Formule de Taylor & Développement Limité

Dr. Abdoul Aziz FALL

UFR Sciences Appliquées et Technologie de l'Information et de la Communication
Université Alioune Diop de Bambey

3 novembre 2014

Objectif

L'objectif de ce cours est d'introduire les concepts

- Formules de Taylor
- développement limité d'une fonction
- comment déterminer le développement limité des fonctions.

Introduction

Nous allons montrer que pour toute fonction $f(x)$ de classe C^n, nous pouvons trouver un polynôme $P_n(x)$ qui approche le mieux la fonction en chaque point donné. Ce polynôme sera calculé à partir des dérivées successives au point considéré.

Introduction

Nous allons montrer que pour toute fonction $f(x)$ de classe C^n, nous pouvons trouver un polynôme $P_n(x)$ qui approche le mieux la fonction en chaque point donné. Ce polynôme sera calculé à partir des dérivées successives au point considéré.

Théorème 1

Pour tout $x \in]-1, 1[$, *nous avons :*

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \,. \qquad (1)$$

Introduction

Nous allons montrer que pour toute fonction $f(x)$ de classe C^n, nous pouvons trouver un polynôme $P_n(x)$ qui approche le mieux la fonction en chaque point donné. Ce polynôme sera calculé à partir des dérivées successives au point considéré.

Théorème 1

Pour tout $x \in]-1, 1[$, *nous avons :*

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \; . \tag{1}$$

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, *nous avons :*

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \; . \tag{2}$$

Introduction

Exemple 1

Calculons l'erreur que nous commettons pour le cas $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Introduction

Exemple 1

Calculons l'erreur que nous commettons pour le cas $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Soit $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

Introduction

Exemple 1

Calculons l'erreur que nous commettons pour le cas $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Soit $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

Quand $n \to +\infty$ *alors on a* $P_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Introduction

Exemple 1

Calculons l'erreur que nous commettons pour le cas $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Soit $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

Quand $n \to +\infty$ *alors on a* $P_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ *(somme des termes d'une suite géométrique de raison* x*)*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Introduction

Exemple 1

Calculons l'erreur que nous commettons pour le cas $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Soit $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

Quand $n \to +\infty$ *alors on a* $P_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ *(somme des termes d'une suite géométrique de raison* x*)*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

D'ou $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ *qui est une erreur d'ordre* x^{n+1}.

Introduction

Exemple 1

Calculons l'erreur que nous commettons pour le cas $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Soit $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

Quand $n \to +\infty$ *alors on a* $P_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$ *(somme des termes d'une suite géométrique de raison* x*)*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

D'ou $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ *qui est une erreur d'ordre* x^{n+1}. *(Evaluer l'erreur commise pour* $x = 0,01$ *avec* $n = 5$ *)*

Introduction

Notation 1

Soient I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, x_0 *un point intérieur à* I, *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction. On fixe un entier naturel* n.

Introduction

Notation 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On fixe un entier naturel n.

Définition 1 (Fonction de classe $\mathcal{C}^n$)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue. f est de classe C^0 si f est continue sur I. f est de classe C^∞ si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Formule de Taylor

Ils existent trois type de formules de Taylor, elles ont toutes la même partie polynomiale mais c'est au niveau de leurs restes qu'elles ont des différences.

Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 2 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *(*$n \in \mathbb{N}$*) et soit* $a, x \in I$*. Alors*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 2 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ *et soit* $a, x \in I$. *Alors*

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Remarque 1

En écrivant $x = a + h$ *(et donc* $h = x - a$*) la formule de Taylor précédente devient (pour tout* a *et* $a + h$ *de* I*) :*

$$f(a+h) = f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\int_0^h \frac{f^{(n+1)}(a+t)}{n!}(h$$

Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 3 (Formule de Taylor avec reste intégral (autre version))

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *(*$n \in \mathbb{N}$*) et soit* $a \in I$ *et* h *tel que* $a + h \in I$. *Alors*

$$f(a+h) = f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\int_0^h \frac{f^{(n+1)}(a+t)}{n!}(h-t)^n dt$$

Formule de Taylor avec reste intégral

Exemple 2

La fonction $f(x) = \exp x$ *est de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *sur* $I = \mathbb{R}$ *pour tout* n. *Fixons* $a \in \mathbb{R}$.

Formule de Taylor avec reste intégral

Exemple 2

La fonction $f(x) = \exp x$ *est de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *sur* $I = \mathbb{R}$ *pour tout* n*. Fixons* $a \in \mathbb{R}$*.*
Comme $f'(x) = \exp x$, $f''(x) = \exp x$,...

Formule de Taylor avec reste intégral

Exemple 2

La fonction $f(x) = \exp x$ *est de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *sur* $I = \mathbb{R}$ *pour tout* n*. Fixons* $a \in \mathbb{R}$*.*
Comme $f'(x) = \exp x$, $f''(x) = \exp x, \ldots$ *alors pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

Formule de Taylor avec reste intégral

Exemple 2

La fonction $f(x) = \exp x$ *est de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *sur* $I = \mathbb{R}$ *pour tout* n. *Fixons* $a \in \mathbb{R}$.
Comme $f'(x) = \exp x$, $f''(x) = \exp x, \dots$ *alors pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\exp x = \exp a + \frac{\exp a}{1!} \cdot (x-a)^1 + \cdots + \frac{\exp a}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{\exp t}{n!}(x-t)^n dt.$$

Formule de Taylor avec reste intégral

Exemple 2

La fonction $f(x) = \exp x$ *est de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *sur* $I = \mathbb{R}$ *pour tout* n. *Fixons* $a \in \mathbb{R}$.
Comme $f'(x) = \exp x$, $f''(x) = \exp x, \dots$ *alors pour tout* $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp x = \exp a + \frac{\exp a}{1!} \cdot (x-a)^1 + \cdots + \frac{\exp a}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{\exp t}{n!}(x-t)^n dt.$$

Si l'on pose $a = 0$ *alors on retrouve le début de notre approximation de la fonction exponentielle en* $a = 0$:
$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

Formule de Taylor avec reste intégral

Preuve :
Montrons cette formule de Taylor par récurrence sur $k \leq n$:

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b f^{(k+1)}$$

(Pour éviter les confusions entre ce qui varie et ce qui est fixe dans cette preuve on a remplacé x par b.)

