1.1 矩阵的基本运算.

① 矩阵相加. 矩阵相乘

② 幂等矩阵:(idempotent matrix) $A^2=AA=A$

对合矩阵:(involutory matrix) $A^2=AA=I$

③ 矩阵泰勒展开与导数

$$\exp(At)=I+At+\frac{1}{2!}(At)^2+\frac{1}{3!}(At)^3+\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\exp(At)=A\exp(At)=\exp(At)A$$

④ 奇异(非奇异)矩阵 (vertible/invertible matrix)

⑤ 初等行运算 (3种)

若A通过初等行运算换成矩阵B, 则认为A, B为行等价矩阵

⑥ 首元素, 与阶梯型矩阵 (leading entry & echelon matrix)

简约阶梯型矩阵(reduced echelon matrix)及其唯一性.

⑦ 矩阵方程求解与增广矩阵.

1.2 向量, 内积空间与线性映射.

① 向量空间: 闭合性, 加法公理, 标量乘法公理.

② 空间V与子空间A, B. 直接求和: $V=A\oplus B \Leftarrow A\cap B=\{0\}$ $A+B=V$

③ 实内积空间: a) 正定性 (positive definite) b) 对称性 (symmetry)

c) 分配率 → d) 线性性 (linearity)

欧氏空间 (~~Eu~~ Euclidean space)

④ 实内积空间内范数

⑤ 复内积空间 a) 正定性 (positive definite) b) 共轭对称性 (Conjugate Symmetry)

c) 分配率 → d) 线性性 (linearity)

⑥ 线性映射（变换），逆映射，单射（injective）满射（surjective）
双射（bi injective）

1.3 随机向量

① 概率密度函数

② 随机向量的统计描述：

数学期望（expectation） $\vec{\mu}_{(\xi)} = E(\vec{\xi})$

自相关矩阵：（~~Auto~~ self-correlation matrix） $R_{(\xi)} = E(\vec{\xi}\vec{\xi}^H)$ 共轭对称.

自协方差矩阵：（self-covariance matrix） $C_{(\xi)} = E[(\vec{\xi}-\vec{\mu}_{\xi})(\vec{\xi}-\vec{\mu}_{\xi})^H]$ 共轭对称

③ 两随机向量之间关系

互相关矩阵（correlation matrix） $R_{(\xi_1,\xi_2)} = E(\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2^H)$

互协方差矩阵（covariance matrix） $C_{(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2)} = E[(\vec{\xi}_1-\vec{\mu}_{(\xi_1)})(\vec{\xi}_2-\vec{\mu}_{\xi_2})^H]$

相关系数（correlation coefficient） $\rho_{(\xi_1,\xi_2)} = \frac{C_{(\xi_1,\xi_2)}}{\sqrt{E(|\xi_1|^2)E(|\xi_2|^2)}} \in [0,1]$

$$= \frac{E[(\xi_1-E\xi_1)(\xi_2-E\xi_2)]}{\sqrt{E[\xi_1-E\xi_1]^2 E[\xi_2-E\xi_2]^2}} = \frac{cov(\xi_1,\xi_2)}{var(\xi_1)\, var(\xi_2)}$$

④ 其它概念.

统计不相关 ⇐ 协方差矩阵为零.

正交 ⇐ 互相关矩阵为零.

⑤ 正态随机向量： $x \sim N(\vec{\mu}, \Gamma)$，m维：

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}|\Gamma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T \Gamma (\vec{x}-\vec{\mu})\right]$$

1.4 内积与范数：

① 内积： a) 非负性(semipositive definite) b) 可加性 c) 齐次性
d) Hermitian性 $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle^*$

② 范数： a) 非负性（semi-positive definite) b) 齐次性 c) 三角不等式

③ 向量 p-范数： $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p}$

④ 酉不变： 若范数 $\|\cdot\|$ 满足 $\|Ux\| = \|x\|$ 对 ∀向量x 及酉矩阵U成立

⑤ 随机向量内积与范数 ： $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \overset{def}{=} E(\xi_1^H \xi_2)$

⑥ 向量相近量度

a) 欧氏距离： Euclidean Distance

b) Mahalanobis距离： 对观测向量 $\{s_i\}_{i\in\{1,2,\cdots N\}}$，求协方差

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i, \quad C = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (s_i - m)(s_i - m)^T$$

未知向量 $\vec{x}$ 到 $\vec{m}$ 的 Mahalanobis 距离为 $(\vec{x}-\vec{m})\, C^{-1} (\vec{x}-\vec{m})$

c) 余弦距离： cosine distance.

⑦ 向量范数用作 Lyaponov函数

⑧: 矩阵范数： a) 正定性 b) 齐次性 c) 三角不等式 d) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$

Frobenius 范数： $\|A\|_F \overset{def}{=} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

L_p 范数： $\|A\|_p \overset{def}{=} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$

谱范数（spectral norm） $\|A\|_{spec} = \sigma_{max}$

⑨ 矩阵内积 ： 对 ∀ A, B，形状相同：

$$\langle A, B \rangle \overset{def}{=} A^H B$$

1.5 基与 Gram-Schmidt 正交化

① 线性空间基向量的定义 (basis vectors)

对偶基：$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_n\}$, $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3 \cdots \beta_n\}$, $\alpha_i^H \beta_i = 0$ 对 $i \in \{1, 2, \cdots N\}$

② 标准正交基向量 (orthonormal basis vectors)

③ Gram-Schmidt 正交化：从基向量到标准正交基：$\{x_i\} \Rightarrow \{u_i\}$

$\vec{p}_1 = \vec{x}_1$, $\vec{u}_1 = \dfrac{\vec{p}_1}{\|\vec{p}_1\|}$;

$\vec{p}_k = \vec{x}_k - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{u}_i, \vec{x}_k \rangle \cdot \vec{u}_i$, $\vec{u}_k = \dfrac{\vec{p}_k}{\|\vec{p}_k\|}$.

