

分类号：_____

密级：_____

UDC：_____

编号：_____

工学博士学位论文

冗余惯性导航系统的关键技术研究

博士研究生：戴晓强

指导教师：史 震 教授

学科、专业：导航、制导与控制

哈尔滨工程大学

2014 年 11 月

分类号：_____

密级：_____

UDC：_____

编号：_____

工学博士学位论文

冗余惯性导航系统的关键技术研究

博士研究生：戴晓强

指导教师：史 震 教授

学位级别：工学博士

学科、专业：导航、制导与控制

所在单位：自动化学院

论文提交日期：2014 年 11 月 05 日

论文答辩日期：2015 年 01 月 24 日

学位授予单位：哈尔滨工程大学

Classified Index:

U.D.C:

A Dissertation for the Degree of D. Eng

The Key Technology Research on Redundant Inertial Navigation System

Candidate: Dai Xiaoqiang

Supervisor: Prof. Shi Zhen

Academic Degree Applied for: Doctor of Engineering

Specialty: Navigation, Guidance and Control

Date of Submission: Nov. 05, 2014

Date of Oral Examination: Jan. 24, 2015

University: Harbin Engineering University

哈尔滨工程大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：本论文的所有工作，是在导师的指导下，由作者本人独立完成的。有关观点、方法、数据和文献的引用已在文中指出，并与参考文献相对应。除文中已注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经公开发表的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者（签字）：

日期： 年 月 日

哈尔滨工程大学

学位论文授权使用声明

本人完全了解学校保护知识产权的有关规定，即研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权属于哈尔滨工程大学。哈尔滨工程大学有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件。本人允许哈尔滨工程大学将论文的部分或全部内容编入有关数据库进行检索，可采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文，可以公布论文的全部内容。同时本人保证毕业后结合学位论文研究课题再撰写的论文一律注明作者第一署名为哈尔滨工程大学。涉密学位论文待解密后适用本声明。

本论文（☐在授予学位后即可 ☐在授予学位 12 个月后 ☐解密后）由哈尔滨工程大学送交有关部门进行保存、汇编等。

作者（签字）：

导师（签字）：

日期： 年 月 日

年 月 日

摘 要

捷联惯性导航系统具有的一系列的优点,使得它成为惯性导航系统主要的发展方向。由于惯性传感器工艺水平的影响,其精度和可靠性一直无法得到保证,从而限制了捷联惯性导航系统的发展。通过冗余技术,可在现有惯性传感器水平上大幅提高惯性导航系统的精度和可靠性。现阶段,冗余惯性导航系统已成为惯性导航技术研究的一个热点。本文针对冗余惯性导航系统的传感器配置、初始对准、传感器的故障检测与隔离、传感器的数据融合以及导航方案等几个关键技术问题进行了研究。

冗余传感器的配置是冗余惯性导航系统首先需要解决的问题。在冗余惯性导航系统中,冗余的传感器数量越多,导航系统的精度和可靠性也越高,但是系统本身的成本、重量、体积和结构的复杂度也大大增加。在研究了传感器数量与系统可靠性之间的关系后,提出了一种系统可靠性的新性能指标。根据该性能指标的计算,在满足可靠性的要求前提下,可确定出冗余惯性导航系统中最经济的传感器数量。在确定传感器数量后,研究了同时满足惯性导航系统导航性能和故障检测与隔离性能的最优传感器配置方案。通过仿真计算证明,6个同类传感器的正十二面体对称配置结构为最优冗余传感器配置方案。

惯性导航系统在执行导航任务之前必须进行初始对准。精度和速度是初始对准的两个重要技术指标,系统的可观测性严重影响初始对准的速度。针对冗余惯性导航系统中冗余的外部可量测信息,提出了将惯性传感器输出直接作为系统观测量,姿态角作为状态变量的初始对准方案,建立了非线性初始对准模型,将初始对准模型的维数降至3维,改善了模型系统可观测度,同时可以消除惯性传感器的共模误差。仿真结果表明,在稳态精度上,新建立的非线性初始对准模型没有很大的改善,但是在快速性上却有很大的提高,新建立的非线性初始对准模型在对准过程中,能在5s内使3个失准角完全收敛。

提高惯性导航系统的可靠性是构建冗余惯性导航系统的最初目的,先进合理的故障检测与隔离技术是冗余惯性导航系统的可靠性的保证。针对基于奇偶空间法的故障检测方法存在的问题,提出一种冗余惯性导航系统的改进实时漂移补偿算法。它利用状态估计技术实时估算出信号的漂移误差值,用状态反馈技术来减小信号误差;它利用自适应扩展卡尔曼粒子滤波器,来解决噪声不满足高斯特性的情况以及模型不准确问题;它引入漂移因子,减弱了实时漂移补偿效果对于反馈增益的依赖性,加大了反馈增益的取

值范围。仿真结果表明所提出的改进实时补偿方法能够有效的纠正漂移传感器，引入的漂移因子大大降低了实时补偿系统对反馈增益的依赖程度，在满足系统稳定的前提下，即使所有传感器都发生故障漂移，该算法也能有效的补偿故障漂移，保证了冗余惯性导航系统的正常工作，增强了冗余惯性导航系统的鲁棒性和可靠性。

冗余惯性导航系统在满足可靠性的前提下，要尽量提高系统的精度。冗余传感器最优融合算法能够充分利用冗余惯性导航系统中冗余的观测信息进行数据融合，提高了冗余惯性导航系统的导航精度。将冗余传感器的输出在冗余惯性导航系统配置矩阵的左零空间上的投影作为融合的冗余观测，基于这种冗余观测进行最优估计，它能够攫取各传感器的最优特性。为了解决最优融合算法在系统噪声特性未知的情况下性能急速降低的问题，提出了一种改进的自适应最优融合算法。它将带噪声估计器的强跟踪算法引入最优融合算法中，既保证了系统噪声的实时估计，又保证了系统在模型不准条件下收敛性。当冗余惯性导航系统中的传感器发生故障漂移时，将最优融合算法和故障漂移补偿算法相结合，提出一种最优融合漂移补偿算法。仿真证明，改进的自适应最优融合算法能够有效的解决最优融合算法在系统噪声未知或设置不合理的情况下性能下降的问题，但是它在解决滤波的鲁棒性的同时也牺牲了算法的估计精度。最优融合漂移补偿算法能够有效的解决传感器的故障漂移，同时充分融合了所有传感器的暂态特性，保证了算法的最优估计。

冗余惯性传感器的最优融合方法可以得到准确的惯性信息，但不一定可以获得最优导航精度。本文推导了一种冗余惯性导航系统的最优导航方案，并对其缺陷进行相应的改造，形成一种次优导航方案。这种次优导航方案中，惯性传感器的冗余观测不再作为导航 Kalman 的输入，仅用来进行惯性信息的最优估计。根据某些场合系统噪声不能够准确获知的情况，又提出一种带噪声估计器的次优导航方案，通过自协方差最小二乘噪声估计算法实时的将惯性量测装置的量测噪声和系统噪声估计出来，保证了导航方案的性能。最后通过仿真证明，次优导航方案的性能并不比最优导航方案差，当惯性传感器发生故障漂移时，次优导航方案的性能明显优于最优导航方案。改进的次优导航方案也能够有效的解决系统噪声未知或设置不合理的情况下性能下降的问题，保证次优导航方案的性能。

关键词：冗余惯性导航；故障漂移补偿；最优融合算法；最优导航方案

ABSTRACT

The Strapdown inertial navigation system is the main development direction of inertial navigation system due to its advantages. Since the inertial sensors' accuracy and reliability has been unable to obtain guarantee, the development of strapdown inertial navigation system is limited. The redundancy technology can significantly improve the accuracy and reliability of the inertial navigation system on the existing inertial sensor level. At present, the redundant inertial navigation system has become a hotspot in the research of inertial navigation technology. In this paper, several key technical issues of redundant inertial navigation system are studied, such as redundant sensor configuration, initial alignment, fault detection and isolation, redundant sensor optimal data fusion and optimal navigation solution etc.

The redundant sensor configuration is first issue to be addressed in redundant inertial navigation system. In a redundant inertial navigation system, the more number of redundant sensor, the navigation accuracy and reliability of the system is higher, but the complexity of the system itself, the weight, volume and cost also greatly increased. The relationship between the number of sensors and the system reliability was studied, and the figure of merit for system reliability performance was proposed. According to the figure of merit, the optimum number of sensors for redundant inertial navigation system can be obtained. The optimal sensor configuration for navigation performance and fault detection and isolation performance has been studied when the number of sensors was determined. The simulations show that the dodecahedron symmetric configuration is optimal redundant sensors configuration.

Before performing the navigation task, initial alignment of the strapdown inertial navigation system must be carried out. The accuracy and speed of Initial alignment are two important technical indicators. The alignment system observability is seriously affecting the speed of initial alignment. According to the redundant output of sensors in redundant inertial navigation system, a new non-linear alignment model was proposed. And the inertial sensor outputs directly are as system observables, attitude angles are as the initial alignment state variables in this alignment model. The dimension of this non-linear model was reduced to three, the system observability was improved, and the common errors of sensors could be eliminated. The simulation results show that the new non-linear model is not much

improvement in the steady-state accuracy, but the rapidity is greatly increased. In alignment process, the three misalignment angle convergences in five seconds when using new alignment model.

The initial goal about the redundant inertial navigation system is focused on the reliability of navigation system. The advanced fault detection and isolation techniques can ensure the reliability of redundant inertial navigation systems. For the problems of fault detection method based on parity equations, an improved real-time drift compensation method was proposed. It can estimate value of the drift error signal using real-time state estimation techniques and reduce the signal error using state feedback technique. The adaptive extended Kalman particle filter is used to solve that the noise does not satisfy the Gaussian model and the model is not accurate problem. A drift factor is introduced, which can weaken dependence of feedback gain for drift compensation and increase the range of feedback gain. Simulation results show that the improved fault tolerant algorithm can compensate the sensor drifts effectively and improve the robustness and reliability of the redundant inertial navigation system. And the improved fault tolerant control algorithm is insensitive to the feedback gain, and it can enlarge the range of feedback gain due to the drift factor.

Once the reliability of redundant inertial navigation system can be met, the accuracy of system should be improved as far as possible. The redundant sensor optimal fusion algorithm can take full use of the redundant observation for data fusion, and the navigation accuracy can be improved. The projection of redundant sensor output to the left null space of the sensor configuration matrix is used as these redundancy observations of fusion algorithm. The optimal fusion algorithm can get the best characteristics of all sensors. The optimal fusion algorithm performance would reduce rapidly when the noise characteristics of the system is unknown. In order to solve the problem, an improved adaptive optimal fusion algorithm was proposed. The strong tracking algorithm with noise estimator was brought to optimal fusion algorithm, which can both ensure that system noise was estimated in real time and ensure that the system can be convergence when uncertainty model. When the sensors occur fault drift, the fault drift compensation algorithm and optimal fusion algorithm are combined as an optimal fusion drift compensation algorithms. Simulation results show that the improved adaptive fusion algorithm can effectively solve the problem of performance degradation when the system noise characteristics is unknown or unreasonable setting. However, the estimation

accuracy of the algorithm was sacrificed when it solved the robustness of filtering. The optimal fusion drift compensation algorithm can effectively solve the problem drift of the sensor, and which can get optimal estimation due to the full integration of the transient characteristics of all sensors.

The optimal fusion method of redundant sensors can get accurate inertial information, but it can not obtain the optimal navigation accuracy necessarily. The optimal navigation solution for redundant inertial navigation system is developed. A pseudo-optimal navigation solution is proposed to solve the defects of the optimal navigation solution. In pseudo-optimal navigation solution, the redundant observation is no longer as navigation Kalman input, just for optimal estimation inertial information. When the system noise can not be accurately informed, the improved pseudo-optimal navigation solution with noise estimator is proposed. The autocovariance least squares estimation algorithm is used to estimate the measurement and system noises, performance of the pseudo-optimal navigation solution is ensured. Finally, the simulations prove that the performance of pseudo-optimal navigation solution is not poor than optimal navigation solution. The performance of pseudo-optimal navigation solution is significantly better than the optimal navigation solution when sensors suffer fault drift. The improved pseudo-optimal navigation solution can ensure the optimal performance of navigation when the system noise is unknown or unreasonable setting.

Keywords: Redundant Inertial Navigation; Fault Drift Compensation; Optimal Sensor Fusion; Optimal Navigation Solution

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 课题研究目的和意义	1
1.2 冗余技术在惯性导航系统中的发展概况	2
1.3 冗余惯性导航系统中几个关键技术的研究现状	3
1.3.1 多惯性传感器冗余配置的研究	3
1.3.2 惯性导航系统初始对准技术的研究	4
1.3.3 冗余惯性导航系统的故障检测与隔离技术的研究	6
1.3.4 冗余惯性导航系统数据融合和导航方案的研究	8
1.4 本文研究的内容	9
第 2 章 冗余惯性导航系统的技术方案	11
2.1 引言	11
2.2 捷联惯性导航系统的工作原理	11
2.2.1 参考坐标系	11
2.2.2 捷联惯性导航系统	12
2.3 冗余惯性导航系统的最佳传感器数量	15
2.3.1 传感器数量对故障检测与隔离性能的影响	16
2.3.2 传感器数量对冗余惯性导航系统可靠性的影响	16
2.4 冗余惯性导航系统的最优传感器配置	21
2.4.1 传感器的冗余配置	21
2.4.2 最优导航性能的传感器配置	24
2.4.3 基于导航性能和 FDI 性能最优的传感器配置	25
2.5 冗余惯性导航系统配置方案	26
2.5.1 各配置方案的导航性能	26
2.5.2 导航性能和 FDI 最优的配置方案	28
2.6 本章小结	29
第 3 章 冗余惯性导航系统的初始对准	30
3.1 引言	30
3.2 惯性导航系统的初始对准	31

3.2.1 粗对准原理	31
3.2.2 精对准原理.....	32
3.2.3 静基座初始对准中卡尔曼滤波技术的应用.....	33
3.3 冗余惯性导航系统的非线性初始对准模型	36
3.3.1 非线性初始对准模型的建立.....	36
3.3.2 非线性滤波算法.....	39
3.3.3 仿真.....	40
3.3.4 讨论分析.....	43
3.4 本章小结	45
第4章 冗余惯性导航系统的故障诊断与隔离	46
4.1 引言	46
4.2 故障检测与诊断方法	46
4.2.1 直接比较法.....	47
4.2.2 最优奇偶向量法.....	49
4.2.3 奇异值分解法.....	51
4.2.4 广义似然比故障检测法.....	52
4.3 实时故障漂移补偿算法.....	54
4.3.1 基本理论.....	55
4.3.2 实时故障补偿方法.....	56
4.3.3 仿真	61
4.3.4 讨论分析	68
4.4 本章小结.....	70
第5章 冗余惯性导航系统的传感器数据融合	71
5.1 引言	71
5.2 冗余惯性传感器最优融合方法	72
5.2.1 最小二乘估计.....	72
5.2.2 冗余惯性传感器最优融合的理论基础.....	73
5.2.3 多个相同特性惯性传感器的最优融合方法.....	79
5.2.4 冗余惯性导航系统的最优融合方法.....	80
5.3 冗余惯性传感器的自适应最优融合算法	81
5.4 冗余惯性传感器最优融合故障漂移补偿算法	83

5.4.1 冗余惯性传感器量测装置的误差模型.....	83
5.4.2 冗余惯性传感器漂移值的最优估计.....	84
5.4.3 冗余惯性传感器的实时漂移补偿算法.....	85
5.5 冗余惯性传感器融合的仿真与分析	86
5.5.1 仿真数据的产生.....	86
5.5.2 仿真对象及仿真实验设置.....	89
5.5.3 仿真与分析.....	92
5.6 本章小结	114
第6章 冗余惯性导航系统的导航方案	115
6.1 引言.....	115
6.2 惯性导航误差方程	115
6.2.1 姿态误差	115
6.2.2 速度和位置误差	116
6.2.3 导航误差方程状态空间形式	117
6.3 冗余惯性导航系统的最优导航方案	119
6.3.1 冗余惯性导航系统的最优导航方案	119
6.3.2 冗余惯性导航系统次优导航方案	123
6.4 带噪声估计的冗余惯性导航系统的次优导航方案	124
6.4.1 自协方差最小二乘噪声估计.....	124
6.4.2 带噪声估计的冗余惯性导航系统的次优导航方案.....	128
6.5 导航方案的仿真与分析.....	130
6.5.1 仿真数据的产生和仿真对象	130
6.5.2 仿真实验设置.....	131
6.5.3 仿真与分析	131
6.6 本章小结	146
结 论.....	147
参考文献.....	151
攻读博士学位期间发表的论文和取得的科研成果	162
致 谢.....	163

第 1 章 绪论

1.1 课题研究目的和意义

以牛顿力学三大定律为基础的惯性导航，从二战时 V-2 火箭的首次应用到当今军事领域和民用领域的广泛应用，惯性导航技术已变成当今十分重要的综合技术之一，被广泛的应用于航空、航天、航海和陆地的各个领域。惯性导航系统（INS）利用惯性传感器（加速度计和陀螺仪）测量载体相对惯性空间的位置、速度和姿态，它是一种自主式的导航系统，它不依靠外部任何外部导航信息，不向外部辐射信号，它不易受外部电磁干扰的影响，是一种隐蔽性好，能够在全球范围内全天候运行的导航系统。根据有无物理平台，惯性导航系统可分为平台惯性导航系统和捷联惯性导航系统（SINS）。相对于平台惯性导航系统，捷联惯性导航系统将惯性传感器直接固联在载体上，省去复杂的机电物理平台，具有结构简单、体积小、重量轻、成本低、易维护、可靠性高等一系列优点^[1-3]。

随着惯性导航系统的广泛应用，尤其是在航空、航天、航海领域的应用，由于工作环境的特殊性，不仅对惯性导航系统的精度有要求，而且对导航系统的可靠性也有比较高的要求。在捷联惯性导航系统中，相对于其他的元部件，惯性传感器的可靠性和精度是比较低的。为了保证惯性导航系统的可靠性和精度，必须提高惯性传感器的可靠性和精度。但是要提高惯性传感器自身的可靠性和精度并不是一蹴而就的事情，它需要在惯性传感器的制造工艺、设计水平以及原理构成等方面做持续的改进和创新。通过冗余设计可使导航系统的可靠性、安全性和生存能力得到大幅提高，特别是当基础传感器或零部件的质量与可靠性无法满足系统的可靠性要求时，冗余设计就极具应用价值了^[4]。随着计算机技术与控制理论的发展，通过冗余技术来提高整个系统的可靠性已成为惯性导航技术发展方向，冗余技术也成为国内外研究的热点之一。

冗余技术，初始时主要为了提高系统的可靠性而提出来的。随着对冗余惯性导航系统的研究发现，应用合适的融合算法，冗余技术也能够提高导航系统的精度。因此，在惯性传感器自身的精度和可靠性不能迅速得到提高的前提下，冗余惯性导航系统的研究对于提高整个惯性导航系统的精度和可靠性有着十分重要的意义。本文针对冗余惯性导航系统的几个关键技术进行了研究，以此来促进冗余惯性导航技术的发展。

1.2 冗余技术在惯性导航系统中的发展概况

随着冗余技术的发展,冗余技术可以分为三种形式:硬件冗余、软件冗余、解析冗余。硬件冗余是利用多个导航系统和传感器来实现容错,从而提高导航系统的性能。在这种方式中,各种传感器系统是相互独立、冗余配置,相互补充合作的,然后将各类型的量测数据通过数据融合算法进行融合计算,所以硬件冗余系统的性能要比单个惯性导航系统的性能要优越。硬件冗余技术已经被广泛的应用于许多航空导航系统中^[5-7]。软件冗余是使用不同的版本的软件来提高导航解算的安全性和可靠性,避免由于软件设计和计算故障而导致的错误,但是软件冗余不能提高导航解算的精度。解析冗余是基于旋转动力学和平移动力学知识来提高硬件冗余性能的一种冗余方式^[8],它能够产生额外的冗余观测信息来提高系统的故障诊断性能,但对导航系统的精度改善不起任何作用^[9]。解析冗余已经被广泛用于各种实际系统的故障检测当中。

硬件冗余在容错系统中起着至关重要的作用,而容错的能力和水平取决于硬件冗余架构和故障检测算法。对于惯性导航系统而言,硬件冗余技术可以分为两大类^[11-13],一是系统级冗余,二是传感器级冗余。系统级冗余是采用两套或两套以上的惯性导航系统冗余配置而成,各惯性导航子系统之间无相互联系,完全自主运行。通过将各惯性导航子系统的数据集集中处理,以提高导航的精度和抑制惯性传感器的时间积累误差。容错管理只需要通过检查各惯性导航子系统数据的一致性就可以诊断出故障惯性导航子系统。这种冗余方式的优势在于系统设计简单,不需要复杂的容错技术来进行故障诊断。一旦其中一个惯性子系统中的一个传感器发生故障,容错管理就必须将整个惯性该子系统移除,它无法实现传感器的动态重构。虽然这种冗余方式能够大幅提高导航系统的可靠性,但其系统的复杂度和成本也大幅度提升。目前,在军事和民用的航空导航系统、载人航天、深空探测等时间长安全性要求极高的场合,国内外所采用的冗余技术多为系统级冗余^[14]。

传感器级别的冗余是随着高速、大容量嵌入式处理器和低功耗、小体积的微型惯性量测装置(Inertial Measurement Units——IMU)的出现而发展起来的。文献[15-19]提出了几种冗余方式,其中包括量测装置级别的冗余和多传感器的冗余。量测装置级别的冗余系统一般将两个或三个IMU安置在联邦体系中来保证容错能力。为了减少导航系统中的IMU数量,一般将IMU相对于载体坐标倾斜固定在载体上^[15-19]。原则上,一个量测装置级别的冗余导航系统至少含有两个IMU,其中必须有一个IMU相对于载体坐标系是斜置的或者是非正交配置的,那么该系统才能实现容错控制。相对于三个独立的惯性导

航系统,三个惯性量测装置组成的冗余惯性导航系统的容错能力更强,每一个导航处理器都能够联合所有 IMU 的输出进行载体运动状态的估计,并进行传感器的故障检测与隔离,以及导航系统的重构。这种量测装置级别冗余导航系统明显提高了系统的容错水平和 IMU 的利用效率。但这种冗余容错系统的成本依然比较高,必须继续努力提高冗余技术水平以减小冗余导航系统的体积、重量和费用。

最近发展起来的,将多个惯性传感器按照非正交形式配置的量测装置,称为斜置冗余惯性量测装置^[16,18]。用一个多传感器装置来代替多个惯性量测装置(IMU),以此来减小导航系统的体积、重量和能耗。以新兴的微型惯性传感器和高速嵌入式处理器为基础,多传感器冗余是一种经济有效的方法,它将成为新一代导航系统的发展方向。

分布式冗余结构是一种新的容错概念,它是随着分布式系统的引进和集成模块化航空导航体系结构发展起来的。例如,一个战斗平台可能拥有 12 个不同精度的惯性量测装置为导航系统和武器系统提供惯性状态信息^[20]。在这种结构里,惯性传感器系统被安装在飞行器的几个不同位置,不仅要满足导航系统的容错要求,还要为其他系统提供局部惯性数据,如武器控制系统,雷达稳定系统和运动补偿系统。1994 年, Kelley^[21]等人首次提出航空导航系统的惯性传感器网络的概念。Bering^[20]和 Kaiser^[22]等人分别在 1996 年和 1998 年对惯性传感器网络做了进一步的阐述和发展。然而,到现在为止,现有的文献都没有对惯性传感器网络进行系统的研究,尤其是在数据融合、动态对准、分布式传感器标定、分布式传感器的故障检测与隔离问题上没有进行系统的论述。

分布式冗余结构是一种新兴的冗余结构,它是基于多个惯性导航模块所构成的网络系统的基础上,因此它的应用范围受到很大局限。而基于传感器级别的硬件冗余实现方便,成本低廉,可大范围应用。因此传感器级别的冗余是冗余惯性导航系统的一个主要发展方向,有必要对其配置结构、可靠性、精度等方面进行研究,以促进冗余惯性技术的发展,从而提高整个惯性导航系统的可靠性和精度。本文主要针对传感器级别的冗余惯性导航系统的几个关键技术展开研究。

1.3 冗余惯性导航系统中几个关键技术的研究现状

1.3.1 多惯性传感器冗余配置的研究

在 70 年代, Evans 和 Wilcox 提出将 6 个陀螺和 6 个加速度计按照正十二面体对称结构进行配置的冗余惯性导航系统^[23]。1982 年波音公司提出了 5 个陀螺和 5 个加速度计的冗余惯性导航系统^[24]。1996 年, Polites 等人提出 6 个 RL20 激光陀螺和 6 个 QA3000 加速度计的冗余惯性导航系统,被成功应用于 Delta II 运载火箭^[25]。Gai 等人分析了两种

冗余传感配置的故障检测与隔离性能^[26]。Yang 等人提出一种七传感器的最佳传感器配置方式^[27]。文献[28]研究了冗余惯性传感器的优化配置问题，它将冗余的 MEMS 量测装置与 GPS 组合使用。值得注意的是，传感器的优化配置技术被应用到无源定位^[29]和移动传感器网络上^[30]。无源定位优化的前提是传感器的优化配置问题，而无源定位中传感器优化配置的条件和冗余惯性导航系统中的传感器优化配置的条件是一致的^[31]。在 70 年代的早期，九个同类惯性传感器被应用在飞行器上，由于不知道如何最优配置传感器，只是简单的将每个坐标轴上安装三个传感器。文献[32]是最早使用两套正交配置的惯性量测装置相互斜置来构成冗余惯性导航系统的。Gilmal 提出正十二面体的对称配置的最优传感器配置结构^[33]。Pejsa 给出了四个、五个、六个惯性传感器的最优配置结构^[34]。还有其他许多学者也研究了关于的惯性导航的最优冗余配置结构^[33-34]。关于冗余传感器的最优配置问题，Harrison 等人提出用一个性能指标参数来评价传感器配置结构的导航性能和故障检测与隔离性能^[31]。一旦导航性能指标参数确定，则传感器最优配置条件就可以获得了，一旦故障检测与隔离性能参数指标确定，则任意的传感器的配置可以被评估和相互比较。因此有必要研究传感器的冗余配置结构对导航性能和可靠性的影响，并建立一个性能指标来评价配置结构对两个性能的影响程度。

根据现有的成果，冗余惯性导航系统的最优冗余配置是建立在传感器数量确定的基础上的。一般来说，传感器的数量多的方案比传感器数量少的方案，但是随着传感器数量的增加，系统的体积、重量和成本急剧增加。因此需要综合考虑传感器的数量、系统的可靠性及系统的体积和重量等几个因素，建立一种以传感器的数量为基础的冗余系统的可靠性的评估指标。在综合考虑系统的可靠性、系统的体积和重量等因素的前提下，通过该评估指标可得到最优的传感器数量。在得到最优的传感器数量的基础上再考虑冗余传感器的最佳配置问题。所谓冗余传感器的最优配置，就是要保证冗余惯性导航系统的精度和可靠性。冗余系统的可靠性主要体现在冗余系统容错能力上，也就是冗余系统的故障检测与隔离性能越好，冗余系统的可靠性也就越高。因此要保证冗余系统的导航性能和故障检测与隔离性能同时最优才是最优的传感器配置方式。

1.3.2 惯性导航系统初始对准技术的研究

初始对准技术是惯性导航系统中一项重要技术，对准的速度和精度是其主要的指标。捷联惯性导航系统初始对准的目的是确定载体在初始时刻的姿态和航向，从而建立载体坐标系到地理坐标系之间的方向余弦矩阵^[35, 36]。初始对准是为了提高惯性导航系统的初始姿态精度，从而提高惯性导航系统的定位精度。初始对准的研究主要在以下几个

方面:

1、静基座初始对准。静基座初始对准技术是初始对准技术中最为成熟的, 惯性导航系统的可观测性研究是静基座初始对准研究的一个热点。各相关研究都是通过各种途径来改善系统的可观测性, 从而提高初始对准的精度和速度。

2、动基座初始对准。动基座初始对准一般用于组合导航系统中, 利用其它系统的导航信息, 计算出惯性导航系统的定位误差, 从而估计出姿态角误差。利用动基座初始对准技术可实现飞行器空中对准, 可以提高组合导航系统的对准精度和速度。

3、传递对准。传递对准是利用精度较高的主惯性导航系统去校准从惯性导航系统。将从惯性导航系统相对于主惯性导航系统的失准角估算出来是传递对准的主要任务。利用传递对准技术可以有效提高从惯性导航系统的初始对准的精度和速度。匹配方式和机动方式对导航系统的观测性的影响比较大, 他们一直是传递对准技术研究的重点。

其中静基座初始对准是最成熟的, 以速度误差作为观测量的静基座初始对准系统的可观性和可观测度较差, 是制约其对准精度和对准速度的重要原因, 尤其是方位失准角的观测度低, 从而导致方位失准角的估计精度很差^[37]。加入基座运动, 如多位置等, 能够有效提高系统状态的可观测度, 加快方位失准角的收敛速度^[38], 但是需要精密的转台提供位置基准, 工程应用成本较大。文献[39]提出将水平速度误差值和水平加速度计的输出同时作为对准系统观测量, 在一定程度上提高了对准系统的可观测性, 加快了对准系统状态估计的收敛速度, 但这种收敛速度的提高十分有限, 因为系统中仍然有两个状态(或者线性组合)是不可观测, 尤其是方位失准角的收敛速度仍然很慢^[40]。

到目前为止, 还没有一个专门针对冗余惯性导航系统的初始对准技术。一般情况下, 冗余惯性导航系统首先将冗余观测通过估计算法估计出三轴的惯性信息, 然后按照一般的初始对准方法进行对准, 这种冗余惯性系统的对准方式没有充分利用系统的冗余观测。因此有必要对冗余惯性导航系统进行研究, 可充分利用冗余惯性导航系统中的冗余观测推导出适合冗余系统的对准模型, 提高系统的可观测性, 从而提高系统的初始对准精度和速度。由于惯性导航系统的静基座初始对准的研究最为成熟, 在确定的传感器误差下对准时间和对准误差可基本确定。为了对比方便, 本文也针对冗余惯性导航系统的静基座初始对准进行了研究, 通过将新建立的冗余惯性导航系统静基座初始对准模型和传统的惯性导航系统的初始对准模型的性能进行比较, 以突出冗余惯性导航系统静基座初始对准模型的性能。

1.3.3 冗余惯性导航系统的故障检测与隔离技术的研究

在冗余惯性导航系统中至少含有 3 个以上的同类传感器, 为了保证导航系统的可靠性, 必须拥有一个有效的故障检测与隔离算法, 及时的将系统的故障传感器检测并隔离出来。惯性传感器的故障一般分为三类: 一是跳变故障, 这类故障一般比较容易被检测出来; 二是软故障, 当传感器发生软故障时, 初期很难被发现, 只有当故障积累到一定程度时, 才能被检测出来; 三是逻辑故障, 由于工作环境或任务目标的改变, 传感器的信息不再满足任务的需要, 需要对系统和算法进行更新^[41]。

在过去的几十年里, 很多故障检测与隔离技术 (FDI) 被提出来, 但是大部分都是基于奇偶向量法的。Evans^[23]提出一种测试矩阵法, Gilmore^[33]给出了一种奇偶方程比较法。用这两种 FDI 方法来监测一个正十二面体对称配置的冗余惯性导航系统的话, 奇偶方程比较法可联列出 15 个奇偶方程, 每个方程中含有四个传感器输出, 而测试矩阵法则可列出一个 15*6 的矩阵, 矩阵的每一列都是由奇偶方程的系数所组成的。通过极小化的最大量测残差, Potter^[42]针对非正交配置的冗余惯性导航系统提出一种所谓极小极大值故障检测与隔离算法, 每四个传感器为一组进行检测和比较。可见, 这些方法都需要计算和检测每一个奇偶方程, 并应用最小方差去估计量测状态。显然, 当冗余传感器数量比较大的时候, 这些算法将是一个非常费时的过程。针对正十二面体冗余配置结构, Wilcox^[43]比较了 8 种早期的 FDI 算法。这些算法的不同点在于生成测试信号的方法, 一种方法是用一个 Kalman 滤波器的失效来校正, 而其他的算法则是通过加权最小二乘法计算量测状态。然而, 这些算法都没有综合考虑导航系统的完整性和 FDI 的性能。

为了克服早期的 FDI 方法的缺陷, 广义似然比检验法^[44, 45] (GLRT) 被引入来检测和隔离冗余惯性导航系统中故障传感器。广义似然比检验法是基于残差量的最大似然估计的一种检验法, 其中检验统计量是一个奇偶向量的函数。GLRT 算法的一个优点是综合考虑了 FDI 算法的性能和导航系统的完整性。理论上, 只要有故障信号都可以被估计出来, 但是 GLRT 算法不能检测到两个同时发生的故障。为了消除正常传感器误差的影响, Hall^[46]等人设计了一个 12 维的 Kalman 滤波器去补偿奇偶向量, 这种补偿技术增强了真实故障信号的影响, 提高了 GLRT 的性能。然而, 在奇偶空间变换后, 滤波器状态代表的是传感器误差组合而不是真实的传感器误差。换句话说, 状态估计值不是相应的真实传感器误差, 所以实际的传感器误差不能被动态估计。Sturza^[47, 48]给出一种检测斜置冗余惯性导航系统和 GPS 信号的跳变故障的奇偶向量法, 以及用统计法来确定 RAIM 和 FDI 算法检测门限。

以上所有基于奇偶向量法的 FDI 算法能够有效的检测到冗余传感器系统的跳变故障，然而他们不能检测到任何由于漂移而引起的软故障，当两个传感器同时发生故障，这些算法也起不了作用。近年来，几种序列 FDI 算法被提出来，他们可以用来检测动态系统中的跳变和时变故障。这些序列 FDI 技术可以分为两类：一类是直接使用传感器的历史数据。Wald 最早提出一种序列概率比检验法 (SPRT)，随后，Chien 等人给出一种改进的 SPRT 算法^[49]，它利用平均检测时间的最小值来检测系统故障，从而限制虚警和漏警的概率，其时间的最小化是利用似然函数的正反馈实现的，它也可以用来检测跳变故障。另一类是隐含的利用系统输出的历史数据，这类序列 FDI 方法一般是基于解析冗余技术的，它需要被检测系统的动态模型。Willsky 和 Jones 给出一种改进的 GLRT 算法^[50]，该算法利用序列系统的输出来检测线性动态系统的突变。Willsky^[51]，Gertler^[53]和 Patton^[54]三人总结各种动态系统的 FDI 算法。大部分基于模型的 FDI 算法都是利用各种 GLRT 来检测 Kalman 的残差，从而获知传感器故障或系统状态的突变。他们能够检测系统的蜕变，但不能检测传感器时变故障。从文献检索来看，许多现有的序列或者基于模型的 FDI 算法一般都用来检测跳变故障。Kerr 提出一种利用两个置信区的比较来检测故障的方法^[52]，一个置信区由 Kalman 的预测值产生，以期望非故障状态为中心，反映了不确定的系统噪声；另一个置信区由 Kalman 的估计值产生，以 Kalman 估计值为中心，反映了系统状态和量测噪声的不确定性，通过比较两种置信区来检测故障。然而，随着传感器数量的增加，故障门限值的计算将变得非常复杂。另外，由于使用相同的系统动态模型进行状态预测和状态估计，滤波器动态模型的不确定性将会导致虚警。

随着控制理论与计算机技术发展，一些智能算法也被引入到传感器的故障检测中来，如模糊控制、神经网络技术、专家系统等。Marcello R.^[55]将基于传感器误差模型的状态观测法与神经网络识别法进行了比较，当系统的动态模型不准确时，神经网络的在线学习结构非常适用于信息的在线估计。Hongjin^[56]提出自适应学习率的神经元训练方式，把多变量 B 样条函数变换成单位变量函数，从而缩短了故障检测的时间。除了上述的神经网络法，针对传感器的软故障，李延龙^[57]采用奇偶方程残差品质的模糊评测算法，利用残差品质构成最小二乘加权阵，形成了冗余惯性导航系统的智能自适应软故障检测法。该方法能够及时的检测到至多两个惯性传感器发生的软故障。

不管是奇偶向量法、广义似然比检验法还是神经网络法都是基于奇偶空间的故障检测法，都需要设置故障门限来减少虚警和漏警。一旦将发现故障传感器，立即将其移除，以保证导航系统的性能。当传感器不发生漂移时，冗余系统的冗余特性可以很好的保持，将系统的冗余观测进行数据融合可提高导航性能。当惯性传感器发生漂移时，故障检测

与隔离算法很容易将漂移的传感器隔离掉，冗余惯性导航系统很难保持系统的冗余特性。为了减少虚警和漏警，需要设定故障门限和检测时间，因此这些故障检测与隔离算法都不是实时的。因此亟需找到一种能够保持系统冗余特性实时故障检测与隔离算法，以保证系统的导航性能。针对冗余惯性导航系统的特点，本文研究了一种故障漂移补偿算法，它能够保持故障漂移的检测的实时性和系统的冗余特性。因此本文研究的传感器故障并不是一种损坏性故障，而是发生了故障漂移，它仍然能够量测惯性系统的惯性信息。若是传感器发生损坏性故障，即它的量测值无法反应系统的运动情况，则必须使用隔离算法将其隔离。

1.3.4 冗余惯性导航系统数据融合和导航方案的研究

研究冗余惯性导航系统的初期目的就是为了提高导航系统的可靠性，所有的故障检测与隔离技术的研究目的就是要将发生故障的传感器检测并隔离出来，使得导航计算不受这些故障的影响。一旦被故障检测算法确认，没有故障的传感器将输出送入最小方差算法，计算出载体坐标系下的三轴加速度和角速度，然后将这些计算出来的惯性信息送入标准的导航算法中计算，得到最终导航信息。若冗余惯性量测信息只用来故障检测与隔离，显然没有将冗余惯性量测信息充分的利用起来，可将冗余惯性信息进行数据融合，从而获得更精确的惯性数据，以提高导航性能。

Sukkarieh^[58]等人将部分故障检测与隔离算法应用在冗余 MEMS 系统中，虽然他们在冗余配置结构和故障检测算法上没有做出贡献，但是他们的研究揭示了一种可能性，通过合理的配置冗余惯性导航系统的传感器可以提高冗余导航系统的导航精度。一直以来，传感器的冗余配置都是用来提高系统的可靠性，但是 Bar-Itzhack^[59]等人提出冗余配置的传感器能够获得更好的旋转角速度。他们的研究表明，将传感器的原始输出作为 Kalman 滤波的观测可以估计出斜置冗余惯性导航系统的标定参数误差。然而，该方法需要将 Kalman 滤波状态向量添加到旋转角速度模型中。在 2005，Pittelkau^[60-62]年第一个提出冗余传感器优化使用问题，并在动基座的传感器校正中应用。要保证传感器的最优估计，当传感器测量值的加权平均估计作为导航方程的输入时，奇偶矢量必须作为导航卡尔曼滤波器的冗余观测。然而，在这些研究中，并有对这种解决方案的最优化进行定义。将加权平均估计作为导航方程的输入的原因在于这种解决方式可以避免在 Kalman 滤波器中使用动基座的动态模型。而且文献[60-62]主要关注的是动基座的传感器标定问题，没有对导航滤波器的简化进行讨论分析。文献[47, 63]中比较了几种传感器的配置方式，在这些研究中，传感器的最优配置问题只是用来简化成本函数的定义，和最优

导航解算没有任何直接关系。另一种方式是将多个惯性传感器组成传感器阵列，利用数据融合算法融合传感器阵列的输出，从而改善惯性测量的性能。房建成^[64]等提出一种惯性传感器差分测量法，将两个特性相似的惯性传感器组成差分对，并使两个惯性传感器的敏感轴相反，从而抑制工模干扰。David S.B 等^[65, 66]提出一种“虚拟传感器”的技术，用多个惯性传感器去测量同一个惯性变量，并使用 Kalman 滤波器融合所有传感器的输出，以提高测量精度，仿真表明，当用 4 个相关性较好的陀螺测量一个角速度时，精度能提高 173 倍。西北工业大学^[67, 68]将 MEMS 陀螺构成一个陀螺矩阵，将该陀螺矩阵看成一个“虚拟陀螺”，用它测量同一个惯性变量，并用数据融合方法处理陀螺矩阵的输出，从而得到一个最优的角速度估计值。虽然“虚拟传感器”技术可以大幅提高传感器的测量性能，但是对于冗余惯性系统而言，这种技术并不能适用，因为他的传感器配置方式不能够满足冗余传感器的最优配置结构。也就是说，冗余惯性导航系统的最优融合算法需要建立在最优冗余惯性导航系统的基础上的。

冗余惯性导航系统的数据融合的目的是为了提高到导航传感器的测量精度，从而获得比较高的导航性能。也就是说，研究冗余惯性导航系统数据融合的目标是得到好的导航精度。但是最优数据融合算法就能得最好的导航精度吗？答案是“不一定”，至于原因会在本文的第六章中解释。因此在研究冗余传感器数据融合的同时，也要研究冗余惯性导航系统的最优方案。合适的导航方案也可以大幅提高系统的导航精度。

本文涉及的最优融合算法和最优导航方案是立足于算法的研究，希望通过本文的研究来促进冗余惯性导航技术的发展。从算法到实际的应用还需要一个过程，因为在算法研究时，很多假设条件是比较理想的，有些假设条件在实际应用中是比较难以满足的。因此实际应用中的很多限制条件在论文没有考虑到，这将是论文下一个研究重点。

1.4 本文研究的内容

第一章：介绍了课题的研究目的和意义，对冗余惯性导航系统的各关键技术的研究现状进行回顾，并给出本文的主要研究内容。

第二章：首先对捷联惯性导航系统的原理和冗余技术进行了介绍，然后分别研究了冗余传感器数量和传感器的配置方案对冗余惯性导航系统 FDI 性能和导航性能的影响，并给出了相应的指标参数。最后通过指标参数的计算，针对可靠性和导航性能而言，最优的传感器数量为 6，最优的传感器配置为正十二面体配置。

第三章：首先介绍了捷联惯性导航系统初始对准的分类和原理，然后详细推导了传感器按照正十二面体配置的惯性导航系统的非线性初始对准模型。将该非线性模型和传

统对准性模型进行了仿真对比，突出非线性模型收敛的快速性。最后分析了惯性传感器的常值误差和各失准角之间的关系。

第四章：首先介绍了几种典型故障检测与故障诊断的方法，针对这些基于奇偶空间法的故障检测与故障诊断技术存在的问题，提出了实时故障漂移补偿方法。然后对实时故障漂移补偿方法的基本理论、实时漂移估计、漂移补偿算法、漂移因子的确定进行详细介绍，并证明了该补偿系统的稳定性。最后对改进实时故障漂移算法进行的仿真分析，证明了所提出的改进实时补偿方法能够有效的纠正漂移传感器，引入的漂移因子降低了实时补偿系统对反馈增益的依赖程度，增强了冗余惯性导航系统的鲁棒性和可靠性。

第五章：首先从理论基础到求解过程，详细推导了冗余传感器的最优融合方法（OPT），并从理论上推导了在传感器特性一致的情况下，最小二乘法和最优融合方法是等效的。然后将带噪声估计器强跟踪滤波器和最优融合算法相结合，形成一种改进的自适应最优融合算法（AOPT）。该自适应算法降低了对噪声和初值统计特性的敏感度，提高了滤波的精度和鲁棒性，并增强了对状态突变的跟踪能力。将冗余传感器最优融合方法和传感器的故障漂移补偿算法相结合，形成冗余惯性传感器的最优融合故障漂移补偿算法（OPTDC）。该算法通过冗余传感器的最优融合方法获得最优的惯性量测值（加速度和角速度），从而获得各传感器的故障漂移值，并使用故障漂移补偿方法对故障漂移传感器进行补偿，消除故障漂移对系统的影响，对所有补偿后传感器的输出进行最小二乘融合，得到最优的融合加速度和角速度。最后设置了五个仿真实验对所提及的算法进行有效性验证，并进行了分析说明。

第六章：首先介绍了惯性导航误差方程，然后推导了冗余惯性导航系统的最优导航方案，但由于这种最优导航方案不能处理含稳定误差的传感器信号，因此又对其进行相应的改造，形成一种次优导航方案。这种次优导航方案中，惯性传感器的冗余观测不再作为导航 Kalman 的输入，仅用来进行惯性信息的最优估计，由于最优导航方案中的导航滤波器中传感器误差状态和冗余观测是正交的，所以次优导航方案的性能并没有比最优导航方案逊色。接着又提出一种带噪声估计器的最优导航方案，通过自协方差最小二乘噪声估计算法实时的将惯性量测装置的量测噪声和系统噪声估计出来，保证了导航方案的性能。最后设置了四个仿真实验对所提及的算法进行有效验证，并给出了分析说明。

第2章 冗余惯性导航系统的技术方案

2.1 引言

通过惯性传感器的冗余配置可以提高惯性导航系统可靠性和精度。传感器的冗余配置可以在两个方面改善导航系统的性能：首先传感器的冗余配置增强了系统的故障传感器的检测与隔离性能；其次冗余配置的惯性传感器可以获得更为准确的姿态信息，从而获得更好的导航精度。因此，当导航系统的可靠性和导航精度无法满足要求时，可通过传感器的冗余配置来增强系统的可靠性和精度。

可靠性和导航性能往往与系统的经济性是相互矛盾的，冗余配置的传感器越多，系统的精度和可靠性就越高，但是系统的成本、重量、体积和结构的复杂度也大大增加，系统的经济性越差。Gilmore 认为对称的正十二面体结构的冗余配置能够达到最佳的导航性能^[33]。Pejsa 分别给出了四个、五个、六个惯性传感器的最优配置结构^[34]。还有其他许多学者研究了关于的惯性导航的最优冗余配置结构^[69-72]。众所周知，虽然惯性传感器数量的增加可提高系统的精度和可靠性，但是系统的成本和复杂度也相应的提高了。

本章主要解决冗余惯性导航系统中传感器的冗余配置问题。要解决传感器的配置问题，首先要解决传感器数量问题，也就是要解决在系统的可靠性满足要求的前提下最经济的传感器数量是多少的问题；其次要解决传感器的最优配置问题，也就是解决传感器如何配置才能满足系统的导航性能和可靠性最优的问题。

在满足可靠性的要求前提下，传感器数量为多少时冗余惯性导航系统是最经济的。本章给出了一种基于可靠性和成本的新指标，来确定最经济的冗余传感器数量。通过改变冗余惯性导航系统中传感器的数量，对新指标进行仿真计算，当冗余惯性传感器的数量达到最佳时，该指标值达到最大。在确定了最经济的传感器数量以后，针对导航性能和故障检测与隔离（FDI）性能最优问题，研究了最优的传感器配置方案。为了获得最优的传感器配置方案，本章给出了最优的导航性能和 FDI 性能的指标参数。通过计算各配置方案的指标参数可知，正十二面体的配置是最优的冗余传感器配置方案。

2.2 捷联惯性导航系统的工作原理

2.2.1 参考坐标系

在惯性导航系统中，惯性传感器相对惯性空间安装位置需要用坐标系来描述。在捷联惯性导航系统中，常用的坐标系如下^[73]：

1) 地球坐标系 (e 系)

地球坐标系的原点位于地心, 与地球固联, 用 $O_e X_e Y_e Z_e$ 表示, $O_e Z_e$ 轴沿着与地球的地轴指向北极, $O_e X_e Y_e$ 位于赤道平面内, $O_e X_e$ 轴指向格林威治经线, $O_e Y_e$ 轴指向东经 90° 方向。X 轴、Y 轴、Z 轴构成右手直角坐标系。地球坐标系相对惯性坐标系以地球自转角速度 ω_{ie} 旋转, $\omega_{ie} = 15.041088^\circ / h$ 。

2) 地理坐标系 (g 系)

地理坐标系是原点位于运载体所在的地球表面, 其中一轴与地理垂直重合的右手直角坐标系, 记作 $O_g X_g Y_g Z_g$ 。坐标系的原点取载体的重心, 通常情况下地理坐标系取北东地坐标系, $O_g X_g$ 指向北, $O_g Y_g$ 指向东, $O_g Z_g$ 指向当地垂线方向 (向下)。地理坐标系相对于地球坐标系的位置就是载体所在的地理位置。

3) 载体坐标系 (b 系)

载体坐标系的原点位于载体的重心, 纵轴 $O_b Y_b$ 沿着载体纵轴向前, 横轴 $O_b X_b$ 指向载体横轴向右, $O_b Z_b$ 轴垂直于载体平面向上, 记作 $O_b X_b Y_b Z_b$ 。载体坐标系相对于地理坐标系的位置关系就是载体的航向和姿态。

4) 导航坐标系 (n 系)

导航坐标系是惯性导航系统在求解导航参数时采用的坐标系, 记作 $O_n X_n Y_n Z_n$ 。一般选地理坐标系为导航坐标系。

2.2.2 捷联惯性导航系统

捷联惯性导航系统是基于牛顿力学三大定律而实现的自主式推算导航系统。它是通过固联在载体上的惯性传感器 (陀螺仪和加速度计) 来测量载体相对于惯性空间的角速度与加速度。根据载体已知的初始姿态和初始信息, 通过对角速度和加速度进行积分运算来确定载体的导航信息。由于惯性传感器直接固联在载体上, 他使用的导航平台是虚拟数学平台而非实际的物理平台。惯性量测装置一般至少有 3 个陀螺组成的角速度量测单元和 3 个加速度计组成的线性加速度量测单元。导航计算机的输入为惯性量测装置敏感到的角速度和加速度信息, 导航计算机通过对角速度解算获取姿态矩阵。而加速度信息通过姿态矩阵变换到导航坐标系后, 再送入导航模块进行导航计算, 从而获取载体的位置和速度信息。捷联惯性导航系统的原理图如图 2.1 所示。

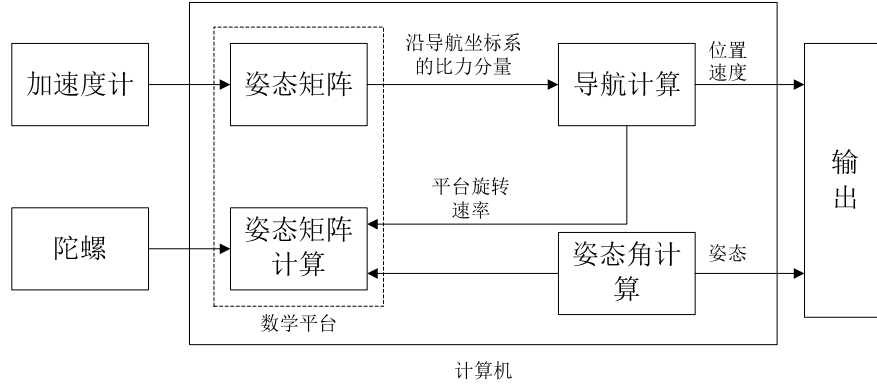


图 2.1 捷联惯性导航系统的原理框图

Fig.2. 1 Schematic diagram of strapdown inertial navigation system

捷联惯性导航系统相对于平台惯性导航系统主要由以下几个优点：（1）捷联惯性导航系统体积小、成本低，结构简单；（2）捷联惯性导航系统直接安装在载体上，便于安装维护和更新。（3）容易实现对惯性传感器的冗余配置。

导航坐标系选取为北东地（NED）当地地理坐标系，捷联惯性导航系统的惯性传感器的敏感轴分别与载体坐标系三个坐标轴相重合，导航坐标系到载体坐标系的变换可以通过绕不同坐标轴的三次连续转动来实现。假设绕导航坐标系的 Z 轴转动 φ 角，绕新坐标系的 Y 轴转动 γ 角，绕新坐标系的 X 轴转动 θ 角。这三次转动可以表示为三个独立的方向余弦矩阵：

绕 Z 轴转动 φ 角，有

$$C_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

绕 Y 轴转动 γ 角，有

$$C_2 = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

绕 X 轴转动 θ 角，有

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

因此从导航坐标系到载体坐标系之间的转换矩阵可以用这三个独立变换的乘积来表示：

$$C_n^b = C_3 C_2 C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

由此，从载体坐标系到导航坐标系的变换可以表示为^[74, 75]：

$$C_b^n = (C_n^b)^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \theta & -\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \sin \gamma \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \sin \gamma \cos \varphi \\ \cos \gamma \sin \theta & \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \gamma \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \gamma \sin \varphi \\ -\sin \gamma & \sin \theta \cos \gamma & \cos \theta \cos \gamma \end{bmatrix}$$

加速度计的量测值为：

$$f^b = \begin{bmatrix} f_x^b \\ f_y^b \\ f_z^b \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

将 f^b 转换到导航坐标系中可表示为：

$$f^n = C_b^n f^b \quad (2-7)$$

由式(2-5)和式(2-7)可知，要获得实时的 f^n ，就必须实时根据陀螺仪的输出值更新 C_b^n 矩阵。

$$C_b^n = C_b^n \Omega_{nb}^b \quad (2-8)$$

其中， Ω_{nb}^b 为角速度 ω_{nb}^b 的反对称阵， ω_{nb}^b 为载体坐标系下相对于导航坐标系的转动角速度，即为：

$$\Omega_{nb}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nbz}^b & \omega_{nby}^b \\ \omega_{nbz}^b & 0 & -\omega_{nbx}^b \\ -\omega_{nby}^b & \omega_{nbx}^b & 0 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

载体上的陀螺仪能提供相对于惯性空间的转动角速度 ω_{ib}^b ，根据式(2-10)和式(2-11)。

可以解算出 ω_{nb}^b ，从而实现姿态矩阵 C_b^n 的实时更新。

$$\omega_{ib}^n = C_b^n \omega_{ib}^b \quad (2-10)$$

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - \omega_{in}^b = \omega_{ib}^b - (\omega_{ie}^b + \omega_{en}^b) \quad (2-11)$$

利用实时更新的姿态矩阵 C_b^n 可以解算出载体的姿态角，根据 C_b^n 矩阵中的元素可以计算出姿态角的主值：

$$\begin{cases} \gamma_{\pm} = \sin^{-1}(-c_{31}) \\ \theta_{\pm} = \tan^{-1}\left(\frac{c_{32}}{c_{33}}\right) \\ \varphi_{\pm} = \tan^{-1}\left(\frac{c_{21}}{c_{11}}\right) \end{cases} \quad (2-12)$$

其中, c_{ij} 为 C_b^n 中的元素。

由姿态角定义域的可知, 载体真实姿态角可以由式(2-12)中三个姿态角的主值来确定:

$$\gamma = \gamma_{\pm} \quad (2-13)$$

$$\theta = \begin{cases} \theta_{\pm} & c_{33} > 0 \\ \theta_{\pm} + 180^\circ & c_{33} < 0, \theta_{\pm} < 0 \\ \theta_{\pm} - 180^\circ & c_{33} < 0, \theta_{\pm} > 0 \end{cases} \quad (2-14)$$

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_{\pm} & c_{22} > 0, \varphi_{\pm} > 0 \\ \varphi_{\pm} + 180^\circ & c_{22} > 0, \varphi_{\pm} < 0 \\ \varphi_{\pm} - 180^\circ & c_{22} < 0 \end{cases} \quad (2-15)$$

由加速度计的输出比力 f^b 和姿态矩阵 C_b^n , 可计算出载体的加速度 a_x^t 和 a_y^t 。如果载体初始速度和位置确定, 即已知 v_{x0}^t 、 v_{y0}^t 、 L_0 和 λ_0 , 则可以计算得到载体速度信息和位置信息。

$$v_x^t = v_{x0}^t + \int_0^t a_x^t dt \quad (2-16)$$

$$v_y^t = v_{y0}^t + \int_0^t a_y^t dt \quad (2-17)$$

$$L = L_0 + \frac{1}{R} \int_0^t v_y^t dt \quad (2-18)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{R} \int_0^t \frac{1}{\cos L} v_x^t dt \quad (2-19)$$

根据式(2-13)~式(2-19), 将加速度计输出通过姿态矩阵转换到导航坐标系, 然后进行积分计算可得到载体的速度和位置, 而载体的姿态矩阵可以根据陀螺仪输出进行实时更新, 从而实现导航目的。

2.3 冗余惯性导航系统的最佳传感器数量

在冗余惯性导航系统中, 随着惯性传感器数量的增加, 系统的可靠性和精度也相应的提高了。按照正常的理论, 惯性传感器冗余得越多, 导航系统的可靠性和精度提高得越多, 但是在惯性传感器数量增加的同时, 导航系统的成本、体积和重量也相应的增加了, 而且当传感器数量增加到一定数量后, 系统的精度和可靠性的增长就不明显了。在系统的可靠性和精度指标能够满足要求的前提下, 研究如何使用最少的传感器来实现,

这才是至关重要的。

2.3.1 传感器数量对故障检测与隔离性能的影响

冗余惯性导航系统的故障检测与隔离性能与很多因数有关，如虚警、误检测、误隔离、正确隔离等。正确隔离概率可作为故障检测与隔离性能的一个主要指标。而系统的正确隔离概率也是随着传感器的数量的增加而增加的^[78]。导航系统是否拥有合理的故障检测与隔离技术严重影响系统的可靠性。因此冗余惯性导航系统的故障检测与隔离性能则决定了系统的可靠性。

假设惯性导航系统中有 n 个同类传感器 ($n > 3$)，该惯性导航系统的量测方程可表示为：

$$m = Hx + \varepsilon \quad (2-20)$$

其中 $\varepsilon = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \cdots \ \varepsilon_n]^T$ 为满足高斯分布的白噪声向量； $m = [m_1 \ m_2 \ \cdots \ m_n]^T$ 为惯性传感器的输出； $H = [h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_n]^T$ 为量测矩阵，且 $\text{Rank}(H) = 3$ ； x 为机动量（加速度或角速度）；

假设量测方程中存在一个故障，则系统的量测方程可表示为：

$$m = Hx + f + \varepsilon \quad (2-21)$$

其中 $f = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n]^T$ 为故障向量。

令矩阵 $V = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$ 满足 $VH = 0$ ， $VV^T = I$ ，则奇偶向量 p 可表示为：

$$p = Vm = Vf + V\varepsilon \quad (2-22)$$

奇偶向量 p 用来检测和隔离故障，矩阵 V 是 H 的左零空间，且约当标准型。当传感器数量增加时，矩阵 V 的列数增加，故障检测和隔离的性能也增强。总而言之，惯性传感器越多，导航系统的故障检测与隔离性能越好，系统的可靠性越高。

2.3.2 传感器数量对冗余惯性导航系统可靠性的影响

惯性导航系统的关键因素——可靠性，取决于单个传感器的可靠性和寿命。单个传感器的可靠性的数值可以被描述为平均故障间隔时间（MTBF）^[77]。

$$MTBF = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (2-23)$$

其中 $R(t) = e^{-\lambda t}$ ， λ 为传感器故障概率。

要量测惯性空间的角速度至少需要三个惯性传感器（陀螺仪），三个传感器配置的可靠性和 MTBF 可表示为

$$R_3 = R_e^3 \quad (2-24)$$

$$MTBF_3 = \int_0^{\infty} R_e^3 dt \quad (2-25)$$

其中 R_e 是单传感器的可靠性。

在一个冗余惯性导航系统中，同类惯性传感器数量一般超过三个。假设有 n 个传感器冗余配置，每个传感器有相同的可靠性 $R(t)$ 和传感器故障发生概率是独立的，因此整个惯性传感器系统的可靠性可表示为：

$$R_n = R_e^n + C_n^{n-1} R_e^{n-1} (1 - R_e) + \dots + C_n^k R_e^k (1 - R_e)^{n-k} + \dots + C_n^3 R_e^3 (1 - R_e)^{n-3}, \quad n \geq 4 \quad (2-26)$$

根据式 (2-23), (2-24), (2-25), (2-26)，整个惯性传感器系统的 MTBF 可表示为：

$$MTBF_n = \int_0^{\infty} (e^{-\lambda t})^n + \dots + C_n^3 (e^{-\lambda t})^3 (1 - e^{-\lambda t})^{n-3} dt, n \geq 4 \quad (2-27)$$

