第 21 卷第 4 期　　江西气象科技　　Vol. 21 No. 4
1998 年 11 月　　Nov. 1998

卡尔曼滤波原理及其因子选取和初值确定

单九生
（江西省气象台　330046）

引言

随着计算机领域的高速发展，很大程度上依赖于计算机的数值天气预报模式也随之不断更新，这就给以数值预报产品的历史资料为基础来建立的 MOS 预报方法提出了一个严肃的问题：对一般的统计方法（如回归分析、判别分析等）而言，历史资料年限太短，模式不太稳定，预报效果差；而历史资料样本长，模式统计特征好，但资料不易积累。另一方面，由于数值天气预报模式的改进和更新，也使原来建立的 MOS 预报发生变化，造成预报误差增大，给 MOS 预报的实际应用带来了极大的不便。解决这些问题的重要途径之一就是建立能适应数值模式变化的统计模型，卡尔曼滤波方法就具有这种优点。它是一种数学统计方法，主要特征是通过对误差与实验数据间的处理来不断订证模型参数，组建出最优滤波方程。

在使用卡尔曼滤波方法时，首先是要解决方程中预报因子的选取和确定卡尔曼滤波的初始值问题，它们直接影响着预报效果。这里首先介绍卡尔曼滤波原理，然后给出一种卡尔曼滤波法的预报因子选取方法和初始值确定的方法。

1　卡尔曼滤波原理

1.1　动态模型

设一 m 维线性动态系统与 n 维线性观测系统分别由下面的方程描述：

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \tag{1}$$

$$Y_t = X_t\beta_t + V_t \qquad (t \geqslant 1) \tag{2}$$

其中：β_t 是 m 维状态矢量，即 $\beta_t = [\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m]^{\tau}_t$

ε_t 是 m 维动态噪声矢量，即 $\varepsilon_t = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m]^{\tau}_t$

Y_t 是 n 维观测矢量，即 $Y_t = [Y_1, Y_2, ..., Y_n]^{\tau}_t$

X_t 是 $n \times m$ 维矩阵，称为观测矩阵，即 $X_t = [X_{ij}]_{n \times m}$

V_t 是 n 维观测噪声矢量；即 $V_t = [V_1, V_2, ..., V_n]^{\tau}_t$

方程（1）是描述回归系数矢量状态变化的方程，称为状态方程；方程（2）描述了状态矢量 β_t 与观测矢量 Y_t、观测变量 X_t 之间的关系，称为预测方程。

1.2　线性最小方差估计

如果从动态模型确定在 t 时刻系统状态的估值 $\hat{\beta}_t$，满足下述条件：

<i>　估值 $\hat{\beta}_t$ 是观测值 Y 的线性函数；

<ii>　$E(\beta_t - \hat{\beta}_t)(\beta_t - \hat{\beta}_t)^{\tau} = [\tilde{\beta}_t \tilde{\beta}^{\tau}_t] =$ 最小值；

1998-08-21 收到　1998-08-31 收到修改稿

其中　$\tilde{\beta}_t=\beta_t-\hat{\beta}_t$ 是估计误差，那么这个估值则称为线性最小方差估计。

设通过 n 维线性观测系统 (2)，从第 1 时刻到第 K 时刻，对 m 维线性动态系统 (1) 的状态作了 t 次观测 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$，根据这 t 个观测数据，对第 j 时刻状态 β_j 进行估计为 $\beta_{j|t}$，估计误差为 $\tilde{\beta}_{j|t}=\beta_j-\hat{\beta}_{j|t}$，把估计的均方差记作：$R_{j|t}=E[\tilde{\beta}_{j|t}\tilde{\beta}^{\tau}_{j|t}]$。当 $j>t$ 时，$\hat{\beta}_{j|t}$ 称为预报或外推；当 $j<t$ 时，$\hat{\beta}_{j|t}$ 称为内扦；特别当 $j=t$ 时，$\hat{\beta}_{j|t}$ 称为滤波，并简记 $\hat{\beta}_{t|t}=\hat{\beta}_t$，$\tilde{\beta}_{t|t}=\tilde{\beta}_t$，$R_{t|t}=R_t$。

