



ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE THIES



BP A10 Thiès Sénégal www.ept.sn Tel : 78 180 18 87 // 33 951 26 99

BUREAU DES ÉLÈVES 2017 - 2018

CONCOURS JUNIOR POLYTECH

(SESSION 2018)

ÉPREUVE DE SCIENCES PHYSIQUES

(Classes de TERMINALES S1 - S2 - S3)

DURÉE : 04 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

THEME :

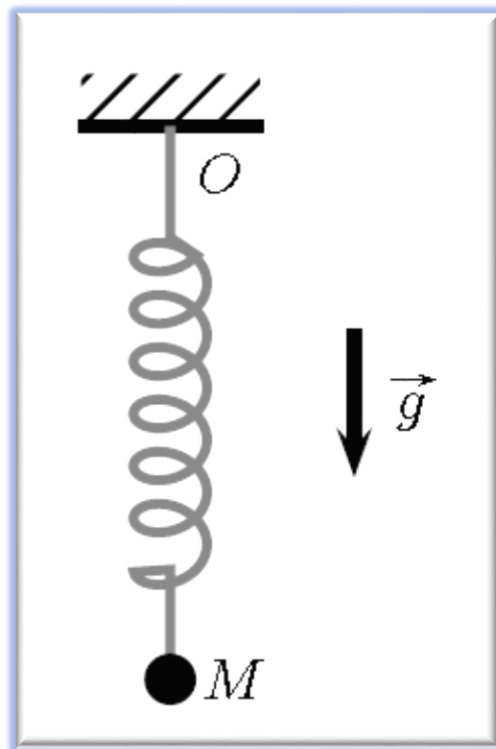
**Une solution au problème du dioxyde de carbone atmosphérique
(CO₂)**

PARTIE A : Quelques notions de bases relatives aux oscillations.

- 1) Définir les notions suivantes : oscillateur, oscillateur libre, oscillateur entretenu, oscillation forcé ?
- 2) Définir la pseudo-période et la période propre.

- 3) On considère un mobile M assimilable à une masse ponctuelle m et pendu (verticalement) par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Le champ de pesanteur est $\vec{g} = g\vec{u}_z$.

L'origine du référentiel est tout d'abord prise en O , point d'accroche du ressort au plafond (voir figure). Le mouvement reste vertical. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la position $z(t)$ du ressort, puis proposer un changement de variable afin de la mettre sous forme canonique.



- 4) Oscillateur lancé avec une vitesse initiale

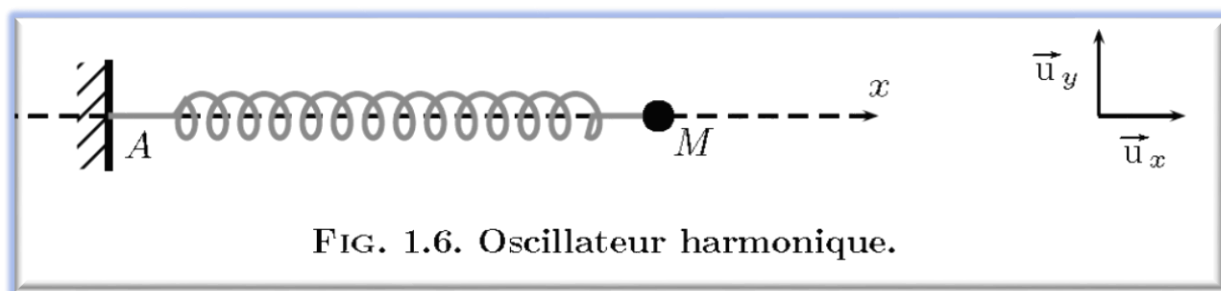
On considère un mobile M de masse m lié à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0

(Voir figure 1.6).

Il peut se déplacer horizontalement sur une glissière parfaite sans frottement).

Le mobile est lancé avec une vitesse initiale v_0 à partir de sa position d'équilibre.

Déterminer la loi d'évolution $x(t)$ de la position du mobile M .



