Bài giảng Toán học Tổ hợp

Nguyễn Anh Thi

ĐH KHTN, TpHCM

TỔ HỢP CƠ BẢN

Nội dung

1. Các nguyên lý đếm cơ bản
   - Nguyên lý cộng
   - Nguyên lý nhân
   - Nguyên lý chuồng bồ câu
2. Các bài toán đếm
   - Hoán vị
   - Chỉnh hợp
   - Tổ hợp
3. Định lý nhị thức

Nguyên lý cộng

Nguyên lý

Nếu một quá trình có thể được thực hiện bằng một trong hai phương pháp loại trừ lẫn nhau, phương pháp thứ nhất cho ta m lựa chọn và phương pháp thứ hai cho ta n lựa chọn, khi đó để thực hiện quá trình ta sẽ có $m + n$ *lựa chọn.*

Ví dụ

Một trường đại học cần chọn một sinh viên tham gia chương trình tìm kiếm tài năng từ hai lớp A và B. Biết rằng lớp A có 50 *sinh viên, lớp B có 40 sinh viên, và các sinh viên đều có cơ hội như nhau. Hỏi trường có bao nhiêu cách chọn? Trả lời:* $50 + 40 = 90$.

Nguyên lý cộng mở rộng

Nguyên lý

Nếu một quá trình có thể được thực hiện bằng một trong k phương pháp loại trừ lẫn nhau, phương pháp thứ nhất có n_1 lựa chọn, phương pháp thứ hai có n_2 lựa chọn...phương pháp thứ k có n_k lựa chọn, khi đó để thực hiện quá trình ta sẽ có $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ lựa chọn.

Ví dụ

Một sinh viên được phép chọn một đề tài để làm khóa luận từ 4 danh sách các đề tài được khoa đưa ra. Số đề tài trong mỗi danh sách lần lượt là $5, 8, 7, 10$. Hỏi sinh viên có bao nhiêu cách chọn? Trả lời:
$5 + 8 + 7 + 10 = 30$.

Nguyên lý nhân

Nguyên lý

Nếu một quá trình có thể thực hiện theo hai giai đoạn liên tiếp độc lập với nhau sao cho có m *cách khác nhau để thực hiện giai đoạn một và với mỗi cách lựa chọn trong giai đoạn một đều có* n *cách khác nhau để thực hiện giai đoạn hai, khi đó có* $m \times n$ *cách khác nhau để thực hiện toàn bộ quá trình.*

Ví dụ

Một học sinh từ nhà đến trường phải đi ngang qua một siêu thị. Từ nhà đến siêu thị có 3 *con đường để đi, từ siêu thị đến trường có* 5 *con đường để đi. Hỏi em học sinh đó có bao nhiêu cách lựa chọn để đi từ nhà đến trường? Trả lời:* $3 \times 5 = 15$ *cách.*

Nguyên lý nhân mở rộng

Nguyên lý

Nếu một quá trình có thể thực hiện theo k giai đoạn liên tiếp độc lập với nhau $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *sao cho có* n_i *cách khác nhau để thực hiện* $A_i, (i = 1, 2, \ldots, k)$, *khi đó có* $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ *cách khác nhau để thực hiện toàn bộ quá trình.*

Ví dụ

Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 8?

Lời giải. Ta thấy mỗi bit có hai cách chọn là 0 hoặc 1. Để tạo ra một chuỗi bit có độ dài 8, ta lần lượt chọn các giá trị cho 8 bit của chuỗi. Theo nguyên lý nhân ta có số chuỗi bit có độ dài 8 là $2^8 = 256$.

Nguyên lý chuồng bồ câu dạng cơ bản

Định lý

Gọi n và k là hai số nguyên dương sao cho $n > k$. Giả sử ta cần đặt n quả bóng vào trong k chiếc hộp. Khi đó có ít nhất một chiếc hộp chứa ít nhất 2 quả bóng.

Ví dụ

- *Trong 367 người thì có ít nhất 2 người có cùng ngày sinh nhật.*
- *Nhốt 20 con chim bồ câu vào trong 7 cái chuồng, khi đó sẽ có ít nhất một chuồng chứa 3 con trở lên.*

Hoán vị

Định nghĩa

Cho số nguyên dương n. Mỗi cách sắp xếp có thứ tự của n phần tử khác nhau được gọi là một ***hoán vị*** của các phần tử đó. Nói cách khác, một ***hoán vị*** là một song ánh từ tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ vào chính nó. Ký hiệu S_n là tập hợp tất cả các hoán vị của n phần tử.

Ví dụ

Cho tập hợp A gồm các ký tự a, b, c. Hoán vị các phần tử trong tập A, ta được chuỗi các ký tự: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Định lý

Số tất cả các hoán vị của tập hợp n phần tử khác nhau là $n!$.

Hoán vị lặp

Định nghĩa

Cho số nguyên dương $k \geq 1$ và n phần tử trong đó có n_i phần tử loại $i, (1 \leq i \leq k)$, giống nhau sao cho $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n phần tử đã cho gọi là **một hoán vị lặp** của n phần tử.

Ví dụ

Ta xét một đa tập hợp $B = \{a, a, b, c\}$. Lấy hoán vị lặp các phần tử trong B, ta được các chuỗi ký tự sau:
$aabc, abac, abca, acba, aacb, acab, bcaa, babc, bcab, cbaa, caba, caab.$

Hoán vị lặp

Định lý

Số các hoán vị lặp của n phần tử trong trường hợp trên bằng

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Ví dụ

Có thể nhận được bao nhiêu chuỗi ký tự khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ HAPPY?

Lời giải. Theo công thức hoán vị lặp ta có số chuỗi ký tự thu được bằng $\dfrac{5!}{1!1!2!1!} = 60.$

Chỉnh hợp

Định nghĩa

Cho số nguyên dương k thỏa $0 \leq k \leq n$. Một **chỉnh hợp chập** k **của** n **phần tử** là một phép chọn ra k phần tử phân biệt từ n phần tử ban đầu theo một thứ tự nào đó.

Định lý

Số các chỉnh hợp chập k của n, ký hiệu A_n^k, bằng

$$n.(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa

Cho số nguyên k thỏa $1 \leq k \leq n$. Một **chỉnh hợp lặp chập** k **của** n là một phép chọn ra k phần tử từ n loại phần tử theo một thứ tự nào đó và được phép chọn lặp lại.

Định lý

Số chỉnh hợp lặp chập k của n *phần tử là* n^k.

Tổ hợp

Định nghĩa

Cho số nguyên k thỏa $0 \leq k \leq n$. Một **tổ hợp chập k của n phần tử** là một phép chọn ra k phần tử từ n phần tử ban đầu và không kể đến thứ tự.

Định lý

Số các tổ hợp chập k của n, ký hiệu $\binom{n}{k}$, hay C_n^k, bằng

$$\frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Tổ hợp lặp

Định nghĩa

Cho số nguyên $k \geq 1$. Một **tổ hợp lặp chập k của n** là một phép chọn ra k phần tử từ n loại phần tử, trong đó mỗi loại phần tử gồm các vật giống nhau và có thể được chọn lại nhiều lần.

Định lý

Số các tổ hợp lặp chập k của n, ký hiệu K_n^k, bằng

$$C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Định lý nhị thức

Định lý

Với mọi số nguyên dương n, ta có

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Định lý

Với mọi số nguyên dương n và k, ta có đẳng thức sau

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$$

trong đó $n_i \geq 0$ *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, k$.