第4卷 第5期 2004年5月
1671-1815(2004)05-0334-04

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol.4 No.5 May, 2004
© 2004 Sci. Tech. Engng.

多传感器线性最小方差最优信息融合估计准则

孙书利 邓自立
(黑龙江大学自动化系,哈尔滨 150080;dzl@hlju.edu.cn)

摘要 用 Lagrange 乘数法和矩阵微分运算,分别提出了按矩阵加权、按标量加权和各分量按标量加权的三种线性最小方差信息融合估计准则,其中考虑了估计误差之间的相关性,推广和发展了现有文献的结果。文中比较了三种融合估计的精度和计算负担,可应用于信息融合状态或信号最优估计。

关键词 多传感器 最优信息融合准则 线性最小方差融合估计
中图法分类号 O211.64; **文献标识码** A

在信息融合状态估计领域,Carlson[1] 给出了各传感器估计误差不相关情形按矩阵加权的线性最小方差最优融合估计公式。Kim[2] 给出了各传感器估计误差相关情形的极大似然最优融合估计公式,但其推导要求假设估计误差服从联合正态分布。按矩阵加权往往不便于工程上实时应用。文献[3]提出了按标量加权线性最小方差融合估计公式,但没有考虑估计误差的相关性。本文考虑了估计误差的相关性,用 Lagrange 乘数法和矩阵微分运算推广和改进了上述结果,不要求估计误差服从联合正态分布的假设,得到了与文献[2]相同的结果。且针对按标量加权融合准则实际上是各分量按相同的加权系数进行融合的缺点,还提出了各分量按标量加权的线性最小方差最优信息融合估计准则,实现了各分量按不同加权系数加权的融合估计,它等价于按对角阵加权融合估计[4]。三者的融合估计精度从高到低依次是按矩阵加权融合估计、按对角阵加权融合估计和按标量加权融合估计,但从便于实时应用和计算量的角度,它们的次序却正好相反。

1 按矩阵加权线性最小方差信息融合准则

设基于 L 个传感器得到随机向量 $x\in R^n$ 的 L 个无偏估计 $\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_L$, $\mathrm{E}\hat{x}_i=\mathrm{E}x, i=1,2,\cdots,L$,其中 E 是均值号。估计误差 $\tilde{x}_i=x-\hat{x}_i$ 的协方差阵为 $P_{ij}=\mathrm{E}[\tilde{x}_i\tilde{x}_j^{\mathrm{T}}], i,j=1,2,\cdots,L$,其中 T 为转置号。问题是求加权矩阵 A_i 使融合估计

$$\hat{x}=A_1\hat{x}_1+A_2\hat{x}_2+\cdots+A_L\hat{x}_L \tag{1}$$

是无偏的,且极小化性能指标

$$J=\mathrm{tr}\mathrm{E}[\tilde{x}\tilde{x}^{\mathrm{T}}] \tag{2}$$

其中 $\tilde{x}=x-\hat{x}$,tr 为矩阵的迹。性能指标的含意为极小化估计误差分量平方和,因而叫按矩阵加权线性最小方差融合准则。$P_{ij}=0(i\neq j)$ 的情形文献[1]已给出结果,本文假设 $P_{ij}\neq 0(i\neq j)$,即估计误差是相关的。由无偏性的假设有 $\mathrm{E}\hat{x}=\mathrm{E}x$, $\mathrm{E}\hat{x}_i=\mathrm{E}x, i=1,2,\cdots,L$,这引出

$$A_1+A_2+\cdots+A_L=I_n \tag{3}$$

其中 I_n 为 $n\times n$ 的单位阵,于是

$$\tilde{x}=A_1\tilde{x}_1+A_2\tilde{x}_2+\cdots+A_L\tilde{x}_L \tag{4}$$

引入 $n\times nL$ 合成矩阵 $A=[A_1\cdots A_L]^{\mathrm{T}}$,则

$$J=\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}PA) \tag{5}$$

其中定义 $nL\times nL$ 矩阵 P 以为 P_{ij} 为第 (i,j) 元素的分块矩阵 $P=(P_{ij})_{nL\times nL}$,约束式(3)成为

$$A^{\mathrm{T}}e=I_n, e=[I_n\cdots I_n]^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

