Resueltos

MATERIA: Análisis Matemático I

TITULO: T.P. Nº 2
"Límite"

AUTOR: Anibal Kasero

AR1AP2

~ UNIDAD 2 ~

LÍMITE

VOY A RESOLVER LOS EJERCICIOS QUE CONSIDERO MÁS IMPORTANTES. TAMBIÉN AGREGO ALGUNOS EJEMPLOS QUE PUEDEN SERTE ÚTILES. LOS EJERCICIOS QUE NO RESOLVÍ QUEDAN PARA VOS.

---

(5) Enuncie y demuestre:

5.1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \underset{(l\in\Re)}{l} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x)-l]=0$

5.2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k \wedge k \neq 0 \Rightarrow \exists E'(a) / \forall x \in E'(a;\delta): sg\ f(x) = sg\ k \quad (sg: signo)$

5.3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1 \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = l_1 \pm l_2$ $(l_1, l_2 \in \Re)$

5.4. $\forall x \in D_f,\ \exists k \in \Re^+ \ /\ |f(x)| \leq k \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)] = 0$

5.5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1 \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)] = l_1.l_2$ $(l_1, l_2 \in \Re)$

NOTA: TODOS LOS RESULTADOS DE ESTE EJERCICIO SON CONSECUENCIA DE LA DEFINICIÓN DE LÍMITE:

"$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ /\ \forall x \ /\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$"

O usando la noción de entorno:

"$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ /\ \text{Si } x \in E'(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in E(l, \varepsilon)$"

Donde $E'(a,\delta)$ significa el entorno reducido de centro a y radio δ, o sea los $x \neq a$ que distan de a en menos de δ.

Como siempre, la definición de límite puede entederse mejor si la expresamos en palabras y lo que significa es más o menos lo siguiente:

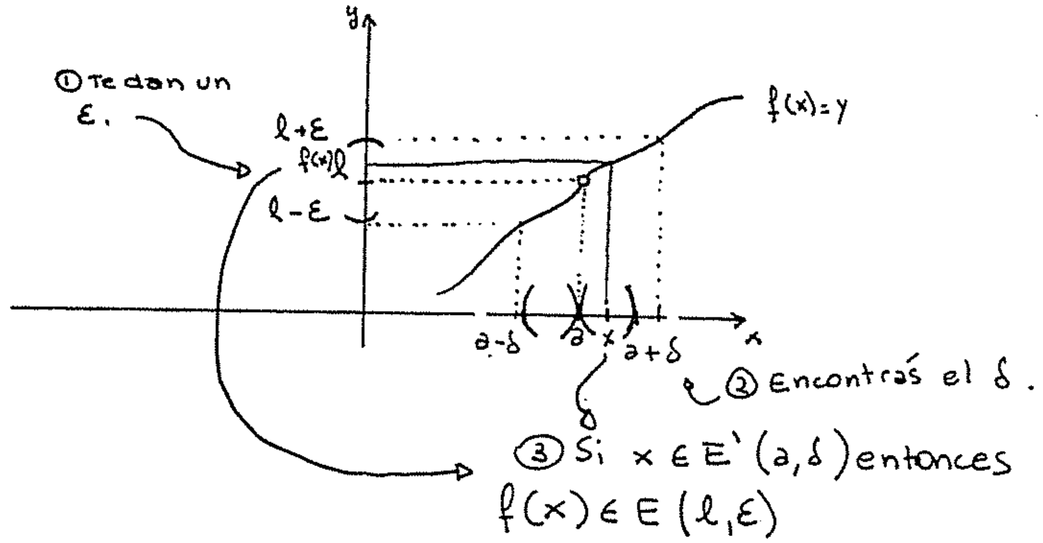
"Decimos que ℓ es el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a y lo escribimos:

$$\ell = \lim_{x \to a} f(x)$$

cuando:

Dado cualquier $\varepsilon > 0$, uno puede encontrar un δ que generalmente depende de ε $(\delta = \delta(\varepsilon))$ tal que: si x es distinto de a y dista de a en menos que δ, entonces $f(x)$ dista de l en menos que ε."