Formule de Taylor avec reste intégral

Preuve :
Montrons cette formule de Taylor par récurrence sur $k \leq n$:

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b f^{(k+1)}$$

(Pour éviter les confusions entre ce qui varie et ce qui est fixe dans cette preuve on a remplacé x par b.)
Initialisation. Pour $n = 0$, une primitive de $f'(t)$ est $f(t)$ donc $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$, donc $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt$. (On rappelle que par convention $(b-t)^0 = 1$ et $0! = 1$.)

suite Preuve Formule de Taylor avec reste intégral

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang $k-1$.

suite Preuve Formule de Taylor avec reste intégral

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang $k-1$. Elle s'écrit

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(b-a)^{k-1}$$

$$+ \int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt$$

suite Preuve Formule de Taylor avec reste intégral

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang $k-1$. Elle s'écrit

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(b-a)^{k-1}$$
$$+ \int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt$$

On effectue une intégration par parties dans l'intégrale $\int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt$.

suite Preuve Formule de Taylor avec reste intégral

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang $k-1$. Elle s'écrit

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(b-a)^{k-1}$$

$$+ \int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt$$

On effectue une intégration par parties dans l'intégrale $\int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt$.

En posant $u(t) = f^{(k)}(t)$ et $v'(t) = \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}$, on a

$u'(t) = f^{(k+1)}(t)$ et $v(t) = -\frac{(b-t)^k}{k!}$;

suite Preuve Formule de Taylor avec reste intégral

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang $k-1$. Elle s'écrit

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(b-a)^{k-1}$$
$$+ \int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt$$

On effectue une intégration par parties dans l'intégrale $\int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt$.

En posant $u(t) = f^{(k)}(t)$ et $v'(t) = \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}$, on a $u'(t) = f^{(k+1)}(t)$ et $v(t) = -\frac{(b-t)^k}{k!}$; alors

$$\int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt = \left[-f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}\right]_a^b + \int_a^b f^{(k+1)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}\,dt$$
$$= f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(k+1)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}\,dt.$$

suite Preuve Formule de Taylor avec reste intégral

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang $k-1$. Elle s'écrit

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(b-a)^{k-1}$$
$$+ \int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt$$

On effectue une intégration par parties dans l'intégrale $\int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt$.

En posant $u(t) = f^{(k)}(t)$ et $v'(t) = \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}$, on a $u'(t) = f^{(k+1)}(t)$ et $v(t) = -\frac{(b-t)^k}{k!}$; alors

$$\int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt = \left[-f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}\right]_a^b + \int_a^b f^{(k+1)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}\,dt$$
$$= f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(k+1)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}\,dt.$$

suite Preuve Formule de Taylor avec reste intégral

Ainsi lorsque l'on remplace $\int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt$ dans la formule au rang $k-1$ par $f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(k+1)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}\,dt$, on obtient la formule au rang k.
Nous pouvons conclure car le principe de récurrence de la formule de Taylor est vraie pour tous les entiers n pour lesquels f est classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Théorème 4 (Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange))

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) et soit $a, x \in I$. Il existe un réel c entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Théorème 4 (Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange))

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) et soit $a, x \in I$. Il existe un réel c entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Exemple 3

Soient $a, x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 0$ il existe c entre a et x tel que

$$\exp x = \exp a+\exp a\cdot(x-a)+\cdots+\frac{\exp a}{n!}(x-a)^n+\frac{\exp c}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Théorème 4 (Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange))

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) et soit $a, x \in I$. Il existe un réel c entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Exemple 3

Soient $a, x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 0$ il existe c entre a et x tel que

$$\exp x = \exp a+\exp a\cdot(x-a)+\cdots+\frac{\exp a}{n!}(x-a)^n+\frac{\exp c}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dans la plupart des cas on ne connaîtra pas ce c. Mais ce théorème permet d'encadrer le reste. Ceci s'exprime par le corollaire suivant :

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Corollaire 1

Si en plus la fonction $|f^{(n+1)}|$ *est majorée sur* I *par un réel* M*, alors pour tout* $a, x \in I$*, on a :*

$$\left|f(x) - P_n(x)\right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Exemple 4

Approximation de $\sin(0,01)$.
Soit $f(x) = \sin x$.

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Exemple 4

Approximation de $\sin(0,01)$.
Soit $f(x) = \sin x$.
Alors $f'(x) = \cos x$,

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Exemple 4

Approximation de $\sin(0,01)$.
Soit $f(x) = \sin x$.
Alors $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$,

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Exemple 4

Approximation de $\sin(0,01)$.
Soit $f(x) = \sin x$.
Alors $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$,

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Exemple 4

Approximation de $\sin(0,01)$.
Soit $f(x) = \sin x$.
Alors $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$,
$f^{(4)}(x) = \sin x$

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Exemple 4

Approximation de $\sin(0,01)$.
Soit $f(x) = \sin x$.
Alors $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$,
$f^{(4)}(x) = \sin x$
On obtient donc $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Exemple 4

Approximation de $\sin(0,01)$.
Soit $f(x) = \sin x$.
Alors $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$,
$f^{(4)}(x) = \sin x$
On obtient donc $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$
La formule de Taylor ci-dessus en $a = 0$ *à l'ordre* 3 *devient :*

$$f(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} - 1\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(c)\frac{x^4}{4!}$$

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Exemple 4

Approximation de $\sin(0,01)$.
Soit $f(x) = \sin x$.
Alors $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$,
$f^{(4)}(x) = \sin x$
On obtient donc $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$
La formule de Taylor ci-dessus en $a = 0$ *à l'ordre* 3 *devient :*

$$f(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} - 1\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(c)\frac{x^4}{4!}$$

c'est-à-dire $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + f^{(4)}(c)\frac{x^4}{24}$, *pour un certain* c *entre* 0 *et* x.