问题转化为在约束式(6)下求矩阵 $\bar{A}$ 极小化式(5)。应用 Lagrange 乘子法,引入辅助函数

$$F=J+\mathrm{tr}[\Lambda(A^{\mathrm{T}}e-I_n)] \tag{7}$$

其中定义 $n\times n$ 矩阵 $\Lambda=(\lambda_{ij})_{n\times n}$,应用矩阵迹的微分公式,置 $\partial F/\partial A|_{A=\bar{A}}=0$,注意 J 由式(5)定义,则有

$$P\bar{A}+\frac{1}{2}e\Lambda=0 \tag{8}$$

定义 $U=\frac{1}{2}\Lambda$,则由式(6)和式(8)引出矩阵方程

$$\begin{pmatrix} P & e \\ e^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{A} \\ U \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

2004年1月5日收到 国家自然科学基金(60374026)资助
第一作者简介:孙书利,男,1971年生.黑龙江大学自动化系讲师,哈尔滨工业大学在职博士生.研究方向为多传感器信息融合,状态估计,最优滤波等.

由分块矩阵求逆公式,有

$$\begin{pmatrix}\bar{A}\\U\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P & e\\e^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P^{-1}e(e^{\mathrm{T}}P^{-1}e)^{-1}\\-(e^{\mathrm{T}}P^{-1}e)^{-1}\end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\bar{A}=P^{-1}e(e^{\mathrm{T}}P^{-1}e)^{-1} \quad (11)$$

它相同于文献[2]的极大似然融合估计公式,但这里避免了估计误差服从联合正态分布的假设。于是由式(5)我们有最优融合误差方差阵为

$$P_0=\bar{A}^{\mathrm{T}}P\bar{A}=(e^{\mathrm{T}}P^{-1}e)^{-1}e^{\mathrm{T}}P^{-1}PP^{-1}e(e^{\mathrm{T}}P^{-1}e)^{-1}=(e^{\mathrm{T}}P^{-1}e)^{-1} \quad (12)$$

由 Schwartz 矩阵不等式[5],我们有

$$P_0=(e^{\mathrm{T}}P^{-1}e)^{-1}=[(P^{-\frac{1}{2}}e)^{\mathrm{T}}(P^{\frac{1}{2}}e_i)]^{\mathrm{T}}\times[(P^{-\frac{1}{2}}e)^{\mathrm{T}}(P^{-\frac{1}{2}}e)]^{-1}[(P^{-\frac{1}{2}}e)(P^{\frac{1}{2}}e_i)]^{\mathrm{T}}\leqslant(P^{\frac{1}{2}}e_i)^{\mathrm{T}}(P^{\frac{1}{2}}e_i)=P_{ij} \quad (13)$$

其中 $e_i=[0,\cdots,I_n,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$ 为以 I_n 为第 i 块,其余位置为 $n\times n$ 零块的 $nL\times n$ 的分块矩阵。且在式(13)中不等号恒成立。事实上,只有当 $P_0=P_{jj}$,$j=1,2,\cdots,L$,时等号才成立,而此时 P 为奇异阵,所以在 P 非奇异时不等号恒成立。

上述结果可概括为如下定理。

定理 1　极小化性能指标(2)式的按矩阵加权的线性最小方差多传感器信息融合估计公式为

$$\hat{x}_0=\bar{A}_1\hat{x}_1+\bar{A}_2\hat{x}_2+\cdots+\bar{A}_L\hat{x}_L \quad (14)$$

其中最优加权矩阵 $\bar{A}_i$,$i=1,2,\cdots,L$ 由式(11)给出为

$$\bar{A}=[\bar{A}_1\cdots\bar{A}_L]^{\mathrm{T}}=P^{-1}e(e^{\mathrm{T}}P^{-1}e)^{-1} \quad (15)$$

最小融合误差方差阵 P_0 为

$$P_0=(e^{\mathrm{T}}P^{-1}e)^{-1} \quad (16)$$

且有关系 $P_0<P_{ii}$,$i=1,2,\cdots,L$。特别地有关系 $\mathrm{tr}P_0<\mathrm{tr}P_0$,$i=1,2,\cdots,L$。