Partie B *Une solution au problème du dioxyde de carbone atmosphérique CO₂ ?*

Il est maintenant bien établi que l'augmentation de la concentration du CO₂ atmosphérique liée à l'activité humaine est l'une des causes principales du réchauffement climatique observé depuis un siècle (la température moyenne de la planète a augmenté de 0.6 K durant les 30 dernières années). Ce problème se propose de présenter l'origine microscopique des propriétés du CO₂ qui expliquent son influence sur le climat terrestre puis d'analyser une solution originale qui permet de stocker à très longue échéance le CO₂ au fond des océans. Les différentes parties du problème sont très largement indépendantes les unes des autres.

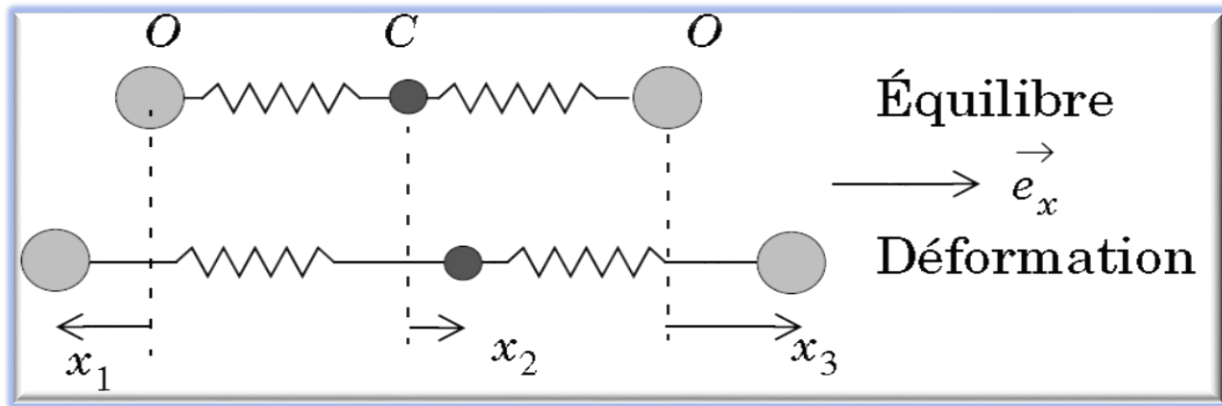
Partie I : Vibrations de la molécule de CO₂ et interaction avec une onde électromagnétique

Pour étudier les vibrations de la molécule de CO₂, nous supposons que chaque liaison CO est indépendante de l'autre. Les atomes sont assimilés à des points matériels de masse $m_1 = 2,66 \times 10^{-26}$ kg pour l'oxygène et $m_2 = 1,99 \times 10^{-26}$ kg pour le carbone. L'atome de carbone interagit avec les atomes d'oxygène qui l'entourent. On néglige l'action de la pesanteur, les interactions entre les deux atomes d'oxygène extrêmes et on considère le système isolé formé par une seule molécule.

I.1) Vibrations longitudinales de la molécule

Nous supposons dans cette partie que la molécule est parfaitement linéaire : les trois atomes restent alignés dans une direction de vecteur unitaire \vec{e}_x . Au voisinage de sa configuration d'équilibre, on peut modéliser l'interaction de l'atome de carbone central avec les atomes d'oxygène par deux ressorts de raideur et de longueur au repos identiques (respectivement

notés k et r_0 , avec $k=1,42 \times 10^3 \text{ N.m}^{-1}$ et $r_0=0,166 \text{ nm}$). À l'équilibre les deux liaisons ont même longueur et l'atome de carbone est confondu avec le centre d'inertie de la molécule. En dehors de l'équilibre, chaque atome est repéré par son déplacement relativement à sa position d'équilibre : x_1, x_2, x_3 (figure1).



I.1.1) Définir le référentiel barycentrique (B) de la molécule. Justifier que ce référentiel est galiléen.

Dans toute la suite, toutes les grandeurs cinématiques seront évaluées dans le référentiel barycentrique de la molécule.