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Remarque 2

- *Dans ce théorème l'hypothèse f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ peut-être affaiblie en f est «$n+1$ fois dérivable sur I».*

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Remarque 2

- *Dans ce théorème l'hypothèse* f *de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *peut-être affaiblie en* f *est «*$n+1$ *fois dérivable sur* I*».*
- *le réel* c *est entre* a *et* x *signifie* $c \in]a, x[$ *ou* $c \in]x, a[$.

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Remarque 2

- *Dans ce théorème l'hypothèse* f *de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *peut-être affaiblie en* f *est «*$n+1$ *fois dérivable sur* I*».*
- *le réel* c *est entre* a *et* x *signifie* $c \in]a, x[$ *ou* $c \in]x, a[$.
- *Pour* $n = 0$*, c'est exactement l'énoncé du théorème des accroissements finis : il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Remarque 2

- *Dans ce théorème l'hypothèse f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ peut-être affaiblie en f est «$n+1$ fois dérivable sur I».*
- *le réel c est entre a et x signifie $c \in]a, x[$ ou $c \in]x, a[$.*
- *Pour $n = 0$, c'est exactement l'énoncé du théorème des accroissements finis : il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$*
- *Si I est un intervalle fermé borné et f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors $f^{(n+1)}$ est continue sur I donc il existe un M tel que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$. Ce qui permet toujours d'appliquer le corollaire.*

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Preuve

Pour la preuve du théorème, nous aurons besoin d'un résultat préliminaire.

Lemme 1 (Egalité de la moyenne)

Supposons $a < b$ *et soient* $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues avec* $v \geq 0$*. Alors il existe* $c \in [a, b]$ *tel que :*

$$\int_a^b u(t)v(t)\,dt = u(c)\int_a^b v(t)\,dt.$$

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$

Notons $m = \inf_{t\in[a,b]} u(t)$ et $M = \sup_{t\in[a,b]} u(t)$ ce qui implique que $m \leq u(t) \leq M$
Comme $v(t) \geq 0$, nous avons alors

$$mv(t) \leq u(t)v(t) \leq Mv(t)$$

d'ou

$$m\int_a^b v(t)\,dt \leq \int_a^b u(t)v(t)\,dt \leq M\int_a^b v(t)\,dt \text{ (car } v \geq 0).$$

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Ainsi $m \leq \frac{\int_a^b u(t)v(t)\,dt}{\int_a^b v(t)\,dt} \leq M$. Puisque u est continue sur $[a,b]$ elle prend toutes les valeurs comprises entre m et M (théorème des valeurs intermédiaires). Donc il existe $c \in [a,b]$ avec $u(c) = \frac{\int_a^b u(t)v(t)\,dt}{\int_a^b v(t)\,dt}$. Ce qui conduit l'existence de $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b u(t)v(t)\,dt = u(c)\int_a^b v(t)\,dt.$$

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Preuve du Théorème

Pour la preuve, nous montrerons la formule de Taylor pour $f(b)$ en supposant $a < b$. Nous montrerons seulement $c \in [a, b]$ au lieu de $c \in]a, b[$.

Posons $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $v(t) = \frac{(b-t)^n}{n!}$.

La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit

$f(b) = P_n(a) + \int_a^b u(t)v(t)\, dt$.

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Preuve du Théorème

Pour la preuve, nous montrerons la formule de Taylor pour $f(b)$ en supposant $a < b$. Nous montrerons seulement $c \in [a, b]$ au lieu de $c \in]a, b[$.

Posons $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $v(t) = \frac{(b-t)^n}{n!}$.

La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit $f(b) = P_n(a) + \int_a^b u(t)v(t)\,dt$. Avec le lemme précédent, nous pouvons dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b u(t)v(t)\,dt = u(c)\int_a^b v(t)\,dt$. Ainsi le reste est

$$\int_a^b u(t)v(t)\,dt = f^{(n+1)}(c)\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,dt$$

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Preuve du Théorème

Pour la preuve, nous montrerons la formule de Taylor pour $f(b)$ en supposant $a < b$. Nous montrerons seulement $c \in [a, b]$ au lieu de $c \in]a, b[$.

Posons $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $v(t) = \frac{(b-t)^n}{n!}$.

La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit $f(b) = P_n(a) + \int_a^b u(t)v(t)\,dt$. Avec le lemme précédent, nous pouvons dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b u(t)v(t)\,dt = u(c)\int_a^b v(t)\,dt$. Ainsi le reste est

$$\int_a^b u(t)v(t)\,dt = f^{(n+1)}(c)\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,dt$$

$$= f^{(n+1)}(c)\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b$$

Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (Taylor-Lagrange)

Preuve du Théorème

Pour la preuve, nous montrerons la formule de Taylor pour $f(b)$ en supposant $a < b$. Nous montrerons seulement $c \in [a, b]$ au lieu de $c \in]a, b[$.

Posons $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $v(t) = \frac{(b-t)^n}{n!}$.

