ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES

BP A10 Thiès Sénégal www.ept.sn Tel : 77 021 71 32

BUREAU DES ELEVES / COMMISSION PEDAGOGIQUE / CONCOURS JUNIOR POLYTECH

Concours Junior Polytech

Session 2015

EPREUVE DE SCIENCES PHYSIQUES

(Classe de TS1-TS2-TS3)

DUREE : 04 heures

Veuillez lire attentivement la consigne.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants. Il n'est pas obligatoire de traiter les questions dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement la partie et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Problème I : Durée des saisons

Données

- *Masse du Soleil :* $M_S = 1{,}99.10^{30}\ kg$
- *Constante d'attraction universelle :* $G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$

La saison est une période de l'année qui observe une relative constance du climat et de la température. D'une durée d'environ trois mois, la saison joue un rôle déterminant sur l'état de la végétation qui dépend essentiellement de facteurs climatiques.
D'un point de vue astronomique, une saison correspond à l'intervalle de temps au cours duquel la Terre occupe une portion de l'espace lors de sa gravitation autour du Soleil. C'est l'inclinaison de l'axe des pôles, combinée à la rotation de la Terre autour du Soleil, qui fait qu'il se produit une alternance des

saisons. Celles-ci correspondent aux périodes qui séparent le passage de la Terre à certains points de son orbite.

Dans ce problème, on étudie les mouvements de la terre dans le référentiel héliocentrique R centré au centre S du soleil et supposé galiléen.

A. Propriétés générales du mouvement

I. Référentiel galiléen.

1) Donner la définition d'un référentiel galiléen.
2) Définir le référentiel géocentrique. A quelle(s) condition(s) peut-on le considérer comme galiléen.

II. Force et énergie mécanique.

La Terre est modélisée par un solide indéformable de forme sphérique que l'on assimilera ici à un point matériel de masse m situé en son centre d'inertie O. Les effets liés à la rotation de la Terre autour de son axe ne sont pas pris en compte dans ce problème.

Le centre d'inertie O de la Terre se déplace dans le champ de gravitation du Soleil de masse M_S sous l'effet de la force :

$$\vec{F}_{S\to 0} = -\frac{GM_S m}{r^3}\vec{r} \qquad (1)$$

$\vec{r} = \overrightarrow{SO}$ étant le vecteur position du centre O de la terre par rapport au centre S du soleil. On néglige l'influence des autres planètes sur le mouvement de la terre.

1) Le champ de force de l'équation (1) est-il un champ de force central ?
2) Donner la définition d'une force conservative.
3) Montrer que la force exercée par le soleil sur la terre est conservative.
4) Exprimer l'énergie potentielle E_p dont dérive cette force en fonction de G, M_S, m et r. l'énergie potentielle E_p sera prise conventionnellement nulle pour r tendant vers l'infini.
5) Montrer que l'énergie mécanique E_m de la terre est constante au cours de son mouvement autour du soleil.

III. Moment cinétique.

.Le vecteur moment cinétique $\overrightarrow{L_S}$ de la terre dans le référentiel R, par rapport au centre S du soleil est donné *par* $\overrightarrow{L_S} = \overrightarrow{SO} \wedge m\vec{v}$.

Le théorème du moment cinétique pour un point matériel : la dérivée temporelle du vecteur moment cinétique est égale à la somme des moments des forces qui lui sont appliquées.

1) En appliquant à la terre le théorème du moment cinétique par rapport au point S, montrer que son moment cinétique $\overrightarrow{L_S}$ est constant.
2) En déduire que la trajectoire suivie par la terre autour du soleil est entièrement contenue dans un plan fixe (π). Comment est situé le plan de cette trajectoire par rapport au vecteur moment cinétique $\overrightarrow{L_S}$.
3) Pour la suite on pose $\overrightarrow{L_S} = mC\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire fixe dans le référentiel héliocentrique R et C une constante.
Dans le plan (π) de sa trajectoire, on repère la position du centre d'inertie de la terre O en coordonnées polaires (r, θ)définies par : $r = SO$ et $\theta = (\overrightarrow{SO_0}; \overrightarrow{SO})$ (figure 1-a). O_0 est la position de O à une date choisie comme origine. $(\overrightarrow{u_r}; \overrightarrow{u_\theta})$ étant la base locale associée à ces coordonnées.

