



Tarea 2

Inducción, recursión y conteo

Ejercicio 1

22 Pt

- (a) [3 Pt] Un club contiene 20 miembros hombres y 15 miembros mujeres. ¿De cuántas maneras se puede formar un comité de 10 miembros si tiene que haber al menos 3 hombres y al menos 4 mujeres?
- (b) [5.5 Pt] ¿De cuántas maneras se pueden ordenar de izquierda a derecha diez libros L_1, \dots, L_{10} si L_3 no puede estar inmediatamente a la derecha de L_2 ni L_8 inmediatamente a la derecha de L_7 ?
- (c) [5.5 Pt] ¿Cuántas palabras de largo 13 se pueden formar con 8 a's y 5 b's si no puede haber 2 b's seguidas?
- (d) [8 Pt] Dé una demostración combinatorial de que $k \cdot C(n, k) = n \cdot C(n-1, k-1)$.

Ejercicio 2

10 Pt

Sea S un conjunto de 17 números naturales (mayores a 0) que no tienen divisores primos mayores a 7. Probar que existen dos números en el conjunto cuyo producto es un cuadrado perfecto.

Ayuda: Todo número en S va a ser de la forma $2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdot 5^{k_5} \cdot 7^{k_7}$ para algún $k_2, k_3, k_5, k_7 \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 3

28 Pt

El pequeño Janito, un entusiasta de la Criptografía, ha creado un nuevo lenguaje súper híper secreto. Este lenguaje tendrá un vocabulario base de solo tres palabras: “a”, “ja” y “sk”. Cualquier combinación de estas palabras estará dentro del lenguaje. Por ejemplo, “ajajskja” está dentro del lenguaje, pero “ajajskja” no. Janito escogió estas palabras en específico porque ellas se mimetizan con una risa (lo cual le da puntos de *secretosidad* al lenguaje). Sin embargo, teme que sea muy fácil escribir alguna palabra dentro de este lenguaje usando cualquier combinación de las letras “a”, “j”, “s”, y “k”. Por esta razón, necesita ayuda para comprobar qué tan fácil es adivinar una palabra de su lenguaje secreto.

- (a) [4 Pt] Dé una definición inductiva (recursiva) del lenguaje del pequeño Janito.
- (b) [8 Pt] Escriba en Python, Java, o C++ la función **generaTexto** que reciba un número n , genere todas las palabras posibles de largo n usando las letras “a”, “j”, “s”, y “k”, y cuente cuántas de esas palabras están en el lenguaje.
- (c) [8 Pt] En base a los resultados de la función anterior, encuentre a una fórmula recursiva para la cantidad de palabras del lenguaje de largo n , y demuéstrela.
- (d) [8 Pt] Escriba un programa en Python, Java, o C++ que calcule la cantidad de palabras secretas de largo n de una forma eficiente e indique cuál es su proporción respecto a todas las palabras posibles (4^n) para $n = 1000$.