Intégrale & Primitive

Dr. Abdoul Aziz FALL

UFR Sciences Appliquées et Technologie de l'Information et de la Communication
Université Alioune Diop de Bambey

22 mai 2016

Objectif

L'objectif de ce cours est d'introduire les concepts :

- la notion d'intégrale
- l'integrale de Riemann
- calcul de primitive

Introduction

Nous allons construire l'intégrale par un procédé de passage à la limite. D'abord on définit l'intégrale des fonctions en escaliers, ensuite on passe à la limite pour intégrer des fonctions plus générale.

Introduction

Nous allons construire l'intégrale par un procédé de passage à la limite. D'abord on définit l'intégrale des fonctions en escaliers, ensuite on passe à la limite pour intégrer des fonctions plus générale.

Définition

Intuitivement, nous pouvons définir l'intégrale d'une fonction $f(x)$ comme étant l'aire délimitée par la courbe $f(x)$ et l'axe des abscisses.

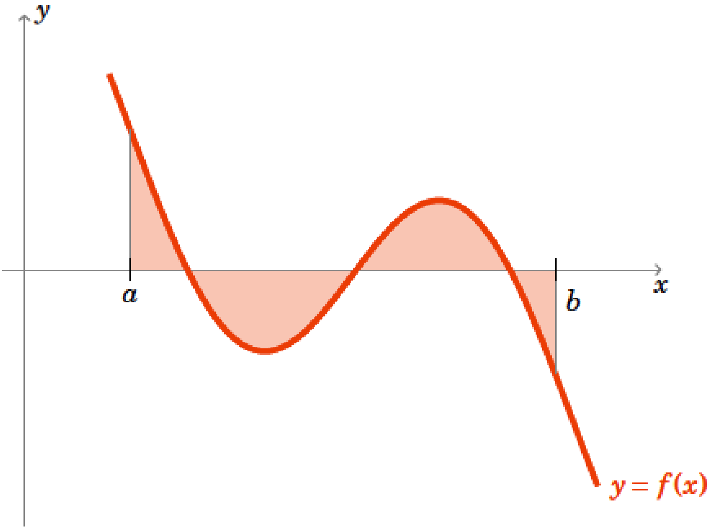
Introduction

Nous allons construire l'intégrale par un procédé de passage à la limite. D'abord on définit l'intégrale des fonctions en escaliers, ensuite on passe à la limite pour intégrer des fonctions plus générale.

Définition

Intuitivement, nous pouvons définir l'intégrale d'une fonction $f(x)$ *comme étant l'aire délimitée par la courbe* $f(x)$ *et l'axe des abscisses.*

Introduction

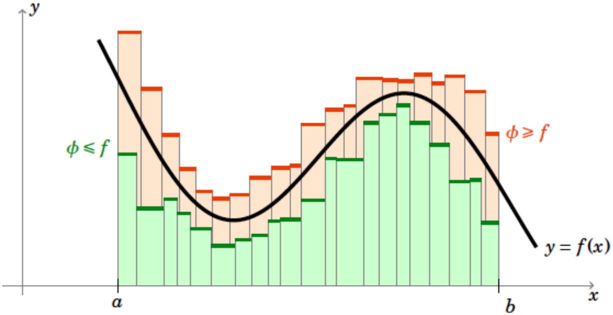


Introduction

Pour le calcul, nous allons utiliser deux approximations avec des sommes d'aires des rectangles situés sous la courbe et en dessus de la courbe.

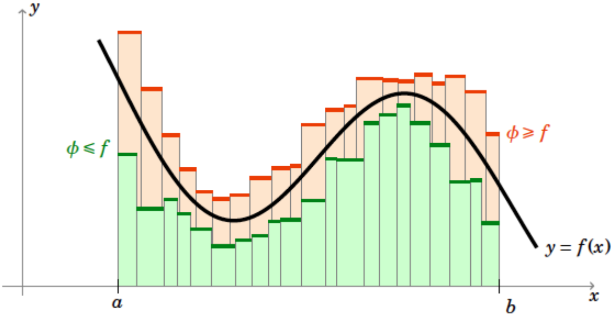
Introduction

Pour le calcul, nous allons utiliser deux approximations avec des sommes d'aires des rectangles situés sous la courbe et en dessus de la courbe.



Introduction

Pour le calcul, nous allons utiliser deux approximations avec des sommes d'aires des rectangles situés sous la courbe et en dessus de la courbe.



La limite commune de ces deux approximations va nous donner l'aire exacte qui se trouve entre l'axe des abscisses et la courbe $f(x)$ qui sera l'intégrale de la fonction $f(x)$ entre a et b.

Introduction

Cependant il n'est pas toujours vrai que ces limites soient égales, l'intégrale n'est donc définie que pour les fonctions intégrables. Dans la suite, nous verrons que si la fonction f est continue alors elle est intégrable.

Plan

Intégrale d'une fonction en escalier

Définition

Soit $[a, b]$ *un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. *On appelle une* *subdivision* *de* $[a, b]$ *une suite finie, strictement croissante, de nombres* $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *telle que* $x_0 = a$ *et* $x_n = b$. *Autrement dit* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Intégrale d'une fonction en escalier

Définition

Soit $[a, b]$ *un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$ *(*$-\infty < a < b < +\infty$*). On appelle une* *subdivision* *de* $[a, b]$ *une suite finie, strictement croissante, de nombres* $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *telle que* $x_0 = a$ *et* $x_n = b$*. Autrement dit* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$*.*

Définition

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est une* *fonction en escalier* *s'il existe une subdivision* $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *et des nombres réels* $c_1, \ldots, c_n$ *tels que pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *on ait*

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[\quad f(x) = c_i$$

Intégrale d'une fonction en escalier

Définition

Soit $[a, b]$ *un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$ *(*$-\infty < a < b < +\infty$*). On appelle une subdivision de* $[a, b]$ *une suite finie, strictement croissante, de nombres* $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *telle que* $x_0 = a$ *et* $x_n = b$*. Autrement dit* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$*.*

Définition

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction en escalier s'il existe une subdivision* $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *et des nombres réels* $c_1, \ldots, c_n$ *tels que pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *on ait*

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[\quad f(x) = c_i$$

Autrement dit f *est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.*

Intégrale d'une fonction en escalier

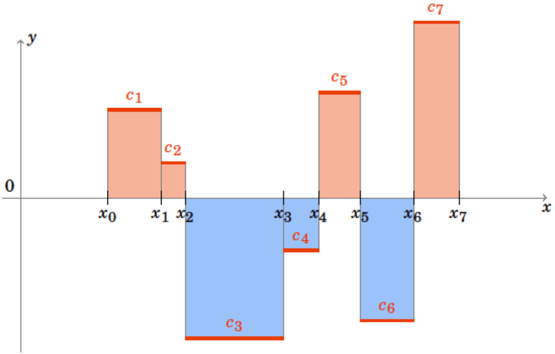
Remarque

La valeur de f aux points x_i de la subdivision n'est pas imposée. Elle peut être égale à celle de l'intervalle qui précède ou de celui qui suit, ou encore une autre valeur arbitraire. Cela n'a pas d'importance car l'aire ne changera pas.