La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit $f(b) = P_n(a) + \int_a^b u(t)v(t)\,dt$. Avec le lemme précédent, nous pouvons dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b u(t)v(t)\,dt = u(c)\int_a^b v(t)\,dt$. Ainsi le reste est

$$\int_a^b u(t)v(t)\,dt = f^{(n+1)}(c)\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,dt$$

$$= f^{(n+1)}(c)\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b = f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ce qui donne la formule recherchée.

Formule de Taylor-Young

Théorème 5 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x),$$

où ϵ est une fonction définie sur I telle que $\epsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Formule de Taylor-Young

f étant un fonction de classe $\mathcal{C}^n$ nous appliquons la formule de Taylor avec reste $f^{(n)}(c)$ au rang $n-1$.

Formule de Taylor-Young

f étant un fonction de classe $\mathcal{C}^n$ nous appliquons la formule de Taylor avec reste $f^{(n)}(c)$ au rang $n-1$. Pour tout x, il existe $c = c_x$ compris entre a et x tel que

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

Formule de Taylor-Young

f étant un fonction de classe $\mathcal{C}^n$ nous appliquons la formule de Taylor avec reste $f^{(n)}(c)$ au rang $n-1$. Pour tout x, il existe $c = c_x$ compris entre a et x tel que

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

Que nous réécrivons :

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)$$

Formule de Taylor-Young

f étant un fonction de classe $\mathcal{C}^n$ nous appliquons la formule de Taylor avec reste $f^{(n)}(c)$ au rang $n-1$. Pour tout x, il existe $c = c_x$ compris entre a et x tel que

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

Que nous réécrivons :

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)$$

On pose $\epsilon(x) = \frac{f^{(n)}(c_x)-f^{(n)}(a)}{n!}$.
Puisque $f^{(n)}$ est continue et que $c(x) \to a$ alors $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.

Développements limités au voisinage d'un point

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

Définition 2

Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un ***développement limité (développement limité)*** *au point a et à l'ordre n, s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$ de sorte que pour tout $x \in I$:*
$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x)$.

Développements limités au voisinage d'un point

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

Définition 2

Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un ***développement limité (développement limité)*** *au point a et à l'ordre n, s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$ de sorte que pour tout $x \in I$:*
$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x)$.

- *L'égalité précédente s'appelle un développement limité de f au voisinage de a à l'ordre n .*

Développements limités au voisinage d'un point

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

Définition 2

*Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un **développement limité (développement limité)** au point a et à l'ordre n, s'il existe des réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$ de sorte que pour tout $x \in I$:*
$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x)$.

- *L'égalité précédente s'appelle un développement limité de f au voisinage de a à l'ordre n .*
- *Le terme $c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$ est appelé la **partie polynomiale** du développement limité.*

Développements limités au voisinage d'un point

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

Définition 2

*Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un **développement limité (développement limité)** au point a et à l'ordre n, s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$ de sorte que pour tout $x \in I$:*
$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x)$.

- *L'égalité précédente s'appelle un développement limité de f au voisinage de a à l'ordre n .*
- *Le terme $c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$ est appelé la **partie polynomiale** du développement limité.*
- *Le terme $(x-a)^n \epsilon(x)$ est appelé le **reste** du développement limité.*

Développements limités au voisinage d'un point

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir immédiatement les coefficients du développement limité de f en posant $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$:

Développements limités au voisinage d'un point

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir immédiatement les co-efficients du développement limité de f en posant $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$:

Proposition 1

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage d'un point a alors f admet un développement limité au point a à l'ordre n, qui provient de la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x)$$

où $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.

Développements limités au voisinage d'un point

Remarque 3

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage d'un point 0, un développement limité en 0 à l'ordre n est l'expression :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$$

Développements limités au voisinage d'un point

Remarque 4

Si f admet un développement limité en un point a à l'ordre n alors elle posséde un développement limité d'ordre k $\forall$ $k \leq n$.

Développements limités au voisinage d'un point

Remarque 4

Si f *admet un développement limité en un point* a *à l'ordre* n *alors elle posséde un développement limité d'ordre* k $\forall$ $k \leq n$. *En effet*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k +$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)}_{=(x-a)^k\eta(x)}$$

où $\lim_{x\to a} \eta(x) = 0$.

Unicité DL

Proposition 2

Si f admet un développement limité alors ce développement limité est unique.

Preuve

Unicité DL

Proposition 2

Si f admet un développement limité alors ce développement limité est unique.

Preuve Ecrivons deux développement limité de f : $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_1(x)$
et $f(x) = d_0 + d_1(x-a) + \cdots + d_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_2(x)$

Unicité DL

Proposition 2

Si f admet un développement limité alors ce développement limité est unique.

Preuve Ecrivons deux développement limité de f : $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_1(x)$
et $f(x) = d_0 + d_1(x-a) + \cdots + d_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_2(x)$
En effectuant la différence on obtient :
$(d_0 - c_0) + (d_1 - c_1)(x-a) + \cdots + (d_n - c_n)(x-a)^n +$
$+(x-a)^n(\epsilon_2(x) - \epsilon_1(x)) = 0.$
Lorsque l'on fait $x = a$ dans cette égalité alors on trouve $d_0 - c_0 = 0$.

Unicité DL

Ensuite on peut diviser cette égalité par $x-a$:

$$(d_1-c_1)+(d_2-c_2)(x-a)+\cdots+(d_n-c_n)(x-a)^{n-1}+$$

$$+(x-a)^{n-1}(\epsilon_2(x)-\epsilon_1(x))=0.$$

Unicité DL

Ensuite on peut diviser cette égalité par $x-a$:

$$(d_1-c_1)+(d_2-c_2)(x-a)+\cdots+(d_n-c_n)(x-a)^{n-1}+$$

$$+(x-a)^{n-1}(\epsilon_2(x)-\epsilon_1(x))=0.$$

En évaluant en $x=a$ on obtient $d_1-c_1=0$, etc.
On trouve $c_0=d_0,\ c_1=d_1,\ \ldots,\ c_n=d_n$.
Les parties polynomiales sont égales et donc les restes aussi.