1.6. 矩阵标量函数

① 二次型：$x^H A x$, 一般假设 A 共轭对称,

② 正定矩阵. etc

给定 $m \times n$ 矩阵 J 与 $n \times n$ 对称矩阵 H, $x^T H x > 0$ 对 $\forall x$ 满足 $Jx = 0$ 的成立

则 ∃ 有限大的 $\rho \geq 0$, s.t $H + \bar{\rho} J^T J$ 对 $\forall \bar{\rho} > \rho$ 正定.

③ 矩阵的 Trace, 限适用于方阵

$tr(AB) = tr(BA)$

$tr(BAB^{-1}) = tr(B^{-1}AB) = tr(A)$, A, B 方阵, B 非奇异

$tr(Axx^H) = x^H A x$; $y^H x = tr(xy^H)$

$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ λ_i 为特征值

$tr(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$

$tr[(A^T B)^2] \leq tr(A^T A) tr(B^T B)$

$tr(A^2) \leq tr(A^T A)$

$tr[(A+B)(A+B)^T] \leq 2[tr(AA^T) + tr(BB^T)]$

④ 行列式

矩阵的余子式 $A_{ij}^{\#} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

行列式性质：

a) 初等行列变换不改变 $\det(A)$

b) $\det(A) = \det(A^T)$ ； $\det(A) = \det(A^H)^*$

c) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

d) 正定阵 A 满足 $\det(A) > 0$

e) 若 A, B 均半正定 $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$

⑤ 秩 (Rank)

a) 左乘满列秩 / 右乘满行秩 ⇒ 秩不变

b) $\mathrm{rank}(A^TA) = \mathrm{rank}(AA^T) = \mathrm{rank}(A)$

$\mathrm{rank}(A^HA) = \mathrm{rank}(AA^H) = \mathrm{rank}(A)$

c) $\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$

d) $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - k \leq \mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$

1.7
1.8 逆矩阵：广义逆矩阵

① 逆矩阵与伴随矩阵定义

② (Sherman-Morrison公式) A 为可逆矩阵，x, y 为向量使 $(A+xy^H)$ 可逆

$$(A+xy^H)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}xy^HA^{-1}}{1+y^HA^{-1}x}$$

③ 左逆矩阵 (left inverse)： $LA = I$ & $AL \neq I$

右逆矩阵 (right inverse)： $AR = I$ & $RA \neq I$

对于 $M \in R^{m \times n}$， $m \geq n$ 时才可能有左逆矩阵

$m \leq n$ 时才可能有右逆矩阵

④ 左伪逆矩阵 (left pseudo inverse) $L=(A^HA)^{-1}A^H$

右伪逆矩阵 (right pseudo inverse) $L=A^H(AA^H)^{-1}$

⑤ 线性一致方程与非一致方程.

$\Downarrow \quad y$

$\mathrm{Rank}([A,y])=\mathrm{Rank}(A)$

均可作定义

⑥ 广义逆矩阵: $x=Gy$ 是一致方程 $Ax=y$ 的通解, 则 G 为 A 的广义逆矩阵 (generalized inverse), 记作 A^-

一致方程 $Ax=y$ 对 y 均有解 $x=Gy$ 时 iff $AGA=A$

⑦ 性质: 若 A^- 存在, 作 A^-A 和 AA^- 均为幂等矩阵 且 $\mathrm{rank}=\mathrm{rank}(A)$

⑧ 满秩分解 (full-rank decomposition) $A=KL$, K 满列秩, L 满行秩

若 A 满秩分解为 $A=FG$, 则 $A^-=G^T(F^TAG^T)^{-1}F^T$

⑨ 令 $n\times m$ 矩阵 A^- 是 $m\times n$ 矩阵 A 的任意一个广义逆矩阵, 则.

齐次 $Ax=0$ 通解为 $x=(I-A^-A)z$ z 为任意 $R^{n\times 1}$ 向量.

非齐次 $Ax=y$ 通解为 $x=A^-y+(I-A^-A)z$ z 为任意 $R^{n\times 1}$ 向量.

Appendix: 任意方阵的"伪逆矩阵" via 特征向量分解

设矩阵 $M\in R^{N\times N}$, 其特征值为 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_j, \lambda_{j+1}, \cdots \lambda_N$

其中 $\lambda_i\neq 0$ 对 $i<j$ 而 $\lambda_i=0$ 对 $i\geq j$ 其可以拆解为

$$M=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i v_i v_i^T,$$ v_i 为 λ_i 对应特征向量.

其伪逆矩阵为 $$M^{\#}=\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{\lambda_i}v_i v_i^T$$