Intégrale d'une fonction en escalier

Remarque

La valeur de f aux points x_i de la subdivision n'est pas imposée. Elle peut être égale à celle de l'intervalle qui précède ou de celui qui suit, ou encore une autre valeur arbitraire. Cela n'a pas d'importance car l'aire ne changera pas.



Intégrale d'une fonction en escalier

Définition

Pour une fonction en escalier comme ci-dessus, son intégrale est le réel $\int_a^b f(x)dx$ *défini par* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$

Intégrale d'une fonction en escalier

Définition

Pour une fonction en escalier comme ci-dessus, son intégrale est le réel $\int_a^b f(x)dx$ *défini par* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$

Remarque

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Intégrale d'une fonction en escalier

Définition

Pour une fonction en escalier comme ci-dessus, son intégrale est le réel $\int_a^b f(x)dx$ *défini par* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$

Remarque

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Remarque

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Intégrale d'une fonction en escalier

Remarque

- *Notez que chaque terme* $c_i(x_i - x_{i-1})$ *est l'aire du rectangle compris entre les abscisses* x_{i-1} *et* x_i *et de hauteur* c_i.

Intégrale d'une fonction en escalier

Remarque

- *Notez que chaque terme* $c_i(x_i - x_{i-1})$ *est l'aire du rectangle compris entre les abscisses* x_{i-1} *et* x_i *et de hauteur* c_i.
- *Il faut juste prendre garde que l'on compte l'aire avec un signe* $+$ *si* $c_i > 0$ *et un signe* $-$ *si* $c_i < 0$.

Intégrale d'une fonction en escalier

Remarque

- *Notez que chaque terme* $c_i(x_i - x_{i-1})$ *est l'aire du rectangle compris entre les abscisses* x_{i-1} *et* x_i *et de hauteur* c_i*.*
- *Il faut juste prendre garde que l'on compte l'aire avec un signe* $+$ *si* $c_i > 0$ *et un signe* $-$ *si* $c_i < 0$*.*
- *L'intégrale d'une fonction en escalier est l'aire de la partie située au-dessus de l'axe des abscisses (ici en rouge) moins l'aire de la partie située en-dessous (en bleu).*

Intégrale d'une fonction en escalier

Remarque

- *Notez que chaque terme* $c_i(x_i - x_{i-1})$ *est l'aire du rectangle compris entre les abscisses* x_{i-1} *et* x_i *et de hauteur* c_i.
- *Il faut juste prendre garde que l'on compte l'aire avec un signe* $+$ *si* $c_i > 0$ *et un signe* $-$ *si* $c_i < 0$.
- *L'intégrale d'une fonction en escalier est l'aire de la partie située au-dessus de l'axe des abscisses (ici en rouge) moins l'aire de la partie située en-dessous (en bleu).*
- *L'intégrale d'une fonction en escalier est bien un nombre réel qui mesure l'aire algébrique (c'est-à-dire avec signe) entre la courbe de* f *et l'axe des abscisses.*

Intégrale d'une fonction en escalier

Soient g et f deux fonctions en escaliers sur un intervalle I, et soient $a,\ b \in I$.

Intégrale d'une fonction en escalier

Soient g et f deux fonctions en escaliers sur un intervalle I, et soient $a,\ b \in I$.

Proposition (Linéarité)

Soit $a \leq b$ deux réels. Pour tout réel λ et μ nous avons :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Intégrale d'une fonction en escalier

Proposition (Positivité)

Soit $a \leq b$ *deux réels. Si* $g \leq f$ *alors*

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

Intégrale d'une fonction en escalier

Proposition (Positivité)

Soit $a \leq b$ *deux réels. Si* $g \leq f$ *alors*

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

Proposition (Relation de Chasles)

Soient $a < c < b$. *Et on a*

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^c g(x)dx + \int_c^b g(x)\,dx$$

Intégrale d'une fonction en escalier

Corollaire

Soient $a < c < b$. Et on a

$$|\int_a^b g(x)\ dx| \leq \int_a^b |g(x)| dx$$

Intégrale d'une fonction en escalier

Corollaire

Soient $a < c < b$. Et on a

$$|\int_a^b g(x)\ dx| \leq \int_a^b |g(x)|dx$$

Remarque

L'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a;b]$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'intégrale est une forme linéaire sur cet espace.

Intégrale de Riemann

Rappelons qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b] \quad -M \leq f(x) \leq M.$$

Intégrale de Riemann

Rappelons qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b] \quad -M \leq f(x) \leq M.$$

Rappelons aussi que si l'on a deux fonctions $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, alors on note $f \leq g \iff \forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$.

Intégrale de Riemann

Rappelons qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b] \quad -M \leq f(x) \leq M.$$

Rappelons aussi que si l'on a deux fonctions $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, alors on note $f \leq g \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq g(x)$.

Définition

On suppose à présent que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée quelconque. On définit deux nombres réels :

Intégrale de Riemann

Rappelons qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b] \quad -M \leq f(x) \leq M.$$

Rappelons aussi que si l'on a deux fonctions $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, alors on note $f \leq g \iff \forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$.

Définition

On suppose à présent que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée quelconque. On définit deux nombres réels :

$$I^-(f) = \sup \left\{ \int_a^b g(x)dx \mid g \text{ en escalier et } g \leq f \right\}$$

Intégrale de Riemann

Rappelons qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b] \quad -M \leq f(x) \leq M.$$

Rappelons aussi que si l'on a deux fonctions $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, alors on note $f \leq g \iff \forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$.

Définition

On suppose à présent que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée quelconque. On définit deux nombres réels :

$$I^-(f) = \sup\left\{\int_a^b g(x)dx \mid g \text{ en escalier et } g \leq f\right\}$$

$$I^+(f) = \inf\left\{\int_a^b g(x)dx \mid g \text{ en escalier et } g \geq f\right\}$$

Intégrale de Riemann

Remarque

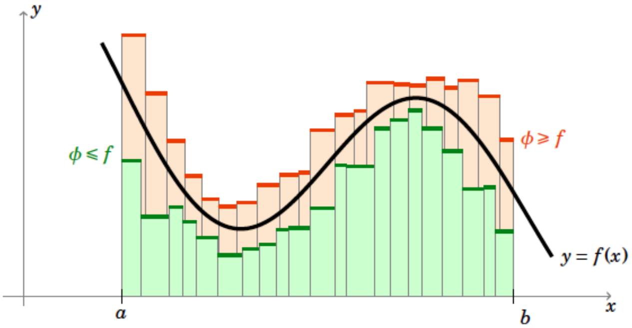
1. *Pour $I^-(f)$, on prend toutes les fonctions en escalier (avec toutes les subdivisions possibles) qui restent inférieures à f. On prend l'aire la plus grande parmi toutes ces fonctions en escalier, comme on n'est pas sûr que ce maximum existe on prend la borne supérieure.*

Intégrale de Riemann

Remarque

1. *Pour $I^{-}(f)$, on prend toutes les fonctions en escalier (avec toutes les subdivisions possibles) qui restent inférieures à f. On prend l'aire la plus grande parmi toutes ces fonctions en escalier, comme on n'est pas sûr que ce maximum existe on prend la borne supérieure.*
2. *Pour $I^{+}(f)$ c'est le même principe mais les fonctions en escalier sont supérieures à f et on cherche l'aire la plus petite possible.*

Intégrale de Riemann



Intégrale de Riemann

Proposition

Nous avons naturellement à partir des définitions la relation suivante :

$$I^-(f) \leq I^+(f)$$

Intégrale de Riemann

Proposition

Nous avons naturellement à partir des définitions la relation suivante :

$$I^-(f) \leq I^+(f)$$

Définition

Une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann si $I^-(f) = I^+(f)$. On appelle alors ce nombre l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ et on le note $\int_a^b f(x)dx$.

