; \lambda(L1) \;\; C1) \qquad Vec1 = (0.828 \;\; 23.333 \;\; 0.2 \;\; 11)$

$Vec2 := (P2 \;\; T2 \;\; \lambda(L2) \;\; C2) \qquad Vec2 = (0.961 \;\; 25 \;\; 0.4 \;\; 23)$

$Vec6 := (P3 \;\; T3 \;\; \lambda(L3) \;\; C3) \qquad Vec6 = (0.901 \;\; 21.905 \;\; 0.4 \;\; 23)$

$Vec7 := (P4 \;\; T4 \;\; \lambda(L4) \;\; C4) \qquad Vec7 = (0.989 \;\; 25.833 \;\; 0.6 \;\; 17)$

$Vec25 := (P5 \;\; T5 \;\; \lambda(L5) \;\; C5) \qquad Vec25 = (1 \;\; 24.167 \;\; 0.8 \;\; 24)$

Все вектора составляют область эффективных решений (область Парето).

Минимаксный критерий

Необходимо перейти к одинаковой природе критериев, пусть все критерии будут чем меньше тем лучше.

$$Vec1 := \left(1 - P1 \;\; T1 \;\; \frac{1}{\lambda(L1)} \;\; C1\right) \qquad Vec1 = (0.172 \;\; 23.333 \;\; 5 \;\; 11)$$

$$Vec2 := \left(1 - P2 \;\; T2 \;\; \frac{1}{\lambda(L2)} \;\; C2\right) \qquad Vec2 = (0.039 \;\; 25 \;\; 2.5 \;\; 23)$$

$$Vec6 := \left(1 - P3 \;\; T3 \;\; \frac{1}{\lambda(L3)} \;\; C3\right) \qquad Vec6 = (0.099 \;\; 21.905 \;\; 2.5 \;\; 23)$$

$$Vec7 := \left(1 - P4 \;\; T4 \;\; \frac{1}{\lambda(L4)} \;\; C4\right) \qquad Vec7 = (0.011 \;\; 25.833 \;\; 1.667 \;\; 17)$$

$$Vec25 := \left(1 - P5 \;\; T5 \;\; \frac{1}{\lambda(L5)} \;\; C5\right) \qquad Vec25 = (0 \;\; 24.167 \;\; 1.25 \;\; 24)$$

Далее необходимо нормализовать критерии:

$$Pmax := 0.172 \quad Tmax := 25.833 \quad \lambda max := 5 \quad Cmax := 24$$

$$Vec1 := \left[\frac{(1-P1)}{Pmax} \quad \frac{T1}{Tmax} \quad \frac{1}{\lambda(L1)\cdot\lambda max} \quad \frac{C1}{Cmax}\right] \qquad Vec1 = (1 \quad 0.903 \quad 1 \quad 0.458)$$

$$Vec2 := \left[\frac{(1-P2)}{Pmax} \quad \frac{T2}{Tmax} \quad \frac{1}{\lambda(L2)\cdot\lambda max} \quad \frac{C2}{Cmax}\right] \qquad Vec2 = (0.228 \quad 0.968 \quad 0.5 \quad 0.958)$$

$$Vec6 := \left[\frac{(1-P3)}{Pmax} \quad \frac{T3}{Tmax} \quad \frac{1}{\lambda(L3)\cdot\lambda max} \quad \frac{C3}{Cmax}\right] \qquad Vec6 = (0.574 \quad 0.848 \quad 0.5 \quad 0.958)$$

$$Vec7 := \left[\frac{(1-P4)}{Pmax} \quad \frac{T4}{Tmax} \quad \frac{1}{\lambda(L4)\cdot\lambda max} \quad \frac{C4}{Cmax}\right] \qquad Vec7 = (0.063 \quad 1 \quad 0.333 \quad 0.708)$$

$$Vec25 := \left[\frac{(1-P5)}{Pmax} \quad \frac{T5}{Tmax} \quad \frac{1}{\lambda(L5)\cdot\lambda max} \quad \frac{C5}{Cmax}\right] \qquad Vec25 = (0.003 \quad 0.935 \quad 0.25 \quad 1)$$

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0.903 & 1 & 0.458 \\ 0.228 & 0.968 & 0.5 & 0.958 \\ 0.574 & 0.848 & 0.5 & 0.958 \\ 0.063 & 1 & 0.333 & 0.708 \\ 0.003 & 0.935 & 0.25 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cc} max & min \\ 1 & \\ 0.968 & \\ 0.958 & 0.958 \\ 1 & \\ 1 & \end{array}$$

Таким образом, наилучшей структурой является структура 6.

