Equations différentielles linéaires

Dr. Abdoul Aziz FALL

UFR Sciences Appliquées et Technologie de l'Information et de la Communication
Université Alioune Diop de Bambey

20 juin 2016

Introduction

L'objet de ce chapitre est de donner des outils pour résoudre des équations différentielles du premier et du second ordre..

Introduction

L'objet de ce chapitre est de donner des outils pour résoudre des équations différentielles du premier et du second ordre..
Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Introduction

L'objet de ce chapitre est de donner des outils pour résoudre des équations différentielles du premier et du second ordre..

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Le symbole $\mathbb{K}$ représentera indifféremment le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps C des complexes.

Plan

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition

Soient a, b, c trois fonctions définies sur I et à valeurs dans K.

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition

Soient a, b, c trois fonctions définies sur I et à valeurs dans K. –
On appelle équation différentielle du premier ordre une équation différentielle de la forme

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition

Soient a, b, c trois fonctions définies sur I et à valeurs dans K. – On appelle équation différentielle du premier ordre une équation différentielle de la forme

$$\forall t \in I, a(t)y^{'}(t) + b(t)y(t) = c(t) \quad (E)$$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition

Soient a, b, c *trois fonctions définies sur* I *et à valeurs dans* K*.* –
On appelle équation différentielle du premier ordre une équation différentielle de la forme

$$\forall t \in I, a(t)y^{'}(t) + b(t)y(t) = c(t) \ \ (E)$$

– Une solution de cette équation différentielle est une fonction f dérivable sur I*, à valeurs dans* K *et vérifiant :*

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition

*Soient a, b, c trois fonctions définies sur I et à valeurs dans K. –
On appelle équation différentielle du premier ordre une équation différentielle de la forme*

$$\forall t \in I, a(t)y^{'}(t) + b(t)y(t) = c(t) \quad (E)$$

– Une solution de cette équation différentielle est une fonction f dérivable sur I, à valeurs dans K et vérifiant :

$$\forall t \in I, a(t)f^{'}(t) + b(t)f(t) = c(t)$$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition

Soient a, b, c trois fonctions définies sur I et à valeurs dans K. – On appelle équation différentielle du premier ordre une équation différentielle de la forme

$$\forall t \in I, a(t)y^{'}(t) + b(t)y(t) = c(t) \;\; (E)$$

– Une solution de cette équation différentielle est une fonction f dérivable sur I, à valeurs dans K et vérifiant :

$$\forall t \in I, a(t)f^{'}(t) + b(t)f(t) = c(t)$$

– Résoudre, ou intégrer l'équation différentielle (E) revient à déterminer l'ensemble des fonctions qui sont solutions de (E). On notera $S_K(E)$ cet ensemble.

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Proposition (L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène est un $K-$espace vectoriel)

Soit l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$\forall t \in I, a(t)y^{'}(t) + b(t)y(t) = c(t) \quad (E)$$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Proposition (L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène est un $K-$espace vectoriel)

Soit l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$\forall t \in I, a(t)y^{'}(t) + b(t)y(t) = c(t) \ \ (E)$$

Alors toute combinaison linéaire de solutions de (E) est encore solution de (E).

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Proposition (L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène est un $K-$espace vectoriel)

Soit l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$\forall t \in I, a(t)y^{'}(t) + b(t)y(t) = c(t) \ \ (E)$$

Alors toute combinaison linéaire de solutions de (E) est encore solution de (E).
Autrement dit, si ϕ et ψ sont des solutions de (E) alors, pour tout couple de scalaires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la fonction $\alpha\phi + \beta\psi$ encore solution de E.

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Proposition (L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène est un $K-$espace vectoriel)

Soit l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$\forall t \in I, a(t)y^{'}(t) + b(t)y(t) = c(t) \quad (E)$$

Alors toute combinaison linéaire de solutions de (E) est encore solution de (E).
Autrement dit, si ϕ et ψ sont des solutions de (E) alors, pour tout couple de scalaires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la fonction $\alpha\phi + \beta\psi$ encore solution de E.
On dit que $S_K(E)$ possède une structure d'espace vectoriel sur K.

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition (Condition initiale)

Soit $(t_0, y_0) \in I \times K$. *On dit que la solution* ϕ *de* (E) *vérifie la condition initiale* (t_0, y_0) *si et seulement si* $\phi(t_0) = y_0$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition (Condition initiale)

Soit $(t_0, y_0) \in I \times K$. *On dit que la solution* ϕ *de* (E) *vérifie la condition initiale* (t_0, y_0) *si et seulement si* $\phi(t_0) = y_0$

Définition (Problème de Cauchy)

On appelle **problème de Cauchy** *la recherche d'une solution* $y : I \to K$ *d'une équation différentielle* (E) *vérifiant une condition initiale* $(t_0, y_0) \in I \times K$*.fixée.*

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Théorème (Fondamental : résolution de l'équation différentielle homogène normalisée)

On suppose que :

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Théorème (Fondamental : résolution de l'équation différentielle homogène normalisée)

On suppose que :

1. I *est un intervalle de* R.

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Théorème (Fondamental : résolution de l'équation différentielle homogène normalisée)

On suppose que :

1. I *est un intervalle de* R.
2. a *est une fonction continue définie sur* I *et à valeurs dans* K.

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Théorème (Fondamental : résolution de l'équation différentielle homogène normalisée)

On suppose que :

1. I *est un intervalle de* R.
2. a *est une fonction continue définie sur* I *et à valeurs dans* K.

Alors les solutions de l'équation différentielle **homogène normalisée** *:*

$$\forall t \in I, y^{'}(t) + a(t)y(t) = 0 \quad (E)$$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Théorème (Fondamental : résolution de l'équation différentielle homogène normalisée)