Intégrale de Riemann

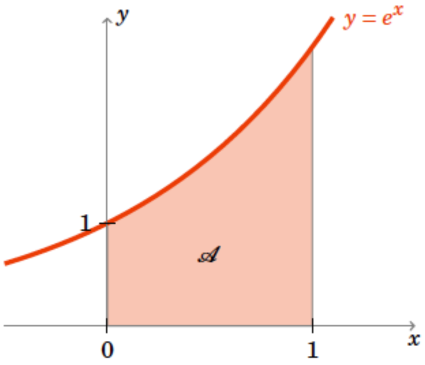
Exemple

Considérons la fonction exponentielle $f(x) = e^x$*. On souhaite calculer l'aire* $\mathcal{A}$ *en-dessous du graphe de* f *et entre les droites d'équation* $(x = 0)$*,* $(x = 1)$ *et l'axe* (Ox)

Intégrale de Riemann

Exemple

Considérons la fonction exponentielle $f(x) = e^x$. *On souhaite calculer l'aire* $\mathcal{A}$ *en-dessous du graphe de* f *et entre les droites d'équation* $(x = 0)$, $(x = 1)$ *et l'axe* (Ox)

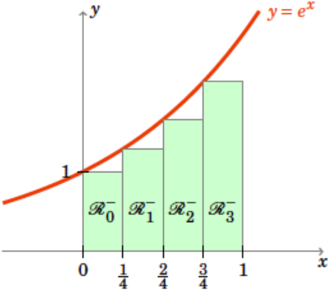


Intégrale de Riemann

Nous approchons cette aire par des sommes d'aires des rectangles situés sous la courbe. Plus précisément, soit $n \geq 1$ un entier ; découpons notre intervalle $[0, 1]$ à l'aide de la subdivision $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1)$.

Intégrale de Riemann

Nous approchons cette aire par des sommes d'aires des rectangles situés sous la courbe. Plus précisément, soit $n \geq 1$ un entier ; découpons notre intervalle $[0, 1]$ à l'aide de la subdivision $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1)$.
On considère les rectangles inférieurs $\mathbb{R}_i^-$, chacun ayant pour base l'intervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ et pour hauteur $f\left(\frac{i-1}{n}\right) = e^{(i-1)/n}$.
L'entier i varie de 1 à n.



Intégrale de Riemann

L'aire de $\mathbb{R}_i^-$ est base $\times$ hauteur : $\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \times e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}}$.

Intégrale de Riemann

L'aire de $\mathbb{R}_i^-$ est base $\times$ hauteur : $\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \times e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}}$.
La somme des aires des $\mathbb{R}_i^-$ se calcule alors comme somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n}$$

Intégrale de Riemann

L'aire de $\mathbb{R}_i^-$ est base $\times$ hauteur : $\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \times e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}}$.
La somme des aires des $\mathbb{R}_i^-$ se calcule alors comme somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1}$$

Intégrale de Riemann

L'aire de $\mathbb{R}_i^-$ est base $\times$ hauteur : $\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \times e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n}e^{\frac{i-1}{n}}$.
La somme des aires des $\mathbb{R}_i^-$ se calcule alors comme somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = \frac{1}{n}\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

Intégrale de Riemann

L'aire de $\mathbb{R}_i^-$ est base $\times$ hauteur : $\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \times e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}}$.
La somme des aires des $\mathbb{R}_i^-$ se calcule alors comme somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = \frac{1}{n} \frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}(e-1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e-1.$$

Intégrale de Riemann

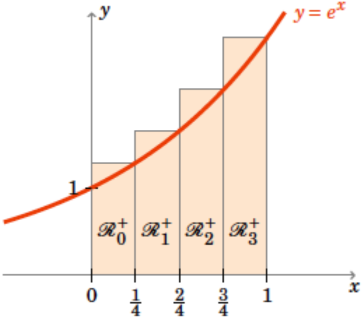
L'aire de $\mathbb{R}_i^-$ est base $\times$ hauteur : $\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \times e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n}e^{\frac{i-1}{n}}$.
La somme des aires des $\mathbb{R}_i^-$ se calcule alors comme somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = \frac{1}{n}\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}(e-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e-1.$$

Pour la limite on a reconnu l'expression du type $\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ (avec ici $x = \frac{1}{n}$).

Intégrale de Riemann

Soit maintenant les rectangles supérieurs $\mathbb{R}_i^+$, ayant la même base $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$



Intégrale de Riemann

mais la hauteur $f\left(\frac{i}{n}\right) = e^{i/n}$.

Un calcul similaire montre que $\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n} \to e - 1$ lorsque $n \to +\infty$.

Intégrale de Riemmann

mais la hauteur $f\left(\frac{i}{n}\right) = e^{i/n}$.

Un calcul similaire montre que $\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n} \to e - 1$ lorsque $n \to +\infty$.

L'aire $\mathcal{A}$ de notre région est supérieure à la somme des aires des rectangles inférieurs ; et elle est inférieure à la somme des aires des rectangles supérieurs. Lorsque l'on considère des subdivisions de plus en plus petites (c'est-à-dire lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$) alors on obtient à la limite que l'aire $\mathcal{A}$ de notre région est encadrée par deux aires qui tendent vers $e - 1$.

Intégrale de Riemmann

mais la hauteur $f\left(\frac{i}{n}\right) = e^{i/n}$.

Un calcul similaire montre que $\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n} \to e - 1$ lorsque $n \to +\infty$.

L'aire $\mathcal{A}$ de notre région est supérieure à la somme des aires des rectangles inférieurs ; et elle est inférieure à la somme des aires des rectangles supérieurs. Lorsque l'on considère des subdivisions de plus en plus petites (c'est-à-dire lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$) alors on obtient à la limite que l'aire $\mathcal{A}$ de notre région est encadrée par deux aires qui tendent vers $e - 1$. Donc l'aire de notre région est $\mathcal{A} = e - 1$.

Plan

Fonction intégrable

Théorème (Théorème faible)

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f est intégrable.

Preuve Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f' est une fonction continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$; f' est donc une fonction bornée : il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ on ait $|f'(x)| \leq M$.

Fonction intégrable

Théorème (Théorème faible)

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f est intégrable.

Preuve Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f' est une fonction continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$; f' est donc une fonction bornée : il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ on ait $|f'(x)| \leq M$. Nous allons utiliser l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x, y \in [a, b] \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|. \qquad (\star)$$

Fonction intégrable

Théorème (Théorème faible)

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f est intégrable.