I.1.2)

a) Justifier la relation : $m_1(x_1 + x_3) + m_2 x_2 = 0$

b) Montrer que x_1 et x_3 vérifient un système de la forme :

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + ax_1 + bx_3 = 0 \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} + ax_3 + bx_1 = 0 \end{cases}$$

et exprimer a et b en fonction de k, m_1, m_2 .

On recherche les solutions harmoniques du système. Dans ce cas, on peut associer aux grandeurs $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ les grandeurs complexes $\bar{x}_1(t)=A_1 e^{i\omega t}$, $\bar{x}_2(t)=A_2 e^{i\omega t}$, $\bar{x}_3(t)=A_3 e^{i\omega t}$ où les A_i sont a priori complexes.

c) Déterminer les deux seules valeurs positives de ω qui conduisent à des coefficients A_i non tous nuls. On désignera la plus petite de ces pulsations par ω_1 et l'autre par ω_2 et on les exprimera en fonction de k, m_1, m_2 .

d) Calculer numériquement ω_1 et ω_2 .

e) Les solutions harmoniques ainsi déterminées correspondent à deux sortes de mouvements.

- Dans l'un d'entre eux l'atome de carbone reste fixe. Quelle est la pulsation associée et quel est alors le mouvement des deux atomes d'oxygène ? Pourrait-on le prévoir ?
- Dans l'autre type de mouvement les deux atomes d'oxygène ont même déplacement à chaque instant. Quelle est la pulsation correspondante ? Calculer dans ce cas le rapport A_2 / A_1 .

On appellera dans la suite **mode 1** et **mode 2** les mouvements associés respectivement aux pulsations ω_1 et ω_2 .

I.2 - Modes de flexion de la molécule de CO₂.

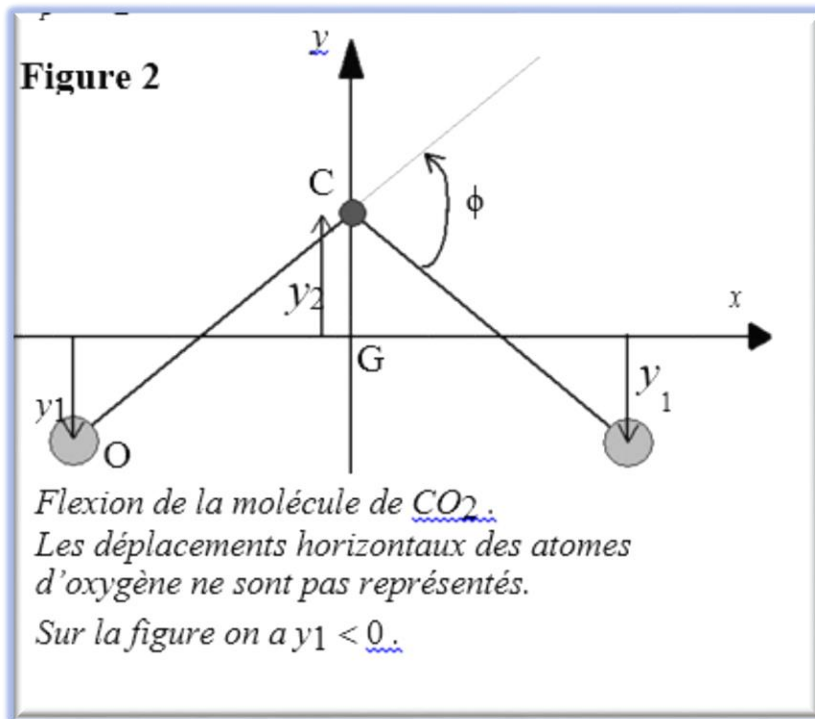
On étudie maintenant un autre type de mouvement dans lequel les liaisons ont une longueur fixe, r_0 mais où les deux liaisons CO peuvent former entre elles un angle ϕ (figure 2). Pour les faibles valeurs de ϕ l'énergie potentielle associée à la flexion de la molécule est notée

$$E_p = \frac{1}{2} C \phi^2, \text{ avec } C = 7,70 \times 10^{-19} \text{ J.}$$

I.2.1) Justifier qualitativement la forme de cette énergie potentielle.

