Sistemi numerici: numeri senza segno
Esercizi risolti

1 Esercizio

Si convertano in base dieci i seguenti numeri:

1. 10101_2
2. 132_3
3. 4234_5
4. 111.101_2
5. 12.42_7

Soluzione

Applicando la definizione di numero in notazione posizionale a base fissa su $(n+m)$ cifre:

$$\begin{aligned} V_N &= c_{n-1} \cdot b^{n-1} + c_{n-2} \cdot b^{n-2} + \ldots + c_1 \cdot b^1 + c_0 \cdot b^0 + \\ & c_{-1} \cdot b^{-1} + c_{-2} \cdot b^{-2} + \ldots + c_{-m} \cdot b^{-m} \end{aligned}$$

si ottiene:

1. $$\begin{aligned} 10101_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 16 + 4 + 1 \\ &= 21_{10} \end{aligned}$$

2. 132_3 non è un numero corretto in base tre. Infatti per ciascun valore della base b le cifre consentite vanno da 0 a $b-1$. In questo caso le cifre ammesse sono 0, 1 e 2.

3. $$\begin{aligned} 4234_5 &= 4 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 \\ &= 500 + 50 + 15 + 4 \\ &= 569_{10} \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 111.101_2 &= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} \\ &= 4 + 2 + 1 + 0.5 + 0.125 \\ &= 7.625_{10} \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 12.42_7 &= 1 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 + 4 \cdot 7^{-1} + 2 \cdot 7^{-2} \\ &= 7 + 2 + 0.57 + 0.04 \\ &= 9.61_{10} \end{aligned}$$

2 Esercizio

Convertire in binario puro i numeri riportati di seguito, utilizzando la notazione in virgola fissa e la precisione indicata in ciascun caso.

1. 107.07_{10} mantenendo la precisione
2. 115.18_{10} con una precisione di 1/10
3. 98.35_{10} con una precisione di 1/20
4. 50.12_{10} con una precisione di 1/8
5. 0.3_{10} con una precisione di 1/100

Per la rappresentazione finale, si utilizzi, in tutti i casi, il numero di bit minore possibile.

Soluzione

1. Procedendo per divisioni successive sulla parte intera del numero si ottiene:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{:2} \\ 107 & \\ 53 & 1 \\ 26 & 1 \\ 13 & 0 \\ 6 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$$107_{10} = 1101011_2$$

Dato che il numero originale in base dieci ha due cifre decimali, e quindi precisione pari a 1/100, il numero di cifre della parte frazionaria del numero binario può essere calcolato come segue:

$$\begin{aligned} 2^{-m} &\leq \tfrac{1}{100} \\ 2^m &\geq 100 \\ m &\geq 7 \end{aligned}$$

Occorrono quindi almeno 7 cifre per la parte frazionaria del numero binario:

$$\begin{array}{rcll} 0.07 \cdot 2 & = & 0.14 & \Rightarrow & 0 \\ 0.14 \cdot 2 & = & 0.28 & \Rightarrow & 0 \\ 0.28 \cdot 2 & = & 0.56 & \Rightarrow & 0 \\ 0.56 \cdot 2 & = & 1.12 & \Rightarrow & 1 \\ 0.12 \cdot 2 & = & 0.24 & \Rightarrow & 0 \\ 0.24 \cdot 2 & = & 0.48 & \Rightarrow & 0 \\ 0.48 \cdot 2 & = & 0.96 & \Rightarrow & 0 \end{array}$$

$$0.07_{10} = 0001000_2$$

Quindi avremo:

$$107.07_{10} = 1101011.0001000_2$$

2. Applicando lo stesso procedimento del caso precedente si ottiene:

$$115.18_{10} = 1110011.0010_2$$

3. $98.35_{10} = 1100010.01011_2$

4. $50.12_{10} = 110010.000_2$

5. $0.3_{10} = 0.0100110_2$

3 Esercizio

Effettuare le conversioni di base indicate, utilizzando l'algoritmo più adatto:

1. $121022212_3 =?_9$

2. $198_{10} =?_6$

3. $74657_8 =?_{16}$

4. $270_{10} =?_7$

5. $6E9B_{16} =?_8$

6. $8634_9 =?_3$

Soluzione

1. Osservando che $3^2 = 9$ è sufficiente raggruppare le cifre a gruppi di 2 a partire dalla cifra meno significativa trasformando quindi ciascuna coppia di cifre nella base nove:

   $$\underbrace{01}_{1}\underbrace{21}_{7}\underbrace{02}_{2}\underbrace{22}_{8}\underbrace{12}_{5}$$