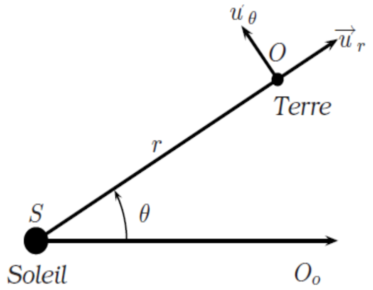


Figure 1-a *:repérage de la position de la terre*

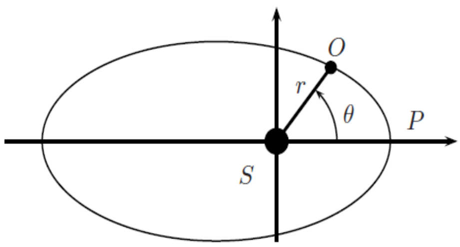


Figure 1-b *:Trajectoire de la terre autour du soleil*

La vitesse du centre d'inertie de la terre par rapport au référentiel R s'écrit sous la forme :

$$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

Donner les expressions de v_r et v_θ en fonction de r, $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

a) Exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{L_S}$ en fonction de m, r et $\dot{\theta}$. En déduire que la constante C est donnée par :

$$C = r^2\dot{\theta}$$

IV. Loi des aires

1) Exprimer l'aire $d\Sigma$, balayée par le rayon vecteur $\vec{r}$ pendant une durée dt du mouvement de la terre autour du soleil.
2) Montrer que l'aire Σ balayée par le rayon vecteur $\vec{r}$ durant un intervalle de temps Δt est donnée par la loi :

$$\Sigma = \frac{C}{2}\Delta t$$

Comment appelle-t-on cette loi ? Justifier l'appellation de la constante des aires habituellement donnée à C.

B. Etude de la trajectoire

On pose $u = \frac{1}{r}$ et on rappelle que $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}$

1. Exprimer $\frac{dr}{dt}$ en fonction de C et $\frac{du}{d\theta}$
2. Définir l'énergie cinétique E_c de la terre par rapport au référentiel R. en déduire son expression en fonction de m, , u et $\frac{du}{d\theta}$
3. Montrer que l'énergie mécanique du système s'écrit sous la forme :
$$E_m = \frac{1}{2}mC^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right) - GM_Smu$$
4. Montrer que la conservation de l'énergie mécanique le long de la trajectoire se traduit par deux équations différentielles possibles relatives à $u(\theta)$. On explicitera ces deux équations.
5. L'une des deux équations précédentes s'écrit $\frac{du}{d\theta} = 0$. Quelle est la nature de la trajectoire dans ce cas ?
6. On montre, par un choix convenable de l'origine des angles polaires que la solution de la deuxième équation peut s'écrire sous la forme :
$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad (2)$$
Avec $p = \frac{C^2}{GM_S}$ et $e = pu_0$ où $u_0$est une constante d'intégration qu'on ne demande pas de déterminer.
La relation (2) est l'équation polaire d'une conique d'excentricité e. On supposera que $e < 1$ et que la trajectoire est une ellipse dont S est l'un de ses foyers (figure 1-b).
   a. Déterminer la distance SO minimale notée r_m au périhélie P de la trajectoire en fonction de p et e.
   b. Déterminer la distance SO maximale notée r_M à l'aphélie A de la trajectoire en fonction de p et e.
   c. Déterminer l'écart relatif entre ces deux distances défini par $\frac{r_M - r_m}{p}$
   d. Application numérique : on donne $p = 150.10^6 km$ et $e = 0{,}018$. Calculer r_M, r_m et l'écart relatif. Commenter.

C. Période temporelle du mouvement

On rappelle que la surface d'une ellipse est donnée par : $\Sigma = \pi ab$ où $a = \frac{p}{1-e^2}$ et $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ désigne respectivement le demi grand axe et le demi petit axe de l'ellipse.
Pour la suite on utilisera les valeurs numériques de e et p données dans l'application précédente.

1. En utilisant la relation établie A-IV, exprimer la période T du mouvement de la terre autour du soleil, en fonction de G, M_S, p et e.
2. Application numérique : calculer T en jours. Commenter.