Développements limités au voisinage d'un point

Corollaire 2

Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son développement limité en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Développements limités au voisinage d'un point

Corollaire 2

Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son développement limité en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Par exemple $x \mapsto \cos x$ est paire et nous verrons que son développement limité en 0 commence par : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$.

Développements limités au voisinage d'un point

Corollaire 2

Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son développement limité en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Par exemple $x \mapsto \cos x$ est paire et nous verrons que son développement limité en 0 commence par : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$.

Preuve 1

$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon(x)$. *Si f est paire alors*

Développements limités au voisinage d'un point

Corollaire 2

Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son développement limité en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Par exemple $x \mapsto \cos x$ est paire et nous verrons que son développement limité en 0 commence par : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$.

Preuve 1

$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon(x)$. *Si f est paire alors*
$f(x) = f(-x) = c_0 - c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + \cdots + (-1)^n c_n x^n + x^n \epsilon(x)$.

Développements limités au voisinage d'un point

Corollaire 2

Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son développement limité en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Par exemple $x \mapsto \cos x$ est paire et nous verrons que son développement limité en 0 commence par : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$.

Preuve 1

$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon(x)$. *Si f est paire alors*
$f(x) = f(-x) = c_0 - c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + \cdots + (-1)^n c_n x^n + x^n \epsilon(x)$.
Par l'unicité du développement limité en 0 on trouve $c_1 = -c_1$, $c_3 = -c_3$, $\ldots$ *et donc* $c_1 = 0$, $c_3 = 0, \ldots$

Développements limités au voisinage d'un point

Remarque 5

1. *L'unicité du développement limité et la formule de Taylor-Young prouve que si l'on connaît le développement limité et que f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors on peut calculer les nombres dérivés à partir de la partie polynomiale par la formule $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Cependant dans la majorité des cas on fera l'inverse : on trouve le développement limité à partir des dérivées.*

Développements limités au voisinage d'un point

Remarque 5

1. *L'unicité du développement limité et la formule de Taylor-Young prouve que si l'on connaît le développement limité et que f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors on peut calculer les nombres dérivés à partir de la partie polynomiale par la formule $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Cependant dans la majorité des cas on fera l'inverse : on trouve le développement limité à partir des dérivées.*
2. *Si f admet un développement limité en un point a à l'ordre $n \geq 0$ alors $c_0 = f(a)$.*

Développements limités au voisinage d'un point

Remarque 6

1. *Si* f *admet un développement limité en un point* a *à l'ordre* $n \geq 1$, *alors* f *est dérivable en* a *et on a* $c_0 = f(a)$ *et* $c_1 = f'(a)$. *Par conséquent* $y = c_0 + c_1(x-a)$ *est l'équation de la tangente au graphe de* f *au point d'abscisse* a.

Développements limités au voisinage d'un point

Remarque 6

1. *Si f admet un développement limité en un point a à l'ordre $n \geq 1$, alors f est dérivable en a et on a $c_0 = f(a)$ et $c_1 = f'(a)$. Par conséquent $y = c_0 + c_1(x - a)$ est l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a.*
2. *Plus subtil : f peut admettre un développement limité à l'ordre 2 en un point a sans admettre une dérivée seconde en a. Soit par exemple $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$. Alors f est dérivable en 0 mais f' ne l'est pas. Pourtant f admet un développement limité en 0 à l'ordre 2 : $f(x) = x^2 \epsilon(x)$ (la partie polynomiale est nulle).*

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

Les développements limités suivants en 0 proviennent de la formule de Taylor-Young.

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

Les développements limités suivants en 0 proviennent de la formule de Taylor-Young.

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

Les développements limités suivants en 0 proviennent de la formule de Taylor-Young.

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

Les développements limités suivants en 0 proviennent de la formule de Taylor-Young.

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$
$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

Les développements limités suivants en 0 proviennent de la formule de Taylor-Young.

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$
$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$
$$sh(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

Les développements limités suivants en 0 proviennent de la formule de Taylor-Young.

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$
$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$
$$sh(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)$$

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$$

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+x^n\epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\epsilon(x)$$

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

Ils sont tous à retenir. C'est facile avec les remarques suivantes :

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

Remarque 7

- *Le développement limité de* $ch(x)$ *est la partie paire du développement limité de* e^x*. C'est-à-dire que l'on ne retient que les monômes de degré pair. Alors que le développement limité de* $sh(x)$ *est la partie impaire du développement limité de* e^x*.*

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

Remarque 7

- *Le développement limité de* $ch(x)$ *est la partie paire du développement limité de* e^x*. C'est-à-dire que l'on ne retient que les monômes de degré pair. Alors que le développement limité de* $sh(x)$ *est la partie impaire du développement limité de* e^x*.*
- *Le développement limité de* $\cos x$ *est la partie paire du développement limité de* e^x *en alternant le signe* $+/-$ *du monôme. Pour* $\sin x$ *c'est la partie impaire de* e^x *en alternant aussi les signes.*

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

Remarque 8

- *On notera que la précision du développement limité de* $\sin x$ *est meilleure que l'application de la formule de Taylor le prévoit* ($x^{2n+2}\epsilon(x)$ *au lieu de* $x^{2n+1}\epsilon(x)$)*; c'est parce que le développement limité est en fait à l'ordre* $2n+2$*, avec un terme polynomial en* x^{2n+2} *nul (donc absent). Le même phénomène est vrai pour tous les développement limité pairs ou impairs (dont* $sh(x), \cos x, ch(x)$*.*

