ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES

www.ept.sn Téléphone : 77 203 00 97

BUREAU DES ÉLÈVES / COMMISSION PÉDAGOGIQUE / CONCOURS JUNIOR POLYTECH

Epreuve de Mathématiques

Premières — Session 2024— Durée : 04 heures

***NB**:La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.*

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'épreuve est notée sur 40 points .

PRÉLIMINAIRE (7 points)

Pour chaque question, choisissez la bonne réponse en justifiant votre choix.

1. L'apport quotidien recommandé en calcium pour une personne de 20 ans est de 1000 milligrammes(mg). Une tasse de lait contient 299 mg de calcium et une tasse de jus contient 261 mg de calcium. Laquelle des inégalités suivantes représente le nombre possible de tasses de lait, m et de tasses de jus, j, qu'une personne de 20 ans pourrait boire en une journée pour atteindre ou dépasser l'apport quotidien recommandé en calcium à partir de ces boissons seules ?
   a) $299m + 261j \geq 1000$ b) $299m + 261j > 1000$
   c) $\frac{299}{m} + \frac{261}{j} \geq 1000$ d) $\frac{299}{m} + \frac{261}{j} < 1000$
2. Une étude prévoit qu'une population locale d'animaux doublera en espèces tous les 12 ans. La population au début de 2014 était estimée à 50 animaux. Si P_n représente la population n années après 2014 , laquelle des équations suivantes représente le modèle de classe de la population au fil du temps ?
   a) $P_n = 12 + 50n$ b) $P_n = 50 + 12n$ c) $P_n = 50(2)^{12n}$ d) $P_n = 50(2)^{\frac{n}{12}}$
3. $F(x) = \frac{1}{(x^2+1)x^3}$ avec $x \neq 0$. On écrit : $F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{dx+e}{x^2+1}$.
   Quelle est l'affirmation vraie ?
   a) $c = 2$ b) $b = 1$ c) $a = 1$ d) $e = 0$
4. Évaluer $q = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{x}$
   a) $q = \pi$ b) $q = 1$ c) $q = \frac{1}{\pi}$ d) $q = +\infty$
5. Les vecteurs $\vec{u}\ (m+1,\, m)$ et $\vec{v}\ (m,\, 2)$ où m est un réel sont colinéaires si, et seulement si :
   a) $m = \{0, -3\}$ b) $m = \{1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$
   c) $m = \{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$ d) $m = \{-1, 3\}$
6. Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\ (\frac{1}{2},\, a)$ et $\vec{v}\ (\frac{-\sqrt{3}}{2},\, b)$.
   Comment choisir les réels a et b pour que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée directe ?
   a)$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$ b) $a = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$
   c) $a = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{-1}{2}$ d) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{-1}{2}$
7. Soit $a(x) = \cos(3\pi + x) + \cos(x - \frac{\pi}{2}) - \sin(x + \frac{3\pi}{2})$, $x \in \mathbb{R}$.
   Une autre écriture de $a(x)$ est :
   a) $\sin(x)$ b) $-\sin(x)$
   c) $-\cos(x)$ d) $\tan(x)$

Problème 1 : Limite sympathique !(16 points)

Partie A : Quelques exemples

1.) On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation

$$x^2 + \frac{1}{n}x - 1 = 0;$$

d'inconnue x appartenant à $\mathbb{R}$.

a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note x_n. Exprimer x_n en fonction de n.

b) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge ; on note x_∞ sa limite.

c) Démontrer que x_∞ est solution de l'équation

$$x^2 - 1 = 0$$

2.) On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation

$$\frac{1}{n}y^2 - y - 1 = 0,$$

d'inconnue y appartenant à $\mathbb{R}$.

a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note y_n.

b) Démontrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

3.) On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation

$$z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1 = 0$$

d'inconnue z appartenant à $\mathbb{R}$.

a) Soit n un entier naturel non nul.

i) Étudier les variations de la fonction $z \mapsto z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

ii) En déduire que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note z_n. Démontrer que z_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

b) Démontrer que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
On pourra s'intéresser au signe du réel $z_{n+1}^3 + \frac{1}{n}z_{n+1}^2 - 1$.

c) On note z_∞ la limite de la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$. Démontrer que z_∞ est solution de l'équation

$$z^3 - 1 = 0.$$

4.) On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation

$$\frac{1}{n}t^3 - t^2 - 1 = 0;$$

d'inconnue t appartenant à $\mathbb{R}$.

a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle ; on la note t_n.
b) La suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Partie B : Polynômes sympathiques