Pour l'hémisphère nord de la Terre, le périhélie P de la trajectoire correspond approximativement au début de l'hiver (solstice d'hiver), l'aphélie A de la trajectoire correspond au début de l'été (solstice d'été), le début du printemps ou équinoxe du printemps EP correspond à $\theta = \pi/2$ et le début de l'automne ou équinoxe d'automne EA correspond à $\theta = 3\pi/2$.

3. Reproduire le schéma de la trajectoire (figure 1-b) et placer les points A, EP et EA. Indiquer avec soin la surface balayée par le rayon-vecteur de la Terre pendant chacune des quatre saisons.
4. Montrer graphiquement que le printemps et l'été sont plus longs que l'automne et l'hiver dans l'hémisphère nord.
5. Dans cette section on utilise la relation établie en A-III-5-b.
    a. En tenant compte de la valeur de e, montrer que la durée T_h de l'hiver se calcule approximativement par :

    $$T_h \cong \frac{p^2}{C}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - 2e\cos\theta)\,d\theta$$

    Application numérique : calculer T_h en jours.

    b. Montrer de même que la durée du T_p printemps se calcule par approximativement par :

    $$T_p \cong \frac{p^2}{C}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1 - 2e\cos\theta)\,d\theta$$

    Application numérique : calculer T_p en jours. Commenter.

6. Un modèle plus complexe permet d'établir un calendrier qui fait apparaître les dates approximatives suivantes :
    - Solstice d'hiver : 21 décembre 2014 à 12h.
    - Equinoxe du printemps : 20 mars 2015 à 12h.
    - Solstice d'été : 21 juin 2015 à 06h.
    - Equinoxe d'automne : 22 septembre 2015 à 21h.
    - Solstice d'hiver : 21 décembre 2015 à 18h.

    a. Calculer la durée de la saison d'hiver T'_h et de la saison de printemps T'_p.

    b. Comparer ces valeurs à celles obtenues par le modèle précédent. Commenter. Que pensez-vous du modèle utilisé.

Problème 2 : la comète de Levy

Il s'agit de la neuvième comète découverte par Cardyn et Gene Shoemaker et David Levy en mars 1993. Cette comète serait probablement restée dans l'anonymat si elle ne s'était pas rapprochée de Jupiter. Mais la très grande force gravitationnelle de Jupiter l'a fait exploser en plusieurs morceaux dont 21 sont comptés actuellement. Les différents morceaux de la comète se sont écrasés sur Jupiter en Juillet 1994.

Dans ce problème, on cherche à savoir les causes de fragmentation de la comète puis la taille de ces morceaux.

On admet que le référentiel jovicentrique est galiléen et on néglige les effets dus au soleil dans ce référentiel. Jupiter est une planète considérée comme sphérique, homogène de masse M_j et de rayon R_j.

Données : $M_j = 1{,}91.10^{27}$ Kg $\qquad$ $R_j = 71\ 400$ Km

PARTIE A : La comète considérée comme un satellite de Jupiter

On considère que le mouvement du centre d'inertie G de la comète est circulaire de rayon d = OG avec O centre de Jupiter dans le référentiel jovicentrique.

A.1 Montrer que le mouvement de G est circulaire et uniforme si d = constante.

A.2 En déduire la période T de la révolution de la comète au tour de Jupiter en fonction de M_j et d.

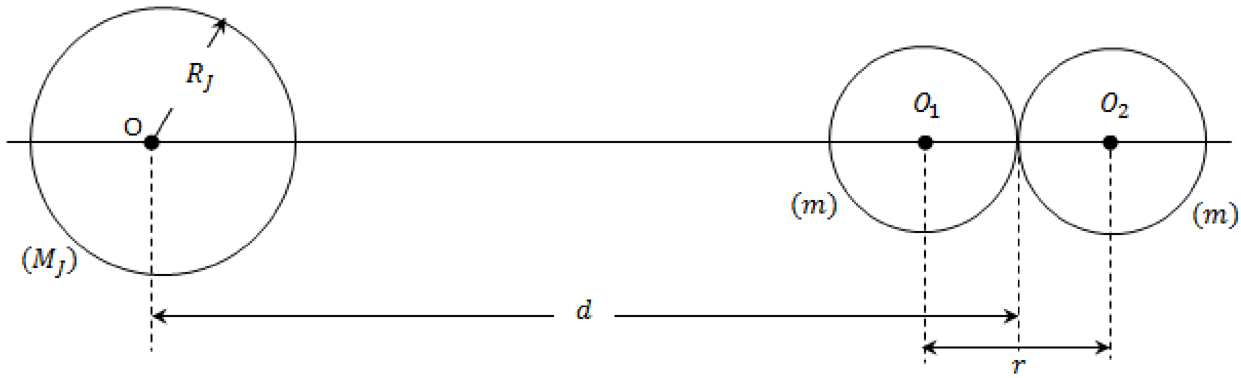
A.3 Calculer T si $r = 8\ R_j$.