Esto se puede visualizar con el siguiente gráfico:



OBSERVACIONES A PARTIR DE LA DEFINICIÓN:

- No necesariamente tiene que estar definida f en a. Y si está definida no necesariamente tiene que ser $f(a) = \ell$.
- En las teóricas te aclaran en la definición que $x \in D_f$, o sea que $x \in \text{Dominio}(f)$, nosotros evitaremos aclarar esto cada vez suponiendo que si escribimos $f(x)$, necesariamente tiene que estar definida f en x, o sea $x \in \text{Dom}(f)$.

5.1) Si el $\lim_{x \to a} f(x) = l$, entonces usando

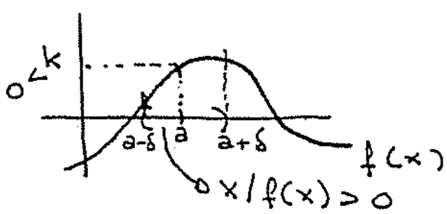
$$\forall \varepsilon > 0 \;, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \text{ si } \; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Pero esto es exactamente lo mismo que escribir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \text{ si } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l \underline{- 0}| < \varepsilon$$

que es la definición de $\lim_{x \to a} f(x) - l = 0$.

5.2) Este enunciado, traducido, significa: Si el límite de $f(x)$ es k, cuando x tiende a a, entonces existe un entorno reducido de a en donde la f tiene el mismo signo que k. En un gráfico:



Según la definición de límite

$$\forall \varepsilon > 0 \;, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;/\; \text{si} \quad 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; \underset{(A)}{|f(x) - k|} < \varepsilon$$

Aplicando la definición de valor absoluto en (A) (ver UNIDAD 1) y suponiendo que $k > 0$:

$$-\varepsilon < f(x) - k < \varepsilon$$

Pasando el k,

$$k - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + k$$

Si elegimos $\varepsilon = \frac{k}{2} > 0$ pues $k > 0$ tenemos

$$0 < \frac{k}{2} = k - \frac{k}{2} < f(x) < \frac{k}{2} + k = \frac{3}{2} k$$

Entonces si elegimos $\varepsilon = \frac{k}{2}$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) = \delta(\frac{k}{2})$ / si

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{k}{2} < f(x) < \frac{3}{2}k \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow$$

$$sg\, f = sg\, k$$

El entorno que buscamos es en definitiva $E'(a, \delta)$.

Si fuese $k < 0$, habría que hacer exactamente lo mismo pero eligiendo $\varepsilon = -\frac{k}{2} > 0$.

5.3) Usaremos el siguiente resultado llamado desigualdad triangular

$$|a + b| \le |a| + |b| \quad \Delta$$

Queremos ver que $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = l_1 - l_2$, o sea que

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \text{ si } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f(x) - g(x)) - (l_1 - l_2)| < \varepsilon$$

Pero $|(f(x) - g(x)) - (l_1 - l_2)| = |f(x) - g(x) - l_1 + l_2| =$

$$= |f(x) - l_1 + l_2 - g(x)| \underset{\Delta}{\le} |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2|$$

Dado ε:

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$, $\exists\, \delta_1 \;/\; \underset{0<|x-a|<\delta_1}{|f(x) - l_1|} < \frac{\varepsilon}{2}$

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2$, $\exists\, \delta_2 \;/\; \underset{0<|x-a|<\delta_2}{|g(x) - l_2|} < \frac{\varepsilon}{2}$

Eligiendo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ obtenemos

$$|(f(x) - g(x)) - (l_1 - l_2)| \le |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

5.4) Nos pide demostrar que si f está acotada y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ entonces $f(x) \cdot g(x)$ tiende a 0 cuando $x \to a$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ / $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{k}$

Eligiendo el mismo δ, $|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)||g(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ acotada}}}{\leq} k|g(x)|$

$< k \cdot \dfrac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$.