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

Remarque 8

- *On notera que la précision du développement limité de* $\sin x$ *est meilleure que l'application de la formule de Taylor le prévoit* ($x^{2n+2}\epsilon(x)$ *au lieu de* $x^{2n+1}\epsilon(x)$)*; c'est parce que le développement limité est en fait à l'ordre* $2n+2$*, avec un terme polynomial en* x^{2n+2} *nul (donc absent). Le même phénomène est vrai pour tous les développement limité pairs ou impairs (dont* $sh(x), \cos x, ch(x)$.
- *Pour* $\ln(1+x)$ *n'oubliez pas qu'il n'y a pas de terme constant, pas de factorielle aux dénominateurs, et que les signes alternent.*

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

Remarque 9

- *Il faut aussi savoir écrire le développement limité à l'aide des sommes formelles (et ici des «petits o») :*

$$\exp x = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \text{ et } \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

Remarque 9

- *Il faut aussi savoir écrire le développement limité à l'aide des sommes formelles (et ici des «petits o») :*

$$\exp x = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \text{ et } \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

- *La développement limité de* $(1+x)^\alpha$ *est valide pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Pour* $\alpha = -1$ *on retombe sur le développement limité de* $(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$. *Mais on retient souvent le développement limité de* $\frac{1}{1-x}$ *qui est très facile. Il se retrouve aussi avec la somme d'une suite géométrique :*
$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} + x^n \epsilon(x)$.

Développement limité des fonctions usuelles à l'origine

Remarque 10

- *Pour* $\alpha = \frac{1}{2}$ *on retrouve* $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$. *Dont il faut connaître les trois premiers termes.*

Notation de Landau

Définition 3

Si, lorsque x $\mapsto 0$, $f(x) \ll g(x)$, *on note :*

$$f(x) = o(g(x))$$

Soit n,p entiers :

1. $x^n \times o(x^p) = o(x^{n+p})$

Notation de Landau

Définition 3

Si, lorsque x $\mapsto 0$, $f(x) \ll g(x)$, *on note :*

$$f(x) = o(g(x))$$

Soit n,p entiers :

1. $x^n \times o(x^p) = o(x^{n+p})$
2. $o(x^n) \times o(x^p) = o(x^{n+p})$

Notation de Landau

Définition 3

Si, lorsque x $\mapsto 0$, $f(x) \ll g(x)$, *on note :*

$$f(x) = o(g(x))$$

Soit n,p entiers :

1. $x^n \times o(x^p) = o(x^{n+p})$
2. $o(x^n) \times o(x^p) = o(x^{n+p})$
3. $o(x^n) + o(x^p) = o(x^{inf(n,p)})$

Notation de Landau

Définition 3

Si, lorsque x $\mapsto 0$, $f(x) \ll g(x)$, *on note :*

$$f(x) = o(g(x))$$

Soit n,p entiers :

1. $x^n \times o(x^p) = o(x^{n+p})$
2. $o(x^n) \times o(x^p) = o(x^{n+p})$
3. $o(x^n) + o(x^p) = o(x^{inf(n,p)})$
4. *Si A est un réel fixé :*

$$A \times o(x^n) = o(x^n)$$

Opérations sur les développements limités

Proposition 3 (Somme et Produit)

On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des développement limité en 0 à l'ordre n :

$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon_1(x)$ *et*

$g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$

Opérations sur les développements limités

Proposition 3 (Somme et Produit)

On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des développement limité en 0 à l'ordre n :
$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon_1(x)$ *et*
$g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$

1. *$f + g$ admet un développement limité en 0 l'ordre n qui est :*
   $(f+g)(x) = (c_0+d_0)+(c_1+d_1)x+\cdots+(c_n+d_n)x^n+x^n\epsilon(x)$.

Opérations sur les développements limités

Proposition 3 (Somme et Produit)

On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des développement limité en 0 à l'ordre n :
$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon_1(x)$ *et*
$g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$

1. $f+g$ *admet un développement limité en* 0 *l'ordre* n *qui est :* $(f+g)(x) = (c_0+d_0)+(c_1+d_1)x+\cdots+(c_n+d_n)x^n+x^n\epsilon(x)$.
2. $f\times g$ *admet un développement limité en* 0 *l'ordre* n *qui est :* $(f\times g)(x) = T_n(x) + x^n\epsilon(x)$ *où* $T_n(x)$ *est le polynôme* $(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n) \times (d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n)$ *tronqué à l'ordre* n.

Opérations sur les développements limités

Proposition 3 (Somme et Produit)

On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des développement limité en 0 à l'ordre n :
$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\epsilon_1(x)$ et
$g(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$

1. $f + g$ *admet un développement limité en* 0 *l'ordre* n *qui est :* $(f+g)(x) = (c_0+d_0)+(c_1+d_1)x+\cdots+(c_n+d_n)x^n+x^n\epsilon(x)$.
2. $f \times g$ *admet un développement limité en* 0 *l'ordre* n *qui est :* $(f \times g)(x) = T_n(x) + x^n\epsilon(x)$ *où* $T_n(x)$ *est le polynôme* $(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \times (d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n)$ *tronqué à l'ordre* n.

Tronquer un polynôme à l'ordre n signifie que l'on conserve seulement les monômes de degré $\leq n$.

Opérations sur les développements limités

Exemple 5

Calculer le développement limité de $\cos x \times \sqrt{1+x}$ *en* 0 *à l'ordre* 2.

Opérations sur les développements limités

Exemple 5

Calculer le développement limité de $\cos x \times \sqrt{1+x}$ *en* 0 *à l'ordre* 2.

Preuve On sait que :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon_1(x)$$

Opérations sur les développements limités

Exemple 5

Calculer le développement limité de $\cos x \times \sqrt{1+x}$ *en* 0 *à l'ordre* 2.