PARTIE B : Cause de la fragmentation de la comète

On cherche la distance en dessous de la quelle la comète s'approchant de Jupiter se fragmente en plusieurs morceaux sous l'effet de la gravitation due à Jupiter. On fait les hypothèses suivantes :

(i) La comète de masse volumique μ_c est en orbite circulaire de rayon d autour du centre de Jupiter.

(ii) La comète est considérée comme formée de deux sphères identiques de masse m et de rayon r homogènes et disposées comme l'indique la figure ci-après :



r est très petit par rapport à d et m est très petit par rapport à M_j.

Les 2 sphères constituant la comète sont liées entre elles par leur attraction gravitationnelle mutuelle.

On appelle F_c le module de la force de contact existant entre ces 2 sphères.

On suppose que la disposition des 2 sphères reste inchangée et leurs centres O_1 et O_2 restent alignés avec le centre O de Jupiter.

Les 2 sphères constituant la comète sont homogènes et ont la même masse volumique.

B.1 Faire un bilan des forces s'exerçant sur chacune des 2 sphères constituant la comète.

B.2 En écrivant la relation fondamentale de la dynamique pour chacune des 2 sphères, exprimer ω^2 en fonction des données.

B.3 Que devient le module de la force de contact quand le contact cesse entre les 2 sphères ?

B.4 En admettant que les 2 sphères ont la même vitesse angulaire jusqu'à ce que le contact cesse, en déduire la distance d_R appelée limite de Roche pour Jupiter.

B.5 En déduire le module de la force f d'attraction mutuelle entre les 2 sphères en fonction de r, M_j et d_R.

B.5 Exprimer d_R en fonction de R_j, μ_J et μ_C masses volumiques respectives de Jupiter et de la comète.

B.7 On a $\mu_C = 1000 kgm^{-3}$. Quelle est la composition probable de la comète ?

B.8 Calculer μ_J.

B.9 En déduire d_R.

PARTIE C : Influence des forces de cohésion : fragmentation de la comète

Les observations ont montrées que la fragmentation de la comète s'est produite quand $d = d_0 = 1{,}5\,\mathrm{R_J}$.

C.1 Comparer d_0 à d_R.

C.2 Montrer que cela peut s'interpréter si on suppose qu'en plus des forces déjà citées, les 2 deux sphères sont liées par des forces de cohésion.

C.3 Déterminer le module de la force de cohésion : F_{coh}

C.4 Prouver cette relation $F_{coh} = f\left[\left(\frac{d_R}{d_0}\right)^6 - 1\right] = f\alpha$.

C.5 En déduire la valeur de α.

C.6 Les forces de cohésion entre les 2 morceaux d'un solide sont à courte portée et elles sont proportionnelles à la surface de contact en les deux morceaux.

Dans le cas de la glace, constituant essentiel de la comète, on peut estimer le force de cohésion par unité de surface : f_{coh} à partir de l'observation ci-après : la taille limite des stalactites de glace est de 3,0m, au-delà elles s'effondrent sous l'effet des forces de pesanteur. En considérant le cas d'une stalactite de glace cylindrique en déduire f_{coh}.

C.6.1 Calculer numériquement f_{coh} en assimilant la masse volumique de la glace à μ_C.

C.6.2 Pour calculer les forces de cohésion dans le cas de cette comète on assimile les deux parties de masse m constituant la comète à deux cubes identiques d'arêtes r' accolés par une face complète.

C.6.3 En déduire r' en fonction de r.

C.6.4 En conservant le modèle des 2 sphères pour le calcul de l'attraction mutuelle et celui des cubes pour le calcul des forces de cohésion, en déduire une relation de la forme : $r = f(\mu_C, f_{\mathrm{coh}}, \alpha)$.

C.6.5 Déterminer r et en déduire une estimation de la dimension des morceaux issus de la fragmentation de la comète.

FIN

Bonne chance !!!