注　显然,由 P 的定义可知 P 为半正定阵。在定理 1 中要求 P 为非奇异的,如果在应用中某时刻 P 奇异,则我们可取最优融合估计为 $\hat{x}_0=\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\hat{x}_j$,方差阵 $P_0=P_j$,其中 $\hat{x}_j$,$j=1,\cdots d$,$d\leqslant L$,是具有相同最小方差的局部估计,即 $P_j=\min\{P_i \mid i=1,2,\cdots,L\}$。

2　按标量加权线性最小方差信息融合准则

上述按矩阵加权最优融合准则公式(15)的缺点是要求 $nL\times nL$ 矩阵的逆矩阵,要求较大的计算负担,不便于实时应用。下面提出了各传感器估计误差相关情形的按标量加权性最小方差最优融合算法,其突出优点是计算量小,便于实时应用。

定理 2　设 $\hat{x}_i$,$i=1,2,\cdots,L$ 为对随机向量 $x\in R^n$ 的 L 个无偏估计,设估计误差为 $\tilde{x}_i=x-\hat{x}_i$,$i=1,2,\cdots,L$,且估计误差 $\tilde{x}_i$ 与 $\tilde{x}_j$,$(i\neq j)$相关,已知它们的误差方差阵和互协方差阵为 $P_{ij}=\mathrm{E}[\tilde{x}_i\tilde{x}_j^{\mathrm{T}}]$。则标量加权最优信息融合估计为

$$\hat{x}_0=\bar{\alpha}_1\hat{x}_1+\bar{\alpha}_2\hat{x}_2+\cdots+\bar{\alpha}_L\hat{x}_L \quad (17)$$

其中最优融合系数 $\bar{\alpha}_i$,$i=1,2,\cdots,L$,由下式计算

$$\bar{\alpha}=\frac{A^{-1}e}{e^{\mathrm{T}}A^{-1}e} \quad (18)$$

其中 $L\times L$ 的矩阵 $A=(\mathrm{tr}P_{ij})_{L\times L}$;$i,j=1,2,\cdots,L$。$\bar{\alpha}=[\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\cdots,\bar{\alpha}_L]^{\mathrm{T}}$ 和 $e=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$ 均为 L 维列向量。相应的最优信息融合估计误差方差阵为

$$P_0=\sum_{i,j=1}^{L}\bar{\alpha}_i\bar{\alpha}_jP_{ij} \quad (19)$$

且有关系 $\mathrm{tr}P_0\leqslant\mathrm{tr}P_{ii}$,$i=1,2,\cdots,L$。

证明　引入合成的无偏估计

$$\hat{x}=\alpha_1\hat{x}_1+\alpha_2\hat{x}_2+\cdots\alpha_L\hat{x}_L \quad (20)$$

其中 α_i 为任意标量,记误差 $\tilde{x}=x-\hat{x}$ 的方差阵为 P。由无偏性的假设和式(20)有

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_L=1 \quad (21)$$

由式(20)和式(21)有融合估计误差

$$\tilde{x}=x-\hat{x}=\sum_{i=1}^{L}\alpha_i(x-\hat{x})=\sum_{i=1}^{L}\alpha_i\tilde{x}_i \quad (22)$$

于是融合估计的误差方差阵为

$$P=\mathrm{E}(\tilde{x}\tilde{x}^{\mathrm{T}})=\sum_{i,j=1}^{L}\alpha_i\alpha_jP_{ij} \quad (23)$$

定义 $\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_L]^{\mathrm{T}}$,从而性能指标 $J=\mathrm{tr}P$ 化为

$$J=\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha \quad (24)$$

约束条件式(21)可写为

$$\alpha^{\mathrm{T}}e=1 \quad (25)$$

应用 Lagrange 乘子法,引入辅助函数

$$F=J+\lambda(\alpha^{\mathrm{T}}e-1) \quad (26)$$

令 $\partial F/\partial\alpha|_{\alpha=\bar{\alpha}}=0$,得

$$A\alpha=\frac{1}{2}\lambda e=0 \quad (27)$$

令 $\mu=\frac{1}{2}\lambda$,并将式(27)和式(21)结合则有矩阵方程

$$\begin{pmatrix}A & e\\e^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\alpha}\\\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad (28)$$