Preuve Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f' est une fonction continue sur l'intervalle fermé et borné $[a,b]$; f' est donc une fonction bornée : il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$ on ait $|f'(x)| \leq M$. Nous allons utiliser l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x, y \in [a,b] \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|. \qquad (\star)$$

Soit $\epsilon > 0$ et soit $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ vérifiant pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$0 < x_i - x_{i-1} \leq \epsilon. \qquad (\star\star)$$

Fonction intégrable

Nous allons construire deux fonctions en escalier $\phi^-, \phi^+ : [a, b] \to \mathbb{R}$ définies de la façon suivante : pour chaque $i = 1, \ldots, n$ et chaque $x \in [x_{i-1}, x_i[$ on pose

Fonction intégrable

Nous allons construire deux fonctions en escalier $\phi^-, \phi^+ : [a, b] \to \mathbb{R}$ définies de la façon suivante : pour chaque $i = 1, \ldots, n$ et chaque $x \in [x_{i-1}, x_i[$ on pose

$$c_i = \phi^-(x) = \inf_{t \in [x_{i-1}, x_i[} f(t) \quad \text{et} \quad d_i = \phi^+(x) = \sup_{t \in [x_{i-1}, x_i[} f(t)$$

et aussi $\phi^-(b) = \phi^+(b) = f(b)$. ϕ^- et ϕ^+ sont bien deux fonctions en escalier (elles sont constantes sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i[$).

Fonction intégrable

Nous allons construire deux fonctions en escalier $\phi^-, \phi^+ : [a, b] \to \mathbb{R}$ définies de la façon suivante : pour chaque $i = 1, \dots, n$ et chaque $x \in [x_{i-1}, x_i[$ on pose

$$c_i = \phi^-(x) = \inf_{t \in [x_{i-1}, x_i[} f(t) \quad \text{et} \quad d_i = \phi^+(x) = \sup_{t \in [x_{i-1}, x_i[} f(t)$$

et aussi $\phi^-(b) = \phi^+(b) = f(b)$. ϕ^- et ϕ^+ sont bien deux fonctions en escalier (elles sont constantes sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i[$). De plus par construction, on a bien $\phi^- \leq f \leq \phi^+$ et donc

$$\int_a^b \phi^-(x)\, dx \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \int_a^b \phi^+(x)\, dx \,.$$

Fonction intégrable

Nous allons construire deux fonctions en escalier $\phi^-, \phi^+ : [a, b] \to \mathbb{R}$ définies de la façon suivante : pour chaque $i = 1, \dots, n$ et chaque $x \in [x_{i-1}, x_i[$ on pose

$$c_i = \phi^-(x) = \inf_{t \in [x_{i-1}, x_i[} f(t) \quad \text{et} \quad d_i = \phi^+(x) = \sup_{t \in [x_{i-1}, x_i[} f(t)$$

et aussi $\phi^-(b) = \phi^+(b) = f(b)$. ϕ^- et ϕ^+ sont bien deux fonctions en escalier (elles sont constantes sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i[$). De plus par construction, on a bien $\phi^- \leq f \leq \phi^+$ et donc

$$\int_a^b \phi^-(x)\, dx \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \int_a^b \phi^+(x)\, dx \, .$$

En utilisant la continuité de f sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, on en déduit l'existence de $a_i, b_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tels que $f(a_i) = c_i$ et $f(b_i) = d_i$.

Fonction intégrable

Nous allons construire deux fonctions en escalier $\phi^-, \phi^+ : [a,b] \to \mathbb{R}$ définies de la façon suivante : pour chaque $i = 1, \ldots, n$ et chaque $x \in [x_{i-1}, x_i[$ on pose

$$c_i = \phi^-(x) = \inf_{t \in [x_{i-1}, x_i[} f(t) \quad \text{et} \quad d_i = \phi^+(x) = \sup_{t \in [x_{i-1}, x_i[} f(t)$$

et aussi $\phi^-(b) = \phi^+(b) = f(b)$. ϕ^- et ϕ^+ sont bien deux fonctions en escalier (elles sont constantes sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i[$). De plus par construction, on a bien $\phi^- \leq f \leq \phi^+$ et donc

$$\int_a^b \phi^-(x)\,dx \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \int_a^b \phi^+(x)\,dx\ .$$

En utilisant la continuité de f sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, on en déduit l'existence de $a_i, b_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tels que $f(a_i) = c_i$ et $f(b_i) = d_i$. Avec ($\star$) et ($\star\star$) on sait que $d_i - c_i = f(b_i) - f(a_i) \leq M|b_i - c_i| \leq M(x_i - x_{i-1}) \leq M\epsilon$ (pour tout $i = 1, \ldots, n$).

Fonction intégrable

Alors

$$\int_a^b \phi^+(x)\,dx - \int_a^b \phi^-(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} M\epsilon(x_i - x_{i-1}) = M\epsilon(b-a)$$

Fonction intégrable

Alors

$$\int_a^b \phi^+(x)\,dx - \int_a^b \phi^-(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} M\epsilon(x_i - x_{i-1}) = M\epsilon(b-a)$$

Ainsi $0 \leq I^+(f) - I^-(f) \leq M\epsilon(b-a)$ et lorsque l'on fait tendre $\epsilon \to 0$, on trouve $I^+(f) = I^-(f)$, ce qui prouve que f est intégrable.

Fonction intégrable

Alors

$$\int_a^b \phi^+(x)\ dx - \int_a^b \phi^-(x)\ dx \leq \sum_{i=1}^{n} M\epsilon(x_i - x_{i-1}) = M\epsilon(b-a)$$

Ainsi $0 \leq I^+(f) - I^-(f) \leq M\epsilon(b-a)$ et lorsque l'on fait tendre $\epsilon \to 0$, on trouve $I^+(f) = I^-(f)$, ce qui prouve que f est intégrable.

Théorème (Théorème fort)

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Preuve : Exo

Plan

Propriétés des intégrales

Soient g et f deux fonctions continues sur un intervalle I, et soient $a,\ b \in I$.

Propriétés des intégrales

Soient g et f deux fonctions continues sur un intervalle I, et soient $a,\ b \in I$.

Proposition (Linéarité)

Soit $a \leq b$ deux réels. Pour tout réel λ et μ nous avons :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Plan

Propriétés des intégrales

Proposition (Positivité)

Soit $a \leq b$ deux réels. Si $g \leq f$ alors

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

Propriétés des intégrales

Proposition (Positivité)

Soit $a \leq b$ deux réels. Si $g \leq f$ alors

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

Proposition (Relation de Chasles)

Soient $a < c < b$. Et on a

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^c g(x)dx + \int_c^b g(x)\,dx$$

Propriétés des intégrales

Corollaire

Soient $a < b$. *Et on a*

$$|\int_a^b g(x)\ dx| \leq \int_a^b |g(x)|dx$$

Propriétés des intégrales

Corollaire

Soient $a < b$. Et on a

$$|\int_a^b g(x)\ dx| \leq \int_a^b |g(x)| dx$$

Remarque

L'ensemble des fonctions intégrables sur $[a; b]$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'intégrale est une forme linéaire sur cet espace.

