Bài giảng Toán tổ hợp

Nguyễn Anh Thi

ĐH KHTN, Tp HCM

PHƯƠNG PHÁP ĐẾM DÙNG HÀM SINH

Nội dung

Định nghĩa hàm sinh

Định nghĩa

Cho $\{a_n\}_{n\geq 0}$ là một dãy các số thực, thì chuỗi lũy thừa hình thức $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ được gọi là *hàm sinh thông thường* (hay *hàm sinh*) của dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$.

Ví dụ

Xét tập hợp X với m phần tử, gọi a_n là số tập con có n phần tử của X, $a_n = \binom{m}{n}$.

Ta được hàm sinh của dãy số thực $\{a_n\}_{n\geq 0}$ là

$$A(x) = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \cdots + \binom{m}{m}x^m = (1+x)^m$$

Định nghĩa hàm sinh

Ví dụ

Tìm hàm sinh của a_r, với a_r là số cách để chọn r viên bi từ 3 viên bi màu xanh, 3 viên bi màu trắng, 3 viên bi màu đỏ, và 3 viên bi màu vàng.

Bài toán trên có thể đưa về bài toán tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$$

với $0 \leq e_i \leq 3$. Ở đây e_1 là số viên bi màu xanh được chọn, e_2 là số viên bi màu trắng, e_3 là số viên bi màu đỏ, và e_4 là số viên bi màu vàng.

Định nghĩa hàm sinh

Ta xây dựng một tích của các nhân tử đa thức sao cho sau khi nhân các đa thức đó lại với nhau, ta được tất cả các hạng tử có dạng $x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}x^{e_4}$, trong đó $0 \leq e_i \leq 3$. Như vậy ta cần 4 nhân tử, và mỗi nhân tử bằng $1 + x + x^2 + x^3$, bao gồm tất cả các lũy thừa nhỏ hơn hay bằng 3 của x. Ta được hàm sinh cần tìm là

$$\begin{aligned}(1+x+x^2+x^3)^4 = & 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 31x^4 + 40x^5 + 44x^6 + \\ & + 31x^8 + 40x^7 + 20x^9 + 10x^{10} + 4x^{11} + x^{12}.\end{aligned}$$

Định nghĩa hàm sinh

Ví dụ

Tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với a_r là số cách để chọn r quả từ 6 quả lê, 5 quả cam, 3 quả chanh, 3 quả mận.

Giải. Tương tự như ví dụ trên a_r là số nghiệm nguyên của phương trình

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$$

với $0 \leq e_1 \leq 6$, $0 \leq e_2 \leq 5$, $0 \leq e_3 \leq 3$, và $0 \leq e_4 \leq 3$. Để tìm hàm sinh ta xây dựng một tích của các nhân tử đa thức sao cho sau khi nhân các đa thức đó lại với nhau, ta được tất cả các hạng tử có dạng $x_1^{e_1}x_2^{e_2}x_3^{e_3}x_4^{e_4}$. Các nhân tử đa thức tương ứng là: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$, $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$, $1+x+x^2+x^3$, và $1+x+x^2+x^3$. Vậy hàm sinh cần tìm là $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + x^3)^2$.

Định nghĩa hàm sinh

Ví dụ

Tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với a_r là số cách chia r đồng xu vào 5 hộp với điều kiện: Số đồng xu ở hộp 1 và hộp 2 là số chẵn và không quá 10, và các hộp còn lại chứa 3 đến 5 đồng xu.

Định nghĩa hàm sinh

Ví dụ

Tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với a_r là số cách chia r đồng xu vào 5 hộp với điều kiện: Số đồng xu ở hộp 1 và hộp 2 là số chẵn và không quá 10, và các hộp còn lại chứa 3 đến 5 đồng xu.

Giải. a_r là số nghiệm nguyên của phương trình

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = r$$

với e_1, e_2 chẵn, $0 \leq e_1, e_2 \leq 10$, và $3 \leq e_3, e_4, e_5 \leq 5$.
Để tìm hàm sinh ta xây dựng một tích của các nhân tử đa thức sao cho sau khi nhân các đa thức đó lại với nhau, ta được tất cả các hạng tử có dạng $x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}x^{e_4}x^{e_5}$. Ta được nhân tử đa thức tương ứng với e_1 và e_2 là $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})$, và tương ứng với e_3, e_4, và e_5 là $(x^3 + x^4 + x^5)$. Hàm sinh cần tìm là

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})^2(x^3 + x^4 + x^5)^3$$

Hệ số hàm sinh

Trong phần này, chúng ta sẽ sử dụng một số kỷ thuật để tính toán các hệ số trong hàm sinh. Phương pháp chủ yếu là đưa một hàm sinh phức tạp về hàm sinh kiểu nhị thức hoặc tích của các hàm sinh kiểu nhị thức. Ta cần sử dụng một số khai triển sau:

Một số khai triển đa thức

(1) $\dfrac{1-x^{m+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^m$

(2) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$

(3) $(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{r}x^r + \cdots + \binom{n}{n}x^n$

(4) $(1-x^m)^n = 1 - \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}x^{km} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}x^{nm}$

Hệ số hàm sinh

Một số khai triển đa thức

(5) $\dfrac{1}{(1-x)^n} =$

$$1 + \binom{1+n-1}{1}x + \binom{2+n-1}{2}x^2 + \cdots + \binom{r+n-1}{r}x^r + \cdots$$

(6) Nếu $h(x) = f(x)g(x)$, với $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ và $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$, thì $h(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \cdots + (a_rb_0 + a_{r-1}b_1 + a_{r-2}b_2 + \cdots + a_0b_r)x^r + \cdots$

Hệ số hàm sinh

Ví dụ

Tìm hệ số của x^{16} trong $(x^2+x^3+x^4+\cdots)^5$?