I.2.2) On envisage un mode de déplacement particulier (figure 2), de faible amplitude, dans lequel :

- Le plan de la molécule est fixe (noté Gxy),
- L'atome de carbone reste sur la verticale Gy , avec un déplacement y_2 par rapport à la position d'équilibre (3 atomes alignés),
- Les deux atomes d'oxygène ont le même déplacement vertical y_1 et de petits déplacements horizontaux x_1 et x_3 . Ce type de mouvement est appelé **mode III** dans la suite.



a) Montrer que, pour de petits déplacements, on a au premier ordre en ϕ :

$$y_2 \left(1 + \frac{m_2}{2m_1} \right) = r_0 \frac{\phi}{2} \quad \text{et} \quad x_1 = x_3 = 0$$

b) Exprimer l'énergie cinétique de la molécule en fonction de $\frac{d\phi}{dx}$, m_1 , m_2 , et r_0 .

c) Déterminer littéralement puis numériquement la pulsation ω_3 des petites ϕ oscillations de autour de 0, dans ce mode de vibration.

I.3 - Interaction avec une onde électromagnétique

Les liaisons CO sont en réalité polarisées : chaque atome d'oxygène porte une charge $-\delta e$ et l'atome de carbone une charge $+2\delta e$ (e est la charge élémentaire et δ une constante positive inférieure à 1). On envoie sur la molécule alignée dans la direction \vec{e}_x et située dans le plan $z=0$ une onde électromagnétique incidente de pulsation Ω , également polarisée rectilignement dans la direction \vec{e}_x et se propageant dans la direction \vec{e}_z .

Le champ électrique de l'onde est : $\vec{E}(z, t) = E_0 \cos \left[\Omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \vec{e}_x$ où c représente la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$).

I.3.1) Sous l'effet de l'onde électromagnétique, les atomes se déplacent comme au question I.1). Justifier que l'on peut négliger la force magnétique agissant sur les atomes et établir le système d'équations vérifié par $x_1(t)$ et $x_3(t)$.

I.3.2) On résout ce système en régime sinusoïdal forcé, en utilisant la notation

complexe et en posant :

$$x_1 = A_1 \exp(j\Omega t), x_3 = A_3 \exp(j\Omega t)$$

Calculer A_1 et A_3 . Montrer l'existence d'une résonance pour une valeur particulière de Ω . Que valent A_1 et A_3 à la résonance ? Qu'en pensez-vous ?

→ I.3.3) On appelle $\vec{p}(t)$ le moment dipolaire résultant de la molécule. Exprimer $\vec{p}(t)$ en fonction de $\delta, e, E_0, \Omega, \omega_2, m_2, m_1$ et t .

On rappelle que le moment dipolaire d'une molécule est $\vec{p}(t) = \sum q_i \overrightarrow{GM_i}$

I.3.4) Absorption de l'onde incidente.

a) Un dipôle électrique oscillant à la pulsation Ω avec une amplitude p_0 émet un rayonnement qui transporte en moyenne une puissance :

$$P = \frac{\mu_0 \Omega^4 p_0^2}{12\pi c} \quad \text{ou } \mu_0 \text{ est la perméabilité du vide}$$

Exprimer la puissance électromagnétique P émise par la molécule de CO_2 en fonction de $\delta, e, E_0, \Omega, \omega_2, \mu_0, c, m_2$ et m_1 .

b) Rappeler l'expression de l'intensité I_0 (valeur moyenne de $\frac{E \times B}{\mu_0}$) de l'onde incidente (puissance moyenne transportée à travers une unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation), en fonction de E_0, c, μ_0 . Montrer que l'on peut écrire P sous la forme $P = \eta I_0$. Exprimer η en fonction de $\delta, e, \Omega, \omega_2, \mu_0, m_2$ et m_1 .

c) On suppose maintenant que le milieu contient n molécules par unité de volume, dont le tiers, statistiquement, est dans l'orientation considérée jusqu'ici. L'énergie rayonnée par les molécules est prélevée de l'onde incidente, qui voit donc son intensité $I(z)$ diminuer avec z .

