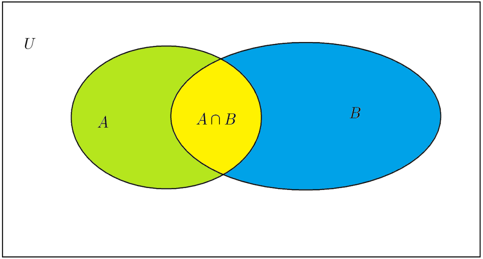
Bài giảng Toán học Tổ hợp

Nguyễn Anh Thi

ĐH KHTN, TpHCM

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Nội dung



Hình: Sơ đồ Ven

Gọi U là tập vũ trụ, $\overline{A}$ là phần bù của A trong U, $|A|$ là số phần tử của A, (tương tự cho $B, \ldots$). Ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

$$|U \backslash (A \cup B)| = |\overline{A} \cap \overline{B}| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Ví dụ

Một trường có 1000 *sinh viên, trong đó có* 500 *sinh viên chọn học bóng chuyền,* 400 *sinh viên chọn học điền kinh, và* 200 *sinh viên chọn học cả* 2 *môn trên. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không chọn học cả bóng chuyền và điền kinh?*

Ví dụ

Một trường có 1000 sinh viên, trong đó có 500 sinh viên chọn học bóng chuyền, 400 sinh viên chọn học điền kinh, và 200 sinh viên chọn học cả 2 môn trên. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không chọn học cả bóng chuyền và điền kinh?

Đáp án: $1000 - 500 - 400 + 200 = 300$.

Ví dụ

Một trường có 1000 *sinh viên, trong đó có* 500 *sinh viên chọn học bóng chuyền,* 400 *sinh viên chọn học điền kinh, và* 200 *sinh viên chọn học cả* 2 *môn trên. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không chọn học cả bóng chuyền và điền kinh?*

Đáp án: $1000 - 500 - 400 + 200 = 300$.

Ví dụ

Có bao nhiêu hoán vị các chữ số $0, 1, 2, \ldots, 9$ *sao cho chữ số đầu lớn hơn* 2 *và chữ số cuối nhỏ hơn* 7*?*

Ví dụ

Một trường có 1000 *sinh viên, trong đó có* 500 *sinh viên chọn học bóng chuyền,* 400 *sinh viên chọn học điền kinh, và* 200 *sinh viên chọn học cả* 2 *môn trên. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không chọn học cả bóng chuyền và điền kinh?*

Đáp án: $1000 - 500 - 400 + 200 = 300$.

Ví dụ

Có bao nhiêu hoán vị các chữ số $0, 1, 2, \ldots, 9$ *sao cho chữ số đầu lớn hơn* 2 *và chữ số cuối nhỏ hơn* 7*?*

Lời giải. Gọi U là tập tất cả các hoán vị của $0, 1, 2, \ldots, 9$. $|U| = 10!$.
Gọi A là tập các hoán vị với chữ số đầu là 0 hoặc 1 hoặc 2. $|A| = 3.9!$.
Gọi B là tập các hoán vị với chữ số cuối là 7 hoặc 8 hoặc 9. $|B| = 3.9!$.
Ta có $|A \cap B| = 3.3.8!$.

Ví dụ

Một trường có 1000 *sinh viên, trong đó có* 500 *sinh viên chọn học bóng chuyền,* 400 *sinh viên chọn học điền kinh, và* 200 *sinh viên chọn học cả* 2 *môn trên. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không chọn học cả bóng chuyền và điền kinh?*

Đáp án: $1000 - 500 - 400 + 200 = 300$.

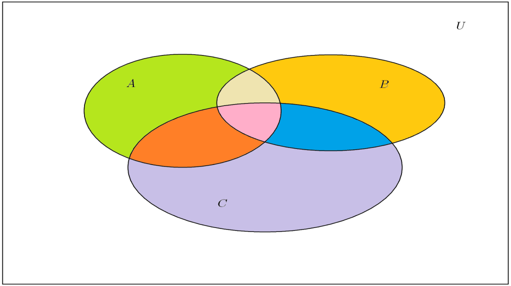
Ví dụ

Có bao nhiêu hoán vị các chữ số $0, 1, 2, \ldots, 9$ *sao cho chữ số đầu lớn hơn* 2 *và chữ số cuối nhỏ hơn* 7*?*

Lời giải. Gọi U là tập tất cả các hoán vị của $0, 1, 2, \ldots, 9$. $|U| = 10!$.
Gọi A là tập các hoán vị với chữ số đầu là 0 hoặc 1 hoặc 2. $|A| = 3.9!$.
Gọi B là tập các hoán vị với chữ số cuối là 7 hoặc 8 hoặc 9. $|B| = 3.9!$.
Ta có $|A \cap B| = 3.3.8!$.

$$\begin{aligned} |\overline{A} \cap \overline{B}| &= |U| - |A| - |B| + |A \cap B| \\ &= 10! - 3.9! - 3.9! + 3.3.8! = \ldots. \end{aligned}$$

Mở rộng cho trường hợp 3 tập hợp.