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}(x^2+x^3+x^4+\cdots)^5 &= [x^2(1+x+x^2+\cdots)]^5\\ &= x^{10}(1+x+x^2+\cdots)^5\\ &= x^{10}\frac{1}{(1-x)^5}\end{aligned}$$

Để tìm hệ số của x^{16} trong $(x^2+x^3+x^4+\cdots)^5$, ta tìm hệ số của x^6 trong $\frac{1}{(1-x)^5}$. Theo khai triển trên ta được hệ số của x^6 trong $\frac{1}{(1-x)^5}$ là

$$\binom{6+5-1}{6}.$$

Hệ số hàm sinh

Ví dụ

Tìm số cách để lấy 15 đồng xu từ 20 người sao cho, trong 19 người đầu tiên ta có thể lấy ở mỗi người 0 đồng hoặc 1 đồng, và người thứ 20 ta có thể lấy 0 đồng, hoặc 1 đồng, hoặc 5 đồng?

Hệ số hàm sinh

Ví dụ

Tìm số cách để lấy 15 đồng xu từ 20 người sao cho, trong 19 người đầu tiên ta có thể lấy ở mỗi người 0 đồng hoặc 1 đồng, và người thứ 20 ta có thể lấy 0 đồng, hoặc 1 đồng, hoặc 5 đồng?

Giải. Bài toán trên tương đương với bài toán tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} = 15$$

thỏa điều kiện $x_i = 0$ hoặc 1 với $i = 1, 2, \ldots, 19$ và $x_{20} = 0$ hoặc 1, hoặc 5. Ta có được hàm sinh cho bài toán trên là

$$(1+x)^{19}(1+x+x^5)$$

Hệ số hàm sinh

Theo công thức khai triển ta có

$$(1+x)^{19} = 1 + \binom{19}{1}x + \binom{19}{2}x^2 + \cdots + \cdots + \binom{19}{19}x^{19}$$

Đặt $f(x) = (1+x)^{19}$ và $g(x) = 1 + x + x^5$. Gọi a_r là hệ số của x^r trong $f(x)$, và b_r là hệ số của x^r trong $g(x)$. Ta thấy $a_r = \binom{19}{r}$, và

$b_0 = b_1 = b_5 = 1$, các b_i khác bằng 0. Hệ số của x^{15} trong $h(x) = f(x)g(x)$ được tính bởi (6) là,

$$a_{15}b_0 + a_{14}b_1 + a_{13}b_2 + \cdots + a_0b_{15}$$

Thu gọn ta được

$$a_{15}b_0 + a_{14}b_1 + a_{10}b_5 = \binom{19}{15}\times 1 + \binom{19}{14}\times 1 + \binom{19}{10}\times 1 = 107882.$$

Hệ số hàm sinh

Ví dụ

Có bao nhiêu cách chia 25 viên bi vào 7 hộp với điều kiện hộp thứ nhất có không quá 10 viên, các hộp còn lại tùy ý.

Hệ số hàm sinh

Ví dụ

Có bao nhiêu cách chia 25 viên bi vào 7 hộp với điều kiện hộp thứ nhất có không quá 10 viên, các hộp còn lại tùy ý.

Giải. Hàm sinh của dãy $\{a_r\}_{r\geq 0}$ với a_r là số cách chia r viên bi vào 7 hộp với điều kiện như đề bài là:

$$\begin{aligned}
(1+x+\ldots+x^{10})&(1+x+x^2+\ldots+)^6 \\
&= \left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)^6 \\
&= (1-x^{11})\left(\frac{1}{1-x}\right)^7
\end{aligned}$$

Hệ số hàm sinh

Theo công thức (5) ta có

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^7 = 1 + \binom{1+7-1}{1}x + \cdots + \binom{r+7-1}{r}x^r + \cdots$$

Đặt $f(x) = 1 - x^{11}$ và $g(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^7$. Gọi a_r là hệ số của x^r trong $f(x)$, và b_r là hệ số của x^r trong $g(x)$. Ta thấy $a_0 = 1, a_{11} = -1, a_i = 0$ với $i \neq 0, 11$ và $b_r = \binom{r+7-1}{r}$.