其中 A,$\bar{\alpha}$,e 如前面定义。由矩阵求逆公式引出式(17)、式(18)和式(19)。在式(23)中令 $\alpha_i=1$,$\alpha_j=0$,$(i\neq j)$,则可获得 $\mathrm{tr}P_0\leqslant\mathrm{tr}p_{ii}$(证毕)

3　分量按标量加权的线性最小方差融合准则

由按标量加权融合公式(17)看到，它等价于各分量按相同系数加权的融合估计。为了提高各分量融合估计精度，可采用不同加权系数。记最优融合估计 $\hat{x}_0=[\hat{x}_{01}\cdots\hat{x}_{0n}]^{\mathrm{T}}$，第 i 个传感器的局部估计为 $\hat{x}_i=[\hat{x}_{i1}\cdots\hat{x}_{in}]^{\mathrm{T}}$，则各分量按标量加权的融合估计为

$$\hat{x}_{0i}=\alpha_{1i}\hat{x}_{1i}+\alpha_{2i}\hat{x}_{2i}+\cdots+\alpha_{Li}\hat{x}_{Li},i=1,2,\cdots,n \quad (29)$$

因为各局部会计的分量 $\hat{x}_{ji}$，$j=1,2,\cdots,L$ 均为标量，因而问题归结为求 n 个按标量加权的最优融合估计式(29)。假设已知 $P_{ij}=\mathrm{E}[\tilde{x}_i\tilde{x}_j^{\mathrm{T}}]$，$i,j=1,2,\cdots,L$，记

$$P^{ii}=\begin{bmatrix}P_{11}^{ii} & \cdots & P_{1L}^{ii}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ P_{L1}^{ii} & \cdots & P_{LL}^{ii}\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,n \quad (30)$$

其中 $P_{kj}^{(ii)}$ 为 P_{kj} 的第(i,i)对角元素，$P_{kj}^{(ii)}=\mathrm{E}[\tilde{x}_{ki}\tilde{x}_{ji}]$，$\tilde{x}_{ri}=x_i-\hat{x}_{ri}$，$r=k,j$，且记第 i 个分量的标量加权融合系数向量为

$$\alpha_i=[\alpha_{1i}\,\alpha_{2i}\,\cdots\,\alpha_{Li}] \quad (31)$$

由定理1引出如下定理3。

定理3　分量按标量加权的 n 个线性最小方差最优融合估计为

$$\hat{x}_{0i}=\bar{\alpha}_{1i}\hat{x}_{1i}+\bar{\alpha}_{2i}\hat{x}_{2i}+\cdots+\bar{\alpha}_{Li}\hat{x}_{Li},i=1,2,\cdots,n \quad (32)$$

其中最优加权系数向量 $\bar{\alpha}_i=[\bar{\alpha}_{1i}\bar{\alpha}_{2i}\cdots\bar{\alpha}_{Li}]$ 为

$$\bar{\alpha}_i=\frac{e^{\mathrm{T}}(P^{ii})^{-1}}{e^{\mathrm{T}}(P^{ii})^{-1}e},\ i=1,2,\cdots,n \quad (33)$$

其中 e 的定义同定理2。各分量的最小融合误差 $\tilde{x}_{0i}=x_i-\hat{x}_{0i}$ 的方差为 $P_{0i}=\mathrm{E}(\tilde{x}_{0i})^2$ 为

$$P_{0i}=[e^{\mathrm{T}}(P^{ii})^{-1}e]^{-1},\ i=1,2,\cdots,n \quad (34)$$

且有关系 $P_{0i}<P_{kk}^{ii}$，$i=1,2,\cdots,n$，$k=1,2,\cdots,L$。

记分量按标量加权最小融合估计误差方差阵为 P_0^c，则由定理3有 P_0^c 的迹为 $\mathrm{tr}P_0^c=\sum_{i=1}^{L}P_{0i}$。再分别记按矩阵加权和标量加权的最优融合误差方差阵为 P_0^m 和 P_0^s，则三种加权融合准则的精度由高到低依次是矩阵加权融合、分量标量加权融合和标量加权融合。即我们有下面的定理4。

