ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES

BP A10 Thiès Sénégal www.ept.sn Téléphone : 78 422 75 63

BUREAU DES ÉLÈVES / COMMISSION PÉDAGOGIQUE / CONCOURS JUNIOR POLYTECH

Concours Junior Polytech

Epreuve de Mathématiques

Terminale S — Session 2019 — Durée : 04 heures

La clarté et la rigueur de démonstration seront prises en compte.

EXERCICE 1 : (3pts)

Dans cet exercice, toutes les questions sont indépendantes.

1) Calculer l’ intégrale suivante :

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{x^2(cosu)^2 + (sinu)^2}.$$

2) Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $S = u + u^2 + u^4\ et\ T = u^3 + u^5 + u^6$. Montrer que :

$$4sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) = i(T - S) = \sqrt{7}.$$

3) Soit $(a\,,b) \in R^2\ tel\ que\ a < b\ ,f$ une fonction derivable sur $[a,b]\ tel\ que\ f(a) = f(b) = 0$. On suppose que f' est bornée sur $[a,b]$ et on pose : $|f'(t)| \leq k\ ,t \in [a,b]$.Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leq \frac{k(b-a)^2}{4}.$$

4) Soit $(a\,,b) \in R^2\ tel\ que\ a < b\ ;f,g\ et\ h$ sont des fonctions continues et définies de $[a,b]$ vers R^+. Montrer que :

$$\left(\int_a^b fgh\right)^4 \leq \left(\int_a^b f^4\right)\left(\int_a^b g^2\right)^2\left(\int_a^b h^4\right).$$

EXERCICE 2 : (5pts)

On se place dans un plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ et note C le cercle de centre O et de rayon 1. Pour tout nombre réel t , on note M_t le point de C d'affixe e^{it}.

Pour toute partie S de C ayant n (n≥ 1) éléments A_1, A_2 ,….., A_n dont les affixes respectives sont a_1, a_2 ,…., a_n , on désigne par $P_s(X)$ le polynôme à coefficients complexes défini par la relation :

$$P_s(X) = \prod_{j=1}^{n}(X - a_j)$$

et on désigne par f_s la fonction définie sur R par la relation:

$$f_s(t) = \|\overrightarrow{A_1M_t}\| \times \|\overrightarrow{A_2M_t}\| \times \ldots \times \|\overrightarrow{A_nM_t}\|.$$

PARTIE A :

1) Montrer que, pour tout nombre réel t ,

$$f_s(t) = |P_s(e^{it})|$$

2) En déduire que 2π est une période de f_s.

PARTIE B :

Soit α un réel, r_α la rotation de centre O et d'angle α, et $S_\alpha = r_\alpha(S)$ l'image de $S\ par\ r_\alpha$.

1) Calculer l'affixe du point $r_\alpha(A_j)$.
2) Prouver que :

$$P_{S_\alpha}(x) = e^{in\alpha}P_S(Xe^{-i\alpha}).$$

Et que , pour tout nombre réel t ,$f_{S_\alpha}(t) = f_S(t-\alpha)$.

3) Prouver que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   a) Le nombre $\alpha est\ une\ période\ de\ f_s$;
   b) $P_S(X) = e^{in\alpha}P_S(Xe^{-i\alpha})$;
   c) la partie S est globalement invariante par la rotation r_α, c'est-à-dire,

$$r_\alpha(S) = S.$$

PARTIE C: On fixe un entier $N > 1$. Le but de cette partie est de calculer

$$S_N = \sum_{z \in E_N} \frac{1}{1-z}$$

où E_N est l'ensemble des racines nièmes de l'unité privé de 1.

1) Démontrer que pout tout $\theta \neq 2k\pi\ , on\ a$:

$$\frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} cotan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

2) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{N-1} cotan\left(\frac{k\pi}{N}\right) = 0.$$

3) En déduire une simplification de S_N.