On suppose que :

1. I *est un intervalle de* R.
2. a *est une fonction continue définie sur* I *et à valeurs dans* K.

Alors les solutions de l'équation différentielle **homogène normalisée** *:*

$$\forall t \in I, y^{'}(t) + a(t)y(t) = 0 \quad (E)$$

sont données par les fonctions

$$\phi(t) = \left\{ \begin{array}{c} I \to \mathbb{R} \\ t \to \alpha e^{-A(t)} \end{array} \right.$$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Théorème (Fondamental : résolution de l'équation différentielle homogène normalisée)

On suppose que :

1. I *est un intervalle de* R.
2. a *est une fonction continue définie sur* I *et à valeurs dans* K.

Alors les solutions de l'équation différentielle **homogène normalisée** *:*

$$\forall t \in I, y^{'}(t) + a(t)y(t) = 0 \quad (E)$$

sont données par les fonctions

$$\phi(t) = \left\{ \begin{array}{c} I \to \mathbb{R} \\ t \to \alpha e^{-A(t)} \end{array} \right. \quad \text{où } \alpha \in K$$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Théorème (Fondamental : résolution de l'équation différentielle homogène normalisée)

On suppose que :

1. I *est un intervalle de* R.
2. a *est une fonction continue définie sur* I *et à valeurs dans* K.

Alors les solutions de l'équation différentielle **homogène normalisée** *:*

$$\forall t \in I, y^{'}(t) + a(t)y(t) = 0 \quad (E)$$

sont données par les fonctions

$\phi(t) = \left\{ \begin{array}{c} I \to \mathbb{R} \\ t \to \alpha e^{-A(t)} \end{array} \right.$ où $\alpha \in K$ et où A *est une primitive de* a *sur* I

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Théorème (Fondamental : résolution de l'équation différentielle homogène normalisée)

On suppose que :

1. I *est un intervalle de* R.
2. a *est une fonction continue définie sur* I *et à valeurs dans* K.

Alors les solutions de l'équation différentielle **homogène normalisée** *:*

$$\forall t \in I, y^{'}(t) + a(t)y(t) = 0 \quad (E)$$

sont données par les fonctions

$\phi(t) = \{ \begin{array}{c} I \to \mathbb{R} \\ t \to \alpha e^{-A(t)} \end{array}$ où $\alpha \in K$ et où A *est une primitive de* a *sur* I

$$\mathbf{S_K(E)} = \left\{\mathbf{t} \to \alpha \mathbf{e}^{-\mathbf{A(t)}} \middle| \ \mathbf{t} \in \mathbf{K}\right\}$$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Exemple : Résoudre l'équation (E) suivante :

$$y^{'}(t) - 2ty(t) = 0$$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Exemple : Résoudre l'équation (E) suivante :

$$y^{'}(t) - 2ty(t) = 0$$

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre et normalisée.

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Exemple : Résoudre l'équation (E) suivante :

$$y^{'}(t) - 2ty(t) = 0$$

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre et normalisée.
La fonction $a(t) = -2t$ possède des primitives sur $\mathbb{R}$.

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Exemple : Résoudre l'équation (E) suivante :

$$y^{'}(t) - 2ty(t) = 0$$

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre et normalisée.
La fonction $a(t) = -2t$ possède des primitives sur $\mathbb{R}$. Une d'entre elles est donnée par $A(t) = -t^2$.

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Exemple : Résoudre l'équation (E) suivante :

$$y^{'}(t) - 2ty(t) = 0$$

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre et normalisée.
La fonction $a(t) = -2t$ possède des primitives sur $\mathbb{R}$. Une d'entre elles est donnée par $A(t) = -t^2$.
Par application du théorème précédent, les solutions de (E) sont les fonctions $\phi(t)$:

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Exemple : Résoudre l'équation (E) suivante :

$$y^{'}(t) - 2ty(t) = 0$$

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre et normalisée.
La fonction $a(t) = -2t$ possède des primitives sur $\mathbb{R}$. Une d'entre elles est donnée par $A(t) = -t^2$.
Par application du théorème précédent, les solutions de (E) sont les fonctions $\phi(t)$:

$$\phi(t) = \alpha e^{t^2} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Proposition

Soient I un intervalle et a une fonction continue définie sur I, $t_0 \in I$, $y_0 \in K$. Alors il existe une et une seule solution du problème de Cauchy l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \;\; y^{'}(t) + a(t)y(t) = 0 \quad (E)$$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Proposition

Soient I un intervalle et a une fonction continue définie sur I, $t_0 \in I$, $y_0 \in K$. Alors il existe une et une seule solution du problème de Cauchy l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \ y^{'}(t) + a(t)y(t) = 0 \quad (E)$$

vérifiant la condition initiale (t_0, y_0) (c'est à dire telle que $y(t_0) = y_0$)

Plan

équation différentielle normalisée avec second membre

Proposition

Considérons l'équation différentielle : $y^{'}(t) + a(t)y(t) = b(t)$

équation différentielle normalisée avec second membre

Proposition

Considérons l'équation différentielle : $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$
On suppose que :

équation différentielle normalisée avec second membre

Proposition

Considérons l'équation différentielle : $y^{'}(t) + a(t)y(t) = b(t)$
On suppose que :

1. I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$

équation différentielle normalisée avec second membre

Proposition

Considérons l'équation différentielle : $y^{'}(t) + a(t)y(t) = b(t)$
On suppose que :

1. I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$
2. a *et* b *sont des fonctions continues sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.

équation différentielle normalisée avec second membre

Proposition

Considérons l'équation différentielle : $y^{'}(t) + a(t)y(t) = b(t)$
On suppose que :

1. I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$
2. a *et* b *sont des fonctions continues sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.
3. $\phi_0 : I \to \mathbb{R}$ *est une solution particulière de* (E).