Dans les deux prochaines parties, on considère un entier $d \geqslant 1$. La fonction P est un polynôme de degré au plus d s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ tels que

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}$.
Soit $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polynôme de degré au plus d. On dit que :

P est initialement sympathique si $a_0 = -1$ et si $a_k \geqslant 0$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant d$;
P est faussement sympathique si $a_0 = -1$ et si $a_k \leqslant 0$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant d$;
P est vraiment sympathique si $a_0 = -1$ et s'il existe un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant d-1$ et pour lequel $a_1 \leqslant 0, a_2 \leqslant 0, \ldots, a_k \leqslant 0$ et $a_{k+1} > 0, a_{k+2} \geqslant 0, \ldots, a_d \geqslant 0$.

Enfin, on dit que P est sympathique s'il est initialement, faussement ou vraiment sympathique.

5.) Quels sont les polynômes qui sont à la fois faussement sympathiques et initialement sympathiques ?
6.) Démontrer que tout polynôme faussement sympathique est

a) strictement négatif sur l'intervalle $[0, +\infty[$;

b) décroissant sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

7.) Soit P un polynôme vraiment sympathique et initialement sympathique.

a) Démontrer que P est strictement croissant sur l'intervalle $[0, +\infty[$;
b) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive.

8.) Soit P un polynôme vraiment sympathique mais pas initialement sympathique.

a) Démontrer qu'il existe un réel $b > 0$, un entier $\ell \geqslant 0$ et un polynôme Q vraiment sympathique tels que

$$P'(x) = bx^\ell Q(x)$$

pour tout réel x.

b) On suppose que l'équation $Q(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$.
Démontrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que le polynôme P vérifie les quatre propriétés suivantes :

P est décroissant sur l'intervalle $[0, r]$;
P est strictement croissant sur l'intervalle $[r, +\infty[$;
P est strictement négatif sur l'intervalle $[0, r]$;
l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[r, +\infty[$.

Problème 2 : En pleine effervescence (17 points)

Pour tout réel $x \geq 0$, on note $E(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier naturel inférieur ou égal à x. On a donc $E(x) \in \mathbb{N}$ et $E(x) \leq x < E(x) + 1$.
Par exemple, $E(2.4) = 2$, $E(3) = 3$ et $E(1.9) = 1$.

On dit qu'un réel x est pétillant si $x \geq 0$ et si, pour tout entier $n \geq 1$, le nombre $E(x^{(2^n)} + 2)$ est le carré d'un entier.

Partie I : Mise en jambes

1) Démontrer que le réel $\frac{3}{2}$ n'est pas pétillant.
2) Démontrer que l'intervalle $[0, 1[$ ne contient aucun réel pétillant.
3)
a) Démontrer que, si un réel x est pétillant, alors le réel x^2 est aussi pétillant.
b) Démontrer que, s'il existe un réel pétillant, alors il existe une infinité de réels pétillants.
4) Démontrer qu'aucun entier naturel n'est pétillant.

Dans la suite de ce problème, on considère un entier $k \geq 1$ fixé. On souhaite établir que l'intervalle $[k, k+1[$ contient un unique réel pétillant. On note $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$u_1 = (k+1)^2$$

et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2.$$

Partie II : Existence

5) Démontrer que $u_n \geq 3$ pour tout entier $n \geq 1$.

6) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique réel $a_n \geq 1$ tel que $a_n^{2^n} + 2 = u_n$, et un unique réel $b_n \geq 1$ tel que $b_n^{2^n} + 1 = u_n$.

Indication :
Vous pouvez exploiter le fait que toute fonction puissance d'exposant entier strictement positif définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ est continue et strictement croissante sur cet intervalle.

7) Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante et que la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

8) Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On note α sa limite.

9) Démontrer que $k < \alpha < k+1$ et que α est pétillant.

Partie III : Unicité

Soit γ un réel pétillant contenu dans l' intervalle $[k, k+1[$.
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = E(\gamma^{(2^n)}) + 2$.

10) Démontrer par récurrence que $u_n = v_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

11) Avec les notations de la partie 2, démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $a_n \leq \gamma \leq b_n$.
12)
a) Soient x et y deux réels tels que $x \geq y \geq 1$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$x^{2^n} - y^{2^n} \geq 2^n(x-y).$$

b) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ convergent toutes les deux vers γ.

13) Démontrer que γ est l'unique réel pétillant contenu dans l'intervalle $[k, k+1[$.

Fin du sujet

Bonne chance