Hệ số của x^{25} trong $h(x) = f(x)g(x)$ được tính bởi (6) là,

$$a_0b_{25} + a_1b_{24} + \cdots + a_{25}b_0$$

Thu gọn ta được

$$a_0b_{25} + a_{11}b_{14} = 1 \times \binom{25+7-1}{25} + (-1) \times \binom{14+7-1}{14} = 697521$$

Hệ số hàm sinh

Ví dụ

Có bao nhiêu cách chọn 25 nón từ 6 loại nón, với điều kiện mỗi loại nón phải được chọn từ 1 đến 5 cái.

Ví dụ

Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Hệ số hàm sinh

Giải. Ta có $\binom{2n}{n}$ là hệ số của x^n trong $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$. Đặt $f(x) = (1+x)^n$, $g(x) = (1+x)^n$ và a_r, b_r lần lượt là hệ số của x^r trong $f(x)$ và $g(x)$. Ta có $a_r = b_r = \binom{n}{r}$. Áp dụng công thức (6), ta có hệ số x^n trong $f(x)g(x)$ là

$$\begin{aligned} & a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0 \\ &= \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} \\ &= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2. \end{aligned}$$

Phân hoạch

Định nghĩa

Cho số nguyên dương n. Khi đó dãy $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ được gọi là một phân hoạch của n nếu $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$.

Ví dụ

Số nguyên dương 5 có 7 phân hoạch là $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(1,1,3)$, $(1,2,2)$, $(1,4)$, $(2,3)$, và (5), trong đó 5 được gọi là một phân hoạch tầm thường của chính nó.

Ví dụ

Liệt kê tất cả các phân hoạch của 6.

Phân hoạch

Chúng ta xây dựng một hàm sinh cho a_r, với a_r là số lượng các phân hoạch của số nguyên r.

Một phân hoạch của số nguyên r được mô tả bằng số lượng các số 1, 2,...sao cho khi lấy tổng lại với nhau ta được r.

Gọi e_k là số các số nguyên k xuất hiện trong phân hoạch, ta có

$$1e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \cdots + ke_k + \cdots + re_r = r$$

Ta được hàm sinh cần tìm là

$$g(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) \times (1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots) \times \cdots \times (1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{kn} + \cdots)$$

Dễ dàng thấy được $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^k)\dots}$

Phân hoạch

Ví dụ

Tìm hàm sinh cho a_r, với a_r là số cách biểu diễn r như tổng của các số nguyên khác nhau.

Tương tự như trên ta cũng gọi e_k là số các số nguyên k xuất hiện trong phân hoạch của r, ta có

$$1e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \cdots + ke_k + \cdots + re_r = r$$

Do yêu cầu của bài toán các e_i chỉ nhận giá trị là 0 hoặc 1. Ta được hàm sinh của a_r là

$$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$$

Ví dụ

Tìm hàm sinh cho a_r, với a_r là số cách chọn các đồng xu 1 đồng, 2 đồng, 5 đồng để được tổng là r đồng.

Phân hoạch

Ví dụ

Chứng minh rằng mọi số nguyên dương đều được viết như là tổng duy nhất của các lũy thừa khác nhau của 2.

Gọi a_r là số cách để viết một số nguyên r thành tổng của các lũy thừa khác nhau của 2. Ta tìm hàm sinh cho a_r. Tương tự như hàm sinh cho tổng các số nguyên khác nhau trong ví dụ trên, nhưng trong trường hợp này ta chỉ xét các số nguyên là lũy thừa của 2. Gọi e_k là số các số nguyên 2^k trong phân hoạch, thì ta có

$$1e_0 + 2e_1 + 2^2 e_2 + \cdots + 2^k e_k + \cdots = r$$

Hàm sinh của a_r là

$$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots(1+x^{2^k})\ldots$$

Phân hoạch

Để chứng minh mọi số nguyên đều được viết dưới dạng tổng duy nhất của các lũy thừa khác nhau của 2, ta phải chứng minh hệ số của mỗi lũy thừa của x trong $g(x)$ bằng 1. Nghĩa là chứng minh

$$g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Ta thấy

$$\begin{aligned}
(1-x)g(x) &= (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2k})\ldots \\
&= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2k})\ldots \\
&= (1-x^4)(1+x^4)\ldots(1+x^{2k})\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= 1
\end{aligned}$$

Do đó $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Vậy ta được điều cần chứng minh.

Hàm sinh mũ

Trong phần này chúng ta sẽ nói về hàm sinh mũ và sử dụng chúng để giải quyết các bài toán liên quan đến sự sắp xếp có lặp lại.

Ví dụ

Tìm số các từ khác nhau có 4 ký tự được tạo thành từ các chữ a, b, c, và mỗi từ chứa ít nhất hai chữ a?

