BAC S2 2003 1er groupe

EXERCICE 1

Dans un pays donné, la maladie du Sida touche cinq pour mille de sa population. Des études statistiques montrent que la probabilité pour un individu d' avoir un test positif à cette maladie sachant qu' il est malade est 0,8 et celle d'avoir un test négatif sachant qu'il n' est pas atteint par la maladie est 0,9.

On note T l'événement « avoir un test positif à cette maladie »

M l'événement « être malade »

M l'événement contraire de M.

On rappelle que pour tous événements A et B on a :

$(*)\ A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ et $P_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant A.

1°) a) Réécrire la relation $(*)$ pour A = T et B = M puis pour $A = \bar{M}$ et B = $\bar{T}$.

b) En déduire que $P(M \cap T) = P(\bar{M})\,[1 - P_{\bar{M}}(T^{-})]$

2°) Calculer la probabilité pour qu'un individu ait un test positif à cette maladie.

3°) a) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test positif à cette maladie.

b) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test négatif à cette maladie.

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

EXERCICE 2

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^3 + (1-8i)\,z^2 - (23 + 4i)\,z - 3 + 4i = 0$$

1°) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

b) Montrer que $1 + 2i$ et $-2 + 3i$ sont solutions de (E).

c) Donner l'ensemble des solutions de (E).

2°) Dans le plan muni d'un repère ortho normal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit les points A, B et C d'affixes respectives $1 + 2i$, $3i$, $-2 + 3i$.

Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs $2, -2$ et 1

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ ont pour affixes respectives $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, , $2i$ et $2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ et que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique ;

a) déterminer la raison de cette suite.

b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction u : [0 ;+∞[→ R

$$x \mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}$$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de u ; Calculer u (0) et l $\lim_{x\to+\infty} u(x)$.

2°) Etudier les variations de u.

Dresser son tableau de variations (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).

3°) Déduire des résultats précédents que :

a) $\forall x \in [0\,;1[\,, u(x) \geq 0$.

$b) \forall x \in]1\,;\,;+\infty[\,, u(x) < 0$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie par : g : [0 ;+∞ [→ R

$$x \mapsto x\, ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 1.$$

1°) Déterminer Dg (le domaine de définition de g) ; puis étudier la limite de g en 1.

2°) a) Vérifier que : $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{2} \ln(1 - \frac{2}{x-1}) = 1$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1.$

Interpréter géométriquement ce résultat.

c) Dresser le tableau de variations de g.

d) Montrer qu'il existe un réel ɑ unique appartenant à] 0 ;1 [tel que g (ɑ) = 0.

Donner un encadrement d'ordre 1 de ɑ .

3°) Tracer la courbe Cg de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité = 2 cm) .

PARTIE C

Soit f : [0 ; 1 [→ R , la fonction définie par : $f(x) = (x^2 - 1)\, ln\, \frac{x+1}{1-x}$

1°) Montrer que f est dérivable sur [0 ; 1 [et que : f ' (x) = g (x) , ∀ x ∊ [0 ;1 [.

2°) Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe Cg

, l'axe des abscisses et la droite d'équation x = ɑ .