Plan

Propriétés des intégrales

Remarque

$\int e^x \, dx = e^x + c \quad$ *sur* $\mathbb{R}$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad$ *sur* $\mathbb{R}$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad$ *sur* $\mathbb{R}$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad$ *sur* $\mathbb{R}$
$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ *sur* $]0, +\infty[$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + c \quad$ *sur* $]0, +\infty[$ *ou* $]-\infty, 0[$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$$\int sh\, x\, dx = ch\, x + c,\ \int ch\, x\, dx = sh\, x + c \quad sur\ \mathbb{R}$$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$\int sh\, x\; dx = ch\, x + c$, $\int ch\, x\; dx = sh\, x + c$ *sur* $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$ *sur* $\mathbb{R}$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$\int sh\, x\ dx = ch\, x + c,\ \int ch\, x\ dx = sh\, x + c \quad sur\ \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad sur\ \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Bigg\{$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$\int \mathit{sh}\, x\; dx = \mathit{ch}\, x + c,\ \int \mathit{ch}\, x\; dx = \mathit{sh}\, x + c \quad$ *sur* $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad$ *sur* $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases} \quad$ *sur* $]-1, 1[$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$\int sh\, x\, dx = ch\, x + c,\ \int ch\, x\, dx = sh\, x + c \quad sur\ \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad sur\ \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases} \quad sur\ ]-1, 1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} argsh x + c \\ \end{cases}$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$\int sh\,x\,dx = ch\,x + c$, $\int ch\,x\,dx = sh\,x + c$ *sur* $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$ *sur* $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$ *sur* $]-1,1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} argsh x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases}$ *sur* $\mathbb{R}$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$\int sh\, x\, dx = ch\, x + c,\ \int ch\, x\, dx = sh\, x + c \quad sur\ \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad sur\ \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases} \quad sur\ ]-1,1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} argsh x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases} \quad sur\ \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} argch x + c \\ \end{cases}$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$\int sh\,x\,dx = ch\,x + c,\ \int ch\,x\,dx = sh\,x + c \quad sur\ \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad sur\ \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases} \quad sur\ ]-1,1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} argsh x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases} \quad sur\ \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} argch x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases} \quad sur\ x \in]1,+\infty[$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$\int sh\, x\, dx = ch\, x + c$, $\int ch\, x\, dx = sh\, x + c$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$ sur $]-1,1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} argsh x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} argch x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases}$ sur $x \in]1,+\infty[$

Plan

Primitive

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Primitive

Exemple

1. *Soit* $I = \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2$.

Primitive

Exemple

1. *Soit* $I = \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2$*. Alors* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $F(x) = \frac{x^3}{3}$ *est une primitive de* f*.*

Primitive

Exemple

1. *Soit* $I = \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2$. *Alors* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $F(x) = \frac{x^3}{3}$ *est une primitive de* f. *La fonction définie par* $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ *est aussi une primitive de* f.

Primitive

Exemple

1. *Soit* $I = \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2$*. Alors* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $F(x) = \frac{x^3}{3}$ *est une primitive de* f*. La fonction définie par* $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ *est aussi une primitive de* f*.*
2. *Soit* $I = [0, +\infty[$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = \sqrt{x}$*.*

Primitive

Exemple

1. *Soit* $I = \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2$*. Alors* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $F(x) = \frac{x^3}{3}$ *est une primitive de* f*. La fonction définie par* $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ *est aussi une primitive de* f*.*
2. *Soit* $I = [0, +\infty[$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = \sqrt{x}$*. Alors* $G : I \to \mathbb{R}$ *définie par* $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ *est une primitive de* g *sur* I*.*

Primitive

Exemple

1. *Soit* $I = \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2$. *Alors* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $F(x) = \frac{x^3}{3}$ *est une primitive de* f. *La fonction définie par* $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ *est aussi une primitive de* f.
2. *Soit* $I = [0, +\infty[$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = \sqrt{x}$. *Alors* $G : I \to \mathbb{R}$ *définie par* $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ *est une primitive de* g *sur* I. *Pour tout* $c \in \mathbb{R}$, *la fonction* $G + c$ *est aussi une primitive de* g.

Primitive

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Primitive

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Primitive

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Preuve Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie par $G(x) = F(x) + c$ alors $G'(x) = F'(x)$ mais comme $F'(x) = f(x)$

Primitive

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Preuve Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie par $G(x) = F(x) + c$ alors $G'(x) = F'(x)$ mais comme $F'(x) = f(x)$ alors $G'(x) = f(x)$ et G est bien une primitive de f.

Primitive

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Preuve Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie par $G(x) = F(x) + c$ alors $G'(x) = F'(x)$ mais comme $F'(x) = f(x)$ alors $G'(x) = f(x)$ et G est bien une primitive de f. Pour la réciproque supposons que G soit une primitive quelconque de f.

Primitive

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Preuve Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie par $G(x) = F(x) + c$ alors $G'(x) = F'(x)$ mais comme $F'(x) = f(x)$ alors $G'(x) = f(x)$ et G est bien une primitive de f. Pour la réciproque supposons que G soit une primitive quelconque de f. Alors $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$,

Primitive

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Preuve Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie par $G(x) = F(x) + c$ alors $G'(x) = F'(x)$ mais comme $F'(x) = f(x)$ alors $G'(x) = f(x)$ et G est bien une primitive de f. Pour la réciproque supposons que G soit une primitive quelconque de f. Alors $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, ainsi la fonction $G - F$ a une dérivée nulle sur un intervalle, c'est donc une fonction constante.

Primitive

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Preuve Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie par $G(x) = F(x) + c$ alors $G'(x) = F'(x)$ mais comme $F'(x) = f(x)$ alors $G'(x) = f(x)$ et G est bien une primitive de f. Pour la réciproque supposons que G soit une primitive quelconque de f. Alors $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, ainsi la fonction $G - F$ a une dérivée nulle sur un intervalle, c'est donc une fonction constante. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $(G - F)(x) = c$.

Primitive

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Preuve Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie par $G(x) = F(x) + c$ alors $G'(x) = F'(x)$ mais comme $F'(x) = f(x)$ alors $G'(x) = f(x)$ et G est bien une primitive de f. Pour la réciproque supposons que G soit une primitive quelconque de f. Alors $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, ainsi la fonction $G - F$ a une dérivée nulle sur un intervalle, c'est donc une fonction constante. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $(G - F)(x) = c$. Autrement dit $G(x) = F(x) + c$ (pour tout $x \in I$).

Primitive

Notation

On notera une primitive de f par $\displaystyle\int f(t)\,dt$ ou $\displaystyle\int f(x)\,dx$ ou $\displaystyle\int f(u)\,du$ (les lettres $t, x, u, \ldots$ sont des lettres dites muettes, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter une primitive simplement par $\int f$.

Primitive

Notation

On notera une primitive de f par $\displaystyle\int f(t)\,dt$ ou $\displaystyle\int f(x)\,dx$ ou $\displaystyle\int f(u)\,du$ (les lettres $t, x, u, \ldots$ sont des lettres dites muettes, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter une primitive simplement par $\int f$.

La proposition 8 nous dit que si F est une primitive de f alors il existe un réel c, tel que $F = \displaystyle\int f(t)\,dt + c$.

Primitive

Notation

On notera une primitive de f par $\displaystyle\int f(t)\,dt$ ou $\displaystyle\int f(x)\,dx$ ou $\displaystyle\int f(u)\,du$ (les lettres $t, x, u, \ldots$ sont des lettres dites muettes, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter une primitive simplement par $\int f$.

La proposition 8 nous dit que si F est une primitive de f alors il existe un réel c, tel que $F = \displaystyle\int f(t)\,dt + c$.

Attention : $\displaystyle\int f(t)\,dt$ désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$ alors que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ désigne un nombre réel.