相对 MTBF 可表示为

$$\theta_n = \frac{(MTBF)_n}{(MTBF)_3} \quad (2-28)$$

其中 $(MTBF)_3$ 是三个传感器配置的平均故障间隔时间。

相对平均故障间隔时间 (MTBF) 的变化量可定义为：

$$\Delta = \theta_n - \theta_{n-1} \quad (2-29)$$

传感器增加时，根据上两式，分别计算系统的相对 MTBF 的变化量 Δ 和系统的相对 MTBF 值 θ_n ，它们的变化曲线如图 2.2 和图 2.3 所示。

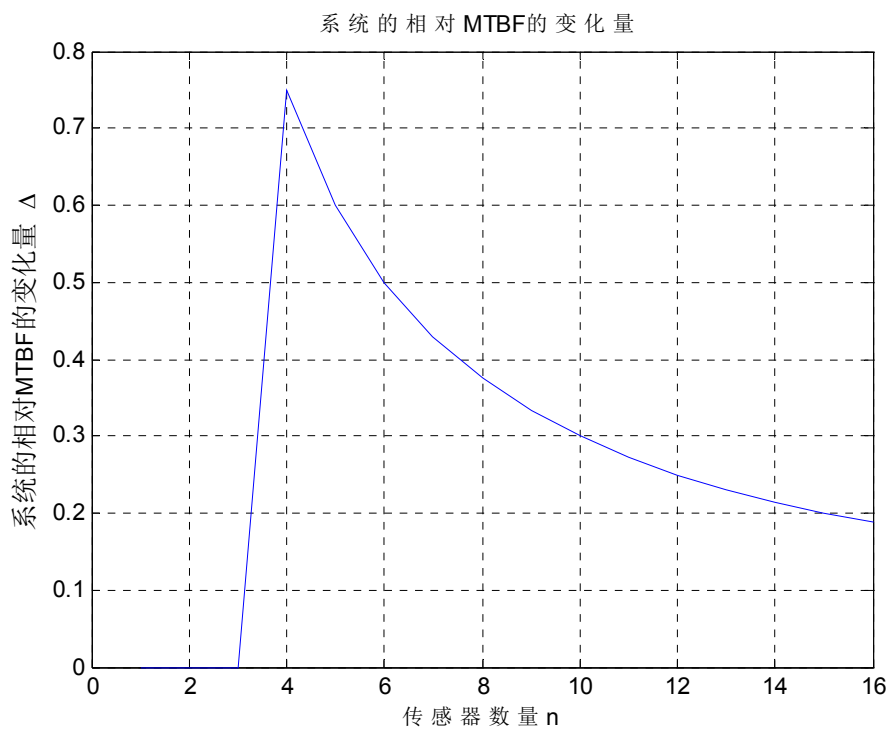


图 2.2 传感器数量增加时相对 MTBF 的变化量

Fig.2.2 The relative change of MTBF as sensor number increasing

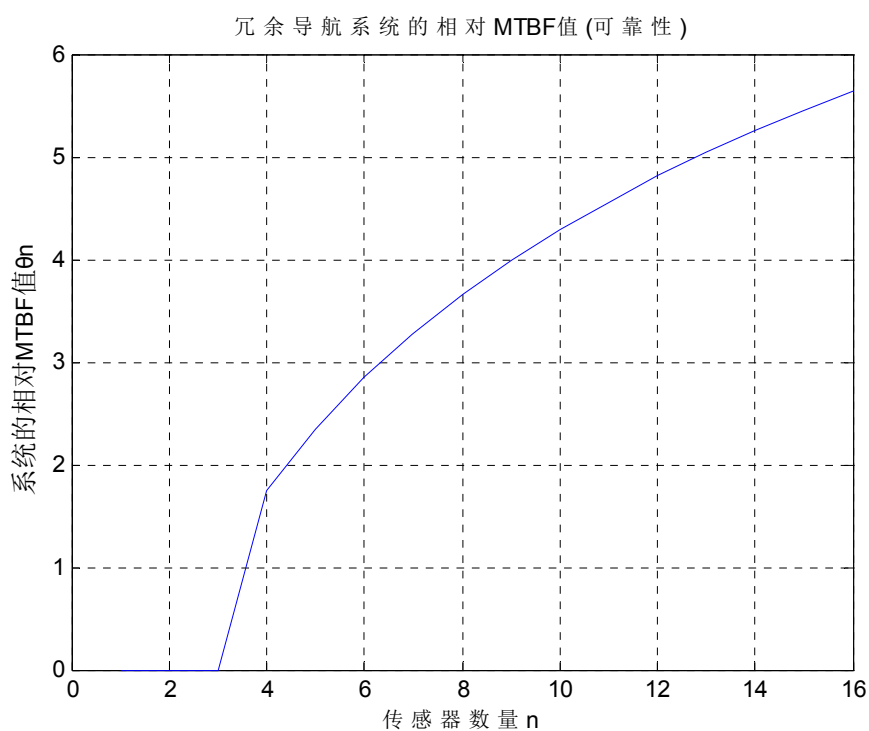


图 2.3 传感器数量增加时系统可靠性 θ_n 的变化

Fig.2.3 The change of reliability performance (θ_n) as sensor number increasing

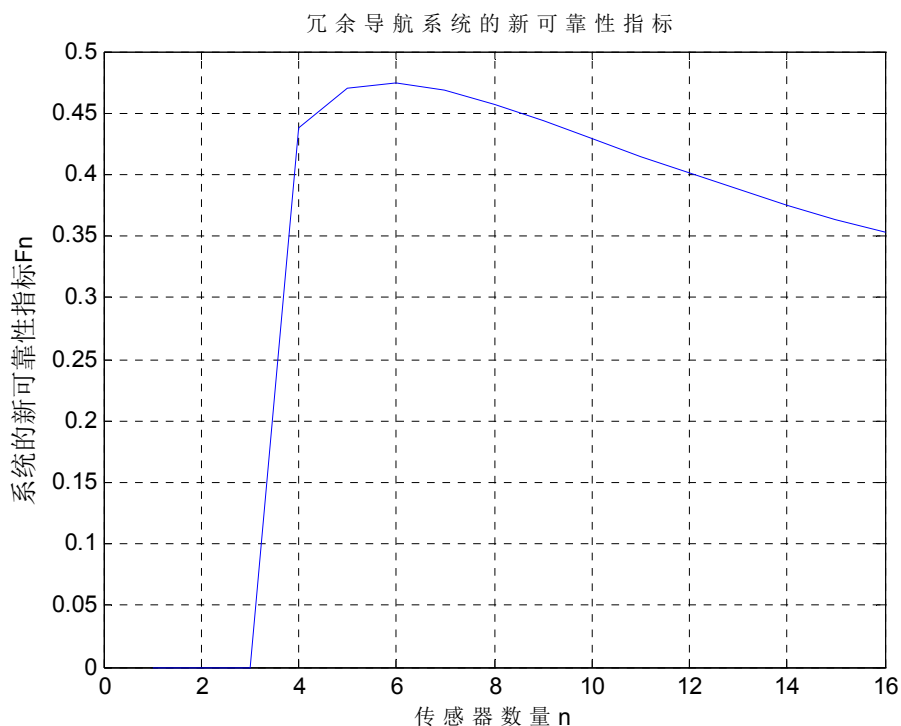
图 2.4 传感器数量增加时可靠性指标 F_n 的变化Fig.2. 4 The change of figure for reliability performance (F_n) as sensor number increasing

图 2.2 表示传感器数量增加时 MTBF 的相对变化量，图 2.3 表示传感器数量增加时相对 MTBF 的变化情况，从这两张图中可以看出，在单个传感器可靠性相同的情况下，随着传感器数量的增加，虽然惯性导航系统的 MTBF 会相应变大，但是其增幅下降很快。将相对 MTBF 和 MTBF 的变化量的列于表 2.1 中，由该表可知，随着传感器数量的增加，相对 MTBF 是增加的，但是 MTBF 的变化量（MTBF 的增幅）是减小的。

从图 2.2 中看出，当传感器数量由 3 增为 4 时，系统的 MTBF 增幅最快，而后 MTBF 增幅逐渐减缓。也就是当传感器数量增加到一定数量后，随着传感器的数量的增加，导航系统的可靠性虽然会继续增加，但是系统可靠性提高就不明显了。而此时，由于惯性传感器数量的增多，冗余惯性导航系统的体积、重量、系统负杂度会增大，成本也将大幅提高。因此在构造冗余惯性导航系统时，不能一味的追求冗余传感器数量的增加。以最少的传感器数量达到最高系统可靠性是传感器最优配置的目标！

表 2.1 随传感器增加时相对 MTBF 和 MTBF 的变化量值的变化

 Table 2.1 The change of reliability performance (θ_n) and the relative change of MTBF as sensor number increasing

序号	传感器数量 n	相对 MTBF (θ_n)	MTBF 的变化量 ($\Delta = \theta_n - \theta_{n-1}$)
1	3	1	0
2	4	1.75	0.75
3	5	2.35	0.6
4	6	2.85	0.5
5	7	3.2786	0.4286
6	8	3.6536	0.3750
7	9	3.9869	0.3333
8	10	4.2869	0.3
9	11	4.5596	0.2727
10	12	4.8096	0.25
11	13	5.0404	0.2308
12	14	5.2547	0.2143
13	15	5.4547	0.2
14	16	5.6422	0.1875

根据这个指导思想,考虑系统的经济性和可靠性,可重新构造导航系统新的可靠性性能指标,其可定义为:

$$F_n = \frac{\theta_n}{n} = \frac{\int_0^{\infty} (e^{-\lambda t})^n + \dots + C_n^3 (e^{-\lambda t})^3 (1 - e^{-\lambda t})^{n-3} dt}{n \int_0^{\infty} e^{-3\lambda t} dt} \quad (2-30)$$

将传感器的数量代入式(2-30)进行仿真计算,得到如图 2.4 所示的性能指标 F_n 的变化情况。由图 2.4 可看出,随着传感器数量的增加,系统的性能指标 F_n 先增长后降低,在传感器的数量为 6 个时,其系统的性能指标 F_n 达到最大!也就是说,在传感器数量为 6 时,系统的可靠性和经济性达到最优!当传感器的数量超过 6 时,虽然系统的可靠性会继续增加,但是其可靠性增幅就不明显了,而系统的成本和复杂度却大幅增加,根据性能指标(2-30),可确定冗余导航系统的最优的传感器的数量为 6。另外,当传感器数量相同,

性能相同，配置方案不同时，惯性导航系统的性能也不尽相同。而且系统精度也不是随着传感器数量的增加而线性提高的，所以冗余惯性传感器配置方案的研究是在确定的传感器数量的前提下进行的，要使得导航系统的可靠性和导航性能达到最优！

2.4 冗余惯性导航系统的最优传感器配置

冗余惯性导航系统最优的传感器配置是指在一定的传感器的数量的基础上使导航效果最好。这里所谓最好导航效果包含两部分的内容：一是导航系统的可靠性，二是导航系统的导航性能，这其实也是惯性导航系统的最基本要求。整个冗余惯性导航系统的可靠性体现在单个惯性传感器的可靠性和系统的故障检测与隔离性能上。惯性传感器本身的可靠性是由传感器生产商和传感器的工艺水平所决定的，与传感器的配置无关，而冗余惯性导航系统的故障检测与隔离性能则与冗余配置的传感器配置方式相关了。因此，对冗余惯性导航系统的可靠性研究主要体现在传感器配置方式对系统的可靠性和故障检测与隔离性能的影响。冗余惯性导航系统的导航性能主要研究传感器的配置方式对冗余惯性导航精度的影响。以下将针对传感器配置方式对惯性导航系统的故障检测与隔离性能（FDI）和导航性能的影响进行研究，并给出最优的传感器的配置方案。

2.4.1 传感器的冗余配置

惯性导航系统中惯性传感器的冗余结构大致可分为正交和倾斜配置两种配置方案。通过传感器的冗余配置，系统的可靠性和精度获得提高。但是传感器的不同配置方式，对系统的可靠性和精度的提高是不同的，因此需要研究在相同数目的传感器采用不同配置方案下，对系统可靠性和精度的影响。由上一节的内容可知，冗余惯性导航系统中最优的传感器数量为6。下面以6个同类传感器冗余配置为例来研究传感器的最优配置结构，以下为常用的几种传感器冗余配置方案。

2.4.1.1 正交配置

如图2.5所示的传感器正交配置方案中，传感器的敏感轴的方向与坐标轴的方向相一致。在这种配置方案中，由于有两个传感器同时量测一个机动量，系统的配置方程简单，计算方便，测量误差小，且容易检测和传感器故障，但是由于每个坐标轴上只有两个传感器，故系统只能检测出哪个坐标轴上的传感器发生故障，并不能识别出是哪一个发生故障，因此也不能隔离故障传感器。若每个坐标轴上有3个或3个以上的传感器，系统就能够识别和隔离故障传感器^[76]。

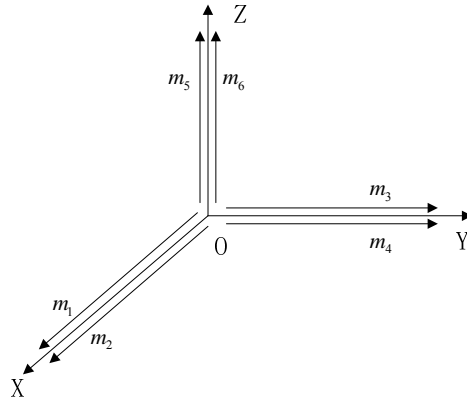


图 2.5 正交配置方案

Fig.2. 5 Orthogonal configuration diagram

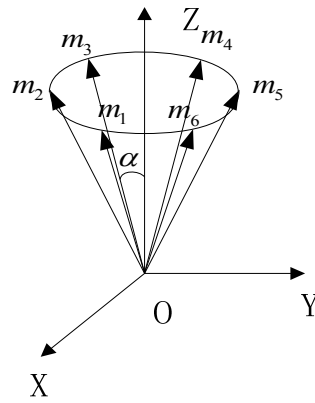


图 2.6 圆锥配置方案 1

Fig.2. 6 No.1 Conical configuration diagram

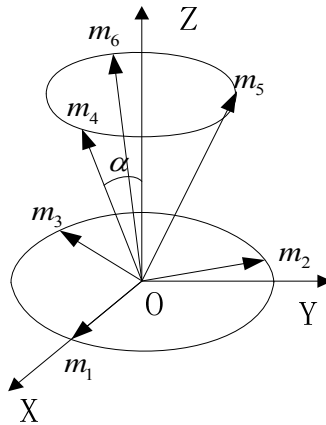


图 2.7 圆锥配置方案 2

Fig.2. 7 No.2 Conical configuration diagram

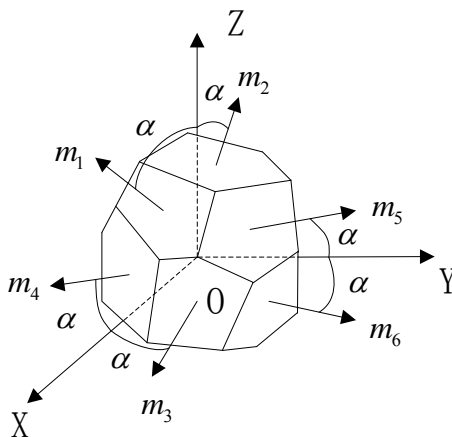


图 2.8 正十二面体配置方案

Fig.2. 8 The dodecahedron configuration diagram

2.4.1.2 斜置配置

正交配置是指传感器的敏感轴与坐标轴正交配置，它的配置矩阵简单。而斜置配置顾名思义就是将传感器敏感轴与坐标轴倾斜配置，这种配置方式下，传感器的输出值为2个或3个坐标轴上的机动量的线性组合，每个传感器的输出包含了更多的信息，因此故障识别能力更强，6个传感器中能够准确的识别和隔离出两个故障传感器，但是由于传感器斜置的原因，将传感器的误差放大，因此传感器斜置的配置方案的误差相对较大，配置矩阵也较复杂。传感器斜置配置方案可分为圆锥配置和多面体配置，配置方式可分别见图2.6、图2.7、图2.8。

图2.6所示的圆锥配置方案1中，将6个传感器在XY平面上的投影均分XY平面，传感器的敏感轴与Z轴的夹角为 α 。它的量测矩阵为：

$$H = \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos(\pi/3) & \sin \alpha \sin(\pi/3) & \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos(2\pi/3) & \sin \alpha \sin(2\pi/3) & \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos(3\pi/3) & \sin \alpha \sin(3\pi/3) & \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos(4\pi/3) & \sin \alpha \sin(4\pi/3) & \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos(5\pi/3) & \sin \alpha \sin(5\pi/3) & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

图2.7所示的圆锥配置方案2中，3个传感器均匀的分布在XY的平面上，3个传感器成圆锥形布置，同时成圆锥形布置的3个传感器在XY平面上的投影与在XY平面上的3个传感器重合。它的配置矩阵为：

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(2\pi/3) & \sin(2\pi/3) & 0 \\ \cos(4\pi/3) & \sin(4\pi/3) & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos(2\pi/3) & \sin \alpha \sin(2\pi/3) & \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos(4\pi/3) & \sin \alpha \sin(4\pi/3) & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

图 2.8 所示的多面体配置中, 6 个传感器的敏感轴分别沿正十二面体六个平面的法线方向, 每一对敏感轴位于坐标系的一个坐标平面内, 与坐标轴的夹角 $\alpha = 31.7175^\circ$ 。它的配置矩阵为:

$$H = \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

2.4.2 最优导航性能的传感器配置

要获得最优的导航性能, 就是要保证导航输出的位置、速度、姿态误差最小, 使得系统的导航精度最好, 因此本节给出冗余惯性导航系统最优导航性能的充要条件^[78]。冗余惯性导航系统的量测方程如方程 (2-20) 所示, 则冗余惯性导航系统的三个坐标轴的惯性量测值最小二乘估计可表示为:

$$\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T m \quad (2-34)$$

定义 x 估计误差为 $e = x - \hat{x}$, 则惯性导航系统的导航精度取决于估计误差的协方差:

$$P = E[ee^T] = E[(H^T H)^{-1} H^T \varepsilon \varepsilon^T H (H^T H)^{-1}] = (H^T H)^{-1} \rho^2 \quad (2-35)$$

估计误差的协方差 P 越小, 惯性导航性能越好, 由于 ρ^2 为一确定值, 所以只要使 $(H^T H)^{-1}$ 最小, 故导航性能的指标参数可表示为:

$$J_p = \det(H^T H) \quad (2-36)$$

只要使 J_p 为最大值, 则 $(H^T H)^{-1}$ 为最小值, 即估计误差的协方差 P 最小, 导航性能最好。

同理, 导航性能的指标参数也可表示为:

$$J = \text{trace}(P) = E[(x_x - \hat{x}_x)^2] + E[(x_y - \hat{x}_y)^2] + E[(x_z - \hat{x}_z)^2] \quad (2-37)$$

对于导航系统而言, 基于导航性能的最优化配置是使指标参数 J 最小化。

定理 1 假设方程 (2-20) 中量测矩阵 H 满足 $H \in R^{m \times 3}$ ，则基于最优导航性能的传感器配置的充分必要条件是 $H^T H = \frac{n}{3} I$ 。

证明：

充分性：

假设 $H^T H = \frac{n}{3} I$ ， $H^T H$ 的特征值为 λ_1 ， λ_2 和 λ_3 。因此不等式：

$$J = \text{trace}(P) = \rho^2 \text{trace}\{(H^T H)^{-1}\} = \rho^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \right) \geq \frac{3\rho^2}{\sqrt[3]{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}} \quad (2-38)$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ 时，有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{n}{3}$ ，此时导航性能指标参数 J 也最小，所以量测矩阵 H

对于导航性能来说是最优的。

必要性：

假设量测矩阵 H 对于导航性能是最优的，这意味着导航性能指标参数 J 为最小值。假设 $H^T H$ 的特征值为 λ_1 ， λ_2 和 λ_3 ，因此有

$$J = \text{trace}(P) = \rho^2 \text{trace}\{(H^T H)^{-1}\} = \rho^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \right) \geq \frac{3\rho^2}{\sqrt[3]{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}} \quad (2-39)$$

由上式可知，当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ，参数 J 最小。

由 $\text{trace}(HH^T) = \text{trace}(H^T H) = \sum_{i=1}^n \|h_i\|^2 = n$ 和 $\text{trace}(HH^T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ 可知，

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = n$ ，又因为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ，所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{n}{3}$ 。

现将量测矩阵 H 进行奇异值分解可得 $H = UAV^T$ ，其中 $U = [u_1, \dots, u_n]$ ， $V = [v_1, v_2, v_n]$ ， $A = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ 。向量 u_i 和 v_i 分别是量测矩阵 H 的相应奇异值的左右特征

值。由于矩阵 U 和 V 是酉矩阵，所以有 $\sigma_i^2 = \lambda_i$ ，故 $\Sigma = \text{diag}\{\sqrt{\frac{n}{3}}, \sqrt{\frac{n}{3}}, \sqrt{\frac{n}{3}}\}$ ，则

$$H^T H = VA^T U^T U A V^T = \Sigma^2 = \frac{n}{3} I。$$

因此定理 1 得证。通过定理 1 可知，要使导航系统的导航性能最优则量测矩阵 H 必须满足 $H^T H = \frac{n}{3} I$ ，也就是说，只要量测矩阵 H 满足 $H^T H = \frac{n}{3} I$ ，冗余惯性导航系统的导航性能就能达到最优^[78]。

2.4.3 基于导航性能和 FDI 性能最优的传感器配置

国内外已有很多文献研究了冗余惯性导航系统的 FDI 性能，得出的结论为：传感器

的敏感轴的夹角越大,系统的 FDI 性能越好。因此在这节中给出一种对于导航性能和 FDI 性能都是最优的传感器配置方案^[78]。根据上一节的内容可知,同时考虑导航性能和 FDI 性能,配置矩阵 H 的指标参数可表示为:

$$J_H = \min_{i,j(i<j)} \theta_{ij}^H \quad (2-40)$$

其中 H 满足 $H^T H = \frac{n}{3} I$, $H \in R^{n \times 3}$, θ_{ij}^H 是第 i 和第 j 个传感器量测方向向量的夹角,同时满足 $\theta_{ij}^H = \min\{\theta_{ij}^H, \pi - \theta_{ij}^H\}$ 。可用 h_i 和 h_j 的内乘来代替角度 θ_{ij}^H , 因此配置矩阵 H 的指标参数的另一种表示方式为:

$$\tilde{J}_H = \max_{i,j(i<j)} |h_i h_j^T| \quad (2-41)$$

其中 H 满足 $H^T H = \frac{n}{3} I$, $H \in R^{n \times 3}$, $H = [h_1, \dots, h_n]^T$, h_i 为配置矩阵 H 的行向量。

在众多能提供最优导航性能的配置中,最接近传感器的夹角最大的配置是最优配置。这就意味着同时考虑导航性能和 FDI 性能时的最优传感器配置为:

$$H_{opt} = \arg \max_{H_k} \min_{i,j(i<j)} \theta_{ij}^{H_k} \quad (2-42)$$

其中 H_k 满足 $H_k^T H_k = \frac{n}{3} I$, $H_k \in R^{n \times 3}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ 。

用 h_{ki} 和 h_{kj} 的内乘来代替角度 $\theta_{ij}^{H_k}$, 则 H_{opt} 可表示为

$$\tilde{H}_{opt} = \arg \min_{H_k} \max_{i,j(i<j)} |h_{ki} h_{kj}^T| \quad (2-43)$$

其中 H_k 满足 $H_k^T H_k = \frac{n}{3} I$, $H_k \in R^{n \times 3}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ 。当冗余惯性导航系统的量测矩阵满足该条件时,可认为导航系统的导航性能和 FDI 同时最优。

2.5 冗余惯性导航系统配置方案

2.5.1 各配置方案的导航性能

由导航性能参数 J_p 的定义(2-36)可知,选择一个斜置角 α 使得 J_p 最大时,冗余导航系统的导航性能最优。根据该参数的定义,可确定出冗余惯性导航系统的导航性能最优时图 2.6 和图 2.7 中圆锥配置方案中斜置角 α 的值。通过改变斜置角 α 的值来计算两种锥形配置的 J_p 值,仿真计算结果如图 2.9 和图 2.10 所示。由图 2.9 和图 2.10 可知,当 $\alpha = 54.7356^\circ$ 时,圆锥配置方案 1 的 J_p 达到最大值,当 $\alpha = 35.7356^\circ$ 时,圆锥配置方案 2 的 J_p 达到最大值,且 J_p 的最大值都为 $\max(J_p) = 8$ 。一旦两种锥形配置方案的斜置角 α 确定,可验证各配置方案的量测矩阵 H 是否满足 $H^T H = \frac{n}{3} I$, 从而确定各配置的导航性能是否为最优。

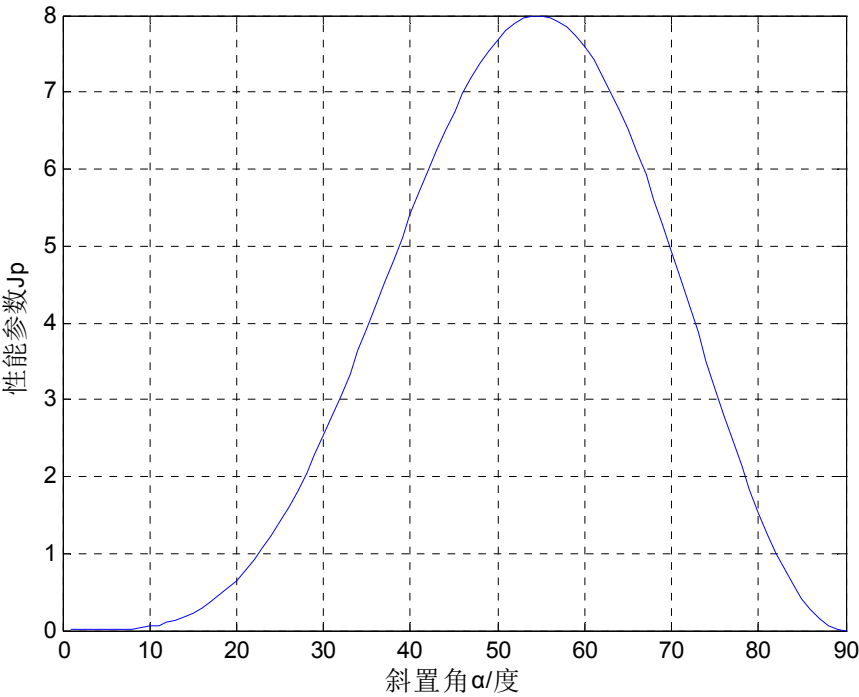


图 2.9 圆锥配置方案 1 的性能参数曲线

Fig.2. 9 The performance parameters curve of No.1 Conical configuration

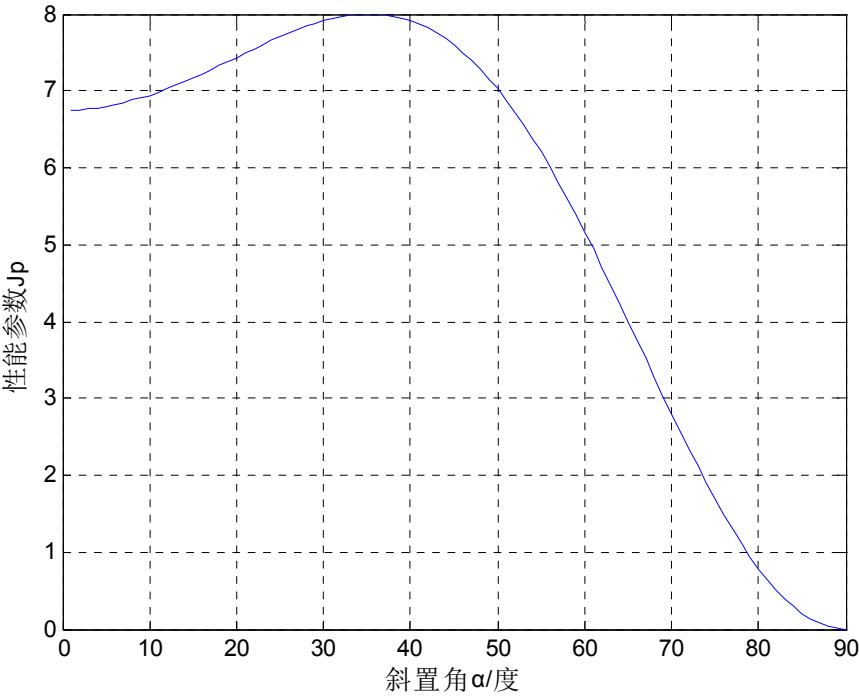


图 2.10 圆锥配置方案 2 的性能参数曲线

Fig.2. 10 The performance parameters curve of No.2 Conical configuration

表 2.2 各配置方案的最优导航性能条件计算

Table 2.2 The optimal navigation performance condition computing for each configuration

序号	配置方式	配置矩阵	是否满足条件 $H^T H = \frac{n}{3} I$
1	正交配置	$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	满足
2	圆锥配置方案 1 当 $\alpha = 54.7356^\circ$ 时	$H = \begin{bmatrix} 0.8165 & 0 & 0.5744 \\ 0.4082 & 0.7071 & 0.5744 \\ -0.4082 & 0.7071 & 0.5744 \\ -0.8165 & 0 & 0.5744 \\ -0.4082 & -0.7071 & 0.5744 \\ 0.4082 & -0.7071 & 0.5744 \end{bmatrix}$	满足
3	圆锥配置方案 2 当 $\alpha = 35.7356^\circ$ 时	$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.8660 & 0 \\ -0.5 & 0.8660 & 0 \\ 0.5774 & 0 & 0.8165 \\ -0.2884 & 0.5 & 0.8165 \\ -0.2884 & -0.5 & 0.8165 \end{bmatrix}$	满足
4	正十二面配置	$H = \begin{bmatrix} 0.5257 & 0 & 0.8507 \\ -0.5257 & 0 & 0.8507 \\ 0.8507 & 0.5257 & 0 \\ 0.8507 & -0.5257 & 0 \\ 0 & 0.8507 & 0.5257 \\ 0 & 0.8507 & -0.5257 \end{bmatrix}$	满足

表 2.2 可知，在斜置角 α 取合适的值时，这四种配置方案都能使惯性导航系统的导航性能达到最优。

2.5.2 导航性能和 FDI 最优的配置方案

根据式 (2-43) 计算四种传感器配置的参数 \tilde{H}_{opt} ，将计算结果列在表 2.1 中，根据该

表中参数 \tilde{H}_{opt} 来确定最优传感器配置。

表 2.3 各配置方案的配置参数 \tilde{H}_{opt}

Table 2.3 The configuration parameter \tilde{H}_{opt} computing for each configuration

序号	配置方式	参数 \tilde{H}_{opt}	最优配置
1	正交配置	1	×
2	圆锥配置方案 1 当 $\alpha = 54.7356^\circ$ 时	0.6667	×
3	圆锥配置方案 2 当 $\alpha = 35.7356^\circ$ 时	0.5774	×
4	正十二面配置	0.4472	√

由表 2.3 可知，导航系统中的传感器按照正十二面配置时，参数 \tilde{H}_{opt} 最小，则在四种配置中，正十二面配置的 FDI 最优。由上一节的内容可知，这四种配置结构的导航性能都是最优的，因此可得出结论，当惯性导航系统中传感器按照正十二面体配置时，系统的故障检测隔离性能（FDI）和导航性能同时达到最优。也就是说，当系统中含有 6 个同类传感器时，正十二面体配置为最优配置。在本论文的后续章节中的研究也都是建立在含有 6 个同类传感器的正十二面配置结构的导航系统上的。

2.6 本章小结

本章首先介绍了捷联惯性导航系统的工作原理，并指出冗余技术是提高捷联惯性导航系统的可靠性和导航性能的重要措施。然后，分别研究了冗余传感器数量和传感器的配置方案对冗余惯性导航系统 FDI 性能和导航性能的影响，并给出了相应的指标参数。最后通过指标参数的计算，针对可靠性和导航性能而言，最优的传感器数量为 6，最优的传感器配置为正十二面体配置。

第 3 章 冗余惯性导航系统的初始对准

3.1 引言

惯性导航系统在进行导航之前必须进行初始对准以获得姿态矩阵,对准精度和对准时间是初始对准性能的两个主要参数^[79]。初始对准的研究包含静基座初始自对准、动基座初始对准、传递对准^[80-83]。静基座初始自对准是一种最直接的对准方式,包含粗对准和精对准两个阶段。通过粗对准来建立系统的初始姿态矩阵,为精对准提供基础,两个水平姿态(俯仰/横滚)和偏航姿态分别取决于两个横向加速度计和东向陀螺的性能。精对准在粗对准的基础上进一步减小实际导航坐标系与计算导航坐标系的失准角,获得精准的姿态矩阵。而且自对准时间往往超过 5 分钟。静基座自对准精度差的真实原因在于三个陀螺和两个水平加速度计的随机常值偏差不能被全观测。为了改善惯性传感器的可观测性,有两种方式被采用:一是通过多位置旋转惯性量测装置来提高系统和装置误差的可观测性;二是增加其他姿态参考系统,如双天线全球定位系统(GPS)和磁力计等^[84, 85]。然而增加旋转结构不但增加了系统成本和体积而且增加了系统的复杂度,双 GPS 天线和磁力计极易受到外部环境的影响,所以这两种方式都存在各自的缺点。

到目前为止,冗余惯性导航系统还没有一套自有的初始对准方法。当前常用的方法是将冗余惯性导航系统中的冗余量测信息通过信息融合算法转换到正交坐标系上,然后运用传统导航系统的初始对准方法进行对准,这种初始对准方式忽视了冗余惯性导航系统中冗余量测信息。本章通过对冗余惯性导航系统结构和量测信息的研究,建立一种新的静基座初始对准模型,尽管静基座的初始对准方式相对比较简单,其应用范围也有一定的局限性,但是本章旨在抛砖引玉,希望通过本章的研究来带动冗余惯性导航系统的研究。通过本章的研究可知,充分利用冗余惯性导航系统的配置结构和冗余量测信息,冗余惯性导航系统在进行静基座初始对准时,其对准时间可大幅度减小,从而增强了冗余惯性导航系统的初始对准的快速性。

本章充分利用冗余惯性导航系统中的冗余观测值,推导了冗余传感器按照正十二面体配置情况下的非线性初始对准模型,并对该模型进行仿真。由仿真结果可知,新的初始对准模型使得对准速度极大的提高,在 5s 之内,可使三个失准角收敛。

3.2 惯性导航系统的初始对准

在进入导航状态之前，惯性导航系统需要建立一个初始基准，将惯性导航系统的载体坐标系与导航坐标系相重合，使导航计算机正式工作时有正确的初始条件，如给定初始速度，初始位置等，这些工作统称为初始对准^[86]。在初始对准的研究工作中，初始位置一般是准确已知、初始速度一般为零（载体的小位移扰动，如振动、阵风、负载变化等另行考虑），使得静基座的初始对准工作大大简化。因此静基座初始对准的主要任务就是研究如何获得一个准确的捷联惯导系统的数学导航平台，为获得高精度的加速度信息和精确的载体运动的姿态信息提供平台基础。惯性导航系统初始对准的要求是精度高、时间短，但这两个要求是相互矛盾的，因此需要合理的设计初始对准算法，尽可能的兼顾精度和速度的要求。近年来惯性导航系统的初始对准技术已成为国内外学者研究的热点^[87]。

将惯性传感器直接固定在载体上的捷联惯性导航系统用导航计算机中的坐标转换矩阵（姿态矩阵）来代替平台惯性导航系统中的真实物理平台，该姿态矩阵也称为数学平台。惯性导航系统的初始对准可分为粗对准和精对准，通过快速的粗对准为精对准提供一个初始姿态矩阵 C_b^n ，精对准在粗对准的基础上进一步修正所谓的“数学平台”，使得“数学平台”逐步的逼近导航坐标系。相对粗对准而言，精对准的速度要慢得多，但其精度要比粗对准高。捷联惯性导航系统的导航坐标系一般采用地理坐标系，可借助惯性传感器量测两个不共线地球自转角速度 ω 矢量和重力加速度 g 矢量，方便的实现自主对准^[2]。

3.2.1 粗对准原理

在静基座初始对准中，惯性导航系统中加速度计敏感的是重力加速度在载体坐标系的分量，而陀螺敏感的是地球自转角速度在载体坐标系的分量，这两者在地理坐标系中都是已知的，且为常值。因此粗对准可通过他们在载体坐标系和地理坐标的投影关系计算出初始姿态矩阵。

重力加速度在地理坐标系上的投影为

$$g^n = [0 \quad 0 \quad g]^T \quad (3-1)$$

地球自转角速度在地理坐标上的投影为

$$\omega_{ie}^n = [\omega_{ie} \cos L \quad 0 \quad -\omega_{ie} \sin L]^T \quad (3-2)$$

重力加速度和地球自转角速度在载体坐标上的投影 g^b 和 ω_{ie}^b ，由加速度计和陀螺的测量值 \tilde{f}^b 和 $\tilde{\omega}^b$ 代替。因此有：

$$g^n = C_b^n g^b = C_b^n \tilde{f}^b \quad (3-3)$$

$$\omega_{ie}^n = C_b^n \omega_{ie}^b = C_b^n \tilde{\omega}^b \quad (3-4)$$

在求解姿态矩阵 C_b^n 过程中，由于方程数量不够，需要构造新的向量来增加方程的数目^[2, 88]。

利用 g 、 ω_{ie} 和构造的 $(g \times \omega_{ie}) \times g$ ，姿态矩阵 C_b^n 的计算公式为

$$\hat{C}_b^n(0) = \begin{bmatrix} (g^n)^T \\ (g^n \times \omega_{ie}^n)^T \\ [(g^n \times \omega_{ie}^n) \times g^n]^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\tilde{f}^b)^T \\ (\tilde{f}^b \times \tilde{\omega}^b)^T \\ [(\tilde{f}^b \times \tilde{\omega}^b) \times \tilde{f}^b]^T \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

可得失准角误差为

$$\begin{cases} \phi_E = -\frac{\nabla_N}{g} \\ \phi_N = \frac{\nabla_E}{g} \\ \phi_U = \frac{\nabla_E}{g} \tan L - \frac{\varepsilon_E}{\omega_{ie} \cos L} \end{cases} \quad (3-6)$$

从式(3-5)可以看出姿态矩阵的准确性受到 \tilde{f}^b 和 $\tilde{\omega}^b$ 这两个量测值准确性的约束。实际上，姿态矩阵的误差不仅仅与加速度计和陀螺的误差有关，而且和环境的干扰加速度和干扰角速度有关，因此这种直接计算的结果往往不能满足工程需要的精度。

3.2.2 精对准原理

捷联惯性导航系统通常在粗对准的基础上进行精对准，精对准一般分为经典控制法（频域法）和状态空间法（卡尔曼滤波法）。在精对准过程中，不断用新的姿态矩阵 $C_b^{n'}$ 更新前一时刻的 C_b^n ，使得计算导航坐标系逐步逼近真实导航坐标系，并在规定的时间内使两坐标系的误差小于一个定值。以往精对准一般采用经典控制法，在频率域中分别构建水平对准回路和方位对准回路，在粗对准的基础上，先进行水平对准，然后进行方位对准。

惯性导航系统精对准原理框图如图 3.1 所示。在精对准开始时，导航计算机采用的是粗对准获取的粗略姿态矩阵。从图 3.1 可看出，加速度计的量测值不仅受到自身误差的影响，还受到干扰加速度 a_f 和重力加速度 g 的影响，其量测值表示为载体坐标系(b)中的比力 f^b ，转换矩阵 $C_b^{n'}$ 乘上 f^b 可得到导航坐标系中的比力 $f^{n'}$ 。转换矩阵 $C_b^{n'}$ 反映出载体坐标系和导航坐标系的对准状态，将该值进行适当的滤波处理，可求出其最优估计值，可对转换矩阵 $C_b^{n'}$ 不断的修正。陀螺仪量测值不仅经受到自身漂移的影响，还受到

地球自转角速度 ω_{ie}^b 和干扰角速度 ω_f 的影响，其量测值为相对于惯性空间的载体坐标系中的角速度 ω_{ib}^b ，转换矩阵 $C_b^{n'}$ 乘上 ω_{ib}^b ，可以得到相对于惯性空间的导航坐标系中的角速度 $\omega_{in'}^{n'}$ 。

由于在静基座初始对准过程中载体是静止的，在理论上，导航坐标系相对惯性空间的角速度 $\omega_{in'}^{n'}$ 应该与载体坐标系相对于惯性空间的角速度 ω_{ib}^b 是相等的。如果这两个角速度之间存在误差

$$\delta\omega_{bn}^n = \omega_{ib}^b - \omega_{in'}^{n'} \quad (3-7)$$

这主要由不准确姿态矩阵 $C_b^{n'}$ 和陀螺输出中的随机噪声所引起的。在精对准时，可用该角速度误差去修正姿态矩阵 $C_b^{n'}$ ，以使得 $\omega_{in'}^{n'}$ 与 ω_{ib}^b 逐渐趋于相等，直至 $\delta\omega_{bn}^n$ 趋于零，从而确定出姿态矩阵 $C_b^{n'}$ 。可由该姿态矩阵计算出稳态姿态误差角，以此作为导航计算的初始条件^[1]。

在经典对准方法，由于忽略了惯性传感器的随机误差，只考虑他们的常值误差，因此经典对准方法往往不能满足既准又快的对准要求。为解决该矛盾，可运用卡尔曼滤波技术来处理这些随机误差。卡尔曼滤波器可准确地估计出水平和方位失准角，并将其反馈给导航系统，对姿态矩阵进行修正，从而提高对准精度和缩短对准时间^[2]。

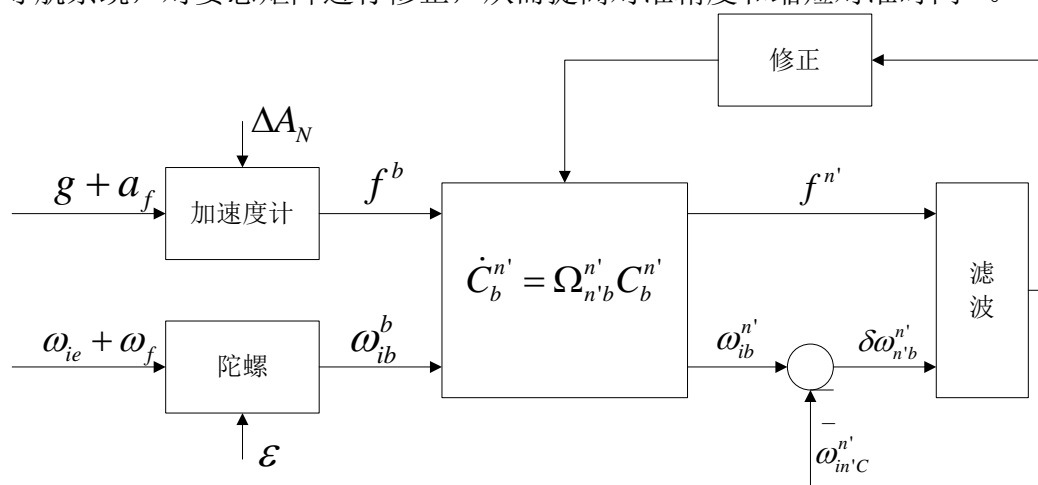


图 3.1 捷联惯性导航系统精对准结构图

Fig.3. 1 The inertial navigation system fine alignment chart

3.2.3 静基座初始对准中卡尔曼滤波技术的应用

3.2.3.1 静基座初始对准中的卡尔曼滤波技术

陀螺漂移和加速度计误差均视为随机误差，因此惯性导航系统可看成一个随机系

统。在初始对准过程中，首先采用卡尔曼滤波器对该随机系统进行状态估计，然后采用状态反馈控制进行初始对准。在初始对准时，卡尔曼滤波器可以将平台失准角 ψ_N 、 ψ_E 、 ψ_D 从含有随机误差和随机干扰的信号中估计出来，从而确定初始时刻从载体坐标系到导航坐标系的初始姿态矩阵 $C_b^n(0)$ 。此外，也希望能够将惯性传感器误差(加速度计偏置和陀螺漂移)估计出来。因为初始对准时间较短，故将加速度计偏置和陀螺漂移视为随机常数。

3.2.3.2 静基座初始对准误差模型的建立

静基座初始对准时，捷联惯性导航系统对准误差模型采用 ψ 角法，取当地地理坐标系为导航坐标系。捷联惯性导航系统静基座对准误差模型为^[1, 89, 87]：

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{V}_N \\ \delta \dot{V}_E \\ \dot{\psi}_N \\ \dot{\psi}_E \\ \dot{\psi}_D \\ \dot{\nabla}_x \\ \dot{\nabla}_y \\ \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega_D & 0 & g & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -2\Omega_D & 0 & -g & 0 & 0 & C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_D & 0 & 0 & 0 & -C_{11} & -C_{12} & -C_{13} \\ 0 & 0 & -\Omega_D & 0 & \Omega_N & 0 & 0 & -C_{21} & -C_{22} & -C_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_N & 0 & 0 & 0 & -C_{31} & -C_{32} & -C_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta V_N \\ \delta V_E \\ \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \\ \nabla_x \\ \nabla_y \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

式中，下标 x 、 y 、 z 为载体坐标系，下标 N 、 E 、 D 为导航坐标系。 C_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2,3$) 为捷联矩阵 C_b^n 中的元素， $C_b^n = \{C_{ij}\}_{(i=1,2,3; j=1,2,3)}$ 。

3.2.3.3 静基座初始对准卡尔曼滤波模型的建立

对于捷联惯性导航系统，考虑到陀螺仪随机漂移误差和加速度计的随机偏差，将方程(3-8)修正为如下形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_a(t) \\ \dot{X}_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & T_i \\ 0_{5 \times 5} & 0_{5 \times 5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a(t) \\ X_b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W(t) \\ 0_{5 \times 1} \end{bmatrix} = AX(t) + W(t) \quad (3-9)$$

式中： $W(t)$ 为 $N(0, Q)$ 的高斯白噪声； $X_a = [\delta V_N \ \delta V_E \ \psi_N \ \psi_E \ \psi_D]^T$ 和 $X_b = [\nabla_x \ \nabla_y \ \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z]^T$ 为状态矢量，

$W'(t) = [w_{\delta V_N} \ w_{\delta V_E} \ w_{\psi_N} \ w_{\psi_E} \ w_{\psi_D}]^T$ 为随机噪声状态矢量， X_a 中 δV_N 、 δV_E 分别代表

北向和东向速度误差, ψ_N 、 ψ_E 代表水平失准角; ψ_D 代表方位失准角, ∇ 代表加速度计的随机常值偏置, ε 代表陀螺仪随机常值漂移; $0_{5 \times 5}$ 和 $0_{5 \times 1}$ 代表指定维数的零矩阵; T_i 和 F 代表的内容如下:

$$T_i = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{11} & -C_{12} & -C_{13} \\ 0 & 0 & -C_{21} & -C_{22} & -C_{23} \\ 0 & 0 & -C_{31} & -C_{32} & -C_{33} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega_D & 0 & g & 0 \\ -2\Omega_D & 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_D & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_D & 0 & \Omega_N \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_N & 0 \end{bmatrix}$$

其中: $\Omega_D = -\Omega \sin L$; $\Omega_N = -\Omega \cos L$

捷联惯性导航系统在进行静基座初始对准卡尔曼滤波模型的系统方程可表示为式(3-9)。为了应用卡尔曼滤波器进行状态矢量的最优估计, 还需建立系统观测方程。因此选取两个水平速度误差 V_N 和 V_E 作为观测值, 系统观测方程可表示为

$$Z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_N \\ \eta_E \end{bmatrix} = HX(t) + V(t) \quad (3-10)$$

其中, $V(t)$ 为系统的观测噪声矢量, 它是一个满足 $N(0, R)$ 的高斯白噪声。

3.2.3.4 静基座初始对准卡尔曼滤波方程的建立

首先离散化系统方程式(3-9)和观测方程式(3-10), 得到

$$X_k = A_k X_{k-1} + W_{k-1} \quad (3-11)$$

$$Z_k = H_k X_k + V_k \quad (3-12)$$

式中 X_k 为系统的状态序列, Z_k 为系统的观测序列; A_k 为系统状态转移矩阵, H_k 为系统的观测矩阵; W_{k-1} , V_k 分别为系统的过程噪声序列和观测噪声序列, 其均值都为零的高斯白噪声序列。系统过程噪声 W_{k-1} 的方差为 Q_{k-1} , 系统观测噪声 V_k 的方差为 R_k 。

然后进行 Kalman 滤波:

状态一步预测:

$$\hat{X}_{k,k-1} = A_k \hat{X}_{k-1} \quad (3-13)$$

状态估计:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k,k-1} + K_k [Z_k - H_k \hat{X}_{k,k-1}] \quad (3-14)$$

滤波增益矩阵:

$$K_k = P_{k,k-1} H_k^T [H_k P_{k,k-1} H_k^T + R_k]^{-1} \quad (3-15)$$

一步预测误差方差矩阵:

$$P_{k,k-1} = A_k P_{k-1} A_k^T + Q_{k-1} \quad (3-16)$$

估计误差方差矩阵:

$$P_k = [I - K_k H_k] P_{k,k-1} [I - K_k H_k]^T + K_k R_k K_k^T \quad (3-17)$$

3.3 冗余惯性导航系统的非线性初始对准模型

针对冗余惯性导航系统中冗余的外部量测信息, 提出一个新的初始对准方案, 它将惯性传感器量测输出直接作为系统的观测量, 姿态角作为状态变量。根据该方案建立的非线性初始对准模型, 其模型的维数降至 3 维, 同时该模型还可以消除惯性传感器的共模误差, 如环境的干扰加速度和干扰角速度。本章以惯性传感器正十二面体斜置配置方案为例, 建立非线性初始对准模型。结果表明, 所建立的捷联惯性导航系统初始对准模型提高了系统的可观性和可观测度, 有效缩短了对准时间。

3.3.1 非线性初始对准模型的建立

传统的以速度误差作为观测量的静基座初始对准系统模型, 由于其对准模型的可观测性较差, 从而影响了滤波器的估计精度及收敛速度, 进而影响初始对准的精度和快速性。为了实现快速精确对准, 就需要增加测量信息, 以改善系统的可观性^[35, 36, 90, 91]。传统的初始对准模型系统的状态维数为 10 维, 对于 Kalman 滤波器而言, 采用如此高维的误差模型, 初始对准的实时性会变差, 因此需要适当得降低系统状态的维数。在冗余惯性导航系统中, 惯性传感器的冗余量测信息, 使得利用惯性传感器输出直接求取姿态角成为可能。基于这个思路, 将惯性传感器输出值直接作为对准系统观测量, 姿态角直接作为状态变量, 以此构成新的初始对准模型。该初始对准模型的维数可降至 3 维, 能够大大降低滤波器的计算量^[92]。

3.3.1.1 水平姿态角计算模型的推导

捷联惯性导航系统在静基座自对准时, 利用加速度计和陀螺仪量测当地的重力加速度和地球自转角速度在载体坐标系上的投影, 从而解算出初始姿态矩阵, 导航系统所处的经纬度值可以准确得到。导航坐标系选取为东北地 (END) 当地地理坐标系, 用 f^n 表示导航坐标系中的重力加速度, 用 ω^n 表示导航坐标系中的地球自转角速度, 用 f^b 表示载体坐标系中的加速度计输出值, 用 ω^b 表示载体坐标系中的陀螺仪的输出值, 则:

$$f^n = [0 \quad 0 \quad g]^T \quad (3-18)$$

$$\omega^n = [\omega_{ie} \cos L \quad 0 \quad -\omega_{ie} \sin L]^T \quad (3-19)$$

$$f^b = [f_x \quad f_y \quad f_z]^T \quad (3-20)$$

$$\omega^b = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T \quad (3-21)$$

式中, g 表示重力加速度, ω_{ie} 表示地球自转角速度, L 表示当地的地理纬度, 矩阵的转置用 T 表示。

在静基座初始对准时, 假定惯性导航系统存在一定的姿态角 (其中俯仰角为 θ , 横滚角为 γ , 航向角为 ψ), 则加速度计输出可表示为:

$$f^b = C_n^b f^n + \Delta f^b = C_n^b f^n + \nabla^b + w^b \quad (3-22)$$

式中, f^b 代表载体坐标系下的加速度计输出, Δf^b 代表加速度计误差, ∇^b 表示各轴加速度计在载体坐标系下的随机常值, w^b 代表载体坐标系下加速度计输出的测量噪声, 考虑为白噪声, C_n^b 表示了从 n 坐标系到 b 坐标系的转换关系矩阵, 满足^[93]:

$$C_n^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \varphi & \cos \gamma \sin \varphi & -\sin \gamma \\ \sin \theta \sin \gamma \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \gamma \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \gamma \\ \cos \theta \sin \gamma \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \gamma \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \gamma \end{bmatrix}$$

由 (3-22) 式可得

$$C_n^b f^n = f^b - \nabla^b - w^b \quad (3-24)$$

若冗余惯性导航系统中含有 6 个同等精度加速度计和 6 个同等精度陀螺仪, 传感器按照正十二面体配置, 配置图如图 3.2, 则惯性导航系统的传感器配置矩阵可表示为:

$$H = \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

其中 $\alpha = 31.7175^\circ$ 。

冗余惯性导航系统中加速度计的输出可表示为:

$$m_i^a = f_i^b + \nabla_i + w_i \quad (3-26)$$

其中 m_i^a 代表加速度计的实际输出, f_i^b 代表真实加速度值, ∇_i 表示加速度计的随机常值, w_i 代表加速度计输出的测量噪声, 考虑为白噪声。

则三个载体坐标轴上的加速度计输出为:

$$f^b = \begin{bmatrix} f_x^b \\ f_y^b \\ f_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - f_2 \\ f_3 - f_4 \\ f_5 - f_6 \end{bmatrix} / (2 \sin \alpha) \quad (3-27)$$

考虑式(3-26)和式(3-27)可得

$$C_n^b f^n = f^b = \begin{bmatrix} f_x^b \\ f_y^b \\ f_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1^a - m_2^a \\ m_3^a - m_4^a \\ m_5^a - m_6^a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nabla_1 - \nabla_2 \\ \nabla_3 - \nabla_4 \\ \nabla_5 - \nabla_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_1 - w_2 \\ w_3 - w_4 \\ w_5 - w_6 \end{bmatrix} / (2 \sin \alpha) \quad (3-28)$$

将式(3-18)、式(3-23)代入式(3-28)可得

$$\begin{bmatrix} -\sin \gamma \cdot g \\ \sin \theta \cos \gamma \cdot g \\ \cos \theta \cos \gamma \cdot g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1^a - m_2^a \\ m_3^a - m_4^a \\ m_5^a - m_6^a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nabla_1 - \nabla_2 \\ \nabla_3 - \nabla_4 \\ \nabla_5 - \nabla_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_1 - w_2 \\ w_3 - w_4 \\ w_5 - w_6 \end{bmatrix} / (2 \sin \alpha) \quad (3-29)$$

由式(3-29)可得

$$\gamma = \arcsin \frac{(m_1^a - m_2^a) - (\nabla_1 - \nabla_2) - (w_1 - w_2)}{-2 \cdot g \cdot \sin \alpha} \quad (3-30)$$

$$\theta = \arcsin \frac{(m_3^a - m_4^a) - (\nabla_3 - \nabla_4) - (w_3 - w_4)}{2 \cos \gamma \cdot g \cdot \sin \alpha} \quad (3-31)$$

3.3.1.2 航向角计算模型的推导

航向角求解方法与水平姿态角求解方法类似，静基座下陀螺输出值可表示为^[93]：

$$\omega^b = C_n^b \omega^n + \Delta \omega^b = C_n^b \omega^n + \varepsilon^b + v^b \quad (3-32)$$

式中， ω^b 代表载体坐标系下的陀螺输出， $\Delta \omega^b$ 代表陀螺误差， ε^b 代表各轴陀螺在载体坐标系下的随机常值， v^b 代表载体坐标系下陀螺输出的测量噪声，考虑为白噪声。

$$C_n^b \omega^n = \omega^b - \varepsilon^b - v^b \quad (3-33)$$

冗余惯性导航系统中陀螺的输出可表示为：

$$m_i^\omega = \omega_i^b + \varepsilon_i + v_i \quad (3-34)$$

其中 m_i^ω 代表陀螺的实际输出， ω_i^b 代表真实角速度值， ε_i 表示陀螺输出的随机常值， v_i 代表陀螺输出的测量噪声，考虑为白噪声。

则三个载体坐标轴上的陀螺输出为：

$$\omega^b = \begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 - \omega_2 \\ \omega_3 - \omega_4 \\ \omega_5 - \omega_6 \end{bmatrix} / (2 \sin \alpha) \quad (3-35)$$

考虑式(3-34)和式(3-35)可得

$$C_n^b \omega^n = \omega^b = \begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} m_1^\omega - m_2^\omega \\ m_3^\omega - m_4^\omega \\ m_5^\omega - m_6^\omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 - \varepsilon_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_3 - v_4 \\ v_5 - v_6 \end{bmatrix} \right) / (2 \sin \alpha) \quad (3-36)$$

将式(3-19)、式(3-23)代入式(3-36)可得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \varphi \cdot \omega_{ie} \cos L + \sin \gamma \cdot \omega_{ie} \sin L \\ (\sin \theta \sin \gamma \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi) \cdot \omega_{ie} \cos L - \sin \theta \cos \gamma \cdot \omega_{ie} \sin L \\ (\cos \theta \sin \gamma \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) \omega_{ie} \cos L - \cos \theta \cos \gamma \cdot \omega_{ie} \sin L \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} m_1^\omega - m_2^\omega \\ m_3^\omega - m_4^\omega \\ m_5^\omega - m_6^\omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 - \varepsilon_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_3 - v_4 \\ v_5 - v_6 \end{bmatrix} \right) / (2 \sin \alpha) \end{aligned} \quad (3-37)$$

由式(3-37)可得

$$\varphi = \arccos \frac{(m_1^\omega - m_2^\omega) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - (v_1 - v_2) - \sin \gamma \cdot \omega_{ie} \sin L \cdot 2 \sin \alpha}{2 \cos \gamma \cdot \omega_{ie} \cdot \cos L \cdot \sin \alpha} \quad (3-38)$$

3.3.1.3 非线性初始对准模型的建立

根据以上的推导,可建立传感器按照正十二面体配置时的初始对准模型。假设冗余惯性导航系统在初始对准时具有一定的姿态角,由于干扰的原因,表现为围绕在固定的姿态角附近微小变动,可将初始对准模型建立为:

$$\begin{bmatrix} \gamma_k \\ \theta_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{k-1} \\ \theta_{k-1} \\ \varphi_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_\gamma \\ w_\theta \\ w_\varphi \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

$$\begin{bmatrix} m_{1k}^a - m_{2k}^a \\ m_{3k}^a - m_{4k}^a \\ m_{1k}^\omega - m_{2k}^\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \sin \gamma_k \cdot g \cdot \sin \alpha \\ 2 \sin \theta_k \cos \gamma_k \cdot g \cdot \sin \alpha \\ 2 \omega_{ie} \cdot \sin \alpha (\cos \gamma_k \cdot \cos \varphi_k \cdot \cos L + \sin \gamma_k \cdot \omega \sin L) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nabla_1 - \nabla_2 \\ \nabla_3 - \nabla_4 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1k} - w_{2k} \\ w_{3k} - w_{4k} \\ v_{1k} - v_{2k} \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

$$\text{同时令 } NC = \begin{bmatrix} \nabla_1 - \nabla_2 \\ \nabla_3 - \nabla_4 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{bmatrix}, \quad NR = \begin{bmatrix} w_{1k} - w_{2k} \\ w_{3k} - w_{4k} \\ v_{1k} - v_{2k} \end{bmatrix}。$$

3.3.2 非线性滤波算法

状态估计系统的状态方程和量测方程分别为:

$$X_{k+1} = X_k + W_k \quad (3-41)$$

$$z_k = h(X) \quad (3-42)$$

$$\text{其中 } X_{k+1} = [\gamma_k \quad \theta_k \quad \varphi_k]^T, \quad W_k = [w_\gamma \quad w_\theta \quad w_\varphi]^T, \quad z_k = \begin{bmatrix} m_{1k}^a - m_{2k}^a \\ m_{3k}^a - m_{4k}^a \\ m_{1k}^\omega - m_{2k}^\omega \end{bmatrix}, \text{观测方程取式(3-40)。}$$

EKF 滤波算法如下^[94]:

$$P_{k+1/k} = P_k \quad (3-43)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (3-44)$$

$$P_{k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1/k} \quad (3-45)$$

$$X_{k+1} = X_k + K_{k+1} (z_{k+1} - h(X_k)) \quad (3-46)$$

$$H_{k+1} = \frac{\partial}{\partial d} h(X) \big|_{X=\hat{X}_k} \quad (3-47)$$

其中 P_k 是状态协方差矩阵, K_k 是观测增益, R_k 是观测噪声的协方差矩阵, $h(\cdot)$ 是传感器的非线性量测方程。

3.3.3 仿真

假定惯性导航系统所处位置经纬度为东经 120° , 北纬 45° ; 选择中等精度的惯性传感器作为仿真传感器, 其中, 陀螺仪常值漂移为 $0.02(^{\circ})/h$, 陀螺仪随机漂移为 $0.01(^{\circ})/h$, 加速度计的常值偏置为 $100 \mu g$, 加速度计的随机误差为 $50 \mu g$, 滤波周期为 $1 s$ 。初始俯仰、横滚、航向角分别为 0° 、 0° 、 90° , 初始误差为 $10'$ 、 $10'$ 、 1° 。分别以传统的初始对准模型和新建立的非线性初始对准模型进行对准仿真^[95-97]。利用卡尔曼滤波器对传统的初始对准模型进行仿真时, 式(3-9)和式(3-10)分别作为系统的状态方程和量测方程。状态变量 X 的初始值 $X(0)$ 均为 0, 初始协方差阵初值 $P_1(0)$ 、系统噪声方差阵 Q 和量测方差阵 R 均取上述惯性传感器的对应值, 初始姿态为 $(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$ 。选择适当的 $P(0)$ 、 Q 、 R 如下:

$$P(0) = \text{diag}\{(0.1m/s)^2, (0.1m/s)^2, (10')^2, (10')^2, (60')^2, (100\mu g)^2, (100\mu g)^2, (0.02^\circ/h)^2, (0.02^\circ/h)^2, (0.02^\circ/h)^2\}$$

$$Q = \text{diag}\{(50\mu g)^2, (50\mu g)^2, (0.01^\circ/h)^2, (0.01^\circ/h)^2, (0.01^\circ/h)^2, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$R = \text{diag}\{(0.1m/s)^2, (0.1m/s)^2\}$$