Аддитивный критерий

Для аддитивного критерия необходимо ввести ранжирование:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

$$Vec1 := \begin{pmatrix} P1 \\ T1 \\ \lambda(L1) \\ C1 \end{pmatrix} \quad Vec2 := \begin{pmatrix} P2 \\ T2 \\ \lambda(L2) \\ C2 \end{pmatrix} \quad Vec6 := \begin{pmatrix} P3 \\ T3 \\ \lambda(L3) \\ C3 \end{pmatrix} \quad Vec7 := \begin{pmatrix} P4 \\ T4 \\ \lambda(L4) \\ C4 \end{pmatrix} \quad Vec25 := \begin{pmatrix} P5 \\ T5 \\ \lambda(L5) \\ C5 \end{pmatrix}$$

Необходима нормализация:

$$Pmax := 0.995 \quad Tmax := 25.833 \quad \lambda max := 0.8 \quad Cmax := 24$$

$$Vec1 := \begin{pmatrix} \frac{P1}{Pmax} \\ \frac{T1}{Tmax} \\ \frac{\lambda(L1)}{\lambda max} \\ \frac{C1}{Cmax} \end{pmatrix} \quad Vec2 := \begin{pmatrix} \frac{P2}{Pmax} \\ \frac{T2}{Tmax} \\ \frac{\lambda(L2)}{\lambda max} \\ \frac{C2}{Cmax} \end{pmatrix} \quad Vec6 := \begin{pmatrix} \frac{P3}{Pmax} \\ \frac{T3}{Tmax} \\ \frac{\lambda(L3)}{\lambda max} \\ \frac{C3}{Cmax} \end{pmatrix} \quad Vec7 := \begin{pmatrix} \frac{P4}{Pmax} \\ \frac{T4}{Tmax} \\ \frac{\lambda(L4)}{\lambda max} \\ \frac{C4}{Cmax} \end{pmatrix} \quad Vec25 := \begin{pmatrix} \frac{P5}{Pmax} \\ \frac{T5}{Tmax} \\ \frac{\lambda(L5)}{\lambda max} \\ \frac{C5}{Cmax} \end{pmatrix}$$

$$Vec1 = \begin{pmatrix} 0.832 \\ 0.903 \\ 0.25 \\ 0.458 \end{pmatrix} \quad Vec2 = \begin{pmatrix} 0.966 \\ 0.968 \\ 0.5 \\ 0.958 \end{pmatrix} \quad Vec6 = \begin{pmatrix} 0.906 \\ 0.848 \\ 0.5 \\ 0.958 \end{pmatrix} \quad Vec7 = \begin{pmatrix} 0.994 \\ 1 \\ 0.75 \\ 0.708 \end{pmatrix} \quad Vec25 = \begin{pmatrix} 1.005 \\ 0.935 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A1 := \left(\alpha_0 \cdot Vec1_0 + \alpha_2 Vec1_2\right) - \left(\alpha_1 \cdot Vec1_1 + \alpha_3 Vec1_3\right) = 0.04$$

$$A2 := \left(\alpha_0 \cdot Vec2_0 + \alpha_2 Vec2_2\right) - \left(\alpha_1 \cdot Vec2_1 + \alpha_3 Vec2_3\right) = -0.045$$

$$A3 := \left(\alpha_0 \cdot Vec6_0 + \alpha_2 Vec6_2\right) - \left(\alpha_1 \cdot Vec6_1 + \alpha_3 Vec6_3\right) = -0.045$$

$$A4 := \left(\alpha_0 \cdot Vec7_0 + \alpha_2 Vec7_2\right) - \left(\alpha_1 \cdot Vec7_1 + \alpha_3 Vec7_3\right) = 0.06$$

$$A5 := \left(\alpha_0 \cdot Vec25_0 + \alpha_2 Vec25_2\right) - \left(\alpha_1 \cdot Vec25_1 + \alpha_3 Vec25_3\right) = 0.015$$

Таким образом, по данному критерию наилучшей структурой будет структура 7.

Мультипликативный критерий

$$M1 := \left(Vec1_0\right)^{\alpha_0} \cdot \left(Vec1_2\right)^{\alpha_2} \cdot \left(\frac{1}{Vec1_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1}{Vec1_3}\right)^{\alpha_3} = 1.043$$

$$M2 := \left(Vec2_0\right)^{\alpha_0} \cdot \left(Vec2_2\right)^{\alpha_2} \cdot \left(\frac{1}{Vec2_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1}{Vec2_3}\right)^{\alpha_3} = 0.938$$

$$M3 := \left(Vec6_0\right)^{\alpha_0} \cdot \left(Vec6_2\right)^{\alpha_2} \cdot \left(\frac{1}{Vec6_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1}{Vec6_3}\right)^{\alpha_3} = 0.939$$

$$M4 := \left(Vec7_0\right)^{\alpha_0} \cdot \left(Vec7_2\right)^{\alpha_2} \cdot \left(\frac{1}{Vec7_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1}{Vec7_3}\right)^{\alpha_3} = 1.075$$

$$M5 := \left(Vec25_0\right)^{\alpha_0} \cdot \left(Vec25_2\right)^{\alpha_2} \cdot \left(\frac{1}{Vec25_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1}{Vec25_3}\right)^{\alpha_3} = 1.015$$