Vimos que dado cualquier ε, hallamos un δ (que me lo da la función $g(x)$) / si $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x).g(x) - 0| < \varepsilon$
O sea

$$\lim_{x \to a} [f(x).g(x)] = 0$$

5.5) Usaremos aquí los ítem 4.1), el 4.4) y el 4.3) en su forma " si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) = \ell_1 + \ell_2$ "

Veamos ahora que el límite del producto es el producto de los límites.

$$f(x) = \ell_1 + f(x) - \ell_1$$
$$g(x) = \ell_2 + f(x) - \ell_2$$

Entonces:

$$f(x).g(x) = (\ell_1 + f(x) - \ell_1)(\ell_2 + f(x) - \ell_2)$$

Distribuyendo "convenientemente":

$$f(x).g(x) = \underbrace{\ell_1 \ell_2}_{\boxed{A}} + \underbrace{(f(x)-\ell_1)(g(x)-\ell_2)}_{\boxed{B}} - \underbrace{\ell_2(f(x)-\ell_1)}_{\boxed{C}} - \underbrace{\ell_1(g(x)-\ell_2)}_{\boxed{D}}$$

$\boxed{A}$ Se mantiene constante.

$\boxed{C}$ Usando 4.1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - \ell_1) = 0$, y usando 4.4) se ve que $\lim\limits_{x\to a} \ell_2(f(x) - \ell_1) = 0$, entonces $\boxed{C} \to 0$.

$\boxed{D}$ Análogo a $\boxed{C}$, concluimos que $\boxed{D} \to 0$.

$\boxed{B}$ Si vemos que $\boxed{B} \to 0$, entonces usando 4.3)

$$\lim_{x \to a} f(x).g(x) = \underbrace{l_1 l_2}_{\boxed{A}} + \underbrace{0}_{\boxed{B}} + \underbrace{0}_{\boxed{C}} + \underbrace{0}_{\boxed{D}} = l_1 . l_2$$

Que es lo que queríamos demostrar. Pero sabemos por 4.1) que

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) - l_1 \right) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} \left(g(x) - l_2 \right) = 0$$

Entonces para ver que $\boxed{B} \to 0$ nos alcanza con ver que si

$$\lim_{x \to a} m(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} n(x) = 0 \,,$$

entonces

$$\lim_{x \to a} m(x).n(x) = 0$$

Dado ε, $\exists\, \delta_1(\sqrt{\varepsilon}) > 0 /$ si $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |m(x)| < \sqrt{\varepsilon}$

$\exists\, \delta_2(\sqrt{\varepsilon}) > 0 /$ si $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |n(x)| < \sqrt{\varepsilon}$.

Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, entonces si $0 < |x-a| < \delta$,

$$|m(x).n(x) - 0| = |m(x).n(x)| = |m(x)|.|n(x)| < \sqrt{\varepsilon}.\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon .$$

Entonces $\lim_{x \to a} m(x).n(x) = 0$, entonces $\boxed{B} \to 0$ si hacemos

$m(x) = f(x) - l_1$ y $n(x) = g(x) - l_2$; y por lo tanto

$$\lim_{x \to a} f(x).g(x) = l_1 . l_2 .$$

---

⑥ Exprese formalmente y demuestre el teorema de intercalación o del "sandwich".

VEÁMOSLO: Como es habitual en los ejercicios en que hay que probar algún tipo de unicidad, suponemos que no es así y llegamos a un absurdo. Entonces supongamos que existen l_1 y l_2 tales que

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} f(x) = l_2 \quad \Rightarrow$$

Dado ε $\quad \exists \delta_1(\varepsilon) \,/\, 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$

$\qquad\qquad \exists \delta_2(\varepsilon) \,/\, 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon$

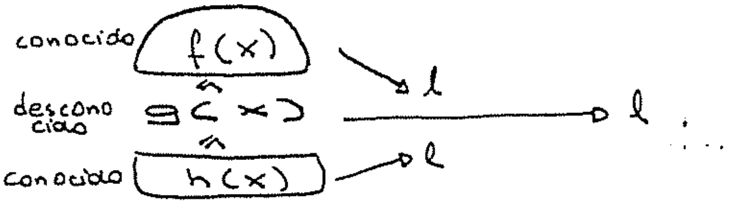
Entonces si $0 < |x-a| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$:

$$|l_2 - l_1| \underset{\substack{\text{sumo y} \\ \text{resto } f(x)}}{=} |l_2 - f(x) + f(x) - l_1| \underset{\substack{\text{desigualdad} \\ \text{triangular}}}{\leq} |l_2 - f(x)| + |f(x) - l_1| <$$

$$\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Entonces dado cualquier ε, $|l_2 - l_1| < 2\varepsilon$, o sea que la distancia entre l_1 y l_2 se puede hacer tan pequeña como uno quiera. Esto sólo es posible si $l_1 = l_2$. Entonces el límite es único.