仿真结果如图 3.3、图 3.4、图 3.5 所示。

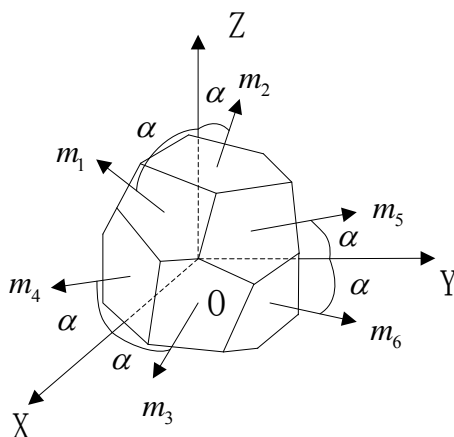


图 3.2 冗余惯性导航系统传感器正十二面体冗余配置结构

Fig.3. 2 The dodecahedron redundant configuration

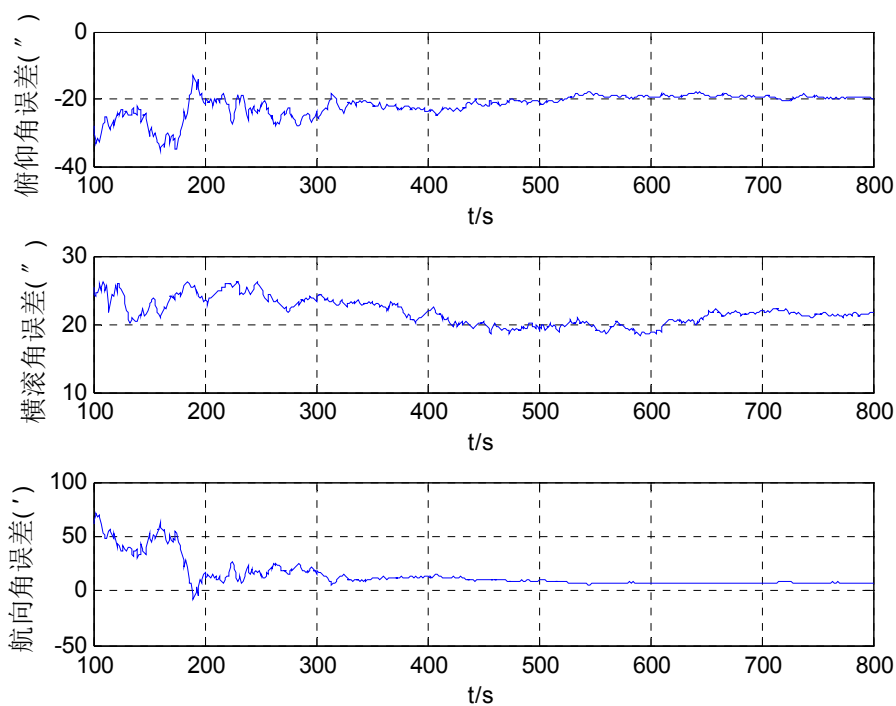


图 3.3 基于传统对准模型的姿态误差

Fig.3. 3 The attitude error based on traditional alignment mode

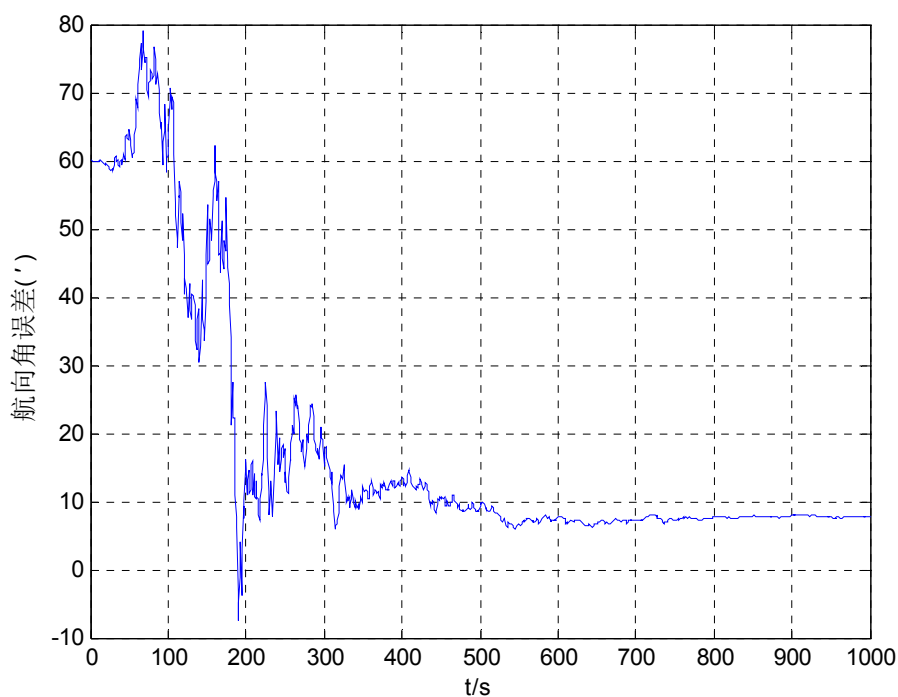


图 3.4 基于传统对准模型的航向角误差

Fig.3. 4 The heading angle error based on raditional alignment mode

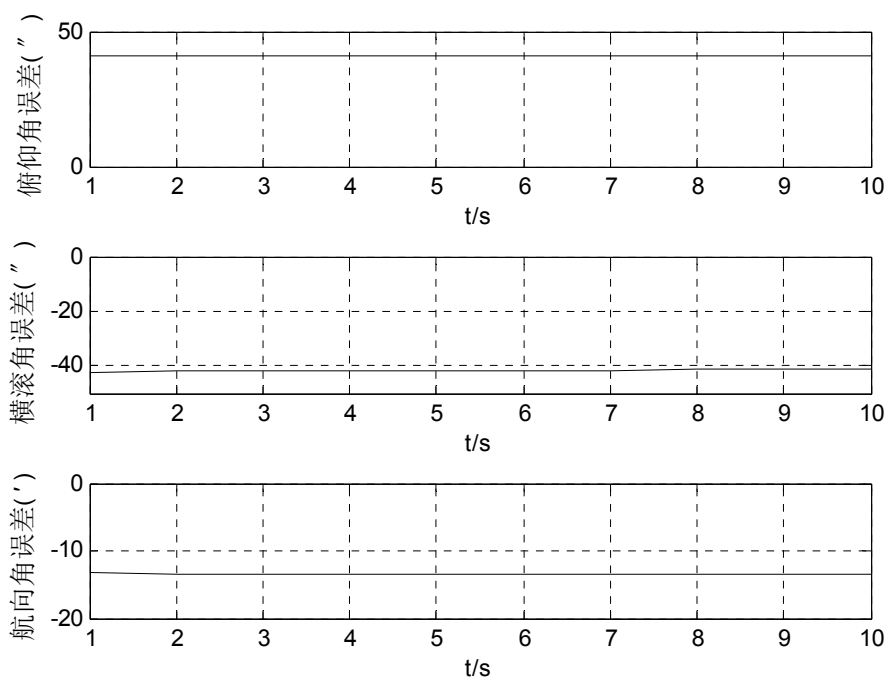


图 3.5 基于新非线性对准模型的姿态误差

Fig.3. 5 The attitude error based on new non-linear alignment model

3.3.4 讨论分析

仿真表明,在对准过程中,基于传统的静基座初始对准模型,两个水平失准角的估计精度较好,收敛速度较快,但是航向失准角的收敛速度比水平失准角慢得多,收敛时间一般超过 300s。在估计精度方面,水平误差角稳态估计误差为 $20''$,航向角的稳态估计误差约为 $7'$,姿态误差曲线图如图 3.3、图 3.4。

本章所涉及的非线性模型(3-40)中有两个误差项—— NC 和 NR 。在 Kalman 滤波时,随机误差项 NR 作为观测噪声来处理。常值误差项 NC 是一个具有确定性取值范围的误差项,若惯性传感器的常值误差均相等,则常值误差项 NC 为 0,若惯性传感器的常值误差的符号相反,则常值误差项 NC 值最大,其最大值为:

$$\max(NC) = \begin{bmatrix} |\nabla_1| + |\nabla_2| \\ |\nabla_3| + |\nabla_4| \\ |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \end{bmatrix}$$

当常值误差项 NC 取其最大值 $\max(NC)$ 时,基于新非线性初始对准模型的姿态角误差如图 3.5 所示。由图 3.5 可以看出,基于新非线性静基座初始对准模型的对准过程中,三个失准角收敛得都很快,可 5s 内就完全收敛。在对准精度方面,当惯性传感器常值误差 NC 项取最大值时,水平失准角的稳态估计误差约为 $42''$,航向失准角的稳态估计误差约为 $13'$ 。对照图 3.3、图 3.4、图 3.5,可以看出,基于新非线性对准模型的对准稳定误差是传统的对准模型的两倍。但是新非线性对准模型的对准收敛时间则是传统的对准模型无法比拟的,三个失准角可在 5s 内同时收敛。由新非线性对准模型(3-40)可知,当忽略传感器的随机误差项 NR 时,模型(3-40)是一个三元方程组,可以直接将三个失准角解出来,这也是新非线性对准模型能够快速收敛的原因所在。

为了分析新非线性初始对准模型中常值误差 NC 项对对准精度的影响,可从以下两个方面来分析:

1、新非线性初始对准模型中惯性传感器的常值误差 NC 项对三个失准角的影响。

① 常值误差 NC 项对水平失准角的影响

由式(3-30)可知,由常值误差 NC 项影响俯仰角的误差值可表示为

$$\Delta\gamma = \arcsin \frac{\nabla_1 - \nabla_2}{-2 \cdot g \cdot \sin \alpha} \quad (3-48)$$

$$0 \leq |\nabla_1 - \nabla_2| < |\nabla_1| + |\nabla_2| \quad (3-49)$$

$$0 \leq |\Delta\gamma| < \arcsin \frac{|\nabla_1| + |\nabla_2|}{2 \cdot g \cdot \sin \alpha} \quad (3-50)$$

将加速度计的常值误差代入式(3-50)可得

$$0 \leq |\Delta\gamma| < \arcsin \frac{100 \times 10^{-6} \times g + 100 \times 10^{-6} \times g}{2 \cdot g \cdot \sin \alpha} \quad (3-51)$$

于是 $0 \leq |\Delta\gamma| < 39.23''$ 。

由式(3-31)可知，由常值误差 NC 项影响横滚角的误差值可表示为

$$\Delta\theta = \arcsin \frac{\nabla_3 - \nabla_4}{2 \cos \gamma \cdot g \cdot \sin \alpha} \quad (3-52)$$

$$0 \leq |\nabla_3 - \nabla_4| < |\nabla_3| + |\nabla_4| \quad (3-53)$$

$$0 \leq |\Delta\theta| < \arcsin \frac{|\nabla_3| + |\nabla_4|}{2 \cos \gamma \cdot g \cdot \sin \alpha} \quad (3-54)$$

假设俯仰角 $\gamma = 0$ ，同理可得

$$0 \leq |\Delta\theta| < \arcsin \frac{100 \times 10^{-6} \times g + 100 \times 10^{-6} \times g}{2 \cdot g \cdot \sin \alpha} \quad (3-55)$$

于是 $0 \leq |\Delta\theta| < 39.23''$ 。

② 常值误差 NC 项对航向角的影响

由式(3-38)可知，假设俯仰角 $\gamma = 0$ ，由常值误差 NC 项影响航向角的误差值可表示为

$$\Delta\varphi = 90 - \arccos \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2 \cos \gamma \cdot \omega_{ie} \cdot \cos L \cdot \sin \alpha} \quad (3-56)$$

$$0 \leq |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| < |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \quad (3-57)$$

$$0 < |\Delta\varphi| < 90 - \arccos \frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|}{2 \cos \gamma \cdot \omega_{ie} \cdot \cos L \cdot \sin \alpha} \quad (3-58)$$

同理可得

$$0 < |\Delta\varphi| < 90 - \arccos \frac{2 \times 0.02}{2 \times \cos(45^\circ) \times \sin \alpha \times 15} \quad (3-59)$$

于是 $0 \leq |\Delta\varphi| < 12.33'$ 。

由以上的分析可以看出，常值误差 NC 项所引起的最大姿态角误差和非线性初始对准模型的稳态误差值相当。由此可以得出结论：新非线性初始对准模型的稳态误差主要是由惯性传感器的常值误差项 NC 产生的。由文献[98]可知，基于传统的静基座对准模型的对准过程中，系统两个水平姿态角的对准误差由加速度计偏置决定，方位角的对准误差由陀螺漂移决定。这与本章分析的得到的结论一致。

同时由(3-48)、(3-52)、(3-56)三式可知，三个失准角都与传感器冗余配置时的倾斜角 α 有关， $\sin \alpha$ 值越大，三个失准角的误差越小，当传感器正交配置时，冗余惯性导航系统的失准角误差最小。其实质在于传感器的斜置将传感器误差项放大。

2、常值误差项中共模误差对新非线性初始对准模型对准精度的影响

由于惯性导航系统初始对准时的环境与惯性传感器标定的环境存在差异，初始对准

时,系统所获知的惯性传感器的常值误差值可能已经飘离了原先标定值。由于初始对准的时间很短,可将惯性传感器的稳定漂移归结到惯性传感器的常值误差当中。由式(3-40)中常值误差 NC 项是由对应惯性传感器的常值误差的差值构成的,因此新非线性初始对准模型可以消除惯性传感器的共模部分误差。推广开来说,新非线性初始对准模型的观测值是惯性传感器的量测值的差,因此可以消除惯性传感器量测的任何共模误差以及抑制环境的干扰加速度和干扰角速度的影响。

3.4 本章小结

本章提出了一种冗余惯性导航系统的非线性对准模型,将惯性传感器的输出直接作为观测量,三个姿态角作为状态变量,将初始对准模型的维数降至 3 维,改善了对准模型的系统可观测度,并可消除惯性传感器的共模误差。根据仿真结果,在稳态精度上,新建立的非线性初始对准模型没有改善,但是在快速性上却大大提高。在对准过程中,新非线性初始对准模型能在 5s 内使三个失准角完全收敛。

第4章 冗余惯性导航系统的故障诊断与隔离

4.1 引言

通过冗余技术能够提高惯性导航系统的可靠性和精度。为了使冗余惯性导航系统中的惯性传感器充分发挥其效能，大幅度的提高系统的可靠性，导航系统必须具有较好的容错能力。当惯性传感器发生故障时，导航系统能够对故障传感器及时检测和诊断，并采用相应的隔离措施以维持惯性导航系统基本的功能，使其导航性能保持在可接受的范围之内。由此可知，在冗余惯性导航系统内必须有一个设计合理的故障检测与隔离技术对传感器进行监控。当有传感器发生故障，系统能够将故障传感器及时准确的检测出来，并从系统中隔离掉，以保证系统正常工作。

目前冗余惯性导航系统的故障检测与诊断方法较多，常用的有直接比较法、最优奇偶向量法、奇异值分解法、广义似然比故障检测法（GLT）等，他们都是基于奇偶空间法的，因此他们都需要设置门限值和观测周期。对于传感器的故障漂移，这些故障检测和隔离的方法很难保持冗余惯性导航系统的冗余特性。文献[99]提出的实时故障漂移补偿方法（Real-time Fault Drift Compensation Algorithm——RFDC）利用状态估计和状态反馈技术对故障漂移进行实时补偿，对于漂移故障传感器不再进行隔离，而是进行实时补偿，从而保持了系统的冗余特性。但是它对传感器的量测噪声比较敏感，量测噪声必须满足高斯特性且需要准确的知道量测噪声特性，同时它对反馈增益的依赖性很强，反馈增益取值困难。本章提出一种改进的实时故障漂移补偿方法（Improved Real-time Fault Drift Compensation Algorithm——IRFDC），仿真结果表明，改进的实时故障漂移补偿方法有效的解决实时故障漂移补偿方法存在的问题。

4.2 故障检测与诊断方法

在冗余惯性导航系统中，故障传感器的检测和诊断是一个基本的功能，以此来提高冗余系统的可靠性。其中故障诊断是建立在故障检测的基础上的，只有将故障检测出来，才能将故障的类型诊断出来，并根据故障类型进行故障处理。不管是故障检测还是故障诊断都是建立在系统的量测信息的基础上的，由于系统的量测信息都含有噪声，因此冗余惯性导航系统的故障检测与故障诊断不可避免会发生漏检和误检。因此故障检测和故障检测性能的优劣直接影响惯性导航系统的性能。

目前故障检测和故障诊断的方法比较多，但是他们基本上都是建立在奇偶方程的基

础上的,如直接比较法、最优奇偶向量法、奇异值分解法、广义似然比故障检测法等。

4.2.1 直接比较法

直接比较法是通过奇偶方程的建立,将传感器的量测值中的被测量消去,利用奇偶方程的残差的判断是否有故障存在^[73]。由于传感器量测噪声的存在,奇偶方程的值不可能为零,因此需要设置一个门限值,当奇偶方程的残差超过该门限值时,可判定相应传感器发生故障。故门限值的选择对故障检测和隔离性能优劣起着至关重要的作用。直接比较法无需对噪声作任何假设,利用奇偶方程将故障检测问题转化为线性相关方程式的逻辑判断问题。

根据6个传感器的正十二面体配置中的对称关系,可得到4个量测向量之间的线性相关关系,可列出15个奇偶方程。若传感器的都正常,则所有奇偶方程的不等式成立,若有传感器发生故障,则相应的奇偶方程不等式不成立。关于奇偶方程不等式的建立,以往不同文献有不同的建立方式,为了便于编程和实际数据的测试,本章采用如表4.1所示的奇偶方程不等式。

表4.1 六个传感器正十二面配置时的奇偶方程不等式

Table 4.1 The parity equation of six sensors which are configured as dodecahedron

序号	传感器组合	奇偶方程不等式
1	1234	$(m_1 - m_2) \times C - (m_3 + m_4) \times S \leq T$
2	1235	$(m_2 + m_3) \times C - (m_1 + m_5) \times S \leq T$
3	1236	$(m_3 - m_1) \times C + (m_2 - m_6) \times S \leq T$
4	1245	$(m_4 - m_1) \times C + (m_2 + m_5) \times S \leq T$
5	1246	$(m_2 + m_4) \times C - (m_1 - m_6) \times S \leq T$
6	1256	$(m_5 - m_6) \times C - (m_1 + m_2) \times S \leq T$
7	1345	$(m_4 + m_5) \times C - (m_1 + m_3) \times S \leq T$
8	1346	$(m_6 - m_3) \times C + (m_1 + m_4) \times S \leq T$
9	1356	$(m_1 + m_6) \times C - (m_3 + m_5) \times S \leq T$
10	1456	$(m_5 - m_1) \times C + (m_4 - m_6) \times S \leq T$
11	2345	$(m_5 - m_3) \times C + (m_4 - m_2) \times S \leq T$
12	2346	$(m_4 + m_6) \times C + (m_2 - m_3) \times S \leq T$
13	2356	$(m_2 - m_5) \times C + (m_3 + m_6) \times S \leq T$
14	2456	$(m_2 + m_6) \times C + (m_4 - m_5) \times S \leq T$

15	3456	$(m_4 - m_3) \times C + (m_5 + m_6) \times S \leq T$
----	------	--

(表中 $C = \cos \alpha$, $S = \sin \alpha$, $\alpha = 31.7^\circ$, T 为门限值)

把表 4.1 中每一个不等式是否成立用一个二进制量 K_i ($i=1 \sim 15$) 来表示, 即第 i 不等式成立, $K_i=1$; 否则 $K_i=0$ 。根据 K_i 的值可以建立故障识别真值表如表 4.2。

表 4.2 传感器故障检测及识别真值表

Table 4.2 The sensor fault detection and identification truth table

故障传感器	奇偶不等式检测值															故障识别元
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}	
没有	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0X7FFF
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0X7C00
2	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0X03C0
3	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0X2238
4	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0X1126
5	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0X0895
6	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0X044B
1, 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0X4000
1, 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0X2000
1, 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0X1000
1, 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0X0800
1, 6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0X0400
2, 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0X0200
2, 4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0X0100
2, 5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0X0080
2, 6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0X0040
3, 4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0X0020
3, 5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0X0010
3, 6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0X0008
4, 5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0X0004
4, 6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0X0002

5, 6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0X0001
三个或三个以上	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0X0000

表 4.2 中故障识别元的值为 K_{15} 为高位, K_1 为低位的构成一个字的十六进制值。如果所有传感器都正常工作, 即所有奇偶不等式都成立, 则 $K_1 \sim K_{15}$ 都为 1, 故障识别元为 0X7FFF。程序扫描到故障识别元为 0X7C00 时, 则隔离 1 号传感器, 同理程序扫描到故障识别元为 0X0080, 则隔离 2 号和 5 号传感器。因此故障隔离操作只需要扫描故障识别元的值即可进行隔离操作, 程序逻辑简单易行, 不易出错。当然, 若故障识别元为 0X0000 时, 表示所有奇偶不等式都不成立, 有 3 个或 3 个以上的传感器发生故障, 而不能识别出哪个传感器发生故障。

直接比较法物理概念清晰, 不需要对量测噪声做任何假设。当传感器发生软故障时, 所有奇偶不等式都不成立, 故障识别元的值为 0X0000, 直接比较法不能识别出故障传感器。

4.2.2 最优奇偶向量法

(1) 最优奇偶向量性能指标

最优奇偶向量法就是考虑故障方向和噪声方向, 通过建立某种性能指标, 设计对特定传感器故障敏感, 而对其它传感器故障和量测噪声不敏感的奇偶向量的一种鲁棒故障检测与隔离方法^[73, 101-104]。

为讨论方便, 惯性导航系统的量测方程可表示为:

$$m = Hx + Df + F\varepsilon \quad (4-1)$$

式中, D 为故障输入矩阵, f 为故障向量 F 是噪声输入矩阵。若惯性传感器存在故障, f 不为 0, 否则为 0。

由于惯性导航系统中惯性传感器是冗余配置的, 假设在任一时刻, 导航系统中最多仅有一个惯性传感器发生故障, 若第 i 个惯性传感器发生故障, 可选取最优奇偶向量 V_i 。由式 (4-1) 可知, 奇偶方程可表示为:

$$P_i = V_i^T m = V_i^T Df + V_i^T F\varepsilon \quad (4-2)$$

式中, P_i 为与第 i 个传感器故障相应的残差, $i = 1, 2, \dots, n$, n 为系统冗余传感器数量。

假设第 i 个传感器发生故障, 其他传感器没有发生故障, 奇偶方程可表示为:

$$P_i = V_i^T D e_i f + V_i^T F\varepsilon \quad (4-3)$$

$$P_j = V_j^T D e_i f + V_j^T F \varepsilon, \quad j=1,2,\dots,n, \quad j \neq i \quad (4-4)$$

若

$$|P_i| > |P_j|, \quad j=1,2,\dots,n, \quad j \neq i \quad (4-5)$$

则可判断第 i 个传感器发生故障。

为了敏感特定故障传感器，建立性能指标函数，其表达式可表示为：

$$S_i = \max_{V_i^T H=0} \frac{(V_i^T D e_i)^2}{\|V_i^T F\|^2 \sum_{j \neq i} (V_i^T D e_j)^2} = \max_{V_i^T H=0} \frac{(V_i^T D e_i)^2}{V_i^T (F F^T + \sum_{j \neq i} D e_j e_j^T D^T) V_i} \quad (4-6)$$

式中， e_i 为 m 阶单位矩阵 I_m 的第 i 列向量， V_i 为第 i 个传感器所要设计的故障检测的最优奇偶向量。 $V_i^T D e_i$ 、 $V_j^T D e_j$ 表示对第 i 个和第 j 个传感器故障的敏感度， $\|V_i^T F\|^2$ 表示对量测噪声的敏感度。最大化 S_i ，可使 P_i 对第 i 个传感器故障敏感，而对其他传感器故障以及量测噪声不敏感。即当第 i 个传感器发生故障时，使 $|P_i|$ 的值尽量大，从而便于故障隔离决策。

(2) 最优奇偶向量的设计

由奇偶约束条件可知，奇偶向量 V_i 可表示为 V 的线性组合：

$$V_i = V c_i \quad (4-7)$$

式中， V 中的列为奇偶空间 $\Re(V)$ 内的一组基， c 是以 V 的各列为加权系数构成的非零向量，也就是奇偶向量 V_i 在这组基上的投影坐标向量。

考虑到

$$\sum_{j \neq i} D e_j e_j^T D^T = D D^T - D e_i e_i^T D^T \quad (4-8)$$

式(4-6)的极值问题就可以整理成性能指标：

$$\max_{c_i \neq 0} \frac{(u^T c_i)^2}{c_i^2 M_B c_i} \quad (4-9)$$

其中， $u = V^T D e_i \in R^{m-n}$ ， $M_B = V^T (F F^T + D D^T - D e_i e_i^T D^T) V$ 为 $m-n$ 阶对称阵。

如果式中 M_B 是正定矩阵，那么性能指标式(4-9)在 $c_i = a M_B^{-1} u$ 处达到最大值。于是所求向量 V_i 成为最优奇偶向量，并有：

$$V_i = V c_i = a V M_B^{-1} u \quad (4-10)$$

其中 a 为非零实数。

(3) 基于最优奇偶向量法的故障检测与隔离

首先将 V_i 单位化，可得到最优奇偶向量 $V_i^* = V_i / \|V_i\|$ 。用该最优奇偶向量 V_i^* 可检测第 i 个传感器是否发生故障。为了表示方便，下面仍用 V_i ($i=1,2,\dots,m$) 表示单位化后

的最优奇偶向量，于是相应的最优奇偶残差可表示为：

$$P_i^* = V_i^T m \quad (4-11)$$

若 $f = 0$ ，即无故障传感器， $P_i^* \sim N(0, \sigma^2 \|V_i^T F\|^2)$ ，将其标准化的最优奇偶残差：

$$P_i = P_i^* / (\sigma \|V_i^T F\|) \quad (4-12)$$

标准化以后的奇偶残差 $P_i \sim N(0, 1)$ ，确定出绝对值最大的标准残差：

$$|P_k| = \max_i |P_i| \quad (4-13)$$

(4) 基于最优奇偶向量的故障检测与隔离决策

1) 在确定虚警率 α 后，计算标准正态分布的 $1 - \alpha / 2$ 分位数的故障检测和隔离门限：

$$T_D = u_{1-\alpha/2}。$$

2) 确定出 P_i 中绝对值的最大值： $|P_k| = \max_i |P_i|$ 。

3) 如果 $|P_k| \geq T_D$ ，则可判断第 k 个传感器发生故障，否则判断该传感器无故障。

4.2.3 奇异值分解法

假定有 n 个同等精度的同类传感器构成的冗余惯性导航系统，其量测方程可表示为
[105, 106]：

$$m = Hx + \varepsilon \quad (4-14)$$

配置矩阵 $H \in R^{m \times p}$ ，则有 $\text{rank}(H) = p$ ，对 H 矩阵进行奇异值分解有：

$$U^T H V = \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

$$H = U \Lambda V^T = U \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T \quad (4-16)$$

其中 U 为 p 阶酉矩阵， V 为 p 阶酉矩阵，即

$$U U^T = U^T U = I_n \quad (4-17)$$

$$V V^T = V^T V = I_p \quad (4-18)$$

$$\Lambda_1 = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} \quad (4-19)$$

且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ 是 $H^T H$ 的非零特征值的算术平方根，且

$$V_1 = [v_1, v_2 \dots v_p] \quad (4-20)$$

$$V_2 = [v_{p+1}, v_{p+2} \dots v_n] \quad (4-21)$$

其中 V_1 的列向量为矩阵 $H^T H$ 的非零特征值的标准正交向量， V_2 为与 V_1 的列向量构成 $n \times n$ 的标准化正交基，即得 $V_{n \times n} = [V_1; V_2]$ 。

于是有

$$H^T H V_1 = V_1 \Lambda_1^2 \quad (4-22)$$

由此可知：

$$\Lambda_1^{-1} V_1^T H^T H V_1 \Lambda_1^{-1} = I \quad (4-23)$$

另外由 $H^T H V_2 = V_2 \times 0$ 知 $V_2^T H^T H V_2 = 0$, $H V_2 = 0$ 。

又由于 $U_1 = H V_1 \Lambda_1^{-1}$

有 $H H^T U_1 = H H^T H V_1 \Lambda_1^2 \Lambda_1^{-1} = H V_1 \Lambda_1 = U_1 \Lambda_1^2$

所以 U_1 的列向量是矩阵 $H H^T$ 的标准正交特征向量，而 U_1 的前 p 列向量是矩阵 $H H^T$ 对应于 p 个非零特征值的标准正交化向量。

由 $U_1^T U_1 = I$ ，选择任意一 U_2 ，使得 $U = [U_1 : U_2]$ 正交，从而可以得出：

$$U^T H V = \begin{bmatrix} U_1^T H V_1 & U_1^T H V_2 \\ U_2^T H V_1 & U_2^T H V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ U_2^T H V_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Lambda \quad (4-24)$$

此外，还要对 U 进行验证，确定 $U \Lambda V^T = H$ 。

当传感器无故障时，奇偶向量仅是噪声的函数；当传感器发生故障时，奇偶向量不仅包含噪声函数还包含故障函数。量测方程可表示为：

$$m = Hx + b_f + \varepsilon \quad (4-25)$$

式中， b_f 为故障向量，其对应故障传感器的元不为 0，其余元为 0。

当系统发生故障时，将式 (4-16) 代入式 (4-25) 中，可得：

$$m = U \Lambda V^T x + b_f + \varepsilon \quad (4-26)$$

将式 (4-26) 左乘 U^T 可得：

$$U^T m = \Lambda V^T x + U^T b_f + U^T \varepsilon \quad (4-27)$$

将式 (4-27) 分解为：

$$U_1^T m = \Lambda_1 V x + U_1^T (b_f + \varepsilon) \quad (4-28)$$

$$U_2^T m = U_2^T (b_f + \varepsilon) \quad (4-29)$$

构造奇偶向量：

$$P = U_2 U_2^T m = U_2 U_2^T (b_f + \varepsilon) \quad (4-30)$$

由式 (4-30) 可知，奇偶向量与状态变量是无关，发生故障时，奇偶向量仅是噪声和故障的函数。在有、无故障时，由于奇偶向量表现出的特征不一致，才能够通过奇偶向量进行故障检测。

4.2.4 广义似然比故障检测法

广义似然比 (GLT) 故障检测法一般由数据处理、决策函数和门限检验这三部分组成。它首先要对传感器的量测值进行数据处理，求得一组能够反映量测噪声和可能出现

故障效应的残差。将这些残差代入决策函数，根据门限值进行故障检测和诊断决策。与前文介绍的故障检测方法一样，故障检测的准确性取决于故障门限值的选择，因此门限值的选择十分重要^[104]。

(1) GLT 故障检测法的原理

假设冗余惯性导航系统的量测方程为：

$$m = Hx + e \quad (4-31)$$

式 x 为被测量， H 为冗余惯性系统的配置矩阵， e 是量测噪声（考虑为均值为 0 的白噪声， $E\{e\} = 0$ ， $E\{ee^T\} = \sigma^2 I$ ）， m 为传感器的输出值。

奇偶方程为：

$$P = Vm \quad (4-32)$$

式中 P 为奇偶向量， V 是待定的行满秩矩阵， V 可根据 potter 算法^[107, 108]求得。使得 V 满足

$$VH = 0, \quad VV^T = I \quad (4-33)$$

因此有

$$P = Ve \quad (4-34)$$

当没有传感器发生故障时，奇偶向量 P 仅是噪声的函数；当有传感器发生故障时，奇偶向量不仅包含噪声函数还包含故障函数，测量方程可表示为：

$$m = Hx + b_f + e \quad (4-35)$$

式中 b_f 为故障向量，其对应故障传感器的元不为 0，其余元为 0。在有传感器发生故障时的奇偶向量可表示为：

$$P = Vb_f + Ve \quad (4-36)$$

在有、无故障时，由于奇偶向量表现出的特征不一致，为故障检测提供基础。在有、无故障传感器时，奇偶向量的统计特性为：

无故障 H_0 ： $E\{P\} = 0$ ； $E\{PP^T\} = \sigma^2(VV^T) = \sigma^2$

有故障 H_1 ： $E\{P\} = \mu$ ； $E\{(P - \mu)(P - \mu)^T\} = \sigma^2(VV^T) = \sigma^2$ ，其中 $\mu = Vb_f$ 。

则故障判决函数可构造为：

$$DF_{GLT} = P^T(VV^T)^{-1}P \quad (4-37)$$

故故障判断准则为：

$$\begin{cases} DF_{GLT} \leq T_{GLT} & \text{无故障} \\ DF_{GLT} \geq T_{GLT} & \text{有故障} \end{cases} \quad (4-38)$$

其中 T_{GLT} 是预先设定的检测门限。

(2) 故障检测门限值的选择

在故障检测过程中,故障检测的性能的优劣很大程度上取决于故障检测门限值的选择。当故障检测门限值选得过大时,故障检测的漏检率会增加;当故障检测门限值选的过小时,故障检测的虚警率就会增加。但是要确定一个故障检测门限值完全避免漏检和虚警是不可能的,只能选择一个合适的门限值使得漏检率和虚警率尽可能的小,从而提高故障检测性能。

4.3 实时故障漂移补偿算法

惯性导航系统的可靠性很大程度上取决于系统中惯性传感器的可靠性,因此有必要提高惯性传感器的可靠性。实践表明,通过惯性传感器冗余配置来提高惯性导航系统的惯性传感器可靠性的方法效果显著^[109],但要增加惯性传感器的数量以及故障检测与隔离功能。目前,冗余系统中传感器的故障检测与隔离技术基本上都是建立在奇偶空间法上的,根据奇偶向量在有、无故障情况下表现出来的不一致性,通过故障隔离判决函数来判断是否有故障发生^[110-114]。为了减少虚警,基于奇偶空间法的故障检测方法都需要设置门限值和观察周期,在这个观察周期内判决函数的输出都超过门限值,则可判断该传感器发生故障。因此奇偶空间法存在以下三个问题:(1)门限值和观察周期的取值是一个经验值,人为主观因数比较大,不恰当的取值会导致故障的误报。(2)由于观察周期的存在,所以他们都不是实时的故障诊断方法^[112]。(3)只是简单的隔离,使得冗余系统失去冗余特性。

对于传感器的故障漂移,传统的故障检测和隔离的方法很难保持冗余惯性导航系统的冗余特性。因为漂移是传感器的固有特性,每一个传感器在任何时刻都有可能发生漂移。鉴于传感器的漂移特性,冗余惯性导航系统需要有自我修复和补偿的功能,来保证系统的冗余特性。针对冗余惯性导航系统,文献[99]提出的实时故障漂移补偿方法,它利用状态估计和状态反馈技术对故障漂移进行实时补偿,对于漂移故障传感器不再进行隔离,而是进行实时补偿,从而保持了系统的冗余特性^[99, 115, 116]。但是它对传感器的量测噪声比较敏感,量测噪声必须满足高斯特性且需要准确的知道量测噪声特性,同时它对反馈增益的依赖性很强,反馈增益取值范围窄,需要做大量的实验才能确定反馈增益值。本章针对量测噪声必须满足高斯特性和对反馈增益的依赖性强的问题进行了改进,提出一种改进的实时故障漂移补偿方法。该方法主要有如下优点:(1)对漂移传感器进行实时补偿,而不是简单地隔离,从而保证了系统的冗余特性;(2)该实时补偿方法不再需要门限值及观察周期;(3)利用自适应扩展卡尔曼粒子滤波器,来解决量测噪声不满足

高斯特性的情况以及模型不准确问题，传感器的量测噪声不必满足高斯特性；（4）引入漂移因子，减弱了补偿效果对反馈增益的依赖性，反馈增益的取值范围加大；（5）能够容错运行，在特定情况下，即使所有的惯性传感器都发生故障漂移，系统仍然能够稳定运行。

4.3.1 基本理论

冗余惯性导航系统是通过传感器的冗余配置来提高系统的可靠性。设冗余惯性导航系统有 n 个同类传感器，没有安装误差和量测误差，仅有附加的噪声序列 ε ，则测量方程为^[99, 110, 111]：

$$m = H\omega + \varepsilon \quad (4-39)$$

其中 m 是量测向量， H 是 $n \times 3$ 维的传感器量测矩阵， ω 是被量测的真实状态向量， ε 是均值为 0 的噪声序列。为了检测故障传感器，选择 V 矩阵，使得 $VH = 0$ ， V 是 $(n-3) \times n$ 维对称正交投影阵。

此时的奇偶向量：

$$P = Vm \quad (4-40)$$

当各量测正常时，有：

$$P = Vm = VH\omega + V\varepsilon = V\varepsilon \quad (4-41)$$

以 $\|P\|$ 作为检测向量，实时计算 $\|P\|$ ，并选用合适的门限值 T_{th} ，当发现在一段周期内 $\|P\| > T_{th}$ 时，则可判断有故障发生。

在冗余惯性导航系统中，设正交轴上的每个量测值都有用 k 个同类传感器的测量值来解算，因此每个量测值都可以得到 $k-1$ 组奇偶向量。而这 $k-1$ 个奇偶向量又可以通过线性变换转化为 k 个表决向量（表决矩阵的主对角线元素全部为 0，其余元素不为 0）。由于 k 个表决向量是通过 $k-1$ 个奇偶向量线性变换得到的，因此表决矩阵的秩为 $k-1$ 。

表决向量为：

$$Q = C_v m = C_v [m_1 \cdots m_k]^T \quad (4-42)$$

$$C_v = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & \cdots & C_{1,k} \\ C_{21} & 0 & \cdots & C_{2,k} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{k,1} & \cdots & C_{k,k-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{v1} \\ C_{v2} \\ \vdots \\ C_{vk} \end{bmatrix} \quad (4-43)$$

式中， m_1, \dots, m_k 是 k 个传感器的输出， C_{v1}, \dots, C_{vk} 是 C_v 的行向量。相对奇偶向量而言，表决向量更容易检测出故障传感器。例如，当第一个表决向量的输出为 0，其他的表决向量的输出不为 0 时，则可以确定传感器 m_1 有故障。而当传感器的量测包含噪声时，该

故障检测方法则不能实时的检测到故障，因为在任何时刻，表决方程的输出都不为 0，需要设置与奇偶向量相似的门限值和观察周期。而且若要表决向量能够快速准确的检测出故障传感器，必须满足在任一时刻只有一个传感器发生故障，而其他传感器都正常工作的前提条件。但是 n 个传感器中的每一个传感器在任何时刻都有可能这发生漂移，只有一个传感器发生故障的假设很难成立^[99]。

4.3.2 实时故障补偿方法

这种实时故障漂移补偿方法能够处理被噪声污染了的和发生信号漂移的传感器输出，不再需要设置门限值和观察周期，因为它将传统的故障检测问题转变为实时状态估计和状态反馈补偿的问题。

4.3.2.1 实时漂移估计

实时故障漂移补偿方法用状态估计技术来估计出传感器输出的漂移值。设传感器 i 的漂移为 d_i ，并将传感器的漂移从传感器的输出中分离开，传感器的输出则可表示为：

$$m_{di} = m_i + d_i, i = 1, \dots, n \quad (4-44)$$

式中 m_{di} 是包含量测噪声和漂移的传感器输出， m_i 是传感器含有量测噪声的真实量测值。现将漂移 d_i 作为系统的状态，“控制方程”可以写成：

$$\dot{d}_i = \delta(t), i = 1, \dots, n \quad (4-45)$$

式中 $\delta(t)$ 是漂移的变化情况。

从系统的可观测性来说，该系统需要 n 个输出方程去观测 n 个系统状态。被用来描述 n 个传感器输出关系的奇偶向量可作为系统估计的输出方程。这 $n-3$ 个奇偶向量可以从表决矩阵中任意选择 $n-3$ 个行向量构成式 (4-46) 中的 Z_1 。

$$Z_1 \square \begin{bmatrix} C_{v1} \\ \vdots \\ C_{v(n-3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{v1} \\ \vdots \\ C_{v(n-3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{d1} - m_1 \\ \vdots \\ m_{dn} - m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{v1} \\ \vdots \\ C_{v(n-3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{d1} \\ \vdots \\ m_{dn} \end{bmatrix} \quad (4-46)$$

$$Z_2 \square \begin{bmatrix} C_{v1}d & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C_{vn}d \end{bmatrix} d = \begin{bmatrix} C_{v1}d & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C_{vn}d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{v1}dd_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C_{vn}dd_n \end{bmatrix} \quad (4-47)$$

由于使用表决向量进行故障检测要满足系统中只有一个故障传感器的假设，即任意两个传感器的漂移值的乘积都为 0 ($d_i \times d_j = 0, i \neq j$)，所以另一个输出方程写成如式 (4-47) 中 Z_2 的形式。由于漂移是随机的，漂移函数 $\delta(t)$ 形式不可确定，为了建模方便，令控制方程为 $\dot{d}_i = 0$ 。根据系统的控制方程和输出方程可以构造一个状态估计系统，用

它来估出传感器的漂移值。由于输出方程 Z_2 是非线性的，可选用 EKF 作为状态估计算法^[99]。但是由于传感器的漂移是随时间变化的，真实控制方程为 $\dot{d}_i = \delta(t)$ 。因此所建立的模型与实际系统模型不能完全匹配，使得估计系统不能很好的收敛。因此将“渐消因子”技术加入到 EKF 算法当中形成自适应渐消因子扩展卡尔曼滤波算法（Adaptive Extended Kalman Filter ——AEKF）^[117-119]。在多种应用场合传感器的量测噪声特性无法满足高斯特性，自适应扩展卡尔曼滤波算法的收敛性不能保证，本章将自适应渐消因子扩展卡尔曼滤波算法和粒子滤波算法相结合，形成自适应渐消因子扩展卡尔曼粒子滤波算法（Adaptive Extended Kalman Particle Filter ——AEKPF）。

状态估计系统的状态方程和量测方程分别为：

$$d_{k+1} = d_k + W_k \quad (4-48)$$

$$z_k = h(d) = [Z_1 \quad Z_2]^T \quad (4-49)$$

自适应渐消因子扩展卡尔曼粒子滤波算法如下^[120-123]：

(1) 初始化

设置粒子数目 N ，从初始的前验概率分布 $p(d_0)$ 中采集粒子样本， $X = \{(d_0^i, \omega_0^i) | i = 1, 2, \dots, N\}$ ，令 $\omega_0^i = 1/N$ 。即 $d_0^i \sim p(d_0)$ 。

(2) 重要性采样

(3) 粒子更新

①用 EKF 算法更新每一个粒子

计算一步预测误差方差

$$P_{k+1/k} = \lambda_k P_k \quad (4-50)$$

滤波增益

$$L_{k+1} = P_{k+1/k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (4-51)$$

估计误差方差

$$P_{k+1} = (I - L_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1/k} \quad (4-52)$$

状态估计

$$\hat{d}_{k+1} = \hat{d}_k + L_{k+1} (z_{k+1} - h(\hat{d}_k)) \quad (4-53)$$

量测矩阵

$$H_{k+1} = \frac{\partial}{\partial d} h(d) \big|_{d=\hat{d}_k} \quad (4-54)$$

渐消因子的计算：

$$M_k = H_{k+1} P_k H_{k+1}^T + R_k \quad (4-55)$$

$$N_k = [z_{k+1} - h(\hat{d}_k)][z_{k+1} - h(\hat{d}_k)]^T \quad (4-56)$$

$$\lambda_k = \max\{1, \text{trace}(N_k) / \text{trace}(M_k)\} \quad (4-57)$$

式中, \hat{d}_k 是 d_k 的估计值; L_k 是第 k 时刻的观测增益; λ_k 为渐消因子; $P_k \equiv E[(\hat{d}_k - d_k)(\hat{d}_k - d_k)^T]$ 是第 k 时刻的状态协方差; R_k 是量测噪声方差; $h(\square)$ 是传感器的量测输出方程。

求粒子集 $\{\hat{d}_k^i\}_{i=1}^N$ 的均值 d_k^{-i} 和方差 P_k^i 。从重要性密度函数 $q(d_k^i | d_{k-1}^i, z_{1:k}) = N(\hat{d}_k^i; d_k^{-i}, P_k^i)$ 中抽样粒子 d_k^i 。

②权值更新

根据系统量测和预测得到的新状态对应的观测值计算各粒子的权值

$$\omega_k^i = \omega_{k-1}^i \frac{p(z_k | d_k) p(d_k^i | d_{k-1}^i)}{q(d_k^i | d_{k-1}^i, z_{1:k})} \quad (4-58)$$

权值归一化

$$\omega_k^i = \omega_k^i / \sum_{i=1}^N \omega_k^i \quad (4-59)$$

(4) 重采样, 根据归一化权值选择粒子, 得到新的样本集。

$$\text{计算有效样本点数 } \hat{N}_{eff} = 1 / \sum_{i=1}^N (\omega_k^i)^2$$

如果 $\hat{N}_{eff} < N_{th}$ (N_{th} 为预先设置的门限值, 如 $2N/3$), 则对粒子样本集 $\{\hat{d}_k^i\}_{i=1}^N$ 进行重采样。重采样的基本思路就是复制大权值的粒子而消除小权值的粒子。通过重采样, 产生一个新的样本集 $\{d_k^i\}_{i=1}^N$, 于是 $P(d_k^i = \hat{d}_k^i) = \omega_k^i$, 这样产生的样本是一个独立同分布的样本集, 而且每个粒子的权值设为 $\omega_k^i = 1/N$ 。

(5) 计算 k 时刻目标状态的后验概率估计 $d_k = \sum_{i=1}^N d_k^i \omega_k^i$, 协方差 $P_k^i = E[(d_k - d_k^i)(d_k - d_k^i)^T]$

(6) $k = k + 1$, 将 $\{d_k^i\}_{i=1}^N$ 和 $\{P_k^i\}_{i=1}^N$ 带入 (2) 重要性采样步骤。递推估计下一时刻的目标状态后验概率密度。

4.3.2.2 实时漂移补偿

一旦传感器发生漂移, 状态估计系统能够实时估计出漂移值, 可以利用状态反馈技术对漂移进行补偿。

$$\dot{d}_i = u \quad (4-60)$$

$$u = -K\alpha_i \hat{d}_i \quad (4-61)$$

式中 K 为反馈增益, α_i 是漂移因子。

将方程 (4-60) 和 (4-61) 转换成离散形式, 可表示为:

$$d_k = \hat{d}_{k-1} + u_{k-1} \quad (4-62)$$

$$u_{k-1} = -K\alpha_{k-1}\hat{d}_{k-1} \quad (4-63)$$

由于状态反馈的作用，补偿系统中漂移值是随着系统估计漂移值的变化而变化的，原来用作故障检测的输出方程式(4-46)、(4-47)不再正确。同时由于无法直接获得补偿系统量测方程，补偿系统的输出方程可以通过以下两步来获得：(1) 用补偿后的传感器输出 m_{cik} 替代式(4-46)中的 m_{di} 来获得新 Z_1 方程。(2) 虽然在补偿系统中 Z_2 不再正确，但是 Z_2 保持不变^[99]。

$$m_{cik} = m_{ik} + d_{cik} = m_{ik} + d_{ik} - K \sum_{\tau=0}^k \alpha_{i\tau} \hat{d}_{i\tau} = m_{dik} - K \sum_{\tau=0}^k \alpha_{i\tau} \hat{d}_{i\tau} = m_{dik} - D_{ik} \quad (4-64)$$

$$D_{ik} = K \sum_{\tau=0}^k \alpha_{i\tau} \hat{d}_{i\tau} \quad (4-65)$$

式中 d_{cik} 是传感器补偿后漂移值； d_{ik} 是传感器的实际漂移； m_{di} 是补偿前包含量测噪声和漂移的传感器输出， m_{ik} 是传感器含有量测噪声的真实量测值； D_{ik} 为当前时刻的传感器的漂移值补偿值。

应用状态反馈技术将实时估计系统变为实时补偿系统，并将其离散化，得到如图 4.6 所示的实时补偿系统框图。如图所示，补偿系统的反馈值是漂移值的补偿值 D_{ik} ，估计系统的输入为补偿了的传感器输出 m_{cik} 。这种补偿方法与传统的线性二次高斯方法很相似，唯一不同点在于滤波算法用 AEKPF 代替了 Kalman^[100]。当传感器的漂移值 d_{ik} 和传感器的漂移值补偿值 D_{ik} 相等时， $m_{cik} = m_{ik}$ 。同时由于 Z_2 方程在补偿系统中不再正确，补偿系统不再有系统只能有一个故障传感器的限制条件。因此这个补偿算法能够处理多个传感器同时发生故障的情况。

4.3.2.3 漂移因子

根据文献[99]，实时补偿算法的性能很大程度依赖于反馈增益的选择，不恰当的反馈增益会导致补偿系统的失效，而反馈增益的选择目前还没有一个指导性的定理和方法，只能依靠经验值。反馈增益的人为因数较大，而且由于环境的变化，依靠经验选择的反馈增益无法一直保证系统有效性。反馈增益取值不仅和系统特性、漂移特性相关，还和噪声相关，而且各传感器反馈增益之间也相互关联，反馈增益的选择是一个比较复杂的问题。因此本文根据传感器先前的漂移情况和当前的漂移情况来增加和降低实时补偿系统对漂移的敏感度，即引入漂移因子，使得补偿系统对反馈增益的依赖程度大大降低。漂移因子包含先验漂移因子和当前漂移因子两部分。

(1) 先验漂移因子

先验漂移因子表征的是各个传感器前期的漂移变化情况，前期漂移变化率越大，先验漂移因子越大。

传感器的漂移变化率

$$\delta_{ik} = D_{ik} - D_{ik-1} = K \sum_{\tau=0}^k \alpha_{i\tau} \hat{d}_{i\tau} - K \sum_{\tau=0}^{k-1} \alpha_{i\tau} \hat{d}_{i\tau} = K \alpha_{ik} \hat{d}_{ik} \quad (4-66)$$

传感器前期的漂移变化情况

$$\beta_{ik} = \frac{\sum_{\tau=0}^k |\delta_{i\tau}|}{k} = \frac{\sum_{\tau=0}^k K \alpha_{i\tau} |\hat{d}_{i\tau}|}{k} = \frac{K \sum_{\tau=0}^k \alpha_{i\tau} |\hat{d}_{i\tau}|}{k} \quad (4-67)$$

归一化

$$\beta_{ik} = \beta_{ik} / \sum_{i=1}^n \beta_{ik} \quad (4-68)$$

(2) 当前漂移因子

当前漂移因子表征的是当前时刻各个传感器的漂移情况，他与当前时刻漂移量和漂移变化率相关。漂移量和漂移变化率越大，当前漂移因子越大。

$$\gamma_{ik} = D_{ik} \hat{d}_{ik} \quad (4-69)$$

归一化

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ik} / \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} \quad (4-70)$$

(3) 漂移因子

$$\alpha_{ik} = \beta_{ik} \gamma_{ik} \quad (4-71)$$

归一化

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ik} / \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} \quad (4-72)$$

if $\alpha_{ik} < 0.01$, then $\alpha_{ik} = 0.01$

漂移因子为: $\alpha_k = \text{diag}(\alpha_{1k} \quad \alpha_{2k} \quad \cdots \quad \alpha_{nk})$

4.3.2.4 系统稳定性证明

根据上述讨论，该实时补偿系统可以表示为^[99]:

$$\dot{d} = Bu \quad (4-73)$$

$$y = [Z_p \quad Z_{aux}]^T = [(C_1 d)^T \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T \quad (4-74)$$

$$\dot{\hat{d}} = Bu + L \left(y - \begin{bmatrix} C_1 \hat{d} \\ h_2(\hat{d}) \end{bmatrix} \right) = Bu + [L_1 \quad L_2] \begin{bmatrix} C_1(d - \hat{d}) \\ 0 - h_2(\hat{d}) \end{bmatrix} \quad (4-75)$$

$$u = -K\alpha\hat{d} \quad (4-76)$$

$$L = [L_1 \quad L_2], \quad C_1 = [C_{v1} \quad C_{v2} \quad C_{v3}], \quad \alpha = \text{diag}(\alpha_1(t) \quad \alpha_2(t) \quad \cdots \quad \alpha_n(t))$$

其中 B 为控制确认矩阵； K 为反馈增益； α 为漂移因子，其值为先验漂移因子和信任度因子的积，为一个对角阵。

$$\begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\hat{d}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -B\alpha u \\ L_1 C_1 & -B\alpha u - L_1 C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -L_2 h_2(\hat{d}) \end{bmatrix} = A_c \begin{bmatrix} d \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -L_2 h_2(\hat{d}) \end{bmatrix} \quad (4-77)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & -B\alpha u \\ L_1 C_1 & -B\alpha u - L_1 C_1 \end{bmatrix} \quad (4-78)$$

A_c 的特征值是有 $-B\alpha K$ 和 $-L_1 C_1$ 的特征值所决定。所以选择合适的 K 、 α 和 L_1 能够使 A_c 的特征值更小甚至为 0。同时利用 Lyapunov 函数可以证明实时补偿系统的稳定性。

取 $V = \begin{bmatrix} d^T & \hat{d}^T \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} d \\ \hat{d} \end{bmatrix}$ ， P 为正定阵

$$\dot{V} = -\begin{bmatrix} d^T & \hat{d}^T \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} d \\ \hat{d} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -h_2^T(\hat{d}) L_2^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} d \\ \hat{d} \end{bmatrix} \quad (4-79)$$

$$A_c^T P + P A_c = -Q \quad (4-80)$$

根据文献[99]的附录 A 的定理， Q 是一个正半定阵，它的零化空间也是 A_c 的零化空间， A_c 的零化空间可以通过以下方式求得：

$$\begin{bmatrix} 0 & -B\alpha u \\ L_1 C_1 & -B\alpha u - L_1 C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{nu} \\ \hat{d}_{nu} \end{bmatrix} = 0 \quad (4-81)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -B\alpha K \hat{d}_{nu} = 0 \\ L_1 C_1 (d_{nu} - \hat{d}_{nu}) = 0 \end{cases} \quad (4-82)$$

由于 $B\alpha K$ 是满秩的，所以有：

$$\hat{d}_{nu} = 0, \quad C_1 d_{nu} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{V}|_{d=d_{nu}, \hat{d}=\hat{d}_{nu}} = 0$$

所以，当状态趋于 0 时，Lyapunov 函数的导数是负半定的，实时补偿系统是稳定的。这表明各个传感器的误差能够减小但不能为 0。当传感器误差位于 C_1 矩阵的零化空间时，传感器误差将停止减小。

4.3.3 仿真

为了验证上述算法的有效性，本章以 6 同类惯性传感器按照正十二面体配置的冗余惯性导航系统为例，其配置图如图 3.2 所示，6 个陀螺的安装轴沿正十二面体法线分布，这样的设置，其中任意 3 个陀螺都能保证系统正常工作。陀螺沿正十二面体各面法线布局时，陀螺敏感轴与正交轴之间的夹角 $\alpha = 31.72^\circ$ 。量测方程为：

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{bmatrix} = H\omega = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4-83)$$

式中, $m_1 \sim m_6$ 分别为 6 个陀螺的测量值; H 为量测矩阵; ω_x 、 ω_y 、 ω_z 分别是正交轴上的三个角速度。该系统是通过 6 个陀螺的测量值来解算正交轴上的 3 个角速度 ω_x 、 ω_y 、 ω_z , 因此有 3 个奇偶向量。

取

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & \cos \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & -\cos \alpha & -\sin \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-84)$$

使得 $VH = 0$

则奇偶向量为 $P = Vm = V[m_1 \ \cdots \ m_n]^T$

表决矩阵为

$$C_v = \begin{bmatrix} C_{v1} \\ C_{v2} \\ C_{v3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & \cos \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & -\cos \alpha & -\sin \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-85)$$

表决向量为 $Q = C_v m = C_v [m_1 \ \cdots \ m_n]^T$

按照表决矩阵的定义, 表决矩阵为主对角线的元素为 0, 其他元素不为 0 的 6×6 矩阵, 其秩为奇偶向量的个数 3。但这里可以将表决矩阵表示为上述形式, 因为实时漂移补偿算法不再用表决矩阵去检测故障传感器, 而用来作为实时补偿系统的输出矩阵。系统的输出方程可表示为:

$$z_k = h(d) = [Z_1 \ Z_2]^T \quad (4-86)$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} C_{vor1} \\ C_{vor2} \\ C_{vor3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{vor1} \\ C_{vor2} \\ C_{vor3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{d1} \\ \vdots \\ m_{d6} \end{bmatrix} \quad (4-87)$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \text{diag}(C_{v1}d, C_{v1}d, C_{v2}d, C_{v2}d, C_{v3}d, C_{v3}d)d \\ &= \begin{bmatrix} C_{v1}dd_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C_{v3}dd_6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-88)$$

仿真中主要考虑如下因素:

考虑噪声为闪烁噪声, 与高斯噪声的差别在于尾部较长, 而其中心区域则与高斯分布形

状类似。目前其建模方法是将高斯噪声和其他分布的噪声合成来实现。本章采用不同方差的高斯噪声加权和来模拟闪烁噪声，其概率密度函数可表示为：

$$P(x) = (1 - \varepsilon)N(x; \mu_1, P_1) + \varepsilon N(x; \mu_2, P_2) \quad (4-89)$$

式中：\$N(x; \mu_1, P_1)\$ 表示均值是 \$\mu_1\$，方差是 \$P_1\$ 的高斯分布在 \$x\$ 处的概率密度；\$\varepsilon \in [0, 1]\$ 为闪烁噪声强度。对闪烁噪声采用矩匹配方法，其中闪烁噪声一二阶矩可分别表示为^[123]：

$$\mu = E[x] = (1 - \varepsilon)\mu_1 + \varepsilon\mu_2 \quad (4-90)$$

$$P = E[(x - \mu)(x - \mu)^T] = (1 - \varepsilon)P_1 + \varepsilon P_2 + P' \quad (4-91)$$

式中：\$P' = (1 - \varepsilon)\mu_1\mu_1^T + \varepsilon\mu_2\mu_2^T - \mu\mu^T\$

假设 6 个陀螺的量测噪声是由 \$N(x; 0, 0.05)\$ 和 \$N(x; 0, 0.01)\$ 合成，其闪烁强度 \$\varepsilon = 0.4\$。仿真时反馈增益设为 40，粒子数设为 100。分别做如下 3 个仿真实验：
仿真实验 1：陀螺 \$m_1\$ 在 2s 时产生为 \$2 - 0.5\sin 0.5t\$ 的漂移，陀螺 \$m_2\$ 在 6s 时产生 \$-e^{0.01t}\$ 的时变漂移，陀螺 \$m_3\$ 在 12s 时产生 2 的恒值漂移，陀螺 \$m_4\$ 在 20s 时产生 -2 的时变漂移，陀螺 \$m_5\$ 在 26s 时产生 2 的时变漂移，陀螺 \$m_6\$ 在 32s 时产生 \$3 - 0.6\sin t\$ 的时变漂移。如图 4.1 所示。

仿真实验 2：陀螺 \$m_1 \square m_4\$、\$m_6\$ 的漂移情况同仿真实验 1，陀螺 \$m_5\$ 在 26s 时产生 \$2 - 0.6\sin t\$ 的时变漂移。如图 4.2 所示。

仿真实验 3：陀螺 \$m_1 \square m_6\$ 的漂移情况同仿真实验 1，反馈增益 \$K\$ 分别为 5，10，40，60，80，120 时陀螺 \$m_2\$ 的输出。如图 4.3 所示。

