ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES

BP A10 Thiès Sénégal www.ept.sn Téléphone : 77 069 66 16

BUREAU DES ÉLÈVES / COMMISSION PÉDAGOGIQUE / CONCOURS JUNIOR POLYTECH

Concours Junior Polytech

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Première S — Session 2021 — Durée : 04 heures

- NB : le barème est noté sur 100

EXERCICE1 : Préliminaire

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur β pour que : $P(x) = 2X^3 – X^2 – 7X + \beta$ possède

deux racines de somme 1.

2) Soit $n \geq 3$. On considère un polygone convexe a n côtés.

a) Déterminer le nombre de diagonales joignant les sommets.

b) Déterminer le nombre d'intersection entre les diagonales si l'on suppose que deux diagonales ne sont jamais parallèles et que 3 diagonales ne sont jamais concourantes.

3) Soit (U_n) la suite donnée par la relation de récurrence suivante :

$U_{n+1} = aU_n + b$ et $U_0 = k$ avec a, b et k des nombres réels.

Donner l'expression de U_n en fonction de n (On discutera suivant les valeurs de a et b).

EXERCICE 2 :

DEFINITION

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand $n \to +\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Le réel l est appelé limite de la suite et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

PREMIERE PARTIE

Une suite (u_n) est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - u_m| < \epsilon.$$

1) Montrer que les trois affirmations suivantes sont équivalentes :
   i) (u_n) est une suite convergente,
   ii) (u_n) est une suite de Cauchy,
   iii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0,\ p \geqslant 0 \Rightarrow |u_n - u_{n+p}| < \epsilon.$
2) Montrer que s'il existe une suite (v_n) qui tend vers 0 et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant v_n,\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N}$$

alors (u_n) est de Cauchy.

DEUXIEME PARTIE :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $\kappa \in [0, 1[$ et $f : I \to I$ telles que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \kappa|x - y|,\ \forall x, y \in I$$

On suppose que si $(u_n) \subset I$ est une suite convergente vers $l \in I$ alors $f(u_n)$ converge vers $f(l) \in I$. Soit $x_0 \in [a, b]$. On pose

$$u_0 = x_0,\ u_1 = f(u_0), \ldots, u_{n+1} = f(u_n),\ \forall n \geqslant 0.$$

1) Montrer que la suite (u_n) ainsi définie est convergente.
2) Montrer qu'il existe un unique $\bar{x} \in [a, b]$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

PROBLEME :

Ce problème a pour objet une approche du paradoxe de Bertrand.

Notations : Dans le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. $\mathscr{C}$ désigne le cercle de centre O et de rayon R, R étant un réel strictement positif donné.

PREMIERE PARTIE : Etude des propriétés des triangles équilatéraux inscrits dans un cercle

I.1 Soit A un point donné du cercle $\mathscr{C}$. Construire à la règle et au compas un triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$. Préciser les étapes successives de la construction.

Dans toute la suite du problème, A,B,C désignent trois points du cercle $\mathscr{C}$ tels que le triangle ABC soit équilatéral. On note A' le milieu du segment $[BC]$ et A'' le point diamétralement opposé au point A sur le cercle $\mathscr{C}$.

I.2 On se propose de déterminer la longueur L des côtés du triangle ABC.

I.2.1 Déterminer le quotient de longueurs AO/AA'.

I.2.2 En déduire la longueur AA' en fonction de R.

I.2.3 Démontrer que $L = R\sqrt{3}$.

I.3 Soit U un point du cercle $\mathscr{C}$ distinct de A. On choisit V et W deux points du cercle $\mathscr{C}$ tels que le triangle UVW soit un triangle équilatéral inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$.

I.3.1 Démontrer que les triangles ABC et UVW sont isométriques.

I.3.2 Préciser une isométrie du plan transformant le triangle ABC en le triangle UVW en distinguant les cas de triangles directement ou non directement isométriques.

I.4 Justifier les quatre caractérisations de la droite (AA') comme droite remarquable du triangle ABC.

I.5 Déterminer la longueur de chacun des arcs du cercle $\mathscr{C}$ de part de d'autre de la droite (BC).

DEUXIEME PARTIE : Quelques comparaisons de longueurs de longueurs

Dans cette partie, les points A, B et C sont fixés sur le cercle $\mathscr{C}$.

II.1 Soit P un point du cercle $\mathscr{C}$, distinct du point A. On note I le projeté orthogonal du point O sur la droite (AP) et J le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB).

II.1.1 Démontrer que si le point P appartient à l'arc $\widehat{BC}$ du cercle $\mathscr{C}$ ne contenant pas le point A, alors $IA \geqslant JA$.

II.1.2 En déduire que, si le point P appartient à l'arc $\widehat{BC}$ du cercle $\mathscr{C}$ ne contenant pas le point A, alors $AP \geqslant L$.

II.1.3 Montrer que si le point P appartient à l'arc $\widehat{BC}$ du cercle $\mathscr{C}$ contenant le point A, alors $AP \leqslant L$.

II.2 Soient M et N deux points distincts du cercle $\mathscr{C}$ tels que la droite (MN) soit perpendiculaire à la droite (AA'') au point I du segment $[OA']$. Soient M' et N' deux points distincts du cercle $\mathscr{C}$ tels que la droite $(M'N')$ soit perpendiculaire à la droite (AA'') au point J du segment $[A'A'']$.
Démontrer que $M'N' \leqslant BC \leqslant MN$.

II.3 Soient S et T deux points distincts du cercle $\mathscr{C}$ tous deux distincts du point A. On note θ la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{ATS}$; on a donc $0<\theta<\pi$. On note K le milieu du segment $[AS]$.

II.3.1 Calculer les longueurs AK et AS en fonction de R et θ en distinguant les trois cas suivants : $\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, $\theta>\dfrac{\pi}{2}$.

II.3.2 Démontrer que si $\theta<\pi/3$, alors $AS<L$.

II.3.3 Comparer les longueurs AS et L lorsque $\theta>2\pi/3$.

II.4 Soit D un point du cercle $\mathscr{C}$ distinct des points A et A''. On note ρ le nombre réel égal à la longueur AD. On appelle Γ le cercle de centre D et de rayon ρ.

II.4.1 Démontrer que le cercle Γ coupe de cercle $\mathscr{C}$ en deux points distincts, le point A et un autre point noté F.

II.4.2 Démontrer que la droite (OD) est la médiatrice du segment $[AF]$. On note G le milieu du segment $[AF]$.

II.4.3 Soit D' le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à D. Calculer l'aire du triangle ADD' en fonction de R et de ρ.

II.4.4 En déduire la longueur AF en fonction de R et de ρ.

II.4.5 Résoudre l'inéquation suivante :

$$x\sqrt{4R^2-x^2}\geqslant R^2\sqrt{3},$$

pour x nombre réel de l'intervalle $]0,2R[$.

II.4.6 Démontrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ des nombres réels ρ de l'intervalle $]0,2R[$ tels que $AF\geqslant L$ est le segment $[R,R\sqrt{3}]$.

II.5 Soit E un point du disque de centre O et de rayon R distinct du point A. La droite (AE) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en un point noté E' autre que le point A.

II.5.1 Démontrer que $AE' \geqslant L$ si et seulement si le point E appartient au domaine grisé sur la figure ci-dessus.

II.5.2 Déterminer l'aire du domaine grisé, ensemble des points E du disque tels que la corde $[AE']$ associée soit de longueur supérieure ou égale à L.

FIN DU SUJET

BONNE CHANCE