équation différentielle normalisée avec second membre

Proposition

Considérons l'équation différentielle : $y^{'}(t) + a(t)y(t) = b(t)$
On suppose que :

1. I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$
2. a *et* b *sont des fonctions continues sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.
3. $\phi_0 : I \to \mathbb{R}$ *est une solution particulière de* (E).

alors les solutions de (E) *sont les fonctions de la forme* $\phi_0 + \phi$ *où* ϕ *est une solution de l'équation différentielle homogène associée :*

équation différentielle normalisée avec second membre

Proposition

Considérons l'équation différentielle : $y^{'}(t) + a(t)y(t) = b(t)$
On suppose que :

1. I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$
2. a *et* b *sont des fonctions continues sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.
3. $\phi_0 : I \to \mathbb{R}$ *est une solution particulière de* (E).

alors les solutions de (E) *sont les fonctions de la forme* $\phi_0 + \phi$ *où* ϕ *est une solution de l'équation différentielle homogène associée :*

$$\forall t \in I, y^{'}(t) + a(t)y(t) = 0 \quad (H)$$

équation différentielle normalisée avec second membre

Proposition

Considérons l'équation différentielle : $y^{'}(t) + a(t)y(t) = b(t)$
On suppose que :

1. I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$
2. a *et* b *sont des fonctions continues sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.
3. $\phi_0 : I \to \mathbb{R}$ *est une solution particulière de* (E).

alors les solutions de (E) *sont les fonctions de la forme* $\phi_0 + \phi$ *où* ϕ *est une solution de l'équation différentielle homogène associée :*

$$\forall t \in I, y^{'}(t) + a(t)y(t) = 0 \quad (H)$$

Autrement dit : toute solution de (E) *est somme d'une solution* ϕ *de l'équation homogène (H) associée à (E) et d'une solution particulière* ϕ_0 *de (E)*

équation différentielle normalisée avec second membre

Proposition (suite)

$$S_K(E) = \{\phi_0 + \phi |\ \phi \in S_K(H)\} = \phi_0 + S_K(H)$$

équation différentielle normalisée avec second membre

Proposition (suite)

$$S_K(E) = \{\phi_0 + \phi |\ \phi \in S_K(H)\} = \phi_0 + S_K(H)$$

Exemple (suite)

Résoudre l'équation différentielle avec second membre :

$$y^{'}(t) + ty(t) = t$$

équation différentielle normalisée avec second membre

Proposition (suite)

$$S_K(E) = \{\phi_0 + \phi| \ \phi \in S_K(H)\} = \phi_0 + S_K(H)$$

Exemple (suite)

Résoudre l'équation différentielle avec second membre :

$$y^{'}(t) + ty(t) = t$$

Preuve

Par application du théorème 1 les solutions de l'équation homogène :

équation différentielle normalisée avec second membre

Proposition (suite)

$$S_K(E) = \{\phi_0 + \phi | \ \phi \in S_K(H)\} = \phi_0 + S_K(H)$$

Exemple (suite)

Résoudre l'équation différentielle avec second membre :

$$y'(t) + ty(t) = t$$

Preuve

Par application du théorème 1 les solutions de l'équation homogène : $y'(t) + ty(t) = 0$ sont les fonctions

équation différentielle normalisée avec second membre

Proposition (suite)

$$S_K(E) = \{\phi_0 + \phi |\ \phi \in S_K(H)\} = \phi_0 + S_K(H)$$

Exemple (suite)

Résoudre l'équation différentielle avec second membre :

$$y^{'}(t) + ty(t) = t$$

Preuve

Par application du théorème 1 les solutions de l'équation homogène : $y^{'}(t) + ty(t) = 0$ sont les fonctions

$$\phi_\alpha(t) = \alpha e^{-\dfrac{t^2}{2}} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

équation différentielle normalisée avec second membre

Proposition (suite)

$$S_K(E) = \{\phi_0 + \phi |\ \phi \in S_K(H)\} = \phi_0 + S_K(H)$$

Exemple (suite)

Résoudre l'équation différentielle avec second membre :

$$y^{'}(t) + ty(t) = t$$

Preuve

Par application du théorème 1 les solutions de l'équation homogène : $y^{'}(t) + ty(t) = 0$ sont les fonctions

$$\phi_\alpha(t) = \alpha e^{-\dfrac{t^2}{2}} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Une solution évidente de (E) est la fonction constante $\phi(t) = 1$

équation différentielle normalisée avec second membre

D'après le théorème précédent, les solutions de (E) sont les fonctions

$$\phi(t) = 1 + \alpha e^{-\dfrac{t^2}{2}}$$

Plan

Détermination de solutions particulières

Proposition

Soient a, b, b_1, b_2 *quatre fonctions définies et continues sur I telles que* $b = b_1 + b_2$

Détermination de solutions particulières

Proposition

Soient a, b, b_1, b_2 *quatre fonctions définies et continues sur I telles que* $b = b_1 + b_2$

On considère les équations différentielles :

$$y^{'}(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad \textit{(E)}$$

Détermination de solutions particulières

Proposition

Soient a, b, b_1, b_2 *quatre fonctions définies et continues sur I telles que* $b = b_1 + b_2$
On considère les équations différentielles :

$$y^{'}(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad \textit{(E)}$$
$$y^{'}(t) + a(t)y(t) = b_1(t) \quad \textit{(E1)}$$

Détermination de solutions particulières

Proposition

Soient a, b, b_1, b_2 *quatre fonctions définies et continues sur I telles que* $b = b_1 + b_2$
On considère les équations différentielles :

$$y^{'}(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad \textit{(E)}$$
$$y^{'}(t) + a(t)y(t) = b_1(t) \quad \textit{(E1)}$$
$$y^{'}(t) + a(t)y(t) = b_2(t) \quad \textit{(E2)}$$