Từ tập hợp các ký tự sau đây ta có thể sắp xếp để được các từ cần tìm: $\{a,a,a,a\}, \{a,a,a,b\}, \{a,a,a,c\}, \{a,a,b,b\}, \{a,a,b,c\}, \{a,a,c,c\}$. Dễ dàng thấy rằng số từ có thể có được là

$$\frac{4!}{4!0!0!} + \frac{4!}{3!1!0!} + \frac{4!}{3!0!1!} + \frac{4!}{2!2!0!} + \frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!0!2!}$$

Hàm sinh mũ

Gọi e_1, e_2, e_3 là số chữ a, b, c xuất hiện trong một từ. Thoạt nhìn, bài toán của chúng ta sẽ tương đương với bài toán tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$e_1 + e_2 + e_3 = 4$$

với $e_1 \geq 2$, $e_2, e_3 \geq 0$, và chúng ta có thể dùng hàm sinh thông thường để giải. Sự khác biệt ở đây nằm ở chỗ ứng với mỗi nghiệm nguyên của phương trình trên ta được số lượng các chữ cái mỗi loại, và ứng với số lượng các chữ cái đó ta có thể sắp xếp để cho ra nhiều từ khác nhau. Nghĩa là ứng với một nghiệm nguyên của phương trình trên cho ta $\frac{4!}{e_1!e_2!e_3!}$ từ có thể. Trong trường hợp này người ta đưa ra khái niệm hàm sinh mũ.

Hàm sinh mũ

Định nghĩa

Cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là một dãy các số thực. Khi đó chuỗi lũy thừa hình thức

$$E(x) = a_0 + a_1x + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \cdots + a_r\frac{x^r}{r!} + \cdots$$

được gọi là *hàm sinh mũ* của dãy $\{a_r\}_{r\geq 0}$.

Chúng ta xây dựng hàm sinh mũ giống như cách xây dựng hàm sinh thông thường: một nhân tử đa thức cho mỗi đối tượng, mỗi nhân tử chứa tập hợp các lũy thừa của x. Tuy nhiên mỗi lũy thừa x^r được chia cho $r!$.

Hàm sinh mũ

Ví dụ

Tìm hàm sinh mũ cho a_r, số các bộ gồm r phần tử không lặp lại có sắp thứ tự từ n phần tử?, (a_r là chỉnh hợp chập r của n phần tử.)

Do không có sự lặp lại, nên hàm sinh mũ cần tìm là $(1+x)^n$. Hệ số của x^r là $\binom{n}{r}$. Hệ số của $\frac{x^r}{r!}$ là $a_r = n!/(n-r)!$

Hay nói cách khác, ta có $a_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, do đó hàm sinh mũ là

$$E(x) = 1 + nx + \frac{n!}{(n-2)!}\frac{x^2}{2!} + \frac{n!}{(n-3)!}\frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{n!}{(n-r)!}\frac{x^r}{r!} + \cdots.$$

Hàm sinh mũ

Ví dụ

Tìm hàm sinh mũ cho a_r, với a_r là số cách sắp xếp khác nhau của r vật thể được chọn ra từ 4 loại vật thể khác nhau, sao cho mỗi loại vật thể xuất hiện ít nhất 2 lần và không quá 5 lần?

Gọi e_i là số lượng loại vật thể thứ i, $i = 1, 2, 3, 4$, xuất hiện trong số r vật thể cần sắp xếp. Ta có $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$ và $2 \leq e_i \leq 5$, với $i = 1, 2, 3, 4$. Nhân tử đa thức ứng với mỗi loại vật thể là

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

. Từ đó suy ra hàm sinh cần tìm là

$$\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4.$$

Hàm sinh mũ

Ví dụ

Tìm hàm sinh mũ cho số cách xếp r người vào trong 3 căn phòng với ít nhất một người mỗi phòng?

Dễ dàng thấy hàm sinh mũ cần tìm là

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^3.$$

Một số khai triển cơ bản của hàm sinh mũ

Ta có

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

Thay x bởi nx ta được

$$e^{nx} = 1 + nx + \frac{n^2x^2}{2!} + \frac{n^3x^3}{3!} + \cdots + \frac{n^rx^r}{r!} + \cdots.$$

Ta cũng suy ra được là

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = e^x - 1 - x$$

Một số khai triển hữu ích thường gặp

- $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$
- $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$

Hàm sinh mũ

Ta xem một số ứng dụng:

Ví dụ

Tìm số cách sắp xếp r đối tượng được chọn ra từ n loại đối tượng khác nhau?

Ta dễ dàng thấy hàm sinh của nó là

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^n = (e^x)^n = e^{nx}$$

Theo công thức khai triển trên ta dễ dàng thấy được hệ số của $\frac{x^r}{r!}$ trong hàm sinh trên là n^r (công thức chỉnh hợp lặp).

Hàm sinh mũ

Ví dụ

Tìm số cách để chia 25 người vào trong 3 căn phòng với ít nhất một người mỗi phòng?

Ta dễ dàng thấy được hàm sinh mũ là $\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3 = (e^x - 1)^3$ để tìm hệ số của $x^r/r!$ ta khai triển biểu thức của e^x,
$(e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1$
Thay vào ta được

$$e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1 = \sum_{r=0}^{\infty} 3^r \frac{x^r}{r!} - 3\sum_{r=0}^{\infty} 2^r \frac{x^r}{r!} + 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} - 1$$

Suy ra hệ số của $x^{25}/25!$ là $3^{25} - (3 \times 2^{25}) + 3$.

Phương pháp tổng

Trong phần này ta chỉ ra cách xây dựng hàm sinh thông thường $h(x)$ mà hệ số của x^r phụ thuộc vào r.

