ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES

www.ept.sn Téléphone :76 333 06 45

BUREAU DES ÉLÈVES / COMMISSION PÉDAGOGIQUE / CONCOURS JUNIOR POLYTECH

Epreuve de Mathématiques

Terminales — Session 2024— Durée : 04 heures

***NB**:La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.*

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'épreuve est notée sur 40 points .

PRÉLIMINAIRE (6 points)

Pour chaque question, choisissez la bonne réponse en justifiant votre choix.

1. Trouver x_1 et x_2 telles que la somme S donne 120 et que le produit P d'une des parties par le carré de l'autre soit maximal.
   a) $x_1 = 50$ et $x_2 = 70$ b) $x_1 = 80$ et $x_2 = 40$ c) $x_1 = 30$ et $x_2 = 90$
   d) $x_1 = 60$ et $x_2 = 20$
2. Calculer $s = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}$
   a) $s = 0$ b) $s = \frac{1}{3}$ c) $s = +\infty$
3. Quelle est la valeur de x_0 qui vérifie la formule du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$ sur $[1, 3]$.
   a) $x_0 = 2$ b) $x_0 = \frac{3}{2}$ c) $x_0 = \frac{5}{2}$ d) $x_0 = 1$
4. Laquelle de ces affirmations est fausse ?
   a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} dt = 1$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t) dt = \frac{1}{2}$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t) dt = 3$
5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$.
   Laquelle de ces affirmations est vraie ?
   a) $f(0) = 1$ b) f est une fonction impaire.
   c) En écrivant que $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)$, on a $f(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

PROBLÈME 1 : Un tournoi par équipes (17 points)

Dans le problème, si E est un événement d'un espace probabilisé, on désigne par $\mathbf{P}(E)$ la probabilité de E.
On pourra librement utiliser le résultat suivant : si $D_1, \ldots, D_k$ sont des événements deux à deux disjoints, alors

$$\mathbf{P}\left(D_1 \cup \cdots \cup D_k\right) = \mathbf{P}\left(D_1\right) + \cdots + \mathbf{P}\left(D_k\right).$$

Partie 1 : Un jeu, deux joueurs

Ambre dispose d'une pièce qui, à chaque lancer, donne PILE avec une probabilité $a \in]0; 1[$ et donne FACE avec une probabilité $1 - a$. Quant à lui, Benjamin dispose d'une pièce qui, à chaque lancer, donne PILE avec une probabilité $b \in]0; 1[$ et donne FACE avec une probabilité $1 - b$. Ils décident de jouer au jeu suivant : chacun lance sa pièce. S'ils obtiennent tous les deux PILE ou tous les deux FACE, ils relancent chacun leur pièce et continuent ainsi tant qu'ils obtiennent simultanément PILE ou simultanément FACE.
A contrario, ils s'arrêtent dès que l'un obtient PILE et l'autre FACE.

Celui qui obtient PILE est alors déclaré gagnant. Tous les lancers sont indépendants. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement <<Ambre gagne lors du $n^{\text{ème}}$ lancer>>, B_n l'événement <<Benjamin gagne lors du $n^{\text{ème}}$ lancer>> et C_n l'événement << chacun des deux joueurs lance au moins n fois sa pièce lors de ce jeu>>.

1. a) On pose $\lambda = 1 - a - b + 2ab$. Démontrer que $\mathbf{P}(C_2) = \lambda$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer $\mathbf{P}(C_{n+1})$ en fonction de $\mathbf{P}(C_n)$. En déduire une expression de $\mathbf{P}(C_n)$ en fonction de n.

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

a) Exprimer $\mathbf{P}(A_n)$ en fonction de a, b et $\mathbf{P}(C_n)$.
b) En déduire une expression de $\mathbf{P}(A_n)$ en fonction de a, b et n.
c) Donner une expression de $\mathbf{P}(B_n)$ en fonction de a, b et n.

3. On note G_A l'événement <<Ambre est gagnante >> et G_B l'événement <<Benjamin est gagnant>>.

a) Démontrer que $0 < \lambda < 1$.
b) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $\mathbf{P}(G_A) \geqslant a(1-b) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$ et

$$\mathbf{P}(G_B) \geqslant b(1-a) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}.$$

c) On note $G_\varnothing$ l'événement <<Ce jeu n'a aucun gagnant>>. Déduire de ce qui précède que

$$\mathbf{P}(G_A) = \frac{a(1-b)}{1-\lambda}, \quad \mathbf{P}(G_B) = \frac{b(1-a)}{1-\lambda} \quad \text{et } \mathbf{P}(G_\varnothing) = 0.$$

Partie 2 : Qu'est-ce qu'un jeu régulier ?