Détermination de solutions particulières

Proposition

Soient a, b, b_1, b_2 quatre fonctions définies et continues sur I telles que $b = b_1 + b_2$
On considère les équations différentielles :

$$y^{'}(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad \textit{(E)}$$
$$y^{'}(t) + a(t)y(t) = b_1(t) \quad \textit{(E1)}$$
$$y^{'}(t) + a(t)y(t) = b_2(t) \quad \textit{(E2)}$$

Si y_1 et y_2 sont des solutions particulières respectivement de $(E1)$ et $(E2)$ alors $y = y_1 + y_2$ est une solution particulière

Détermination de solutions particulières

Proposition

Soient a, b, b_1, b_2 *quatre fonctions définies et continues sur I telles que* $b = b_1 + b_2$
On considère les équations différentielles :

$$\begin{aligned} y^{'}(t) + a(t)y(t) &= b(t) \quad \textit{(E)} \\ y^{'}(t) + a(t)y(t) &= b_1(t) \quad \textit{(E1)} \\ y^{'}(t) + a(t)y(t) &= b_2(t) \quad \textit{(E2)} \end{aligned}$$

Si y_1 *et* y_2 *sont des solutions particulières respectivement de* $(E1)$ *et* $(E2)$ *alors* $y = y_1 + y_2$ *est une solution particulière*

Détermination de solutions particulières

Proposition (1ere cas)

Soient $\alpha \in K$ *et* P *un polynôme de degré* n *à coefficients dans* K*.*
L'équation

$$y^{'}(t) + \alpha y(t) = P(t)$$

Détermination de solutions particulières

Proposition (1ere cas)

Soient $\alpha \in K$ et P un polynôme de degré n à coefficients dans K. L'équation

$$y^{'}(t) + \alpha y(t) = P(t)$$

admet comme solution particulière :

1. *Un polynôme de degré $n+1$ si $\alpha = 0$.*

Détermination de solutions particulières

Proposition (1ere cas)

Soient $\alpha \in K$ et P un polynôme de degré n à coefficients dans K. L'équation

$$y^{'}(t) + \alpha y(t) = P(t)$$

admet comme solution particulière :

1. *Un polynôme de degré $n+1$ si $\alpha = 0$.*
2. *Un polynôme de degré n sinon.*

Détermination de solutions particulières

Proposition (1ere cas)

Soient $\alpha \in K$ et P un polynôme de degré n à coefficients dans K. L'équation

$$y^{'}(t) + \alpha y(t) = P(t)$$

admet comme solution particulière :

1. *Un polynôme de degré $n+1$ si $\alpha = 0$.*
2. *Un polynôme de degré n sinon.*

Preuve

Détermination de solutions particulières

Proposition (2eme cas)

Soient P un polynôme de degré n à coefficients dans K, $m \in \mathbb{K}$ et α une fonction continue sur I. Soit L'équation

$$\forall\ t \in I,\ \ y^{'}(t) + \alpha y(t) = P(t)e^{mt}$$

Détermination de solutions particulières

Proposition (2eme cas)

Soient P un polynôme de degré n à coefficients dans K, $m \in \mathbb{K}$ et α une fonction continue sur I. Soit L'équation

$$\forall\ t \in I,\ \ y^{'}(t) + \alpha y(t) = P(t)e^{mt}$$

admet comme solution particulière de la forme $Q(t)e^{mt}$:

Détermination de solutions particulières

Proposition (2eme cas)

Soient P un polynôme de degré n à coefficients dans K, $m \in \mathbb{K}$ et α une fonction continue sur I. Soit L'équation

$$\forall\ t \in I,\ y^{'}(t) + \alpha y(t) = P(t)e^{mt}$$

admet comme solution particulière de la forme $Q(t)e^{mt}$:

1. *Q est un polynôme de degré n si $\alpha + m \neq 0$.*

Détermination de solutions particulières

Proposition (2eme cas)

Soient P un polynôme de degré n à coefficients dans K, $m \in \mathbb{K}$ et α une fonction continue sur I. Soit L'équation

$$\forall\ t \in I,\ y^{'}(t) + \alpha y(t) = P(t)e^{mt}$$

admet comme solution particulière de la forme $Q(t)e^{mt}$:

1. *Q est un polynôme de degré n si $\alpha + m \neq 0$.*
2. *Q est un polynôme de degré $n+1$ si $\alpha + m = 0$.*

Détermination de solutions particulières

Proposition (2eme cas)

Soient P *un polynôme de degré* n *à coefficients dans* K, $m \in \mathbb{K}$ *et* α *une fonction continue sur* I. *Soit L'équation*

$$\forall\ t \in I,\ \ y^{'}(t) + \alpha y(t) = P(t)e^{mt}$$

admet comme solution particulière de la forme $Q(t)e^{mt}$ *:*

1. Q *est un polynôme de degré* n *si* $\alpha + m \neq 0$.
2. Q *est un polynôme de degré* $n+1$ *si* $\alpha + m = 0$.

Détermination de solutions particulières

Proposition (3eme cas)

Soient η_1, η_2, $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ *avec* $\omega \neq 0$. *L'équation*

$$\forall\ t \in I,\ \ y^{'}(t) + \alpha y(t) = \eta_1 cos(\omega t) + \eta_2 sin(\omega t)$$

Détermination de solutions particulières

Proposition (3eme cas)