1.3　卡尔曼滤波公式

设在上述动态模型中，动态噪声 $\{\varepsilon_t\}$ 与观测噪声 $\{V_t\}$ 是互不相关的零均值白噪声序列；即对所有的 t，j：

均值：$E\varepsilon_t=0$

$EV_t=0$

协方差：$Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_j)=E[\varepsilon_j\varepsilon^{\tau}_j]=W_t\delta_{tj}$

$Cov(V_t,V_j)=E[V_tV_j^{\tau}]=V_t\delta_{tj}$

$Cov(\varepsilon_t,V_j)=E[\varepsilon_tV_j^{\tau}]=0$

又设初始状态 β_0 的统计特征为：

$E\beta_0=\mu_0$　方差：$Var\beta_0=R_0$

且 β_0 与 $\{\varepsilon_t\}\{V_t\}$ 都不相关即

$Cov(\beta_0,\varepsilon_t)=0$，$Cov(\beta_0,V_t)=0$

因卡尔曼滤波递推很复杂，这里只列出应用于气象上的一组递推公式[1]：

$$\hat{Y}_t=X_t\hat{\beta}_{t-1} \tag{3}$$

$$R_t=C_{t-1}+W \tag{4}$$

$$\delta_t=X_tR_tX^{\tau}_t+V \tag{5}$$

$$A_t=R_tX^{\tau}_t\delta^{-1} \tag{6}$$

$$\hat{\beta}_t=\hat{\beta}_{t-1}+A_t(Y_t-\hat{Y}_t) \tag{7}$$

$$C_t=R_t-A_t\delta_tA_t^{\tau} \tag{8}$$

(3)式是预报方程，$\hat{Y}_t$ 为预报值，X_t 为预报因子，$\hat{\beta}_{t-1}$ 为回归数；

(4)式中的 R_t 误差方差阵，C_{t-1} 为 $\hat{\beta}_{t-1}$ 的误差方差阵，W 是动态噪声的方差阵；

(5)式中的 δ_t 是预报误差方差阵，X^{τ}_t 为 X_t 的转置矩阵，V 是量测噪声的方差阵；

(6)式中的 A_t 是增益矩阵，δ_t^{-1} 是 δ_t 的逆矩阵；

(7)式中的 Y_t 是对应于预报的实际观测值；

(8)式中的 C_t 是 β_t 误差方差阵。

从上述方程中我们可以看出，在使用卡尔曼滤波方法进行递推计算前就首先必须确定出参数 β、C、W、V 的初始值；另外，卡尔曼滤波方法本身没有评估预报对象与预报因子相关程度的功能，求取各因子间的最佳组合更是无法解决的问题，因此对预报因子 X 的选取也是一项重要的工作，它们均影响着今后的预报效果。下面介绍了一种卡尔曼滤波法的预报因子选取方法和初始值确定的方法。

2 卡尔曼滤波的因子选取

我们可采用气象上常用的逐步回归方法来选取最佳预报因子，同时为了使建立起来的方法适应于今后的数值预报模式的变化，可把数值产品的格点资料通过数学上的处理，扦至国内部分观测发报站点上，然后采用PP法来组建预报方程。

2.1 因子相关分析

目前我们有1983～1987年国内36个高空站点和58个地面站点的逐日资料，考虑到随着季节的变化各气象因子场对温度的作用大小也随之而异，这里利用相关分析，求出逐月各气象因子场的单个站点要素和任意两个站点要素的差值与预报对象相关最好的站点。例如：表1给出了南昌1月份最低气温与各气象因子场相关最佳的单点因子和两点差值因子。

表1 南昌1月份最低气温与各因子场最佳相关站点和相关系数

	单点相关系数		两点差值相关	
	站点号	相关系数	站点号～站点号	相关系数
500hPa 风向	57447	-0.287	58238～57447	0.295
700hPa 风向	56778	0.263	58027～56778	-0.304
850hPa 风向	57749	0.459	58150～57749	-0.418
500hPa 风速	59134	-0.341	52889～57245	0.270
700hPa 风速	57516	0.309	56691～57816	0.372
850hPa 风速	56778	0.266	56294～56778	-0.357
500hPa 风速 u 分量	59265	-0.353	52889～57972	0.257
700hPa 风速 u 分量	56691	0.315	56691～59134	0.395
850hPa 风速 u 分量	57957	0.566	52889～57957	-0.557
500hPa 风速 v 分量	57245	0.290	57972～57993	0.261
700hPa 风速 v 分量	57178	0.368	57178～56778	0.451
850hPa 风速 v 分量	57957	0.580	56096～57957	-0.564
500hPa 高度	57178	0.596	57178～59431	0.485
700hPa 高度	58457	0.500	53915～58457	-0.497
850hPa 高度	57036	-0.446	57178～59134	-0.680
500hPa 温度露点差	57447	0.278	57679～57993	0.293
700hPa 温度露点差	56691	0.390	58203～59134	-0.372
850hPa 温度露点差	57127	-0.284	57957～57972	-0.442
500hPa 温度	52889	0.436	58027～59134	0.442
700hPa 温度	57178	0.724	57178～57993	0.582
850hPa 温度	57150	0.729	56294～57749	-0.600
地面气压	57662	-0.604	57598～58726	-0.798
地面风向	57957	0.367	57957～58144	0.432
地面风速	57957	-0.448	57793～57957	0.487
地面温度	57726	0.682	58726～59134	0.633