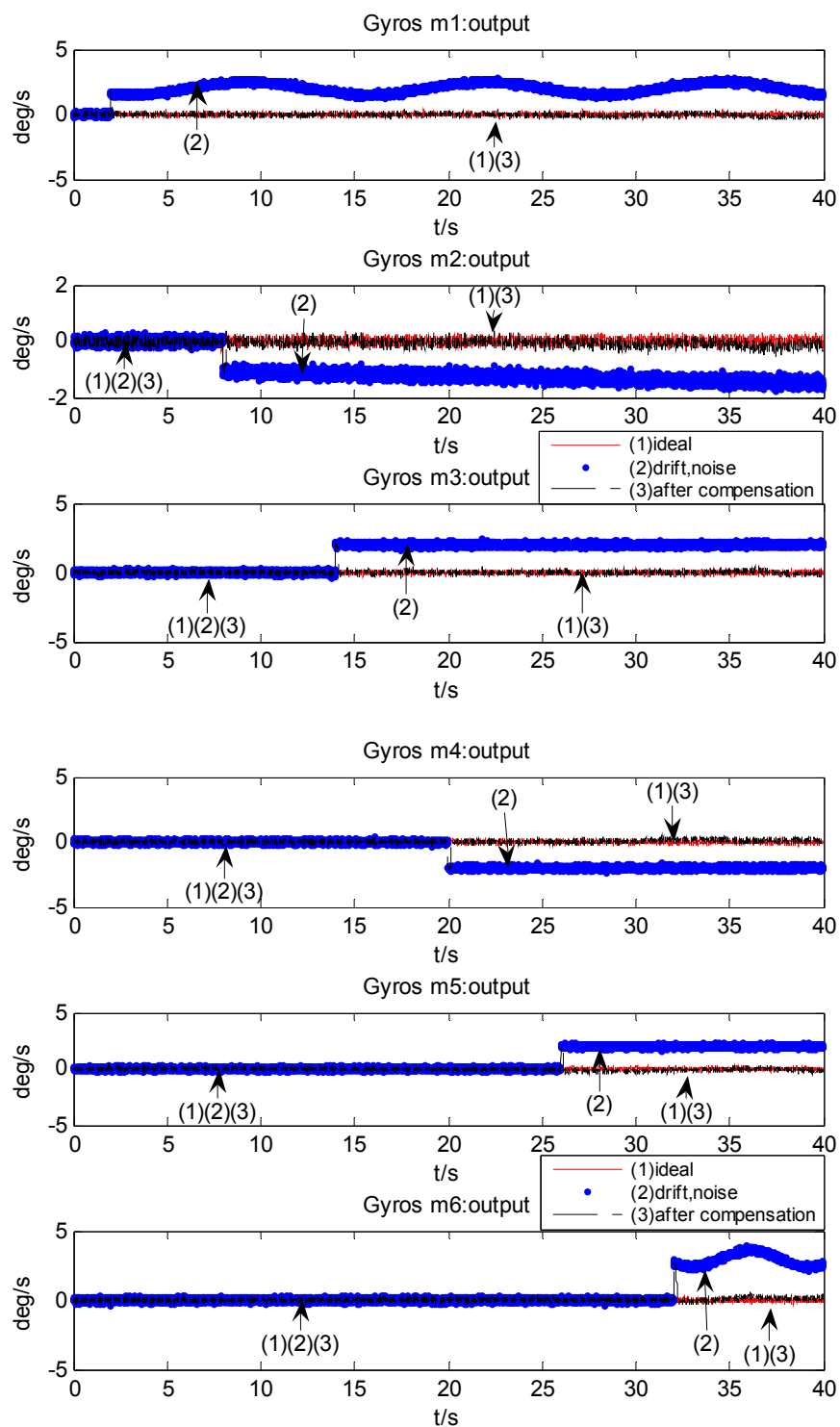


图 4.1 仿真实验 1 中陀螺的输出

Fig.4. 1 Gyro output in experiment 1

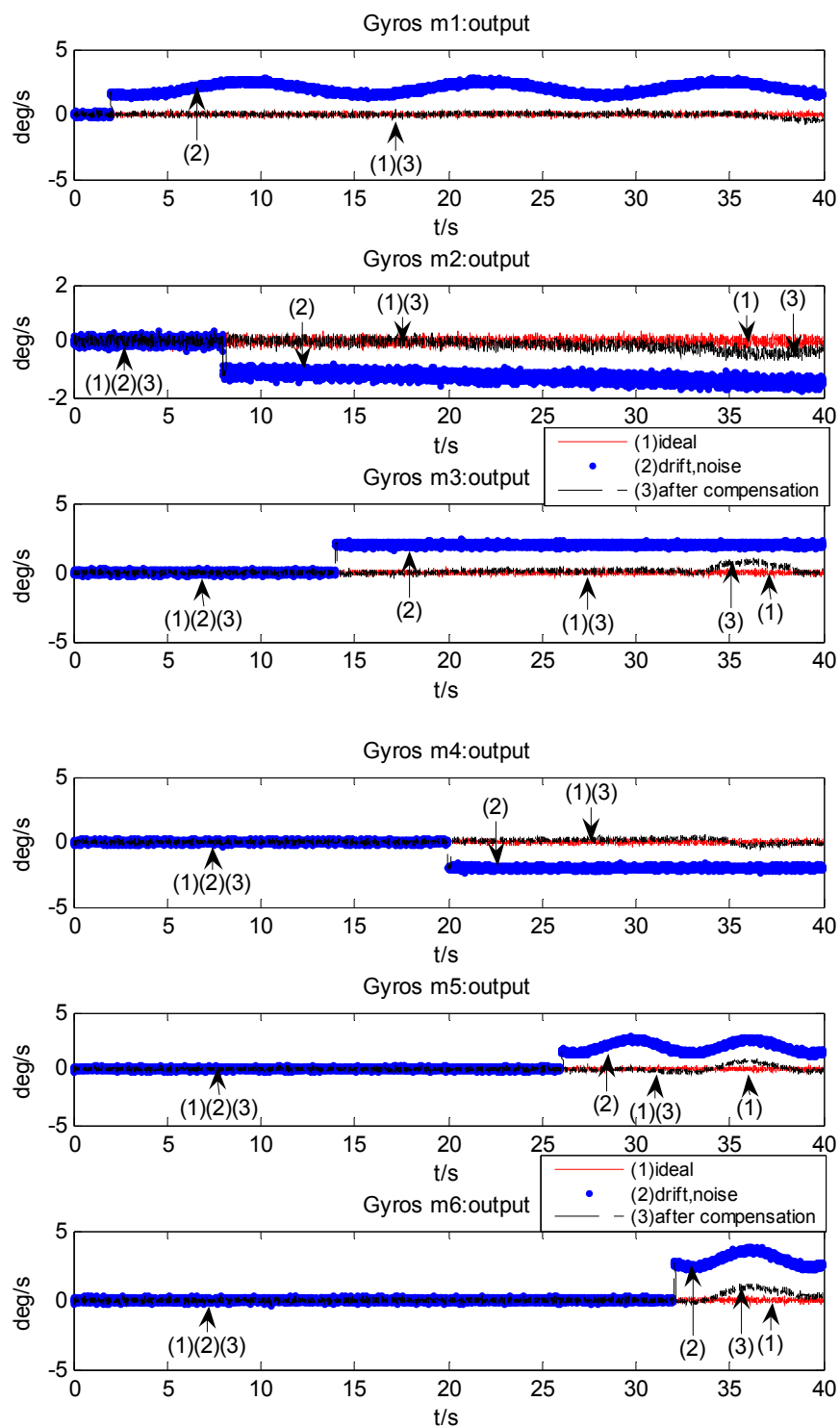


图 4. 2 仿真实验 2 中陀螺的输出

Fig.4. 2 Gyro output in experiment 2

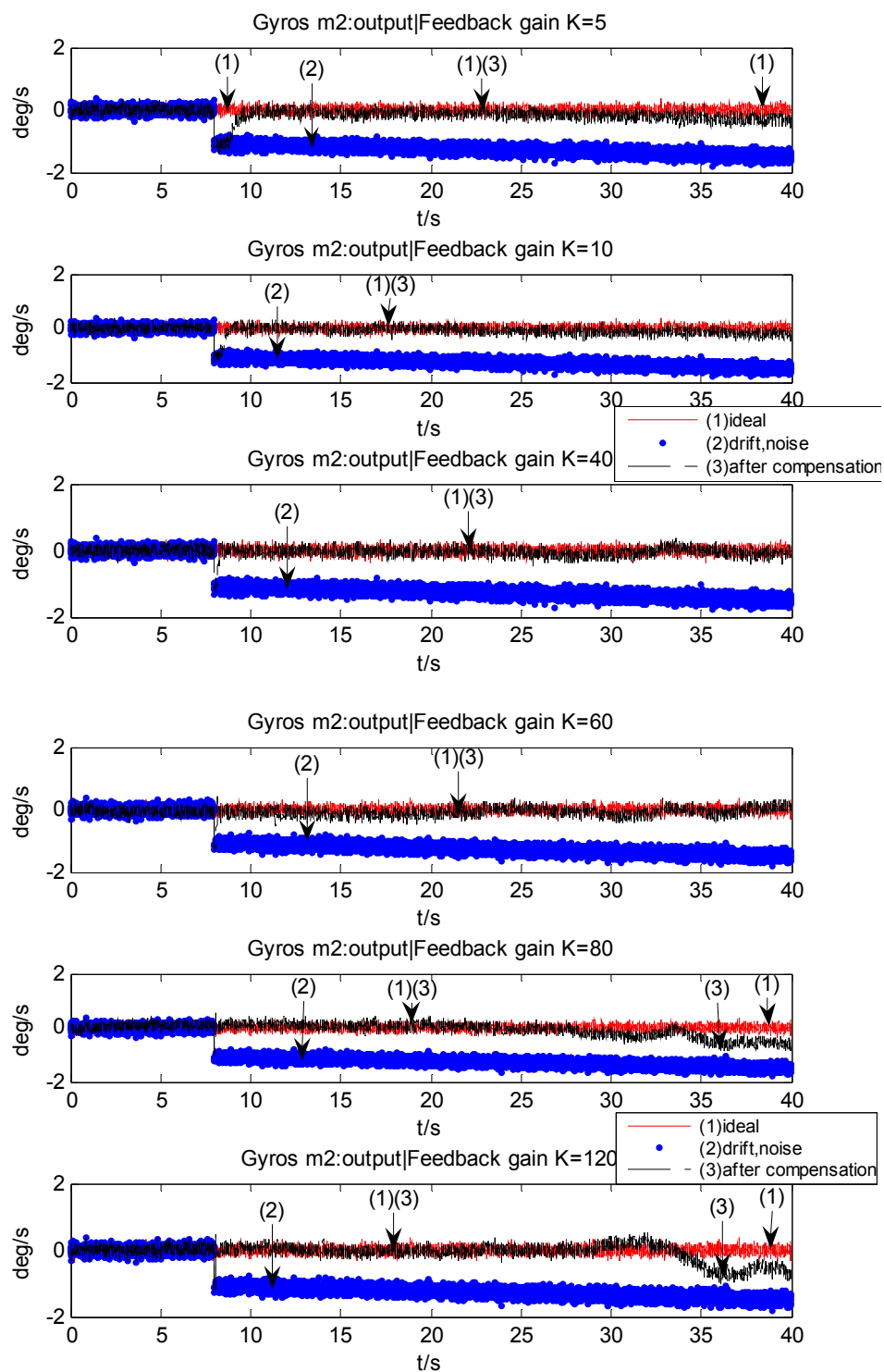


图 4. 3 仿真实验 3 中取不同反馈增益时陀螺 2 的输出

Fig.4. 3 No.2 Gyro output by different feedback gain in experiment 3

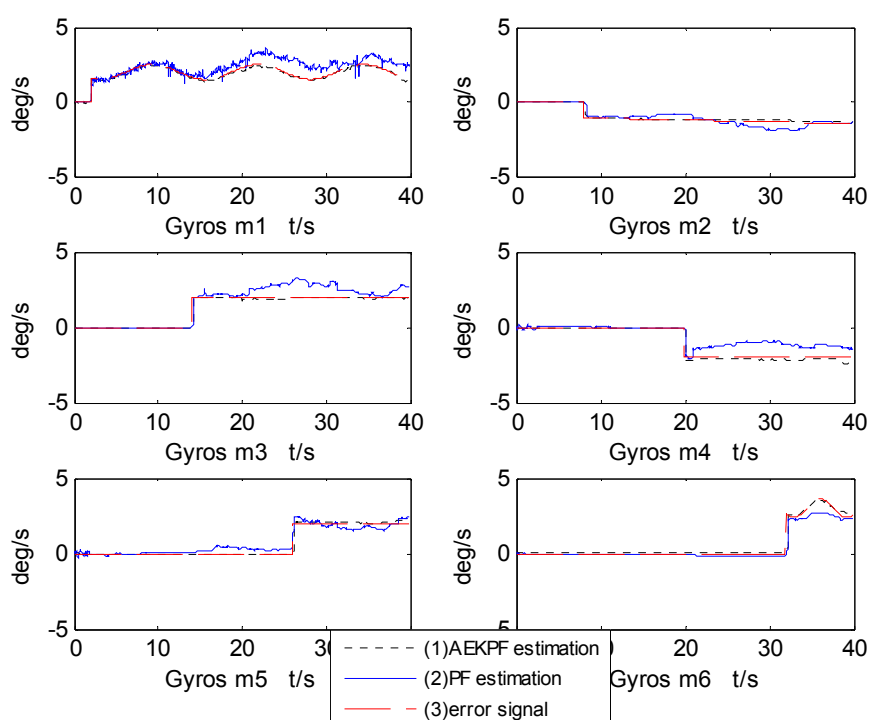


图 4.4 AEKPF 和 PF 的误差估计

Fig.4.4 The estimation of the error signal for the AEKPF and PF

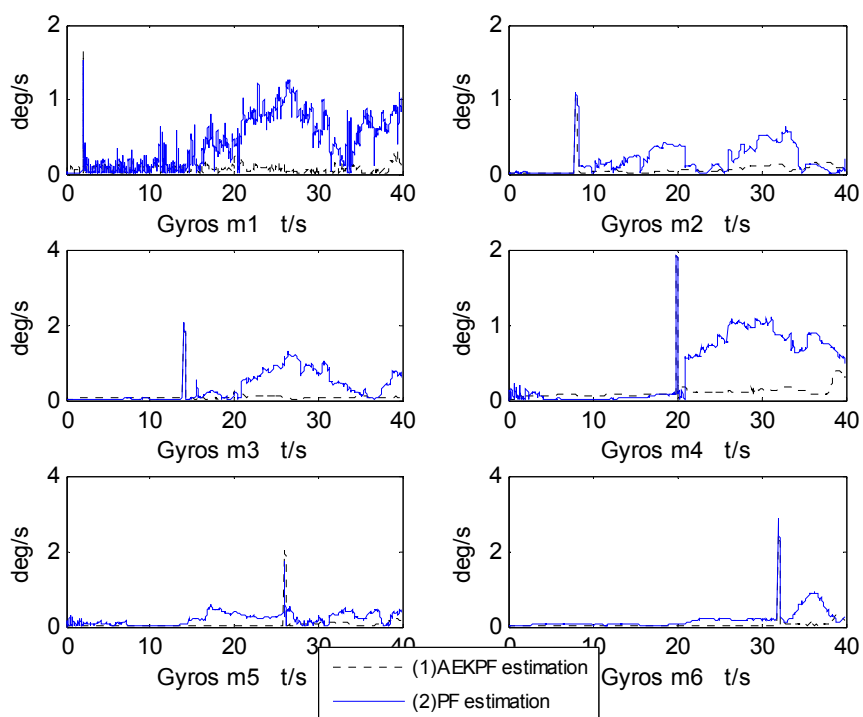


图 4.5 AEKPF 和 PF 的估计误差

Fig.4.5 The estimation error of the error signal for the AEKPF and PF

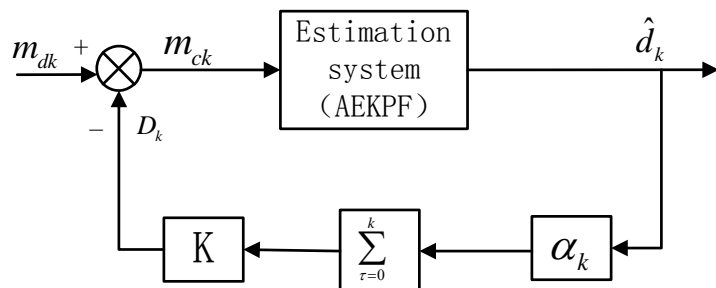


图 4.6 补偿系统的框图

Fig.4.6 The block diagram of compensated system

表 4.3 AEKPF 和 PF 的估计误差

Table 4.3 The average estimation error of the error signal for the AEKPF and PF

		AEKPF	PF
粒子数 N		100	800
平均估计误差	m_1	0.1035	0.2738
	m_2	0.1540	0.3845
	m_3	0.1770	0.2517
	m_4	0.1758	0.2471
	m_5	0.1294	0.2253
	m_6	0.1993	0.2754

4.3.4 讨论分析

为了更好的分析实时补偿方法的性能和仿真结果，现从以下几个方面来讨论：

(1) 漂移对补偿效果的影响

由于实时补偿算法建模时采用的是常值漂移的控制方程 $\dot{d}_i = 0$ ，因此该补偿算法对常值漂移补偿效果比较理想，但这并不代表该补偿算法无法补偿时变漂移，如图 4.1 仿真实验 1 中陀螺的输出中 m_1 发生的时变漂移，该算法能够很好的将它补偿掉。

从图 4.1 中可以看出， $m_1 \sim m_6$ 的故障漂移都被补偿掉了，我们是不是可以得出冗余系统中传感发生的故障漂移，实时补偿算法都能将其补偿掉的结论呢？这个结论显然有问题，从图 4.2 中可以看出，当 $m_1 \sim m_5$ 发生的漂移，实时补偿系统都能够很好的补偿掉，但是当 m_6 发生漂移时，实时补偿算法失效了。也就是说不是所有的传感器发生的所有的漂移，实时补偿算法都能补偿掉。现在我们就来讨论一下什么情况下，传感器发生了漂移，实时补偿算法能够将其补偿掉。对照图 4.1 和图 4.2 这两张图可以发现，当某一个传感器发生漂移时，若未发生漂移的传感器和已补偿了的常值漂移传感器个数不

少于 3 个, 此时实时补偿算法能够将该漂移补偿掉。如图 4.1、图 4.2 中的 $m_1 \square m_3$ 发生漂移时有至少 3 个未发生漂移的传感器, 而 m_4 发生漂移时, 有两个 m_5 、 m_6 未发生漂移的传感器和 m_3 已补偿了的常漂移的传感器, m_5 发生漂移时, 有 m_6 未发生漂移的传感器和 m_3 、 m_4 两个已补偿了的常漂移的传感器, 图 4.1 中的 m_6 发生漂移时, 有 $m_3 \square m_5$ 三个已补偿了常值漂移传感器, 因此实时补偿算法都将这些漂移补偿掉。但是图 4.2 中的 m_6 发生漂移时, 只有 m_3 、 m_4 两个已补偿了常值漂移的传感器, 此时实时补偿算法就失效了。因此我们可以得出结论: 当某一个传感器发生漂移时, 若有不少于 3 个未发生漂移的传感器或已补偿了的常值漂移传感器, 那么实时补偿算法有效。

(2) 反馈增益对补偿效果的影响

反馈增益的取值直接影响到算法的补偿效果, 如图 4.3 所示。当反馈增益较小时, 漂移不能很快的补偿, 如图 4.3 中反馈增益 $K = 5$ 时 m_2 发生漂移后, 经过 3 秒系统才将漂移补偿掉。大反馈增益能够快速的补偿信号的漂移 (快速减小当前误差信号的幅值为将要产生的漂移创造一个稳定环境), 但是大反馈增益使系统对于漂移过于敏感, 补偿系统效果不理想。如图 4.3 中反馈增益 $K = 80, 120$ 时, m_2 补偿后的输出值都漂移了理想值。恰当的反馈增益能够保证系统收敛速度的同时保证补偿精度。因此选取合适的反馈增益值十分重要, 目前反馈增益的取值还是凭借经验。由于反馈增益的选择是一个比较复杂的问题, 目前还没有一个合适的方法来确定反馈增益, 因此本章根据传感器先前的漂移情况和当前的漂移情况来增加和降低实时补偿系统对漂移的敏感度, 即引入漂移因子, 使得补偿系统对反馈增益的依赖程度大大降低。就本章所涉及的补偿系统, 反馈增益 K 在 10-70 之间都能保证系统的补偿效果。如图 4.3 中 $K = 10, 40, 60$, m_2 补偿后的输出都能紧跟理想值。

(3) 误差估计

图 4.4 为自适应扩展卡尔曼粒子滤波器 (AEKPF) 和标准粒子滤波器 (PF) 的误差估计。标准粒子滤波器中的粒子数为 800, 而自适应扩展卡尔曼粒子滤波器的粒子数为 100。如图所示, 当传感器没有发生故障漂移时, AEKPF 和 PF 都能将传感器的漂移正确的估计出来。一旦传感器发生故障漂移, PF 的估计误差明显要比 AEKPF 大的多。图 4.5 展示的是 AEKPF 和 PF 的估计误差。由表 4.3 可知, AEKPF 的平均估计误差为 $[0.1053, 0.1540, 0.1770, 0.1758, 0.1294, 0.1993]$, 而 PF 的平均估计误差为 $[0.2738, 0.3845, 0.2517, 0.2471, 0.2253, 0.2754]$, AEKPF 的估计误差只有 PF 的一半, 而且 AEKPF 的粒子数只有 PF 的 1/8。

实时漂移补偿系统采用状态估计技术实时的估计出传感器的漂移量, 由于量测噪声

和系统噪声的存在以及系统模型的偏差，估计出传感器的漂移量不可能很精确，因此采用实时漂移补偿的系统只能减小误差而不能消除误差。如果要想得到更好的效果，可以采用定时标校等离线补偿方法来进一步减小信号误差。

4.4 本章小结

本章针对冗余惯性导航系统的故障检测和隔离技术进行了讨论，介绍了惯性传感器的故障类型，以及四种常用的故障检测与故障诊断技术。但是这些基于奇偶空间法的故障检测方法都需要设置门限值和观察周期，在这个观察周期内判决函数的输出都超过门限值，才可判断该传感器发生故障，否则容易发生预警。而本章针对这个问题，提出了一种冗余惯性导航系统的改进实时漂移补偿方法。它利用状态估计技术实时的估算出信号的漂移误差值，用状态反馈技术来减小信号误差；它利用自适应扩展卡尔曼粒子滤波器，来解决噪声不满足高斯特性的情况以及模型不准确问题；它引入漂移因子，减弱了实时漂移补偿效果对于反馈增益的依赖性，加大了反馈增益的取值范围。仿真结果表明本章所提出的改进实时补偿方法能够有效的纠正漂移传感器，引入的漂移因子大大降低了实时补偿系统对反馈增益的依赖程度，在满足系统稳定的前提下，即使所有传感器都发生故障漂移，该方法也能有效的补偿故障漂移，保证了冗余惯性导航系统的正常工作，增强了冗余惯性导航系统的鲁棒性和可靠性。

第5章 冗余惯性导航系统的传感器数据融合

5.1 引言

一些对导航精度要求比较高的场合，由于惯性传感器的精度限制，导致惯性导航系统无法使用，尤其是成本较低 MEMS 传感器。为了提高导航精度，很多种方法被提出，其中比较有效的方法是虚拟传感器技术——将多个惯性传感器构成一个传感器矩阵，对传感器矩阵的输出进行数据融合，从而提高导航系统的导航精度。但是这种方式会极大的增加系统的成本和体积，因此限制了它的广泛应用。

本章给出一种冗余传感器最优融合方法，它充分利用冗余惯性导航系统中冗余传感器的量测信息进行数据融合，提高了冗余惯性导航系统的导航性能。至于这种冗余传感器融合方法为什么是最优的，这将 5.2 节内容去解释。这种融合方法将冗余传感器的输出在冗余惯性导航系统配置矩阵的左零空间上的投影作为融合的冗余观测，并对该冗余观测进行最优估计，它的估计值是由最小稳定误差和最小随机误差的传感器的输出组成的，也就是说，它能够攫取各传感器的最优特性。为了解决最优融合算法在系统噪声特性未知的情况下性能急速降低的问题，提出了一种改进的自适应最优融合算法。它将带噪声估计器的强跟踪算法引入最优融合算中，既保证了系统噪声的实时估计，又保证了系统在模型不准条件下的收敛性。当冗余惯性导航系统中的传感器发生故障漂移时，将最优融合算法和故障漂移补偿算法相结合，提出一种最优融合故障漂移补偿算法。该算法首先去除传感器输出的故障漂移，然后将所有传感器的输出进行最优估计，从而获得冗余传感器输出的最优估计值。

本章的内容的安排如下，5.2 节从理论基础到求解过程，详细推导了冗余传感器的最优融合方法（OPT），并从理论上推导了在传感器特性一致的情况下，最小二乘法和最优融合方法是等效的。5.3 节将带噪声估计器强跟踪滤波器和最优融合算法相结合，形成一种改进的自适应最优融合算法。5.4 节将冗余传感器最优融合方法和传感器的故障漂移补偿算法相结合，形成冗余惯性传感器的最优融合和故障漂移补偿算法（OPTDC）。该方法通过冗余传感器的最优融合方法获得最优的惯性量测值（加速度和角速度），从而获得各传感器的故障漂移值，使用故障漂移补偿方法对故障传感器进行补偿，消除故障漂移对系统的影响，最后对所有补偿后传感器的输出最小二乘融合得到最优的融合加速度和角速度。5.5 节中设置了五个仿真实验，对本章所提及的算法进行有效性验证，并进行了分析说明。最后 5.6 节给出本章的结论。

5.2 冗余惯性传感器最优融合方法

众所周知，只要是传感器量测出来的数据都会有偏差，造成这种量测偏差的原因有：一是量测环境的不确定性，即量测噪声；二是传感器本身的原因——传感器故障或模型误差。从这样的量测信息中提取的数据必然存在不确定因数（随机性）。验前信息是根据传感器系统以往行为得到的一种经验信息，它也存在一定的不确定性。通过融合处理可以大大降低数据的不确定性，从而提高传感器量测的准确性。研究表明，经过融合处理的数据比单个传感器的量测信息要准确。

传感器融合的是已成为当今一个研究热点之一，已受到广泛的重视。国内外学者已做了大量的研究，并提出多种融合方法。当前这些融合方法大致可分为两大类：概率统计法和人工智能法。在冗余惯性导航系统中，主要是解决多个同类传感器的数据融合问题，因此一般采用概率统计法来处理传感器量测的不确定信息。在传感器融合中，常用的融合法有：Kalman 滤波、最小二乘法、加权平均法、贝叶斯统计法、假设检验法，统计决策理论以及状态估计法等。本章针对冗余惯性导航系统中的冗余观测信息，给出一种最优的融合方法，它能够攫取各传感器最优的量测值。以下通过将最优融合算法和最小二乘法相比较来突出最优融合算法的性能。

5.2.1 最小二乘估计

设惯性导航系统中有相互独立的 n 个传感器的量测模型为

$$m = Hx + v \quad (5-1)$$

其中 $m = [m_1, \dots, m_i, \dots, m_n]^T$, $H = [H_1, \dots, H_i, \dots, H_n]^T$, $v = [v_1, \dots, v_i, \dots, v_n]^T$

式中： m_i 为第 i 个传感器的量测向量； H_i 为第 i 个传感器的量测矩阵； v_i 为第 i 个传感器的量测噪声向量，包含传感器内部噪声和环境噪声 $E(v_i^2) = \delta_i^2 (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

量测噪声的协方差阵

$$R = \text{diag}([\delta_1^2, \dots, \delta_n^2]) \quad (5-2)$$

定义

$$e_m = m - H\hat{x} \quad (5-3)$$

采用加权最小二乘法从量测向量 m 中估计出状态量 x 的估计量 \hat{x} ，加权最小二乘法的估计准则是式 (5-3) 所示的误差的平方和达到极小。

$$\begin{aligned} J(\hat{x}) &= e_m^T / \delta_1^2 + \dots + e_m^T / \delta_i^2 + \dots + e_m^T / \delta_n^2 = e_m^T R^{-1} e_m \\ &= (m - H\hat{x})^T R^{-1} (m - H\hat{x}) \\ &= m^T R^{-1} m - \hat{x}^T H^T R^{-1} m - m^T R^{-1} H\hat{x} + \hat{x}^T H^T R^{-1} H\hat{x} \end{aligned} \quad (5-4)$$

根据加权最小二乘法的定义 $\frac{\partial J}{\partial \hat{x}} = 0$ ，可得

$$-m^T R^{-1} H + \hat{x}^T H^T R^{-1} H = 0 \quad (5-5)$$

$$H^T R^{-1} m = H^T R^{-1} H \hat{x} \quad (5-6)$$

$$\hat{x} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} m \quad (5-7)$$

5.2.2 冗余惯性传感器最优融合的理论基础

5.2.2.1 问题的提出和成本函数的定义

假定一个系统的动态方程可表示为^[124, 125]：

$$X_{k+1} = A_k X_k + N_k u_k + B_k w_k \quad (5-8)$$

$$Y_k = C_k X_k + M_k u_k + v_k \quad (5-9)$$

$$E\{X_0 X_0^T\} = P_0, \quad E\{w_k w_k^T\} = Q_k, \quad E\{v_k v_k^T\} = R_k$$

其中 X_k 是系统的状态变量，初始协方差为 P_0 ， u_k 是输入向量， Y_k 是观测值， w_k 是系统噪声，其噪声协方差为 Q_k ， v_k 是量测噪声，其协方差为 R_k ， M_k 为配置矩阵，假定它是满秩的，其中 A_k ， N_k ， B_k ， C_k 为系数矩阵。

在冗余惯性导航系统中， Y_k 为整个冗余导航系统的输出（所有加速度计和陀螺仪的量测值）， u_k 是期望被量测的加速度和角速度值， X_k 是惯性传感器的误差向量。针对系统的动态方程 (5-8) 和 (5-9)，用来推导估计问题的最优解的成本函数可表示为：

$$\min_{X_0, w_k, u_k} \|X_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^n \|Y_k - C_k X_k - M_k u_k\|_{R_k^{-1}}^2 \quad (5-10)$$

$$X_{k+1} = A_k X_k + N_k u_k + B_k w_k \quad (5-11)$$

其中 $\|\cdot\|_X^2$ 为加权 L2 范数（即 $\|X\|_Y^2 = X^T Y X$ ）。在 k 时刻， $\{X_k, u_k\}$ 使得式 (5-10) 最小，则系统获得最优解。

5.2.2.2 二次成本函数的最优解

在这一节中利用滤波算法来求解式 (5-10) 的二次成本函数的最优解^[124, 125]。

引理 1

一个优化问题可定义为：

$$\min_{X_0, w_k} \|X_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^n \|Y_k - C_k X_k\|_{R_k^{-1}}^2 \quad (5-12)$$

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k w_k \quad (5-13)$$

在 k 时刻, 式(5-12)的最优解 X_k 与 Kalman 滤波器求解出来的最优值 $\hat{X}_{k|k}$ 是等价的, Kalman 滤波系统定义为:

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k w_k \quad (5-14)$$

$$Y_k = C_k X_k + v_k \quad (5-15)$$

$$E\{X_0 X_0^T\} = P_0, \quad E\{w_k w_k^T\} = Q_k, \quad E\{v_k v_k^T\} = R_k$$

等价关系的证明可参看文献[126]中引理 3. 2. 1-3. 2. 3。

由于式(5-10)中存在多余的 u_k 项, 引理 1 不能直接用来求解式(5-10)。为了满足引理 1 的应用条件, 考虑使用一系列的线性变换来改变式(5-10)的变量形式。如果可以做到这一点, 就可以使用引理 1 中描述的 Kalman 滤波器去求解最优化问题。线性变换的过程如下:

首先, 使用两个连续的线性变换, 将式(5-9)分解成两个观测方程。

1、生成非奇异方阵 $\hat{T}_k = \begin{bmatrix} T_k \\ \bar{T}_k \end{bmatrix}$, 其中 T_k 是 M 的左零空间基, 即 $T_k M = 0$, \bar{T}_k 是矩阵 T_k 正交

补空间, 即 $Range\{\bar{T}_k^T\} = Range\{M\}$ 。

2、用 \hat{T}_k 左乘式(5-9)的两边, 可得两个观测方程:

$$Y_k^1 = T_k Y_k = T_k C_k X_k + T_k v_k \quad (5-16)$$

$$Y_k^2 = \bar{T}_k Y_k = \bar{T}_k C_k X_k + \bar{T}_k M_k u_k + \bar{T}_k v_k \quad (5-17)$$

然后用 LDU 分解 $\hat{T}_k R_k \hat{T}_k^T$, 其中 $R_k = E\{vv^T\}$, 一个二次变换可表示为:

$$V_k = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \underbrace{-\bar{T}_k R_k T_k^T (T_k R_k T_k^T)^T}_{-\tilde{T}_k} & I \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

用 V_k 左乘式(5-16)和(5-17)的两边,

$$V_k \begin{bmatrix} Y_k^1 \\ Y_k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\tilde{T}_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_k^1 \\ Y_k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\tilde{T}_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_k C_k X_k + T_k v_k \\ \bar{T}_k C_k X_k + \bar{T}_k M_k u_k + \bar{T}_k v_k \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

将式(5-19)分开可得,

$$Y_k^1 = T_k Y_k = T_k C_k X_k + \overbrace{T_k v_k}^{v_k^1} \quad (5-20)$$

$$Y_k^3 = Y_k^2 - \tilde{T}_k Y_k^1 = \underbrace{(\bar{T}_k - \tilde{T}_k T_k)}_{T_k^3} C_k X_k + \underbrace{\bar{T}_k M_k}_{M_k^3} u_k + \underbrace{(\bar{T}_k - \tilde{T}_k T_k) v_k}_{v_k^3} \quad (5-21)$$

其中 M_k^3 是一个非奇异矩阵, 而且由于这个二次变换, v_k^1 和 v_k^3 是正交的,

$$E \left\{ \begin{bmatrix} v_k^1 \\ v_k^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k^1 \\ v_k^3 \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} T_k R_k T_k^T & 0 \\ 0 & \bar{T}_k R_k \bar{T}_k^T - \bar{T}_k R_k T_k^T (T_k R_k T_k^T)^{-1} T_k R_k \bar{T}_k^T \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} R_k^1 & 0 \\ 0 & R_k^3 \end{bmatrix} \quad (5-22)$$

由于这个正交特性, 成本函数式(5-10)可重写成:

$$\min_{X_0, w_k, u_k} (\|X_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Y_k^1 - T_k C_k X_k\|_{(R_k^1)^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^n \|Y_k^3 - T_k^3 C_k X_k - M_k^3 u_k\|_{(R_k^3)^{-1}}^2) \quad (5-23)$$

$$X_{k+1} = A_k X_k + N_k u_k + B_k w_k \quad (5-24)$$

令

$$Z_k = Y_k^3 - T_k^3 C_k X_k - M_k^3 u_k \quad (5-25)$$

则

$$u_k = (M_k^3)^{-1} (Y_k^3 - T_k^3 C_k X_k - Z_k) \quad (5-26)$$

式(5-23)和式(5-24)可重写为:

$$\min_{X_0, w_k, Z_k} (\|X_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Y_k^1 - T_k C_k X_k\|_{(R_k^1)^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^n \|Z_k\|_{(R_k^3)^{-1}}^2) \quad (5-27)$$

$$X_{k+1} = A_k X_k + N_k u_k + B_k w_k \quad (5-28)$$

将式(5-26)代入式(5-28)中, 式(5-28)可变为:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= A_k X_k + N_k ((M_k^3)^{-1} (Y_k^3 - T_k^3 C_k X_k - Z_k)) u_k + B_k w_k \\ &= (A_k - N_k (M_k^3)^{-1} T_k^3 C_k) X_k + B_k w_k - N_k (M_k^3)^{-1} Z_k + N_k (M_k^3)^{-1} T_k^3 Y_k \end{aligned} \quad (5-29)$$

为了去掉式(5-29)中的确定性输入 Y_k , 引入以下动态变量:

$$\begin{aligned} X_k &= X_k^e + X_k^N \\ Y_k^1 &= Y_k^e + Y_k^N \end{aligned} \quad (5-30)$$

其中 X_k^N 和 Y_k^N 被定义为:

$$\begin{aligned} X_{k+1}^N &= (A_k - N_k (M_k^3)^{-1} T_k^3 C_k) X_k^N + N_k (M_k^3)^{-1} T_k^3 Y_k \\ Y_k^N &= T_k C_k X_k^N \\ X_0^N &= 0 \end{aligned} \quad (5-31)$$

用 $X_k^e + X_k^N$ 和 $Y_k^e + Y_k^N$ 去代替式(5-27)和(5-29)中的 X_k 和 Y_k^1 , 则对于 X_k^e 和 Y_k^e 的成本函数可以写成:

$$\min_{X_0^e, w_k, Z_k} (\|X_0^e\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Y_k^e - T_k C_k X_k^e\|_{(R_k^1)^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^n \|Z_k\|_{(R_k^3)^{-1}}^2) \quad (5-32)$$

$$X_{k+1}^e = (A_k - N_k (M_k^3)^{-1} T_k^3 C_k) X_k^e + B_k w_k - N_k (M_k^3)^{-1} Z_k \quad (5-33)$$

可看出, 方程(5-32)和(5-33)的形式能够满足引理 1 的要求, 因此可以用引理 1 来直接求取二次成本函数的最优解。方程(5-32)的最优解一旦可以求解, 那么方程(5-10)通过简单的变量变换后也可以获得最优解。因此根据引理 1 可得到下述的引理 2^[125]。

引理 2

1、方程(5-32)、(5-33)的最优的解 \hat{X}_k^e 与系统(5-34)和(5-35)的 Kalman 滤波器的最优解 $\hat{X}_{k|k}^e$ 是等效的。

$$X_{k+1}^e = \overbrace{(A_k - N_k(M_k^3)^{-1}T_k^3C_k)}^{A_k^\#} X_k^e + \overbrace{B_k w_k - N_k(M_k^3)^{-1}Z_k}^{w_k^\#} \quad (5-34)$$

$$Y_k^e = \underbrace{T_k C_k}_{C_k^\#} X_k^e + v_k^1 \quad (5-35)$$

其中 $E\{X_0^e(X_0^e)^T\} = P_0$,

$$E\{w_k w_k^T\} = Q_k ,$$

$$E\{v_k^1(v_k^1)^T\} = T_k R_k T_k^T = R_k^1 ,$$

$$E\{Z_k Z_k^T\} = \bar{T}_k R_k \bar{T}_k^T - \bar{T}_k R_k T_k^T (T_k R_k T_k^T)^{-1} T_k R_k \bar{T}_k^T = R_k^3 .$$

2、最优解 \hat{X}_k 可表示为

$$\hat{X}_k = X_k^N + \hat{X}_k^e \quad (5-36)$$

其中 X_k^N 是方程(5-31)确定系统的状态值。

3、 u_k 的最优估计值表示为

$$\hat{u}_k = (M_k^3)^{-1}(Y_k^3 - T_k^3 C_k \hat{X}_k - \hat{Z}_k) \quad (5-37)$$

由于 \hat{Z}_k 最优解总是为 0，不受时间 k 的约束。因此有

$$\begin{aligned} \hat{u}_k &= (M_k^3)^{-1}(Y_k^3 - T_k^3 C_k \hat{X}_k) \\ &= (M_k^3)^{-1} T_k^3 (Y_k - C_k \hat{X}_k) \end{aligned} \quad (5-38)$$

5.2.2.3 最优解的求解过程

引理 2 看起来比较复杂，其实就是一个基本的工程方法。在求解之前，首先需证明引理 2 中的 $(M_k^3)^{-1}T_k^3$ 项与观测值的加权左伪逆是等效的^[124, 125]。

特性 1

当 R_k 可逆时， $(M_k^3)^{-1}T_k^3$ 与 M_k^3 的加权伪逆等效：

$$\begin{aligned} (M_k^3)^{-1}T_k^3 &= (\bar{T}_k M_k)^{-1}(\bar{T}_k - \tilde{T}_k T_k) \\ &= (\bar{T}_k M_k)^{-1}(\bar{T}_k - \bar{T}_k R_k T_k^T (T_k R_k T_k^T)^{-1} T_k) \\ &= (M_k^T R_k^{-1} M_k)^{-1} M_k^T R_k^{-1} \square M_k^\# \end{aligned} \quad (5-39)$$

证明：

令 $Y = MX + v$ ，其中 v 满足 $N(0, R)$ 的高斯分布， M 是列满秩阵。那么 X 的最小方差估计为

$$\hat{X}_{opt}^1 = (M^T R^{-1} M)^{-1} M^T R^{-1} Y \quad (5-40)$$

对 Y 进行线性变换并不改变其最优解，所以以下的两个线性变换并不会影响 Y 的最优解。

$$1、\hat{T} = \begin{bmatrix} T \\ \bar{T} \end{bmatrix} \text{ 是一个非奇异矩阵，同时有 } Range\{\bar{T}^T\} = Range\{M\} , \quad T\bar{M} = 0 .$$

$$2、\text{ 令 } V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \underbrace{-\bar{T}R^T(TRT^T)^{-1}}_{-\tilde{T}} & I \end{bmatrix},$$

所以有

$$V\hat{T}Y = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\tilde{T} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \bar{T} \end{bmatrix} Y \quad (5-41)$$

式(5-41)可拆分为:

$$\begin{aligned} TY &= TMX + Tv = Tv \\ (\bar{T} - \tilde{T}T)Y &= \bar{T}MX - \tilde{T}TMX + (\bar{T} - \tilde{T}T)v \\ &= \bar{T}MX + (\bar{T} - \tilde{T}T)v \end{aligned} \quad (5-42)$$

其中 $\bar{T}M$ 是一个构造的满秩阵, Tv 与 $(\bar{T} - \tilde{T}T)v$ 正交, 所以另一最优解为

$$\hat{X}_{opt}^2 = (\bar{T}M)^{-1}(\bar{T} - \tilde{T}T)Y \quad (5-43)$$

由于 M 是一个列满秩阵, 所有最优解是唯一的。因此对所有的 Y 都有 $\hat{X}_{opt}^1 = \hat{X}_{opt}^2$,

即

$$(\bar{T}M)^{-1}(\bar{T} - \tilde{T}T) = (M^T R^{-1} M)^{-1} M^T R^{-1} = M^\# \quad (5-44)$$

特性 1 得证。

有了这个等价关系, 引理 2 可重写为引理 3。

引理 3

1、方程(5-10)成本函数的最优解 X_k 可表示为

$$\hat{X}_k = X_k^N + \hat{X}_k^e \quad (5-45)$$

其中 X_k^N 是以下确定系统(5-46)的状态,

$$\begin{aligned} X_{k+1}^N &= (A_k - N_k M_k^\# C_k) X_k^N + N_k M_k^\# Y_k \\ Y_k^N &= T_k C_k X_k^N \\ X_0^N &= 0 \end{aligned} \quad (5-46)$$

\hat{X}_k^e 是系统(5-47)、(5-48)的 Kalman 滤波器的状态估计值。

$$X_{k+1}^e = \overbrace{(A_k - N_k M_k^\# C_k) X_k^e}^{A_k^\#} + \overbrace{B_k w_k - N_k M_k^\# v_k}^{w_k^\#} \quad (5-47)$$

$$\underbrace{T_k Y_k - Y_k^N}_{Y_k^e} = \underbrace{T_k C_k}_{C_k^\#} X_k^e + T_k v_k \quad (5-48)$$

$$E \left\{ \begin{bmatrix} X_0^e \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0^e \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix}, \forall k \quad (5-49)$$

2、方程(5-10)成本函数的最优解 u_k 可表示为

$$\hat{u}_k = M_k^\# (Y_k - C_k \hat{X}_k) \quad (5-50)$$

由于式(5-47)和式(5-48)中 $T_k v_k$ 是与 $N_k M_k^\# v_k$ 正交的, 所以观测噪声和系统噪声是无关的。任何一个 Kalman 滤波器都可以用来解算 \hat{X}_k^e 和 \hat{X}_k , 解算的流程框图如图 5.1 所示。在解算的过程中, 观测 Y_k 的伪逆 $M_k^\# Y_k$ 被用来求解确定系统的状态 X_k^N , 将 $T_k Y_k$ 作为 Kalman 滤波器的观测值, 可得到估计误差状态 \hat{X}_k^e , 则最优解为 $\hat{X}_k = X_k^N + \hat{X}_k^e$ 。

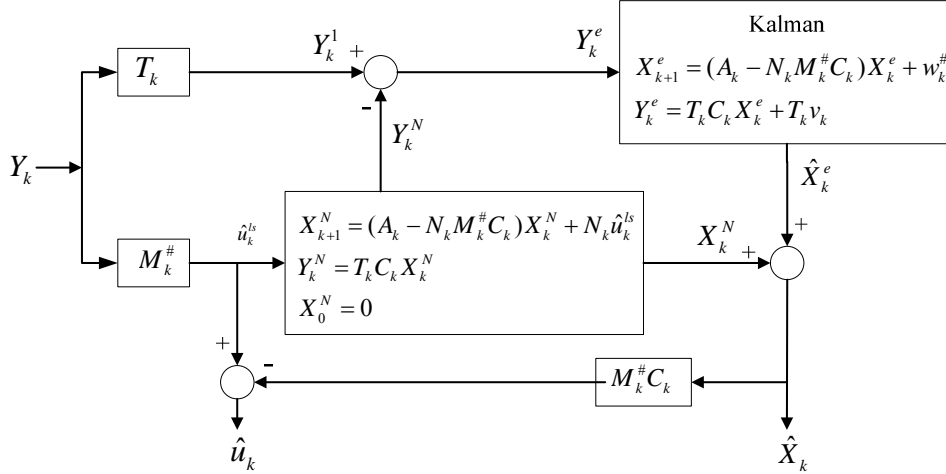


图 5.1 最优融合算法框图

Fig.5.1 The optimal fusion algorithms block diagram

当式(5-8)中 $N_k = 0$, 求解最优解的过程将相对简单得多。因为此时式(5-46)涉及的确部分输入始终为 0, 最优解为 $\hat{X}_k = \hat{X}_k^e$, 系统的模型可重新定义为:

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k w_k \quad (5-51)$$

$$T_k Y_k = T_k C_k X_k + T_k v_k \quad (5-52)$$

$$E \left\{ \begin{bmatrix} X_0 \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix} \quad (5-53)$$

此时最优解的求解过程可大大简化, 计算的流程框图如图 5.2 所示。从该图中可以看出, 最优解 \hat{u}_k 可计算传感器输出 $(Y_k - C_k \hat{X}_k)$ 的最小二乘获得^[125]。

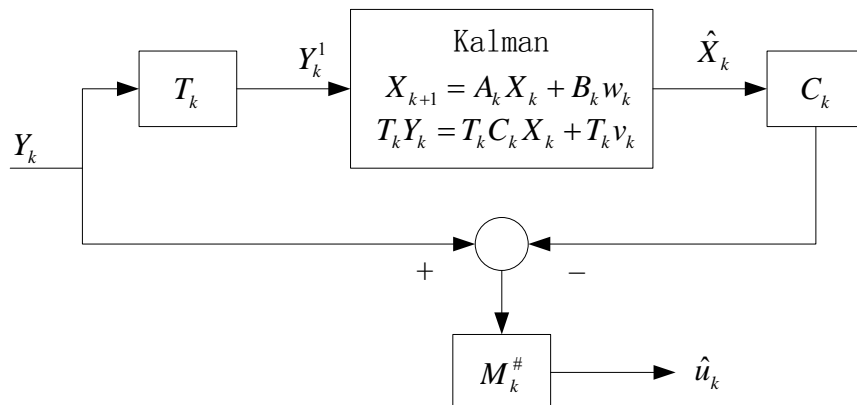


图 5.2 简化的最优融合算法框图

Fig.5.2 The simplified optimal fusion algorithms block diagram

5.2.3 多个相同特性惯性传感器的最优融合方法

当冗余惯性导航系统中所有的惯性传感器的有相同的统计误差模型，所有惯性传感器的输出最小二乘就是最优的融合方法。换句话说，就是图 5.2 中的 Kalman 滤波部分不再需要了，仅需要对传感器的输出做最小二乘， $\hat{u}_k = M^{\#} Y_k$ 。

从图 5.2 可以看出，最优解 \hat{u}_k 只受到传感器误差状态组合 $M^{\#} C_k X_k$ 的影响。要证明有相同误差模型传感器输出的最优融合方法就是对传感器的输出做最小二乘，只需要要证明误差状态组合 $M^{\#} C_k X_k$ 对最优解 \hat{u}_k 无影响，也就是要证明有相同误差模型传感器输出的观测值 $T Y_k$ 与误差状态组合 $M^{\#} C_k X_k$ 正交。

观测值 $T Y_k$ 和误差状态组合 $M^{\#} C_k X_k$ 的协方差可表示为

$$\begin{aligned} E\{M^{\#} C_k X_k (T Y_k)^T\} &= E\{M^{\#} C_k X_k X_k^T C_k^T T^T\} \\ &= M^{\#} C_k E\{X_k X_k^T\} C_k^T T^T \end{aligned} \quad (5-54)$$

定义

$$P_{kl} = E\{X_k X_l^T\} \quad (5-55)$$

假设系统中有 N 个相同特性传感器，则有 $P_{kl} = \text{diag}(^1P_{kl} \cdots ^N P_{kl})$ 。由于传感器的误差模型相同，所以有 $^1P_{kl} = ^2P_{kl} = \cdots = ^N P_{kl}$ ，也就是说 P_{kl} 是一个对角元素相同的对角阵，

$$C_k P_{kl} C_k^T = \gamma_{kl} I \quad (5-56)$$

其中 γ_{kl} 是一个常值标量。将式 (5-56) 代入式 (5-54) 中可得

$$\begin{aligned}
 M^{\#} C_k E\{X_k X_k^T\} C_k^T T^T &= M^{\#} C_k P_{kl} C_k^T T^T \\
 &= M^{\#} \gamma_{kl} I T^T \\
 &= \gamma_{kl} I M^{\#} T^T \\
 &= \gamma_{kl} I (M^T R_k^{-1} M)^{-1} M^T R_k^{-1} T^T \\
 &= \gamma_{kl} I (M^T M)^{-1} (T M)^T = 0
 \end{aligned} \tag{5-57}$$

由式 (5-57) 可看出, 相同误差模型传感器条件下, 观测值 TY_k 总是与误差状态组合 $M^{\#} C_k X_k$ 正交的, 也就是说对于所有的 k 而言 $M^{\#} C_k \hat{X}_k = 0$, 即

$$\hat{u}_k = M^{\#} Y_k - M^{\#} C_k \hat{X}_k = M^{\#} Y_k \tag{5-58}$$

结论得证^[124, 125]。

5.2.4 冗余惯性导航系统的最优融合方法

一个拥有 N 个惯性传感器的冗余惯性导航的系统中, 每一个惯性传感器的输出可表示为^[124, 125]:

$$X_{k+1}^i = A_k^i X_k^i + B_k^i w_k^i \tag{5-59}$$

$$Z_k^i = C_k^i X_k^i + H^i u_k + v_k^i \tag{5-60}$$

$$(E\{X_0^i (X_0^i)^T\} = P_0^i, E\{v_k^i (v_k^i)^T\} = R_k^i, E\{w_k^i (w_k^i)^T\} = Q_k^i)$$

其中 $\{X_k^i\}_{i=1}^N$ 表示第 i 个传感器的输出, $\{X_k^i\}_{i=1}^N$ 是传感器相应的误差状态, $\{v_k^i\}_{i=1}^N$ 是传感器的量测噪声, $\{w_k^i\}_{i=1}^N$ 是系统噪声, $\{H^i\}_{i=1}^N$ 是传感器敏感轴方向的转换向量, u_k 是传感器测量的机动量 (加速度或角速度), $\{C_k^i\}_{i=1}^N$ 和 $\{H^i\}_{i=1}^N$ 都是行向量, $\{A_k^i\}_{i=1}^N$ 是系统矩阵, $\{B_k^i\}_{i=1}^N$ 是恰当维数的矩阵。

将所有传感器的状态合并为一个状态向量, 式 (5-59)、(5-60) 可表示为:

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k w_k \tag{5-61}$$

$$Z_k = C_k X_k + H u_k + v_k \tag{5-62}$$

其中 $X_k = [X_k^1; \dots; X_k^N]^T$ 为冗余传感器的状态向量, $Z_k = [Z_k^1; \dots; Z_k^N]^T$ 为冗余传感器的观测向量, $H = [H^1; \dots; H^N]^T$ 为冗余传感器的配置矩阵, $E\{v_k (v_k)^T\} = \text{diag}([R_k^1, \dots, R_k^N])$ 为冗余传感器的观测噪声的协方差。矩阵 A_k 、 B_k 、 C_k 分别有 A_k^i 、 B_k^i 、 C_k^i 组合而成, 即 $A_k = \text{diag}([A_k^1, \dots, A_k^N])$, $B_k = \text{diag}([B_k^1, \dots, B_k^N])$, $C_k = \text{diag}([C_k^1, \dots, C_k^N])$ 。

冗余惯性导航的最优传感器融合算法有以下几步组成:

- 1、生成非奇异方阵 $T = \begin{bmatrix} T_k \\ \bar{T}_k \end{bmatrix}$, 其中 T_k 是 H 的左零空间基, 即 $T_k H = 0$, \bar{T}_k 是矩阵 T_k 正

交补空间, 即 $\text{Range}\{\bar{T}_k^T\} = \text{Range}\{H\}$ 。

2、用 T 左乘观测方程式 (5-62)，可得 $TZ_k = TC_k X_k + THu_k + Tv_k = TC_k X_k + Tv_k$ 。

由此，系统模型可表示为

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k w_k \quad (5-63)$$

$$TZ_k = TC_k X_k + Tv_k \quad (5-64)$$

3、用 Kalman 滤波器对上述模型进行状态估计

状态一步预测：

$$\hat{X}_{k,k-1} = A_k \hat{X}_{k-1} \quad (5-65)$$

状态估计：

$$r_k = TZ_k - TC_k \hat{X}_{k,k-1} \quad (5-66)$$

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k,k-1} + K_k r_k \quad (5-67)$$

滤波增益矩阵：

$$K_k = P_{k,k-1} (TC_k)^T [TC_k P_{k,k-1} (TC_k)^T + R_k]^{-1} \quad (5-68)$$

一步预测误差方差矩阵：

$$P_{k,k-1} = A_k P_{k-1} A_k^T + Q_{k-1} \quad (5-69)$$

估计误差方差矩阵：

$$P_k = [I - K_k TC_k] P_{k,k-1} [I - K_k TC_k]^T + K_k R_k K_k^T \quad (5-70)$$

4、估算机动量 u_k

通过 Kalman 的滤波，可以求解出最优值 \hat{X}_k 。由于式 (5-62) 中 v_k 满足高斯分布 $N(0, R_k)$ ，矩阵 H 为满秩阵，因此可得 u_k 的加权最小二乘估计为 $\hat{u}_k = (H^T R_k^{-1} H)^{-1} H^T R_k^{-1} (Z_k - C_k \hat{X}_k)$ 。

5.3 冗余惯性传感器的自适应最优融合算法

在 5.2 节中通过数学方法推导了一种的冗余传感器的最优融合算法，该算法中采用的滤波器是标准的 Kalman 滤波器，因此它在滤波器估计之前必须准确获知系统的量测噪声和系统噪声特性，否则它估计性能会受影响，甚至会发散。由于冗余惯性导航系统中，惯性传感器的系统过程噪声受很多因数的影响，其统计特性往往是时变或者未知的，且当建立系统的状态方程后，状态转移矩阵和噪声输入矩阵不可避免地存在一定的误差。这时，可利用虚拟的系统过程噪声对模型的系统状态转移矩阵的误差进行补偿。由于在建立观测方程时，观测矩阵往往是准确的，故不需要引入虚拟的观测噪声。可利用带过程噪声时变估值器的自适应滤波方法对数据进行处理。为了提高滤波的精度和鲁棒性，降低对噪声和初值统计特性的敏感性，并增强对状态突变的跟踪能力，还可以按照

强跟踪滤波算法，在计算一步预测误差的协方差矩阵时引入一个渐消因子，这样既可以在一定程度上抑制滤波器的发散，又可以提高滤波器的精度。

为了完整的说明过程噪声时变强跟踪自适应滤波器的计算步骤，该自适应滤波器算法的计算流程如图 5.3 所示。

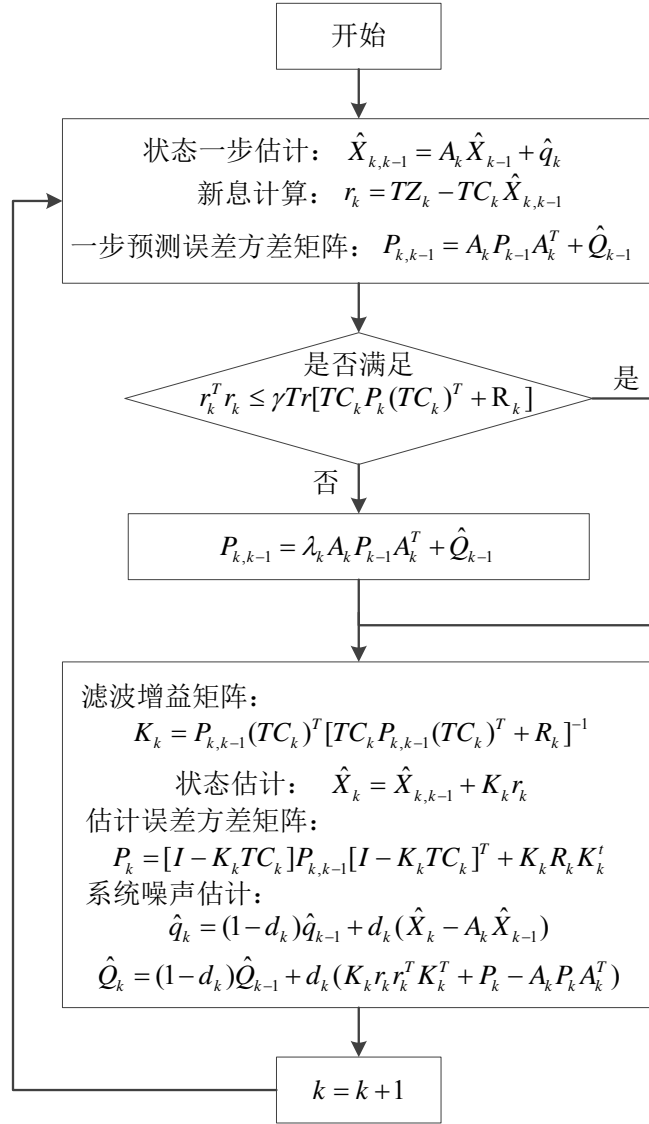


图 5.3 带系统噪声估计器的自适应 Kalman 滤波器的计算流程

Fig.5.3 The adaptive Kalman filter with system noise estimator

其中， $d_k = (1-b)/(1-b^{k+1})$ ， $0 < b < 1$ ， b 为遗忘因子， γ 为可调系数，衰减因子 λ_k 可由式

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda_{0,k}, & \lambda_{0,k} \geq 1 \\ 1, & \lambda_{0,k} < 1 \end{cases} \quad (5-71)$$

其中

$$\lambda_{0,k} = \frac{Tr(N_k)}{Tr(M_k)} \quad (5-72)$$

$$N_k = V_{0,k} - \beta_k R_k \quad (5-73)$$

$$M_k = H_{k+1} P_k H_{k+1}^T \quad (5-74)$$

$$V_{0,k} = \begin{cases} \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_1^T, & k=0 \\ \frac{\rho V_{0,k} + \tilde{Z}_k \tilde{Z}_k^T}{1+\rho}, & k \geq 1 \end{cases} \quad (5-75)$$

弱化因子 β 能够改善状态估计的平滑度, β 值越大估计精度越好, β 值越小跟踪能力越强, 一般情况下 $\beta > 1$ 。这个值一般通过经验和仿真计算得到。

用带系统噪声估计器的自适应 Kalman 滤波器去代替最优融合算法中的标准 Kalman 滤波器, 即形成一种改进的自适应最优融合算法 (AOPT), 其计算框图如图 5.4 所示。

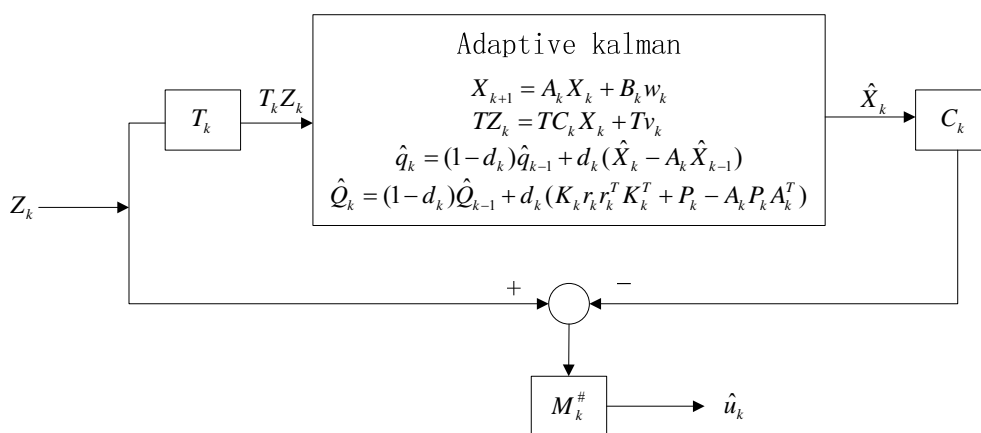


图 5.4 自适应最优融合算法

Fig.5.4 The adaptive optimal fusion algorithms block diagram

5.4 冗余惯性传感器最优融合故障漂移补偿算法

5.4.1 冗余惯性传感器量测装置的误差模型

假设冗余惯性量测装置 (RIMU) 中含有 N 个传感器 (加速度计和陀螺仪), 则 RIMU 的量测方程为

$$m = Mu + v \quad (5-76)$$

其中 m 是传感器的量测值, u 是传感器量测的真实状态量, v 是量测噪声, 一般认为是白噪声。由于传感器的漂移特性, 惯性传感器的输出一般都含有漂移值。将传感器的漂

移从传感器的输出中分离出来，则传感器的输出可表示为：

$$m_d^i = m^i + d^i, i=1, \dots, N \quad (5-77)$$

其中 m_d^i 是包含量测噪声和漂移的传感器输出， m^i 是传感器含有量测噪声的真实量测值。 d^i 是传感器的漂移值。现将漂移 d_i 作为系统的状态，“控制方程”可以写成：

$$\dot{d}^i = \delta(t), i=1, \dots, N \quad (5-78)$$

式中 $\delta(t)$ 是漂移的变化情况。

将式 (5-77) 和式 (5-78) 离散化，则传感器的误差模型的状态方程和量测方程可表示为：

$$d_{k+1}^i = A_k^i d_k^i + B_k^i w_k^i \quad (5-79)$$

$$Z_k^i = C_k^i d_k^i + M^i u_k + v_k^i \quad (5-80)$$

$$(E\{X_0^i (X_0^i)^T\} = P_0^i, E\{v_k^i (v_k^i)^T\} = R_k^i, E\{w_k^i (w_k^i)^T\} = Q_k^i)$$

其中每一个 $\{Z_k^i\}_{i=1}^N$ 表示第 i 个传感器的输出， $\{d_k^i\}_{i=1}^N$ 是第 i 个传感器相应的误差状态， $\{v_k^i\}_{i=1}^N$ 是第 i 个传感器的量测噪声， $\{w_k^i\}_{i=1}^N$ 是系统噪声， $\{M^i\}_{i=1}^N$ 是传感器敏感轴方向的转换向量， u_k 是传感器测量的机动量（加速度或角速度）， $\{A_k^i\}_{i=1}^N$ 是系统矩阵， $\{B_k^i\}_{i=1}^N$ 、 $\{C_k^i\}_{i=1}^N$ 是恰当维数的矩阵。

将所有的状态合并为一个状态向量，则整个 RIMU 的模型可写成：

$$d_{k+1} = A_k d_k + B_k w_k \quad (5-81)$$

$$Z_k = C_k d_k + M u_k + v_k \quad (5-82)$$

其中 $X_k = [d_k^1; \dots; d_k^N]^T$ 为冗余传感器的状态向量， $Z_k = [Z_k^1; \dots; Z_k^N]^T$ 为冗余传感器的观测向量， $M = [M^1; \dots; M^N]^T$ 为冗余传感器的配置矩阵， $E\{v_k (v_k)^T\} = \text{diag}([R_k^1, \dots, R_k^N])$ 为冗余传感器的观测噪声的协方差。矩阵 A_k 、 B_k 、 C_k 分别有 A_k^i 、 B_k^i 、 C_k^i 组合而成，即 $A_k = \text{diag}([A_k^1, \dots, A_k^N])$ ， $B_k = \text{diag}([B_k^1, \dots, B_k^N])$ ， $C_k = \text{diag}([C_k^1, \dots, C_k^N])$ 。

5.4.2 冗余惯性传感器漂移值的最优估计

根据 RIMU 的模型，将 5.2 节中的引理 1 重写为以下形式。

最优化问题可定义为以下形式：

$$\min_{d_0, w_k} \|d_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|w_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^n \|Z_k - C_k d_k\|_{R_k^{-1}}^2 \quad (5-83)$$

$$d_{k+1} = A_k d_k + B_k w_k \quad (5-84)$$

在 k 时刻， d_k 的最优值与 Kalman 滤波器的最优估计值 \hat{d}_k 等价。Kalman 滤波器系统的模型可表示为

$$d_{k+1} = A_k d_k + B_k w_k \quad (5-85)$$

$$Z_k = C_k d_k + v_k \quad (5-86)$$

$$E \left\{ \begin{bmatrix} d_0 \\ w_k \\ v_k \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0^T & w_l^T & v_l^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k \delta_{kl} & 0 \\ 0 & 0 & R_k \delta_{kl} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall k, l \quad (5-87)$$