Soient $\eta_1, \eta_2, \alpha, \omega \in \mathbb{R}$ avec $\omega \neq 0$. L'équation

$$\forall\ t \in I,\ \ y^{'}(t) + \alpha y(t) = \eta_1 cos(\omega t) + \eta_2 sin(\omega t)$$

admet une solution particulière sur I de la forme

$$y_1(t) = \mu_1 cos(\omega t) + \mu_2 sin(\omega t)\ \text{où}\ \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple Résoudre

$$\forall\ t \in I,\ \ y^{'}(t) + y(t) = 2e^t + 4sint + 3cost$$

Méthode de variation de la constante

Proposition (Méthode de la variation de la constante)

Soient a, b *deux fonctions continues définies sur* I *et à valeurs dans* $\mathbb{K}$*. Considérons l'équation différentielle*

$$\forall\ t \in I,\ \ y^{'}(t) + ay(t) = b(t)\ \ (E)$$

Méthode de variation de la constante

Proposition (Méthode de la variation de la constante)

Soient a, b deux fonctions continues définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Considérons l'équation différentielle

$$\forall\ t \in I,\ \ y^{'}(t) + ay(t) = b(t)\ \ (E)$$

Pour déterminer une solution particulière de (E)

Méthode de variation de la constante

Proposition (Méthode de la variation de la constante)

Soient a, b deux fonctions continues définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Considérons l'équation différentielle

$$\forall\, t \in I,\ \ y^{'}(t) + ay(t) = b(t)\ \ (E)$$

Pour déterminer une solution particulière de (E)

1. *On peut déterminer tout d'abord une solution non nulle de l'équation homogène associée à (E). Une telle solution est de la forme $ce^{-A(t)}$ où $A(t)$ est une primitive de a sur I où $c \in \mathbb{K}$*

Méthode de variation de la constante

Proposition (Méthode de la variation de la constante)

Soient a, b deux fonctions continues définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Considérons l'équation différentielle

$$\forall\ t \in I,\ \ y^{'}(t) + ay(t) = b(t)\ \ (E)$$

Pour déterminer une solution particulière de (E)

1. *On peut déterminer tout d'abord une solution non nulle de l'équation homogène associée à (E). Une telle solution est de la forme $ce^{-A(t)}$ où $A(t)$ est une primitive de a sur I où $c \in \mathbb{K}$*
2. *On cherche alors une solution particulière de (E) sous la forme : $\psi(t) = ce^{-A(t)}$ où c est une fonction dérivable sur I. On a l'équivalence suivante : ψ est solution de (E), c-a-d $c'(t)e^{-A(t)} = b(t)$*

Méthode de variation de la constante

Proposition (Méthode de la variation de la constante)

Soient a, b deux fonctions continues définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Considérons l'équation différentielle

$$\forall\ t \in I,\ \ y^{'}(t) + ay(t) = b(t)\ \ (E)$$

Pour déterminer une solution particulière de (E)

1. *On peut déterminer tout d'abord une solution non nulle de l'équation homogène associée à (E). Une telle solution est de la forme $ce^{-A(t)}$ où $A(t)$ est une primitive de a sur I où $c \in \mathbb{K}$*
2. *On cherche alors une solution particulière de (E) sous la forme : $\psi(t) = ce^{-A(t)}$ où c est une fonction dérivable sur I. On a l'équivalence suivante : ψ est solution de (E), c-a-d $c'(t)e^{-A(t)} = b(t)$*
3. *Le calcul de ψ est donc ramené à celui de c, c'est-à-dire à celui d'une primitive de be^{A} sur I.*

Méthode de variation de la constante

Corollaire (Méthode de la variation de la constante)

Soient a, b *deux fonctions continues définies sur* I, $t_0 \in I$ *et* $y_0 \in \mathbb{K}$. *Alors il existe une et une seule solution de l'équation différentielle*

$$\forall\ t \in I,\ y^{'}(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

Méthode de variation de la constante

Corollaire (Méthode de la variation de la constante)

Soient a, b *deux fonctions continues définies sur* I, $t_0 \in I$ *et* $y_0 \in \mathbb{K}$. *Alors il existe une et une seule solution de l'équation différentielle*

$$\forall\, t \in I,\ y^{'}(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

vérifiant la condition initiale (t_0, y_0) *(c'est à dire telle que* $y(t_0) = y_0$ *)*

Méthode de variation de la constante

Corollaire (Méthode de la variation de la constante)

Soient a, b deux fonctions continues définies sur I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une et une seule solution de l'équation différentielle

$$\forall\ t \in I,\ \ y^{'}(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

vérifiant la condition initiale (t_0, y_0) (c'est à dire telle que $y(t_0) = y_0$)

Exemple Résoudre

$$\forall\ t \in I,\ \ y^{'}(t) + 2ty(t) = e^{t-t^2}$$

Méthode de variation de la constante

Remarque (Cas Général)

Soient a, b et c trois fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soit J un sous intervalle de I sur lequel la focntion a ne s'annule pas. On considère l'équation

$$\forall\ t \in I,\ \ a(t)y^{'}(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

Méthode de variation de la constante

Remarque (Cas Général)

Soient a, b et c trois fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soit J un sous intervalle de I sur lequel la focntion a ne s'annule pas. On considère l'équation

$$\forall\, t \in I,\;\; a(t)y^{'}(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

Pour tout $t \in J$, on peut normaliser (E) en l'équation :

$$\forall\, t \in I,\;\; y^{'}(t) + \frac{b(t)}{a(t)}y(t) = \frac{c(t)}{a(t)}$$

et puis retourner au cas précédent.

Méthode de variation de la constante

Remarque (Cas Général)

Soient a, b et c trois fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soit J un sous intervalle de I sur lequel la focntion a ne s'annule pas. On considère l'équation

$$\forall\, t \in I,\; a(t)y^{'}(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

Pour tout $t \in J$, on peut normaliser (E) en l'équation :

$$\forall\, t \in I,\; y^{'}(t) + \frac{b(t)}{a(t)}y(t) = \frac{c(t)}{a(t)}$$

et puis retourner au cas précédent.