Ta có một số quy luật sau đây để xây dựng hàm sinh mới từ các hàm sinh đã có sẵn. Giả sử $A(x) = \sum a_n x^n$, $B(x) = \sum b_n x^n$, $C(x) = \sum c_n x^n$.

- Nếu $b_n = da_n$, thì $B(x) = dA(x)$ với mọi hằng số d.
- Nếu $c_n = a_n + b_n$, thì $C(x) = A(x) + B(x)$.
- Nếu $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, thì $C(x) = A(x)B(x)$.
- Nếu $b_n = a_{n-k}$, ngoại trừ $b_i = 0$ với $i < k$, thì $B(x) = x^k A(x)$.

Nếu $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_r x^r + \cdots$, lấy đạo hàm của $g(x)$ ta được $\frac{d}{dx} g(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + ra_r x^{r-1} + \cdots$.

Nhân hai vế cho x ta được

$$x\left[\frac{d}{dx} g(x)\right] = a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots + ra_r x^r + \cdots$$

Phương pháp tổng

Ví dụ

Xây dựng hàm sinh $h(x)$ với hệ số $a_r = 2r^2$.

Từ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, ta được

$x\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\right) = x\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = 1x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + rx^r + \cdots$

Ta lặp lại quá trình trên với $\frac{x}{(1-x)^2}$ ta được

$x\left(\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + r^2x^r + \cdots$ Cuối cùng nhân 2 vào hai vế của phương trình trên ta được

$h(x) = \frac{2x(1+x)}{(1-x)^3} = (2 \times 1^2)x + (2 \times 2^2)x^2 + \cdots + (2 \times r^2)x^r + \cdots$.

Phương pháp tổng

Ví dụ

Xây dựng hàm sinh $h(x)$ với hệ số $a_r = (r+1)r(r-1)$.

Ta có

$$3!\frac{1}{(1-x)^4} = 3!\left(1 + \binom{1+4-1}{1}x + \binom{2+4-1}{r}x^2 + \cdots\right)$$

Hệ số a_r của khai triển trên là

$$a_r = 3!\binom{r+4-1}{r} = 3!\frac{(r+3)!}{r!3!} = (r+3)(r+2)(r+1)$$

Phương pháp tổng

Khi đó khai triển lũy thừa của $3!\frac{1}{(1-x)^4}$ là:

$$\frac{3!}{(1-x)^4} = (3\times 2\times 1) + (4\times 3\times 2)x + \cdots + (r+3)(r+2)(r+1)x^r + \cdots$$

Nhân hai vế cho x^2 ta được

$$\frac{3!x^2}{(1-x)^4} = (3\times 2\times 1)x^2 + (4\times 3\times 2)x^3 + \cdots + (r+1)r(r-1)x^r + \cdots$$

Vậy hàm sinh cần tìm là $h(x) = \frac{3!x^2}{(1-x)^4}$.

Tổng quát, ta thấy $(n-1)!(1-x)^{-n}$ có hệ số a_r là

$$a_r = (n-1)!C(r+n-1,r) = [r+(n-1)][r+(n-2)]\cdots(n+1)$$

Phương pháp tổng

Định lý

Nếu $h(x)$ là hàm sinh với a_r là hệ số của x^r, thì $h^*(x) = h(x)/(1-x)$ là hàm sinh của tổng các a_r, nghĩa là

$$h^*(x) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{r} a_i\right) x^r + \cdots .$$

Ví dụ

Tính tổng $2 \times 1^2 + 2 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + \cdots + 2n^2$.

Phương pháp tổng

Hàm sinh $h(x)$ cho $a_r = 2r^2$ là

$$2x(1+x)/(1-x)^3$$

Theo định lý trên, tổng cần tìm $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ là hệ số của x^n trong

$$h^*(x) = h(x)/(1-x) = 2x(1+x)/(1-x)^4 = 2x(1-x)^{-4} + 2x^2(1-x)^{-4}$$

Hệ số của x^n trong $2x(1-x)^{-4}$ là hệ số của x^{n-1} trong $2(1-x)^{-4}$, và hệ số của x^n trong $2x^2(1-x)^{-4}$ là hệ số của x^{n-2} trong $2(1-x)^{-4}$.
Do đó tổng cần tìm bằng

$$2\binom{(n-1)+4-1}{(n-1)} + 2\binom{(n-2)+4-1}{(n-2)}$$

$$= 2\binom{n+2}{3} + 2\binom{n+1}{3}.$$

Phương pháp tổng

Ví dụ

Tính tổng $3 \times 2 \times 1 + 4 \times 3 \times 2 + \cdots + (n+1)n(n-1)$.