如果 RIMU 的误差模型 (5-88)、(5-89) 符合引理中的模型定义, 则根据引理可知, 误差模型的最优解 \hat{d}_k 可以获得。但是 RIMU 误差模型中包含一个非随机参数 u_k , 无法直接使用引理来获取最优解。因此对 RIMU 模型进行一系列的线性变换和变量替换, 使得 RIMU 模型满足引理的要求。根据 5.2 节中线性变换的内容, 可将 RIMU 的误差模型重写为:

$$d_{k+1} = A_k d_k + B_k w_k \quad (5-90)$$

$$TZ_k = TC_k d_k + Tv_k \quad (5-91)$$

对该模型进行 Kalman 滤波, 传感器漂移的最优估计值 \hat{d}_k 可以获得, 由于 v_k 满足高斯分布 $N(0, R_k)$, M 为满秩阵, 则 u_k 的最优估计也可表示为

$$\hat{u}_k = (M^T R_k^{-1} M)^{-1} M^T R_k^{-1} (Z_k - C_k \hat{d}_k) \quad (5-92)$$

5.4.3 冗余惯性传感器的实时漂移补偿算法

根据 4.3 节的内容可知, 一旦传感器的漂移值可以被实时获知, 可通过状态反馈技术对传感器的漂移进行实时补偿。

$$\delta d_k = f_k \quad (5-93)$$

$$f_k = -L_k \alpha \sum_{i=0}^k (\hat{d}_i \Delta T_k) \quad (5-94)$$

其中, L_k 是反馈增益, α 是漂移因子, ΔT_k 为采样间隔。误差模型中式 (5-86) 可用式 (5-95) 代替。

$$\tilde{Z}_k = Z_k + f_k = C_k d_k + Mu_k - L_k \alpha \sum_{i=0}^k (\hat{d}_i \Delta T_k) + v_k \quad (5-95)$$

因此补偿系统的误差模型可表示为:

$$d_{k+1} = A_k d_k + B_k w_k \quad (5-96)$$

$$\tilde{Z}_k = C_k d_k + Mu_k - L_k \alpha \sum_{i=0}^k (\hat{d}_i \Delta T_k) + v_k \quad (5-97)$$

冗余惯性导航系统的最优估计和实时漂移补偿算法的结构图如图 5.5 所示。此时, u_k 的最优估计则可表示为

$$\hat{u}_k = (M^T R_k^{-1} M)^{-1} M^T R_k^{-1} (\tilde{Z}_k - C_k \hat{d}_k) \quad (5-98)$$

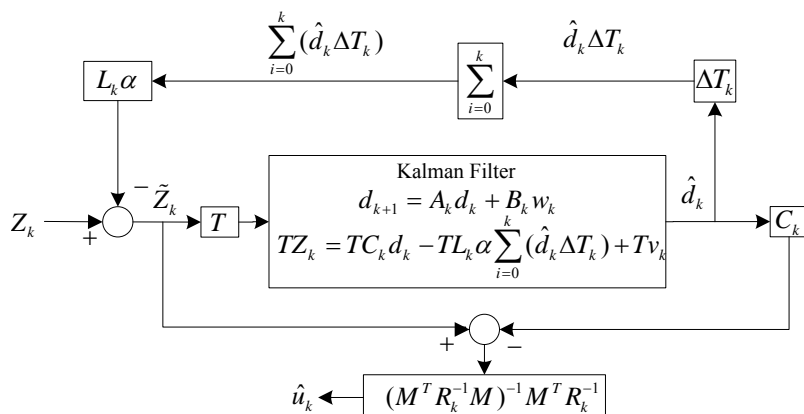


图 5.5 最优估计和实时漂移补偿算的结构图

Fig.5. 5 The optimal estimation and real-time drift compensation block diagram

实时补偿算法的性能很大程度依赖于反馈增益的选择，不恰当的反馈增益会导致补偿系统的失效。根据传感器先前的漂移情况和当前的漂移情况来增加和降低实时补偿系统对漂移的敏感度，即引入漂移因子，使得补偿系统对反馈增益的依赖程度大大降低。漂移因子的选择参见 4.3 节。

5.5 冗余惯性传感器融合的仿真与分析

5.5.1 仿真数据的产生

为了验证本章提出算法的有效性，本章利用 Matlab 中的 INS 工具箱中的轨迹产生器来完成仿真。首先根据仿真所需的机动情况来设定轨迹产生器的参数，轨迹产生器产生相应的位置、加速度、角速度以及载体姿态等信息。此时，除了计算误差和模型误差外，加速度和角速度信息都是不包含任何噪声的真实数据，运行轨迹和载体姿态也是准确值。由于轨迹产生器产生的加速度值是相对于导航坐标系的，而真实的加速度计的输出是相对于载体坐标系而言的，因此仿真前需要将获得导航坐标系中的加速度值转换加速度计的输出值（不含噪声和漂移），通过姿态矩阵计算可获得陀螺仪的输出（不含噪声和漂移）。由于本论文研究是冗余惯性导航系统的问题，根据不同冗余惯性导航系统的传感器的配置结构，需要获得不同配置下的加速度计和陀螺仪的输出。根据轨迹产生器的数据，可计算出载体坐标系下的三个坐标轴上的惯性传感器的输出，将载体坐标系下的三个坐标轴上的传感器的输出乘上传感器配置矩阵，就可得到各冗余配置的传感器的输出（不含噪声和漂移）。在验证各算法时，可相应的在各冗余配置的传感器输出上

添加不同的噪声和漂移，以验证算法的有效性。

仿真轨迹的产生时载体的运动情况如下：

- 1、假设载体在静止情况下，经过 20s 的水平加速；
- 2、加速结束后，进行 30s 的俯仰角为 10° 的向上爬升；
- 3、爬升结束后，进行 15s 的平行飞行；
- 4、向右转弯 60° 飞行；
- 5、24s 的直线飞行；
- 6、向左转弯 90° 飞行；
- 7、30s 的直线飞行；
- 8、直线飞行结束后，进行 30s 的俯仰角为 -5° 的向下俯冲；
- 9、直线飞行 15s。

仿真飞行轨迹如图 5.6 所示。图 5.7、图 5.8 分别展示了载体坐标系下的加速度和角速度的变化情况。

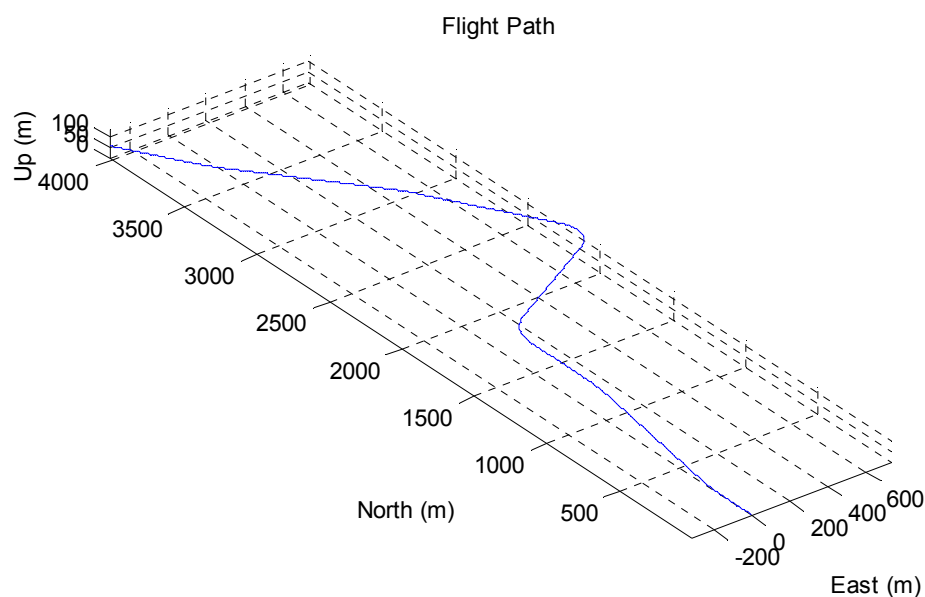


图 5.6 仿真飞行轨迹

Fig.5. 6 The flight path in simulation

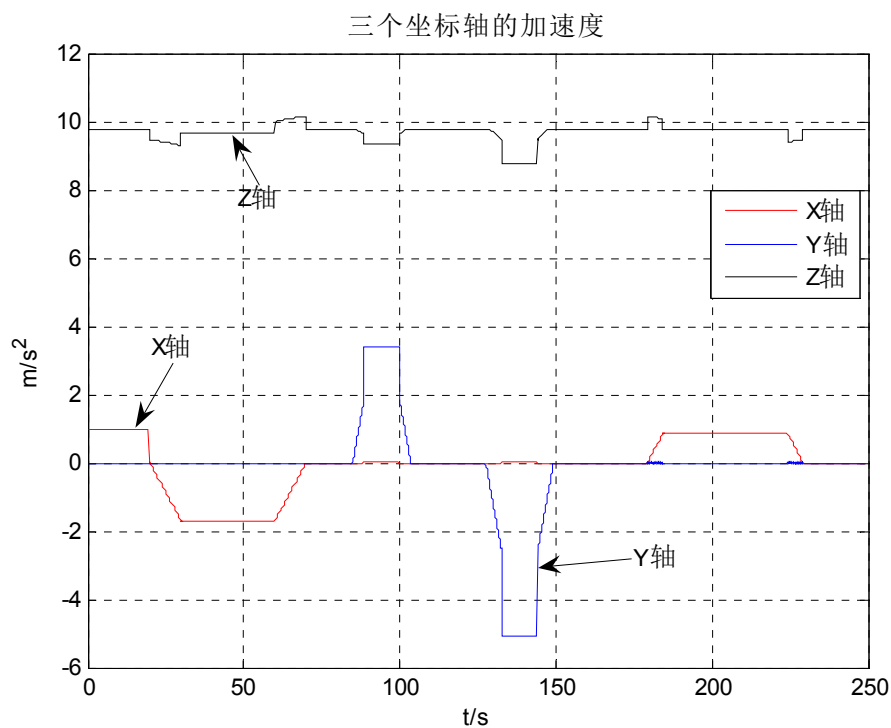


图 5.7 三个坐标轴的加速度值

Fig.5. 7 The acceleration values of three axes

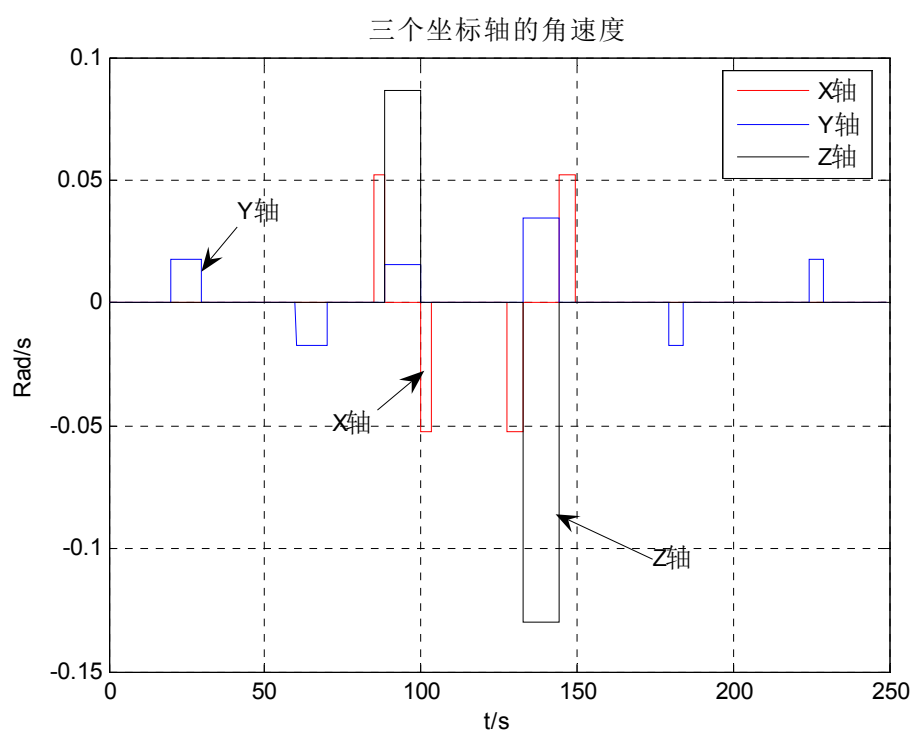


图 5.8 三个坐标轴的角速度值

Fig.5. 8 The angular velocity values of three axes

5.5.2 仿真对象及仿真实验设置

5.5.2.1 仿真对象

根据第二章的内容可知，惯性传感器按照正十二面体配置时，导航系统的故障检测隔离性能（FDI）和导航性能同时达到最优。因此在仿真时也采用这种正十二面体结构，传感器配置图如图 3.2 所示。

冗余惯性导航系统的量测方程可表示为

$$m = Hx + \varepsilon \quad (5-99)$$

其中 x 是角速度和加速度， m 是量测值， H 是传感器的配置矩阵， ε 为量测噪声，一般考虑为均值为 0 的白噪声。

其中

$$H = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (5-100)$$

假设 m 是传感器组的量测向量， u 是包含角速度和加速度的真实值，则 RIMU 的量测方程可重写为：

$$m = \begin{bmatrix} m_\omega \\ m_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_w \\ \varepsilon_a \end{bmatrix} = Mu + v \quad (5-101)$$

其中 m_ω 是六个陀螺的输出向量， m_a 是六个加速度计的输出向量， ω 是 RIMU 量测的真实角速度， a 是量测的真实加速度。 ε_w 是陀螺的量测噪声， ε_a 是加速度计的量测噪声，都考虑为均值为 0 的白噪声。

3D 仿真轨迹采用如图 5.6 的仿真曲线，由上一节的内容可知，仿真过程中载体坐标系下三个坐标轴后的加速度和角速度是可准确获知的，正十二面体配置的惯性传感器的输出为

$$\begin{bmatrix} m_\omega^1 \\ m_\omega^2 \\ m_\omega^3 \\ m_\omega^4 \\ m_\omega^5 \\ m_\omega^6 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_\omega^1 \\ d_\omega^2 \\ d_\omega^3 \\ d_\omega^4 \\ d_\omega^5 \\ d_\omega^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_\omega^1 \\ \varepsilon_\omega^2 \\ \varepsilon_\omega^3 \\ \varepsilon_\omega^4 \\ \varepsilon_\omega^5 \\ \varepsilon_\omega^6 \end{bmatrix} \quad (5-102)$$

$$\begin{bmatrix} m_a^1 \\ m_a^2 \\ m_a^3 \\ m_a^4 \\ m_a^5 \\ m_a^6 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_a^1 \\ d_a^2 \\ d_a^3 \\ d_a^4 \\ d_a^5 \\ d_a^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_a^1 \\ \varepsilon_a^2 \\ \varepsilon_a^3 \\ \varepsilon_a^4 \\ \varepsilon_a^5 \\ \varepsilon_a^6 \end{bmatrix} \quad (5-103)$$

其中 ω_x 、 ω_y 、 ω_z 是由仿真器产生的三轴角速度， a_x 、 a_y 、 a_z 是由仿真器产生的三轴加速度， d_ω^i 是第 i 个陀螺仪的漂移值， d_a^i 是第 i 个加速度计的漂移值， ε_ω^i 是第 i 个陀螺仪的量测噪声， ε_a^i 是第 i 个加速度计的量测噪声， m_ω^i 是第 i 个陀螺仪的输出向量， m_a^i 是第 i 个加速度计的输出向量。

通过 INS 工具箱中轨迹产生器产生出来的三轴的加速度值和角速度值，通过式 (5-102)、式 (5-103) 可得到正十二面体中六个加速度计和六个陀螺仪的输出。至于各传感器的量测噪声和漂移也可通过这两个量测方程添加到各传感器的输出值中，以满足各仿真实验不同要求。

5.5.2.2 仿真实验的设置

不是一般性，假设正十二面体对称配置的六个加速度计和六个陀螺仪的性能参数如表 5.1 所示。在本论文中，假设所有的惯性传感器在系统的坐标原点上，不考虑传感器的臂杆效应，假设传感器发生的故障不是损坏性故障，只是发生了故障漂移，仍能量测载体的运动情况。虽然传感器存在多种误差，但是在仿真时，只考虑传感器的稳定误差和重复性误差（随机漂移），所有的随机噪声都认为是高斯分布的。冗余惯性导航系统传感器的采样率为 20HZ。

表 5.1 惯性传感器的性能参数

Table 5.1 The performance parameters of inertial sensors

陀螺			加速度计		
陀螺	漂移	高斯噪声方差	加速度计	漂移	高斯噪声方差
1	0.001deg/h	0.01deg/h	1	100μg	50μg
2	0.001deg/h	0.01deg/h	2	100μg	50μg
3	0.001deg/h	0.01deg/h	3	100μg	50μg
4	0.001deg/h	0.01deg/h	4	100μg	50μg
5	0.001deg/h	0.01deg/h	5	100μg	50μg
6	0.001deg/h	0.01deg/h	6	100μg	50μg

在本论文中,为了说明算法的性能会模拟个别传感器发生故障漂移,由于仿真时间较短,假设惯性传感器的漂移都为恒值故障漂移,则各传感器的漂移情况如表 5.2 所示:

表 5.2 惯性传感器的漂移及噪声

Table 5.2 The drift and noise of inertial sensors

陀螺			加速度计		
序号	漂移	高斯噪声方差	序号	漂移	高斯噪声方差
1	2deg/h	0.008deg/h	1	300 μ g	45 μ g
2	0.001deg/h	0.01deg/h	2	100 μ g	50 μ g
3	-2deg/h	0.008deg/h	3	100 μ g	50 μ g
4	0.001deg/h	0.01deg/h	4	100 μ g	50 μ g
5	0.001deg/h	0.01deg/h	5	-300 μ g	45 μ g
6	0.001deg/h	0.01deg/h	6	100 μ g	50 μ g

为了充分说明冗余传感器的最优融合算法的性能和特点,特设置以下五个仿真实验来说明。

仿真实验一:假设冗余传感器系统中有传感器发生故障漂移,各传感器的漂移情况如表 5.2 所示,当冗余传感器系统的量测噪声和系统噪声统计特性已知,比较最小二乘法(WLS)和如图 5.2 所示的最优融合算法(OPT)的性能。

仿真实验二:假设冗余传感器系统中有传感器发生故障漂移,各传感器的漂移情况如表 5.2 所示,当冗余传感器系统的量测噪声统计特性已知,而系统噪声未知时,比较最小二乘法(WLS)和如图 5.2 所示的最优融合算法(OPT)的性能。

仿真实验三:假设冗余传感器系统中有传感器发生故障漂移,各传感器的漂移情况如表 5.2 所示,当冗余传感器系统的量测噪声统计特性已知,而系统噪声未知时,比较最优融合算法(OPT)和如图 5.4 所示的自适应最优融合算法(AOPT)的性能。

仿真实验四:假设冗余传感器系统中有传感器发生故障漂移,各传感器的漂移情况如表 5.2 所示,冗余传感器系统的量测噪声和系统噪声统计特性已知,比较最小二乘法(WLS)、故障检测与隔离法(FDI)和如图 5.5 所示的最优融合故障漂移补偿算法(OPTDC)的性能。

仿真实验五：假设冗余传感器系统中没有传感器发生故障漂移，各传感器的漂移情况如表 5.1 所示，冗余传感器系统的量测噪声和系统噪声统计特性已知，所有的传感器只存在一定恒值偏置，比较最小二乘法（WLS）和如图 5.5 所示的最优融合故障漂移补偿算法（OPTDC）的性能。

5.5.3 仿真与分析

5.5.3.1 仿真实验一的仿真与分析

冗余惯性量测装置的系统方程可表示为

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k w_k \quad (5-104)$$

$$Z_k = C_k X_k + M u_k + v_k \quad (5-105)$$

其中系数矩阵 A_k 、 B_k 、 C_k 都是相应维数的单位阵， M 、 Z_k 如式 (5-101) 中定义。

根据 5.2 节的内容可知，式 (5-101) 中的配置矩阵 M 的左零空间 T 为

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{bmatrix} \quad (5-106)$$

$$\text{其中 } T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & \cos \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & -\cos \alpha & -\sin \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 使得 } TM = 0。$$

由于在仿真实验一中假设冗余传感器系统中有传感器发生故障漂移，各传感器的漂移情况如表 5.2 所示，当冗余传感器系统的量测噪声和系统噪声统计特性已知，系统的误差模型参数如下：

$$A_k = B_k = C_k = I_{12 \times 12} \quad (5-107)$$

$$E\{vv^T\} = R$$

$$R = \text{diag}([R_\omega, R_a])$$

$$R_\omega = \text{diag}([8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}]) \quad (5-108)$$

$$R_a = \text{diag}([2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}])$$

$$E\{ww^T\} = Q$$

$$Q = \text{diag}([Q_\omega, Q_a])$$

$$Q_\omega = \text{diag}([2.3 \times 10^{-10}, 2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-10}, 2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-11}]) \quad (5-109)$$

$$Q_a = \text{diag}([1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-6}])$$

$$P = \text{diag}([9.4 \times 10^{-11}, 2.4 \times 10^{-17}, 9.4 \times 10^{-11}, 2.4 \times 10^{-17}, 2.4 \times 10^{-17}, 2.4 \times 10^{-17}, 8.6 \times 10^{-6}, 9.6 \times 10^{-7}, 9.6 \times 10^{-7}, 9.6 \times 10^{-7}, 8.6 \times 10^{-6}, 9.6 \times 10^{-7}]) \quad (5-110)$$

分别利用最小二乘法（WLS）和冗余传感器最优融合算法（OPT）去处理惯性传感器的输出数据，并通过配置矩阵计算出三个坐标轴上加速度误差和角速度误差，如图 5.9

和图 5.10 所示。由图 5.9 可看出, 两种融合算法处理后, 在 X 轴上两种融合算法的加速度误差值基本一致, 在 Y 轴上 OPT 的加速度误差值略小于 WLS 的误差值, 在 Z 轴上两种融合算法的加速度误差幅值基本相等。由图 5.10 可看出, 两种融合算法处理后, 在 X、Z 轴上 OPT 的角速度误差值略小于 WLS 的误差值, 在 Y 轴上两种融合算法的角速度误差值基本一致。分析这两张图可知, 两种融合算法处理后, 加速度和角速度都存在误差, 但总体上 OPT 的加速度和角速度的误差要小于 WLS 的。

将两个算法处理过的加速度值和角速度值分别送入惯性导航算法中进行导航计算得到如图 5.11、图 5.12 的位置误差和如图 5.13 的飞行轨迹。由这三张图可看出, 经过 OPT 处理后的导航位置误差要明显小于 WLS 的位置误差。导航结束时, OPT 处理的位置误差为 $[61.6749, 1.2927, -22.3479]$, 而 WLS 的位置误差为 $[154.0325, 13.4386, 24.9714]$ 。很明显, OPT 的经度误差只有 WLS 的一半, OPT 的纬度误差要比 WLS 的纬度误差要小得多, 而两种算法的高度误差则相似。由此可得出结论, 在冗余传感器系统的量测噪声和系统噪声统计特性已知时, 最优融合算法 (OPT) 要比最小二乘法 (WLS) 要优越。究其原因, 最小二乘法只对信号做了一个加权平均, 它对含有随机噪声信号比较有效, 但是它含有稳定误差的信号则无能为力; 而最优融合算法能够组合各信号中最小的随机噪声和最小的稳定误差, 也就是说它能够攫取到各信号的最优值。

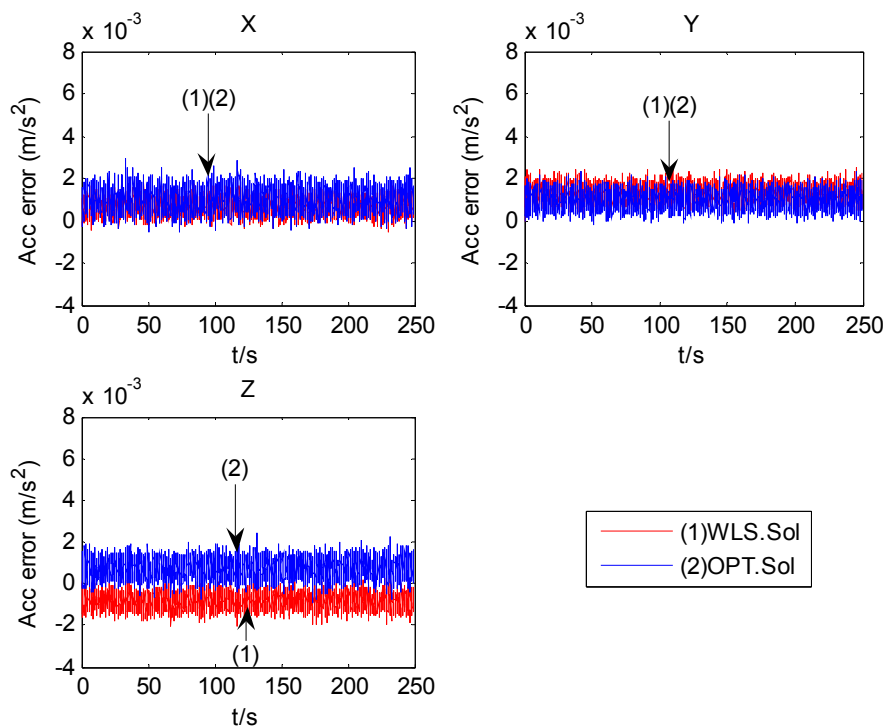


图 5.9 仿真实验一中两种融合算法处理后的加速度误差

Fig.5. 9 The acceleration errors of two fusion algorithms in experiment 1

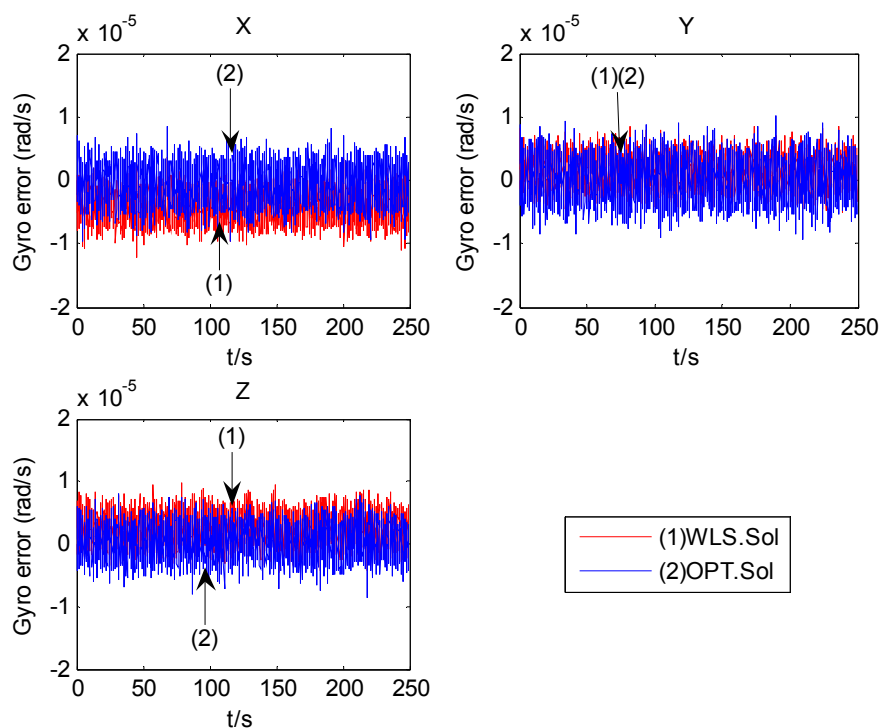


图 5.10 仿真实验一中两种融合算方法处理后的角速度误差

Fig.5. 10 The angular velocity errors of two fusion algorithms in experiment 1

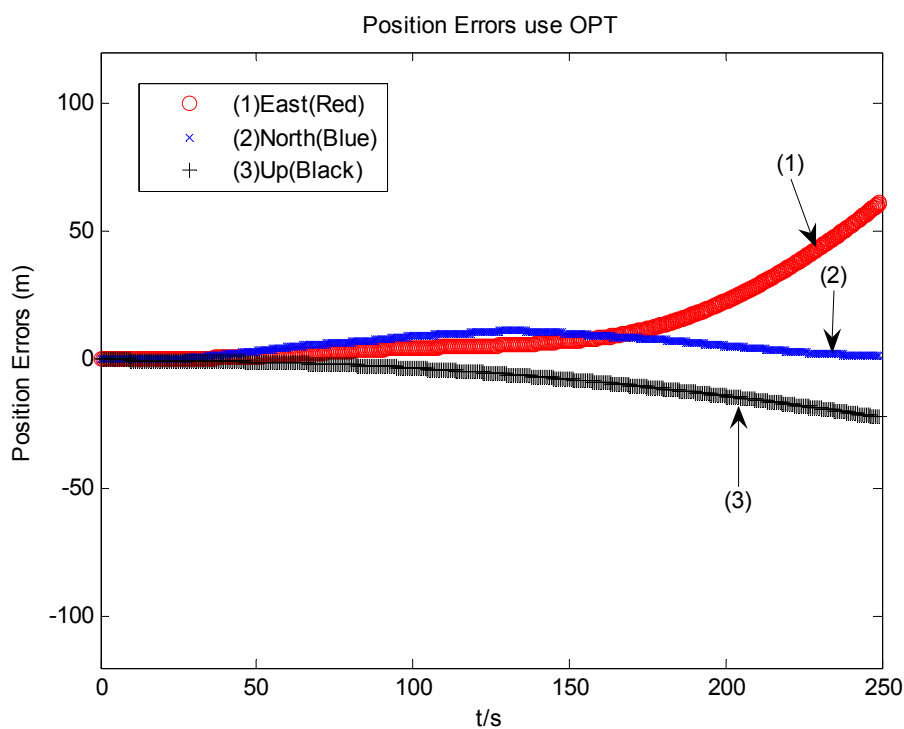


图 5.11 仿真实验一中最优融合算法的位置误差

Fig.5.11 The position errors of optimal fusion algorithm in experiment 1

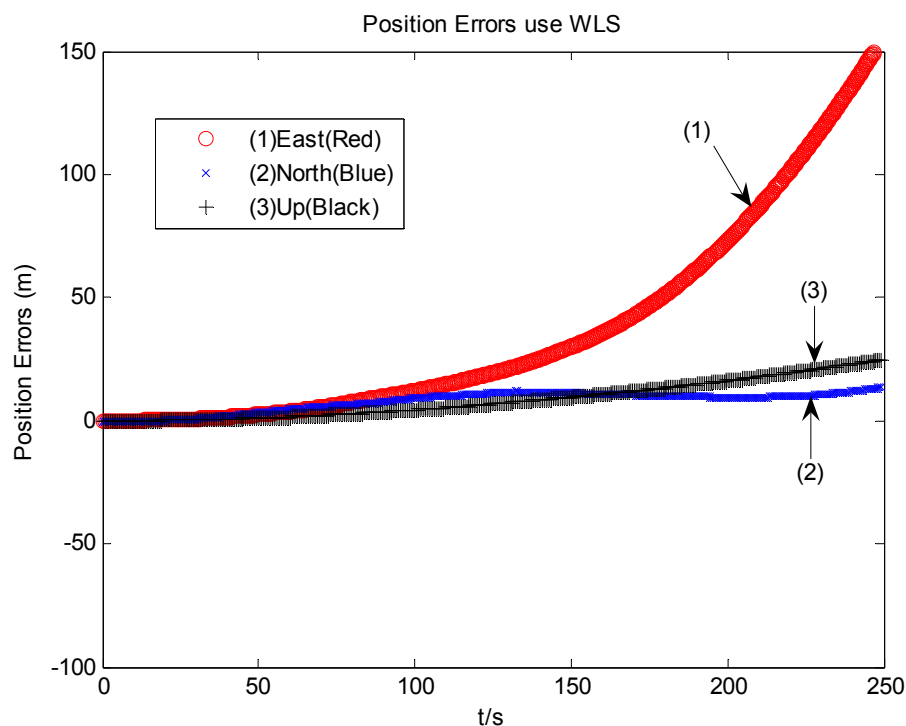


图 5.12 仿真实验一中最小二乘法的位置误差

Fig.5. 12 The position errors of weighted least squares algorithm in experiment 1

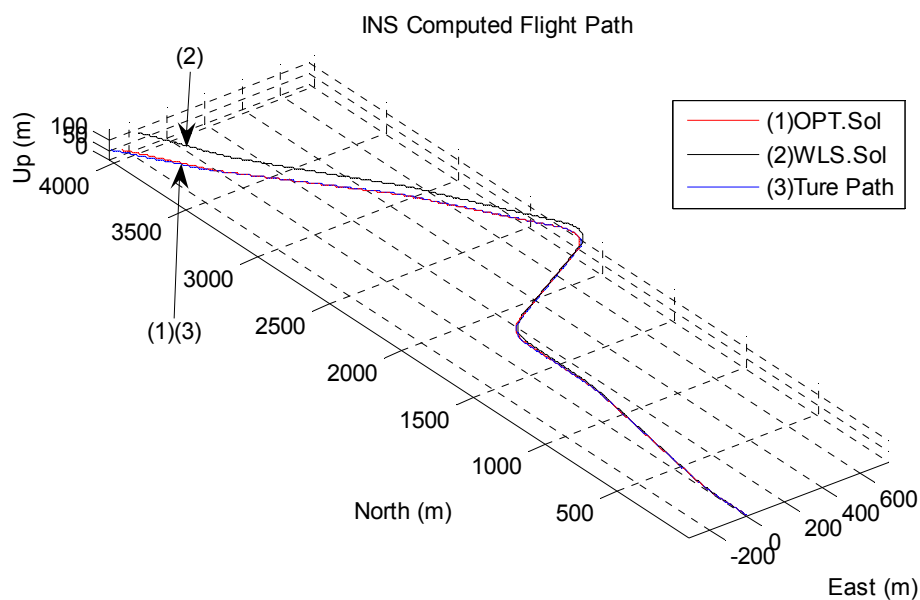


图 5.13 仿真实验一中两种融合算法的飞行轨迹

Fig.5. 13 The flight paths of two fusion algorithms in experiment 1

5.5.3.2 仿真实验二的仿真与分析

冗余惯性量测装置的误差模型、配置矩阵 M ，及其配置矩阵 M 的左零空间 T 都同仿真实验一。由于在仿真实验二中假设冗余传感器系统中有传感器发生故障漂移，各传感器的漂移情况如表 5.2 所示，当冗余传感器系统的量测噪声统计特性已知，但系统噪声未知时，并假设所有加速度计和陀螺仪的量测噪声特性和系统噪声特性相同，系统噪声的协方差值都设为一样，则系统的误差模型参数可设置如下：

$$A_k = B_k = C_k = I_{12 \times 12} \quad (5-111)$$

$$\begin{aligned} E\{vv^T\} &= R \\ R &= \text{diag}([R_w, R_a]) \end{aligned} \quad (5-112)$$

$$R_w = \text{diag}([8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}])$$

$$R_a = \text{diag}([2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}])$$

$$\begin{aligned} E\{ww^T\} &= Q \\ Q &= \text{diag}([Q_w, Q_a]) \\ Q_w &= \text{diag}([2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-11}]) \end{aligned} \quad (5-113)$$

$$Q_a = \text{diag}([1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}])$$

$$\begin{aligned} P &= \text{diag}([9.4 \times 10^{-17}, 2.4 \times 10^{-17}, 9.4 \times 10^{-17}, 2.4 \times 10^{-17}, 2.4 \times 10^{-17}, 2.4 \times 10^{-17}, \\ &\quad 8.6 \times 10^{-7}, 9.6 \times 10^{-7}, 9.6 \times 10^{-7}, 9.6 \times 10^{-7}, 8.6 \times 10^{-7}, 9.6 \times 10^{-7}]) \end{aligned} \quad (5-114)$$

分别利用最小二乘法（WLS）和冗余传感器最优融合算法（OPT）去处理惯性传感器的输出数据，并通过配置矩阵计算出三个坐标轴上加速度误差和角速度误差，如图 5.14 和图 5.15 所示。从这两张图中可看出两种算法处理后的加速度和角速度相互重叠在一起，也就是说两种算法处理的结果一致的。再将两个算法处理过的加速度值和角速度值分别送入惯性导航算法中进行导航计算得到如图 5.16、图 5.17 的位置误差和如图 5.18 的飞行轨迹。由这三中图看出，经过两种融合算法处理后的导航位置误差和飞行轨迹很接近。导航结束时，最优融合算法处理后的位置误差为[155.0342, 15.3635, 24.5445]，最小二乘法处理后的导航位置误差[154.8599, 15.0609, 24.5098]，这两个位置误差值也很接近。由此可得出结论，在冗余传感器系统的量测噪声统计特性已知，而系统噪声特性未知时，或者最优融合算法系统噪声特性设置不合理时，最优融合算法就不再是最优的，它无法攫取到各传感器的最优值了。因此设置合理的系统噪声协方差矩阵 Q 值，对最优融合算法的性能至关重要。而在很多情况下，系统的噪声特性是无法准确获知的，即使在初期能够获知，由于冗余惯性导航系统中，惯性传感器的系统过程噪声受很多因数的影响，或者由于运行环境的改变，其统计特性往往是时变的，且当建立系统的状态方程后，状态转移矩阵和噪声输入矩阵不可避免地存在一定的误差。因此需要一种能够实时

估算出系统噪声协方差的算法,同时不会因为噪声协方差不准而导致滤波的发散。在 5.3 节中提出了一种将带过程噪声时变估计器的强跟踪滤波方法和最优融合算法有机的结合在一起,形成一种改进的自适应最优融合算法(AOPT)。在接下来的仿真实验三中,将通过仿真实验来验证自适应最优融合算法(AOPT)的有效性。

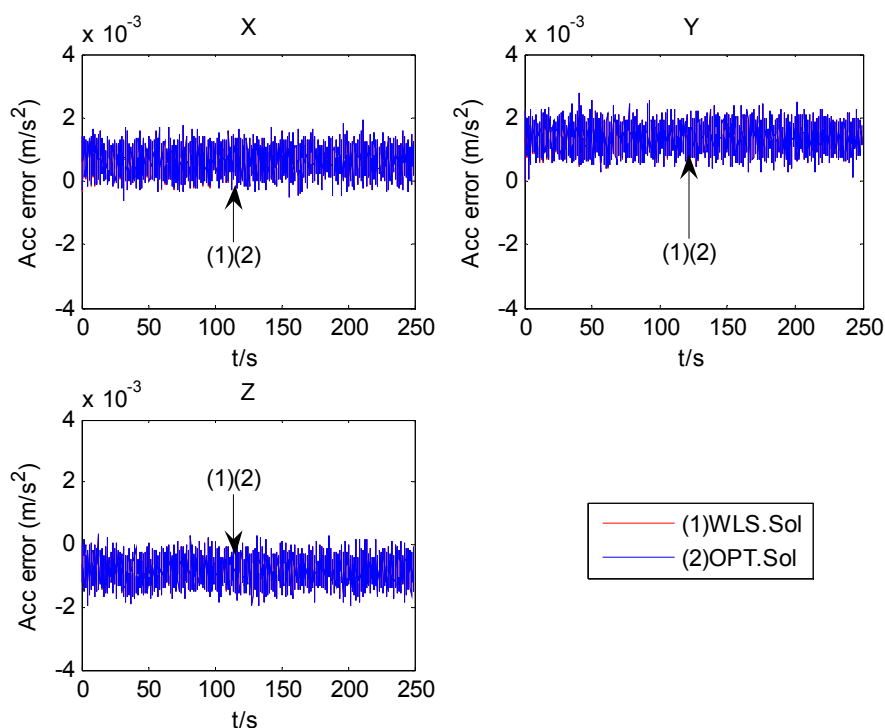


图 5.14 仿真实验二中两种融合方法处理后的加速度误差

Fig.5. 14 The acceleration errors of two fusion algorithms in experiment 2

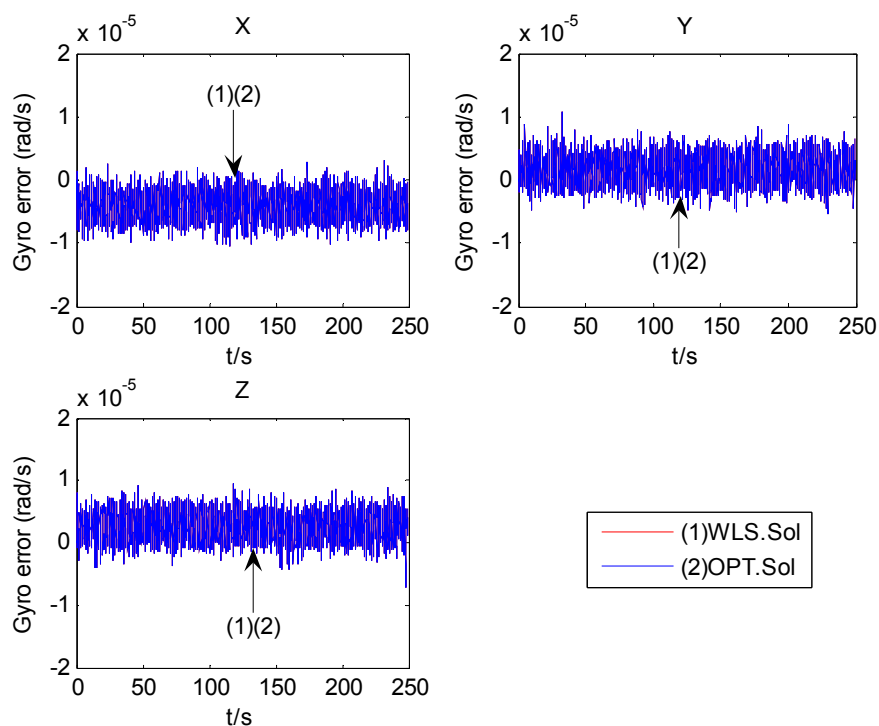


图 5.15 仿真实验二中两种融合方法处理后的角速度误差

Fig.5. 15 The angular velocity errors of two fusion algorithms in experiment 2

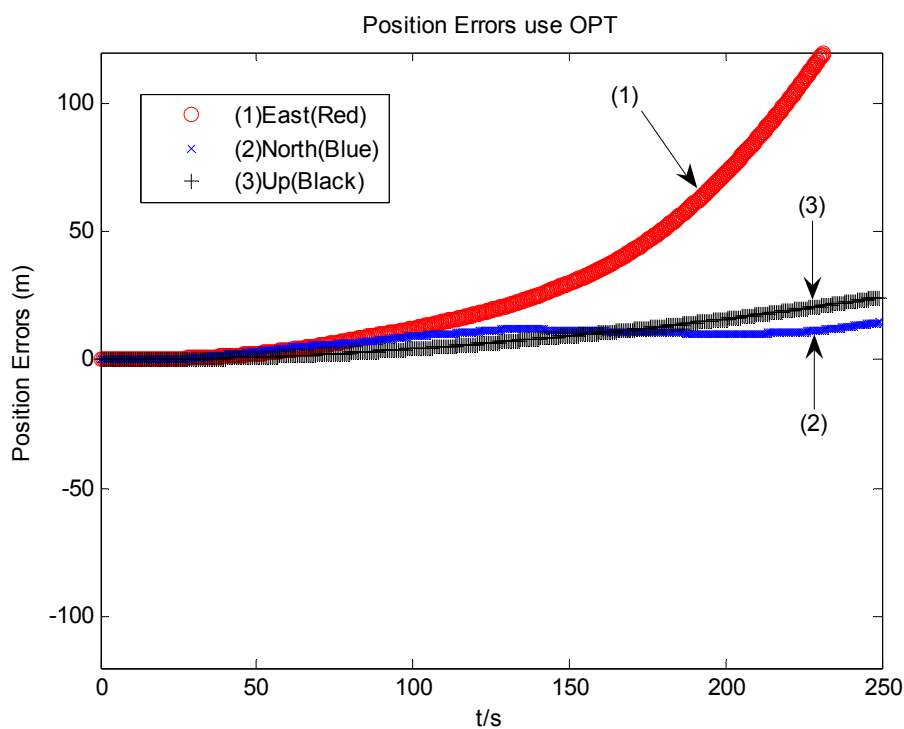


图 5.16 仿真实验二中最优融合方法处理后的位置误差

Fig.5. 16 The position errors of optimal fusion algorithm in experiment 2

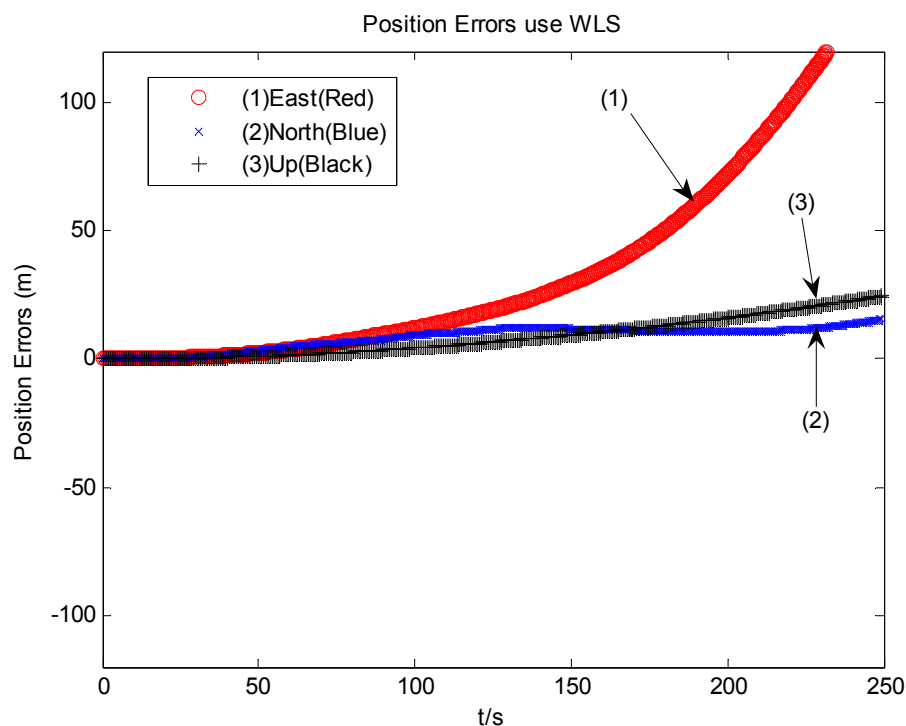


图 5.17 仿真实验二中最小二乘法处理后的位置误差

Fig.5. 17 The position errors of weighted least squares algorithm in experiment 2

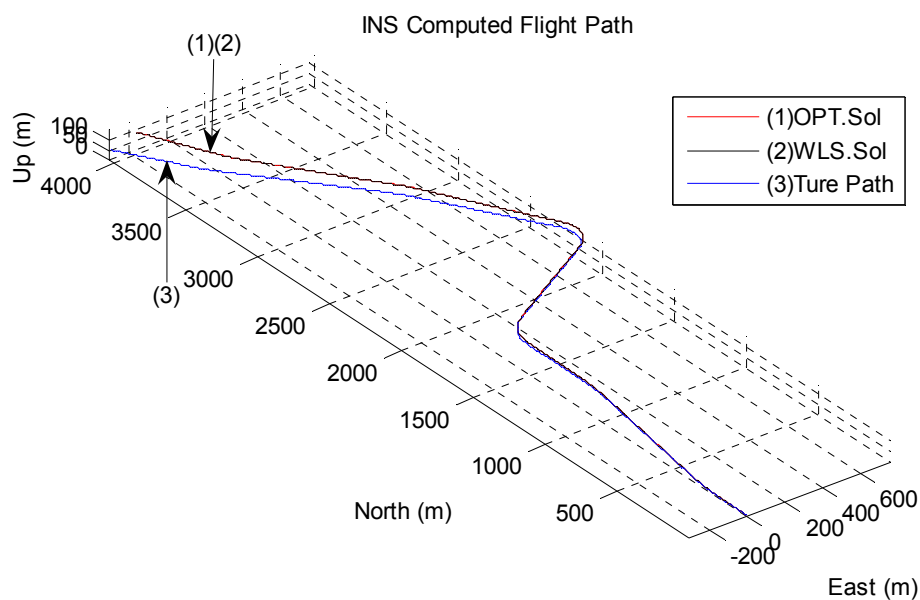


图 5.18 仿真实验二中两种融合方法处理后的飞行轨迹

Fig.5. 18 The flight paths of two fusion algorithms in experiment 2

5.5.3.3 仿真实验三的仿真与分析

由仿真实验二可知,在冗余传感器系统的量测噪声统计特性已知,而系统噪声特性未知时,或者最优融合算法系统噪声特性设置不合理时,最优融合算法就不再是最优的。因此设置合理的系统噪声协方差矩阵 Q 值,对最优融合算法的性能至关重要。在本仿真实验中,系统的误差模型和模型的初始设定同仿真实验二。和仿真实验二不同的是,在该仿真实验中是使用改进的自适应最优融合算法(AOPT)和最优融合算法(OPT)分别对带故障漂移的传感器输出进行处理。图 5.19 和图 5.20 分别是这两种算法处理后三个坐标轴上加速度误差和角速度误差。由图 5.19 可看出,两种融合算法处理后,在 X 轴上两种融合算法的加速度误差值基本一致,在 Y、Z 轴上 AOPT 的加速度误差值略小于 OPT 的误差值。由图 5.20 可看出,两种融合算法处理后,在 X 轴上 AOPT 的角速度误差值略小于 OPT 的误差值,在 Y、Z 轴上两种融合算法的角速度误差值基本一致。分析这两张图可知,两种融合算法处理后,加速度和角速度都存在误差,但是总体上来说,AOPT 的误差要小于 OPT 的。

将两个算法处理过的加速度值和角速度值分别送入惯性导航算法中进行导航计算得到如图 5.21、图 5.22 的位置误差和如图 5.23 的飞行轨迹。由这三张图可看出,经过 AOPT 处理后的导航位置误差要明显小于 OPT 的位置误差。导航结束时,AOPT 处理的位置误差为 $[75.7721, 17.8271, -4.8253]$,而 OPT 的位置误差为 $[152.5842, 13.4819, 24.9643]$ 。很明显,AOPT 的经度误差只有 OPT 的一半,两种算法的纬度误差则相似,而 AOPT 的高度误差要比 OPT 的高度误差要小得多。由此可得出结论,在冗余传感器系统的量测噪声统计特性已知时,而系统噪声特性未知时,改进的自适应最优融合算法的性能要比最优融合算法要优越。其原因在于,改进的自适应最优融合算法能够实时将系统噪声估计出来,同时用强跟踪算法保证算法的收敛性。

将此时 AOPT 的位置误差和仿真实验一中 OPT 的位置误差相比较,即将图 5.11 和图 5.21 相比较,可发现,AOPT 的经、纬度误差比仿真实验一中 OPT 的要大,而 AOPT 的高度误差则比较小。总体而言,此时 AOPT 的位置误差和仿真实验一中 OPT 的位置误差要大,也就是说,虽然改进的自适应最优融合算法能够实时将系统噪声估计出来,并用强跟踪算法保证算法的收敛性,但是它却牺牲了算法的估计精度。

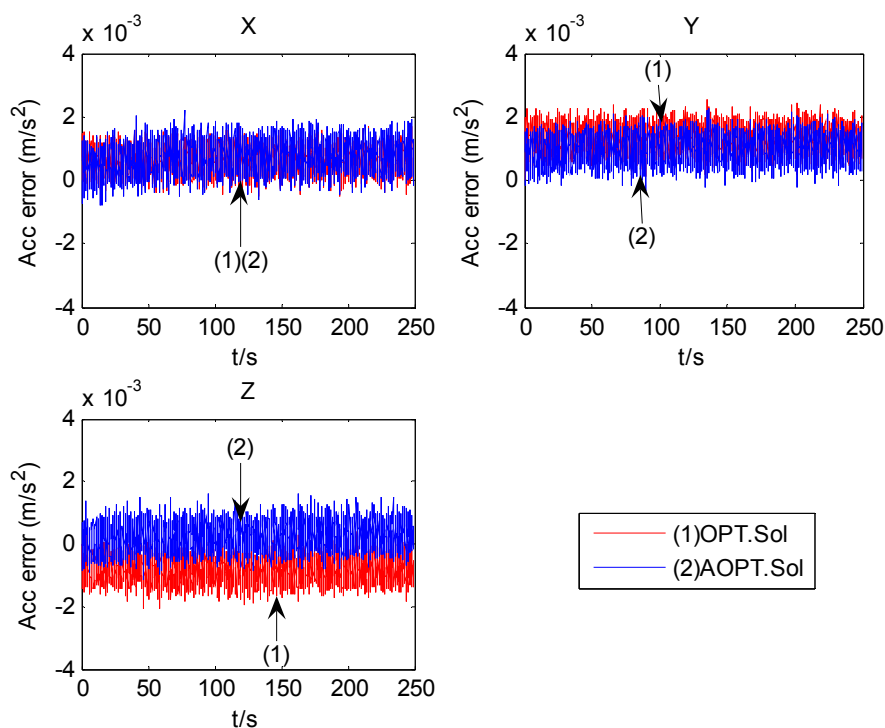


图 5.19 仿真实验三中两种最优融合算法处理后的加速度误差

Fig.5. 19 The acceleration errors of two optimal fusion algorithms in experiment 3

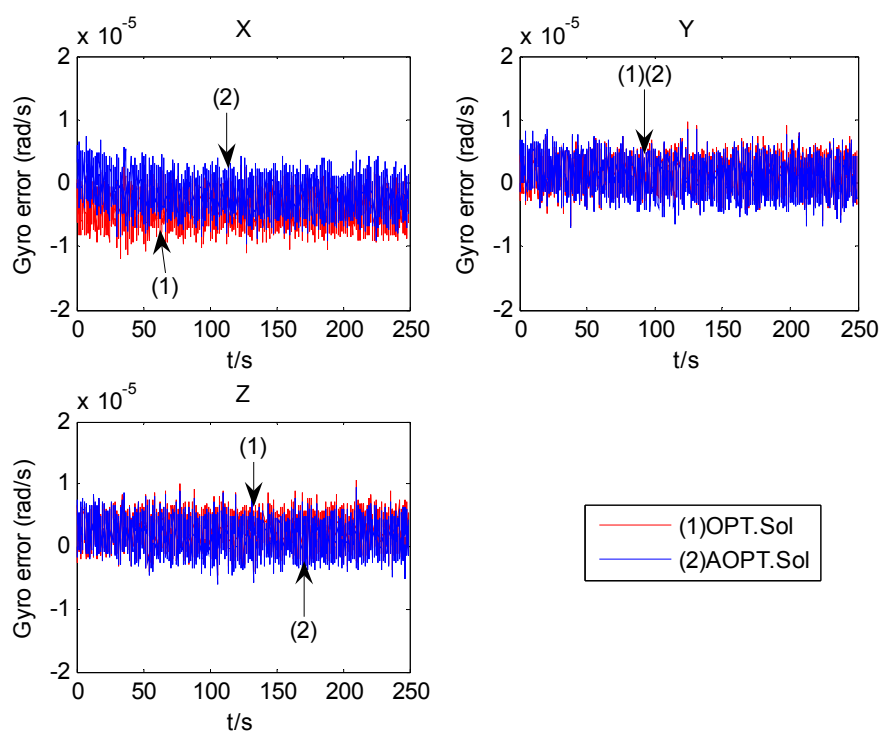


图 5.20 仿真实验三中两种最优融合算法处理后的角速度误差

Fig.5. 20 The angular velocity errors of two optimal fusion algorithms in experiment 3

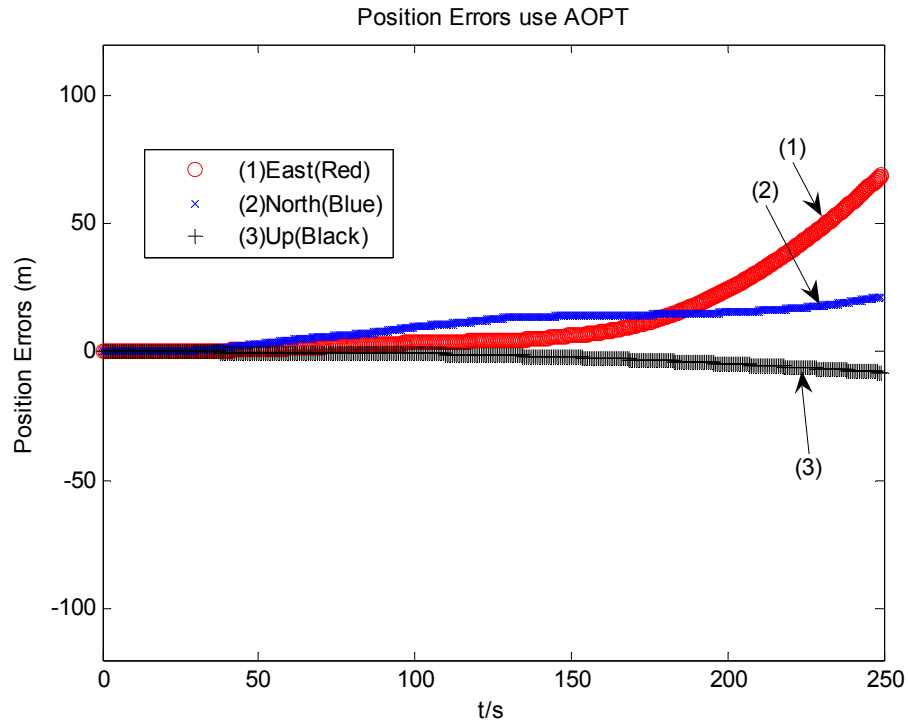


图 5.21 仿真实验三中自适应最优融合算法处理后的位置误差

Fig.5. 21 The position errors of adaptive optimal fusion algorithm in experiment 3

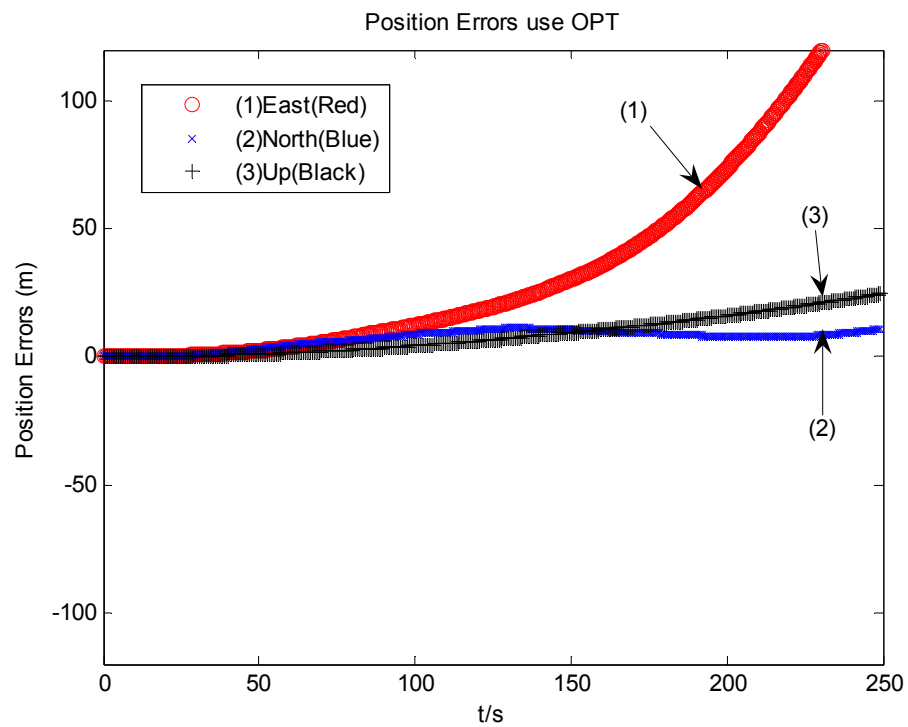


图 5.22 仿真实验三中最优融合算法处理后的位置误差

Fig.5. 22 The position errors of optimal fusion algorithm in experiment 3

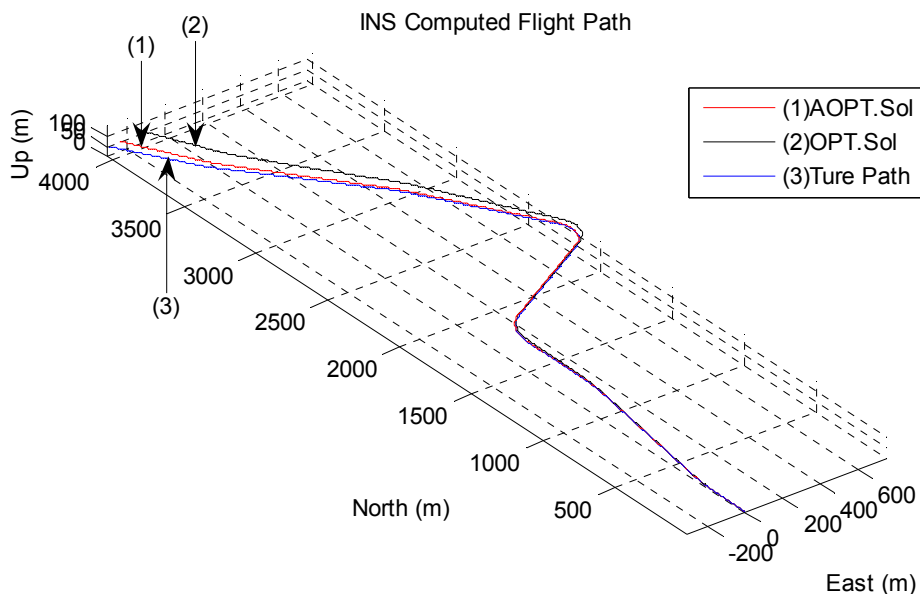


图 5.23 仿真实验三中两种最优融合算法处理后的飞机轨迹

Fig.5. 23 The flight paths of two optimal fusion algorithms in experiment 3

5.5.3.4 仿真实验四的仿真与分析

冗余惯性量测装置的误差模型、配置矩阵 M ，及其配置矩阵 M 的左零空间 T 都同仿真实验一。将表 5.2 中的传感器漂移和噪声叠加到传感器的输出上，则六个加速度计的原始输出的误差如图 5.24 所示，六个陀螺的原始输出的误差如图 5.25 所示。从图 5.24 和图 5.25 中，看出所有的传感器发生了明显的恒值偏置，尤其是加速度计 m_a^1 、 m_a^5 和陀螺仪 m_ω^1 、 m_ω^3 发生明显大于其他同类传感器的偏置，而且传感器的输出都被相应的随机噪声所污染。