Primitive

Notation

On notera une primitive de f par $\displaystyle\int f(t)\,dt$ ou $\displaystyle\int f(x)\,dx$ ou $\displaystyle\int f(u)\,du$ (les lettres $t, x, u, \dots$ sont des lettres dites muettes, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter une primitive simplement par $\int f$.

La proposition 8 nous dit que si F est une primitive de f alors il existe un réel c, tel que $F = \displaystyle\int f(t)\,dt + c$.

Attention : $\displaystyle\int f(t)\,dt$ désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$ alors que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ désigne un nombre réel. Plus précisément nous verrons que si F est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Plan

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$$\int e^x \, dx = e^x + c \quad \textit{sur } \mathbb{R}$$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$$\int e^x \, dx = e^x + c \quad \textit{sur } \mathbb{R}$$
$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad \textit{sur } \mathbb{R}$$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$\int e^x \, dx = e^x + c$ *sur* $\mathbb{R}$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c$ *sur* $\mathbb{R}$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ *sur* $\mathbb{R}$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$\int e^x \, dx = e^x + c \quad$ *sur* $\mathbb{R}$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad$ *sur* $\mathbb{R}$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad$ *sur* $\mathbb{R}$
$\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad$ *sur* $\mathbb{R}$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$\int e^x \, dx = e^x + c \quad \textit{sur } \mathbb{R}$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad \textit{sur } \mathbb{R}$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad \textit{sur } \mathbb{R}$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \textit{sur } \mathbb{R}$
$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \textit{ sur }]0, +\infty[$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$\int e^x \, dx = e^x + c \quad \textit{sur } \mathbb{R}$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad \textit{sur } \mathbb{R}$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad \textit{sur } \mathbb{R}$
$\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \textit{sur } \mathbb{R}$
$\int x^\alpha \, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \textit{ sur }]0, +\infty[$
$\int \dfrac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + c \quad \textit{sur }]0, +\infty[\textit{ ou }]-\infty, 0[$

Propriétés des fonctions usuelles

Exemple

$\int e^x \, dx = e^x + c \quad \textit{sur } \mathbb{R}$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad \textit{sur } \mathbb{R}$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad \textit{sur } \mathbb{R}$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \textit{sur } \mathbb{R}$
$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \; \textit{sur }]0, +\infty[$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + c \quad \textit{sur }]0, +\infty[\; \textit{ou }]-\infty, 0[$

Plan

Intégration par parties

Théorème (Intégration par parties)

Soient u *et* v *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un intervalle* $[a, b]$ *alors nous avons :* $\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\;dx = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\;dx$

Intégration par parties

Théorème (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ alors nous avons : $\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$

Notation. Le crochet $\left[F\right]_a^b$ est par définition $\left[F\right]_a^b = F(b) - F(a)$. Donc $\left[uv\right]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Intégration par parties

Théorème (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$ alors nous avons : $\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$

Notation. Le crochet $[F]_a^b$ est par définition $[F]_a^b = F(b) - F(a)$.
Donc $[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.
Si l'on omet les bornes alors $[F]$ désigne la fonction $F + c$ où c est une constante quelconque.

Intégration par parties

Théorème (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ alors nous avons : $\displaystyle\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx$

Notation. Le crochet $[F]_a^b$ est par définition $[F]_a^b = F(b) - F(a)$.
Donc $[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.
Si l'on omet les bornes alors $[F]$ désigne la fonction $F + c$ où c est une constante quelconque.
La formule d'intégration par parties pour les primitives est la même mais sans les bornes :

$$\int u(x)v'(x)\, dx = [uv] - \int u'(x)v(x)\, dx.$$

Intégration par parties

Théorème (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ alors nous avons : $\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\;dx = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\;dx$

Notation. Le crochet $\left[F\right]_a^b$ est par définition $\left[F\right]_a^b = F(b) - F(a)$.
Donc $\left[uv\right]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.
Si l'on omet les bornes alors $\left[F\right]$ désigne la fonction $F + c$ où c est une constante quelconque.
La formule d'intégration par parties pour les primitives est la même mais sans les bornes :

$$\int u(x)v'(x)\;dx = \left[uv\right] - \int u'(x)v(x)\;dx.$$

La preuve est très simple :

Intégration par parties

Preuve

On a $(uv)' = u'v + uv'$.

Intégration par parties

Preuve

On a $(uv)' = u'v + uv'$.

Donc

$$\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b (uv)'$$

Intégration par parties

Preuve

On a $(uv)' = u'v + uv'$.

Donc

$$\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$$

Intégration par parties

Preuve

On a $(uv)' = u'v + uv'$.

Donc
$$\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$$

En transposant, nous obtenons

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Intégration par parties

Preuve
On a $(uv)' = u'v + uv'$.
Donc
$$\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$$
En transposant, nous obtenons
$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Exemple : Calcul de $\int_0^1 xe^x \, dx$.

Intégration par parties

Preuve

On a $(uv)' = u'v + uv'$.

Donc
$$\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$$

En transposant, nous obtenons

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Exemple : Calcul de $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx$.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$.

Intégration par parties

Preuve

On a $(uv)' = u'v + uv'$.

Donc

$$\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$$

En transposant, nous obtenons

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Exemple : Calcul de $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx$.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$.

Nous aurons besoin de savoir que $u'(x) = 1$ et

Intégration par parties

Preuve

On a $(uv)' = u'v + uv'$.

Donc

$$\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$$

En transposant, nous obtenons

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Exemple : Calcul de $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx$.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$.

Nous aurons besoin de savoir que $u'(x) = 1$ et qu'une primitive de v' est simplement $v(x) = e^x$.

Intégration par parties

Preuve

On a $(uv)' = u'v + uv'$.

Donc

$$\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$$

En transposant, nous obtenons

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Exemple : Calcul de $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx$.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$.

Nous aurons besoin de savoir que $u'(x) = 1$ et qu'une primitive de v' est simplement $v(x) = e^x$.

La formule d'intégration par parties (3) donne :

Intégration par parties

$$\int_0^1 xe^x \, dx \quad =$$

Intégration par parties

$$\int_0^1 xe^x \, dx = \int_0^1 u(x)v'(x) \, dx$$

Intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x \, dx &= \int_0^1 u(x)v'(x) \, dx \\ &= \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) \, dx\end{aligned}$$

Intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx \\
&= \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx \\
&= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx
\end{aligned}$$

Intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x \, dx &= \int_0^1 u(x)v'(x) \, dx \\
&= \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) \, dx \\
&= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx \\
&= \left(1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0\right) - \left[e^x\right]_0^1
\end{aligned}$$

Intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx \\
&= \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx \\
&= \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx \\
&= \left(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0\right) - \big[e^x\big]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0)
\end{aligned}$$

Intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx \\
&= \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx \\
&= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx \\
&= \left(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0\right) - \left[e^x\right]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Plan

Changement de variable

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour tout $a, b \in J$, nous avons

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

Changement de variable

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour tout $a, b \in J$, nous avons

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

Si F est une primitive de f alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $\big(f \circ \varphi\big) \cdot \varphi'$.

Changement de variable

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour tout $a, b \in J$, nous avons

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

Si F est une primitive de f alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $\big(f \circ \varphi\big) \cdot \varphi'$.

Remarque

En effet si l'on note $x = \varphi(t)$

Changement de variable

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour tout $a, b \in J$, nous avons

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

Si F est une primitive de f alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $\big(f \circ \varphi\big) \cdot \varphi'$.