   Si osservi, infatti, che, ad esempio:

   $$\begin{array}{lcccc} 01_3 & = & 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 & = & 1_9 \\ 21_3 & = & 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 & = & 7_9 \\ \ldots & & & & \end{array}$$

   Si osservi inoltre che è stato necessario aggiungere uno zero quale cifra più significativa per avere un numero di cifre multiplo di 2.

   $$121022212_3 = 17285_9$$

2. La conversione dalla base dieci alla base sei si ottiene procedendo direttamente per divisioni successive per 6.

   $$\begin{array}{r|l} & :6 \\ 198 & \\ 33 & 0 \\ 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{array}$$

   $$198_{10} = 530_6$$

3. La conversione dalla base otto alla base sedici si può realizzare utilizzando quale base di passaggio intermedia la base due. Infatti $8 = 2^3$ (ogni cifra in base otto viene convertita in 3 cifre in base due) e $2^4 = 16$ (si convertono quaterne di bit in cifre esadecimali). Questo permette di evitare la complessità dei calcoli necessari per una eventuale conversione utuilizzando la base dieci quale base intermedia. Si noti che entrambi i raggruppamenti vanno iniziati dalla cifra meno significativa.

   $$\overbrace{111}^{7}\overbrace{100}^{4}\overbrace{110}^{6}\overbrace{101}^{5}\overbrace{111}^{7}$$

   Riscrivendo e suddividendo le cifre a gruppi di 4 e aggiungendo uno zero come cifra più significativa, si ottiene:

   $$\underbrace{0111}_{7}\underbrace{1001}_{9}\underbrace{1010}_{A}\underbrace{1111}_{F}$$

   $$74657_8 = 79AF_{16}$$

4. Si procede per divisioni successive per 7:

$$\begin{array}{r|l} & :7 \\ 270 & \\ 38 & 4 \\ 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{array}$$

$$270_{10} = 534_7$$

5. La conversione si ottiene utilizzando la base due quale rappresentazione intermedia:

$$\overbrace{0110}^{6}\overbrace{1110}^{E}\overbrace{1001}^{9}\overbrace{1011}^{B}$$

Suddividendo le cifre a gruppi di 3 e aggiungendo due zeri come cifre più significative, si ottiene:

$$\underbrace{000}_{0}\underbrace{110}_{6}\underbrace{111}_{7}\underbrace{010}_{2}\underbrace{011}_{3}\underbrace{011}_{3}$$

$$6E9B_{16} = 067233_8$$

6. Dato che $9 = 3^2$, si ha:

$$\overbrace{22}^{8}\overbrace{20}^{6}\overbrace{10}^{3}\overbrace{11}^{4}$$

$$8634_9 = 22201011_3$$

4 Esercizio

Si effettuino le operazioni di seguito indicate nella base due su 8 bit:

1. $45_{10} + 34_{10}$
2. $98.5_{10} + 33.2_{10}$
3. $164_{10} + 93_{10}$

Si operi mantenendo la precisione di partenza e si indichino eventuali overflow.

Soluzione

1. Si procede effettuando innanzitutto la conversione dei numeri indicati nella base due:

$$\begin{array}{r|l} & :2 \\ 45 & \\ 22 & 1 \\ 11 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & :2 \\ 34 & \\ 17 & 0 \\ 8 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

   Da cui si ha (su 8 bit, e quindi aggiungendo un numero di zeri sufficienti):

$$\begin{array}{rcl} 45_{10} & = & 00101101_2 \\ 34_{10} & = & 00100010_2 \end{array}$$

   Quindi:

$$\begin{array}{rl} 00100000 & \Leftarrow \text{Riporti} \\ 00101101 + & \\ 00100010 = & \\ \hline 01001111 & \end{array}$$

   Con risultato corretto, ovvero assenza di overflow.

2. Per mantenere la stessa precisione dei numeri di partenza, occorre utilizzare 4 cifre decimali.

$$\begin{array}{r|l} & :2 \\ 98 & \\ 49 & 0 \\ 24 & 1 \\ 12 & 0 \\ 6 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & :2 \\ 33 & \\ 16 & 1 \\ 8 & 0 \\ 4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$$0.5 \cdot 2 = 1.0 \Rightarrow 1$$

   a cui seguono tutti 0;

$$\begin{array}{rcccc} 0.2 \cdot 2 & = & 0.4 & \Rightarrow & 0 \\ 0.4 \cdot 2 & = & 0.8 & \Rightarrow & 0 \\ 0.8 \cdot 2 & = & 1.6 & \Rightarrow & 1 \\ 0.6 \cdot 2 & = & 1.2 & \Rightarrow & 1 \end{array}$$

Aggiungendo gli zeri opportuni, si ha:

$$\begin{aligned} 98.5_{10} &= 01100010.1000_2 \\ 33.2_{10} &= 00100001.0011_2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} 011000000\ 000 & \Leftarrow \text{Riporti} \\ 01100010.1000\ + & \\ 00100001.0011\ = & \\ \hline 10000011.1011 & \end{array}$$

Con risultato corretto, ovvero assenza di overflow.