对于冗余惯性导航系统而言，系统模型如式 (5-90)、(5-91) 所示的系统模型，由于冗余传感器系统的量测噪声和系统噪声统计特性均已知，其误差模型参数如下：

$$A_k = B_k = C_k = I_{12 \times 12} \quad (5-115)$$

$$\begin{aligned} E\{vv^T\} &= R \\ R &= \text{diag}([R_\omega, R_a]) \\ R_\omega &= \text{diag}([8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}]) \\ R_a &= \text{diag}([2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}]) \end{aligned} \quad (5-116)$$

$$E\{ww^T\} = Q$$

$$Q = \text{diag}([Q_\omega, Q_a]) \quad (5-117)$$

$$Q_\omega = \text{diag}([2.3 \times 10^{-10}, 2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-10}, 2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-11}])$$

$$Q_a = \text{diag}([1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-6}])$$

$$P = \text{diag}([9.4 \times 10^{-11}, 2.4 \times 10^{-17}, 9.4 \times 10^{-11}, 2.4 \times 10^{-17}, 2.4 \times 10^{-17}, 2.4 \times 10^{-17}, 8.6 \times 10^{-6}, 9.6 \times 10^{-7}, 9.6 \times 10^{-7}, 9.6 \times 10^{-7}, 8.6 \times 10^{-6}, 9.6 \times 10^{-7}]) \quad (5-118)$$

在该冗余惯性导航系统中，分别采用按照 5.4 节提及的最优融合故障补偿算法（OPTDC）、故障检测隔离算法（FDI）和最小二乘法（WLS）对冗余惯性导航系统中的冗余观测进行处理。根据第四章中的内容，故障检测隔离算法（FDI）首先检测出故障传感器，并将故障传感器隔离，然后根据剩余的传感器计算三个坐标轴上的加速度和角速度。而冗余传感器的最优融合故障补偿算法根据冗余观测通过最优融合算法估计出各传感器的故障漂移情况，并通过故障补偿算法将各传感器的故障漂移补偿掉，然后通过最小二乘法将三个坐标轴上的加速度和角速度估算出来。由于最小二乘法无法对故障传感器进行识别和隔离，因此他将含有故障漂移传感器的冗余观测直接计算出三个坐标轴上的加速度和角速度。为了比较算法的优劣，将这三种算法处理后的角速度误差和加速度误差显示在图 5.28、图 5.29 中。从这两张图中，可以看出经过三种融合算法处理过的角速度输出误差相似，而在三个坐标轴上加速度误差则不尽相同，冗余传感器的最优融合故障补偿算法（OPTDC）和最小二乘法（WLS）的误差相对于故障检测隔离算法（FDI）较小，且在 XY 坐标轴上，这两种算法的误差相似，但是 Z 轴上，冗余传感器的最优融合故障补偿算法（OPTDC）比最小二乘法（WLS）有优势。原因在于 OPTDC 算法中的 Kalman 能够估算出传感器的漂移值，并通过补偿算法将故障漂移补偿掉，然后用最小二乘法融合补偿过的冗余观测值。当使用 OPTDC 算法处理故障漂移传感器输出时，传感器输出漂移值明显减小，如图 5.26 和图 5.27 所示。将图 5.26、图 5.27 和图 5.24、图 5.25 进行比较，可发现经 OPTDC 算法补偿后的传感器的输出误差值明显减小。

为了展示最优融合故障补偿算法（OPTDC）的优越性，将 OPTDC、WLS 和 FDI 的融合输出作为惯性导航系统的输入，仿真飞行轨迹如图 5.33 所示，基于 OPTDC 算法的飞行轨迹明显接近真实轨迹。图 5.30、图 5.31 和图 5.32 分别展示了基于三种算法的导航位置误差曲线，仿真结束时，基于 OPTDC 算法的位置误差为 $[52.3034, 0.8236, -19.7293]$ ，基于 WLS 算法的位置误差为 $[151.5892, 14.7021, 24.4529]$ ，基于 FDI 算法的位置误差为 $[109.0411, 52.8816, -89.4636]$ 。很明显，基于 OPTDC 算法的位置误差最小，而就 WLS 算法和 FDI 算法而言，WLS 算法的经度误差较大，FDI 的纬度和高度误差较大。

将该仿真实验中的 OPTDC 的位置误差和仿真实验一中 OPT 的位置误差相比较,即将图 5.11 和图 5.30 相比较,可发现,OPTDC 的经纬度和高度误差都要比仿真实验一中 OPT 的要小。也就是说,在冗余惯性导航系统中存在故障传感器时,最优融合故障补偿算法的融合精度要比最优融合算法要高。其原因在于,最优融合故障补偿算法首先通过最优融合算法将各传感器的漂移值估计出来,然后通过漂移补偿算法将各传感器的漂移补偿掉,最后将所有的补偿过的传感器输出进行最小二乘融合,保证了系统的最优估计;而最优融合算法,将带故障漂移的传感器的输出值进行弱化,然后将各传感器的输出进行最小二乘融合,由于它弱化故障漂移的传感器的输出,没有充分利用所有传感器的随机特性,所以它的估计精度没有最优融合故障补偿算法高。

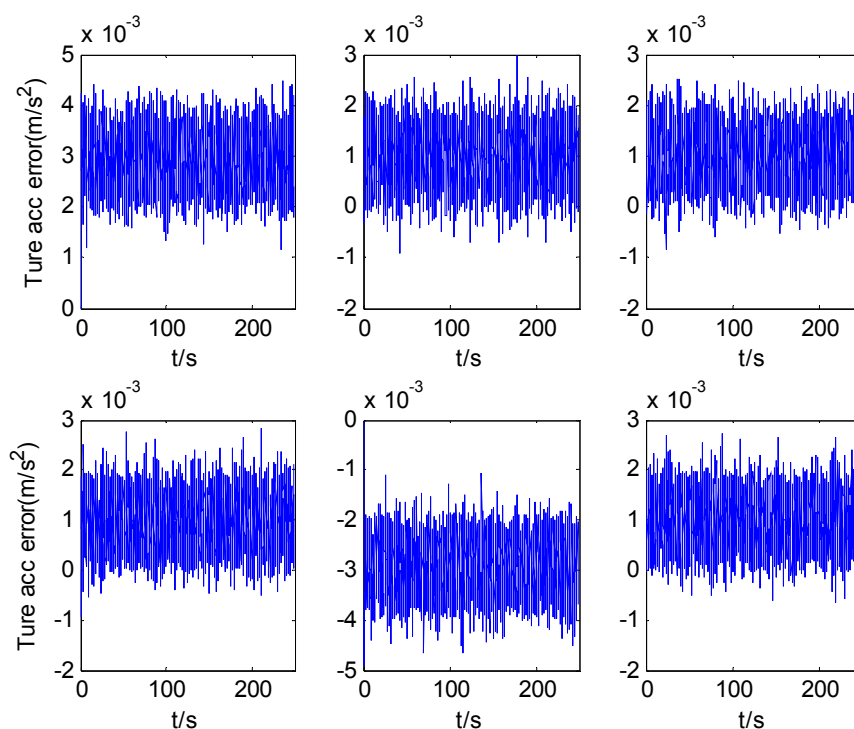


图 5.24 仿真实验四中六个加速度计输出误差

Fig.5. 24 The output errors of six accelerometers in experiment 4

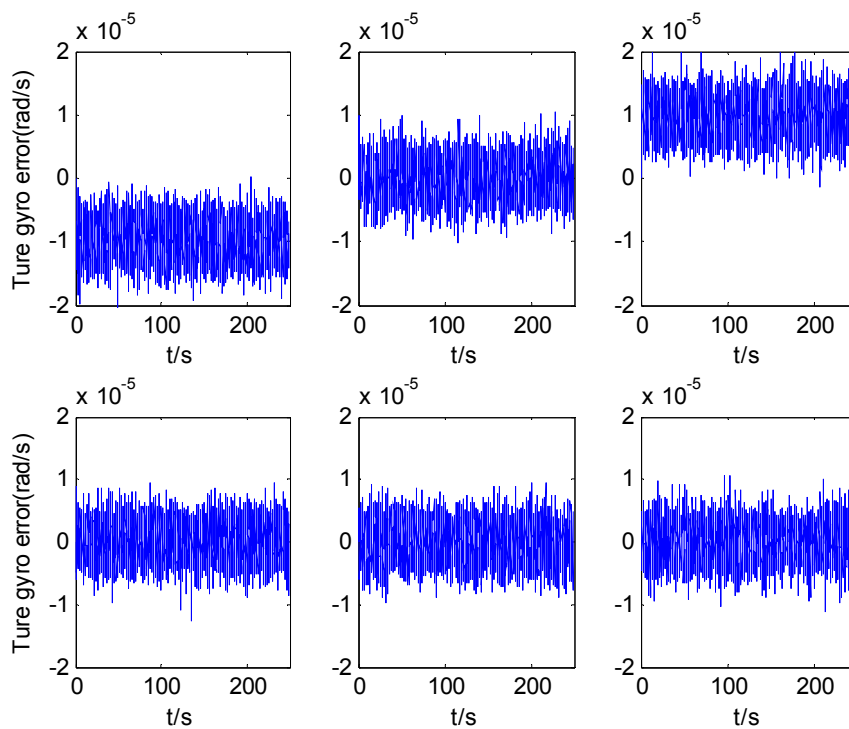


图 5.25 仿真实验四中六个陀螺的输出误差

Fig.5. 25 The output errors of six gyros in experiment 4

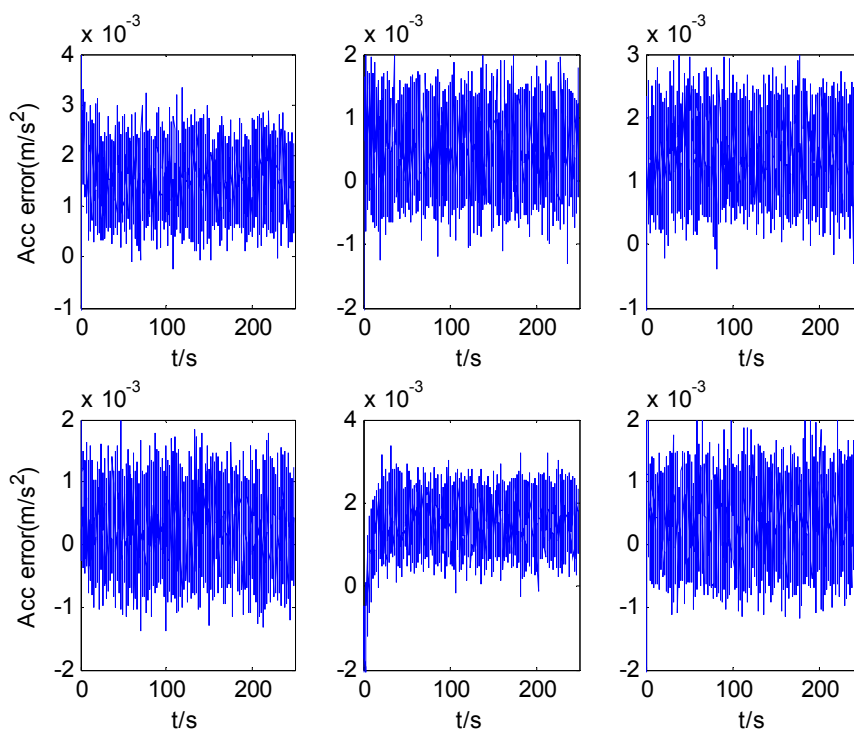


图 5.26 仿真实验四中漂移补偿后的加速度计输出值误差

Fig.5. 26 The output errors of six accelerometers after drift compemsation in experiment 4

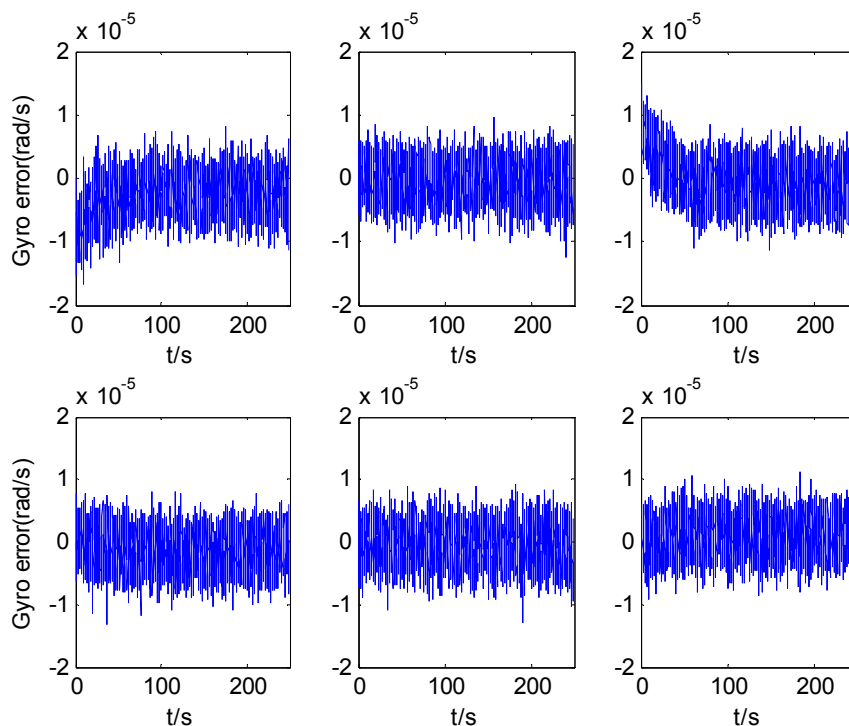


图 5.27 仿真实验四中漂移补偿后的陀螺输出值误差

Fig.5. 27 The output errors of six gyros after drift compensation in experiment 4

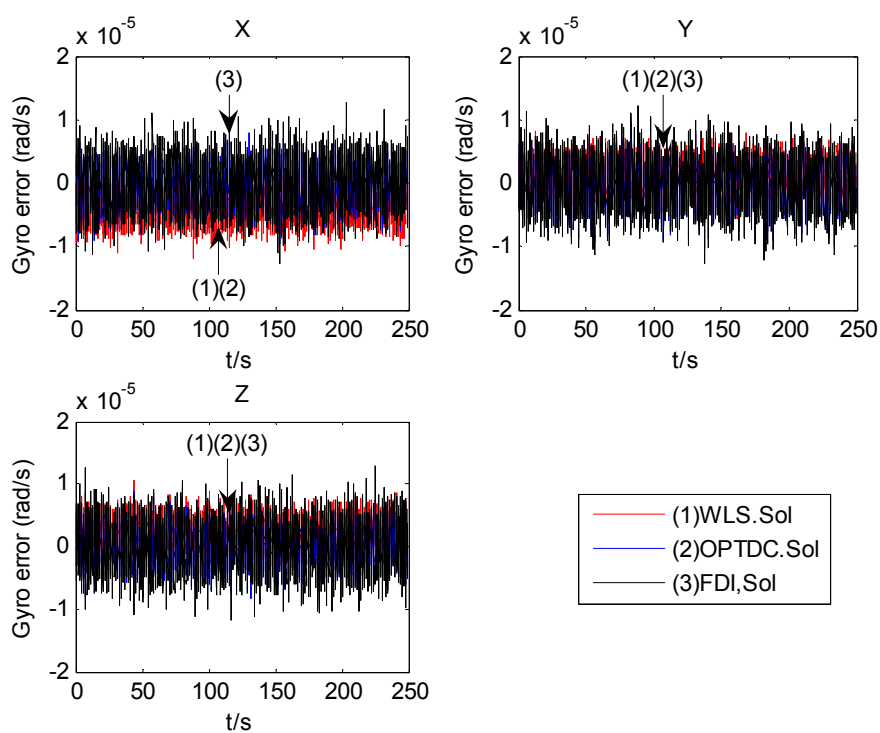


图 5.28 仿真实验四中三种融合算的角速度误差

Fig.5. 28 The angular velocity errors of three fusion algorithms in experiment 4

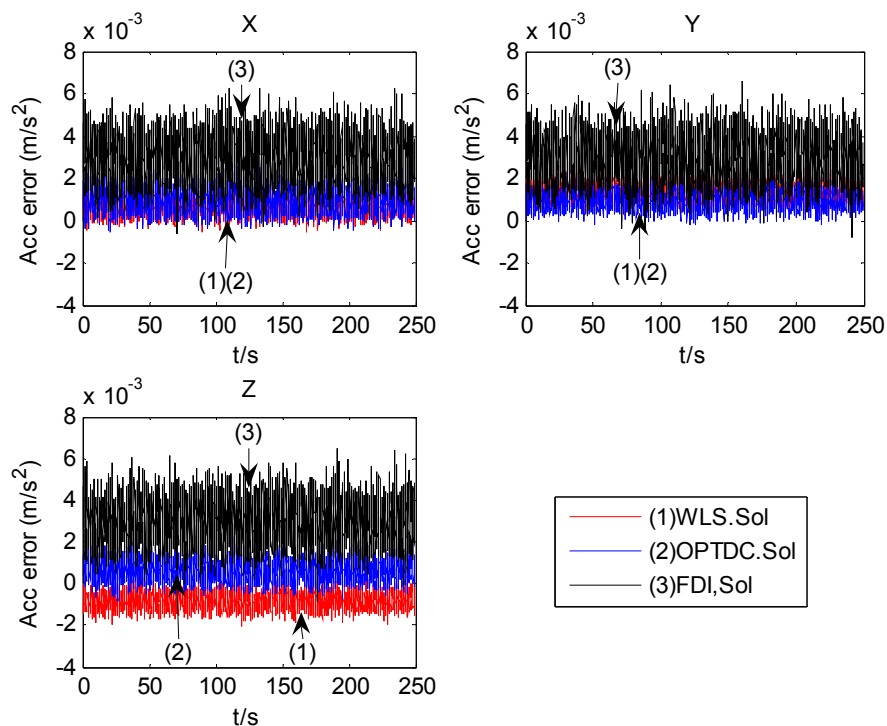


图 5.29 仿真实验四中三种融合算法的加速度误差

Fig.5. 29 The acceleration errors of three fusion algorithms in experiment 4

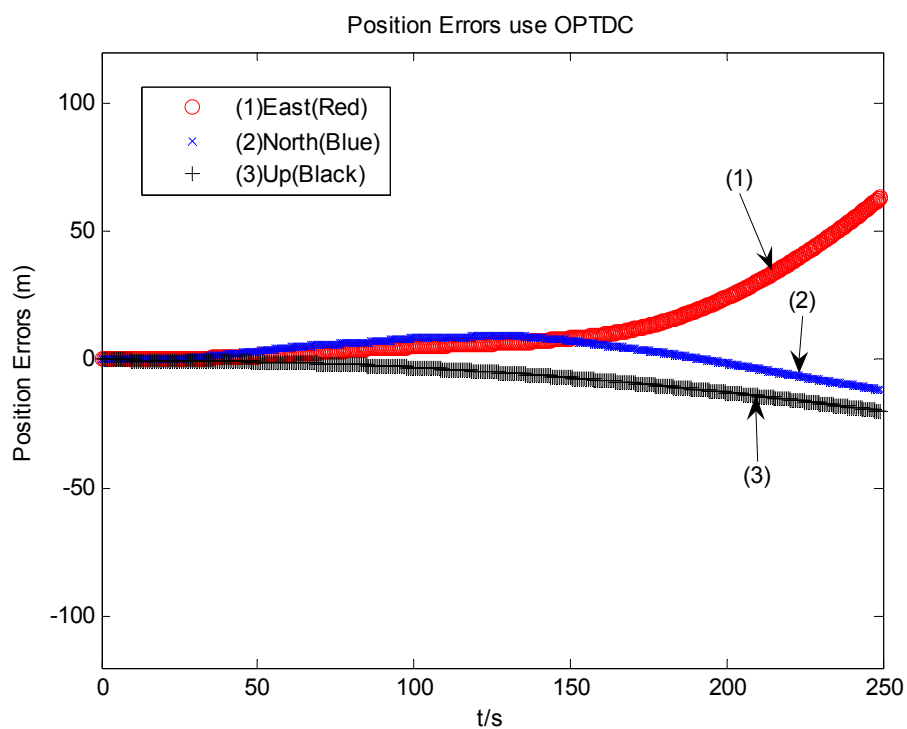


图 5.30 仿真实验四中基于 OPTDC 的导航位置误差

Fig.5. 30 The position errors of OPTDC in experiment 4

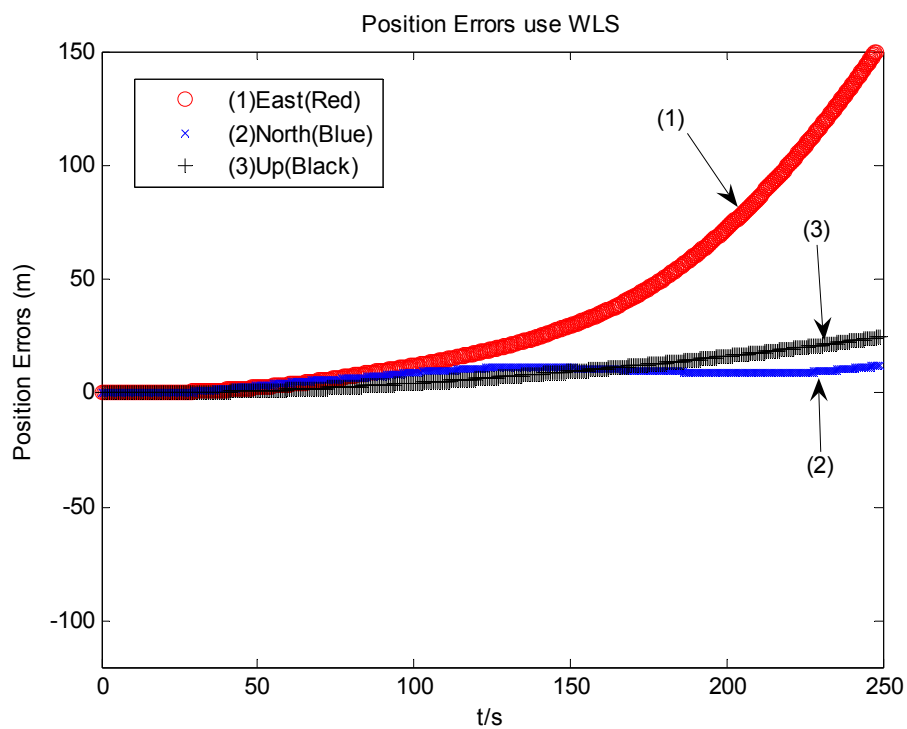


图 5.31 仿真实验四中基于 WLS 的导航位置误差

Fig.5. 31 The position errors of weighted least squares algorithm in experiment 4

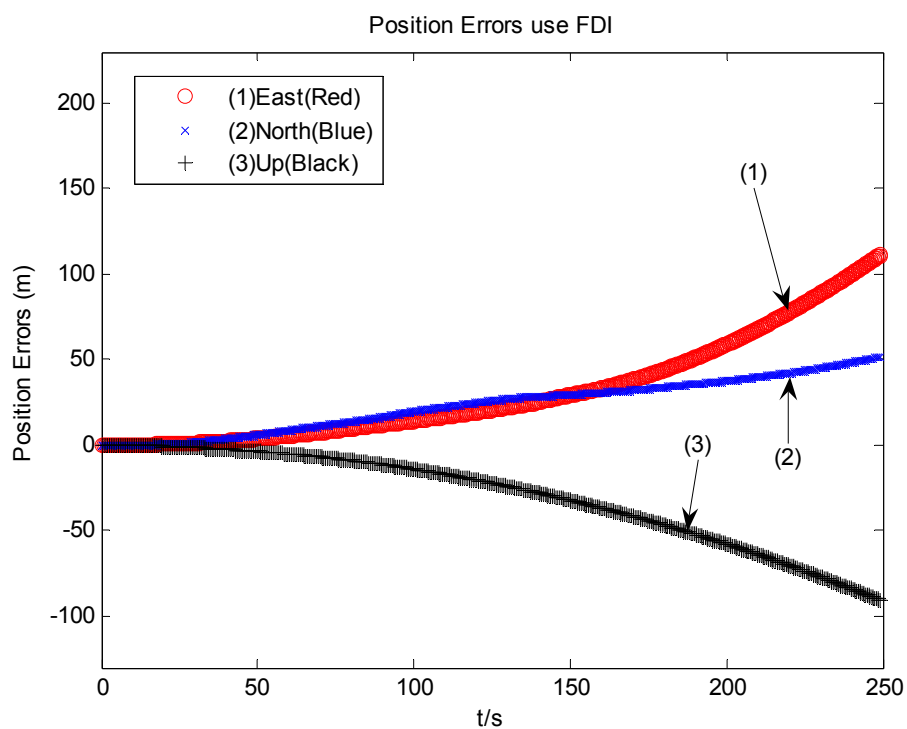


图 5.32 仿真实验四中基于 FDI 的导航位置误差

Fig.5. 32 The position errors of FDI in experiment 4

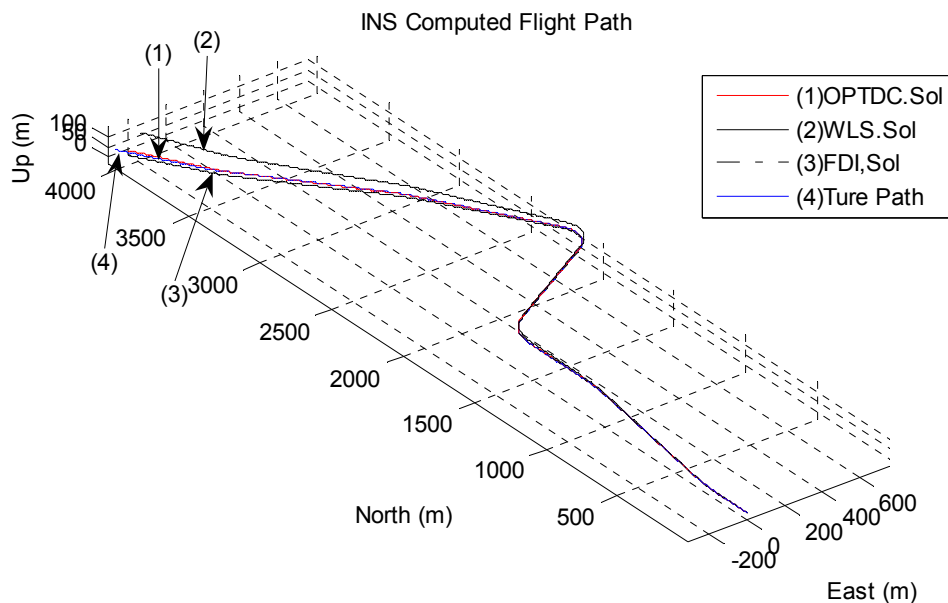


图 5.33 仿真实验四中三种融合算法的飞行轨迹

Fig.5. 33 The flight paths of three fusion algorithms in experiment 4

5.5.3.5 仿真实验五的仿真与分析

冗余惯性量测装置的误差模型、配置矩阵 M ，及其配置矩阵 M 的左零空间 T 都同仿真实验一。假设冗余传感器系统中没有传感器发生故障漂移，各传感器的漂移情况如表 5.1 所示，且冗余传感器系统的量测噪声和系统噪声统计特性均已知。虽然冗余惯性导航系统中不存在故障传感器，但是各传感器仍然存在同样的恒值偏置时。其误差模型参数如下：

$$A_k = B_k = C_k = I_{12 \times 12} \quad (5-119)$$

$$\begin{aligned} E\{vv^T\} &= R \\ R &= \text{diag}([R_w, R_a]) \\ R_w &= \text{diag}([8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}, 8.4 \times 10^{-12}]) \end{aligned} \quad (5-120)$$

$$\begin{aligned} R_a &= \text{diag}([2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}, 2.4 \times 10^{-7}]) \\ E\{ww^T\} &= Q \\ Q &= \text{diag}([Q_w, Q_a]) \\ Q_w &= \text{diag}([2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-11}, 2.3 \times 10^{-11}]) \\ Q_a &= \text{diag}([1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}]) \end{aligned} \quad (5-121)$$

$$P = \text{diag}([9.4 \times 10^{-17}, 2.4 \times 10^{-17}, 9.4 \times 10^{-17}, 2.4 \times 10^{-17}, 2.4 \times 10^{-17}, 2.4 \times 10^{-17}, 8.6 \times 10^{-7}, 9.6 \times 10^{-7}, 9.6 \times 10^{-7}, 9.6 \times 10^{-7}, 8.6 \times 10^{-7}, 9.6 \times 10^{-7}]) \quad (5-122)$$

分别使用最优融合漂移补偿算法 (OPTDC) 和最小二乘算法 (WLS) 处理该冗余惯性导航系统中的冗余观测, 图 5.34、图 5.35 分别为两种算法处理过后的三轴加速度误差和角速度误差, 可以看出在传感器特性一致的情况下, 这两种算法的融合输出基本一致。由图 5.34 中 X、Z 轴的加速度误差可看出, 由于 OPTDC 算法中状态协方差矩阵选择不合适, OPTDC 算法的融合输出甚至不如 WLS 算法。由此可见, 在确切已知传感器特性一致时, 直接采用 WLS 算法, 融合输出误差小, 计算速度快! 分别将 WLS 和 OPTDC 算法的融合输出作为惯性导航系统的输入, 图 5.36、图 5.37 分别是将 WLS 和 OPTDC 算法输出作为输入的导航位置误差, 基于 OPTDC 算法的位置误差为 $[42.5904, -3.5637, -25.9244]$, 基于 WLS 算法的位置误差为 $[43.1979, -6.8965, -21.9939]$ 。图 5.38 是两种算法的飞行轨迹, 可看出两种算法的位置误差基本一致, 飞行轨迹基本重合。由此可得出结论, 传感器不存在故障漂移, 且传感器特性一致的情况下, OPTDC 算法将失效, 将退化成简单最小二乘法。在 5.2.3 节中已经证明, 在惯性传感器的特性相同时, 冗余传感器最优融合方法和最小二乘法是等效的。当所有传感器的偏置相同时, 传感器的最优融合方法将无法估计出各传感器的偏置, 故障漂移补偿也无法发挥其效果, 因此此时 OPTDC 相当于一个最小二乘算法。

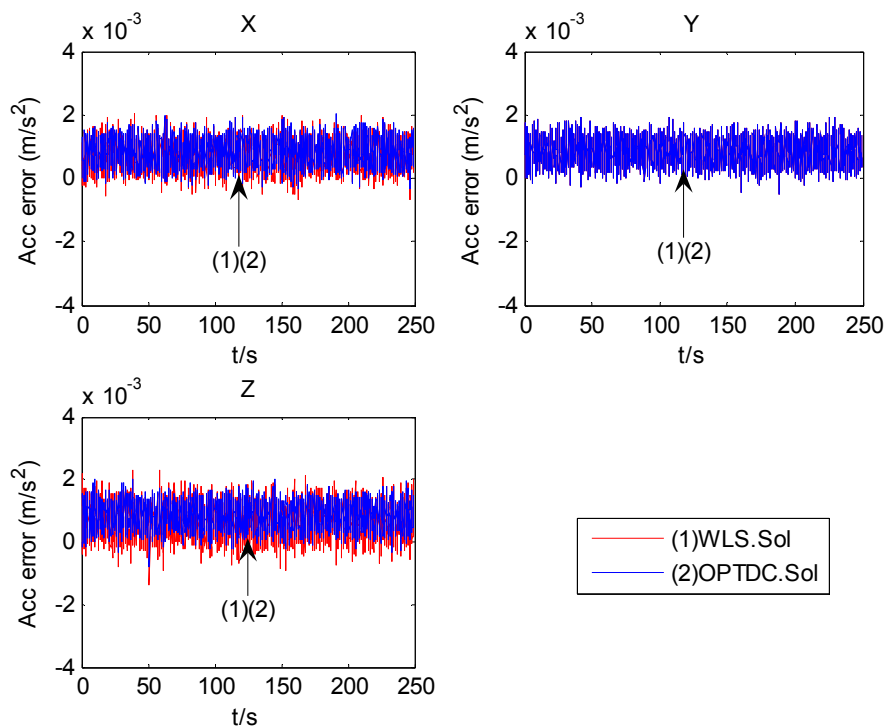


图 5.34 仿真实验五中两种融合算法的加速度误差

Fig.5. 34 The acceleration errors of two fusion algorithms in experiment 5

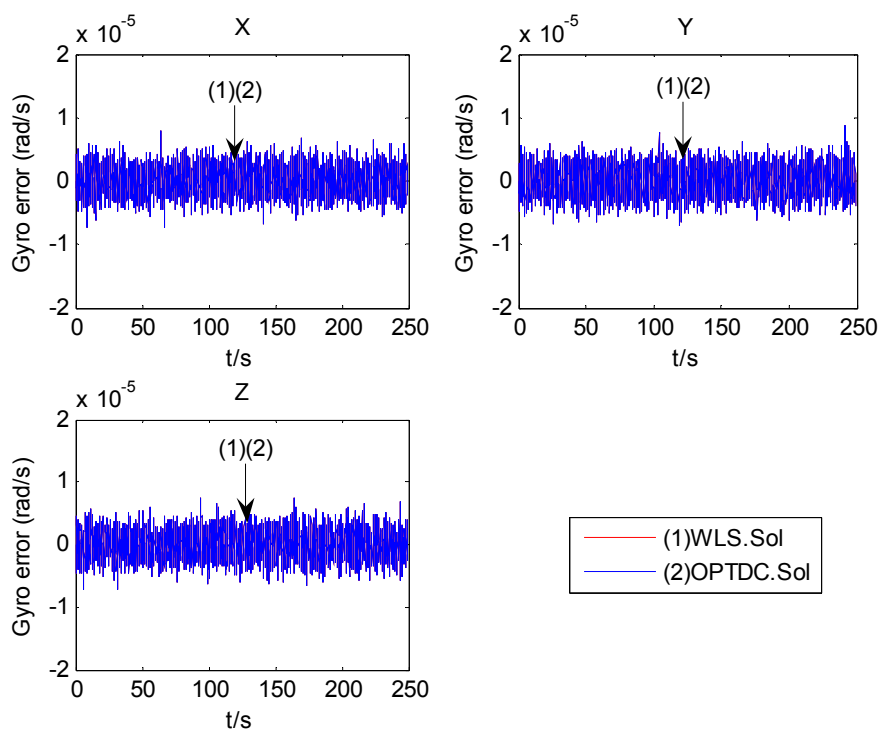


图 5.35 仿真实验五中两种融合算法的角速度误差

Fig.5. 35 The angular velocity errors of two fusion algorithms in experiment 5

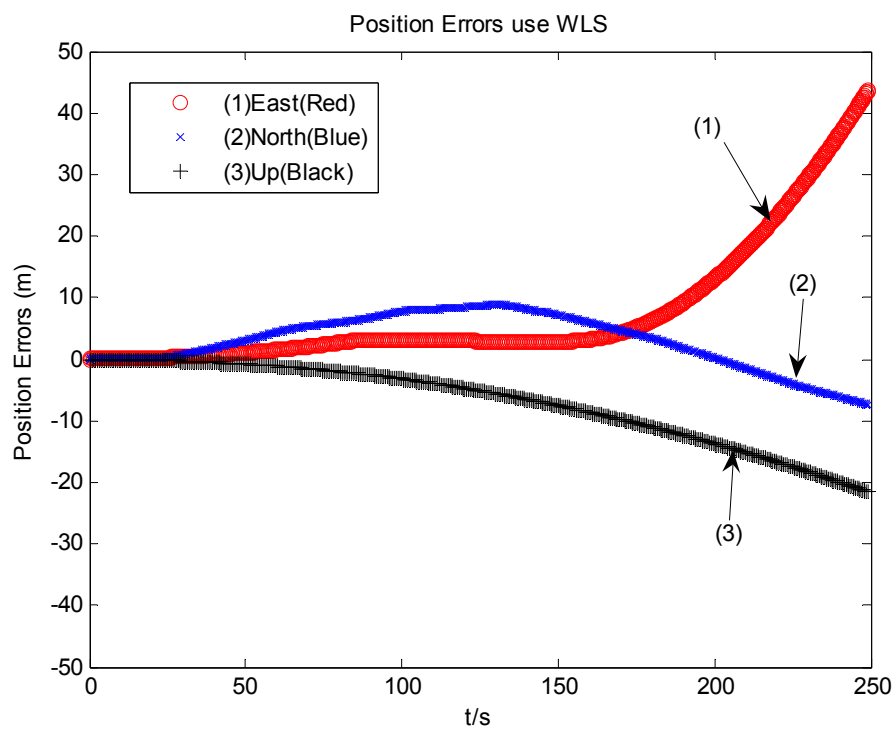


图 5.36 仿真实验五中采用 WLS 的导航位置误差

Fig.5. 36 The position errors of weighted least squares algorithm in experiment 5

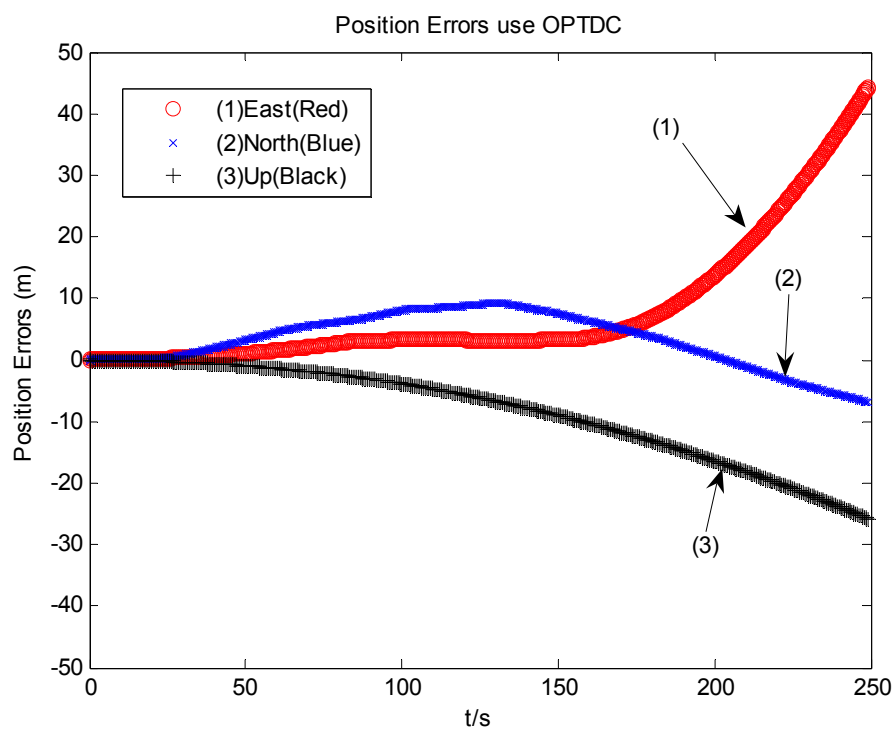


图 5.37 仿真实验五中采用 OPTDC 算法的导航位置误差

Fig.5. 37 The position errors of OPTDC in experiment 5

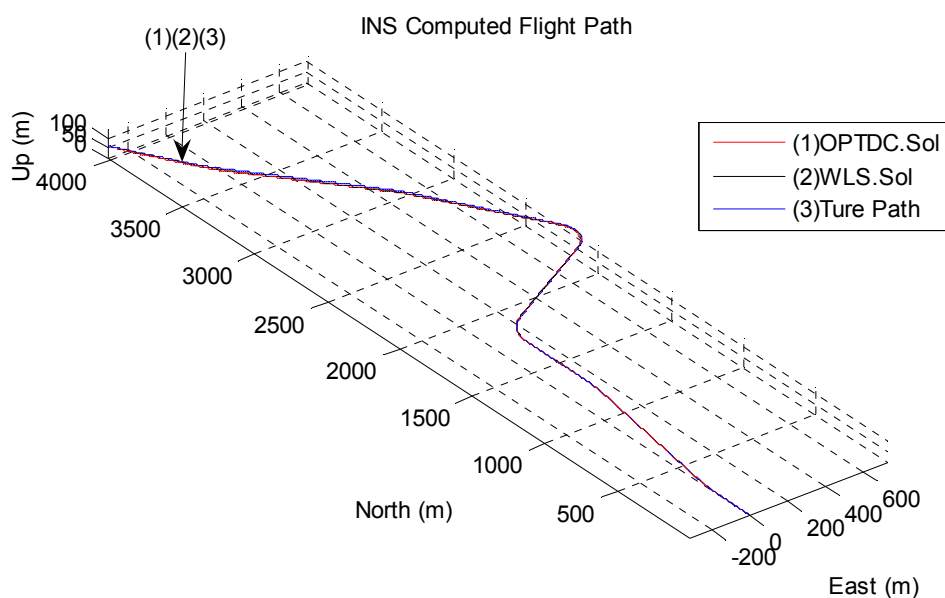


图 5.38 仿真实验五中两种融合算法的飞行轨迹

Fig.5. 38 The flight paths of two fusion algorithms in experiment 5

5.6 本章小结

本章首先给出了最优融合算法的理论基础和求解过程, 然后根据最优融合算法存在的问题提出一种改进的自适应最优融合算法, 其次又提出一种最优融合漂移补偿算法来解决传感器故障漂移问题, 最后对所有的算法进行的仿真验证。仿真证明, 改进的自适应最优融合算法能够有效的解决最优融合算法在系统噪声未知或设置不合理的情况下性能下降的问题, 但是它在解决滤波的鲁棒性的同时也牺牲了算法的估计精度。最优融合漂移补偿算法能够有效的解决传感器的故障漂移, 同时充分融合了所有传感器的暂态特性, 保证了算法的最优估计。而在传感器的误差特性相同时, 本章所提及融合算法 OPT、AOPT、OPTDC 将失效, 最小二乘法就是最优融合算法。

第6章 冗余惯性导航系统的导航方案

6.1 引言

在前一章中介绍了一种基于冗余惯性导航系统的传感器最优融合算法，该算法利用惯性导航系统的冗余观测通过最优估计计算出最优的惯性信息（加速度和角速度）。然而，在惯性导航系统中，获得最优的惯性信息并不意味着能够获得最优的导航效果。因此，在本章中给出了一种冗余惯性导航系统的最优导航方案。在该方案中，将惯性传感器的冗余观测作为导航 Kalman 滤波器的输入，导航 Kalman 对冗余观测和外部导航信息进行滤波估计，再将估计出的传感器的误差状态和导航误差状态去更新惯性传感器误差模型和导航计算模型。应用前一章成果，用冗余传感器的最优融合算法去替代最优导航方案中的最小二乘融合算法，新的导航方案变成一个双 Kalman 的结构，第一个 Kalman 处理惯性传感器误差，第二个 Kalman 处理导航误差，但是这种结构中观测噪声和系统噪声相关联，因此将其改造成一种次优导航方案，传感器的冗余观测不再作为导航 Kalman 的输入，冗余观测只用来进行最优融合得到最优惯性信息，然后将估计出的最优惯性信息送入导航 Kalman，导航 Kalman 同时融合外部导航信息进行滤波估计。仿真证明，这种改造并不会对导航精度产生太多的影响。在现实环境中，冗余惯性量装置的量测噪声和系统噪声很少能准确获知，但是他们对导航方案性能的影响比较大，因此本章将噪声估计器加入到导航方案中，形成一种带噪声估计的次优导航方案。本章最后通过仿真来说明最优导航方案和次优导航方案的关系，并验证了改进的次优导航方案的有效性。

6.2 惯性导航误差方程

6.2.1 姿态误差

捷联惯性导航系统中载体坐标系与导航坐标系之间的关系可用方向余弦矩阵 C_b^n 来表示。估计姿态可定义为 \tilde{C}_b^n ，可用方向余弦表示为^[127]

$$\tilde{C}_b^n = [I - \psi] C_b^n \quad (6-1)$$

其中 I 是一个 3×3 单位阵， ψ 可表示为：

$$\psi = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\gamma & \delta\beta \\ \delta\gamma & 0 & -\delta\alpha \\ -\delta\beta & \delta\alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (6-2)$$

其中 $\delta\alpha$ 和 $\delta\beta$ 为水平方向的姿态误差, $\delta\gamma$ 为垂直方向的姿态误差。他们相当于物理导航平台的失准角, 三个小失准角可等效为横滚、俯仰和航向三个欧拉角。

估计的方向余弦矩阵可表示为:

$$\psi = I - \tilde{C}_b^n (C_b^n)^T \quad (6-3)$$

对式(6-3)两边求微分可得

$$\dot{\psi} = -\dot{\tilde{C}}_b^n (C_b^n)^T - \tilde{C}_b^n (\dot{C}_b^n)^T \quad (6-4)$$

方向余弦矩阵可以通过载体的绝对变化率 Ω_{ib}^b 和导航坐标的变化率 Ω_{in}^n 推导可得, 其推导方程为:

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^n C_b^n \quad (6-5)$$

同理, 微分后估计方向余弦矩阵可表示为:

$$\dot{\tilde{C}}_b^n = \tilde{C}_b^n \tilde{\Omega}_{ib}^b - \tilde{\Omega}_{in}^n \tilde{C}_b^n \quad (6-6)$$

其中 $\tilde{\Omega}_{ib}^b$ 和 $\tilde{\Omega}_{in}^n$ 分别代表量测的载体变化率和导航参考坐标系的估计旋转变化率。

将 \dot{C}_b^n 和 $\dot{\tilde{C}}_b^n$ 代入式(6-4)可得:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\tilde{C}_b^n \tilde{\Omega}_{ib}^b (C_b^n)^T + \tilde{\Omega}_{in}^n \tilde{C}_b^n (C_b^n)^T + \tilde{C}_b^n \Omega_{ib}^b (C_b^n)^T - \tilde{C}_b^n (C_b^n)^T \tilde{\Omega}_{in}^n \\ &= -\tilde{C}_b^n [\tilde{\Omega}_{ib}^b - \Omega_{ib}^b] (C_b^n)^T + \tilde{\Omega}_{in}^n \tilde{C}_b^n (C_b^n)^T - \tilde{C}_b^n (C_b^n)^T \tilde{\Omega}_{in}^n \end{aligned} \quad (6-7)$$

将式(6-1)中的 \tilde{C}_b^n 代入式(6-7)可得:

$$\dot{\psi} = -[I - \psi] C_b^n [\tilde{\Omega}_{ib}^b - \Omega_{ib}^b] (C_b^n)^T + \tilde{\Omega}_{in}^n [I - \psi] C_b^n (C_b^n)^T - [I - \psi] C_b^n (C_b^n)^T \tilde{\Omega}_{in}^n \quad (6-8)$$

定义 $\delta\Omega_{in}^n = \tilde{\Omega}_{in}^n - \Omega_{in}^n$, $\delta\Omega_{ib}^b = \tilde{\Omega}_{ib}^b - \Omega_{ib}^b$, 同时忽略误差的乘积项可得:

$$\dot{\psi} \approx \psi \Omega_{in}^n - \Omega_{in}^n \psi + \delta\Omega_{in}^n - C_b^n \delta\Omega_{ib}^b (C_b^n)^T \quad (6-9)$$

可将式(6-9)表示为向量形式

$$\dot{\Psi} \approx -\omega_{in}^n \times \Psi + \delta\omega_{in}^n - C_b^n \delta\omega_{ib}^b \quad (6-10)$$

其中失准角向量可表示为 $\Psi = [\delta\alpha \ \delta\beta \ \delta\gamma]^T$, 同时有 $\Psi \times = \psi$, $\omega_{in}^n \times = \Omega_{in}^n$,

$$\delta\omega_{in}^n \times = \delta\Omega_{in}^n, \quad \delta\omega_{ib}^b \times = \delta\Omega_{ib}^b$$

6.2.2 速度和位置误差

速度方程可表示为:

$$\dot{\mathbf{v}} = C_b^n \mathbf{f}^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \mathbf{v} + \mathbf{g}_l \quad (6-11)$$

其中 \mathbf{f}^b 代表载体坐标系中加速度计的比力。

同理, 估计速度可以通过对应的估计量推导出来, 其可表示为:

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = \tilde{C}_b^n \tilde{\mathbf{f}}^b - (2\tilde{\omega}_{ie}^n + \tilde{\omega}_{en}^n) \times \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{g}}_l \quad (6-12)$$

将式(6-11)和式(6-12)微分后相减可得:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{v}} &= \dot{\tilde{\mathbf{v}}} - \dot{\mathbf{v}} \\ &= \tilde{\mathbf{C}}_b^n \tilde{\mathbf{f}}^b - \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - (2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n) \times \tilde{\mathbf{v}} + (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{g}}_l - \mathbf{g}_l\end{aligned}\quad (6-13)$$

定义 $\delta \mathbf{f}^b = \tilde{\mathbf{f}}^b - \mathbf{f}^b$, $\delta \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}$, $\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n - \boldsymbol{\omega}_{ie}^n$, $\delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n - \boldsymbol{\omega}_{en}^n$ 。将式(6-1)代入式(6-13)并展开, 忽略误差乘积项可得

$$\delta\dot{\mathbf{v}} = -\psi \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{C}_b^n \delta \mathbf{f}^b - (2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n) \times \delta \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \mathbf{v} - \delta \mathbf{g} \quad (6-14)$$

其中 $\mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b = \mathbf{f}^n$, 因此式(6-14)可写成:

$$\delta\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{f}^n \times] \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{C}_b^n \delta \mathbf{f}^b - (2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n) \times \delta \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \mathbf{v} - \delta \mathbf{g} \quad (6-15)$$

忽略微小项后, 上式可重写为:

$$\delta\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{f}^n \times] \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{C}_b^n \delta \mathbf{f}^b \quad (6-16)$$

位置误差 $\delta \mathbf{p}$ 可表示为:

$$\delta \mathbf{p} = \delta \mathbf{v} \quad (6-17)$$

6.2.3 导航误差方程状态空间形式

式(6-10)、(6-15)、(6-17)组合成一个误差矩阵方程:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \delta \mathbf{x} + \mathbf{G} \mathbf{u} \quad (6-18)$$

其中

$$\delta \mathbf{x} = [\delta \alpha \quad \delta \beta \quad \delta \gamma \quad \delta v_N \quad \delta v_E \quad \delta v_D \quad \delta L \quad \delta \ell \quad \delta h]^T \quad (6-19)$$

$$\mathbf{u} = [\delta \omega_x \quad \delta \omega_y \quad \delta \omega_z \quad \delta f_x \quad \delta f_y \quad \delta f_z]^T \quad (6-20)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (6-21)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix} \quad (6-22)$$

其中

$$\begin{aligned}
 F_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -(\Omega \sin L + \frac{v_E}{R} \tan L) & \frac{v_N}{R} & 0 & \frac{1}{R} \\ (\Omega \sin L + \frac{v_E}{R} \tan L) & 0 & \Omega \cos L + \frac{v_E}{R} & -\frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{v_N}{R} & -\Omega \cos L - \frac{v_E}{R} & 0 & 0 & \frac{\tan L}{R} \\ 0 & -f_D & f_E & \frac{v_D}{R} & -2(\Omega \sin L + \frac{v_E}{R} \tan L) \end{bmatrix} \\
 F_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & -\Omega \sin L & 0 & \frac{v_E}{R^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{v_N}{R^2} \\ 0 & -\Omega \cos L - \frac{v_E}{R \cos^2 L} & 0 & \frac{v_E \tan L}{R^2} \\ \frac{v_N}{R} & -v_E(2\Omega \cos L + \frac{v_E}{R \cos^2 L}) & 0 & \frac{1}{R^2}(v_E^2 \tan L - v_N v_D) \end{bmatrix} \\
 F_{21} &= \begin{bmatrix} f_D & 0 & -f_N & (2\Omega \sin L + \frac{v_E}{R} \tan L) & \frac{1}{R}(v_N \tan L + v_D) \\ -f_E & f_N & 0 & -2\frac{v_N}{R} & -2(\Omega \cos L + \frac{v_E}{R}) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R \cos L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 F_{22} &= \begin{bmatrix} 2\Omega \cos L + \frac{v_E}{R} & (2\Omega(v_N \cos L - v_D \sin L) + \frac{v_N v_E}{R \cos^2 L}) & 0 & -\frac{v_E}{R^2}(v_N \tan L + v_D) \\ 0 & 2\Omega v_E \sin L & 0 & \frac{1}{R^2}(v_N^2 + v_E^2) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{v_N}{R^2} \\ 0 & \frac{v_E \tan L}{R \cos L} & 0 & -\frac{v_E}{R^2 \cos L} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

式(6-18)可重写为

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta\dot{\alpha} \\ \delta\dot{\beta} \\ \delta\dot{\gamma} \\ \delta\dot{v}_N \\ \delta\dot{v}_E \\ \delta\dot{v}_D \\ \delta\dot{L} \\ \delta\dot{\ell} \\ \delta\dot{h} \end{bmatrix}}_{\dot{X}^{nav}} = \underbrace{\underset{A^{nav}}{F}}_{A^{nav}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\alpha \\ \delta\beta \\ \delta\gamma \\ \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \\ \delta L \\ \delta \ell \\ \delta h \end{bmatrix}}_{X^{nav}} + \underbrace{\underset{N}{G}}_{N} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \\ \delta\omega_z \\ \delta f_x \\ \delta f_y \\ \delta f_z \end{bmatrix}}_{\tilde{u}} \quad (6-23)$$

由于机动方程 (6-23) 是连续方程, 然而在导航系统中一般采用离散方程, 因此将式 (6-23) 进行离散化, 可得:

$$X_{k+1}^{nav} = A_k^{nav} X_k^{nav} + N_k \tilde{u}_k \quad (6-24)$$

$$\tilde{u}_k = C_k X_k^{imu} + v_k^{imu} \quad (6-25)$$

其中 A_k^{nav} 和 N_k 分别是式 (6-23) 中的 A^{nav} 和 N 的离散值,

$\tilde{u}_k = [\delta\omega_x \ \delta\omega_y \ \delta\omega_z \ \delta f_x \ \delta f_y \ \delta f_z]^T$ 是离散的传感器误差, v_k^{imu} 是传感器的量测误差,

这里考虑为高斯白噪声。假设惯性传感器的模型为

$$\begin{aligned} X_{k+1}^{imu} &= A_k^{imu} X_k^{imu} + w_k^{imu} \\ E\{w_k^{imu} (w_k^{imu})^T\} &= Q_k^{imu} \\ E\{X_0^{imu} (X_0^{imu})^T\} &= \Pi_0^{imu} \end{aligned} \quad (6-26)$$

6.3 冗余惯性导航系统的最优导航方案

在 5.2 中提及的最优冗余传感器融合方法通过融合冗余的惯性传感器的数据以获得最优估计值。虽然通过这种算法能够将冗余惯性导航系统的最优的惯性量测值 (加速度和角速度) 估计出来, 但是对于冗余惯性导航系统而言, 最优的惯性量测值并不一定能获得最优的导航性能。本节根据冗余惯性导航系统的冗余量测信息推导出一种最优的导航方案。

6.3.1 冗余惯性导航系统的最优导航方案

将冗余惯性传感器的误差模型离散化后, 可表示为^[125]

$$X_{k+1}^{imu} = A_k^{imu} X_k^{imu} + w_k^{imu} \quad (6-27)$$

$$Y_k^{imu} = M_k u_k + C_k X_k^{imu} + v_k^{imu} \quad (6-28)$$

其中 u_k 是机动向量, v_k^{imu} 是传感器的量测噪声 (只考虑为白噪声), X_k^{imu} 为传感器的确定性稳定误差。 M_k 为传感器的配置矩阵。根据冗余传感器的最优融合方法, 机动量的

最小二乘估计为

$$\hat{u}_k^{wls} = \underbrace{(M_k^T R_k^{-1} M_k)^{-1} M_k^T R_k^{-1}}_{M_k^\#} (Y_k^{imu} - C_k \hat{X}_k^{imu}) \quad (6-29)$$

其中 $R_k = E[v_k^{imu} (v_k^{imu})^T]$

在惯性导航系统标定后，可以认为惯性传感器的确定性稳定误差 $X_k^{imu} = 0$ ，因此冗余惯性导航系统的传感器融合输出可表示为：

$$\hat{u}_k^{wls} = \underbrace{(M_k^T R_k^{-1} M_k)^{-1} M_k^T R_k^{-1}}_{M_k^\#} Y_k^{imu} \quad (6-30)$$

根据式(6-30)和式(6-31)，冗余惯性导航系统中量测状态方程中的 \tilde{u}_k 可表示为

$$\tilde{u}_k = M^\# Y_k^{imu} - u_k = M^\# C_k X_k^{imu} + M^\# v_k^{imu} \quad (6-32)$$

联合式(6-24)、式(6-27)和式(6-32)可得

$$\begin{bmatrix} X_{k+1}^{nav} \\ X_{k+1}^{imu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k^{nav} & N_k M^\# C_k \\ o & A_k^{imu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k^{nav} \\ X_k^{imu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_k M^\# v_k^{imu} \\ w_k^{imu} \end{bmatrix} \quad (6-33)$$

比较式(6-25)和(6-32)可看出冗余惯性导航系统的状态方程和惯性导航系统的状态方程的差别，冗余惯性导航系统状态方程的系数为 $M^\# C_k$ 和 $M^\# v_k^{imu}$ ，而惯性导航系统状态方程对应的系数为 C_k 和 v_k^{imu} 。

在冗余惯性导航系统中有两种类型的观测值，一是由冗余惯性传感器产生的观测值，二是由外部的导航装置产生的观测值（如 GPS，计程仪等）。如 5.2 节所述，所有惯性传感器的冗余观测可表示为传感器输出在 M_k 左零空间上的投影。定义这个投影为 T_k ，则惯性传感器的冗余观测可表示为

$$\underbrace{T_k Y_k^{imu}}_{Y_k^1} = \underbrace{T_k C_k}_{H_k^{imu}} X_k^{imu} + T_k v_k^{imu} \quad (6-34)$$

第二种类型的观测（外部导航信息），量测方程可表示为

$$Y_k^{nav} = H_k^{nav} X_k^{nav} + v_k^{nav} \quad (6-35)$$

注意到式(6-33)的系统噪声和式(6-34)的观测噪声都含有 v_k^{imu} ，由于观测噪声和系统噪声是正交的，

$$\begin{aligned} E\{M^\# v_k^{imu} (v_k^{imu})^T T_k^T\} &= M^\# R_k T_k^T \\ &= (M_k^T R_k^{-1} M_k)^{-1} M_k^T R_k^{-1} R_k T_k^T \\ &= (M_k^T R_k^{-1} M_k)^{-1} (T M_k)^T = 0 \end{aligned} \quad (6-36)$$

所以标准的 Kalman 递归计算可直接应用于式(6-33)、式(6-34)、式(6-35)所构成的系统，无需做任何修改！

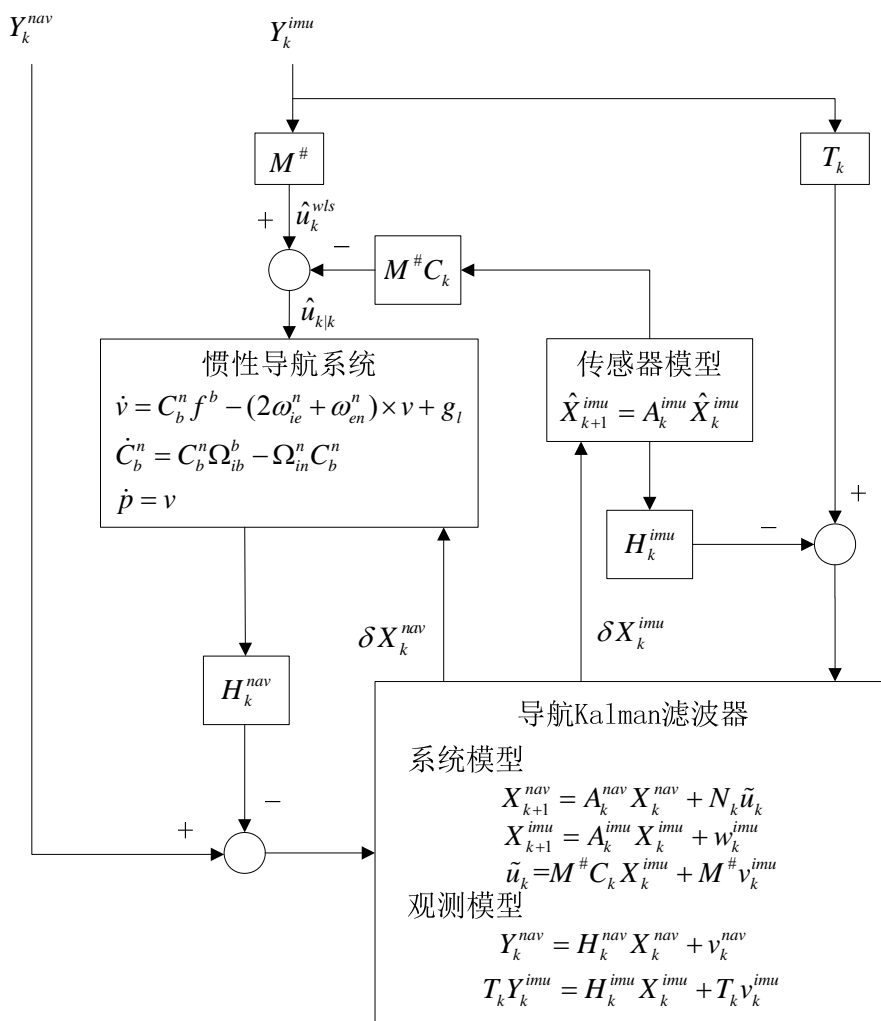


图 6.1 冗余惯性导航系最优导航方案框图

Fig.6.1 The optimal navigation solution structure for redundant inertial navigation system

