

Лабораторная работа №1

Распад разрыва в механике сплошной среды

Соколов Александр

Б04-907

Шаг 1. При решении задачи распада разрыва в конденсированном веществе с образованием двух ударных волн пользуемся следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \rho_1(U_1 - D_0) &= \rho_0(U_0 - D_0), & P_3 + \rho_3(U_3 - D_3)^2 &= P_2 + \rho_2(U_2 - D_3)^2, \\ P_1 + \rho_1(U_1 - D_0)^2 &= P_0 + \rho_0(U_0 - D_0)^2, & P_2 &= \frac{\alpha_3(\rho_2 - \rho_3)}{\rho_3 h_3 - \rho_2}, \\ P_1 &= \frac{\alpha_0(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_0 h_0 - \rho_1}, & P_2 &= P_1, U_2 = U_1, \\ \rho_3(U_3 - D_3) &= \rho_2(U_2 - D_3), & \text{где } \alpha_0 &= \rho_0 C_0^2(h_0 - 1), \alpha_3 = \rho_3 C_3^2(h_3 - 1), h_0 = (\gamma_0 + 1)/(\gamma_0 - 1), \\ & & h_3 &= (\gamma_3 + 1)/(\gamma_3 - 1). \end{aligned}$$

Преобразовывая систему уравнений к одному уравнению с одним неизвестным, получим полином шестой степени вида $\sum_{i=0}^6 a_i Y^{6-i} = 0$.

Находя численными методами корни данного уравнения, мы сможем получить значения скоростей ударных волн D_0 и D_3 .

Шаг 2. При помощи основной теоремы алгебры локализуем положительные корни полинома. Полученный отрезок –
[8.583223249470204e-15, 1.097498026679439]

Шаг 3. При помощи теорем Декарта (Descartes) и Штурма (Sturm) определяем количество положительных корней. Оба метода дали число 2.

Шаг 4. При помощи метода половинного деления (bisection) получим отрезки локализации (на каждом отрезке по одному корню). Полученный результат:
[8.583223249470204e-15, 0.06859362666747298],
[0.06859362666747298, 0.1371872533349374].

Шаг 5. Найдем первый корень полинома методом простой итерации. Для этого:

- Строим итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, где $\varphi(x) = x + f(x)$.
- Сужаем отрезок локализации до тех пор, пока вторая производная $\varphi''(x)$ не перестанет обращаться в ноль на нём. Это означает, что первая производная монотонна и её максимальное значение достигается на одном из концов отрезка.
- Проверяем, что $\max |\varphi'(x)| = q < 1$.
- Ищем значение корня до нужной точности.

Полученные значения:

С точностью $1e-04$: 0.018364866044581863

С точностью $1e-05$: 0.018309237738945893

С точностью $1e-06$: 0.01830361173023717

Шаг 6. Найдем второй корень полинома методом Ньютона:

- Строим итерационный процесс $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
- Сужаем отрезок локализации до тех пор, пока первая и вторая производные не станут знакопостоянны.
- Выбираем начальное приближение, исходя из условия сходимости:
 $f(x_0) * f''(x_0) > 0$.
- Ищем значение корня до нужной точности.

Полученные значения:

С точностью 1e-04: 0.08846626972065016

С точностью 1e-05: 0.08846626770589816

С точностью 1e-06: 0.08846626770589794

Шаг 7. Вычисляем значения скоростей ударных волн:

$Y1 = 0.01830361173023717,$

$D0 = -5694.087733316119 \text{ см/с};$

$D3 = -584721.6615972444 \text{ см/с}.$

$Y2 = 0.08846626770589794,$

$D0 = 471847.27697507635 \text{ см/с},$

$D3 = -1852163.5812543835 \text{ см/с}.$