PROBLÈME : (12pts)

Autour de $\delta(2) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Quelques notions :

*****_Une fonction f est dite de classe_ C^1 _sur un intervalle I si f est dérivable une fois sur I et que sa dérivée est continue sur ce même intervalle._

*****_Deux suites_ U_n _et_ V_n _sont dites équivalentes (_ $U_n \sim V_n$_) si et seulement si_ $\lim_{n \to +\infty} \frac{Un}{Vn} = 1$ _et que_ V_n _ne s'annule pas._

*_Soit_ (u_n) _une suite réelles . On pose_ $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\ , \forall n \geq 0.$

Les quantités U_n _forment une suite appelées série de terme général_ u_n_. Les_ U_n _sont appelées sommes partielles d'ordre n et la série est notée_ $\sum_{n \geq 0} u_n.$

*_Soit_ (u_n) _une suite de nombres réels :_

- On dit que la série $\sum u_n$ _(ou encore la serie de terme général_ u_n_) est convergente_ *si la suite* (S_N) $=\sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + u_1 + \cdots u_N$ *tend vers une limite finie S. On note S la somme de la série :*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right) = \lim_{N\to+\infty}(S_N).$$

<u>Première partie</u> : Par la méthode de WALLIS

1. On pose :

$$C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt.$$

a) Calculer C_0 *et* C_1.

b) Pour $n \geq 2$, exprimer $C_n$en fonction de C_{n-2}.

c) En déduire les valeurs de C_{2n} *et* C_{2n+1}.

d) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{C_{2n}}{C_{2n+1}}.$$

e) En déduire :

$$\frac{(2n)!}{(2n-1)!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n+1}.$$

2. On pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)dt \quad et \quad U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}.$$

a) Démontrer que : $\forall\, n \geq 1, U_n \leq 2$. En déduire que (U_n)admet une limite δ.

b) Pour tout $n \geq 1$, exprimer I_n en fonction de I_{n+1}.

c) En déduire que:

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^6}{6}-U_n\right)=\frac{(2n)!}{(2n-1)!}I_n.$$

d) Démontrer que :

$$I_n \leq \frac{\pi^2}{4}.\frac{1}{2n+1}$$

et en déduire que

$$\delta=\frac{\pi^2}{6}.$$

Deuxième partie : Par le lemme de Riemann –Lebesgue

Le lemme: Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans C. Soit γ un réel alors

$$\lim_{\gamma\to+\infty}\int_a^b e^{i\gamma t} f(t)dt=0.$$

1. Démontrer le lemme f pour de classe C^1 .
2. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout n ∈ N^*:

$$\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)\,dt=\frac{1}{n^2}.$$

3. Démontrer que pour tout $t \neq 2k\pi$:

$$\sum_{p=1}^{n}\cos(pt)=Re\frac{e^{(n+1)it}-e^{it}}{e^{it}-1}.$$

En déduire que:

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}=\frac{1}{2\pi}Re\int_0^\pi\frac{t(t-2\pi)}{e^{it}-1}\left(e^{i(n+1)t}-e^{it}\right)dt.$$

4. Démontrer que la fonction f définie sur $]0,\pi]$ par $f(t)=\frac{t(t-2\pi)}{e^{it}-1}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur$[0,\pi]$.
5. A l'aide du lemme , déduire des questions précédentes que :

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Troisième partie : Par la méthode de Holme et Papadimitriou

1. Démontrer que pour tout $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in N^*$:

$$\sin(2n+1)\,\theta = sin^{2n+1}\theta \sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_{2n+1}^{2j+1}(cotan^2\theta)^{n-j}.$$

2. On considère, pour tout $n \in N^*$, le polynome P_n défini par:

$$P_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} X^{n-j}\,.$$

   Démontrer que les n racines de P_n sont les réels :

$$\alpha_k = cotan^2\frac{k\pi}{2n+1}, 1 \leq k \leq n.$$

3. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} cotan^2\frac{k\pi}{2n+1} = n\frac{(2n-1)}{3}.$$

4. Démontrer que, pour tout $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[, on\ a$: $\sin(\theta) < \theta < \tan(\theta)$. En déduire que : $\text{cotan}^2(\theta) < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \text{cotan}^2(\theta)$.
5. Démontrer que :

$$\frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}.$$

6. En déduire :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Quatrième partie : A l'aide des séries de Fourier

Soit $f: R \to C,\ 2\pi - periodique\ , impaire\ telle\ que\ :\ \forall\ t \in]0,\pi[, f(t) = 1\ et\ \forall\ n \in Z,\ f(n) = 0.$

1.Calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) a_n et b_n définis, pour tout $n \in N$, par :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \;\; et\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt.$$

2. Démontrer que la série $S_p(f)$ de Fourier de f definie pour tout $t \in R$ par :

$$S_p(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{p}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$$

Converge vers $f\ sur\ R$.

3. En déduire :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Démontrer que :

$$\sum\nolimits_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5.En déduire :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

BON COURAGE