图 6.1 是冗余惯性导航系统最优导航方案的框图。从图中可以看出，Kalman 滤波器工作于闭环状态，Kalman 输出的最优估计被反馈到导航子系统和量测子系统。由于这个闭环结构，在每一个量测输出周期中，Kalman 滤波器都要处理 $T_k Y_k^{imu}$ 的观测值，估计出来量测误差参数被反馈回去，并从 \hat{u}_k^{wls} 中减去。所以导航子系统的输入不是 \hat{u}_k^{wls} ，而是最优的机动量估计值 $\hat{u}_{k|k} = \hat{u}_k^{wls} - M^{\#} C_k \hat{X}_{k|k}^{imu}$ 。当外部的导航信息有效时，这些外部观测也会被 Kalman 滤波器处理，和惯性量测系统一样，处理结果同样会反馈给导航子系统和惯性量测子系统。从而减小传感器模型误差和导航误差，同时更精确地估算出 $\hat{X}_{k|k}^{imu}$ ，使得机动量估计值 $\hat{u}_{k|k}$ 更准确。

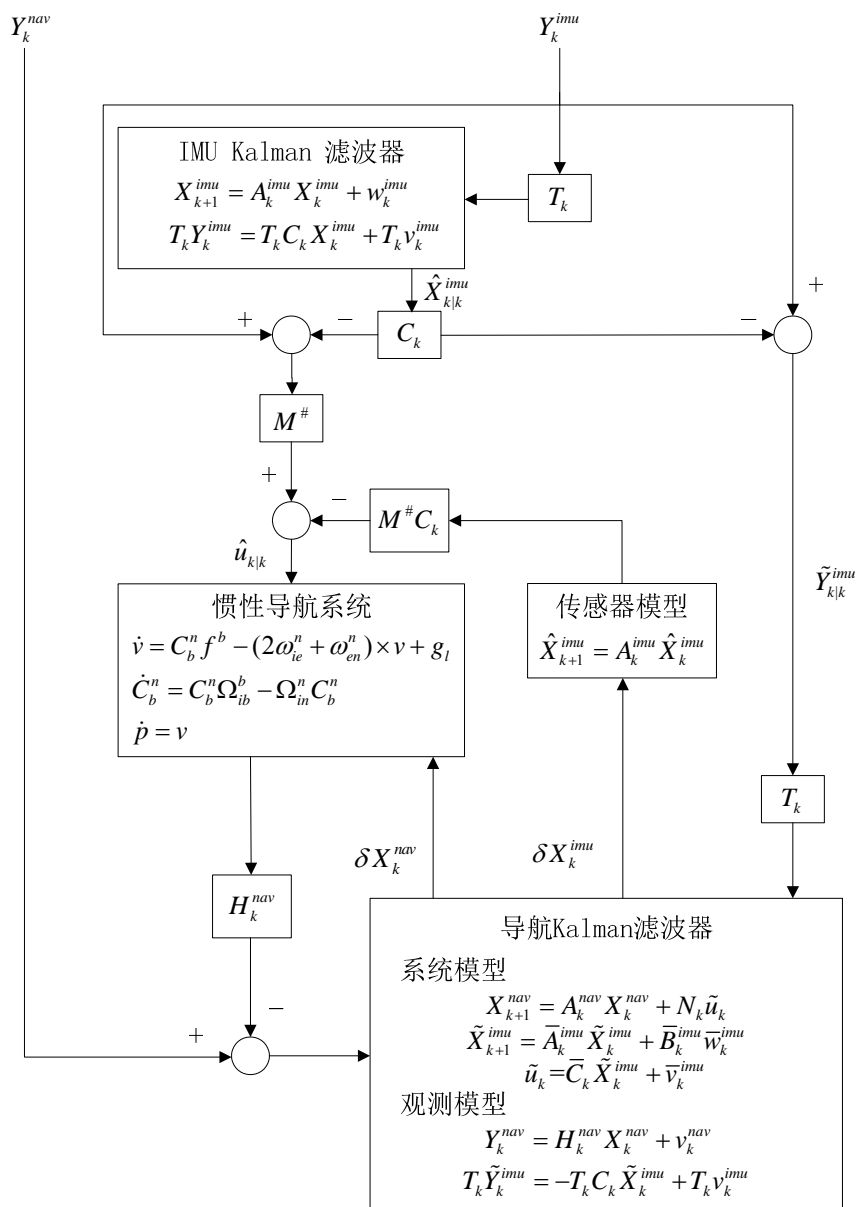


图 6.2 使用 2 个 Kalman 滤波器的冗余惯性导航系统的最优导航方案框图

Fig.6. 2 The optimal navigation solution structure using 2 Kalman filters for redundant inertial navigation system

由式(6-33)可看出导航系统的误差模型的系统矩阵是一个右上三角阵，也就是说，惯性量测装置的冗余观测只与传感器的误差状态相关。用 5.2 节中提及的最优传感器融合方法去替代图 6.1 中冗余传感器输出最小二乘的融合方法，可得如图 6.2 所示的冗余惯性导航系统的最优导航方案，该方案中有 2 个 Kalman 滤波器，第一个是惯性量测装置（IMU）的 Kalman 滤波器，他根据冗余传感器的输出求取最优的融合惯性输出，工作于开环状态；第二个是导航 Kalman 滤波器，根据惯性输出和外部导航数据求解导航信息和惯性传感器误差。比较图 6.1 和图 6.2，可以看出，图 6.2 中的导航 Kalman 滤

波器中用 IMU Kalman 滤波器的误差传播模型替代了惯性量测装置的误差模型。IMU Kalman 滤波器的误差传播模型可表示为

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{k|k} &= \hat{u}_{k|k} - u_k \\ &= \underbrace{M^{\#} C_k}_{\tilde{C}_k} \underbrace{(\hat{X}_{k|k}^{imu} - X_k^{imu})}_{\tilde{X}_{k|k}^{imu}} + \underbrace{M^{\#} v_k^{imu}}_{\tilde{v}_k^{imu}}\end{aligned}\quad (6-37)$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{k+1|k+1}^{imu} &= A_k^{imu} \hat{X}_{k|k}^{imu} + K_{k+1} T_{k+1} (Y_{k+1} - C_{k+1} A_k^{imu} \hat{X}_{k|k}^{imu}) - A_k^{imu} X_k^{imu} - w_k \\ &= \underbrace{(I - K_{k+1}^{imu} T_{k+1} C_{k+1}) A_k^{imu}}_{\tilde{A}_k^{imu}} \tilde{X}_{k|k}^{imu} + \underbrace{[I - K_{k+1}^{imu} T_{k+1} C_{k+1} \quad -K_{k+1}^{imu} T_{k+1}]}_{\tilde{B}_k^{imu}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_k \\ v_{k+1}^{imu} \end{bmatrix}}_{\tilde{w}_k}\end{aligned}\quad (6-38)$$

其中 K_{k+1}^{imu} 是 IMU Kalman 滤波器的增益。从图 6.2 可以看出, 冗余观测同时被两个 Kalman 滤波器处理, 以保证系统的最优。尽管冗余传感器最优融合输出 $\hat{u}_{k|k}$ 作为导航系统的输入, 导航滤波器仍然与冗余观测相关。另一方面, 值得注意的是, 导航滤波器中传感器误差状态和冗余观测是正交的。所以在导航滤波器中, 冗余观测不会对传感器误差状态产生额外的估计, 它只会影响导航状态。

在导航滤波器中, 惯性量测滤波器的新息可作为冗余观测, 冗余观测的新量测模型可以定义为:

$$T_k \tilde{Y}_k^{imu} = T_k (Y_k^{imu} - \hat{Y}_{k|k}^{imu}) = -T_k C_k \tilde{X}_k^{imu} + T_k v_k^{imu} \quad (6-39)$$

联合式 (6-24)、式 (6-32)、式 (6-35)、式 (6-37)、式 (6-38) 和式 (6-39), 导航 Kalman 滤波器的系统模型和观测模型可表示为:

系统模型:

$$\begin{bmatrix} X_{k+1}^{nav} \\ \tilde{X}_{k+1|k+1}^{imu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k^{nav} & N_k M^{\#} C_k \\ 0 & I - K_{k+1}^{imu} T_k C_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k^{nav} \\ \tilde{X}_{k|k}^{imu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_k M^{\#} v_k^{imu} \\ (I - K_{k+1}^{imu} T_k C_{k+1}) w_k - K_{k+1}^{imu} T_k v_{k+1}^{imu} \end{bmatrix} \quad (6-40)$$

观测模型:

$$\begin{bmatrix} Y_k^{nav} \\ T_k \tilde{Y}_k^{imu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_k^{nav} & 0 \\ 0 & -T_k C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k^{nav} \\ \tilde{X}_{k|k}^{imu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_k^{nav} \\ T_k v_k^{imu} \end{bmatrix} \quad (6-41)$$

由式 (6-40) 和式 (6-41) 可以看出, 该系统模型和观测模型与 Kalman 滤波器的系统模型定义不匹配。该模型中, 观测噪声 $T_k v_k^{imu}$ 与系统噪声 $K_{k+1}^{imu} T_k v_{k+1}^{imu}$ 相关联, 所以标准的 Kalman 滤波器不能应用在这个系统上, 但是可在此基础上演变出一个次优导航方案。

6.3.2 冗余惯性导航系统次优导航方案

在次优导航方案中, 冗余观测只被用做冗余传感器最优估计, 冗余传感器的最优估计值 $\hat{u}_{k|k}$ 再作为惯性导航系统的输入, 而冗余观测不再用来进行导航误差估计了。次优

导航方案实现框图如图 6.3 所示。由式(6-37)和式(6-38)可知，在导航滤波器中 $\hat{u}_{k|k}$ 的误差值被传递到导航误差状态中，所以导航滤波器的系统模型和式(6-40)一致，但是冗余观测不再作为在导航滤波器的输入，导航滤波器的观测模型如式(6-35)。比较图 6.2 和图 6.3 可发现，将图 6.2 中关于冗余观测的导航估计部分去掉，就是次优导航方案^[125]。

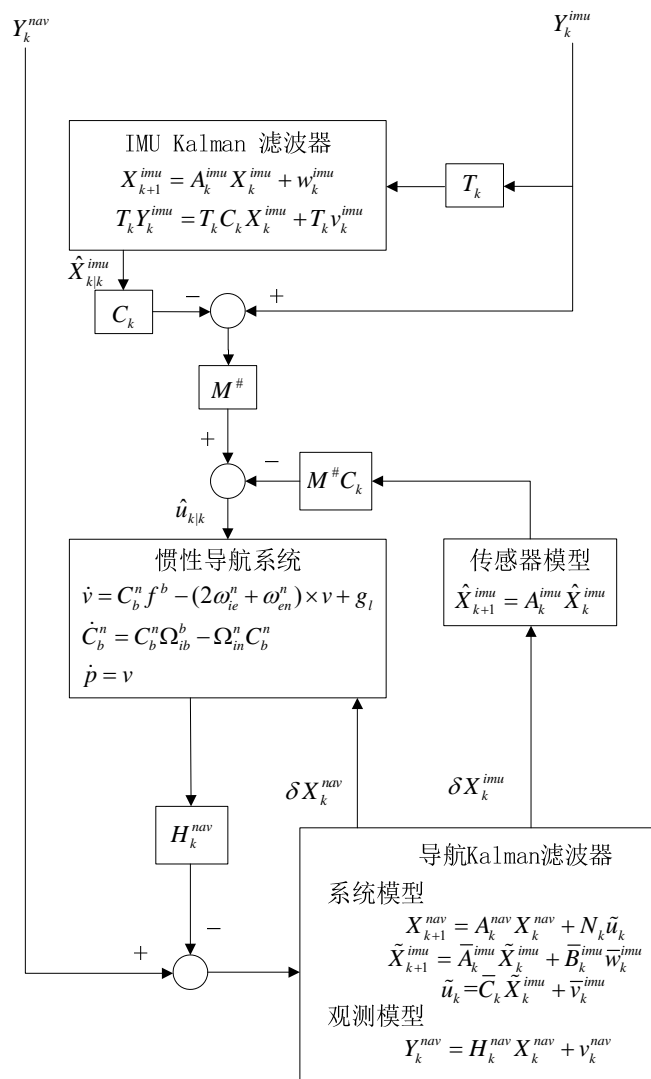


图 6.3 次优导航方案框图

Fig.6. 3 The pseudo-optimal navigation solution structure

6.4 带噪声估计的冗余惯性导航系统的次优导航方案

6.4.1 自协方差最小二乘噪声估计

在上节中，次优导航方案必须基于系统方程为线性和噪声为高斯假设的前提上，否则状态估计将不是在最小方差的最优估计。而且在计算 Kalman 增益时需要确切的知道系统噪声特性 Q_k 和量测噪声特性 R_k ，而二者在实际应用中通常都是未知的。这就催生

出各种自适应 Kalman 滤波算法，在滤波过程中估计未知的噪声特性。在文献[128-130]中总结和介绍了各种自适应 Kalman (AKF)，在文献[128]中将噪声估计技术分为 4 类：贝叶斯法、最大似然法 (ML)、相关法、协方差匹配法。贝叶斯法需要解决几个困难的积分，最大似然法由于涉及偏导数的计算，因此巨大的计算量阻碍了他们的应用。相关法和协方差匹配法利用滤波残差与未知噪声过程相关的某种特性来估计噪声特性，表达式简单，只是简单的矩阵计算。基于上述原因，本节采用一种自协方差噪声估计法来估计噪声特性^[131]。

系统模型为：

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k \quad (6-42)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (6-43)$$

其中 x_k 是系统状态， y_k 是量测值， w_k 是系统噪声， v_k 是量测噪声，且 w_k 是均值为 0 方差为 Q 的白噪声， v_k 是均值为 0 方差为 R 的白噪声。

线性状态估计可以表示为：

$$\bar{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k \quad (6-44)$$

$$r_k = y_k - H_k \bar{x}_k \quad (6-45)$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k r_k \quad (6-46)$$

$$K_k = M_k H_k^T (H_k M_k H_k^T + R)^{-1} \quad (6-47)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) M_k \quad (6-48)$$

$$M_{k+1} = A_k P_k A_k^T + Q \quad (6-49)$$

其中 \bar{x}_{k+1} 表示状态误差估计， \hat{x}_k 表示后验状态误差估计，定义估计误差为 $\varepsilon_k = x_k - \bar{x}_k$ ，这个误差的演化过程可表示为：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &= x_{k+1} - \bar{x}_{k+1} \\ &= A_k x_k + B_k w_k - A_k (\bar{x}_k + K_k (y_k - H_k \bar{x}_k)) \\ &= A_k (x_k - \bar{x}_k) + B_k w_k - A_k K_k (H_k x_k + v_k - H_k \bar{x}_k) \end{aligned} \quad (6-50)$$

$$\begin{aligned} &= A_k \varepsilon_k - A_k K_k H_k (x_k - \bar{x}_k) + B_k w_k - A_k K_k v_k \\ &= \underbrace{(A_k - A_k K_k H_k)}_{\bar{A}_k} \varepsilon_k + \underbrace{\begin{bmatrix} B_k & -A_k K_k \end{bmatrix}}_{\bar{B}_k} \underbrace{\begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix}}_{\bar{w}_k} \\ \varepsilon_{k+1} &= \bar{A}_k \varepsilon_k + \bar{B}_k \bar{w}_k \end{aligned} \quad (6-51)$$

此外，量测新息可表示为：

$$r_k = y_k - H_k \bar{x}_k = H_k x_k + v_k - H_k \bar{x}_k = H_k \varepsilon_k + v_k \quad (6-52)$$

假设 (A_k, H_k) 是可观测的， \bar{A}_k 是稳定的。自协方差最小二乘估计的目的在于观测滤

波器的新息和利用任何观测到的非零相关性获得未知噪声协方差和最优增益。在以上的这种表示方法中，状态和量测噪声被关联在一起：

$$E[\bar{w}_k \bar{w}_k^T] = \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad (6-53)$$

$$E[\bar{w}_k v_k^T] = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} \quad (6-54)$$

假设初始估计误差 $E[\varepsilon_0] = 0$ ，由于 \bar{A}_k 是被认为是稳定的，随着 k 的增加，估计误差的均值逐渐收敛为 0，同时协方差也逐渐趋于一个稳定状态，这个稳定状态也就是 Lyapunov 方程的解。

$$E[\varepsilon_k] \rightarrow 0 \quad (6-55)$$

$$\text{cov}[\varepsilon_k] \rightarrow P^- \quad (6-56)$$

$$P^- = \bar{A}_j P^- \bar{A}_j^T + \bar{B}_j \bar{Q} \bar{B}_j^T \quad (6-57)$$

因此只要我选择的 k 足够大，就可以将这个稳定状态作为初始状态值。

为了获得状态和量测噪声误差的关联关系，自协方差值被定义为 $\ell_{k,k+j} = E[r_k r_{k+j}^T]$ 。

从方程 (6-52) 可得，

$$E[r_k r_k^T] = \ell_{k,k} = H_k P^- H_k^T + R \quad (6-58)$$

由此可得

$$\begin{aligned} E[r_{k+1} r_k^T] &= \ell_{k+1,k} \\ &= E[(H_{k+1} \varepsilon_{k+1} + v_{k+1})(H_k \varepsilon_k + v_k)^T] \\ &= E[(H_{k+1}(\bar{A}_k \varepsilon_k + \bar{B}_k \bar{w}_k) + v_{k+1})(H_k \varepsilon_k + v_k)^T] \\ &= H_{k+1} \bar{A}_k P^- H_k^T + H_{k+1} \bar{B}_k E[\bar{w}_k v_k^T] \\ &= H_{k+1} \bar{A}_k P^- H_k^T - H_{k+1} \bar{A}_k K_k R \end{aligned} \quad (6-59)$$

$$\begin{aligned} E[r_{k+2} r_k^T] &= \ell_{k+2,k} \\ &= E[(H_{k+2} \varepsilon_{k+2} + v_{k+2})(H_k \varepsilon_k + v_k)^T] \\ &= E[(H_{k+2}(\bar{A}_{k+1} \varepsilon_{k+1} + \bar{B}_{k+1} \bar{w}_{k+1}) + v_{k+2})(H_k \varepsilon_k + v_k)^T] \\ &= H_{k+2} \bar{A}_{k+1} \bar{A}_k P^- H_k^T + H_{k+2} \bar{A}_{k+1} \bar{B}_k E[\bar{w}_k v_k^T] \\ &= H_{k+2} \bar{A}_{k+2} \bar{A}_k P^- H_k^T - H_{k+2} \bar{A}_{k+1} \bar{A}_k K_k R \end{aligned} \quad (6-60)$$

所以将式 (6-59)、(6-60) 推广开可得

$$E[r_{k+j} r_k^T] = \ell_{k+j,k} = H_{k+j} \prod_{n=k}^{k+j-1} \bar{A}_n P^- H_k^T - H_{k+j} \prod_{n=k}^{k+j-1} \bar{A}_n \bar{A}_k K_k R \quad (6-61)$$

其中 $\prod_{n=k}^{k+j-1} \bar{A}_n = \bar{A}_{k+j-1} \bar{A}_{k+j-2} \cdots \bar{A}_k$

可式 (6-61) 写成自协方差矩阵 (ACM)

$$\mathfrak{R}(N) = \begin{bmatrix} \ell_{k,k} & \cdots & \ell_{k+N-1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{k,k+N-1} & \ddots & \ell_{k+N-1,k+N-1} \end{bmatrix} \quad (6-62)$$

其中 N 的值取决于期望的估计精度和计算复杂度。 N 越大，估计越精确，但是计算量也越大，因此选择 N 要兼顾精度和计算量两个因素。

新息的自相关协方差矩阵可表示为：

$$\mathfrak{R}(N) = OP^-O^T + \Gamma(\bigoplus_{i=1}^N \bar{B}_i \bar{Q}_w \bar{B}_i^T) \Gamma^T + \Psi(\bigoplus_{i=1}^N R) + (\bigoplus_{i=1}^N R) \Psi^T + \bigoplus_{i=1}^N R \quad (6-63)$$

其中

$$O = \begin{bmatrix} H_k \\ H_{k+1} \bar{A}_k \\ H_{k+2} \bar{A}_{k+1} \bar{A}_k \\ \vdots \\ H_{k+N-1} \prod_{i=k}^{k+N-2} \bar{A}_i \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ H_{k+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ H_{k+N-1} \prod_{i=k}^{k+N-3} \bar{A}_i & \cdots & H_{k+1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \Gamma \left[\bigoplus_{j=1}^N (-A_k K_k) \right],$$

$\bigoplus_{j=1}^N$ 表示矩阵直和。定义向量运算为：

$$\text{vec}(A) = A_s = [a_1^T \cdots a_k^T]^T \quad (6-64)$$

其中 a_k 表示矩阵 A 的第 k 列。将式 (6-57) 和 (6-63) 用向量运算表达式来表示，这两式可表示为：

$$P_s^- = (\bar{A}_j \otimes \bar{A}_j) P_s^- + (\bar{B}_j \bar{Q} \bar{B}_j^T), \quad j = k, k+1, \cdots \quad (6-65)$$

$$\begin{aligned} [\mathfrak{R}(N)]_s &= [(O \otimes O)(I_{n^2} - \bar{A}_{N-1} \otimes \bar{A}_{N-1})^{-1} + (\Gamma \otimes \Gamma) \Theta_{n,N}](B_{N-1} \otimes B_{N-1})(Q)_s \\ &+ \left[[(O \otimes O)(I_{n^2} - \bar{A}_{N-1} \otimes \bar{A}_{N-1})^{-1} + (\Gamma \otimes \Gamma) \Theta_{n,N}](A_{N-1} K_{N-1} \otimes A_{N-1} K_{N-1}) \right. \\ &\left. + [\Psi \otimes \Psi + I_{p^2 N^2}] \Theta_{p,N} \right] (R)_s \end{aligned} \quad (6-66)$$

其中 n 是滤波状态的大小， \otimes 表示张量乘（Kronnercker product）， $\Theta_{p,N}$ 是用来将直和转换成向量的矩阵，例如 $\Theta_{p,N}$ 是一个只有 0 和 1 的 $(pN)^2 \times p^2$ 的矩阵

$$\left[\bigoplus_{i=1}^N R \right]_s = \Theta_{p,N} (R)_s \quad (6-67)$$

理想情况下，将乘积 $r_i r_{i+j}^T$ 的期望作为自协方差。实际上，由于这是一个遍历的过程，所以可将期望近似为乘积 $r_i r_{i+j}^T$ 对时间的平均值。自协方差估计计算过程可表示为：

$$\hat{\ell}_{k,k+j} = \frac{1}{N_d - j} \sum_{i=1}^{N_d-j} r_i r_{i+j}^T \quad (6-68)$$

这称之为无偏的自协方差估计。

用自协方差估计 $\hat{\ell}_{k,k+j}$ 构建自协方差矩阵（ACM） $\hat{\mathfrak{R}}(N)$ 。最小二乘技术现在可用来估计

协方差矩阵 R , Q 。可将式(6-66)写成 $Ax=b$ 的形式, 其中

$$A = D(A_{N-1}K_{N-1} \otimes A_{N-1}K_{N-1}) + [\Psi \oplus \Psi + I_{p^2N^2}] \Theta_{p,N} \quad (6-69)$$

$$D = [(O \otimes O)(I_{n^2} - \bar{A}_{N-1} \otimes \bar{A}_{N-1})^{-1} + (\Gamma \otimes \Gamma)\Theta_{n,N}] \quad (6-70)$$

$$x = \begin{bmatrix} (Q)_s \\ (R)_s \end{bmatrix} \quad (6-71)$$

$$b = [\Re(N)]_s \quad (6-72)$$

则自协方差最小二乘估计为

$$\hat{x} = \arg \min_x \|Ax - [\Re(N)]_s\|_2^2 \quad (6-73)$$

自协方差最小二乘估计的解为

$$\hat{x} = A^\dagger \hat{b} \quad (6-74)$$

其中 $A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$ 。

这是一个标准的最小二乘估计结果。当矩阵 A 是满秩时, 自协方差可唯一的确定。

在实际应用中, 冗余惯性传感器的量测噪声特性和建立误差模型的系统噪声特性是不可能准确获知的, 不准确的噪声特性会大大减弱 Kalman 滤波性能, 甚至会发散。即使系统运行前已准确获知量测噪声特性和系统噪声特性, 但随着系统的长期运行和外部环境的变化, 量测噪声特性和系统噪声特性都会发生改变。因此在最优估计系统中需要对噪声特性进行实时估计或间歇估计, 以保证 Kalman 滤波时, 噪声特性是准确的。由此, 在冗余惯性传感器最优融合算法中, 加入自协方差最优二乘噪声估计, Kalman 在进行最优估计的同时进行实时噪声估计, 以保证估计的最优。将噪声估计器融合到次优导航方案中, 即形成一个改进的次优导航方案 (IPO.NA)。

6.4.2 带噪声估计的冗余惯性导航系统的次优导航方案

带噪声估计的 Kalman 滤波器的完整计算步骤如下:

- (1) $\hat{X}_{k,k-1} = A_k \hat{X}_{k-1}$
- (2) $r_k = TZ_k - TC_k \hat{X}_{k,k-1}$
- (3) $\hat{X}_k = \hat{X}_{k,k-1} + K_k r_k$
- (4) $K_k = P_{k,k-1} (TC_k)^T [TC_k P_{k,k-1} (TC_k)^T + \hat{R}_k]^{-1}$
- (5) $P_{k,k-1} = A_k P_{k-1} A_k^T + \hat{Q}_{k-1}$
- (6) $P_k = [I - K_k TC_k] P_{k,k-1} [I - K_k TC_k]^T + K_k \hat{R}_k K_k^T$

(7) 计算 $\hat{\ell}_{k,k+j} = \frac{1}{N_d - j} \sum_{i=1}^{N_d-j} r_i r_{i+j}^T$, 组成 $\hat{\mathfrak{R}}(N)$

(8) 将 $\hat{\mathfrak{R}}(N)$ 变换成向量 $\hat{b} = [\hat{\mathfrak{R}}(N)]_s$

(9) 计算 $A = D(A_{N-1}K_{N-1} \otimes A_{N-1}K_{N-1}) + [\Psi \oplus \Psi + I_{p^2N^2}] \Theta_{p,N}$, 其中

$$D = [(O \otimes O)(I_{n^2} - \bar{A}_{N-1} \otimes \bar{A}_{N-1})^{-1} + (\Gamma \otimes \Gamma)\Theta_{n,N}]$$

$$O = \begin{bmatrix} TC_k \\ TC_{k+1}\bar{A}_k \\ TC_{k+2}\bar{A}_{k+1}\bar{A}_k \\ \vdots \\ TC_{k+N-1}\prod_{i=k}^{k+N-2}\bar{A}_i \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = (A_k - A_k K_k TC_k), \quad \bar{B}_k = [B_k \quad -A_k K_k],$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ TC_{k+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ TC_{k+N-1}\prod_{i=k}^{k+N-3}\bar{A}_i & \cdots & TC_{k+1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \Gamma \left[\bigoplus_{j=1}^N (-A_k K_k) \right]$$

(10) $x = \begin{bmatrix} (Q)_s \\ (R)_s \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \hat{b}$

(11) 估计出 \hat{Q}_k , \hat{R}_k

(12) $k = k + 1$, 返回第 (1) 步。

将该带噪声估计的 Kalman 滤波器去替代次优导航方案中的 IMU Kalman 滤波器, 并将估计出来的观测噪声协方差去调整 $M^\#$ 。因此次优导航方案的框图可调整为:

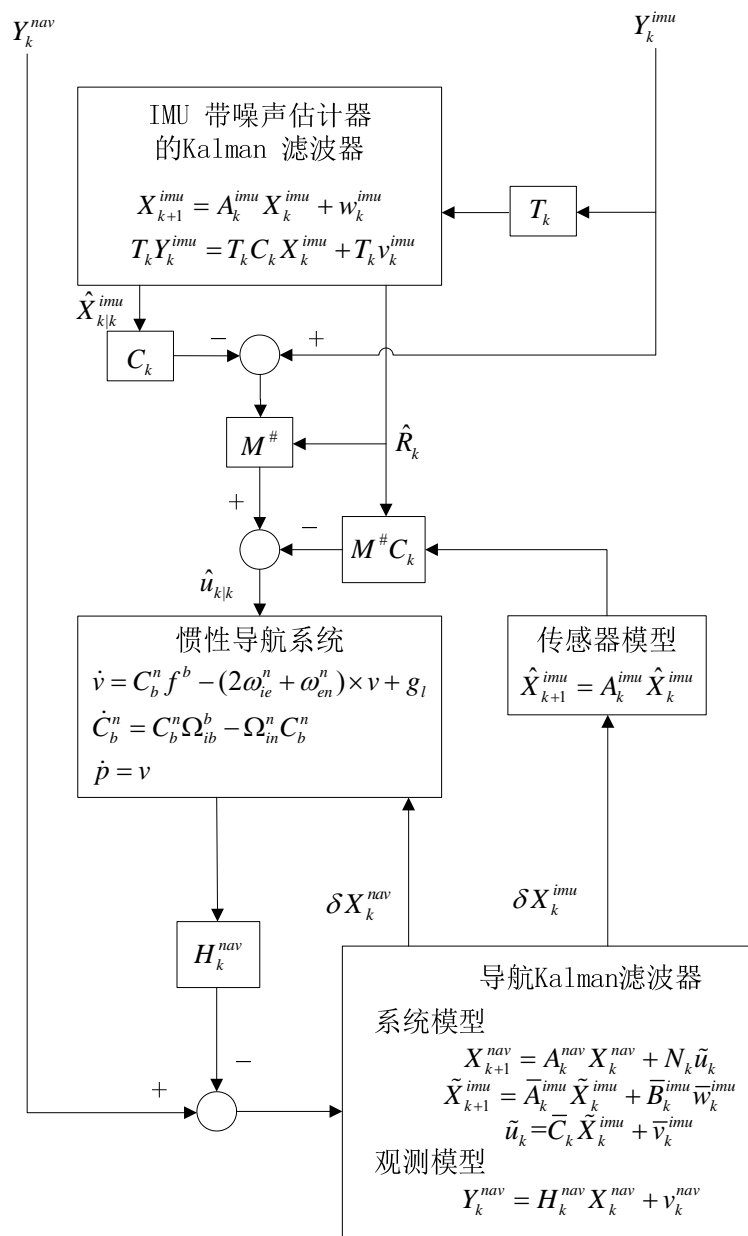


图 6.4 改进的次优导航方案框图

Fig.6.4 The improved pseudo-optimal navigation solution structure

图 6.4 为改进的次优导航方案的框图，他将噪声估计器融合到次优导航算法中，以保证 IMU Kalman 的估计最优。

6.5 导航方案的仿真与分析

6.5.1 仿真数据的产生和仿真对象

本章的仿真数据的产生与仿真对象和 5.5 节的相关内容相同！

6.5.2 仿真实验设置

为了充分说明最优导航方案和次优导航方案的性能和特点，特设置以下四个仿真实验来说明。

仿真实验一：假设冗余传感器系统中没有传感器发生故障漂移，各传感器的漂移情况如表 5.1 所示，所有的传感器只存在一定恒值偏置，冗余传感器系统的量测噪声和系统噪声统计特性已知，外部量测信息在第 150 秒有效，比较图 6.1 示的最优导航方案(WLS.NA)和图 6.3 示的次优导航方案 (PO.NA) 的性能。

仿真实验二：假设冗余传感器系统中有传感器发生故障漂移，各传感器的漂移情况如表 5.2 所示，冗余传感器系统的量测噪声和系统噪声统计特性已知，外部量测信息在第 150 秒有效，比较图 6.1 示的最优导航方案 (WLS.NA) 和图 6.3 示的次优导航方案 (PO.NA) 的性能。

仿真实验三：假设冗余传感器系统中有传感器发生故障漂移，各传感器的漂移情况如表 5.2 所示，当冗余传感器系统的量测噪声统计特性已知，而系统噪声未知时，外部量测信息在第 150 秒有效，比较图 6.1 示的最优导航方案 (WLS.NA) 和图 6.3 示的次优导航方案 (PO.NA) 的性能。

仿真实验四：假设冗余传感器系统中有传感器发生故障漂移，各传感器的漂移情况如表 5.2 所示，当冗余传感器系统的量测噪声统计特性已知，而系统噪声未知时，外部量测信息在第 150 秒有效，比较图 6.3 示的次优导航方案 (PO.NA) 和图 6.4 示的改进的次优导航方案 (IPO.NA) 的性能。

6.5.3 仿真与分析

6.5.3.1 仿真实验一的仿真与分析

冗余惯性量测装置的误差模型、配置矩阵 M ，及其配置矩阵 M 的左零空间 T 和量测系统的模型参数都同第五章中的仿真实验五。由图 6.1 可知，最优导航方案中的观测状态包含两部分，一部分是惯性量测装置的 12 个传感器误差状态 X_k^{imu} ，另一部分是 9 个导航误差状态 X_k^{nav} 。由于本文主要研究的是冗余惯性导航系统的一些关键技术，因此在本章中并不关心外部导航信息来源和准确性，只考虑在外部信息有效时，Kalman 滤波器可以得到一个准确的导航误差状态 X_k^{nav} 。图 6.1 中的最优导航方案中用一个 Kalman 滤波器去处理惯性量测装置的冗余观测和外部的导航信息，将更新得到的状态偏差 $\delta X_{k|k}^{imu}$ 和 $\delta X_{k|k}^{nav}$ 去纠正惯性量测系统模型和惯性导航系统状态。

在该仿真实验中,假设冗余传感器系统中没有传感器发生故障漂移,只存在一定恒值偏置,冗余传感器系统的量测噪声和系统噪声统计特性已知,分别使用图 6.1 示的最优导航方案(WLS.NA)和图 6.3 示的次优导航方案(PO.NA)进行导航计算。在 150s 的时候,外部导航信息有效,此时外部导航信息会对惯性量测装置的状态误差和惯性导航系统的状态误差进行更新,为了和第五章中冗余传感器最优融合算法比较,也将惯性量测装置等效到的三个坐标轴上的加速度和角速度变化情况绘制出来,如图 6.5 和图 6.6。从这两张图中,可以看出,这两个方案中惯性量测装置中三轴的加速度和角速度误差都是相互重叠在一起的,即使在外信息有效时,加速度和角速度误差得到纠正,但是两种方案中的加速度和角速度依然保持一致。图 6.7、图 6.8 和图 6.9 分别是两种导航方案的导航位置误差和飞行轨迹。由这三张图可看出,在该仿真实验条件下,这两种导航方案导航位置误差和飞行轨迹基本重合。导航结束时,最优导航方案的位置误差为 $[-0.0180, -14.4667, -12.5685]$,次优导航方案的导航位置误差 $[-0.0575, -14.4967, -12.5582]$,这两个位置误差值基本相等。由此可得出结论,在冗余惯性导航系统中没有传感器发生故障漂移,系统的量测噪声和系统噪声统计特性已知的条件下,最优导航方案和次优导航方案是等效的。

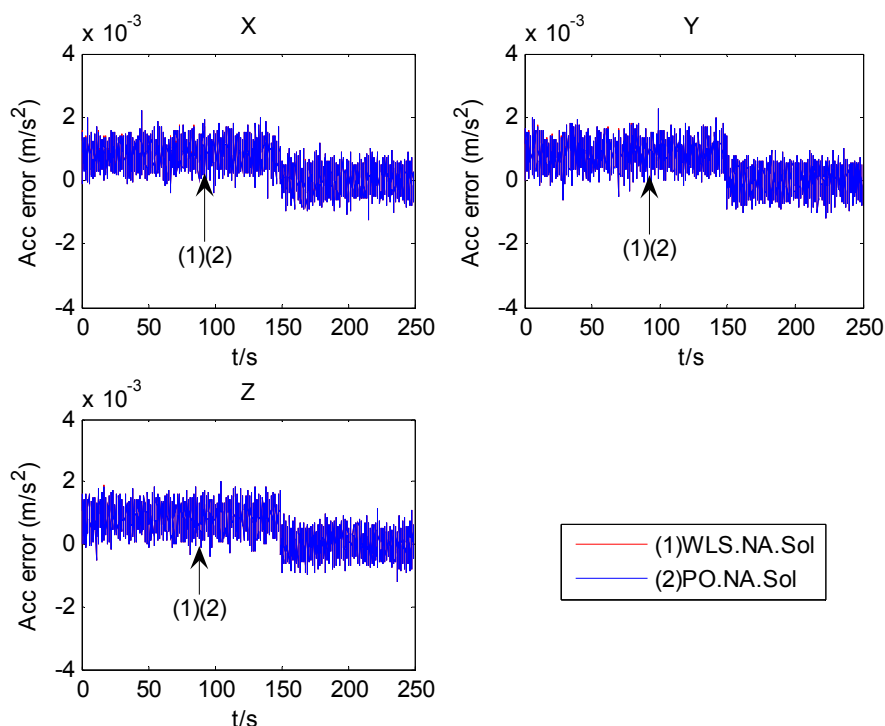


图 6.5 仿真实验一中两种导航方案的加速度误差

Fig.6. 5 The acceleration errors of two navigation solutions in experiment 1

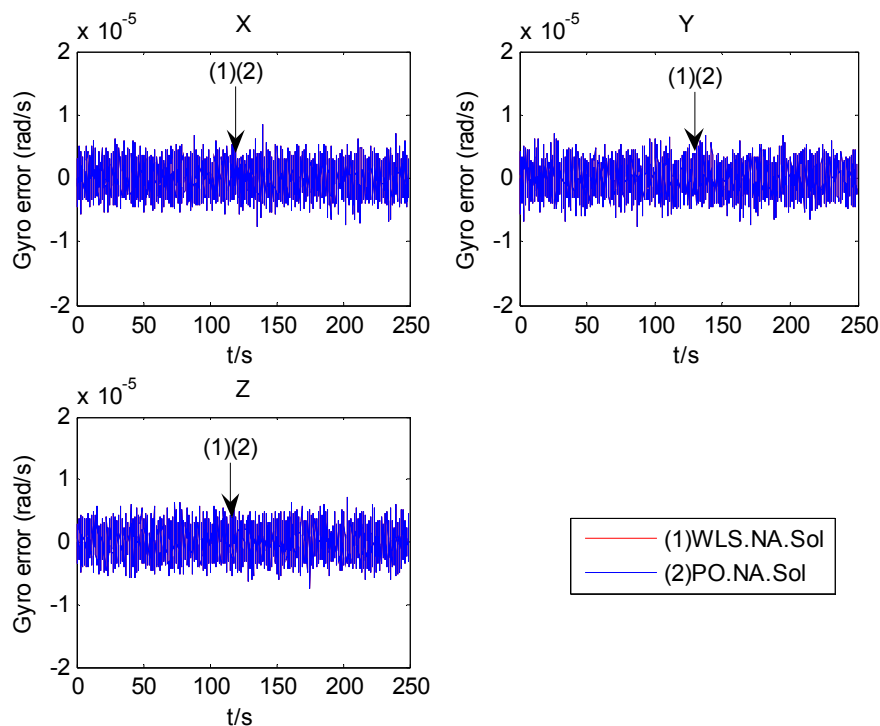


图 6.6 仿真实验一中两种导航方案的角速度误差

Fig.6. 6 The angular velocity errors of two navigation solutions in experiment 1

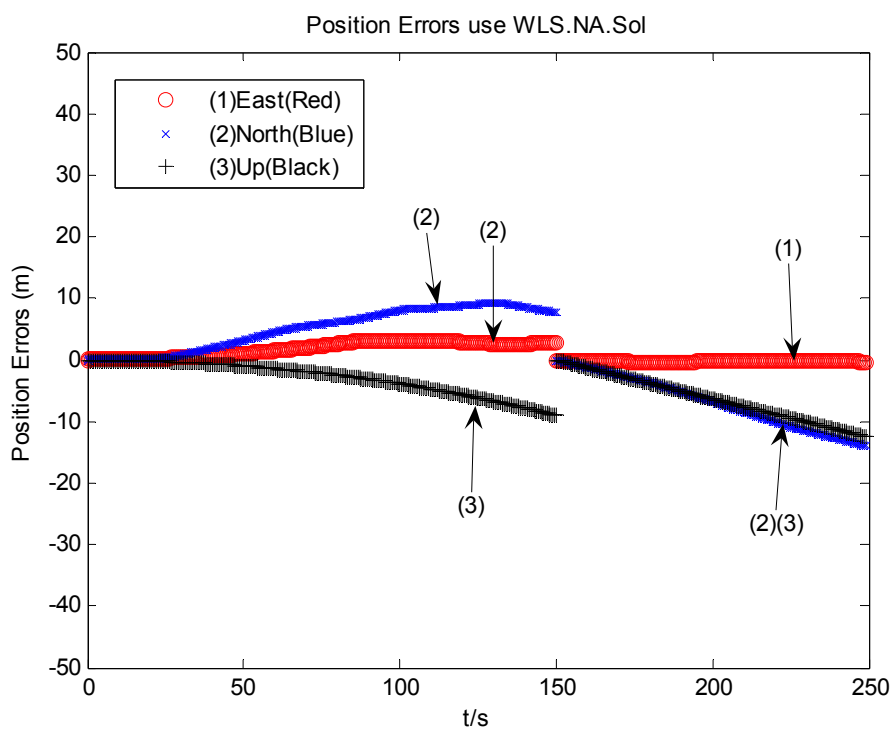


图 6.7 仿真实验一中基于 WLS 的最优导航方案的位置误差

Fig.6. 7 The position errors of WLS optimal navigation solution in experiment 1

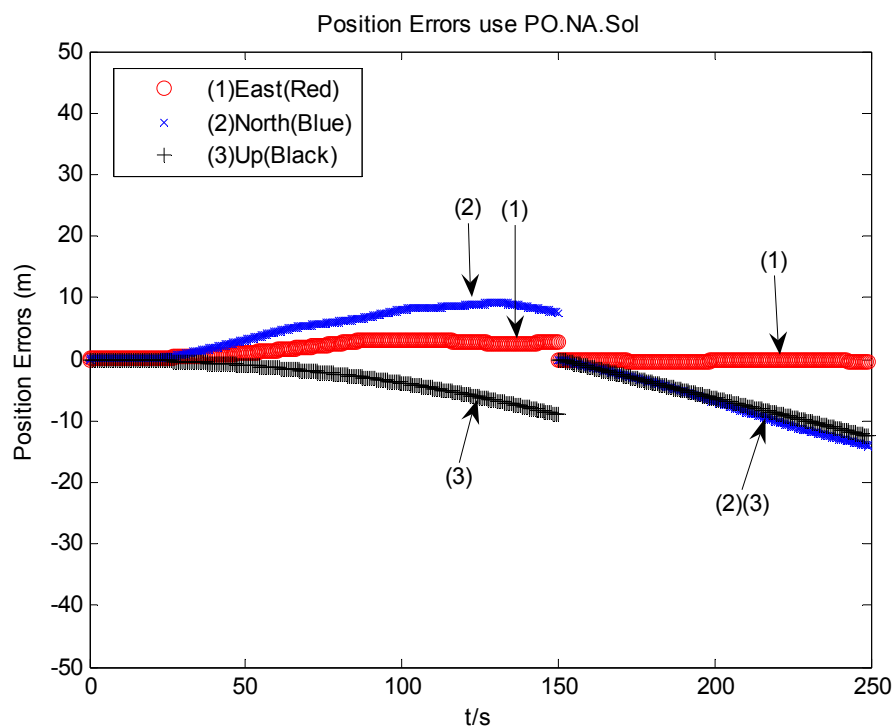


图 6.8 仿真实验一中基于次优导航方案的位置误差

Fig.6. 8 The position errors of pseudo-optimal navigation solution in experiment 1

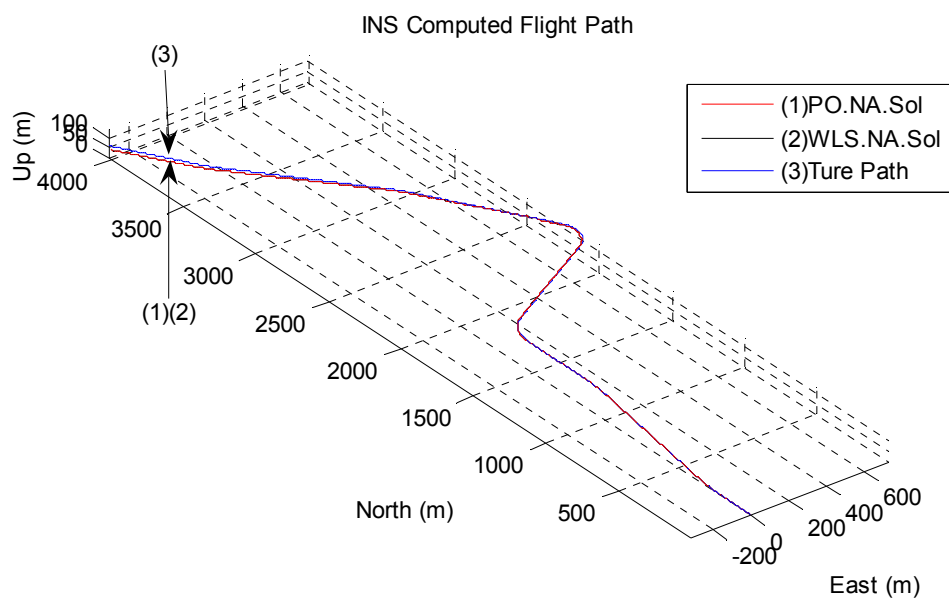


图 6.9 仿真实验一中两种导航方案的飞行轨迹

Fig.6. 9 The flight paths of two navigation solutions in experiment 1

6.5.3.2 仿真实验二的仿真与分析

冗余惯性量测装置的误差模型、配置矩阵 M ，及其配置矩阵 M 的左零空间 T 和量测系统的模型参数都同第五章中的仿真实验四，其他条件同仿真实验一。在该仿真实验中惯性量测中有传感器发生故障漂移，同时冗余惯性量测装置的量测噪声和系统噪声统计特性均已知。分别用图 6.1 示的最优导航方案 (WLS.NA) 和图 6.3 示的次优导航方案 (PO.NA) 进行导航计算，在 150s 的时候，外部导航信息有效，两种导航方案中惯性量测装置等效到的三个坐标轴上的加速度误差和角速度误差，如图 6.10 和图 6.11 所示。从图 6.10 中可看出，在 X 轴上，两种导航方案中加速度误差相似，在 Y、Z 轴上，在外部导航信息有效前，PO.NA 的加速度误差要明显小于 WLS.NA 的加速度误差，当外部导航信息有效时，两种导航方案中加速度误差会发生跳变，WLS.NA 的加速度误差会直接变为 0，而 PO.NA 的加速度误差发生跳变后逐渐回归到 0。在图 6.11 中角速度误差也会出现类似的情况，在 Y 轴上，两种导航方案中角速度误差相似，在 X、Z 轴上，在外部导航信息有效前，PO.NA 的角速度误差要明显小于 WLS.NA 的角速度误差，当外部导航信息有效时，两种导航方案中角速度误差会发生跳变，WLS.NA 的角速度误差会直接变为 0，而 PO.NA 的角速度误差发生跳变后逐渐回归到 0。综上所述，从图 6.10 和图 6.11 可看出三个方面的内容：第一，在外部导航信息有效之前，PO.NA 的惯性信息（加速度和角速度）误差要 WLS.NA 的惯性信息误差要小；第二，在外部导航信息有效时，WLS.NA 的惯性信息误差直接跳变为 0，而 PO.NA 的惯性信息误差也发生跳变，但是却不为 0；第三，在外部导航信息有效后，WLS.NA 惯性信息误差维持 0 不变，而 PO.NA 的惯性信息误差逐渐趋于 0。针对这三个现象，下面逐一分析其出现的原因。出现第一种现象的原因是 WLS.NA 使用最小二乘法来处理惯性传感器的冗余信息的，而 PO.NA 则采用冗余传感器的最优融合算法，在第五章中已经说明，最小二乘法无法去除传感器系统中的故障传感器输出，而冗余传感器的最优融合算法则可忽略掉故障传感器的故障输出，因此 PO.NA 的惯性信息（加速度和角速度）误差要 WLS.NA 的惯性信息误差要小。出现第二种现象的原因是在外部导航信息有效时，会将当前传感器误差去更新惯性传感器模型，可将 WLS 中传感器误差直接抵消掉，因此 WLS.NA 的惯性信息误差直接跳变为 0，而 PO.NA 中传感器的最优融合算法中采用的 Kalman 滤波器，将当前传感器误差去更新惯性传感器模型时，Kalman 增益无法立即调整过来，因此会出现惯性信息误差跳过了的现象。出现第三种现象的原因和第二种现象类似，由于 WLS.NA 采用的是最小二乘法来处理冗余观测的，当传感器误差更新后，它就变成最优估计了，所以 WLS.NA 的惯性信息误差维持 0

不变,而当传感器误差更新后,P0.NA 中 Kalman 增益逐渐调整过来,因此 P0.NA 的惯性信息误差出现逐渐趋于 0 的现象。在这两张图中还可以看出,在外部导航信息无效的时候,导航 Kalman 滤波器的传感器冗余观测并不能对传感器的误差状态产生影响。

图 6.12、图 6.13 和图 6.14 分别是两种导航方案的导航位置误差和飞行轨迹。由这三张图可看出,P0.NA 的导航位置误差明显小于 WLS.NA 的位置误差。导航结束时,P0.NA 的位置误差为 $[-1.0987, -4.4634, -30.1425]$,而 WLS 的位置误差为 $[74.4674, -0.3539, 55.2639]$ 。很明显,P0.NA 的经度误差要比 WLS.NA 的经度误差小的多,P0.NA 的高度误差只有 WLS.NA 高度误差的差不多一半,但是 P0.NA 的纬度误差要比 WLS.NA 的纬度误差要大。由此可得出结论,在惯性量测中有传感器发生故障漂移,同时冗余惯性量测装置的量测噪声和系统噪声统计特性均已知的条件下,次优导航方案的导航精度要比最优导航方案要高。究其原因,次优导航方案采用了冗余传感器的最优融合算法处理含有故障传感器的冗余观测信息,而最优导航方案采用最优二乘法来处理含有故障传感器的冗余观测信息,所以导致最优导航方案中的惯性信息误差过大,从而导致了导航精度差。

此时,将该仿真实验中的两种导航方案的位置误差和第五章中的仿真实验一中两种算法的导航位置相比较,即比较图 6.12、图 6.13、图 5.11、图 5.12,可发现本仿真实验中的两种导航方案的位置误差要小得多。从而证明了最优导航方案和次优导航方案的有效性。

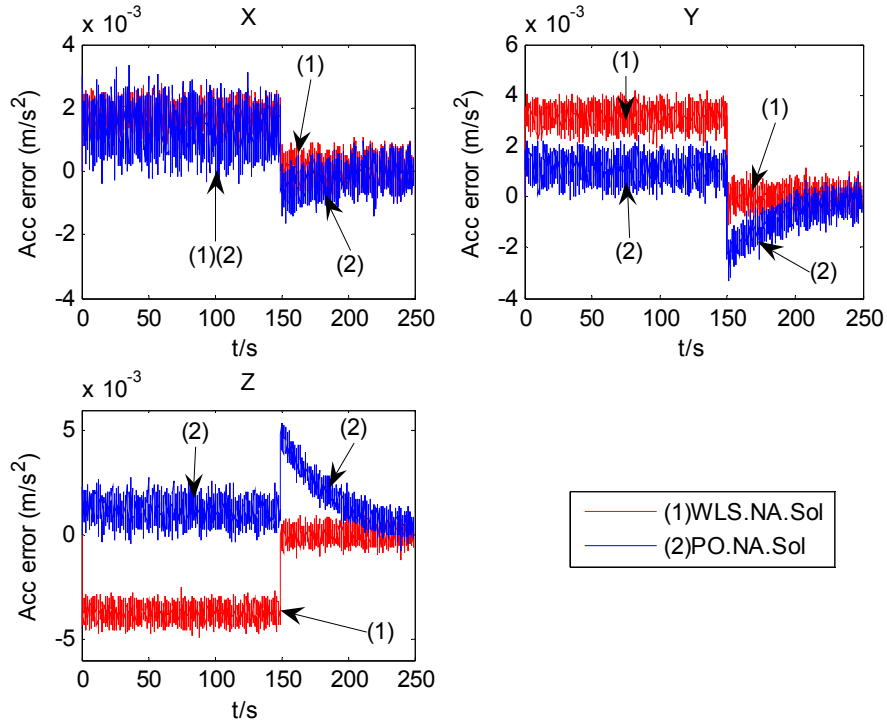


图 6.10 仿真实验二中两种导航方案的加速度误差

Fig.6. 10 The acceleration errors of two navigation solutions in experiment 2

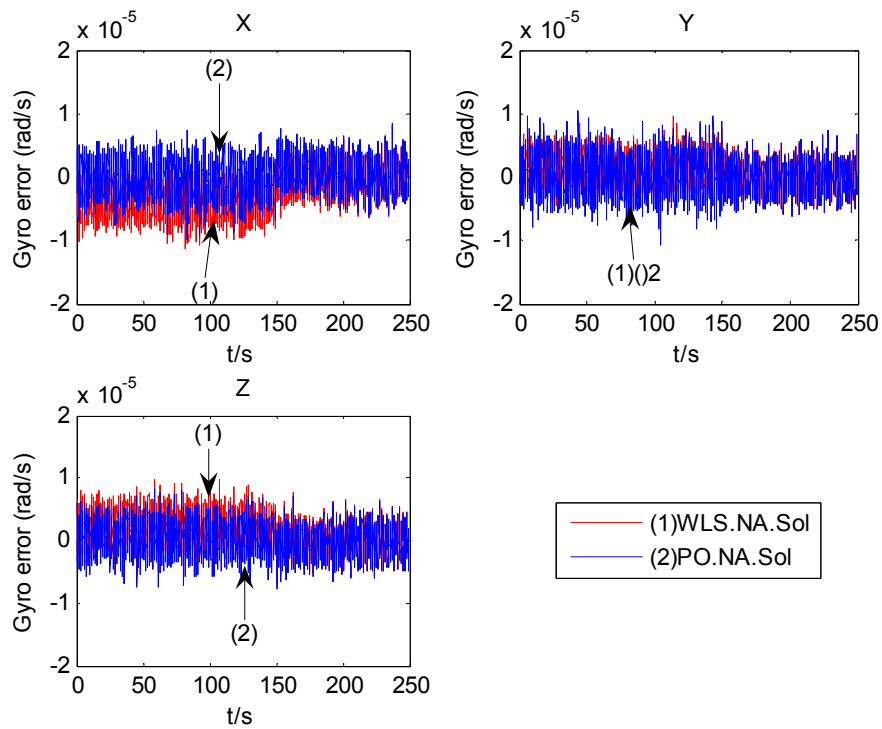


图 6.11 仿真实验二中两种导航方案的角速度误差

Fig.6. 11 The angular velocity errors of two navigation solutions in experiment 2

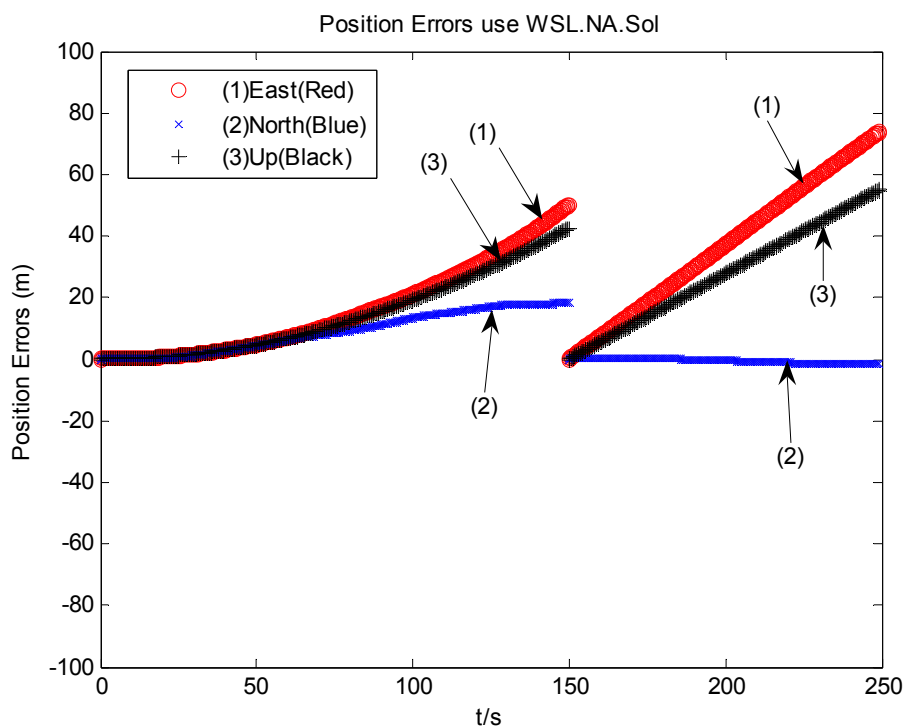


图 6.12 仿真实验二中基于 WLS 的最优导航方案的位置误差

Fig.6. 12 The position errors of WLS optimal navigation solution in experiment 2

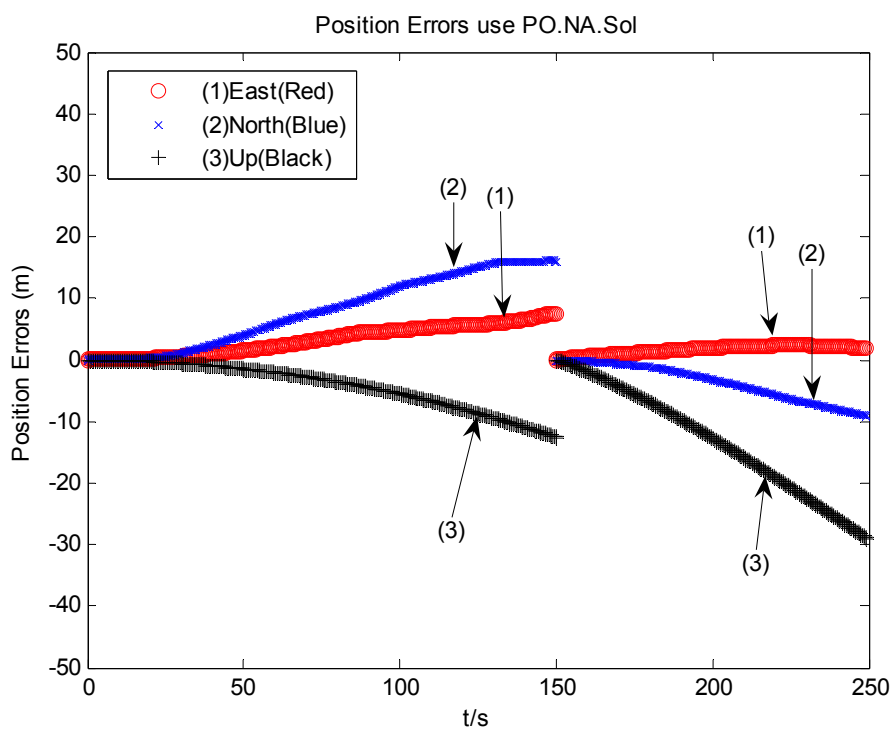


图 6.13 仿真实验二中基于次优导航方案的位置误差

Fig.6. 13 The position errors of pseudo-optimal navigation solution in experiment 2

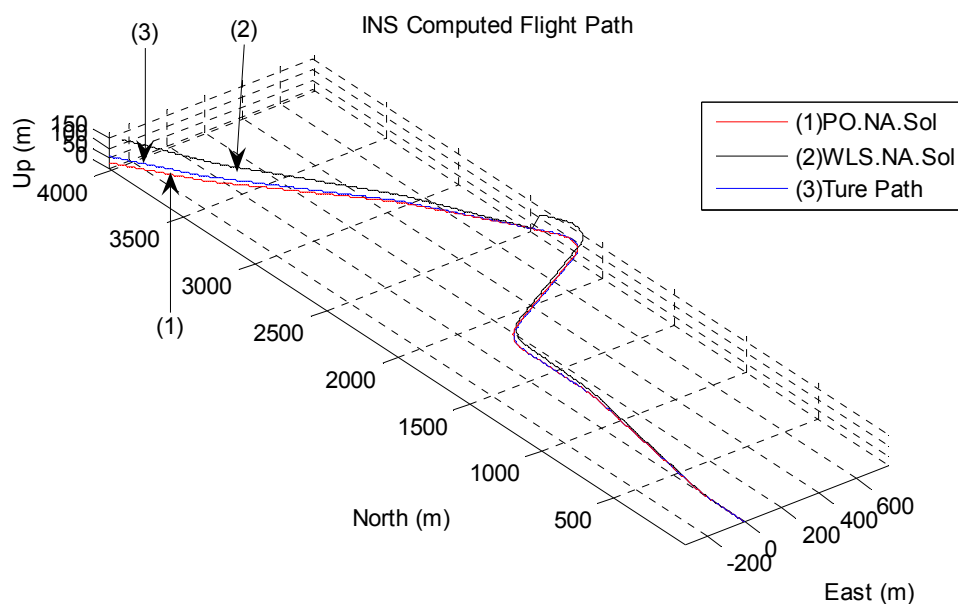


图 6.14 仿真实验二中两种导航方案的飞行轨迹

Fig. 6. 14 The flight paths of two navigation solutions in experiment 2

6.5.3.3 仿真实验三的仿真与分析

冗余惯性量测装置的误差模型、配置矩阵 M ，及其配置矩阵 M 的左零空间 T 和量测系统的模型参数都同第五章中的仿真实验三，其他条件同仿真实验一。在该仿真实验中有传感器发生故障漂移，冗余传感器系统的量测噪声统计特性已知，而系统噪声未知。分别用图 6.1 示的最优导航方案（WLS.NA）和图 6.3 示的次优导航方案（PO.NA）进行导航计算，在 150s 的时候，外部导航信息有效，两种导航方案中惯性量测装置等效到的三个坐标轴上的加速度误差和角速度误差，如图 6.15 和图 6.16 所示。有这两张图可以看出，WLS.NA 方案和 PO.NA 方案中惯性量测装置中三轴的加速度和角速度误差都是相互重叠在一起的，即使在外信息有效时，加速度和角速度误差得到纠正，但是两种方案中的加速度和角速度依然保持一致。图 6.17 图 6.18 图 6.19 分别是两种导航方案的导航位置误差和飞行轨迹。由这三中图看出，在该仿真实验条件下，这两种导航方案导航位置误差和飞行轨迹基本重合。导航结束时，最优导航方案（WLS.NA）的位置误差为 $[74.2926, -1.9828, 55.3087]$ ，次优导航方案（PO.NA）的导航位置误差 $[74.6215, -1.4912, 55.3437]$ ，这两个位置误差值基本相等。由此可得出结论，在冗余惯