Hình: Sơ dồ Ven

Tương tự ta có

$$\begin{aligned}|U\backslash(A\cup B\cup C)| &= |\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|\\ &= |U|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|\\ &-|A\cap B\cap C|.\end{aligned}$$

Ví dụ

Một trường có 100 *sinh viên, trong đó có* 40 *sinh viên học tiếng Anh,* 40 *sinh viên học tiếng Pháp,* 40 *sinh viên học tiếng Đức, mỗi cặp ngôn ngữ có* 20 *sinh viên học và có* 10 *sinh viên học cả* 3 *ngôn ngữ. Hỏi trường có bao nhiêu sinh viên không học cả* 3 *tiếng Anh, Pháp, Đức?*

Đáp án. $100 - (40 + 40 + 40) + (20 + 20 + 20) - 10 = 10.$

Ví dụ

Một trường có 100 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên học tiếng Anh, 40 sinh viên học tiếng Pháp, 40 sinh viên học tiếng Đức, mỗi cặp ngôn ngữ có 20 sinh viên học và có 10 sinh viên học cả 3 ngôn ngữ. Hỏi trường có bao nhiêu sinh viên không học cả 3 tiếng Anh, Pháp, Đức?

Đáp án. $100 - (40 + 40 + 40) + (20 + 20 + 20) - 10 = 10$.

Ví dụ

Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn hay bằng 1000 và nguyên tố cùng nhau với 70?

Lời giải. Gọi U là tập các số nguyên dương nhỏ hơn hay bằng 1000.
$|U| = 1000$.
Ta có $70 = 2.5.7$.
Gọi A, B, C lần lượt là tập các số nguyên trong U tương ứng chia hết cho $2, 5$, và 7.

Ta có thể dễ dàng thấy được

$|A| = \left[\dfrac{1000}{2}\right] = 500, |B| = \left[\dfrac{1000}{5}\right] = 200, |C| = \left[\dfrac{1000}{7}\right] = 142.$

Một số chia hết cho 2 và 5 khi và chỉ khi số đó chia hết cho 10. Suy ra

$|A \cap B| = \left[\dfrac{1000}{2.5}\right] = 100.$

Tương tự ta có $|A \cap C| = \left[\dfrac{1000}{2.7}\right] = 71, |B \cap C| = \left[\dfrac{1000}{5.7}\right] = 28,$

$|A \cap B \cap C| = \left[\dfrac{1000}{2.5.7}\right] = 14.$

Ta được kết quả cần tìm:

$$\begin{aligned}|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| &= |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) \\ &\quad - |A \cap B \cap C| \\ &= 1000 - (500 + 200 + 142) + (100 + 71 + 28) - 14 = 343.\end{aligned}$$

Định lý

Cho tập vũ trụ U và $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n tập con của U. Đặt

$S_1 = \sum_{i=1}^{n} |A_i|,$

$S_2 = \sum_{1\le i_1<i_2\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|,$

$\cdots\cdots\cdots$

$S_k = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}|,$

$\cdots\cdots\cdots$

$S_n = |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$. *Khi đó*

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}| &= |U| + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k S_k \\ &= |U| - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^k S_k + \cdots + (-1)^n S_n.\end{aligned}$$

Hệ quả

Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *là* n *tập con của tập vũ trụ* U*. Khi đó*

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k \\ &= S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{k-1} S_k + \cdots + (-1)^{n-1} S_n.\end{aligned}$$

Hệ quả

Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *là* n *tập con của tập vũ trụ* U. *Khi đó*

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k \\ &= S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{k-1} S_k + \cdots + (-1)^{n-1} S_n.\end{aligned}$$

Ví dụ

Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \quad (*)$ *thỏa điều kiện* $x_i \leq 7, \forall i = 1, 2, 3, 4.$