Hàm sinh $h(x)$ cho $a_r = (r+1)r(r-1)$ là:

$$h(x) = 6x^2(1-x)^{-4}.$$

Bởi định lý trên, tổng cần tìm là hệ số của x^n trong $h^*(x) = h(x)/(1-x) = 6x^2(1-x)^{-5}$. Hệ số của x^n trong $h^*(x)$ bằng với hệ số của x^{n-2} trong $6(1-x)^{-5}$, và bằng

$$6C((n-2)+5-1, n-2) = 6C(n+2, 4).$$

Ứng dụng hàm sinh thông thường trong bài toán đệ quy

Trong phần này, chúng ta sẽ trình bày một ứng dụng quan trọng của hàm sinh trong việc giải bài toán đệ quy, ta gọi $G(x)$ là hàm sinh của dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$ và tiến hành các bước sau:

(1) *Chuyển công thức đệ quy thành một phương trình của $G(x)$, thường được thực hiện bằng cách nhân cả hai vế của phương trình đệ quy cho x^n, hay x^{n+1}, hay x^{n+k} với một k nào đó, và lấy tổng trên tất cả các số nguyên không âm n.*

(2) *Giải phương trình để tìm $G(x)$.*

(3) *Tìm hệ số của x^n trong $G(x)$, hệ số đó chính bằng a_n, và ta được một công thức tường minh cho a_n.*

Ứng dụng hàm sinh thông thường trong bài toán đệ quy

Ví dụ

Một người gửi 1000 đô la vào trong một tài khoản tiết kiệm với lãi suất là 5 phần trăm một năm. Bắt đầu mỗi năm, người đó lại chuyển vào tài khoản đó 500 đô la nữa. Hỏi số tiền trong tài khoản tiết kiệm của người đó sau n năm là bao nhiêu?

Gọi a_n là số dư trong tài khoản tiết kiệm sau n năm. Ta thấy $a_0 = 1000$, $a_{n+1} = 1.05a_n + 500$. Gọi $G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ là hàm sinh của dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$. Bây giờ ta giải bài toán theo các bước như trên:

(1) Nhân cả hai vế của hệ thức đệ quy với x^{n+1} và lấy tổng trên tất cả các số nguyên không âm n, ta được

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} 1.05a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 0} 500x^{n+1}$$

Phương trình trên tương đương với: $G(x) - a_0 = 1.05xG(x) + \frac{500x}{1-x}$

Ứng dụng hàm sinh thông thường trong bài toán đệ quy

(2)Do đó ta được

$$G(x) = \frac{1000}{1-1.05x} + \frac{500x}{(1-x)(1-1.05x)}$$

(3)Ta thấy

$$\frac{1000}{1-1.05x} = 1000 \cdot \sum_{n\geq 0} 1.05^n x^n$$

do đó hệ số của x^n trong biểu thức trên là $1000 \cdot 1.05^n$.

Xét thành phần thứ hai $\frac{500x}{(1-x)(1-1.05x)} = 500x. \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} 1.05^n x^n\right)$

Ứng dụng hàm sinh thông thường trong bài toán đệ quy

Trong tích trên x^{n-1} được tạo thành từ x^i của tổng thứ nhất và $1.05^{n-1-i}x^{n-1-i}$ từ tổng thứ hai với $0 \leq i \leq n-1$. Do đó hệ số của x^n trong $\frac{500x}{(1-x)(1-1.05x)}$ là

$$500\sum_{i=0}^{n-1} 1.05^i = 500\frac{1.05^n-1}{1.05-1} = 10000\cdot(1.05^n-1)$$

Ta được hệ số

$$a_n = 1000\cdot 1.05^n + 10000\cdot(1.05^n-1) = 1.05^n.11000 - 10000.$$

Thử lại ta được kết quả đúng.

Ứng dụng hàm sinh thông thường trong bài toán đệ quy

Ví dụ

Cho hệ thức đệ quy $a_{n+1} = 4a_n - 100$, và $a_0 = 50$. Tìm công thức cho a_n.

Đáp án: $a_n = 50 \cdot 4^n - 100 \cdot \frac{4^n - 1}{3}$.

Ví dụ

Cho hệ thức đệ quy $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, và $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Tìm công thức cho a_n.

Đáp án: $a_n = 2^n - 1$.

Định lý (Công thức tích cho hàm sinh thông thường)

Gọi a_n là số cách để xây dựng một cấu trúc nào đó trên tập n phần tử, và b_n là số cách để xây dựng một cấu trúc khác trên tập n phần tử. Gọi c_n là số cách để chia $[n]$ thành các đoạn $S = \{1, 2, \cdots, i\}$ và $T = \{i+1, i+2, \cdots, n\}$, (S và T có thể bằng rỗng), và xây dựng cấu trúc loại thứ nhất lên S, và cấu trúc loại thứ hai lên T. Gọi $A(x)$, $B(x)$, và $C(x)$ là các hàm sinh tương ứng của các dãy $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, và $\{c_n\}$. Thì $A(x)B(x) = C(x)$.

Ví dụ

Một học kỳ ở một trường đại học có n ngày. Đầu mỗi học kỳ, cô hiệu trưởng chia học kỳ đó ra làm 2 phần, k ngày đầu tiên sẽ dùng cho lý thuyết, và $n-k$ ngày còn lại sẽ được dùng cho thực hành (ở đây $1 \leq k \leq n-2$). Trong đợt dạy lý thuyết sẽ có 1 ngày nghỉ, và trong đợt dạy thực hành sẽ có 2 ngày nghỉ. Hỏi cô hiệu trưởng có bao nhiêu cách khác nhau để làm như vậy?