性导航系统中有传感器发生故障漂移，冗余传感器系统的量测噪声统计特性已知，而系统噪声未知的条件下，或者次优导航方案中的惯性量测系统噪声特性设置不合理时，次优导航方案中的传感器的最优融合算法就蜕化成最小二乘法了，其中最优融合算法就不再是最优的，它无法攫取到各传感器的最优值了。因此设置的量测系统噪声协方差矩阵 Q 值是否合理，对次优导航算法的性能有着巨大的影响。很多情况下，惯性量测装置的量测噪声和系统噪声特性都无法准确的获知，即使在初期能够获知，由于运行环境的改变和传感器特性的突变等原因，都会造成量测噪声特性和系统噪声特性是时变的。因此需要一种能够同时实时估计出量测噪声和系统噪声特性的算法来保证次优导航方案的稳定运行。在 6.4 节中将自协防差最小二乘噪声估计算法和次优导航方案组合起来，形成了一种改进的次优导航算法（IPO.NA）。在接下来的仿真实验中来验证这种改进的次优导航算法的有效性。

此外，将仿真实验中的两种导航方案的位置误差和第五章中的仿真实验三中两种算法的导航位置相比较，即比较图 6.17、图 6.18、图 5.21、图 5.22，可发现本仿真实验中的两种导航方案的位置误差要小得多。从而再次证明了最优导航方案和次优导航方案的有效性。

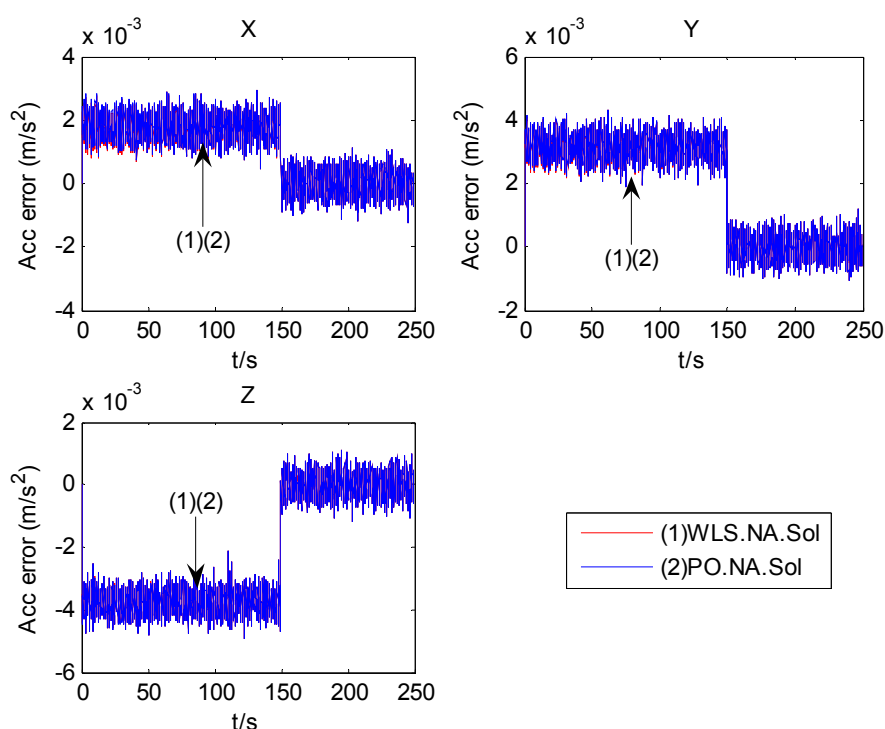


图 6.15 仿真实验三中两种导航方案的加速度误差

Fig.6. 15 The acceleration errors of two navigation solutions in experiment 3

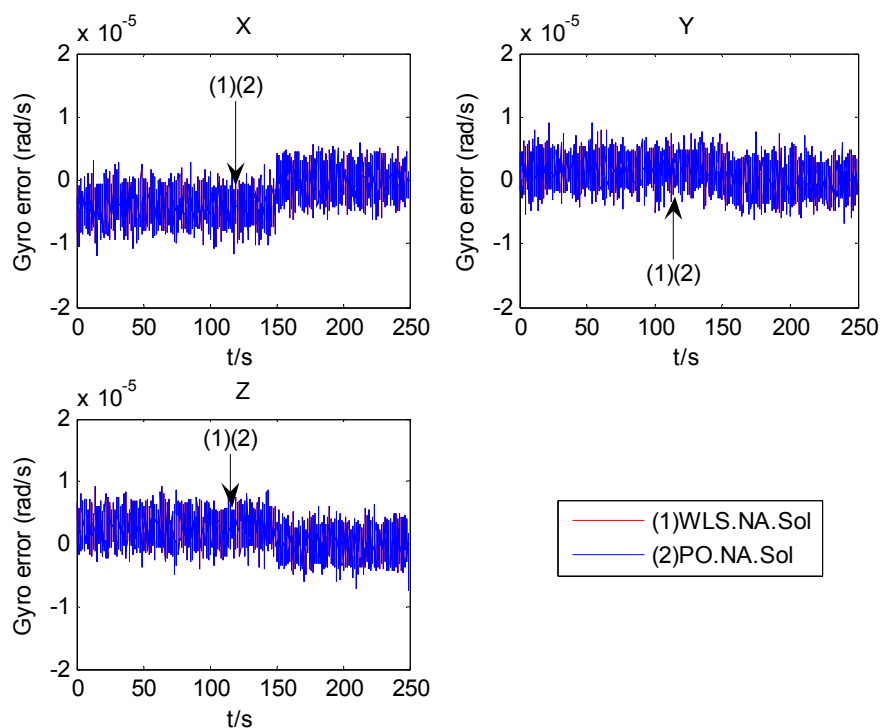


图 6.16 仿真实验三中两种导航方案的角速度误差

Fig.6. 16 The angular velocity errors of two navigation solutions in experiment 3

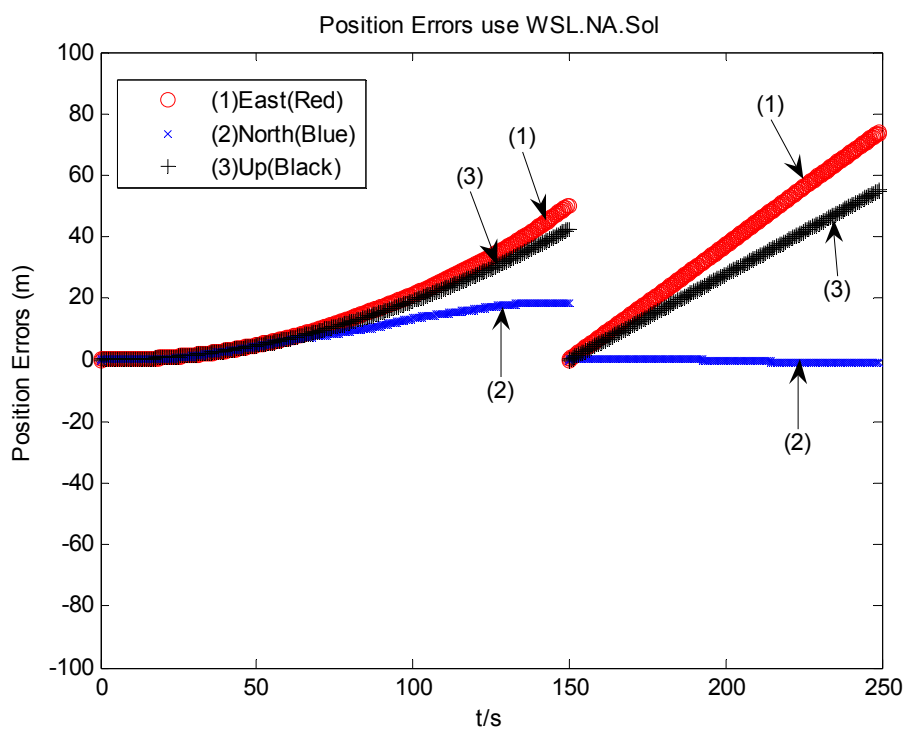


图 6.17 仿真实验三中最优导航方案的位置误差

Fig.6. 17 The position errors of WLS optimal navigation solution in experiment 3

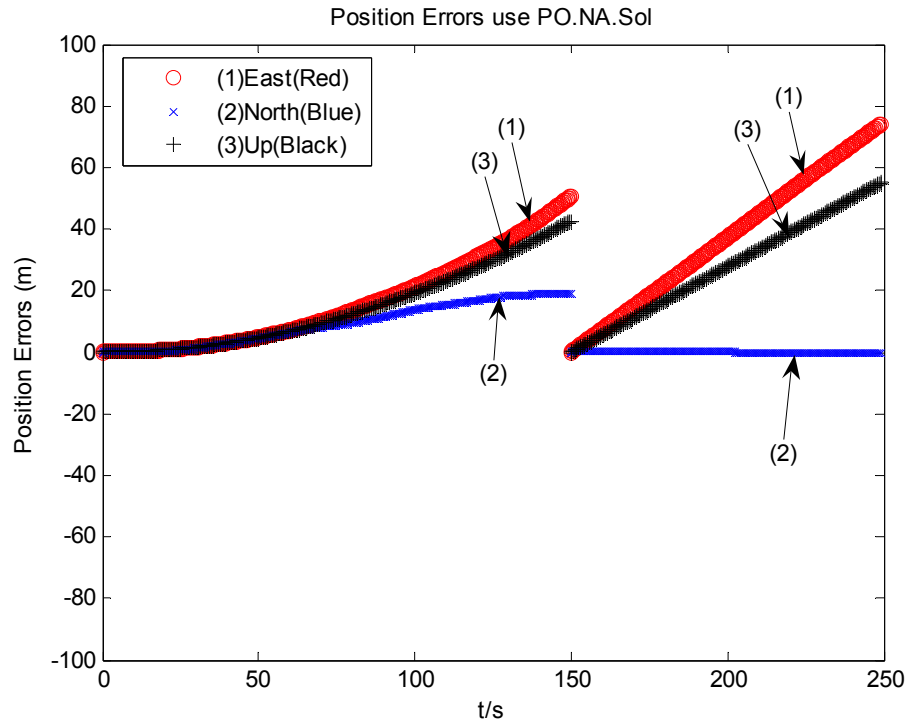


图 6.18 仿真实验三中次优导航方案的位置误差

Fig.6. 18 The position errors of pseudo-optimal navigation solution in experiment 3

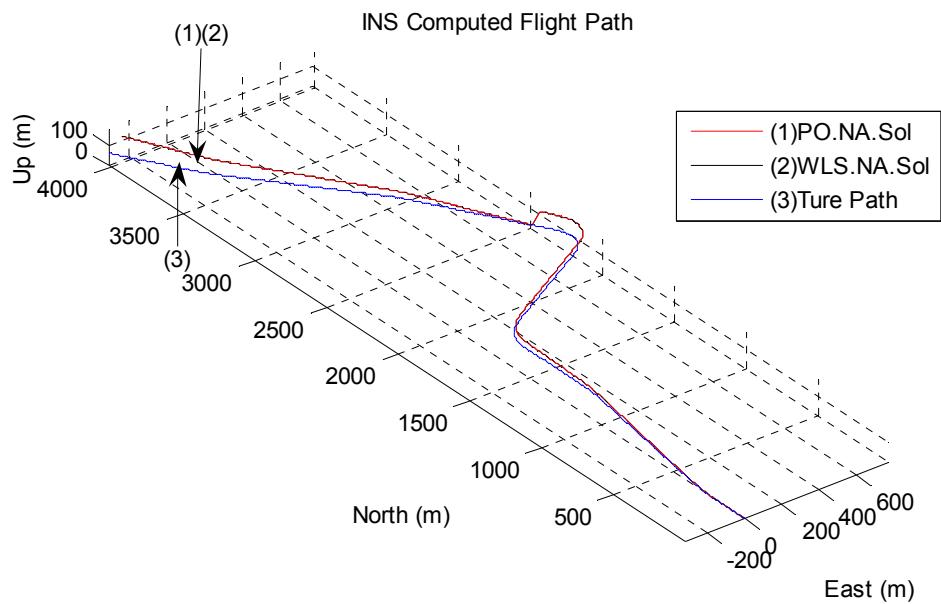


图 6.19 仿真实验三中两种导航方案的飞行轨迹

Fig.6. 19 The flight paths of two navigation solutions in experiment 3

6.5.3.4 仿真实验四的仿真与分析

由仿真实验三可知，在冗余传感器系统的量测噪声统计特性已知，而系统噪声特性未知时，或者最优融合算法系统噪声特性设置不合理时，次优导航方案的导航性能将受到影响。在本仿真实验中，仿真实验条件、系统的误差模型和模型的初始设定同仿真实验三。与仿真实验三不同的是，在该仿真实验中是使用改进的次优导航方案（IP0.NA）和次优导航方案（P0.NA）进行导航计算，噪声估计时，自协方差矩阵的维数取 10 维。这两种导航方案中惯性量测装置等效到的三个坐标轴上的加速度误差和角速度误差，如图 6.20 和图 6.21 所示。从图 6.20 可看出，在外部导航信息有效前，在三个坐标轴上，IP0.NA 的加速度误差都要比 P0.NA 的加速度误差要小，在外部导航信息有效时，两种导航方案的加速误差都发生了跳变，在外部导航信息有效之后，P0.NA 的加速度误差跳变为 0，而 IP0.NA 的加速度误差逐渐趋于 0。在图 6.21 中角速度误差也会出现类似的情况，在 Y、Z 轴上，两种导航方案中角速度误差相似，在 X 轴上，在外部导航信息有效前，IP0.NA 的角速度误差要略小于 P0.NA 的角速度误差，当外部导航信息有效时，两种导航方案中角速度误差会发生跳变，P0.NA 的角速度误差会直接变为 0，而 IP0.NA 的角速度误差发生跳变后逐渐回归到 0。从图 6.20 和图 6.21 中可看出与仿真实验二一样三个现象，其原因也是和仿真实验二一样的。在仿真实验三中已说明，在冗余传感器系统的量测噪声统计特性已知，而系统噪声特性未知时，或者最优融合算法系统噪声特性设置不合理时次优导航方案中冗余传感器最优融合算法将退化成最小二乘法了。

图 6.22、图 6.23 和图 6.24 分别是两种导航方案的导航位置误差和飞行轨迹。由这三中图看出，在该仿真实验条件下，IP0.NA 的导航位置误差明显小于 P0.NA 的位置误差。导航结束时，IP0.NA 的位置误差为 $[31.1564, -11.5561, 3.0514]$ ，而 P0.NA 的位置误差为 $[73.5250, -1.2135, 55.2456]$ 。很明显，IP0.NA 的经度误差不到 P0.NA 的经度误差的一半，IP0.NA 的高度误差要 P0.NA 高度误差要小得多，但是 IP0.NA 的纬度误差要比 P0.NA 的纬度误差要大，但总体来说，IP0.NA 的位置误差要比 P0.NA 的误差要小。由此可得出结论，在冗余传感器系统的量测噪声统计特性已知，而系统噪声特性未知时，或者最优融合算法系统噪声特性设置不合理时，改进的次优导航方案是有效的。

此外，将 IP0.NA 的位置误差和仿真实验二中 P0.NA 的位置误差相比较，比较图 6.22 和图 6.13，可发现，两者的位置误差相似，但还是 IP0.NA 的位置误差稍微大了一点，说明改进的次优导航方案中的噪声估计算法的估计精度还有待改进。

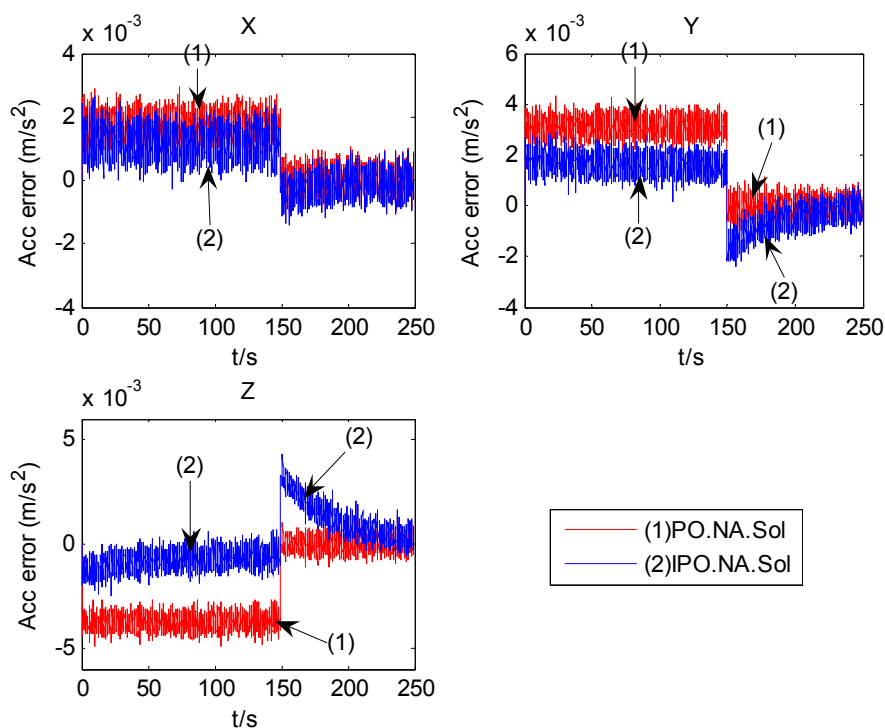


图 6.20 仿真实验四中两种次优导航方案的加速度误差

Fig.6. 20 The acceleration errors of two pseudo-optimal navigation solutions in experiment 4

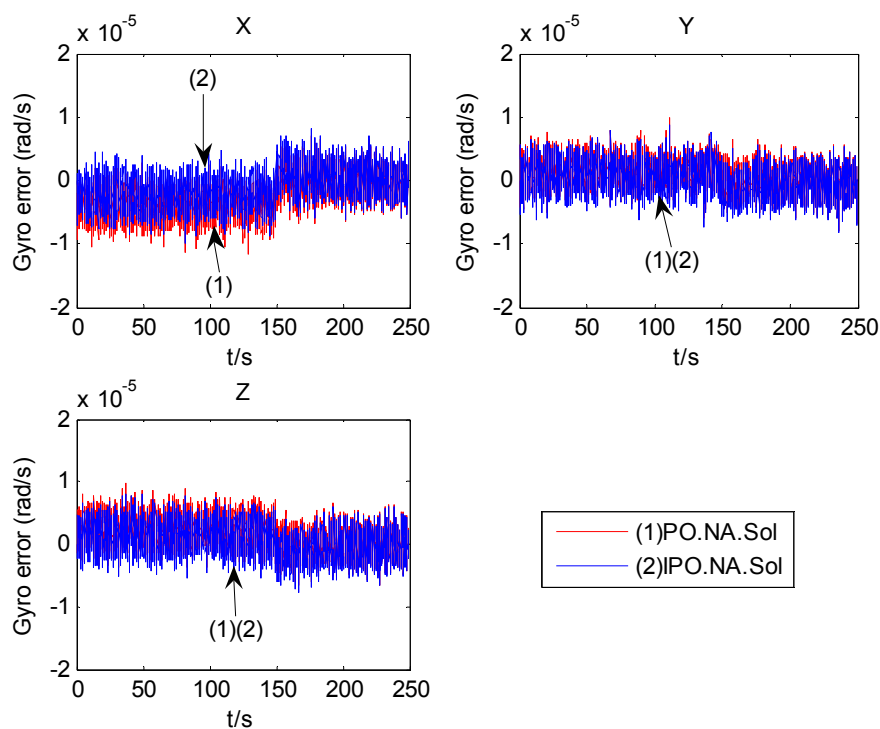


图 6.21 仿真实验四中两种次优导航方案的角速度误差

Fig.6. 21 The angular velocity errors of two pseudo-optimal navigation solutions in

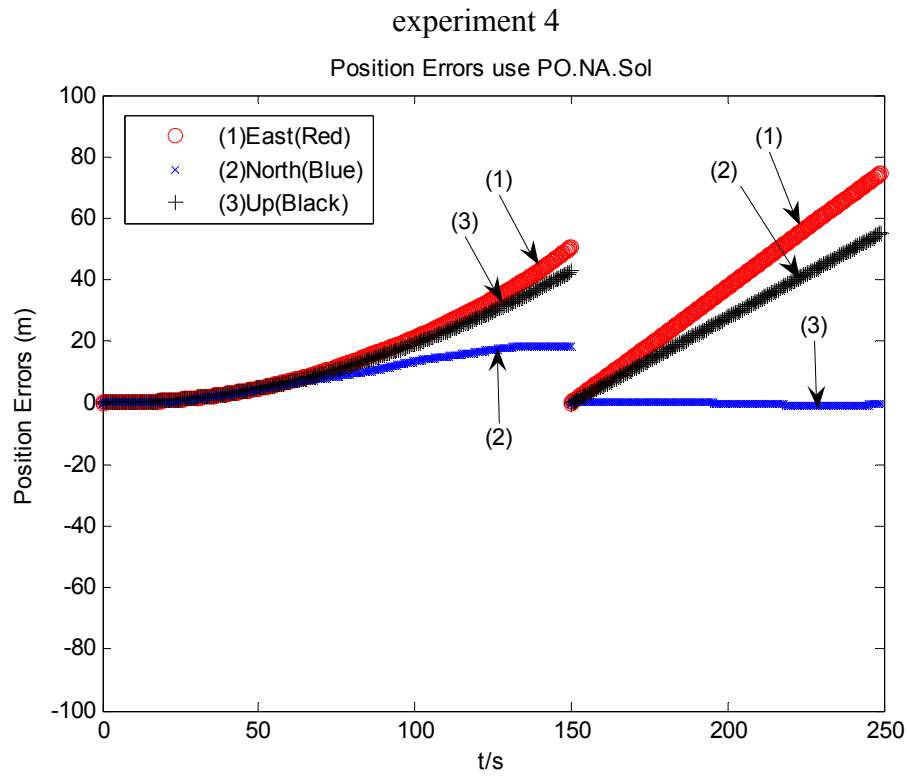


图 6.22 仿真实验四中改进的次优导航方案的位置误差

Fig.6. 22 The position errors of improved pseudo-optimal navigation solution in experiment 4

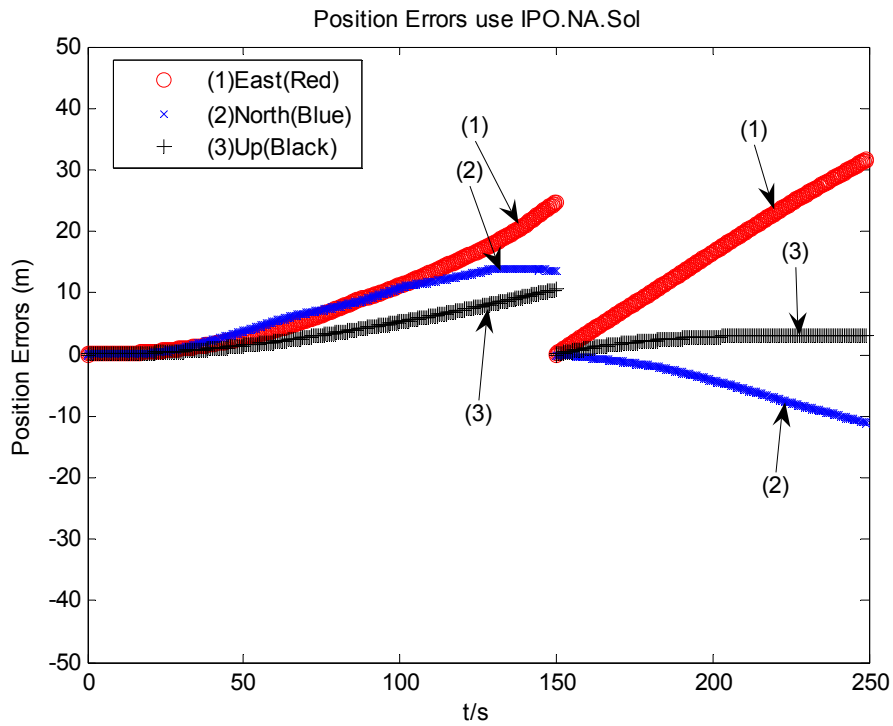


图 6.23 仿真实验四中次优导航方案的位置误差

Fig.6. 23 The position errors of pseudo-optimal navigation solution in experiment 4

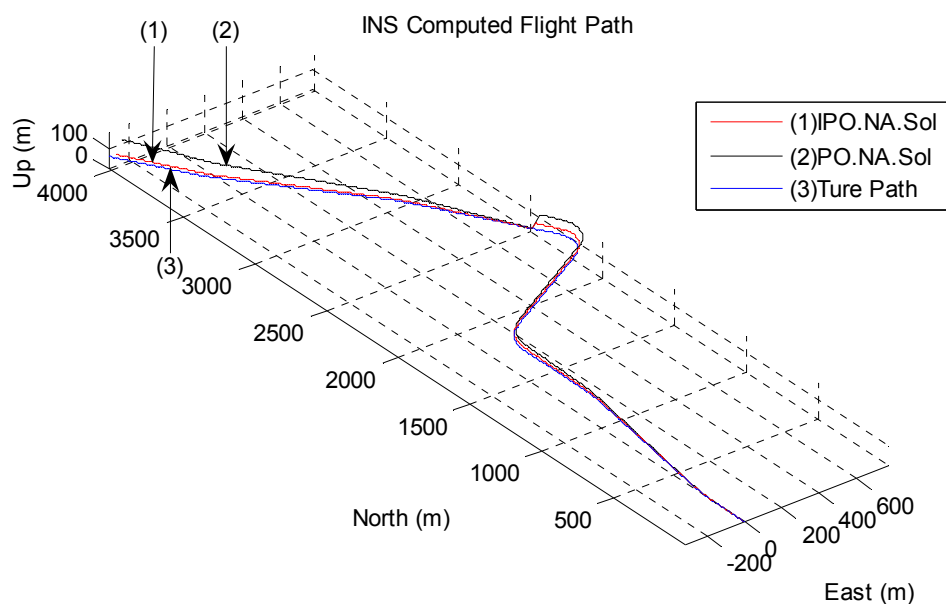


图 6.24 仿真实验四中两种次优导航方案的飞行轨迹

Fig.6. 24 The flight paths of two pseudo-optimal navigation solutions in experiment 4

6.6 本章小结

本章首先介绍了惯性导航系统的误差方程，并给出了它的状态空间形式，然后根据误差方程推导出一种冗余惯性导航系统的最优导航方案。但这种最优导航方案不能处理含稳定误差的传感器信号，因此又对其进行相应的改造，形成一种次优导航方案。这种次优导航方案中，惯性传感器的冗余观测不再作为导航 Kalman 的输入，仅用来进行惯性信息的最优估计，由于最优导航方案中的导航滤波器中传感器误差状态和冗余观测是正交的，所以次优导航方案的性能并没有比最优导航方案逊色。随后，本章又提出一种带噪声估计器的最优导航方案，即改进的次优导航方案，它通过自协方差最小二乘噪声估计算法实时的将惯性量测装置的量测噪声和系统噪声估计出来，保证了次优导航方案的性能。通过仿真证明，次优导航方案的性能并不比最优导航方案差，而在惯性传感器发生故障漂移时，次优导航方案的性能明显优于最优导航方案。改进的次优导航方案也能够有效的解决系统噪声未知或设置不合理的情况下性能下降的问题，保证最优导航方案的性能。

结 论

将多个相同的惯性传感器构成冗余惯性导航系统，以此来提高捷联惯性导航系统的可靠性和精度。本文针对捷联冗余惯性导航系统中的传感器配置、初始对准、传感器的故障检测与隔离、传感器的数据融合以及导航方案等方面展开深入研究。论文完成的主要工作如下：

1、冗余惯性导航系统中传感器的配置。深入研究了传感器数量对冗余惯性导航系统的可靠性的影响，提出了一种可靠性指标，通过计算发现，随传感器的数量的增加，系统的可靠性指标先增长后降低，在传感器数量为 6 的时候，可靠性指标达到最大。当冗余传感器的数量超过 6 时，导航系统的可靠性虽然会继续增加，但是其可靠性增加的幅值不会很大，但是导航系统的成本、体积以及系统的复杂度增加的幅度会比较大，根据建立的可靠性指标可认为经济的冗余传感器数量为 6。研究了同时满足惯性导航系统导航性能和故障检测与隔离性能的最优传感器配置方案。通过仿真计算可知，同类传感器数量为 6 的正十二面体的对称配置结构为最优冗余传感器配置方案。

2、冗余惯性导航系统的初始对准。针对冗余惯性导航系统中冗余的外部量测信息，提出一个新的初始对准方案，它将惯性传感器量测输出直接作为系统的观测量，姿态角作为状态变量。根据该方案建立的非线性初始对准模型，其模型的维数降至 3 维，同时该模型还可以消除惯性传感器的共模误差。根据仿真结果，在稳态精度上，新建立的非线性初始对准模型没有改善，但是在快速性上却大大提高。在对准过程中，新非线性初始对准模型能在 5s 内使三个失准角完全收敛。通过对非线性初始对准模型的分析可知，3 个失准角主要是由于惯性传感器的常值误差所引起的。

3、冗余惯性导航系统的故障检测与诊断。对冗余惯性导航系统的故障故障检测与诊断技术进行了讨论，针对基于奇偶空间法的故障检测方法存在的问题，提出一种冗余惯性导航系统的改进实时漂移补偿方法。它利用状态估计技术实时的估算出信号的漂移误差值，用状态反馈技术来减小信号误差；它利用自适应扩展卡尔曼粒子滤波器，来解决噪声不满足高斯特性的情况以及模型不准确问题；它引入漂移因子，减弱了实时漂移补偿效果对于反馈增益的依赖性，加大了反馈增益的取值范围。仿真结果表明所提出的改进实时补偿方法能够有效的纠正漂移传感器，引入的漂移因子大大降低了实时补偿系统对反馈增益的依赖程度，在满足系统稳定的前提下，即使所有传感器都发生故障漂移，该方法也能有效的补偿故障漂移，保证了冗余惯性导航系统的正常工作，增强了冗余惯

性导航系统的鲁棒性和可靠性。

4、冗余惯性导航系统的传感器融合。冗余传感器最优融合算法能够充分利用冗余惯性导航系统中冗余传感器的量测信息进行数据融合，提高了冗余惯性导航系统的导航性能。将冗余传感器的输出值在冗余惯性导航系统配置矩阵的左零空间上的投影作为融合的冗余观测，基于这种冗余观测进行最优估计，它能够攫取各传感器的最优特性。为了解决最优融合算法在系统噪声特性未知的情况下性能急速降低的问题，提出了一种改进的自适应最优融合算法。它将带噪声估计器的强跟踪算法引入最优融合算中，既保证了系统噪声的实时估计，又保证了系统在模型不准条件下收敛性。当冗余惯性导航系统中的传感器发生故障漂移时，将最优融合算法和故障漂移补偿算法相结合，提出一种最优融合漂移补偿算法。仿真证明，改进的自适应最优融合算法能够有效的解决最优融合算法在系统噪声未知或设置不合理的情况下性能下降的问题，但是它在解决滤波的鲁棒性的同时也牺牲了算法的估计精度。而最优融合漂移补偿算法能够有效的解决传感器的故障漂移，同时充分融合了所有传感器的暂态特性，保证了算法的最优估计。

5、冗余惯性导航系统的导航方案。推导了一种冗余惯性导航系统的最优导航方案，导航 Kalman 工作于闭环状态，它将传感器的冗余观测和外部导航信息作为输入，并将估计出来的传感器误差反馈到传感器误差模型，并从传感器的冗余观测的估计值 $\hat{\mathbf{u}}_k^{wls}$ 中减去，从而得到最优惯性信息估计 $\hat{\mathbf{u}}_{k|k} = \hat{\mathbf{u}}_k^{wls} - \mathbf{M}^\# \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{X}}_{k|k}^{imu}$ ，将 $\hat{\mathbf{u}}_{k|k}$ 作为导航系统的输入。当外部导航信息有效时，这些外部观测也会被导航 Kalman 滤波器处理，和惯性量测系统一样，处理结果同样会反馈给导航子系统，从而减小传感器模型误差和导航误差。但这种最优导航方案不能处理含稳定误差的传感器信号，因此对其进行相应的改造，形成一种次优导航方案。这种次优导航方案中，惯性传感器的冗余观测不再作为导航 Kalman 的输入，仅用来进行惯性信息的最优估计，由于最优导航方案中的导航滤波器中传感器误差状态和冗余观测是正交的，所以次优导航方案的性能并没有比最优导航方案逊色。接着又提出一种带噪声估计器的最优导航方案，通过自协方差最小二乘噪声估计算法实时的将惯性量测装置的量测噪声和系统噪声，保证了导航方案的性能。最后通过仿真证明，次优导航方案的性能并不比最优导航方案差，而在惯性发生故障漂移时，次优导航方案的性能明显优于最优导航方案。改进的次优导航方案也能够有效的解决系统噪声未知或设置不合理的情况下性能下降的问题，保证最优导航方案的性能。

论文取得的主要创新成果：

1、针对冗余惯性导航系统中冗余的观测信息，提出了一种冗余惯性导航系统的非

线性对准模型。将惯性传感器输出值直接作为对准系统观测量，姿态角直接作为状态变量，以此构成新的初始对准模型，该初始对准模型的维数可降至 3 维。该对准模型改善了系统的可观测度，同时可以消除由于惯性传感器的共模误差。

2、针对基于奇偶空间法的故障检测方法存在的问题，提出一种冗余惯性导航系统的改进实时漂移补偿方法。它利用状态估计技术实时的估算出传感器的漂移误差值，用状态反馈技术来减小传感器误差；它利用自适应扩展卡尔曼粒子滤波器，来解决噪声不满足高斯特性的情况以及模型不准确问题；它引入漂移因子，减弱了实时漂移补偿效果对于反馈增益的依赖性，加大了反馈增益的取值范围。

3、当传感器的输出含有确定性误差时，最小二乘无法求取系统的最优解，因此推导了一种基于 Kalman 滤波器的最优融合算法。针对该最优融合算法在系统噪声特性未知的情况下性能急速降低的问题，又提出了一种改进的自适应最优融合算法。它将带噪声估计器的强跟踪算法引入最优融合算中，既保证了系统噪声的实时估计，又保证了系统在模型不准条件下收敛性。针对冗余惯性导航系统中的传感器故障漂移，将最优融合算法和故障漂移补偿算法相结合，提出一种最优融合漂移补偿算法。有效的将传感器的故障漂移补偿掉，同时充分融合了所有传感器的暂态特性，保证了算法的最优估计。

4、在冗余传感器的最优融合算法的基础上，将冗余惯性观测和外部导航信息相结合，推导了一种次优导航方案。针对冗余惯性量测装置的量测噪声和系统噪声特性未知的情况，提出一种带噪声估计器的次优导航方案，通过自协方差最小二乘噪声估计算法实时的将惯性量测装置的量测噪声和系统噪声估计出来，保证了次优导航方案的性能。

论文对冗余惯性导航系统的传感器配置、初始对准、传感器的故障检测与诊断、传感器的数据融合以及导航方案等方面展开深入研究，其目的在于进一步提高冗余惯性导航的可靠性和导航精度。鉴于作者的水平和能力，论文还存在很多不足之处，论文的研究还可以下几个方面继续研究：

1、对于惯性传感器的输出信号的噪声，本文中都假设为高斯白噪声，而实际上噪声还存在很多种不同特性，可根据现实情况逐一的分析和讨论。

2、对于冗余惯性导航系统的初始对准问题，本文只考虑了静基座的对准，对于动基座初始对准、传递对准等问题都没有研究，可对这些问题进一步研究。也可对冗余惯性导航系统的在线传感器标定做进一步研究。

3、针对冗余惯性导航系统中传感器发生故障，本文提出一种冗余惯性导航系统的改进实时漂移补偿方法，但是这种算法计算量比较大，可针对故障传感器的实时故障补偿做进一步研究。

4、本文只是针对惯性传感器的冗余配置进行了研究，至于多个惯性量测装置（IMU）冗余配置没有涉及，可对多个 IMU 的配置问题和数据融合问题进行研究。

5、本文只对冗余同类惯性传感器进行数据融合研究，可对导航系统中不同精度的惯性传感器以及不同类别的传感器之间数据融合问题进行研究。

6、本文只对最优融合算法和最优导航方案的算法进行了研究，关于实际应用的很多限制条件，本文没有涉及到，因此最优融合算法和最优导航方案如何在实际系统中使用将是一个研究重点。

参考文献

- [1] 邓正隆编著. 惯性技术. 哈尔滨工业出版社, 2006: 2-87 页
- [2] 赵文芳. 旋转方位和大失准角下的捷联惯导初始对准算法研究. 南京航空航天大学硕士学位论文. 2008:8-17 页
- [3] 袁信, 余济祥, 陈哲编著. 导航系统, 北京:航空工业出版社, 1993:15-42 页
- [4] 颜华, 陈家斌, 留星桥, 冗余技术提高惯性导航系统可靠性的应用[J], 中国惯性技术学报, 2003, 11(3): 68-72 页
- [5] Prasad, V.B, Fault Tolerant Digital Systems, IEEE Potentials, Feb. 1989, 8(1): 17-21P
- [6] Tuttle, F.L., ed. F-15 S/MTD IFPC Fault Tolerant Design, Proceedings of NAEC- ON, 1990:501-506P
- [7] Subbarao, E.V., Fault Tolerant Digital System Design, Proceedings of South- eastcon, 1991,1:124-128P
- [8] Gertler, J. J., Survey of Model-based Failure Detection and Isolation in Complex Plants, IEEE Control System Magazine, Dec. 1988, 8(6):3-11P
- [9] Patton, R.J., Fault Detection and Diagnosis in Aerospace Systems using Analytical Redundancy, Computing & Control Engineering Journal, May 1991, 2(3):127-136P
- [10] 周徐昌, 沈建森, 惯性导航技术的发展及其应用, 自动测量与控制, 1993:15-42 页
- [11] Wilcox J C., Competitive Evaluation of Failure Detection Algorithm for Strapdown Redundant Inertial Instruments. TRW-Final Report, April 1973
- [12] Harrison J V, Evaluating sensor orientations for navigation performance and failure detection, IEEE Transaction, 1977, AES-13 (6):631-643P
- [13] 黄洪种, 黄文培, 系统可靠性的冗余分配及其神经网络优化方法研究, 西南交通大学学报, 1996 (5):526-532 页
- [14] Hegg, J. Enhanced Space Integrated GPS/INS (SIGI), IEEE Aerospace and Electronics Systems Magazine, April 2002, 17(4):26-33P
- [15] Krogmann, U.K. Optimal Integration of Inertial Sensor Functions for Flight-Control and Avionics, Proc. of AIAA/IEEE 8th Digital Avionics System Conference, Oct.

- 17-20, 1988:148-155P
- [16] Sebring, D.L. and McIntype, M.D., An Air Data Inertial Reference System for Future Commercial Airplanes, Proceedings of AIAA/IEEE 8th Digital Acionics Systems Conference, 1988:308-313P
 - [17] Sudano, J.J., Preisig, J.R. and Pokotylo, J., Improved Fault Detection Using a Selected Grouping of Parity Equations for Advanced Flight Control Systems, Proceedings of 1988 IEEE NAECON, 1988:1565-1569P
 - [18] Sheffels, M.L., A Fault-Tolerant Air Data/Inertial Reference Unit, IEEE AES System Magazine, March 1993:48-52P
 - [19] Ebner, R.E. and Klein, A.D., Integrated Navigation/Flight Control for Future High Performance Aircraft, ADARD-AG-314, Analysis, Design and Synthesis Methods for Guidance and Control Systems. 1995,1(8):458-469P
 - [20] Berning, S.; Howe, P. and Jenkins, T., Theater-Widde Reference Information Management, Proceedings of IEEE NAECON, 1996:122-128P
 - [21] Kelley, R.T., Carlson, N.A. and Berning, S., Integrated Inertial Network, Proceedings of IEEE PLANS, 1994:439-446P
 - [22] Kaiser, J., Beck, G. and Berning, S., Vital Advanced Inertial Network, Proceedings of IEEE PLANS, 1998:61-68P
 - [23] F. A. Evans, J. C. Wilcox. Experimental strapdown redundant sensor inertial navigation system. Journal of the Spacecraft, 1969, 7(9): 1070-1074P
 - [24] R. Goodstein, B. K. Tse. Failure detection technique for the inertial upper stage inertial navigation system. Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 1982: 650-657P
 - [25] M. Polites, D. Groll, J. Evers. Recent events in guidance, navigation and control. Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 1996:29-31P
 - [26] Gai, E; Harrison, J.V.; Dally, K.C. FDI Performance of Two Redundant Sensor Configuration IEEE Trans. Aerosp. Elect. Syst. 1979, 15:405-413P
 - [27] Yang, C.K.; Shim, D.S. Best Sensor Configuration and Accommodation Rule Based on navigation Performance for INS with Seven Inertial Sensors. Sensors

2009,9:8456-8472P

- [28] Waegli, A.,ed. Redundant MEMS-IMU integrated with GPS for Performance Assessment in Sports. In Proceedings of IEEE/ION Plans 2008 ,USA, May 6-8, 2008:1260-1268P
- [29] Neering, J.,ed. Optimal Sensor Configuration for Passive Position Estimation. In Proceedings of IEEE/ION Plans 2008, USA, May 6-8, 2008:951-960P
- [30] Aranda, S.,ed. On Optimal Sensor Placement and Motion Coordination for Target Tracking. In Proceedings of IEEE Int. conf. Robotics and Automation 2005, Barcelona, Spain, April 2005:4544-4549P
- [31] Harison, J., Gai, E. Evaluating Sensor Orientations for Navigation Performance and Failure Detection IEEE Trans. Aerosp. Elect. Syst. 1977, 13:631-643P
- [32] Sukkarieh, S.,ed. A Low-Cost Redundant Inertial Measurement Unit for Unmanned Air Vehicles Int. J. Robot. Res. 2000,19:1089-1103P
- [33] Gilmore, J.P.,ed. A Redundant Strapdown Inertial Reference Unit (SIRU) J. Spacecraft 1972, 9:39-47P
- [34] Pejisa, A.J. Optimum Skewed Redundant Inertial Navigators. AIAA J.1974, 12:899-902P
- [35] 张传斌, 杨宁, 田蔚风, 等. 基于多模型估计提高捷联惯导系统初始对准的精度. 上海交通大学学报, 2005, 39(9): 1481-1484 页
- [36] Jie Li, Ruiping Tao. Initial Alignment Technology of Strapdown Inertial Navigation System Based-on Stationary Base, International Conference on Intelligent Control and Information Processing, August 13-15, Dalian, China, 2010:561-564P
- [37] Pecht E, Mintchev M P. On azimuth observability during INS alignment in horizontal drilling .National Technical Meeting, Proceedings of the Institute of Navigation, San Diego , United States: Institute of Navigation, 2005:276-281P
- [38] 徐晓苏, 孙学慧, 扶文树. 弹载捷联惯导系统快速两位置自对准. 中国惯性技术学报, 2007, 15(2):139-142 页
- [39] 王立冬, 蔡玲, 鲁军. 车载捷联惯导系统静止条件下的初始对准方法研究. 中国惯性技术学报, 2004, 12(2):1-4 页

- [40] 祝燕华, 刘建业等. 低成本捷联惯导系统的静基座快速精对准方法. 上海交通大学学报. 2008, 42(5): 836-840 页
- [41] 陈刚. 卫星自主智能控制多传感器信息处理技术研究. 国防科技大学硕士学位论文. 2005:7-8页
- [42] Potter, J.E. and Deckert, J.C., Minimax Failure Detection and Identification in Redundant Gyro and Accelerometer System, Journal of Spacecraft, April, 1973,10(4):236-243P
- [43] Wilcox,J.C.,Competitive Evaluation of Failure Detection Algorithms for Strapdown Redundant Inertial Instruments,Journal of Spacecraft,July 1974, 11(7):525-530P
- [44] Daly, K.C.,ed., Generalized Likelihood Ratio Test for FDI in Redundant Sensor Configurations,Journal of Guidance Control, Jan., 1979,2(1):9-17P
- [45] Gai, E.,ed. FDI Performance of Two Redundant Sensor Configurations, IEEE Trans on Aerospace and Electronics Systems, May 1979, AES-15(3):405-412P
- [46] Hall, S.R.,ed. In-Flight Parity Vector Compensation for FDI, IEEE Trans. on Aerospace and Electronics Systems, 1983, AES-19(5):668-675P
- [47] Sturza, M.A., Skewed Axis Inertial Sensor Geometry for Optimal Performance, Proceedings of AIAA/IEEE 8th Digital Avionics System Conference, 1988: 128-135P
- [48] Sturza,M.A.,Navigation System Integrity Monitoring Using Redundant Measurements, Navigation: Journal of The Institute of Navigation, 1988-89,35(4):69-87P
- [49] Chien,T.T. and Adams, M. B., A Sequential Failure Detection Technique and Its Application, IEEE Trans. On Automatic Control, Oct. 1976:750-757P
- [50] Willsky A.S.,ed.,A Generalized Likelihood Ratio Approach to Detection and Estimation of Jumps in Linear Systems,IEEE Trans on Automatic Control, Feb., 1976, AC-21(1):108-116P
- [51] Willsky,A.S.,A Survey of Design Methods for Failure Detection in Dynamic Systems,Automatica,1976,12:601-611P
- [52] Kerr, T.H. Statistical Analysis of a Two-Ellipsoid Overlap Test for Real-Time Failure Detection, IEEE Trans. on Automatic Control, Aug. 1980, AC-25(4):762-773P
- [53] Gertler,J.J.,Survey of Model-based Failure Detection and Isolation in Complex

- Plants,IEEE Control System Magazine, Dec. 1988,8(6):3-11P
- [54] Patton, R.J., Fault Detection and Diagnosis in Aerospace Systems using Analytical Redundancy,Computing & Control Engineering Journal, May 1991,2(3):127-136P
- [55] Marcello R N, Dale A W, Jose L C. Kalman filters and neural-network schemes for sensor validation in flight control systems. IEEE Transaction on Control Systems Technology,1998,6(5):596-609P
- [56] H Jin, C W Chan, H Y Zhang, et al. Fault detection of redundant systems based on B-spline neural network. Proceedings of the American Control Conference,2000,6:129-138P
- [57] 李延龙, 吴训忠. 一种冗余配置的惯性导航系统渐变型故障容错方法. 弹箭与制导学报. 2008, 28 (2) : 57-60页
- [58] Kailath T., Sayed A. H., Hassibi B., Linear Estimation, Prentice Hall, New Jersey USA, 2000:258-324P
- [59] Bar-Itzhack, I.Y., and Harman, R. R., In-Space Calibration of a Skewed Gyro Quadruplet, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002,25(5):52-859P
- [60] Pittelkau M. E., Calibration and Attitude Determination with Redundant Inertial Measurement Units, AIAA Journal of Guidance,Control,and Dynamics, Vol.28, No.4,July–August, 2005,28(4):743-752P
- [61] Pittelkau, M. E., Cascaded and Decoupled RIMU Calibration Filters, Paper No. AAS 05-466, Malcom D. Shuster Astronautics Symposium, Grand Island, NY, 12–15 June 2005. In Advances in the Astronautical Sciences, 2006,122(I):273–288P
- [62] Pittelkau, M. E., Observability and Calibration of a Redundant Inertial Measurement Unit (RIMU), AAS 05-105, AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Copper Mountain, CO, 23–27 January 2005, in Advances in the Astronautical Sciences, 2005:71-84P
- [63] Harrison, J.V.,ed., Evaluating Sensor Orientations for Navigation Performance and Failure Detection, IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 1977,13(6):631–643P
- [64] 房建成, 张海鹏, 冯浩楠等. 一种MEMS陀螺仪的差分测量方法. 专利:200710176338.

- [65] David S B. High accuracy inertial sensors from inexpensive components. United States Patent. US6882964, 2005
- [66] David S B, Scott R P. Combining multiple gyroscope outputs for increased accuracy. NASA JPL New Technology Report, NP0230533
- [67] 胡敏. 基于阵列技术的MEMS虚拟陀螺技术研究. 西北工业大学硕士学位论文. 2006: 76-82页
- [68] 张鹏. 微机械陀螺的高精度“虚拟”实现方法研究. 西北工业大学硕士学位论文. 2007:8-12页
- [69] Cheol-Kwan Yang and Duk-Sun Shim, Best Sensor Configuration and Accommodation Rule Based on Navigation Performance for INS with Seven Inertial Sensors, Sensors 2009,9:8456-8472
- [70] Seong Yun Cho, Chan Gook Park. Calibration of a redundant IMU [R]. AIAA 2004-5123, Korea, 2004:1-10P
- [71] Gilmore, J.P.; McKern, R.A. A Redundant Strapdown Inertial Reference Unit (SIRU) J. Spacecraft 1972,(9):39-47P
- [72] Itzhack Y, Itzhack B, Harman R R. In-space calibration of a skewed gyro quadruplet [R]. AIAA-2001-4152,2001,25(5):852-859P
- [73] 郭思岩, 捷联系统的冗余配置与故障管理方案研究, 哈尔滨工业大学硕士学位论文. 2010, 7:P6-7页
- [74] 高磊, 马英辉, 刘国营, 马朝军. 基于DSP的微型捷联式惯性导航系统的实现. 科技创新导报. 2008, 31:238-239页
- [75] 牟宏伟. 水下航行器组合导航系统与信息融合技术研究. 哈尔滨工程大学博士学位论文. 2013: 12-19 页
- [76] S. Guerrier. Integration of skew-redundant mems-imu with gps for improved navigation performance. Master's thesis, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 2008: 45-69P
- [77] Jeerage, M.K., Reliability analysis of fault-tolerant IMU architectures with redundant inertial sensors. Position Location and Navigation Symposium, 1990.5:23-29P

- [78] Duk-Sun Shim,Cheol-Kwan Yang; Optimal Configuration of Redundant Inertial Sensors for Navigation and FDI Performance, Sensors 2010, 10: 6497-6512P
- [79] L.Joon,L.Y.Chol.Transfer alignment considering measurement time delay and ship body flexure.Journal of Mechanical Science and Technology, 2009, 23(1):195-203P
- [80] G.L.Jang,G.P.Chan.Multi-position Alignment of Strapdown Inertial Navigation system.IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems,1993, 29(4): 1323-1328P
- [81] E. Pecht,M. P. Mintchev. On azimuth observability during INS alignment in horizontal drilling. Proc. of the Institute of Navigation, National Technical Meeting, 2005:276-281P
- [82] M. J. Yu, J. G. Lee, H. W. Park. Comparison of SDINS inflight alignment using equivalent error models. IEEE Trans. On Aerospace and Electron Systems, 1999,35(3):31-40P
- [83] S.P.Dmitriyev,ed.,Nonlinear Filtering Methods Application in INS Alignment, IEEE Trans. On Aerospace and Electron Systems,1997,33(1):12-18P
- [84] 王新龙, 申功勋. 一种快速精确的捷联惯导系统初始对准方法研究. 中国惯性技术学报, 2002, 23 (4) :81-84 页
- [85] Y. H. Zhu, J. Y. Liu. The rapid and accurate alignment for costefficient strapdown inertial navigation system on stationary base. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2008, 42(5):836-840P
- [86] 谢莉莉, 邱宏波, 陈明刚, 激光捷联惯导系统自对准技术研究, 战术导弹控制技术, 2005, 3:48-51 页
- [87] 张德明, 舰载武器惯导系统初始对准技术研究. 沈阳理工大学硕士论文, 2011:42-89 页
- [88] 柴卫华, 张树侠, 捷联惯导静基座解析粗对准的误差研究 1999, 7 (4) :34-37 页
- [89] 何洪文, 胡昌华, 等. 一种提高捷联惯导系统静态初始对准精度的方法, 电光与控制, 2005, 12 (5) :58-61 页
- [90] Wang, Xinlong. Fast alignment and calibration algorithms for inertial navigation system. Aerospace Science and Technology, 2009,13(4-5): 204-209P
- [91] Jiong Yi, Lei Zhang, Rong Shu, et al. Initial alignment for SINS based on low-cost

- IMU.Journal of Computers, 2011,6(6):1080-1085P
- [92] 戴晓强, 赵琳, 史震, 刘维亭. 一种冗余惯性导航系统的非线性初始对准模型. 船舶工程, 2012, 05:54-58
- [93] 刘建业, 熊剑, 赖际舟, 等. 采用粒子滤波的捷联惯导非线性快速初始对准算法[J]. 中国惯性技术学报. 2010. 18(5):527-532 页
- [94] Jiancheng, Fang,Sheng, Yang. Study on innovation adaptive EKF for in-flight alignment of airborne POS. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2011, 60(4):1378-1388P
- [95] 郭永刚. 减振器变形条件下机抖激光陀螺捷联惯导系统标定方法的优化研究. 国防科技大学硕士论文. 2006:10-57 页
- [96] 李东明, 谈振藩, 郝颖. 一种新的捷联惯导系统初始对准方法. 中国惯性技术学报. 2005, 2:37-41 页
- [97] 周姜滨, 袁建平等. 一种快速精确的捷联惯性导航系统静基座自主对准新方法研究. 宇航学报. 2008, 29(1):133-137 页
- [98] 张鹏飞, 王宇, 汤建勋, 等. 机抖激光陀螺捷联惯导系统的温度补偿方法. 红外与激光工程. 2010, 39(4):675-679 页
- [99] T.L.Chen, R.Z.You. A novel fault-tolerant sensor system for sensor drift compensation. Sensors and Actuators A[J], 2008,147: 623-632P
- [100] T.L.Chen, Design and Analysis of a Fault-Tolerant Coplanar Gyro-Free Inertial Measurement Unit, Journal of Microelectromechanical Systems, 2008,17(1):201-212P
- [101] H. Jin, H. Y Zhang. Optimal Parity Vector Sensitive to Designated Sensor Fault. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic System. 1999, 35(4): 1122-1128P
- [102] 杨静, 张洪钱. 卫星故障诊断的最优奇偶向量法. 航空学报. 2002, 23 (2):183-186 页
- [103] 张玲霞, 陈明, 刘翠萍. 冗余传感器故障诊断的最优奇偶向量法与广义似然比检测法的等效性. 西北工业大学学报. 2005, 23(2):266-270 页
- [104] 张玲霞, 导航系统故障检测与诊断及其相关理论问题的研究, 西北工业大学博士学位论文, 2004:32-98 页
- [105] 张志鑫, 张峰. 基于故障数和奇异值分解的捷联惯导系统故障检测. 中国惯性技术

- 学报. 2008, 16(3):359-363 页
- [106] S.Duk-Sun, Y Cheol-Kwan. Geometric FDI Based on SVD for Redundant Inertial Sensor Systems. 2004 5th Asian Control Conference. 2004, 6:1094-1100P
- [107] J. E. Potter, M.C.Suman. Thresholdless Redundancy Management with Arrays of Skewed Instruments. AGARDOGRAPH-224, Control System. 1977, 15(1): 9-25P
- [108] 魏伟, 陆志东, 秦永元. 冗余传感器捷联惯导故障检测. 中国惯性技术学报. 2009, 17(1):111-116 页
- [109] 袁信、郑谔. 捷联式惯性导航原理. 北京: 航空专业教材编审组 [M], 1985: 182-220 页
- [110] D.-S. Shim, C.-K. Yang. Geometric FDI based on SVD for redundant inertial sensor systems. 2004 5th Asian Control Conference, 2004, 2:1094-1100P
- [111] 魏春岭, 张洪钺. 多传感器斜置系统故障检测的奇偶向量补偿方法. 北京航空航天大学学报, 2001, 27(6):698-701 页
- [112] A.D.Pouliezous,ed., Real Time Fault Monitoring of Industrial Processes[M], Kluwer Academic Publishers, 1994:105-148P
- [113] Kim Seungkeun, Kim Youdan, Park ChanGook, et al. Hybrid fault detection and isolation techniques for aircraft inertial measurement sensors. Collection of Technical Papers - AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2004, 5:3399-3417P
- [114] 颜东, 张洪钺. 最优鲁棒解析冗余设计方案研究. 自动化学报. 1997, 23(1):9-15 页
- [115] C.Y. Lee, G.B. Lee, MEMS-based humidity sensors with integrated temperature sensors for signal drift compensation, Sensors, Proceeding of IEEE. 2003: 384-388P
- [116] Lin Yu-Rong, Guo Si-Yan, Zhang Guang-Ying. Fault detection method applied to a redundant strapdown inertial navigation system. Advanced Materials Research, 2011, 179-180:1242-1247P
- [117] 孙章国, 钱峰. 一种基于指数渐消因子的自适应卡尔曼滤波算法. 电子测量技术. 2010, 33(1):40-42 页
- [118] Kim Kwang-Hoon, Jee Gyu-In, Park Chan-Gook, et al. The stability analysis of the adaptive fading extended kalman filter using the innovation covariance[J]

- International Journal of Control, Automation and Systems, 2009, 7(1): 49-56P
- [119] Geng Yanrui, Wang Jinling. Adaptive estimation of multiple fading factors in Kalman filter for navigation applications[J] GPS Solutions, 2008, 12(4): 273-279P
- [120] Sheng-Yun, Hou Hsien-Sen, Hung Tsai-Sheng Kao. Extended Kalman Particle Filter Angle Tracking (EKPF-AT) Algorithm for Tracking Multiple Targets. 2010 International Conference on System Science and Engineering, ICSSE 2010, 2010: 216-220P
- [121] Li Qian, Feng Jin-fu, Zhi-zhuang, et al. An iterated extended kalman particle filter for multi-sensor based on pseudo sequential fusion 2007 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, ROBIO, 2008: 1534-1539P
- [122] 宫铁松, 归庆明, 李保利等. 自适应渐消扩展 Kalman 粒子滤波方法在组合导航中的应用. 大地测量与地球动力学. 2010. 30(1): 99-103 页
- [123] 刘望生, 李亚安. 闪烁噪声下目标跟踪的改进粒子滤波算法. 兵工学报. 2011. 32(1): 91-95 页
- [124] Yuksel, Y., Naser, E. An optimal fusion method for skew-redundant inertial measurement units. Journal of applied Geodesy 2011, 5: 99-115P
- [125] Yuksel, Y., Design and analysis of inertial navigation systems with skew redundant inertial sensors, PhD thesis, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, 2011: 46-185P
- [126] Hassibi, B., Sayed, A. H. and Kailath, T., Indefinite-Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to H2 and H-Infinity Theories, Studies in Applied and Numerical Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, 1999. 16: 48-158P
- [127] David H. Titterton and John L. Weston, Strapdown Inertial Navigation Technology-2nd Edition, 2004: 342-347P
- [128] R. Mehra, Approaches to adaptive filtering, IEEE Trans. Autom. Control, Oct. 1972, 17(5): 693-698P
- [129] M. Swain and D. Ballard, Indexing via color histograms, in Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis., Dec. 1990: 390-393P
- [130] G. Noriega and S. Pasupathy, Adaptive estimation of noise covariance matrices in

real-time preprocessing of geophysical data, IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, Sep. 1997,35(5):1146–1159P

- [131] Mamoun F. Abdel-Hafez, The Autocovariance Least-Squares Technique for GPS Measurement Noise Estimation[J], IEEE Transactions on Vehicular Technology, February 2010, 59(2):574-588P

攻读博士学位期间发表的论文和取得的科研成果

1、攻读博士学位期间发表的论文

- [1] 戴晓强, 赵琳, 史震, 刘维亭. 一种冗余惯性导航系统的非线性初始对准模型. 船舶工程, 2012, 05:54-58.
- [2] Dai,Xiaoqiang;Zhao,Lin;Shi,Zhen. Optimal Sensor Fusion in Redundant Inertial Measurement Unit. 2nd International Conference on Mechatronics and Control Engineering (ICMCE 2013) ,2013,433-435,P 250-253 (EI: 20134716998985).
- [3] Dai, Xiaoqiang; Wangyue;etc. Comparative Analysis on Convexity Methods for Proving Blowup. 11th International Conference of Numerical analysis and Applied Mathematics 2013, PTS 1 and 2 (ICNAAM 2013). 2013, 1558, P1966-1969. (ISTP:BA01B).
- [4] Dai,Xiaoqiang;Zhao,Lin;Shi,Zhen. Fault Tolerant Control in Redundant Inertial Navigation System, Mathematical Problems of In Engineering. 2013. (SCI:238JQ, EI:20134416935308)

2、发明专利

- [1] 戴晓强;赵琳;史震. 一种基于模糊变地球自转角速度的快速精对准方法. 2013(专利号: ZL201110058569. X)。

致 谢

首先衷心感谢我的导师史震教授在我的研究生生活和学习中给予的关心和帮助。在这四年多的时间里，史老师渊博的专业知识，严谨的治学态度，饱满的工作热情，诲人不倦的高尚师德，虚怀若谷、厚德载物的人格魅力对我影响深远。在毕业论文完成之际，衷心的感谢恩师在学习和工作上对我的帮助，使我能够顺利完成学业。

衷心的感谢赵琳教授对我的悉心指导，从课题的选定到论文的定稿，赵老师都给我提出了宝贵的意见，让我少走不少弯路，我将永远铭记这份恩情！

衷心的感谢黄卫权教授、郝勇老师对我在哈尔滨学习期间的无私帮助！

衷心的感谢理学院徐润章教授对我在学习和生活上提供的帮助！

感谢实验室李亮老师和其他同学对我学习上的帮助，和你们一起生活和学习是我一辈子的荣幸！感谢江苏科技大学的刘维亭教授对我在学习、科研、工作上的无私帮助，没有他的支持，我无法完成我的学业！感谢课题组的同事在我读博期间替我分担了很多科研任务，使我能够全身心的投入博士课题的研究。

特别感谢我的父母、岳父岳母以及我的爱人和女儿在生活上对我无微不至的照顾以及学业和工作上的鼎力支持，没有你们的理解和鼓励，我无法完成我的博士梦想。

最后，由衷的感谢所有关心过和帮助过我的人，感谢哈尔滨工程大学对我的教育与培养！