Montrer que $I(z)$ varie selon une loi $I(z) = I(0) \exp(-\frac{z}{l})$, et exprimer l (longueur de pénétration de l'onde) en fonction de η et n . Vérifier l'homogénéité de cette expression. En déduire que l'onde est très fortement absorbée lorsque $\Omega \rightarrow \omega_2$.

d) À partir de l'analyse précédente, expliquer qualitativement pourquoi on observe également une absorption importante de l'onde électromagnétique incidente lorsque $\Omega \rightarrow \omega_3$, mais aucune lorsque $\Omega \rightarrow \omega_1$. Calculer numériquement les longueurs d'ondes dans le vide λ_2 et λ_3 des rayonnements électromagnétiques correspondant aux pulsations ω_2 et ω_3 . À quel domaine du spectre

électromagnétique appartiennent-elles ?

Partie II : Transport du CO₂ industriel au fond des océans par torpilles de CO₂ solides

Un des moyens de se débarrasser du CO₂ industriel consiste à le stocker au fond des mers. Parmi les technologies possibles, l'idée suivante a été proposée :

- A l'aide d'installations frigorifiques situées sur des plates-formes marines, on solidifie le CO₂ (issu d'un processus industriel) en le moulant sous forme de très grandes torpilles.
- Ces torpilles sont abandonnées depuis la surface de la mer et tombent au fond, où elles vont se ficher dans les sédiments. Le CO₂ reste ainsi piégé au fond des océans. Un des problèmes posés par ce schéma est la perte de masse des torpilles par changement de phase au cours de leur chute. Le CO₂ ainsi libéré est susceptible de retourner à l'atmosphère, et doit donc être minimisé. Nous nous proposons d'évaluer cette perte de masse afin de juger de la viabilité du processus. Nous admettons que l'océan est un fluide au repos, incompressible homogène et uniforme de masse volumique $\rho_0 = 1030 \text{ kg.m}^{-3}$, de température T_0 également uniforme ($T_0 = 280\text{K}$). L'accélération de la pesanteur, g , vaut $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$. Le CO₂ solide a une masse volumique $\rho = 1500 \text{ kg.m}^{-3}$, supposée indépendante de la température et de la pression. Le diagramme de phase simplifié du CO₂ est donné sur la figure 5. On appelle O_z la verticale descendante, orientée par le unitaire \vec{e}_z . La cote $z=0$ correspond à la surface de l'océan (où il règne une pression $P_0=1\text{bar}$) ; le fond est à la profondeur $z=H=4000\text{m}$.

II.1) Changements de phase en surface des torpilles.

La pression dans l'océan est obtenue par intégration de la loi de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{\text{grad}}P = \rho_0 \vec{g} \Rightarrow P = P_0 + \rho_0 g z$$

On peut utiliser cette formule ci-dessus tout au long de cette partie.

En vous appuyant sur le diagramme de phase, montrer que le CO₂ en surface de la torpille est susceptible de se sublimer jusqu'à une profondeur Z_S et de subir une fusion au-delà. Calculer numériquement Z_S .