Remarque

En effet si l'on note $x = \varphi(t)$ alors par dérivation on obtient $\dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ donc $dx = \varphi'(t)\, dt$.

Changement de variable

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour tout $a, b \in J$, nous avons

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

Si F est une primitive de f alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Remarque

En effet si l'on note $x = \varphi(t)$ alors par dérivation on obtient $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ donc $dx = \varphi'(t)\,dt$. D'où la substitution

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Changement de variable

Preuve Comme F est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$ et par la formule de la dérivation de la composition $F \circ \varphi$

Changement de variable

Preuve Comme F est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$ et par la formule de la dérivation de la composition $F \circ \varphi$ on a

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Changement de variable

Preuve Comme F est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$ et par la formule de la dérivation de la composition $F \circ \varphi$ on a

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Donc $F \circ \varphi$ est une primitive de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Changement de variable

Preuve Comme F est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$ et par la formule de la dérivation de la composition $F \circ \varphi$ on a

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Donc $F \circ \varphi$ est une primitive de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Pour les intégrales : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \big[F \circ \varphi\big]_a^b =$

Changement de variable

Preuve Comme F est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$ et par la formule de la dérivation de la composition $F \circ \varphi$ on a

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Donc $F \circ \varphi$ est une primitive de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Pour les intégrales : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \left[F \circ \varphi\right]_a^b =$

$F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big)$

Changement de variable

Preuve Comme F est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$ et par la formule de la dérivation de la composition $F \circ \varphi$ on a

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Donc $F \circ \varphi$ est une primitive de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Pour les intégrales : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \big[F \circ \varphi\big]_a^b =$

$F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = \big[F\big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$

Changement de variable

Preuve Comme F est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$ et par la formule de la dérivation de la composition $F \circ \varphi$ on a

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Donc $F \circ \varphi$ est une primitive de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Pour les intégrales : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \big[F \circ \varphi\big]_a^b =$

$F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = \big[F\big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$

Changement de variable

Exemple : Calculons la primitive $F = \int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt$$

Changement de variable

Exemple : Calculons la primitive $F = \displaystyle\int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \; .$$

Changement de variable

Exemple : Calculons la primitive $F = \int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \, .$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' =$

Changement de variable

Exemple : Calculons la primitive $F = \displaystyle\int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \, .$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln |u|$.

Changement de variable

Exemple : Calculons la primitive $F = \displaystyle\int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \, .$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln |u|$. Donc

$$F = \int -\frac{u'}{u}$$

Changement de variable

Exemple : Calculons la primitive $F = \displaystyle\int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \; .$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln|u|$. Donc

$$F = \int -\frac{u'}{u} = -\big[\ln|u|\big]$$

Changement de variable

Exemple : Calculons la primitive $F = \displaystyle\int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \, .$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln |u|$. Donc

$$F = \int -\frac{u'}{u} = -\left[\ln |u| \right] = -\ln |u| + c$$

Changement de variable

Exemple : Calculons la primitive $F = \displaystyle\int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \, .$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln|u|$. Donc

$$F = \int -\frac{u'}{u} = -\left[\,\ln|u|\right] = -\ln|u| + c = -\ln|\cos t| + c.$$

Changement de variable

Exemple : Calculons la primitive $F = \displaystyle\int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \; .$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln |u|$. Donc

$$F = \int -\frac{u'}{u} = -\left[\,\ln |u|\right] = -\ln |u| + c = -\ln |\cos t| + c.$$

Nous allons reformuler tout cela en terme de changement de variable.

Changement de variable

Exemple : Calculons la primitive $F = \displaystyle\int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \, .$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln |u|$. Donc

$$F = \int -\frac{u'}{u} = -\left[\, \ln |u| \right] = -\ln |u| + c = -\ln |\cos t| + c.$$

Nous allons reformuler tout cela en terme de changement de variable. Notons $\varphi(t) = \cos t$ alors $\varphi'(t) = -\sin t$, donc

$$F = \int -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \, dt$$

Changement de variable

Exemple : Calculons la primitive $F = \displaystyle\int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \ .$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln |u|$. Donc

$$F = \int -\frac{u'}{u} = -\big[\ln |u|\big] = -\ln |u| + c = -\ln |\cos t| + c.$$

Nous allons reformuler tout cela en terme de changement de variable. Notons $\varphi(t) = \cos t$ alors $\varphi'(t) = -\sin t$, donc

$$F = \int -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \, dt$$

Si f désigne la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, qui est bijective tant que $x \neq 0$; alors $F = -\displaystyle\int \varphi'(t) f(\varphi(t)) \, dt$.

Changement de variable

Exemple : Calculons la primitive $F = \displaystyle\int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \ .$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln |u|$. Donc

$$F = \int -\frac{u'}{u} = -\left[\, \ln |u| \right] = -\ln |u| + c = -\ln |\cos t| + c.$$

Nous allons reformuler tout cela en terme de changement de variable. Notons $\varphi(t) = \cos t$ alors $\varphi'(t) = -\sin t$, donc

$$F = \int -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \, dt$$

Si f désigne la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, qui est bijective tant que $x \neq 0$; alors $F = -\displaystyle\int \varphi'(t) f(\varphi(t)) \, dt$.

Changement de variable

En posant $x = \varphi(t)$ et donc $dx = \varphi'(t)dt$, on reconnaît la formule du changement de variable,

Changement de variable

En posant $x = \varphi(t)$ et donc $dx = \varphi'(t)dt$, on reconnaît la formule du changement de variable, par conséquent

$$F \circ \varphi^{-1} = -\int f(x)\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx = -\ln|x| + c\,.$$

Changement de variable

En posant $x = \varphi(t)$ et donc $dx = \varphi'(t)dt$, on reconnaît la formule du changement de variable, par conséquent

$$F \circ \varphi^{-1} = -\int f(x)\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx = -\ln|x| + c\ .$$

Comme $x = \varphi(t) = \cos t$, on retrouve bien $F(t) = -\ln|\cos t| + c$.

Changement de variable

En posant $x = \varphi(t)$ et donc $dx = \varphi'(t)dt$, on reconnaît la formule du changement de variable, par conséquent

$$F \circ \varphi^{-1} = -\int f(x)\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx = -\ln|x| + c\,.$$

Comme $x = \varphi(t) = \cos t$, on retrouve bien $F(t) = -\ln|\cos t| + c$.

Remarque

Pour que l'intégrale soit bien définie, il faut que $\tan t$ *soit définie, donc* $t \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$.

Changement de variable

En posant $x = \varphi(t)$ et donc $dx = \varphi'(t)dt$, on reconnaît la formule du changement de variable, par conséquent

$$F \circ \varphi^{-1} = -\int f(x)\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx = -\ln|x| + c\,.$$

Comme $x = \varphi(t) = \cos t$, on retrouve bien $F(t) = -\ln|\cos t| + c$.

Remarque

Pour que l'intégrale soit bien définie, il faut que $\tan t$ soit définie, donc $t \not\equiv \frac{\pi}{2} \bmod \pi$. La restriction d'une primitive à un intervalle $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ est donc de la forme $-\ln|\cos t| + c$. Mais la constante c peut être différente sur un intervalle différent.

