# ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES

BP A10 Thiès Sénégal www.ept.sn Téléphone : 77 066 08 80

BUREAU DES ÉLÈVES / COMMISSION PÉDAGOGIQUE / CONCOURS JUNIOR POLYTECH

# Concours Junior Polytech

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

## Terminale S — Session 2021 — Durée : 04 heures

- NB : le barème est noté sur 100

**EXERCICE PRELIMINAIRE**

1)

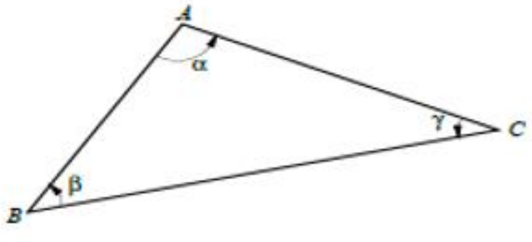
Comment choisir l'entier naturel $n$ pour que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit un réel ? un imaginaire ?

2)

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n$. Montrer ensuite que les entiers $a_n$ et $b_n$ sont premiers entre eux.

3)

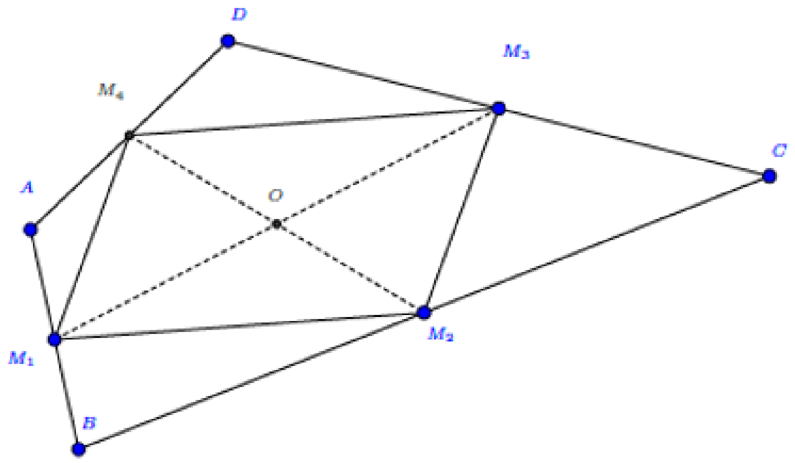
On note $\rho, \rho', \rho''$ les rotations autour de $A, B, C$ d'angles $\alpha, \beta, \gamma$, orientés suivant le dessin :




Qu'est-ce que $\rho \circ \rho' \circ \rho''$ ?

## EXERCICE 2 :

Soit $M_1M_2M_3M_4$ un parallélogramme direct du plan, de centre $O$, et $A$ un point quelconque du plan. On considère $B$ le symétrique de $A$ par rapport à $M_1$, $C$ le symétrique de $B$ par rapport à $M_2$, $D$ le symétrique de $C$ par rapport à $M_3$ et $E$ le symétrique de $D$ par rapport à $M_4$.




1. Montrer que $E = A$.
2. Montrer que si $z$ et $z'$ sont deux complexes, alors $|z+z'|+|z-z'| \geqslant 2|z|$.
3. On fixe un repère orthonormé direct de centre $O$. Exprimer $a$, $b$, $c$ et $d$ puis le périmètre de $ABCD$ en fonction de $m_1$, $m_2$ et de $t = a - m_1 + m_2$.
4. On fait maintenant varier le point $A$. Montrer que le périmètre du quadrilatère $ABCD$ est minimal lorsque $AM_1OM_4$ est un parallélogramme.

## PROBLEME :

**PREMIERE PARTIE : Le noyau de DRICHLET**

**(page suivante)**

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $D_n$ le *noyau de* DIRICHLET, défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \not\equiv 0[2\pi]$, on a

$$D_n(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $L_n$ l'intégrale

$$L_n = \int_0^{\pi} x D_n(x) \, \mathrm{d}x$$

   a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cos(kx) \, \mathrm{d}x$ pour tout entier $k \geq 1$.

   b) En déduire que

$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k^2}$$

3. On note $f$ le prolongement par continuité en $0$ de la fonction définie sur l'intervalle $]0, \pi]$ par : $x \to \dfrac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.
   Démontrer que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

4. Soit $\phi : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Démontrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\pi} \phi(x) \, \sin(\lambda x) \, \mathrm{d}x = 0$$

   (*Indication : on pourra penser à une intégration par parties.*)

5. a) Démontrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} L_n = 0$.

## DEUXIEME PARTIE : Une somme double

L'objet de cette partie est de calculer la limite de la somme double

$$\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}\right)$$

On pose, pour tout entier $N\geq 1$, $H_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$

1. a) Démontrer que pour tout entier $N\geq 1$, on a : $\ln(1+N)\leq H_N\leq 1+\ln(N)$

   b) En déduire que $\lim_{N\to+\infty}\frac{H_N}{N}=0$

   c) Démontrer que pour tout entier $M\geq 2$, on a :

$$\sum_{m=1}^{M-1}\frac{H_m}{m(m+1)}=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2}-\frac{H_M}{M}$$

   d) En déduire que la série $\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{H_m}{m(m+1)}$ converge et déterminer sa limite.

2. Pour tous entier $N\geq 1$ et pour tout entier $m\geq 2$, on pose

$$Z_{N,m}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m-1)}$$

   a) Démontrer que pour tout entier $m\geq 2$

$$Z_{N,m}=\frac{1}{m-1}\left(H_{m-1}-\sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{n}\right)$$

   b) En déduire que $\lim_{N\to+\infty}Z_{N,m}=\frac{H_{m-1}}{m-1}$

3. a) Montrer que pour tout entier $N\geq 1$ et pour tout entier $M\geq 2$ on a :

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}+\sum_{m=2}^{M}\frac{Z_{N,m}}{m}$$

   b) Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{m=2}^{M}\frac{H_{m-1}}{m(m-1)}$$

c) En déduire alors

$$\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}\right)$$

## TROISIEME PARTIE : La fonction Dilogarithme

Pour tout réel $x\in[-1,1[$, on considère l'intégrale

$$\mathrm{Li}\,(x)=-\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier l'existence de cette intégrale pour tout réel $x\in[-1,1[$.
2. On définit la fonction Dilogarithme

$$\mathrm{Li}\,:\left|\begin{array}{ccc}[-1,1[ & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \mathrm{Li}\,(x)\end{array}\right.$$

Démontrer que la fonction Li est prolongeable par continuité en $1$. On notera encore Li ce prolongement par continuité.

3. a) Montrer que pour tout $x\in]-1,1[$, on a

$$\mathrm{Li}\,(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

b) En déduire la valeur de $\mathrm{Li}\,(1)$.

4. a) Pour $x\in]0,1[$, calculer la dérivée de $\mathrm{Li}\,(x)+\mathrm{Li}\,(1-x)$

b) Démontrer la relation fonctionnelle

$$\forall x\in]0,1[,\quad \mathrm{Li}\,(x)+\mathrm{Li}\,(1-x)=\frac{\pi^2}{6}-\ln(1-x)\ln(x)$$

5. Déduire de la question précédente, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n^2}$

6. a) Pour tout réel $x \in ]-1,1[$, démontrer la relation

$$\mathrm{Li}(x) + \mathrm{Li}(-x) = \frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^2)$$

b) Retrouver la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

7. a) Pour tout réel $x \in ]0,1[$, démontrer la relation

$$\mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}(-x) + \mathrm{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \mathrm{Li}\left(\frac{x-1}{1+x}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ln(x)$$

b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}$

**FIN DU SUJET**

**BON COURAGE**