Exercice Résolvons sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle :
$\forall\, t \in I,\; (1-t)y^{'}(t) - y(t) = t$

Plan

Équations différentielles linéaires du second ordre

Définition

Considérons trois scalaires a, b, $c \in \mathbb{K}$ *avec* $a \neq 0$ *ainsi qu'une fonction* $d \in \mathbb{K}$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Définition

Considérons trois scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$ *avec* $a \neq 0$ *ainsi qu'une fonction* $d \in \mathbb{K}$

- *On appelle* *équation différentielle du second ordre* *une équation différentielle de la forme :*
  $\forall\ t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = d(t)\ \ (E)$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Définition

Considérons trois scalaires a, b, $c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ ainsi qu'une fonction $d \in \mathbb{K}$

- *On appelle équation différentielle du second ordre une équation différentielle de la forme :*
  $\forall\ t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = d(t)\ \ (E)$
- *Une solution de cette équation différentielle est une fonction f deux fois dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et vérifiant :*

$$\forall\ t \in I,\ af^{''}(t) + bf^{'}(t) + cf(t) = d(t)$$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Définition

Considérons trois scalaires a, b, $c \in \mathbb{K}$ *avec* $a \neq 0$ *ainsi qu'une fonction* $d \in \mathbb{K}$

- *On appelle équation différentielle du second ordre une équation différentielle de la forme :*
  $\forall\ t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = d(t)\ \ (E)$
- *Une solution de cette équation différentielle est une fonction* f *deux fois dérivable sur* I*, à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *et vérifiant :*

  $$\forall\ t \in I,\ af^{''}(t) + bf^{'}(t) + cf(t) = d(t)$$
- *Résoudre, ou intégrer l'équation différentielle* (E) *revient à déterminer l'ensemble des fonctions qui sont solutions de* (E)*. On notera* $S_{\mathbb{K}}(E)$ *cet ensemble.*

Équations différentielles linéaires du second ordre

Définition

Considérons trois scalaires $a,\ b,\ c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ ainsi qu'une fonction $d \in \mathbb{K}$

- *On appelle équation différentielle du second ordre une équation différentielle de la forme :*
  $\forall\ t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = d(t)\ \ (E)$
- *Une solution de cette équation différentielle est une fonction f deux fois dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et vérifiant :*

  $$\forall\ t \in I,\ af^{''}(t) + bf^{'}(t) + cf(t) = d(t)$$
- *Résoudre, ou intégrer l'équation différentielle (E) revient à déterminer l'ensemble des fonctions qui sont solutions de (E). On notera $S_{\mathbb{K}}(E)$ cet ensemble.*
- *Si la fonction d est identiquement nulle sur I , l'équation différentielle (E) est dite homogène ou sans second membre.*

Équations différentielles linéaires du second ordre

Remarque (combinaison linéaire)

Si l'équation différentielle linéaire du second ordre (E) *est homogène,*

Équations différentielles linéaires du second ordre

Remarque (combinaison linéaire)

Si l'équation différentielle linéaire du second ordre (E) *est homogène, on vérifie facilement (Exercice !) que toute combinaison linéaire de solutions de* (E) *est encore solution de* (E)*.*

Équations différentielles linéaires du second ordre

Remarque (combinaison linéaire)

Si l'équation différentielle linéaire du second ordre (E) est homogène, on vérifie facilement (Exercice !) que toute combinaison linéaire de solutions de (E) est encore solution de (E).
C'est-à-dire si ϕ et ψ sont éléments de $S_{\mathbb{K}}(E)$ alors il en est de même de $\alpha\phi + \beta\psi$ pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $S_{\mathbb{K}}(E)$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Remarque (combinaison linéaire)

Si l'équation différentielle linéaire du second ordre (E) *est homogène, on vérifie facilement (Exercice !) que toute combinaison linéaire de solutions de* (E) *est encore solution de* (E)*.*
C'est-à-dire si ϕ *et* ψ *sont éléments de* $S_{\mathbb{K}}(E)$ *alors il en est de même de* $\alpha\phi + \beta\psi$ *pour tout couple* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$*,* $S_{\mathbb{K}}(E)$ *possède une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$

Définition (Équation caractéristique)

L'équation complexe $aX^2 + bX + c$ *est appelée*

Équations différentielles linéaires du second ordre

Remarque (combinaison linéaire)

Si l'équation différentielle linéaire du second ordre (E) est homogène, on vérifie facilement (Exercice !) que toute combinaison linéaire de solutions de (E) est encore solution de (E).
C'est-à-dire si ϕ et ψ sont éléments de $S_{\mathbb{K}}(E)$ alors il en est de même de $\alpha\phi + \beta\psi$ pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $S_{\mathbb{K}}(E)$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

Définition (Équation caractéristique)

L'équation complexe $aX^2 + bX + c$ est appelée équation caractéristique de l'équation différentielle (E).