Plan

Intégration des fractions rationnelles

On souhaite d'abord intégrer les fractions rationnelles $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ avec $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Intégration des fractions rationnelles

On souhaite d'abord intégrer les fractions rationnelles $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ avec $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Premier cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Intégration des fractions rationnelles

On souhaite d'abord intégrer les fractions rationnelles
$f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ avec $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.
Premier cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ s'écrit aussi
$f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_1)(x-x_2)}$

Intégration des fractions rationnelles

On souhaite d'abord intégrer les fractions rationnelles $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ avec $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Premier cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ s'écrit aussi $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_1)(x-x_2)}$ et il existe de nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$.

Intégration des fractions rationnelles

On souhaite d'abord intégrer les fractions rationnelles $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ avec $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Premier cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ s'écrit aussi $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_1)(x-x_2)}$ et il existe de nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$. On a donc

$$\int f(x)\, dx = A \ln|x - x_1| + B \ln|x - x_2| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $]x_2, +\infty[$ (si $x_1 < x_2$).

Intégration des fractions rationnelles

Deuxième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$.

Intégration des fractions rationnelles

Deuxième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a(x - x_0)^2}$ et il existe des nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{(x - x_0)^2} + \frac{B}{x - x_0}$.

Intégration des fractions rationnelles

Deuxième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_0)^2}$ et il existe des nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{(x-x_0)^2} + \frac{B}{x-x_0}$. On a alors

$$\int f(x)\, dx = -\frac{A}{x-x_0} + B \ln|x - x_0| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, x_0[$, $]x_0, +\infty[$.

Intégration des fractions rationnelles

Deuxième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_0)^2}$ et il existe des nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{(x-x_0)^2} + \frac{B}{x-x_0}$. On a alors

$$\int f(x)\, dx = -\frac{A}{x - x_0} + B \ln |x - x_0| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, x_0[$, $]x_0, +\infty[$.

Troisième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ ne possède pas de racine réelle. Voyons comment faire sur un exemple.

Intégration des fractions rationnelles

Exemple Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+x+1}$.

Intégration des fractions rationnelles

Exemple Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+x+1}$.

Dans un premier temps on fait apparaître une fraction du type $\frac{u'}{u}$ (que l'on sait intégrer en $\ln|u|$).

Intégration des fractions rationnelles

Exemple Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+x+1}$.

Dans un premier temps on fait apparaître une fraction du type $\frac{u'}{u}$ (que l'on sait intégrer en $\ln|u|$).

$$f(x) = \frac{(4x+1)\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x^2+x+1}$$

Intégration des fractions rationnelles

Exemple Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+x+1}$.

Dans un premier temps on fait apparaître une fraction du type $\frac{u'}{u}$ (que l'on sait intégrer en $\ln|u|$).

$$f(x) = \frac{(4x+1)\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x^2+x+1}$$

On peut intégrer la fraction $\frac{4x+1}{2x^2+x+1}$:

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln\left|2x^2+x+1\right| + c$$

Intégration des fractions rationnelles

Occupons nous de l'autre partie $\frac{1}{2x^2+x+1}$, nous allons l'écrire sous la forme $\frac{1}{u^2+1}$ (dont une primitive est $\arctan u$).

Intégration des fractions rationnelles

Occupons nous de l'autre partie $\dfrac{1}{2x^2+x+1}$, nous allons l'écrire sous la forme $\dfrac{1}{u^2+1}$ (dont une primitive est $\arctan u$).

$$\frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} + 1}$$

Intégration des fractions rationnelles

Occupons nous de l'autre partie $\dfrac{1}{2x^2+x+1}$, nous allons l'écrire sous la forme $\dfrac{1}{u^2+1}$ (dont une primitive est $\arctan u$).

$$\frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}+1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}}$$

Intégration des fractions rationnelles

Occupons nous de l'autre partie $\dfrac{1}{2x^2+x+1}$, nous allons l'écrire sous la forme $\dfrac{1}{u^2+1}$ (dont une primitive est $\arctan u$).

$$\frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}+1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}}$$

$$= \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{\frac{8}{7}2(x+\frac{1}{4})^2+1}$$

Intégration des fractions rationnelles

Occupons nous de l'autre partie $\dfrac{1}{2x^2+x+1}$, nous allons l'écrire sous la forme $\dfrac{1}{u^2+1}$ (dont une primitive est $\arctan u$).

$$\frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}+1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}}$$

$$= \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{\frac{8}{7}2(x+\frac{1}{4})^2+1}$$

$$= \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2+1}$$

Intégration des fractions rationnelles

On pose le changement de variable $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})$

Intégration des fractions rationnelles

On pose le changement de variable $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})$ et donc $du = \frac{4}{\sqrt{7}}dx$! ! !

Intégration des fractions rationnelles

On pose le changement de variable $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})$ et donc

$du = \frac{4}{\sqrt{7}}dx$! ! ! $\Longrightarrow$ $dx = \frac{\sqrt{7}}{4}du$

Intégration des fractions rationnelles

On pose le changement de variable $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})$ et donc $du = \frac{4}{\sqrt{7}}dx\,!!!\implies dx = \frac{\sqrt{7}}{4}du$ ce qui conduit à :

$$\int \frac{dx}{2x^2 + x + 1} = \int \frac{8}{7} \frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})\right)^2 + 1}$$

Intégration des fractions rationnelles

On pose le changement de variable $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})$ et donc $du = \frac{4}{\sqrt{7}}dx$! ! ! $\implies$ $dx = \frac{\sqrt{7}}{4}du$ ce qui conduit à :

$$\int \frac{dx}{2x^2 + x + 1} = \int \frac{8}{7} \frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})\right)^2 + 1} = \frac{8}{7} \int \frac{du}{u^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Intégration des fractions rationnelles

On pose le changement de variable $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})$ et donc $du = \frac{4}{\sqrt{7}}dx$! ! ! $\Longrightarrow$ $dx = \frac{\sqrt{7}}{4}du$ ce qui conduit à :

$$\int \frac{dx}{2x^2 + x + 1} = \int \frac{8}{7} \frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})\right)^2 + 1} = \frac{8}{7} \int \frac{du}{u^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan u + c$$

Intégration des fractions rationnelles

On pose le changement de variable $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})$ et donc $du = \frac{4}{\sqrt{7}}dx$! ! ! $\implies$ $dx = \frac{\sqrt{7}}{4}du$ ce qui conduit à :

$$\int \frac{dx}{2x^2 + x + 1} = \int \frac{8}{7} \frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})\right)^2 + 1} = \frac{8}{7} \int \frac{du}{u^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan u + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4}) \right) + c \; .$$

Intégration des fractions rationnelles

On pose le changement de variable $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})$ et donc

$du = \frac{4}{\sqrt{7}} dx$! ! ! $\Longrightarrow$ $dx = \frac{\sqrt{7}}{4} du$ ce qui conduit à :

$$\int \frac{dx}{2x^2 + x + 1} = \int \frac{8}{7} \frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})\right)^2 + 1} = \frac{8}{7} \int \frac{du}{u^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan u + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4}) \right) + c \, .$$

Finalement :

$$\int f(x)\, dx = \frac{1}{4} \ln\left(2x^2 + x + 1\right) + \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4}) \right) + c$$

Chapitre : Intégration

The END ......

Chapitre : Intégration et Primitive

The END