Ứng dụng hàm sinh thông thường trong bài toán đệ quy

Nếu đợt dạy lý thuyết có k ngày thì ta sẽ có k cách để chọn ra một ngày nghỉ, và nếu đợt dạy thực hành có $n-k$ ngày thì có $\binom{n-k}{2}$ cách để chọn ra 2 ngày nghỉ. Các hàm sinh tương ứng là $A(x) = \sum_{k\geq 1} kx^k$, và $B(x) = \sum_{m\geq 2} \binom{m}{2} x^m$. Ta có $\sum_{i\geq 0} x^i = \frac{1}{1-x}$.

Lấy đạo hàm ta được $A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ và $B(x) = \frac{x^2}{(1-x)^3}$ Gọi f_n là số cách để chia học kỳ ra hai phần và chọn ngày nghỉ, và gọi $F(x)$ là hàm sinh của nó. Khi đó ta có $A(x)B(x) = F(x)$. Do đó

$$F(x) = \frac{x^3}{(1-x)^5} = x^3 \sum_{n\geq 0} \binom{n+4}{4} x^n = \sum_{n\geq 3} \binom{n+1}{4} x^n$$

Từ đó suy ra $f_n = \binom{n+1}{4}$.

Ứng dụng hàm sinh thông thường trong bài toán đệ quy

Ví dụ

Tương tự như ví dụ trên nhưng ở đây thay vì chọn ngày nghỉ, hiệu trưởng chọn ra một số ngày tự học trong cả hai phần của học kỳ. Hỏi có bao nhiêu cách khác nhau để hiệu trưởng làm như vậy?

Gọi g_n là số cách mà hiệu trưởng có thể chọn. Chia bài toán ra thành 2 phần. Gọi $C(x)$ là hàm sinh cho số cách để chọn ra một tập các ngày tự học trong phần thứ nhất của học kỳ. Bởi vì một tập k phần tử sẽ có 2^k tập con, ta có $C(x) = \sum_{k\geq 0} 2^k x^k = \frac{1}{1-2x}$. Ta thấy phần thứ hai cũng có hàm sinh giống như phần thứ nhất. Do đó hàm sinh cần tìm là

$F(x) = C(x)C(x) = \frac{1}{(1-2x)^2} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+2-1}{n} (2x)^n = \sum_{n\geq 0} \binom{n+1}{1} (2x)^n = \sum_{n\geq 0} (n+1)2^n x^n$. Vậy ta được $g_n = (n+1)2^n$.

Ứng dụng hàm sinh thông thường trong bài toán đệ quy

Ví dụ

Tìm số cách để chia n ngày của một học kỳ ra thành ba phần. Trong đó, ở phần thứ nhất số ngày nghỉ được chọn tùy ý, ở phần thứ hai số ngày nghỉ là số lẻ, và ở phần thứ ba số ngày nghỉ là số chẵn.

Đáp án: $g_n = 2^{n-3}n(n+3)$.

Ví dụ

Gọi $p_{\leq k}(n)$ là số các phân hoạch của số nguyên n thành những phần có nhỏ hơn hay bằng k, chứng minh rằng

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} p_{\leq k}(n)x^n = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-x^i}$$

$$= (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)\cdots(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\cdots).$$

Ứng dụng hàm sinh mũ trong bài toán đệ quy

Tương tự như hàm sinh thông thường, gọi $G(x)$ là hàm sinh mũ cho dãy $\{a_n\}$, ta thực hiện theo một số bước như sau:

(1) *Chuyển hệ thức đệ quy thành một phương trình trong $G(x)$, thường được thực hiện bằng cách nhân cả hai vế của phương trình đệ quy cho $x^n/n!$, hay $x^{n+1}/(n+1)!$, hay $x^{n+k}/(n+k)!$ với một k nào đó, và lấy tổng trên tất cả các số nguyên không âm n.*

(2) *Giải $G(x)$.*

(3) *Tìm hệ số của $x^n/n!$ trong $G(x)$, hệ số đó chính bằng a_n, và ta được một công thức tường minh cho a_n.*

Ứng dụng hàm sinh mũ trong bài toán đệ quy

Ví dụ

Cho $a_0 = 1$, và $a_{n+1} = (n+1)(a_n - n + 1)$, nếu $n \geq 0$. Tìm một công thức cho a_n.

Chú ý

Nếu chúng ta giải bài toán trên bằng cách dùng hàm sinh thông thường, thì sẽ gặp vấn đề lúc đưa ra kết quả. Dãy $\{a_n\}$ tăng khá nhanh, và chúng ta không tìm được dạng hàm sinh thông thường tương ứng. Do đó bài toán trên sẽ được giải bằng hàm sinh mũ.

