



CONCOURS GENERAL SENEGALAIS



OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

1 / 4

17 T CGS 02 01

Durée : 6 heures

Toutes séries réunies

CLASSES DE TERMINALE

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.

Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.

Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Il sera tenu compte de la présentation de la copie, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

PROBLEME 1 (13 points).

Notation

Soient p et q deux entiers relatifs tels que $p \leq q$, on note $[[p; q]]$ l'ensemble des entiers relatifs k tels que $p \leq k \leq q$.

Partie A

On considère un entier naturel n non nul.

1.

a. Justifier que, pour tout nombre complexe z , $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ et étudier le cas d'égalité. **0,75 pt**

b. Démontrer que, pour tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. **0,75 pt**

c. On suppose que z_1 et z_2 sont des nombres complexes non nuls. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si, il existe un réel positif λ tel que $z_2 = \lambda z_1$. Interpréter ce résultat en termes d'arguments. **1,25 pt**

2.

a. Démontrer que, pour tout n -uplet (z_1, z_2, \dots, z_n) de nombres complexes,

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

0,5 pt

b. Montrer que, si z_1, \dots, z_n sont des nombres complexes tous non nuls, l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si

$$\forall k \in [[1; n]], \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, z_k = \lambda_k z_1.$$

Interpréter ce résultat en termes d'arguments.

1,25 pt

Partie B

On se place désormais dans le plan complexe \mathcal{P} , d'origine O. Soit un entier $n \geq 3$. On considère les points A_1, A_2, \dots, A_n , d'affixes respectives z_1, \dots, z_n tels que :

- (i) Pour tout $k \in [[1; n]]$, A_k est distinct de O ;
- (ii) Les A_k sont deux à deux distincts ;

(iii) Il n'existe aucune droite du plan \mathcal{P} contenant tous les A_k ;

(iv) $\sum_{k=1}^n \frac{z_k}{|z_k|} = 0$.

1. Donner un exemple de n -uplet (z_1, z_2, \dots, z_n) vérifiant l'égalité (iv). 0,5 pt

2. Pour tout $k \in [[1; n]]$, on pose $u_k = \frac{z_k}{|z_k|}$. Soit M un point d'affixe z .

a. Vérifier que

$$\sum_{k=1}^n \bar{u}_k(z - z_k) = - \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

0,5 pt

b. En déduire l'inégalité (*) ci-dessous :

$$\sum_{k=1}^n |z - z_k| \geq \sum_{k=1}^n |z_k| \quad (*).$$

0,5 pt

c. En utilisant la question (2.b) de la partie A, démontrer que l'inégalité (*) est une égalité si et seulement si, pour tout $k \in [[1; n]]$, $\bar{u}_k(z - z_k)$ est un réel négatif. 1,5 pt

d. En déduire que l'inégalité (*) est une égalité si, et seulement si $z = 0$. 0,5 pt

e. Établir que la somme $\sum_{k=1}^n MA_k$ atteint son minimum en un unique point M que l'on précisera.

1 pt

Partie C

On se place toujours dans le plan complexe \mathcal{P} . On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b, c et tels que :

- Les points A, B, C ne sont pas alignés ;
- Chacun des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ possède une mesure appartenant à l'intervalle $[0, \frac{2\pi}{3}]$.

Sur les côtés du triangle ABC, on construit vers l'extérieur trois triangles équilatéraux $AC'B$, $BA'C$ et $CB'A$. On nomme a' , b' et c' les affixes respectives des points A' , B' et C' .

1. Faire une figure et tracer les droites (AA') , (BB') et (CC') . 0,5 pt

2. On admet que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en un points Ω strictement compris à l'intérieur du triangle ABC. En utilisant une rotation de centre A, exprimer b' en fonction de a et c puis b en fonction de a et c' . 1 pt

3. En déduire le module et un argument de $\frac{b' - b}{c - c'}$. 0,5 pt

4. Déterminer une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C})$, $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A})$ et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$. 0,75 pt

5. Démontrer que

$$\frac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A} + \frac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B} + \frac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C} = \vec{0}.$$

0,5 pt

- 6.** En utilisant les résultats de la partie B, établir que la somme $MA + MB + MC$ admet son minimum en un unique point que l'on précisera. **0,75 pt**

PROBLEME 2 (07 points).**Partie A**

Un ensemble E est dit fini, s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe une bijection de E sur $\{1, 2, \dots, n\}$. n est appelé le cardinal de E et est noté $|E|$.

On convient que l'ensemble vide \emptyset est fini, $|\emptyset| = 0$.

On rappelle que tout sous ensemble d'un ensemble fini est fini.

Si deux ensembles A et B sont finis et disjoints, on admet que $A \cup B$ est fini et $|A \cup B| = |A| + |B|$.

- 1.** Soient A et B deux ensembles finis. Démontrer que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

0,75 pt

- 2.** Soient A, B, et C trois ensembles finis, déterminer $|A \cup B \cup C|$ en fonction de $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|A \cap B|$, $|A \cap C|$, $|B \cap C|$ et $|A \cap B \cap C|$. **0,75 pt**

Partie B

On désigne par \mathcal{P} l'ensemble des entiers naturels premiers.

- 1.** Montrer, par une récurrence, que tout entier $n \geq 2$ admet un facteur premier p . **0,5 pt**

- 2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout facteur premier p de $n! + 1$ satisfait à $p > n$. En déduire que \mathcal{P} est infini. **1 pt**

- 3.** On considère la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $F_n = 2^{2^n} + 1$. Une telle suite est appelée suite des nombres de Fermat.

a. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$. **0,5 pt**

b. En déduire que pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\text{pgcd}(F_k, F_n) = 1$ et que \mathcal{P} est infini. **1 pt**

- 4.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose d'écrire la probabilité P_n que deux entiers a et b dans $\{1, 2, \dots, n\}$ soient premiers entre eux au moyen de la formule (admise) du crible :

$$|\bigcup_{i=1}^r U_i| = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq r} |U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \dots \cap U_{i_k}| \quad (*),$$

où U_1, \dots, U_r sont des ensembles finis.

- a.** Ecrire explicitement la formule (*) pour $r = 2$ et $r = 3$. **0,5 pt**

Soient p_1, \dots, p_r la liste des nombres premiers entre 1 et n . On pose, pour $i \in \{1, 2, \dots, r\}$,

$$U_i = \{(a, b) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, p_i | a \text{ et } p_i | b\}.$$

- b.** Expliquer pourquoi le nombre de couples d'entiers $(a, b) \in \{1, \dots, n\}^2$ avec a et b premiers entre eux est égal à $n^2 - |\bigcup_{i=1}^r U_i|$. **0,5 pt**

- c.** Montrer que pour tout couple $(a, b) \in \{1, \dots, n\}^2$, on a :

$$(a, b) \in U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \dots \cap U_{i_k} \Leftrightarrow (p_{i_1} \dots p_{i_k} | a \text{ et } p_{i_1} \dots p_{i_k} | b).$$

0,75 pt

Indication : Commencer par montrer que si $\text{pgcd}(p, q) = 1$, alors $p|m$ et $q|m \Leftrightarrow pq|m$. Utiliser une récurrence sur k .

- d.** On désigne par $E(x)$ la partie entière du réel x . Montrer que

$$P_n = 1 + \sum_{k=1}^r (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq r} \frac{\left(E\left(\frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_k}}\right)\right)^2}{n^2}.$$

0,75 pt