Таким образом, при использовании мультипликативного критерия лучшей структурой будет структура 7

Метод отклонения от идеала

$$Vec1 := \begin{pmatrix} P1 \\ T1 \\ \lambda(L1) \\ C1 \end{pmatrix} \quad Vec2 := \begin{pmatrix} P2 \\ T2 \\ \lambda(L2) \\ C2 \end{pmatrix} \quad Vec6 := \begin{pmatrix} P3 \\ T3 \\ \lambda(L3) \\ C3 \end{pmatrix} \quad Vec7 := \begin{pmatrix} P4 \\ T4 \\ \lambda(L4) \\ C4 \end{pmatrix} \quad Vec25 := \begin{pmatrix} P5 \\ T5 \\ \lambda(L5) \\ C5 \end{pmatrix}$$

Для данного метода необходимо ввести идеальные значения критериев

$$Pид := 1 \quad Tид := 20 \quad \lambda ид := 1 \quad Cид := 10$$

Затем провести нормализацию

$$Pmax := 0.9995 \quad Tmin := 21.905 \quad \lambda max := 0.8 \quad Cmin := 11$$

$$O1 := \alpha_0 \cdot \frac{(Pид - Vec1_0)}{Pид - Pmax} + \alpha_2 \cdot \frac{(\lambda ид - Vec1_2)}{\lambda ид - \lambda max} + \alpha_1 \cdot \frac{(Vec1_1 - Tид)}{Tmin - Tид} + \alpha_3 \cdot \frac{(Vec1_3 - Cид)}{Cmin - Cид} = 138.65$$

$$O2 := \alpha_0 \cdot \frac{(Pид - Vec2_0)}{Pид - Pmax} + \alpha_2 \cdot \frac{(\lambda ид - Vec2_2)}{\lambda ид - \lambda max} + \alpha_1 \cdot \frac{(Vec2_1 - Tид)}{Tmin - Tид} + \alpha_3 \cdot \frac{(Vec2_3 - Cид)}{Cmin - Cид} = 36.155$$

$$O3 := \alpha_0 \cdot \frac{(Pид - Vec6_0)}{Pид - Pmax} + \alpha_2 \cdot \frac{(\lambda ид - Vec6_2)}{\lambda ид - \lambda max} + \alpha_1 \cdot \frac{(Vec6_1 - Tид)}{Tmin - Tид} + \alpha_3 \cdot \frac{(Vec6_3 - Cид)}{Cmin - Cид} = 83.416$$

$$O4 := \alpha_0 \cdot \frac{(Pид - Vec7_0)}{Pид - Pmax} + \alpha_2 \cdot \frac{(\lambda ид - Vec7_2)}{\lambda ид - \lambda max} + \alpha_1 \cdot \frac{(Vec7_1 - Tид)}{Tmin - Tид} + \alpha_3 \cdot \frac{(Vec7_3 - Cид)}{Cmin - Cид} = 11.546$$

$$O5 := \alpha_0 \cdot \frac{(Pид - Vec25_0)}{Pид - Pmax} + \alpha_2 \cdot \frac{(\lambda ид - Vec25_2)}{\lambda ид - \lambda max} + \alpha_1 \cdot \frac{(Vec25_1 - Tид)}{Tmin - Tид} + \alpha_3 \cdot \frac{(Vec25_3 - Cид)}{Cmin - Cид} = 5.106$$

При данном критерии выбора, наилучшая структура 25.

