ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES

BP A10 Thiès Sénégal **www.ept.sn** **Téléphone : 77 098 22 49**

BUREAU DES ÉLÈVES / COMMISSION PÉDAGOGIQUE / CONCOURS JUNIOR POLYTECH

Concours Junior Polytech

Epreuve de Mathematiques

Première S — Session 2019 — Durée : 04 heures

EXERCICE 1 : (4pts)

Les questions suivantes sont indépendantes :

1) Un polynôme P(X) =$X^3 + pX^2 + qX + r$ de degrés 3 a pour zeros a, b,c.

Déterminer p , q et r pour que les zéros de P soient a^2, b^2, c^2.

2) Montrer que :

$$\forall\, n \in Z\, , E\left(\frac{n-1}{2}\right) + E\left(\frac{n+2}{4}\right) + E\left(\frac{n+4}{4}\right) = n$$

3) Soit n ϵ N^*,$a_1, a_2 \dots \dots , a_n \in R$ *tels que* $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$. Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution $x \in\ ]0,1[$.

$$(E) : \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = 0$$

4) Montrer que le réel A est un entier et le calculer. On donne :

$$A = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3} + 41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3} - 41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$$

PROBLEME 1 : L'Heptadécagone (9pts)

PARTIE1 :

Tous les calculs demandés doivent être effectués de manière exacte c'est-à-dire les réponses qui utiliseraient des valeurs approchées fournies par la calculatrice ne seront pas acceptées.

1. Montrer que : $\forall a \in R, \forall h \in]0,\pi[, \forall n \in N^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+2kh) = \frac{\sin(nh)\cos(a+(n-1)h)}{sinh}$$

Pour la suite, on pose $\theta = \frac{\pi}{17}$

2. On pose $\begin{cases} x_1 = cos3\theta + cos5\theta + cos7\theta + cos11\theta \\ x_2 = cos\theta + cos9\theta + cos13\theta + cos15\theta \end{cases}$
   a) Montrer que $x_1 > 0$.
   b) Montrer que $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$.
   c) Développer l'expression x_1x_2 .
   d) En déduire que $x_1x_2 = -2(x_1 + x_2) = -1$.
   e) Donner une expression de x_1 et de x_2 à l'aide des radicaux.
3. On pose $\begin{cases} y_1 = cos3\theta + cos5\theta, \quad y_2 = cos7\theta + cos11\theta \\ y_3 = cos\theta + cos13\theta, \quad y_4 = cos9\theta + cos15\theta \end{cases}$
   a) Calculer les produits $y_1y_2 \ et \ y_3y_4$.
   b) En déduire des expressions de $y_1, y_2, y_3 \ et \ de \ y_4$ à l'aide des radicaux.
4. Donner finalement une expression de $cos\frac{\pi}{17} \ et \ de \ cos\frac{2\pi}{17}$ à l'aide des radicaux.

PARTIE2 :

1. On conserve les notations de la partie 1. On note $\varphi \in \left]0,\frac{\pi}{8}\right[$ tel que :

$$\tan(4\varphi) = 4$$

   a) Montrer que :

$$\cos(4\varphi) = \frac{1}{\sqrt{17}} \ et \sin(4\varphi) = \frac{4}{\sqrt{17}} .$$

   b) En déduire que

$$x_1 = cotan(2\varphi) \ et \ x_2 = -\tan(2\varphi) .$$

c) Montrer que :

$$y_1 = \frac{1}{2}cotan(\varphi), \qquad y_2 = -\frac{1}{2}tan(\varphi),$$
$$y_3 = \frac{1}{2}tan\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right), \quad y_4 = -\frac{1}{2}tan\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right).$$

d) En déduire les égalités :

$$\begin{cases} cos6\theta + cos10\theta = \frac{1}{2}tan(\varphi) \\ cos6\theta . cos10\theta = \frac{1}{2}tan\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

2. On va maintenant construire l'heptadécagone de centre $O(0,0)$ et de sommet $I(1,0)$. On demande d'effectuer à la règle et au compas, les constructions suivantes :
   - Le cercle (C) de centre O et de rayon OI , et les points I'(-1,0), J(0,1), A(0, $\frac{1}{4}$).
   - Le point B de [OI] tel que $\widehat{OAB} = \frac{1}{4}\widehat{OAI}$ $[2\pi]$.
   - Le point C de [I'O] tel que $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.
   - Le cercle de diamètre [CI] recoupant le segment [OJ] en D.
   - Le cercle de centre B de rayon BD, coupant [OI] en H_3 et [I'O] en H_5 .
   - Les perpendiculaires en H_3 et H_5 à (OI) coupant (C) respectivement en M_3 et M_5 (d'ordonnées positives).

Montrer que M_3 et M_5 sont le troisième et le cinquième sommet de l'heptadécagone de centre O dont le sommet M_0 ou M_{17} serait le point I (dans ce cas, on considère que l'heptadécagone est parcouru dans le sens trigonométrique).

PROBLÈME 2 : Nombres de Fibonacci (7pts)

On définit la suite u par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1, et\ \forall\, n \geq 0, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n .$$

Les u_n sont appelés *nombres de Fibonacci.*

PREMIERE PARTIE :

1. Vérifier que : $\forall\, n \in N^*, u_n > 0$.
2. Montrer que la suite u est croissante à partir de $n = 2$.
3. Prouver que : $\forall\, n \geq 6,\ u_n > n$.

4. Etablir que :

$$\forall\, n \in N, \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1.$$

5. Montrer que :

$$\forall\, n \in N, \sum_{k=0}^{n} {u_k}^2 = u_n u_{n+1}.$$

6. Prouver que :

$$\forall\, n \geq 2, \qquad u_{n-2}u_n - {u_{n-1}}^2 = (-1)^{n-1}.$$

7. Montrer que :

$$\forall\, n \geq 2, u_n\sqrt{2} < u_{n+1} \leq 2u_n.$$

8. On pose :

$$v_0 = a, v_1 = b, et\ \forall\, n \geq 0, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n\ .$$

   Montrer que :

$$\forall\, n \geq 0, v_n = au_{n-1} + bu_n.$$

DEUXIEME PARTIE :

Soit α l'une des racines de $X^2 - X - 1$.

1. Montrer que

$$\forall\, n \geq 1, \alpha^n = \alpha u_n + u_{n-1}.$$

2. On pose

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ et\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

   Etablir que :

$$\forall\, n \in N, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n).$$

(Cette formule est appelée *formule de Binet*)

3. En déduire que u_n est l'entier le plus proche de $\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n$.
4. Montrer que :

$$\forall\, n \in N, u_{n+1} = \alpha u_n + \beta^n.$$

5. Montrer que ${u_n}^2$ tend vers $v_n = \frac{1}{5}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
6. Montrer que

$$\lim_{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2^k} = 2.$$

<u>**BON COURAGE**</u>