<u>PROJET: De Probabilite</u>

Membres du groupe :

CHEIKH MBACKE DIOUF : IA

PAPE MOUSSA GUEYE : Statistiques et Économétries

ROKHAYA GUEYE: Audite et contrôle

<u>EXERCICE4 :</u>

EXERCICE N°4 : Projet De Probabilité:

1.) Nous allons montré que $\Phi_X(\alpha) = e^{<u,b> - \frac{1}{2} <u, Vu>}$

soit X un vécteur gaussien, alors on pose

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^\alpha$ et de plus considérons X une var réelle

gaussienne (pour $\alpha = 1$) alors $u \in \mathbb{R}$ et $t_u V_u = V_u(X) u^2 = \sigma^2 u^2$

~~ta~~ $t_u E[X] = bu$

$t \longrightarrow t_u . x = \langle u, x \rangle$ est une forme linéaire

la var $t_u x$ et donc gaussienne son espérence et sa variance $\sigma^2 =$

$b = E[{}^t u . X] = {}^t u E[X]$

$\text{var}({}^t u X) = t_u V_u$ donc pour tout vécteur aléatoire

X on'a $t_u V_u = \text{var}({}^t u . X)$

Ceci est un lemme sur la var Gaussienne

Donc $\forall\ v \in \mathbb{R}$, on'a $\Phi_{t_u . x}(v) = \exp(i v m - \frac{1}{2} \sigma^2 v)$

$\Phi_X(v) = E[e^{i <u,x>}]$, $\forall\ v \in \mathbb{R}^d$

Comme $\Phi_{t_u . x}(v) = E[e^{iv<u,x>}]$ en posant

$v = 1$, on obtient :

$\Phi_X(u) = E[e^{iv<u,x>}]$

$= \Phi_{t_u . x}(1)$

1

$= \exp\left(i\, {}^t u E[x] - \frac{1}{2}\, {}^t u V u\right)$

En posant ${}^t u = U$ et comme $E[x] = b$ et $Var(x) = Vu$ alors

$$\Phi_x(u) = e^{i\langle u, b\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Vu\rangle} \quad \forall u \in \mathbb{R}^\alpha$$

2°) Montrons que Φ_x est à valeurs réelles

si $P_x = P_{-x}$ alors $\Phi_x(u) = \Phi_x(-u)$

$$e^{i\langle u, b\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Vu\rangle} = e^{i\langle -u, b\rangle - \frac{1}{2}\langle -u, -Vu\rangle}$$

$$i\langle u, b\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Vu\rangle = i\langle -u, b\rangle - \frac{1}{2}\langle -u, Vu\rangle$$

$$i\, u^T b - \frac{1}{2}\cancel{u^T V u} = -i\, u^T b - \frac{1}{2}\cancel{u^T V u}$$

$2 i u^T b = 0$

$\Rightarrow u^T = 0$

$\Rightarrow U = 0$

En remplaçant U par sa valeur dans Φ_x, on obtient

$\Phi_x(0) = 1$

Preuve : $i(0)^T b - \frac{1}{2}(0)^T V(0) = -i(0)^T b - \frac{1}{2}(0)^T V(0)$

$\Rightarrow u^T = 0$

$(0)^T = 0$

$e^{(0)^T} = e^0$ avec $e^0 = 1$

$\boxed{\text{alors } \Phi_x(0) = 1}$

3°) Montrons que Φ_X est p fois dérivable :

$\forall\, p \geq 1,\ E[|X|^p] < \infty$ (c'est-à-dire l'espérence est finie)

alors : $x \longmapsto (ix)^k e^{itx} P_X$ est uniformément intégrable

$\forall\, k \in \{1, \ldots, p\}$ on a donc Φ_X qui k fois dérivable

Montrons que :

$\Phi_X^{(k)}(0) = i^k E[X^k],\ \forall\, k = 1, \ldots, p$

$$\Phi_X^{(k)}(u) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{iux}\, dP_X(u)$$

$$= E[(ix)^k e^{iux}]$$

$$= (i)^k E[X^k e^{\cdot}] = i^k E[X^k]$$

$$\boxed{\Phi_X^{(k)}(0) = i^k E[X^k]}$$