▶ Esta propiedad es la versión para funciones reales de la "Propiedad del Sánguche" para sucesiones. Resulta muy útil cuando desconocemos el límite de una función pero la podemos acotar superior e inferiormente por funciones con límite conocido e idéntico. En este caso la función original tiende al mismo límite:



Demostremos ahora esta propiedad.

Dado un ε arbitrario:

$$\exists \delta_1(\varepsilon)>0 \ / \ 0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow \ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$$

$$\exists \delta_2(\varepsilon)>0 \ / \ 0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |h(x)-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow \ell-\varepsilon<h(x)<\ell+\varepsilon$$

Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, entonces $\begin{cases} g(x) \geq f(x) > \ell-\varepsilon \\ g(x) \leq h(x) < \ell+\varepsilon . \end{cases}$

Entonces $\ell-\varepsilon<g(x)<\ell+\varepsilon \Leftrightarrow |g(x)-\ell|<\varepsilon$.

Dado cualquier ε, hallamos δ tal que si $0<|x-a|<\delta$ entonces $|g(x)-\ell|<\varepsilon$

Pero esto es precisamente que

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell.$$

Cuando usemos esta propiedad escribiremos

$$\begin{array}{ccccc} f(x) & \leq & g(x) & \leq & h(x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ell & & \ell & & \ell \end{array}$$

NOTA ANTES DE SEGUIR:

Si cada vez que deseamos encontrar un límite tuviésemos que aplicar la definición sería un laburo imposible. Para facilitar esto es que se usa el álgebra de límites. De esta manera conociendo unos pocos límites y aplicando los siguientes resultados, podemos obtener casi cualquier límite:

Sean $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$, con $\ell_1 \in \mathbb{R}$ y $\ell_2 \in \mathbb{R}$

A1 - $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)] = \ell_1 + \ell_2$

$\boxed{A2}$ - $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$

$\boxed{A3}$ - $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$ si $l_2 \neq 0$ $(= \infty$ si $l_2 = 0$, $l_1 \neq 0)$

$\boxed{A4}$ - $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = l_1^{\,l_2}$ si $l_1 > 0$.

$\boxed{A5}$ - $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l_1}$, $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{A6}$ - $\lim\limits_{x \to a} (\log_b f(x)) = \log_b l_1$, si $l_1 > 0$.

Puede suceder que los límites l_1 y l_2 tomen el valor ∞. Frecuentemente ocurren en estos casos "Indeterminaciones", y te encontrás con los mismos problemas que cuando calculabas el límite de sucesiones. Cuando te cruzás con una indeterminación tenés que aplicar una serie de trucos que dependen de la función involucrada. Trucos que la única forma de aprenderlos es con la práctica. Las posibles indeterminaciones son:

I1 - $\frac{0}{0}$ (cociente de infinitésimos)

I2 - $\frac{\infty}{\infty}$ (cociente de dos infinitos)

I3 - $\infty - \infty$ (diferencia de infinitos de igual signo)

I4 - 1^{∞}

I5 - $0 . \infty$

Otros límites que involucran ∞ y que no son indeterminaciones son -

- $\frac{0}{k} = 0$ $(k \neq 0)$
- $-\infty - (+\infty) = -\infty$
- $\frac{k}{0} = \infty$ $(k \neq 0)$
- $+\infty - (-\infty) = +\infty$

- $\frac{k}{\infty} = 0$
- $\frac{\infty}{k} = \infty$
- $+\infty \; +\infty = +\infty$
- $k^{\infty} = 0 \; (0<k<1) \quad k^{\infty} = \infty \; (k>1)$

---

(8) Calcule los siguientes límites.

8.1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} =$

8.2. $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1} =$

8.3. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-2x+1}{x^3-x} + \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}\right] =$

8.4. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-2x+1}{x^3-x} \cdot \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}\right] =$

8.5. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}\right]^{\frac{-x^2+1}{x-1}} =$

- (8.1) Vamos a hacer este hasta el más mínimo detalle:

$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ es el cociente entre dos polinomios. El Dominio de $f(x)$ son aquellos puntos en los que no se anula el denominador. Pero $x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=1$ ó $x=-1$. O sea que $Dom(f(x)) = \mathbb{R}-\{0,-1,1\}$.