Un jeu à N personnes $A_1, A_2, \ldots, A_N$ est dit régulier lorsqu'il possède les caractéristiques suivantes :
▹ Le jeu se déroule en un ou plusieurs tours successifs. Chaque tour ne concerne que deux joueurs. Chaque personne peut jouer plusieurs tours, mais n'est pas obligée de jouer contre chacune des autres personnes.
▹ À chaque tour, il ne peut y avoir qu'un seul gagnant.
▹ Il existe des réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_N$ tels que, pour toutes personnes A_i et A_j, le quotient des probabilités $\frac{\mathbf{P}(A_i \text{ gagne contre } A_j)}{\mathbf{P}(A_j \text{ gagne contre } A_i)}$ soit égal à $\frac{a_i}{a_j}$.

4. Démontrer que le jeu suivant est régulier :

Les personnes $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}$ disposent chacune d'une pièce. Pour tout i, à chaque lancer, la pièce de la personne A_i donne PILE avec une probabilité $p_i \in]0;1[$ et donne FACE avec une probabilité $1 - p_i$. Le jeu se déroule en un ou plusieurs tours successifs, et à chaque tour deux personnes se rencontrent et jouent selon les modalités du jeu décrit dans la Partie 1.

Partie 3 : Un tournoi régulier par équipes

Soit A et B deux équipes. On note $m \in \mathbb{N}^*$ l'effectif de A et $n \in \mathbb{N}^*$ l'effectif de B. On numérote alors les membres des équipes par ordre de passage : $A_1, A_2, \ldots, A_m$ pour A et $B_1, B_2, \ldots, B_n$ pour B. Les deux équipes A et B s'affrontent lors d'un tournoi constitué de plusieurs parties successives dont les issues sont indépendantes. Lors de chaque partie, la première personne de l'équipe A joue contre la première personne de l'équipe B et, à l'issue de cette partie, une seule de ces deux personnes est déclarée gagnante et le perdant est éliminé. Le gagnant joue alors contre une nouvelle personne de l'équipe adverse et on continue ainsi jusqu'à ce qu'une équipe n'ait plus d'adversaire, gagnant ainsi le tournoi. Par exemple, pour $m = n = 3$, la personne A_1 joue contre la personne B_1. Si A_1 gagne, alors B_1 est éliminée, et A_1 joue contre B_2 lors de la seconde partie. Si, cette fois, c'est B_2 qui gagne, alors A_1 est éliminée et B_2 rencontre A_2 pour la partie suivante. Si B_2 gagne cette nouvelle partie, alors A_2 est éliminée et B_2 rencontre maintenant A_3. Si B_2 gagne à nouveau, alors A_3 est éliminée et l'équipe B a remporté le tournoi. On suppose de plus que l'ensemble du tournoi constitue un jeu régulier. Il existe donc des réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tels que, pour chaque partie qui voit s'affronter les personnes A_i et B_j, on ait :

$$\frac{\mathbf{P}\left(A_i \text{ gagne contre } B_j\right)}{\mathbf{P}\left(B_j \text{ gagne contre } A_i\right)} = \frac{a_i}{b_j}$$

Soient p et q des entiers non nuls.On note $u_{p,q}$ la probabilité que l'équipe A gagne le tournoi ,avec p le nombre de joueurs de l'équipe A et q celui de B .

5. Dans cette question uniquement, on suppose que $a_i = b_j = 1$ pour tous i et j.

a) Démontrer que $u_{m,n} + u_{n,m} = 1$.

b) Que vaut $u_{n,n}$?

c) Déterminer la valeur de $u_{1,n}$ en fonction de n.

d) Déterminer la valeur de $u_{2,n}$ en fonction de n.

6. Dans cette question uniquement, on se place dans le cas où $m = n = 2$. Les nombres a_1, a_2, b_1 et b_2 ne sont plus supposés être égaux à 1.

a) Exprimer la probabilité que A_i gagne contre B_j en fonction de a_i et b_j.

b) Démontrer que la probabilité que l'équipe A gagne le tournoi est égale à

$$\frac{a_1^2 a_2^2 + a_1 a_2 \left(a_1 + a_2\right)\left(b_1 + b_2\right) + \left(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2\right) b_1 b_2}{\left(a_1 + b_1\right)\left(a_1 + b_2\right)\left(a_2 + b_1\right)\left(a_2 + b_2\right)}.$$

Cette probabilité dépend-elle de l'ordre choisi des joueurs pour leur entrée dans le tournoi ?