定理4　定理1—定理3所述的三种加权融合准则的精度有关系

$$\mathrm{tr}P_0^m\leqslant\mathrm{tr}P_0^c\leqslant\mathrm{tr}P_0^s\leqslant\mathrm{tr}P_{ii} \quad (35)$$

证明　按标量 α_i 加权可看成是按特殊形式矩阵 $A_i=a_iI_n$ 加权，而分量按标量加权可看成是按对角阵 $A_i=\mathrm{diag}(a_{1i},\cdots,a_{Li})$加权，而第 i 个传感器子系统的估计可看成加权阵取 $A_i=I_n$，$A_j=0(j\neq 0)$的融合估计。因此在统一的按矩阵加权融合估计框架下有式(35)成立。(毕证)

4　结束语

在线性最小方差意义下，考虑局部估计误差的相关性提出了三种最优信息融合准则。将目前按矩阵加权的最小方差融合准则，从工程实时应用角度发展为按标量加权和各分量按标量加权两种新的最优融合准则。且本文用 Lagrange 乘子法推导按矩阵加权线性最小方差融合准则避免了文献[2]要求局部估计误差服从联合正态分布的限制性假设。上述结果包括局部估计误差不相关情形[1,3]作为特例。本文结果可直接应用于多传感器信息融合状态和信号估计[4]。

参考文献

1　Carlson N A. Federated square root filter for decentralized parallel processes. IEEE Trans Aerospace and Electronic Systems, 1990; 26(3):517—525

2　Kim K H. Development of track to track fusion algorithm. Proceeding of the American Control Conference, Maryland, June 1994: 1037—1041

3　邓自立，祁荣宾. 多传感器信息融合次优稳态 Kalman 滤波器. 中国学术期刊文摘(科技快报)，2000；6(2)：183—184

4　邓自立. 自校正滤波理论及其应用——现代时间序列分析方法. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2003

5　徐宁寿. 随机信号估计与系统控制. 北京：北京工业大学出版社，2001

(下转第340页)

man预报器，具有通用性和一般性，且给出了带有色观测噪声的目标跟踪系统的仿真应用。所得结果可直接推广到多传感器信息融合超前 k 步稳态最优Kalman预报器。

参 考 文 献

1 何友，王国宏，陆大金，彭应宁. 多传感器信息融合及其应用. 北京：电子工业出版社，2000
2 邓自立. 自校正滤波理论及其应用——现代时间序列分析方法. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2003
3 邓自立. 卡尔曼滤波与维纳滤波——现代时间序列分析方法. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2001

Two-sensor Information Fusion k-step-ahead Steady-state Optimal Kalman Predictor

DENG Zili, GAO Yuan
(Department of Automation HeilongJiang University, Harbin 150080; dzl@hlju.edu.cn)

[**Abstract**] Using Kalman filtering method, based on the Riccati equation, under the linear minimum variance information fusion criterion, the two-sensor information k-step-ahead steady-state optimal Kalman predictor weighted by matrices is presented for systems with correlated noises, where the optimal weighting matrices and minimum fused error variance matrix are given. Compared with the single sensor case, the accuracy of the predictor can be improved. A simulation example for a tracking system shows their effectiveness.

[**Key words**] two-sensor information fusion   information fusion state estimation k-step-ahead optimal fusion Kalmar predictor   Kalman filtering method

上接第 336 页

Multi-sensor Optimal Information Fusion Criterion in Linear Minimum Variance Sense

SUN Shuli, DENG Zili
(Department of Automation, Heilongjiang University, Harbin 150080; dzl@hlju.edu.cn)

[**Abstract**] Using Lagrange multiplier method and matrix differential operation, three information fusion estimation criterions are presented in the linear minimum variance sense, where the fusion estimators are respectively weighted by matrices, weighted by scalar and weighted by scalar on components. The correlation among estimation errors is considered. The results of existing literatures are extended and developed. Their precision and computational burdens are compared. They can be applied into optimal information fusion estimation for the states or signals.

[**Key words**] multisensor   optimal information fusion criterion   linear minimum variance fusion estimation