BAC S2 2000 1er groupe

EXERCICE 1

On considère les points A1, A2, A3 d'affixes respectives :

$$Z_1 = 1 ; Z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} ; Z3 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{4}$$

1°) a) Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes $Z_2 - Z_1$ et $Z_3 - Z_1$

b) Donner une écriture algébrique et une écriture trigonométrique de $\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$

En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ $et\ sin\frac{\pi}{12}$

2°) Soit S la similitude plane directe transformant A_2 en A_3 et A_1 en A_1 .

a) Préciser les éléments caractéristiques de S.

b) On désigne d'affixe Z ' , l' image par S du point M d ' affixe Z. Exprimer Z ' en fonction de Z ; en déduire l' image , par S du point B d'affixe $1 - 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

EXERCICE 2

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne , on note pi i ∊ {1, 2, 3, 4, 5, 6} la probabilité de tirer le jeton numéroté i. On suppose que les nombres p1 , p2, p3 , p4 , p5 , p6 , sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison 1 30 .

1°) a) Montrer que p1 = 1 12 .

b) En déduire p2, p3 , p4 , p5 , p6 .

2°) On tire trois fois de suite et avec remise un jeton de cette urne, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons portant un numéro pair.

a) Déterminer la loi de la probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance mathématique de X puis son écart-type.

3°) Un joueur tire simultanément 2 jetons et note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent les 2 jetons tirés.

a) Déterminer la loi de probabilité de S.

b) On gagne à ce jeu lorsque $S \geq 4$. Déterminer la probabilité de gagner. 41

PROBLEME

Soit la fonction de R dans R définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{X}} \ si \ x < 0 \\ f(x) = x\ln(1+x) \ si \ x \geq 0 \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm)

On désigne par (C) la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation y = x.

Partie A

1°) a) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2°) a) Montrer que pour x < 0, f ' (x) > 0.

b) Etudier les variations de f ' sur [0 ;+ ∞[.

En déduire que pour x >0, f ' (x) >0.

c) Donner le tableau de variation de f.

3°) a) Déterminer $\lim_{x \to -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ (on pourra poser $u = \frac{1}{x}$).

b) Montrer que (D) : y = x + 1 est asymptote à (C) au voisinage de − ∞ . On admettra que (C) est en dessous de (D).

4°) a) Construire (C), on précisera les coordonnées de I, point d'intersection de (C) et (Δ) pour x >0

b) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe (C) en + ∞ .

Partie B

1°) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de R + : $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

2°) En déduire au moyen d'une intégration par partie que la fonction F telle que :

$F(x) = (x^2 - 1)\ ln\,(1 + x)^2 - 14\,(x^2 - 2x)$ est une primitive de f sur R +

3°) Calculer l'aire A en cm² de la partie du plan limitée par (Δ), (C) et les droites d'équations x = 0 et x = e − 1.

Partie C

1°) a) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1}.

b) f—1 est-elle dérivable en 0 ? Préciser la nature de la tangente en 0 à la courbe représentative de f^{-1} .

2°) Construire (C ') courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3°) Déduire du B.3) l'aire du domaine (D) ensemble des points

$M\binom{x}{y}$ tels que : $\begin{cases} 0 \leq x \leq e-1 \\ f(x) \leq y \leq f^{-1}(x) \end{cases}$