PROBLÈME 2 (17 points)

Les équations différentielles occupent une place primordiale dans de nombreux domaines de l'ingénierie, qu'il s'agisse de l'ingénierie **mécanique, aéronautique, civile, industrielle ou informatique**. Ces domaines sont précisément ceux dans lesquels **l'École Polytechnique de Thiès (EPT)** excelle, formant des ingénieurs compétents dans ces disciplines.
Ces équations constituent un outil mathématique puissant pour modéliser et résoudre une grande variété de problèmes rencontrés dans ces domaines. En particulier, les équations différentielles linéaires avec second membre revêtent une importance cruciale en raison de leur capacité à décrire des phénomènes physiques complexes avec une grande précision. En ingénierie mécanique, par exemple, les équations différentielles sont utilisées pour modéliser le mouvement des systèmes mécaniques, tels que les oscillations d'une poutre ou les vibrations d'un moteur. En aéronautique, elles interviennent dans la conception et l'analyse des structures d'aéronefs, des systèmes de contrôle de vol et de la dynamique des fluides. En génie civil, elles sont essentielles pour la modélisation des contraintes et des déformations dans les structures, la conception des fondations et la gestion des ressources hydrauliques. Dans le domaine de l'ingénierie informatique, les équations différentielles sont utilisées pour modéliser les processus dynamiques, tels que les réseaux de neurones artificiels et les systèmes de contrôle automatique. L'étude des équations différentielles linéaires avec second membre est particulièrement pertinente car elle permet de résoudre des problèmes où les conditions initiales ou les forces extérieures varient en fonction du temps ou de l'espace. Ces équations offrent des outils mathématiques essentiels pour prédire et contrôler le comportement des systèmes complexes rencontrés dans divers domaines de l'ingénierie.

L'objectif de ce problème est de résoudre des équations linéaires avec second membre par la méthode de la **variation de la constante** et par la méthode du **facteur intégrant**.

Partie I : Démonstration

Dans l'ensemble du problème, nous considérons y une fonction définie par :

$$y : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{I} \in \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ t & \longmapsto & y(t) \end{array} \right.$$

et dérivable sur $\mathbb{I}$.
On pose

$$(E) : y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

A.Variation de la constante

Cette méthode permet de déterminer une solution particulière de l'équation (E).

1. Soit l'équation $(E_0) : y'(t) + a(t)y(t) = 0$.

Résoudre l'équation (E_0) dans $\mathbb{I}$ en fonction de $A(t)$ en posant λ la constante dans la solution et y_0 la solution de cette equation avec

$$A(t) = \int a(x)dx.$$

2. Dans la solution de l'équation précédente, en remplaçant la constante λ et la solution y_0 respectivement par les fonctions $C(t)$ et y_p et en admettant que y_p est solution de l'équation (E), déterminer la fonction $C(t)$ en fonction de

$$\int b(s)\exp(A(s))ds.$$

3. En déduire que la solution générale de (E) s'écrit sous la forme :

$$y(t) = \frac{1}{e^{A(t)}}[\int e^{A(s)}b(s)ds + cte]$$

où *cte* est une constante .

B. Méthode du facteur intégrant

Une autre méthode largement utilisée pour la solution de (E) repose sur l' utilisation d'un facteur intégrant.

L'idée maintenant est de tenter de trouver **une fonction** $u(t)$ de telle sorte que nous puissions reconnaître le côté gauche de l'équation E' si dessous comme la dérivée d'une expression particulière.

$$E' : u(t)y'(t) + u(t)a(t)y(t) = u(t)b(t)$$

1. On pose

$$A(t) = \int a(x)dx.$$

Déterminer les fonction $u(t)$ en fonction de $A(t)$qui vérifient la condition :

$$(u(t)y(t))' = u(t)y't) + u(t)a(t)y(t).$$

2. En déduire que la solution générale de (E) s'écrit sous la forme :

$$y(t) = \frac{1}{e^{A(t)}}[\int e^{A(s)}b(s)ds + cte]$$

où *cte* est une constante.

Partie II : Application

1. Résoudre l'équation

$$y' + 5y = e^x$$

a. Par la méthode de la variation de la constante
b. Par la méthode du facteur intégrant

2. Dans une usine opérant à une température constante de 60^0F, un équipement essentiel a été découvert à midi avec une température de 85^0F. Quatre-vingt-dix minutes plus tard, la température de l'équipement a chuté à 79^0F. Au moment de la défaillance, la température normale de fonctionnement de l'équipement était de 99^0F.

En utilisant la **loi de refroidissement de Newton** définie ci-dessous, déterminez le moment où l'équipement a subi une défaillance.

Loi de refroidissement de Newton : Si l'on prend un solide à une température T et qu'on le place dans un milieu à température constante, alors l'évolution de sa température $T(t)$ par rapport au temps t est donnée par l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} = K(A - T(t))$$

où $T(t)$ est la température du solide à l'instant t, k est le coefficient de proportionnalité positif, et A est la température constante de l'environnement.

Fin du sujet

Bonne chance