Вывод

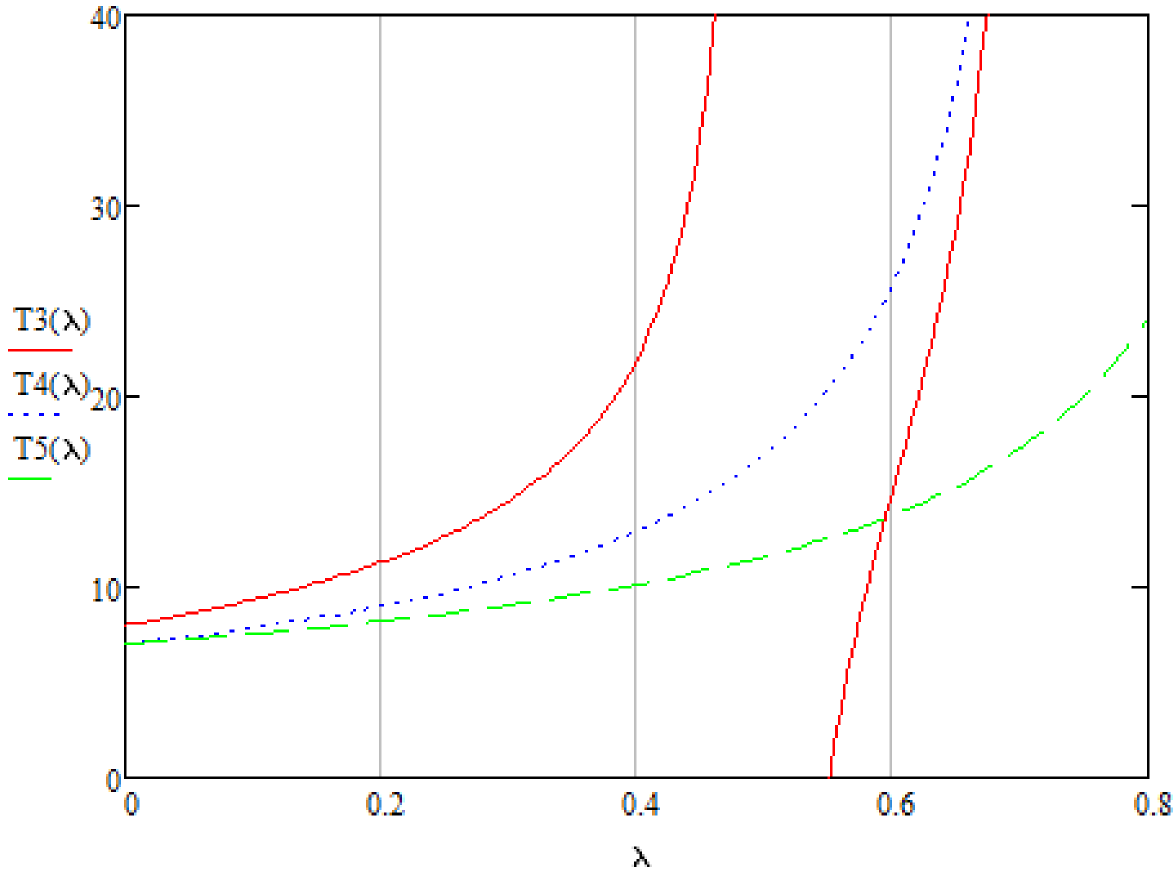
В ходе проведенного исследования можно выделить 3 конкурирующих структуры: 6, 7 и 25. Структура 6 предпочтительна при использовании минимаксного критерия, однако данный критерий не учитывает веса локальных критериев. По аддитивному и мультипликативному критерию предпочтительна структура 7. При использовании же критерия отклонения от идеала структура 25 была получена самой эффективной.

$$\lambda := 0, 0.005 .. 0.8$$

$$T3(\lambda) := \frac{V_2}{1 - V_2 \cdot \frac{\lambda}{1}} + \frac{V_0}{1 - V_0 \cdot \frac{\lambda}{3}} + \frac{V_2}{1 - V_2 \cdot \frac{\lambda}{1}} + \frac{V_1}{1 - V_1 \cdot \frac{\lambda}{1}}$$

$$T4(\lambda) := \frac{V_2}{1 - V_2 \cdot \frac{\lambda}{1}} + \frac{V_0}{1 - V_0 \cdot \frac{\frac{2}{3}\lambda}{2}} + \frac{V_1}{1 - V_1 \cdot \frac{\frac{1}{3}\lambda}{1}}$$

$$T5(\lambda) := \frac{V_2}{1 - V_2 \cdot \frac{\lambda}{2}} + \frac{V_0}{1 - V_0 \cdot \frac{\frac{1}{2}\lambda}{2}} + \frac{V_1}{1 - V_1 \cdot \frac{\frac{1}{4}\lambda}{2}}$$



Исходя из графиков функций среднего времени нахождения в сети, структура 25 предпочтительнее, так как при увеличении интенсивности запросов время пребывания в системе растет медленнее, чем в остальных случаях.

Однако структура 25 самая дорогостоящая, что немаловажно. Исходя из всех полученных результатов выбираем структуру 7, так как надежность этой структуры достаточна высока, стоимость ниже чем в случаях структур 25 и 6. Функция зависимости среднего времени пребывания от интенсивности запросов растет быстрее, чем при использовании структуры 25, но медленнее чем при использовании структуры 6. Исходя из всех перечисленных преимуществ, наиболее предпочтительным вариантом будем считать структуру 7.
Повысить надежность и уменьшить загрузку узлов можно при увеличении количества элементов, однако стоимость в этом случае повысится.