

EXERCICE 1

Le plan complexe P est muni d'un repère ortho normal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ vers \mathbb{C} définie par : $f(z) = \frac{2z - i}{z - 2i}$.

a) — Résoudre dans \mathbb{C} : $f(z) = z$.

Donner les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique

b) — Calculer $z_1^4 + z_2^4$.

1 / Soit $M(z)$ un point de P .

Soit (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur. Donner une équation cartésienne de (Γ) . Tracer (Γ) .

2 / Montrer que $|z| = 1$ équivaut à $|f(z)| = 1$.

EXERCICE 2

Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Une partie consiste à tirer successivement et sans remise 2 jetons de l'urne et à noter dans l'ordre les deux nombres inscrits. Tous les tirages sont supposés équiprobables.

1°) Quelle est la probabilité des événements :

$A = \ll \text{les deux nombres inscrits sont strictement inférieurs à 5} \gg$

$B = \ll \text{le premier nombre inscrit est strictement supérieur au double du second} \gg$.

2°) Un joueur effectue 7 parties successives, les parties étant supposées indépendantes;

Quelle est la probabilité pour qu'à l'issue de la 7^{ème} partie l'événement B soit réalisé 2 fois exactement ? au moins une fois ?

PROBLEME

On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = x(1 - \ln x)^2 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

où $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x , on appelle C sa courbe représentative dans un repère ortho normal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. **a)** - Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur son ensemble de définition.

b) - Etudier les variations de g .

c) - Tracer (C) .

2. a) Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]0, e[$.

Calculer à l'aide de deux intégrales par parties, l'aire $A(a)$ du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $x = a$ et $x = e$.

b) - Calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} A(a)$.

3. a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) et la droite $(\Delta) : y = x$

b) Pour quelles valeurs de m la droite $(\Delta_m) : y = mx$, recoupe-t-elle la courbe C en deux points M_1 et M_2 autres que O ?

c) La droite (Δ_m) coupe la droite D d'équation $x = e$ en P .
Montrer que $OM_1 \times OM_2 = OP^2$.

4. a) Montrer que la restriction h de la fonction g à l'intervalle $[e; +\infty[$ admet une réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Sur quel ensemble h^{-1} est-elle dérivable?

Calculer $h(e^2)$; en déduire $(h^{-1})'(e^2)$.

c) Construire la courbe de h^{-1} dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . 38