UNIVERSITE GASTON BERGER

INSTITUT POLYTECHNIQUE DE SAINT-LOUIS

Concours d'entrée IPSL - Session 2018

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 02 heures

Documents non autorisés - Téléphones portables interdits - 04 Juillet 2018

Exercice 1. **8 points**

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Soit $a \in [0\ ;\ +\infty[$.

On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a. **0,5 pt**

2. A l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a. **1,5 pt**

3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrez que

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

1 pt

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.
Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$. **2 pt**

5. Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t$. Calculez $J(a)$. **0,5 pt**

6. **a.** Démontrez que pour tout $t \in [0\ ;\ a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$. **0,5 pt**

b. Démontrez que pour tout $a \in [0\ ;\ +\infty[$, $J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$. **0,5 pt**

7. En déduire que pour tout $a \in [0\ ;\ +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leqslant \frac{a^6}{6}$. **0,5 pt**

8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près. **1 pt**

Exercice 2. **6 points**

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E) \quad : \qquad xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2.$$

1. **a.** Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle

$$(E') \quad : \quad y' = 2y + 8$$

1 pt

b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E). **1 pt**

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E), **2 pts**

3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $\mathrm{A}(\ln 2\ ;\ 0)$? Si oui la préciser

. **2 pts**

Exercice 3. **6 points**

Soient $a \in \mathbb{R}$ et l'équation $(E) : (z+1)^n = e^{2ina}$

1. Montrer que les solution de (E) sont

$$X_k = 2\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(a+\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}, k = 0; 1, 2; ...; n-1$$

2 pts

2. Démontrer que l'équation (E) équivaut à

$$\sum_{k=1}^{n} x^k C_n^k + 1 - e^{2ian} = 0$$

2 pts

3. En déduire

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$$

. **2 pts**

Rappel : Si l'équation $a_n Z^n + a_{n_1} Z^{n-1} + ... + a_1 Z + a_0 = 0$. admet n racines $Z_0, Z_1, ..., Z_{n-1}$ alors on a

$$\prod_{k=0}^{n-1} Z_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

FIN

EPREUVE DE FRANÇAIS

Durée 02 heures

Documents non autorisés - Téléphones portables interdits - 04 Juillet 2018

Le candidat traitera un sujet au choix

Sujet 1.

Introduisant l'exposition du peintre Abdoulaye DIALLO qui se déroule du 3 mai au 2 juin 2018, M. Ibrahima THIOUB, recteur de l'université Cheikh Anta DIOP écrit :

Il ne fait pas de doute que la science et ses applications technologiques, que célèbrent les œuvres poétiques que nous offre à voir Abdoulaye Diallo, continueront avec une vigueur exponentielle à livrer des outils toujours plus sophistiqués de maîtrise de notre environnement. En retour, elles ne nous garantissent pas sa préservation qui relève exclusivement de nos choix sociétaux.

Dans quelle mesure une révolution scientifique pourrait permettre de préserver l'environnement tout en relevant les défis du développement ?

Sujet 2.

L'Afrique est de nos jours la première région pourvoyeuse de ressources naturelles du monde. Elle est au même moment la zone la moins industrialisée de la planète.

Comment expliquez-vous cette situation ? Comment pourrait-on la renverser au bénéfice de ses populations ?

EPREUVE DE PHYSIQUE

Durée 02 heures

Documents non autorisés - Téléphones portables interdits - 04 Juillet 2018

Exercice 1. [6 points]

Après avoir fait la sieste sous un arbre à 20,0 m de la ligne d'arrivée, le lièvre se réveille et aperçoit la tortue qui le précède d'une distance égale à 19,5 m. Elle file vers le succès dans cette dernière ligne droite avec une vitesse v_0 égale à $0,250\ ms^{-1}$. Le lièvre se met alors à courir avec une accélération de valeur égale à $9,00\ ms^{-2}$ jusqu'à atteindre une vitesse v_1 de valeur $18,00\ ms-1$ et s'y maintient.

L'origine du repère orthonormé associé au référentiel terrestre est prise au pied de l'arbre où le lièvre et la tortue sont modélisés par des points matériels.

1a- Combien de temps faut-il à la tortue pour atteindre le ligne d'arrivée ?

1b- à la vitesse de pointe $v_1 = 18,0ms^{-1}$, quelle distance d_1 parcourt le lièvre pendant cette durée ?

2- à quelle distance de l'arbre le lièvre se trouve-il à la fin de la première phase de son mouvement ? Montrer qu'il a perdu la course.

3- Combien de temps après la tortue le lièvre franchira-t-il la ligne d'arrivée ?

Exercice 2. [6 points]

Deux rails parallèles AD et A'D', distants de 12 cm, son disposés selon des lignes de plus grande pente d'un plan faisant un angle $\alpha = 8°$ avec le plan horizontal. Les deux rails sont reliés à un générateur électrique, et le circuit est fermé par une tige de masse m = 32 g qui peut glisser sans frottement en M et en N sur les rails en restant horizontale. Le circuit est alors parcouru par un courant d'intensité $I = 2\ A$ (indépendant de la position de la tige).

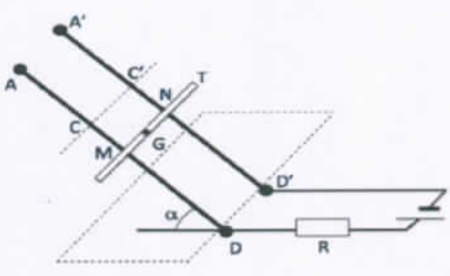

FIGURE 1

1- Un champ magnétique uniforme et vertical s'exerce sur la tige.

a- Représenter les trois forces qui s'exercent sur la barre MN.

b- Déterminer le sens et la norme du vecteur champ magnétique B pour que la tige reste immobile ($g = 10\ m.s^{-2}$)

2- On supprime instantanément le champ magnétique à une date $t = 0$. Indiquer la nature du mouvement du centre d'inertie G de la tige (situé au milieu de MN). Préciser son équation horaire jusqu'aux extrémités D et D' des rails, supposés situées dans un même plan horizontal. Calculer sa vitesse à ce moment-là, à l'instant initial, elle occupe la position CC' telle que CD = 15 cm.

3- En réalité, la vitesse de G est de $0,60\ m.s^{-1}$. Expliquer les raisons de la différence avec la valeur calculée précédemment.