Preuve On sait que :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon_1(x)$$

et $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon_2(x)$. Donc :

Opérations sur les développements limités

$$
\begin{aligned}
\cos x \times \sqrt{1+x} &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon_1(x)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon_2(x)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon_2(x) \\
&\quad - \frac{1}{2}x^2 \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon_2(x)\right) \\
&\quad + x^2\epsilon_1(x) \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon_2(x)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon_2(x) \qquad \text{on développe encore} \\
&\quad - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^4\epsilon_2(x) \\
&\quad + x^2\epsilon_1(x) + \frac{1}{2}x^3\epsilon_1(x) - \frac{1}{8}x^4\epsilon_1(x) + x^4\epsilon_1(x)\epsilon_2(x)
\end{aligned}
$$

Opérations sur les développements limités

$$\begin{aligned}
\cos x \times \sqrt{1+x} &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon_1(x)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon_2(x)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon_2(x) \\
&\quad - \frac{1}{2}x^2\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon_2(x)\right) \\
&\quad + x^2\epsilon_1(x)\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon_2(x)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon_2(x) \qquad \text{on développe encore} \\
&\quad - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^4\epsilon_2(x) \\
&\quad + x^2\epsilon_1(x) + \frac{1}{2}x^3\epsilon_1(x) - \frac{1}{8}x^4\epsilon_1(x) + x^4\epsilon_1(x)\epsilon_2(x)
\end{aligned}$$

Opérations sur les développements limités

$$= \underbrace{1 + \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x^2\right)}_{\text{partie tronquée à l'ordre } 2} \quad \text{termes de degré } 0, 1 \text{ et } 2$$

$$+ \underbrace{x^2\epsilon_2(x) - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^4\epsilon_2(x) + x^2\epsilon_1(x) + \frac{1}{2}}_{\text{reste de la forme } x^2\epsilon(}$$

et ici les autres

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + x^2\epsilon(x)$$

Opérations sur les développements limités

Proposition 4 (Composition)

Si $g(0) = 0$ *(c'est-à-dire* $d_0 = 0$*) alors la fonction* $f \circ g$ *admet un développement limité en* 0 *à l'ordre* n *dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre* n *de la composition* $C(D(x))$.

Opérations sur les développements limités

Proposition 4 (Composition)

Si $g(0) = 0$ *(c'est-à-dire* $d_0 = 0$*) alors la fonction* $f \circ g$ *admet un développement limité en* 0 *à l'ordre* n *dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre* n *de la composition* $C(D(x))$*.*

Exemple 6

Calcul du développement limité de $h(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ *en* 0 *à l'ordre* 3*.*

Opérations sur les développements limités

Solution

- On pose ici $f(u) = \sin u$ et $g(x) = \ln(1+x)$ (pour plus de clarté il est préférable de donner des noms différents aux variables de deux fonctions, ici x et u).

Opérations sur les développements limités

Solution

- On pose ici $f(u) = \sin u$ et $g(x) = \ln(1+x)$ (pour plus de clarté il est préférable de donner des noms différents aux variables de deux fonctions, ici x et u). On a bien $f \circ g(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ et $g(0) = 0$.

Opérations sur les développements limités

Solution

- On pose ici $f(u) = \sin u$ et $g(x) = \ln(1+x)$ (pour plus de clarté il est préférable de donner des noms différents aux variables de deux fonctions, ici x et u). On a bien $f \circ g(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ et $g(0) = 0$.
- On écrit le développement limité à l'ordre 3 de $f(u) = \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u)$ pour u proche de 0.

Opérations sur les développements limités

Solution

- On pose ici $f(u) = \sin u$ et $g(x) = \ln(1+x)$ (pour plus de clarté il est préférable de donner des noms différents aux variables de deux fonctions, ici x et u). On a bien $f \circ g(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ et $g(0) = 0$.
- On écrit le développement limité à l'ordre 3 de $f(u) = \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u)$ pour u proche de 0.
- Et on pose $u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$ pour x proche de 0.

Opérations sur les développements limités

Solution

- On pose ici $f(u) = \sin u$ et $g(x) = \ln(1+x)$ (pour plus de clarté il est préférable de donner des noms différents aux variables de deux fonctions, ici x et u). On a bien $f \circ g(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ et $g(0) = 0$.
- On écrit le développement limité à l'ordre 3 de $f(u) = \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u)$ pour u proche de 0.
- Et on pose $u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$ pour x proche de 0.
- On aura besoin de calculer un développement limité à l'ordre 3 de u^2 (qui est bien sûr le produit $u \times u$) : $u^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\right)^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$

Opérations sur les développements limités

Solution

- On pose ici $f(u) = \sin u$ et $g(x) = \ln(1+x)$ (pour plus de clarté il est préférable de donner des noms différents aux variables de deux fonctions, ici x et u). On a bien $f \circ g(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ et $g(0) = 0$.
- On écrit le développement limité à l'ordre 3 de $f(u) = \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u)$ pour u proche de 0.
- Et on pose $u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$ pour x proche de 0.
- On aura besoin de calculer un développement limité à l'ordre 3 de u^2 (qui est bien sûr le produit $u \times u$) : $u^2 = \big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\big)^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$ et aussi u^3 qui est $u \times u^2$, $u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x)$.