Gọi U là tập hợp các nghiệm không âm của phương trình $(*)$.
$|U| = K_4^{18} = C_{4+18-1}^{18} = 1330$.
Gọi A_i là tập hợp các nghiệm nguyên không âm của phương trình $(*)$ thỏa tính chất $x_i \geq 8$.
Ta có $|A_i| = K_4^{10} = C_{13}^{10} = 286, \forall 1 \leq i \leq 4$.
$|A_i \cap A_j| = K_4^2 = C_5^2 = 10, \forall 1 \leq i < j \leq 4$.
$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0, \forall 1 \leq i < j < k \leq 4$.
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$.
Vai trò của A_i là như nhau nên ta có

$$S_1 = \sum_{i=1}^{4} |A_i| = 4.286 = 1144,\ S_2 = \sum_{1\leq i<j\leq 4} |A_i \cap A_j| = C_4^2.10 = 60.$$

$S_3 = 0, S_4 = 0$.
Theo định lý trên ta có số nghiệm thỏa yêu cầu bài toán là

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 1330 - 1144 + 60 - 0 + 0 = 246.$$

Ví dụ

Có bao nhiêu cách lấy 6 lá bài từ bộ bài 52 lá sao cho có đầy đủ 4 nước (cơ, rô, chuồn, bích)?

Ví dụ

Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

thỏa điều kiện $x_1 \leq 5, x_2 \leq 7, x_3 \leq 10.$

Ví dụ

Có bao nhiêu toàn ánh từ tập hợp có 6 phần tử vào tập hợp có 3 phần tử?

Định lý

Cho tập vũ trụ U và $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n tập con của U. Khi đó số phần tử **thuộc đúng** *m tập hợp, ký hiệu N_m, là*

$$\begin{aligned} N_m &= \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i C_{m+i}^m S_{m+i} \\ &= S_m - C_{m+1}^m S_{m+1} + \cdots + (-1)^{n-m} C_n^m S_n. \end{aligned}$$

Gọi N_m^* là số phần tử **thuộc ít nhất** *m tập hợp thì*

$$\begin{aligned} N_m^* &= \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i C_{m+i-1}^{m-1} S_{m+i} \\ &= S_m - C_m^{m-1} S_{m+1} + \cdots + (-1)^{n-m} C_{n-1}^{m-1} S_n. \end{aligned}$$

Ví dụ

Có bao nhiêu chuỗi tam phân có độ dài 4

- a) *chứa đúng 2 chữ số 1?*
- b) *chứa ít nhất 2 chữ số 1?*

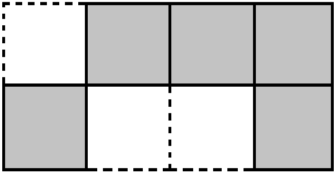
Lời giải. Gọi U là tập hợp các chuỗi tam phân có độ dài 4, A_i là tập hợp các chuỗi tam phân có chữ số tại vị trí i là $1, \forall i = 1, 2, 3, 4$. Ta có
$|U| = 3^4$
$S_1 = C_4^1 3^3, S_2 = C_4^2 3^2$
$S_3 = C_4^3 3^1, S_4 = C_4^4 3^0$.
Suy ra
$a)\ N_2 = S_2 - C_3^2 S_3 + C_4^2 S_4 = 24.$
$b)\ N_2^* = S_2 - C_2^1 S_3 + C_3^1 S_4 = 33.$

Đa thức quân xe

Định nghĩa

Một **bàn cờ** là một tập hợp gồm một số ô vuông bất kỳ trong một bảng chữ nhật có $p \times q$ ô vuông.

Ví dụ



Hình: *Bàn cờ 5 ô vuông trong bảng chữ nhật 2×4 ô vuông*

Định nghĩa

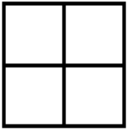
Cho các số nguyên $m \geq 1$ và k thỏa $0 \leq k \leq m$. Cho C là một bàn cờ có m ô vuông. Gọi $r_k(C)$ là số cách đặt k quân xe lên bàn cờ C sao cho 2 quân xe bất kỳ không cùng dòng và không cùng cột. **Đa thức quân xe** của C được định nghĩa là

$$R(C, x) = r_0(C) + r_1(C)x + r_2(C)x^2 + \cdots + r_m(C)x^m.$$

Nhận xét

- $r_0(C) = 1$ và $r_1(C) = m$.
- Đa thức quân xe là hàm sinh của dãy $\{r_k(C)\}_{k\geq 0}$ với $r_k(C)$ là số cách đặt k quân xe lên bàn cờ C sao cho 2 quân xe bất kỳ không cùng dòng và không cùng cột.