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exemple Déterminer les équations caractéristiques des équations différentielles (E) suivantes :

1. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 3y^{'}(t) + 2y(t) = e^t \ \ (E1)$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exemple Déterminer les équations caractéristiques des équations différentielles (E) suivantes :

1. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 3y^{'}(t) + 2y(t) = e^{t}\ \ (E1)$
2. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 4y^{'}(t) + 4y(t) = (t^2+1)e^{2t}\ \ (E2)$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exemple Déterminer les équations caractéristiques des équations différentielles (E) suivantes :

1. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 3y^{'}(t) + 2y(t) = e^t \ \ (E1)$
2. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 4y^{'}(t) + 4y(t) = (t^2 + 1)e^{2t} \ \ (E2)$
3. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) + 2y^{'}(t) + 5y(t) = cos^2 t \ \ (E3)$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exemple Déterminer les équations caractéristiques des équations différentielles (E) suivantes :

1. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 3y^{'}(t) + 2y(t) = e^{t}\ \ (E1)$
2. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 4y^{'}(t) + 4y(t) = (t^2+1)e^{2t}\ \ (E2)$
3. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) + 2y^{'}(t) + 5y(t) = cos^2 t\ \ (E3)$

Définition (Condition initiale)

Soit $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. *On dit que la solution* ϕ *de* (E) *vérifie la condition initiale* (t_0, y_0, y_1)

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exemple Déterminer les équations caractéristiques des équations différentielles (E) suivantes :

1. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 3y^{'}(t) + 2y(t) = e^{t}\ \ (E1)$
2. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 4y^{'}(t) + 4y(t) = (t^2+1)e^{2t}\ \ (E2)$
3. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) + 2y^{'}(t) + 5y(t) = cos^2 t\ \ (E3)$

Définition (Condition initiale)

Soit $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. On dit que la solution ϕ de (E) vérifie la condition initiale (t_0, y_0, y_1) si à la fois $\phi(t_0) = y_0$ et $\phi^{'}(t_0) = y_1$

Plan

Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorème

Considérons trois scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$ *avec* $a \neq 0$ *et*

Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorème

Considérons trois scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$ *avec* $a \neq 0$ *et* (E) *l'équation différentielle*

$$\forall\ t \in I,\ \ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = 0\ \ (E)$$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorème

Considérons trois scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall\ t \in I,\ \ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = 0\ \ (E)$$

Pour tout complexe r, la fonction $\phi(t) = e^{rt}$ est solution de (E)

Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorème

Considérons trois scalaires $a,\ b,\ c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall\ t \in I,\ \ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = 0\ \ (E)$$

Pour tout complexe r, la fonction $\phi(t) = e^{rt}$ est solution de (E) si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique associée à (E)

$$ar^2 + br + c = 0$$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorème (Résolution d'une équation du second degré à coefficients constants dans $\mathbb{C}$)

Considérons trois scalaires $a,\ b,\ c \in \mathbb{K}$ *avec* $a \neq 0$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorème (Résolution d'une équation du second degré à coefficients constants dans $\mathbb{C}$)

Considérons trois scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$ *avec* $a \neq 0$ *et* (E) *l'équation différentielle*

$$\forall\ t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = 0\ \ (E)$$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorème (Résolution d'une équation du second degré à coefficients constants dans $\mathbb{C}$)

Considérons trois scalaires $a,\ b,\ c \in \mathbb{K}$ *avec* $a \neq 0$ *et* (E) *l'équation différentielle*

$\forall\ t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = 0\ \ (E)$

Notons Δ *le discriminant de son équation caractéristique.*

Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorème (Résolution d'une équation du second degré à coefficients constants dans $\mathbb{C}$)

Considérons trois scalaires a, b, $c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle

$\forall\ t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = 0\ \ (E)$

Notons Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. *Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique de (E) possède deux racines distinctes r_1 et r_2 et les solutions de (E) sont les fonctions :*

$$\phi_{\alpha,\beta} = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorème (Résolution d'une équation du second degré à coefficients constants dans $\mathbb{C}$)

Considérons trois scalaires a, b, $c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle
$\forall\ t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = 0\ \ (E)$
Notons Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. *Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique de (E) possède deux racines distinctes r_1 et r_2 et les solutions de (E) sont les fonctions :*

$$\phi_{\alpha,\beta} = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique de (E) admet une racine double r et les solutions de (E) sont les fonctions :*

$$\phi_{\alpha,\beta} = (\alpha t + \beta)e^{rt}, \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exemple (Résolution d'une équation du second degré à coefficients constants dans $\mathbb{C}$)

Résoudre l'équation différentielle suivant

$$\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 2y^{'}(t) + y(t) = 0\ \ (E)$$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exemple (Résolution d'une équation du second degré à coefficients constants dans $\mathbb{C}$)

Résoudre l'équation différentielle suivant

$$\forall\, t \in I,\ y^{''}(t) - 2y^{'}(t) + y(t) = 0\ \ (E)$$

1. *L'équation caractéristique est :* $r^2 - 2r + 1 = 0$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exemple (Résolution d'une équation du second degré à coefficients constants dans $\mathbb{C}$)

Résoudre l'équation différentielle suivant

$$\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 2y^{'}(t) + y(t) = 0 \ \ (E)$$

1. *L'équation caractéristique est :* $r^2 - 2r + 1 = 0$ *la solution de l'equation caractéristique est la racine double* $r = 1$
2. *la nous somme alors dans le cas* $\Delta = 0$ *donc les solutions de* (E) *sont les fonctions :* $\phi_{\alpha,\beta} = (\alpha t + \beta)e^t$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Proposition

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ *avec* $a \neq 0$, $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. *Alors il existe une et une seule solution du problème de Cauchy l'équation différentielle*

$$\forall\ t \in I,\ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Proposition

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ *avec* $a \neq 0$, $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. *Alors il existe une et une seule solution du problème de Cauchy l'équation différentielle*

$$\forall\, t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = 0$$

Il existe une unique solution ϕ *de* (E) *vérifiant les conditions initiales* (t_0, y_0, y_1), *c'est à dire telle que à la fois* $\phi(t_0) = y_0$ *et* $\phi'(t_0) = y_1$

Plan

Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorème (Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$)

Considérons trois scalaires a, b, $c \in \mathbb{R}$ *avec* $a \neq 0$ *et* (E) *l'équation différentielle*

$$\forall\ t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = 0\ \ (E)$$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorème (Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$)