Ứng dụng hàm sinh mũ trong bài toán đệ quy

Gọi $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$ là hàm sinh mũ của dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$. Ta nhân cả hai vế của hệ thức đệ quy với $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, và lấy tổng với mọi $n \geq 0$, ta được

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n!} - \sum_{n\geq 0} (n-1) \frac{x^{n+1}}{n!}$$

Ta thấy vế trái là $A(x) - 1$, hạng tử đầu tiên của vế phải là $xA(x)$. Từ đó ta được phương trình trên tương đương với

$$A(x) - 1 = xA(x) - x^2 e^x + xe^x.$$

$$A(x) = \frac{1}{1-x} + xe^x = \sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

Hệ số của $x^n/n!$ trong $\sum_{n\geq 0} x^n$ là $n!$, trong khi hệ số của $x^n/n!$ trong $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n!}$ là n. Vậy hệ số của $x^n/n!$ trong $A(x)$ là $n! + n$.

Ứng dụng hàm sinh mũ trong bài toán đệ quy

Ví dụ

Cho $f_0 = 0$, *và* $f_{n+1} = 2(n+1)f_n + (n+1)!$ *nếu* $n \geq 0$. *Tìm một công thức cho* f_n.

Ứng dụng hàm sinh mũ trong bài toán đệ quy

Ví dụ

Cho $f_0 = 0$, và $f_{n+1} = 2(n+1)f_n + (n+1)!$ nếu $n \geq 0$. Tìm một công thức cho f_n.

Gọi $F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}$ là hàm sinh mũ của dãy $\{f_n\}$. Nhân cả hai vế của hệ thức trên với $x^{n+1}/(n+1)!$, và lấy tổng với mọi $n \geq 0$. Ta được
$\sum_{n\geq 0} f_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 2x \sum_{n\geq 0} f_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} x^{n+1}$
Do $f_0 = 0$ nên vế trái bằng $F(x)$, hạng tử thứ nhất của vế phải bằng $2xF(x)$, và hạng tử thứ hai của vế phải bằng $x/(1-x)$. Do đó, ta có được $F(x) = 2xF(x) + \frac{x}{1-x}$, hay $F(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$ Suy ra,

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} (2^n - 1)x^n$$

Ta được hệ số của $x^n/n!$ trong $F(x)$ là $f_n = (2^n - 1)n!$

Ứng dụng hàm sinh mũ trong bài toán đệ quy

Bổ đề

Gọi $\{a_i\}$ *và* $\{b_k\}$ *là hai dãy, và gọi* $A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i \frac{x^i}{i!}$, *và* $B(x) = \sum_{k\geq 0} b_k \frac{x^k}{k!}$ *là các hàm sinh của nó. Gọi* $c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$, *và* $C(x)$ *là hàm sinh của dãy* $\{c_n\}$. *Thì*

$$A(x)B(x) = C(x)$$

Hay nói cách khác, hệ số của $x^n/n!$ *trong* $A(x)B(x)$ *là* $c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$.

Ứng dụng hàm sinh mũ trong bài toán đệ quy

Định lý (Công thức tích cho hàm sinh mũ)

Gọi a_n là số cách để xây dựng một cấu trúc nào đó trên một tập hợp n phần tử, và b_n là số cách để xây dựng một cấu trúc khác trên tập n phần tử. Gọi c_n là số cách để chia đoạn $[n]$ thành những tập con rời nhau S và T, $(S \cup T = [n])$, và xây dựng một cấu trúc trên S, và một cấu trúc thứ hai lên T. Gọi $A(x)$, $B(x)$, và $C(x)$ là các hàm sinh mũ tương ứng của các dãy $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, và $\{c_n\}$, thì

$$A(x)B(x) = C(x).$$

Ví dụ

Một đội bóng có n cầu thủ. Huấn luyện viên chia đội bóng ra thành hai nhóm, và mỗi nhóm đứng thành một dòng. Các thành viên của nhóm thứ nhất mặt áo cam, áo trắng, hoặc áo xanh. Các thành viên của nhóm còn lại mặc áo đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách để thực hiện các việc trên?

Ứng dụng hàm sinh mũ trong bài toán đệ quy

Giả sử huấn luyện viên chọn ra k người để tạo thành nhóm thứ nhất. Gọi a_k là số cách để k người này có thể chọn áo cam, trắng, hoặc xanh, và đứng thành một dòng. Thì $a_k = k!3^k$, hàm sinh mũ của dãy $\{a_k\}$ là
$A(x) = \sum_{k\geq 0} k!3^k \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{1-3x}$.
Tương tự, giả sử có m người trong nhóm thứ hai. Gọi b_m là số cách để m người này đứng thành một dòng, $b_m = m!$, và hàm sinh mũ của dãy b_m là
$B(x) = \sum_{m\geq 0} m! \frac{x^m}{m!} = \frac{1}{1-x}$.
Gọi c_n là số cách để thực hiện tất cả những việc trên, và $C(x)$ là hàm sinh mũ tương ứng của nó. Theo công thức trên ta có
$C(x) = A(x)B(x) = \frac{1}{1-3x} \cdot \frac{1}{1-x}$. Do $\frac{1}{1-3x} = \sum_{k\geq 0} 3^k x^k$, và $\frac{1}{1-x} = \sum_{m\geq 0} x^m$, ta có hệ số của $x^n/n!$ trong $C(x)$ là $c_n = n!(3^{n+1} - 1)/2$.