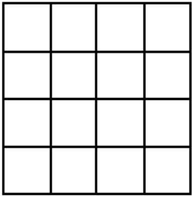
Ví dụ



Hình: *Bàn cờ 2×2 ô vuông*

Cho C là bàn cờ 2×2 ô vuông. Ta có 4 cách đặt 1 quân xe, 2 cách đặt 2 quân xe và không có cách đặt 3 quân xe trở lên. Đa thức quân xe của C là

$$R(C, x) = 1 + 4x + 2x^2.$$



Hình: Bàn cờ 4×4 ô vuông

-Cho C là bàn cờ 4. Ta có $r_0(C) = 1$, $r_1(C) = 16$.
-Với 2 quân xe, ta có $\binom{4}{2}$ cách chọn vị trí dòng để đặt quân xe. Với mỗi cách chọn dòng, quân xe thứ nhất có 4 cách chọn cột, quân xe thứ hai có 3 cách chọn cột. Vậy $r_2(C) = \binom{4}{2} \times 4 \times 3 = 72$.

Tương tự ta có

$$r_3(C) = \binom{4}{3} \times 4 \times 3 \times 2 = 96$$

$$r_4(C) = \binom{4}{4} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

$$r_k(C) = 0, \forall k \geq 5.$$

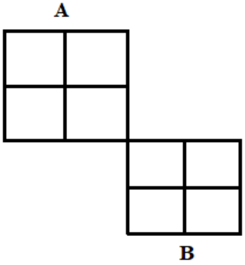
Vậy đa thức quân xe của bàn cờ C là

$$R(C, x) = 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4.$$

Định nghĩa

Hai phần A, B của bàn cờ C được gọi là **rời nhau** nếu không có ô vuông nào trong A cùng dòng hay cùng cột với một ô vuông trong B.

Ví dụ



Hình: *Bàn cờ có hai phần rời nhau*

Định lý

Nếu bàn cờ C gồm hai phần rời nhau A và B, thì

$$R(C,x) = R(A,x) \times R(B,x).$$

Ví dụ

Cho bàn cờ C gồm hai phần rời nhau như hình trên. Ta dễ thấy đa thức quân xe bằng

$$R(C,x) = (1+4x+2x^2)^2 = 1+8x+4x^2+16x^3+4x^4.$$

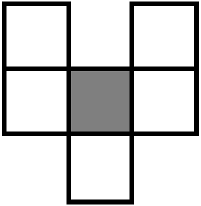
Định lý

Cho Δ là một ô vuông tùy ý của bàn cờ C. Gọi D là bàn cờ có được từ C bằng cách xóa dòng và cột chứa Δ, và E là bàn cờ có được từ C bằng cách xóa ô Δ. Khi đó

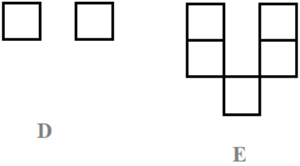
$$R(C, x) = xR(D, x) + R(E, x).$$

Ví dụ

Tìm đa thức quân xe của bàn cờ C với đa thức quân xe là đa thức được bôi đen như trong hình.

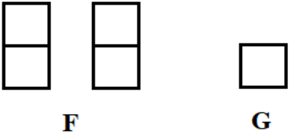


Theo định lý trên ta có bàn cờ D và E như sau



Hình: Bàn cờ D và E

Bàn cờ E lại có hai phần rời nhau F và G như hình



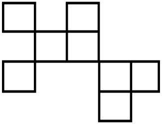
Hình: Bàn cờ F và G

Ta có

$$\begin{aligned} R(C,x) &= xR(D,x) + R(E,x) \\ &= x(1+2x) + R(F,x) \times R(G,x) \\ &= x(1+2x) + (1+4x+2x^2)(1+x) \\ &= 1 + 6x + 8x^2 + 2x^3. \end{aligned}$$

Ví dụ

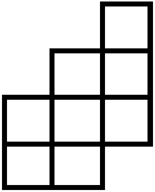
Tìm đa thức quân xe của bàn cờ C.



Hình: *Bàn cờ C*

Đáp án: $R(C,x) = 1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4$.

Tìm đa thức quân xe của bàn cờ sau



Hình: Bàn cờ

Đáp án: $1 + 8x + 16x^2 + 7x^3$.

Chú ý

Tập hợp tất cả các hoán vị của $\{1, 2, \ldots, n\}$ được ký hiệu là S_n. Mỗi hoán vị của $\sigma \in S_n$ được xem như là một song ánh từ $\{1, 2, \ldots, n\}$ vào $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ví dụ

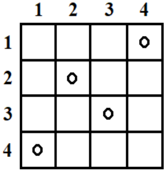
$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *với* $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 1$. *ta có thể viết gọn* $\sigma = 321$.