从表1中可以看出：

① 南昌的最低温度与其自身的高空和地面的要素相关性并不是最好的，而是与周围其它站点相关更佳；

② 温度与低层要素的相关性普遍来说比其与高层要素的相关性要好；

③ 气压场、温度场、高度场与温度相关性较好，而风场与温度相关较差；

④ 有些组合因子与温度的相关性比纯单点的要高。如地面气压场57598与58726的气压差与南昌的最低温度相关高达-0.798，而单站相关最好的站是57662，相关系数为-0.604。

⑤ 被选取的因子物理意义清晰。如南昌1月份的低温与西安的850hpa高度呈负相关。850hPa高度的大小反映了地面冷空气的强度，850hPa西安的高度越高，说明北方冷空气越强，南昌的温度自然也越低。

2.2 因子的选取

我们把各个因子场的最佳单点因子和最佳两点组合因子的要素值组合成一个样本系列，然后利用逐步回归方法求出最佳的预报方程，方程中入选的因子就是我们要选取的因子。如1月份南昌TD温度预报方程为：

$$TD_{(58606)} = 9.69 + 0.120 * F7_{(52889-57957)} + 0.521 * T8_{(57447)} - 0.493 * Ps_{(57731-57902)} - 0.423 * Ts_{(57447-57866)}$$

3 卡尔曼滤波初值的确定[1]

卡尔曼滤波递推计算的先决条件就是确定 β_0、C_0、W 和 V 这四个参数的初始值。这里我们介绍一种确定初值的方法。

3.1　β_0 的确定

如前面所述，本文采用了逐步统计回归分析方法来组建最优预报方程，我们就把预报方程中的回归系数作为卡尔曼滤波过程的回归系数向量的初始值。试验结果发现，回归系数逐日修订量不大，说明用逐步回归系数的比较接近变化系数的期望值。如 1 月份南昌 TG 温度的预报因子回归系数初始值：

$$\beta(0) = [0.120, 0.521, -0.493, -0.423]$$

3.2　C_0 的确定

C_0 是 β_0 的误差方差阵：

$C_0 = E(\beta_0 - \hat{\beta}_0)(\beta_0 - \hat{\beta}_0)^T$　由于 β_0 是从样本资料中通过严格的数学计算得到的，因此理论上可认为它十分精确，即与理论值相等，所以 C_0 是 m 阶零方阵。

$$C_0 = [0]_{m \times m}$$

3.3　W、V 的确定

有实验证明：动态噪声的方差阵 W 和量测噪声的方差阵 V 的初值对回归系数 β 订正并不敏感[2]，根据白噪声的假定，W 和 V 的非对角元素应皆为 0。

根据经验分析估计，W 和 V 的初值可为：

$$W = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

4　讨论

4.1　因子的选择对预报效果影响很大。如果因子选择不妥，很可能使卡尔曼滤波方法不收敛，系统不稳定。

4.2　随机变量 V 及随机向量 W 的方差和协方差的初始值对回归系数的订正并不敏感。因此 W 和 V 可通过经验来确定。为了使方法能较快的收敛适度，通常把它们的值取得大些。

4.3　卡尔曼滤波递推系统无论从什么初值出发，经过一定时间迭代后均趋于系统回归值。因此可用客观方法求得的系数作为系统的期望初值。

参考文献

1　陆如华．卡尔曼滤波方法在天气预报中的应用．气象，1994，20(9)

2　朱正心等．温度客观预报自动化业务系统．气象，1997，23(3)