Opérations sur les développements limités

Solution

- On pose ici $f(u) = \sin u$ et $g(x) = \ln(1+x)$ (pour plus de clarté il est préférable de donner des noms différents aux variables de deux fonctions, ici x et u). On a bien $f \circ g(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ et $g(0) = 0$.
- On écrit le développement limité à l'ordre 3 de $f(u) = \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u)$ pour u proche de 0.
- Et on pose $u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$ pour x proche de 0.
- On aura besoin de calculer un développement limité à l'ordre 3 de u^2 (qui est bien sûr le produit $u \times u$) : $u^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\right)^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$ et aussi u^3 qui est $u \times u^2$, $u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x)$.
- Donc $h(x) = f \circ g(x) = f(u)$

Opérations sur les développements limités

Solution

- On pose ici $f(u) = \sin u$ et $g(x) = \ln(1+x)$ (pour plus de clarté il est préférable de donner des noms différents aux variables de deux fonctions, ici x et u). On a bien $f \circ g(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ et $g(0) = 0$.
- On écrit le développement limité à l'ordre 3 de $f(u) = \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u)$ pour u proche de 0.
- Et on pose $u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$ pour x proche de 0.
- On aura besoin de calculer un développement limité à l'ordre 3 de u^2 (qui est bien sûr le produit $u \times u$) : $u^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\right)^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$ et aussi u^3 qui est $u \times u^2$, $u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x)$.
- Donc $h(x) = f \circ g(x) = f(u) = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u)$

Opérations sur les développements limités

Solution

- On pose ici $f(u) = \sin u$ et $g(x) = \ln(1+x)$ (pour plus de clarté il est préférable de donner des noms différents aux variables de deux fonctions, ici x et u). On a bien $f \circ g(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ et $g(0) = 0$.
- On écrit le développement limité à l'ordre 3 de $f(u) = \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u)$ pour u proche de 0.
- Et on pose $u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$ pour x proche de 0.
- On aura besoin de calculer un développement limité à l'ordre 3 de u^2 (qui est bien sûr le produit $u \times u$) : $u^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\right)^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$ et aussi u^3 qui est $u \times u^2$, $u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x)$.
- Donc $h(x) = f \circ g(x) = f(u) = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u) = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$.

Opérations sur les développements limités (Division)

Opérations sur les développements limités (Division)

Voici comment calculer le développement limité d'un quotient f/g. Soient

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \qquad g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon$$

Nous allons utiliser le développement limité de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$.

Opérations sur les développements limités (Division)

Voici comment calculer le développement limité d'un quotient f/g. Soient

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \qquad g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon$$

Nous allons utiliser le développement limité de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$.

1. Si $d_0 = 1$ on pose $u = d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$ et le quotient s'écrit $f/g = f \times \frac{1}{1+u}$.

Opérations sur les développements limités (Division)

Voici comment calculer le développement limité d'un quotient f/g. Soient

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \qquad g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon$$

Nous allons utiliser le développement limité de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$.

1. Si $d_0 = 1$ on pose $u = d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$ et le quotient s'écrit $f/g = f \times \frac{1}{1+u}$.
2. Si d_0 est quelconque avec $d_0 \neq 0$ alors on se ramène au cas précédent en écrivant

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0} \frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0} x + \cdots + \frac{d_n}{d_0} x^n + \frac{x^n \epsilon_2(x)}{d_0}}.$$

Opérations sur les développements limités (Division)

Voici comment calculer le développement limité d'un quotient f/g. Soient

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \qquad g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon$$

Nous allons utiliser le développement limité de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$.

1. Si $d_0 = 1$ on pose $u = d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$ et le quotient s'écrit $f/g = f \times \frac{1}{1+u}$.
2. Si d_0 est quelconque avec $d_0 \neq 0$ alors on se ramène au cas précédent en écrivant

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0} \frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0} x + \cdots + \frac{d_n}{d_0} x^n + \frac{x^n \epsilon_2(x)}{d_0}}.$$

3. Si $d_0 = 0$ alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener aux cas précédents.

Opérations sur les développements limités

Exemple 7

Calculons le développement limité de $\tan x$ *en* 0 *à l'ordre* 5.

Opérations sur les développements limités

Exemple 7

Calculons le développement limité de $\tan x$ *en* 0 *à l'ordre* 5.

Tout d'abord

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)$$

Opérations sur les développements limités

Exemple 7

Calculons le développement limité de $\tan x$ *en* 0 *à l'ordre* 5.

Tout d'abord

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)$$

D'autre part $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x) = 1 + u$ en posant $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)$.

Opérations sur les développements limités

Exemple 7

Calculons le développement limité de $\tan x$ *en* 0 *à l'ordre* 5.

Tout d'abord

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)$$

D'autre part $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x) = 1 + u$ en posant $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)$.

Nous aurons besoin de u^2 et u^3 : $u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)\right)^2$

Opérations sur les développements limités

Exemple 7

Calculons le développement limité de $\tan x$ *en* 0 *à l'ordre* 5.

Tout d'abord

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)$$

D'autre part $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x) = 1 + u$ en posant $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)$.
Nous aurons besoin de u^2 et u^3 : $u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)$ et en fait $u^3 = x^5\epsilon(x)$. (On note abusivement $\epsilon(x)$ pour différents restes.)

Opérations sur les développements limités

Ainsi

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u)$$

Opérations sur les développements limités

Ainsi

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)$$

Opérations sur les développements limités

Ainsi

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x) \ ;$$

Opérations sur les développements limités

Ainsi

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x)\ ;$$

Finalement

$$\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x)\right)$$

Opérations sur les développements limités

Ainsi

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x)\ ;$$

Finalement

$$\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x)\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\epsilon(x).$$

RESUME

Théorème 6 (Les formules de Taylor)

1. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ *et soit* $a, x \in I$. *Alors*
$f(x) =$
$f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$
2. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ *et soit* $a, x \in I$. *Il existe un réel* c *entre* a *et* x *tel que :* $f(x) =$
$f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$
3. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *et soit* $a \in I$. *Alors pour tout* $x \in I$ *on a :*
$f(x) =$
$f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+(x-a)^{n+1}\epsilon(x),$
où ϵ *est une fonction définie sur* I *telle que* $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Opérations sur les développements limités

The END ......