Nhận xét

Một hoán vị $\sigma \in S_n$ tương đương với một cách đặt n quân xe lên bàn cờ $n \times n$ ở các toạ độ $(i, \sigma(i)), \forall i = 1, 2, \ldots n$, và không có hai quân xe nào cùng dòng hay cùng cột.

Ví dụ

Hoán vị $\sigma = 4231$ *tương đương với cách đặt quân xe ở bàn cờ*



Hình: *Bàn cờ với cách đặt các quân xe*

Định lý

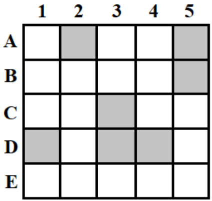
Gọi $r_k(C)$ *là hệ số của* x^k *trong đa thức quân xe của bàn cờ* C *tạo bởi các ô bị cấm nào đó. Khi đó số hoán vị* $\sigma \in S_n$ *mà* $(i, \sigma(i))$ *không ở trong các ô bị cấm với* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *là*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)! r_k(C).$$

Ví dụ

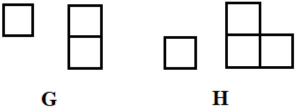
Ta cần bố trí 4 *người* A, B, C, D *vào* 4 *trong* 5 *công việc* $1, 2, 3, 4, 5$, *(mỗi người một việc khác nhau). Biết rằng* A *không thích hợp với các việc* 2 *và* 5, B *không thích hợp với việc* 5, C *không thích hợp với việc* 3, D *không thích hợp với việc* $1, 3$, *và* 4. *Hỏi có bao nhiêu cách phân công mỗi người làm một việc thích hợp?*

Ta thêm người ảo E vào và người này thích hợp với mọi công việc. Khi đó bài toán đưa về tìm số cách phân công 5 người cho 5 công việc. Đây là bài toán tìm hoán vị với vị trí cấm.



Hình: Bàn cờ với vị trí cấm

Gọi F là bàn cờ được tạo bởi các vị trí cấm. F là phần hội của hai phần rời nhau G và H như sau



Hình: Các bàn cờ rời nhau

Ta có

$$
\begin{aligned}
R(F,x) &= R(G,x)\times R(H,x)\\
&= (1+3x+x^2)(1+4x+2x^2)\\
&= 1+7x+15x^2+10x^3+2x^4.
\end{aligned}
$$

Áp dụng định lý trên, ta có số cách phân công công việc

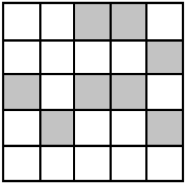
$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{5}(-1)^k(5-k)!r_k(F) &= (5!\times 1)-(4!\times 7)+(3!\times 15)\\
&\quad -(2!\times 10)+(1!\times 2)-(0!\times 0)=24.
\end{aligned}
$$

Chú ý

Ta có thể hoán đổi tùy ý các dòng (hay các cột) trên bàn cờ mà không làm thay đổi đa thức quân xe của bàn cờ.

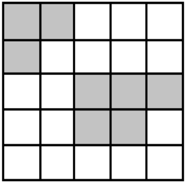
Ví dụ

Tìm số cách đặt 5 *quân xe lên bàn cờ* 5×5 *như hình sau, trong đó các ô được tô đậm là ô cấm.*



Hình: *Bàn cờ với vị trí cấm*

Hoán vị dòng 1 với dòng 4, cột 1 với cột 5, ta được



Hình: Bàn cờ với vị trí cấm

$R(C, x) = 1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4$. Tính được số hoán vị với vị trí cấm là 18.

Ví dụ

Cho $A = \{1,2,3,4\}$ *và* $B = \{u,v,w,x,y,z\}$. *Hỏi có bao nhiêu đơn ánh từ* A *vào* B **không** *thỏa các điều kiện:* $f(1) \in \{u,v\}, f(2) \in \{w\}$ $f(3) \in \{w,x\}, f(4) \in \{x,y,z\}$.

Hướng dẫn: Đặt $A' = A \cup \{5,6\}$. Tìm tất cả các đơn ánh từ $A' \to B$ thỏa điều kiện trên.
Với mỗi đơn ánh từ $A \to B$, ta có $2! = 2$ cách chọn ảnh cho 5 và 6 để được một đơn ánh từ $A' \to B$.
Đáp án: 76.