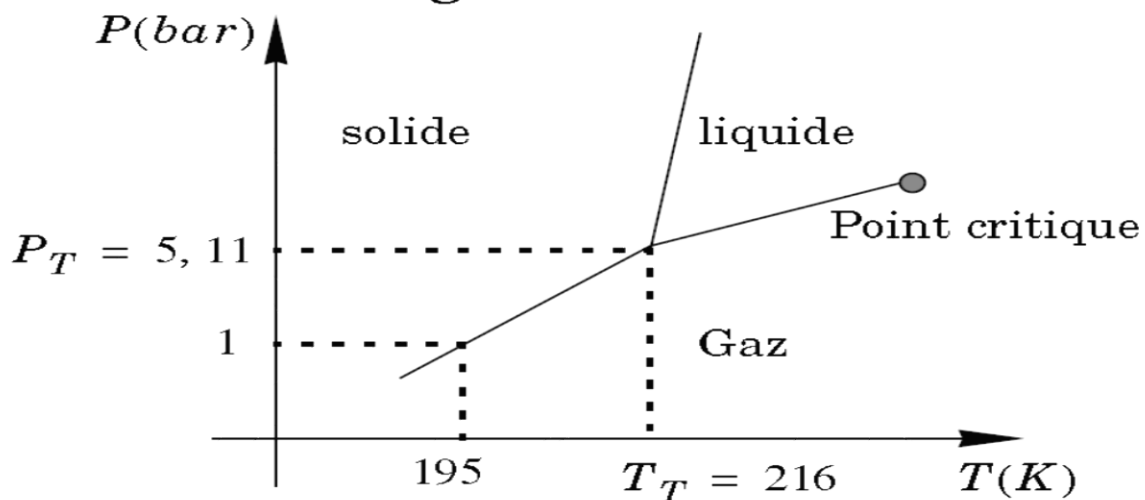
Figure 5

Diagramme de phase du CO_2 .

Point triple : $P_T = 5,11 \text{ bar}$; $T_T = 216 \text{ K}$;

Température de sublimation à 1 bar : $T_S = 195 \text{ K}$

II.2 - Étude dynamique de la torpille

Du fait des changements de phase se produisant à sa surface, la masse $M(t)$ de la torpille varie au cours du temps ; on admet pour simplifier que la matière ainsi perdue à une vitesse nulle relativement au référentiel terrestre (supposé galiléen). On note $V(t)$ la vitesse verticale (descendante). En plus de son poids $M(t)\vec{g}$, la torpille est soumise à la force d'Archimède \vec{F}_a et à une force de frottement de la forme : $\vec{F} = -\alpha_f r^2 V \vec{e}_z$, où α_f est une constante, à peu près indépendante des dimensions de la torpille ($\alpha_f = 1,0 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \text{ m}^{-2}$)

II.2.1) En raisonnant sur la quantité de mouvement d'une même quantité de matière à l'instant t et à l'instant $t + dt$, établir l'équation du mouvement :

$$\frac{dM\vec{V}}{dt} = M\vec{g} + \vec{F}_a + \vec{F}$$

On remarquera que la masse de la torpille varie au cours du temps.

II.2.2) En déduire que $r(t)$ et $V(t)$ sont liés par une équation différentielle du type :

$$\frac{dV}{dt} + \left(\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) V = \beta g$$

dans laquelle τ et β sont des constantes que l'on exprimera en fonction de ρ , ρ_0 , α_f , h .

Indication : On admettra que la masse de la torpille est proportionnelle au carré du rayon.

II.2.3) La résolution du système d'équations obtenu nécessite l'emploi de méthodes numériques. Celles-ci montrent que, pour les dimensions envisagées, on a : $\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \ll \frac{1}{\tau}$, hypothèse que l'on supposera vérifiée dans toute la suite.

a) Déterminer la vitesse de la torpille (abandonnée sans vitesse initiale) en fonction du temps. Montrer qu'elle finit par atteindre une valeur limite V_l . Pouvait-on physiquement déterminer cette valeur limite ? Interpréter τ physiquement.

b) Calculer τ et V_l numériquement.

II.3 - Évaluation de la perte de masse

II.3.1) Calculer numériquement le temps t_c mis par la torpille pour toucher le fond (situé à 4000m).

II.3.2) On montre que la phase de sublimation dure $t_s = 5,5$ s. Calculer numériquement le rayon final de la torpille alors qu'elle arrive au fond de l'océan et sa perte relative de masse au cours de la chute.

Que pensez-vous de ce moyen de se débarrasser du dioxyde de carbone ?

Notation

Fonctions complexes :

Pour une fonction $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

On notera $\bar{x} = X_m e^{i(\omega t + \varphi)} = X_m e^{i\omega t} e^{i\varphi} = \bar{X}_m e^{i\varphi}$

$\bar{X}_m = X_m e^{i\omega t} = X_m e^{i\omega t}$ avec $i^2 = -1$ (\bar{X}_m représente l'amplitude complexe de X).

On a donc $X_m = |\bar{X}_m|$ et $\varphi = \arg(\bar{X}_m)$

Qui cherche trouve. N'abandonnez point ! Bonne Chance !!