Considérons trois scalaires a, b, $c \in \mathbb{R}$ *avec* $a \neq 0$ *et* (E) *l'équation différentielle*

$$\forall\ t \in I,\ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \ \ (E)$$

Notons Δ *le discriminant de son équation caractéristique.*

Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorème (Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$)

Considérons trois scalaires a, b, $c \in \mathbb{R}$ *avec* $a \neq 0$ *et* (E) *l'équation différentielle*

$\forall\ t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = 0\ \ (E)$

Notons Δ *le discriminant de son équation caractéristique.*

1. *Si* $\Delta \geq 0$, *l'équation caractéristique de* (E) *possède deux racines distinctes* r_1 *et* r_2 *et les solutions de* (E) *sont les fonctions :* $\phi_{\alpha,\beta} = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorème (Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$)

Considérons trois scalaires a, b, $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle
$\forall\ t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = 0\ \ (E)$
Notons Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. *Si $\Delta \geq 0$, l'équation caractéristique de (E) possède deux racines distinctes r_1 et r_2 et les solutions de (E) sont les fonctions : $\phi_{\alpha,\beta} = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*
2. *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique de (E) admet une racine double r et les solutions réelles de (E) sont les fonctions : $\phi_{\alpha,\beta} = (\alpha t + \beta)e^{rt},\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorème (Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$)

Considérons trois scalaires a, b, $c \in \mathbb{R}$ *avec* $a \neq 0$ *et* (E) *l'équation différentielle*

$\forall\ t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = 0\ \ (E)$

Notons Δ *le discriminant de son équation caractéristique.*

1. *Si $\Delta \geq 0$, l'équation caractéristique de (E) possède deux racines distinctes r_1 et r_2 et les solutions de (E) sont les fonctions :* $\phi_{\alpha,\beta} = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique de (E) admet une racine double r et les solutions réelles de (E) sont les fonctions :* $\phi_{\alpha,\beta} = (\alpha t + \beta)e^{rt},\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3. *Si $\Delta \leq 0$, l'équation caractéristique de (E) admet deux racines complexes conjuguées $r + iw$ et $r - iw$ et les solutions réelles de (E) sont les fonctions :* $\phi_{\alpha,\beta} = [\alpha cos(wt) + \beta sin(wt)]e^{rt},\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exemple Résoudre les équations différentielles (E) suivantes :

1. $\forall\, t \in I,\; y^{''}(t) - 3y^{'}(t) + 2y(t) = 0 \;\; (E1)$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exemple Résoudre les équations différentielles (E) suivantes :

1. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 3y^{'}(t) + 2y(t) = 0\ \ (E1)$
2. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 4y^{'}(t) + 4y(t) = 0\ \ (E2)$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exemple Résoudre les équations différentielles (E) suivantes :

1. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 3y^{'}(t) + 2y(t) = 0\ \ (E1)$
2. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 4y^{'}(t) + 4y(t) = 0\ \ (E2)$
3. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) + 2y^{'}(t) + 5y(t) = 0\ \ (E3)$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exemple Résoudre les équations différentielles (E) suivantes :

1. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 3y^{'}(t) + 2y(t) = 0\ \ (E1)$
2. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 4y^{'}(t) + 4y(t) = 0\ \ (E2)$
3. $\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) + 2y^{'}(t) + 5y(t) = 0\ \ (E3)$

Plan

Équation différentielle du second ordre avec second membre

On considère dans toute la suite une équation différentielle du second ordre à coefficients complexes

$$\forall\ t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = d(t) \ \ (E)$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $d : I \to \mathbb{C}$. On admettra les résultats suivants :

Équation différentielle du second ordre avec second membre

On considère dans toute la suite une équation différentielle du second ordre à coefficients complexes

$$\forall\ t \in I,\ ay^{''}(t) + by^{'}(t) + cy(t) = d(t) \ \ (E)$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $d : I \to \mathbb{C}$. On admettra les résultats suivants :

Proposition

Toute solution de (E) est somme d'une solution de l'équation homogène associée à (E) et d'une solution particulière de (E).

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Résoudre l'équation différentielle suivant

$$\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 2y^{'}(t) + y(t) = te^{t}\ \ (E)$$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Résoudre l'équation différentielle suivant

$$\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 2y^{'}(t) + y(t) = te^{t}\ \ (E)$$

Une solution particulière sera de la forme :
$\phi_0 = t^2(at + b)e^t$

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Résoudre l'équation différentielle suivant

$$\forall\ t \in I,\ y^{''}(t) - 2y^{'}(t) + y(t) = te^{t}\ \ (E)$$

Une solution particulière sera de la forme :
$\phi_0 = t^2(at+b)e^t$
comme ϕ_0 est solution de (E),

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Résoudre l'équation différentielle suivant

$$\forall\, t \in I,\ y^{''}(t) - 2y^{'}(t) + y(t) = te^{t} \ \ (E)$$

Une solution particulière sera de la forme :
$\phi_0 = t^2(at+b)e^t$
comme ϕ_0 est solution de (E), on obtient $a = \frac{1}{6},\ b = 0$
la solution de l'equation (E) est donnée par la somme de la solution générale et de la solution particulière :

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Résoudre l'équation différentielle suivant

$$\forall\, t \in I,\ y^{''}(t) - 2y^{'}(t) + y(t) = te^{t}\ \ (E)$$

Une solution particulière sera de la forme :
$\phi_0 = t^2(at+b)e^t$
comme ϕ_0 est solution de (E), on obtient $a = \frac{1}{6},\ b = 0$
la solution de l'equation (E) est donnée par la somme de la solution générale et de la solution particulière :

$$\phi(t) = (At+B)e^t + \frac{1}{6}t^3e^t\ \ A, B \in \mathbb{R}$$

FIN

FIN de chapitre.....