3. Procedemdo come in precedenza otteniamo quanto segue.

$$\begin{array}{r|l} & :2 \\ 164 & \\ 82 & 0 \\ 41 & 0 \\ 20 & 1 \\ 10 & 0 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & :2 \\ 93 & \\ 46 & 1 \\ 23 & 0 \\ 11 & 1 \\ 5 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 164_{10} &= 10100100_2 \\ 93_{10} &= 01011101_2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} 11111100 & \Leftarrow \text{Riporti} \\ 10100100\ + & \\ 01011101\ = & \\ \hline 00000001 & \end{array}$$

Con risultato errato, vista la presenza di un riporto uguale a 1 generato dalla cifra di peso maggiore (si rammenti che si sta operando nella rappresentazione in binario puro) e quindi di un overflow.

5 Esercizio

Si effettuino le seguenti somme nelle basi indicate:

1. $1B_{16} + 2C_{16}$
2. $222_3 + 222_3$

3. $6345_9 + 1250_9$

4. $6667_9 + 2348_9$

senza occuparsi di eventuali overflow (ovvero estendendo il numero di cifre quanto necessario affinchè non si verifichi alcun overflow).

Soluzione

Ragionando nelle basi indicate, estendendo il procedimento noto per la base dieci e la base due, si ottiene quanto segue:

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
01 & \quad & 111 & \quad & 0010 & \quad & 1111 & \Leftarrow \text{Riporti} \\
1B\ + & & 222\ + & & 6345\ + & & 6667\ + & \\
2C\ = & & 222\ = & & 1250\ = & & 2348\ = & \\
\hline
47 & & 1221 & & 7605 & & 10126 &
\end{array}
$$

6 Esercizio

La seguente relazione:

$$\sqrt{232_b} = 14_b$$

per quale (o quali) base b è valida?

Soluzione

Applicando la definizione di numero intero in notazione posizionale a base fissa su n cifre:

$$V_N = c_{n-1} \cdot b^{n-1} + c_{n-2} \cdot b^{n-2} + \ldots + c_1 \cdot b^1 + c_0 \cdot b^0$$

a entrambi i membri otteniamo:

$$\sqrt{2 \cdot b^2 + 3 \cdot b^1 + 2 \cdot b^0} = (1 \cdot b^1 + 4 \cdot b^0)$$

Elevando al quadrato ambo i membri, si ha:

$$2 \cdot b^2 + 3 \cdot b + 2 = b^2 + 8 \cdot b + 16$$

$$b^2 - 5 \cdot b - 14 = 0$$

$$b = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2} = \begin{cases} 7 \\ -2 \end{cases}$$

Ricordando che ogni cifra di un numero deve essere minore della sua base b, $b = 7$ è l'unica base valida per la relazione indicata.

7 Esercizio

Un termometro digitale misura temperature comprese tra -45 e $+45$ (estremi inclusi) gradi centigradi, con una precisione di 0.1 gradi. Qual è il numero minimo di bit richiesti dallo strumento per rappresentare la temperatura misurata?

Soluzione

Occorre determinare quanti sono i valori diversi da rappresentare. Tra -45 e $+45$ con una discretizzazione di 0.1 grado (e includendo lo zero) i hanno

$$\frac{45-(-45)}{0.1} + 1 \quad = \quad 901$$

rappresentazioni diverse. Quindi il numero di bit necessario n sarà uguale a:

$$n \quad = \quad \lceil log_2(901) \rceil \quad = \quad 10$$

(ricordare che $(2^9 = 512) \leq 901 \leq (2^{10} = 1024)$).

8 Esercizio

Una bilancia è in grado di misurare il peso di una persona nell'intervallo compreso tra 0 e 100 chilogrammi. Sapendo che la bilancia utilizza internamente un dispositivo digitale in grado di gestire valori rappresentati su 10 bit, qual è la precisione che avrà senso visualizzare?

Soluzione

Con 10 bit è possibile rappresentare $2^{10} = 1024$ valori diversi. Dato che tra 0 e 100 vi è un intervallo di 100 chilogrammi avremo un intervallo rappresetabile pari a

$$\frac{100}{1024} \quad \cong \quad 0.1$$

Quindi avrà senso rappresentare variazioni di 0.1 chilogrammo, ovvero di un etto.