El hecho que 1 no pertenezca a Dom f, no significa que uno no puede preguntarse por:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$$

Para averiguarlo usaremos que $\lim_{x\to 1} x = 1$ (se puede ver por definición) y el álgebra de límites:

NUMERADOR:

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2x+1) \underset{\boxed{A1}}{=} \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1}(-2x) + \lim_{x\to 1} \overset{(cte)}{1} \underset{\boxed{A2}}{=}$$

$$= \left(\lim_{x\to 1} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 1} x\right) - 2\lim_{x\to 1} x + 1 = 1.1 - 2.1 + 1 = 0$$

DENOMINADOR:

$$\lim_{x\to 1}(x^3-x) \underset{\boxed{A1}}{=} \lim_{x\to 1} x^3 - \lim_{x\to 1} x \underset{\boxed{A2}}{=} \left(\lim_{x\to 1} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 1} x\right)\left(\lim_{x\to 1} x\right) - \lim_{x\to 1} x = 1.1.1 - 1 = 0.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \frac{0}{0} \to \text{Indeterminación.}$$

Para "salvar" la indeterminación vamos a factorizar los polinomios y como 1 es raíz de ambos el término $(x-1)$ podrá ser simplificado:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x+1)x}$$

Ahora repitamos el proceso aplicando álgebra de límites:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)x} \underset{\boxed{A3}}{=} \frac{\lim_{x\to 1}(x-1)}{\lim_{x\to 1}(x+1)x} \underset{\boxed{A1}\text{ y }\boxed{A2}}{=} \frac{\lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 1}{\left(\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1\right)\lim_{x\to 1} x} = \frac{0}{(1+1).1} = \frac{0}{2}$$

como $2 \neq 0$, no es una indeterminación y obtuvimos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = 0$$

La mayoría de los pasos que hicimos son evitables una vez que uno entendió con qué resultados trabaja. Sintetizando, lo que uno hace es:

1. Reemplaza x por su valor en el límite y ve de qué tipo de indeterminación se trata
2. Salva la indeterminación y resuelve nuevamente.

A partir de ahora cuando nos encontremos con un ejercicio así lo resolveremos de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x^2-2x+1}^{\to 0}}{\underbrace{x^3-x}_{\to 0}} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)x} = \lim_{x\to 1} \frac{\overset{\to 1}{x-1}}{\underset{\to 1}{(x+1)}\underset{\to 1}{x}} = \frac{0}{2} = 0.$$

• 8.2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\overset{\to 1}{x-1})\sqrt{2-x}}{x^2-1} \Longrightarrow \dfrac{0}{0}$ indeterminacion

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\overset{\to 1}{\sqrt{2-x}}}{\underset{\to 1}{x+1}} = \frac{1}{2}.$$

• 8.3) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\underbrace{\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}}_{\to 0\ (7.1)} + \underbrace{\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}}_{\to 1/2\ (7.2)} \right] \underset{\boxed{A1}}{=} 0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

• 8.4) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\underbrace{\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}}_{\to 1/2} \right] \underset{\boxed{A2}}{=} 0 \cdot \dfrac{1}{2} = 0.$

• 8.5) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\underbrace{\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}}_{\to 1/2\ (7.2)} \right]^{\frac{-x^2+1}{x-1}}$

Veamos a qué converge el exponente:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(1+x)(1-x)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} (-1)(1+x) = -2$$

Entonces, usando $\boxed{A4}$ como $\frac{1}{2} > 0$:

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1} \right]^{\frac{-x^2+1}{x-1}} = \lim_{x \to 1} \left[\frac{1}{2} \right]^{-2} = 4 \text{ -}$$

En estos ejercicios se ve bien la forma en que aplicar álgebr de límites te ahorra trabajo cuando aparecen funciones inversa símiles.

---

⑨ Siendo $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1} = l$ halle el máximo radio del entorno de $x = 1$ para que $sg\ f(x) = sg\ l$, es decir, $A = \{x \in E'(1;\delta) / sg\ f(x) = sg\ l\}$

Vimos en 8.2 que

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

Como $sg\, l = sg\, \frac{1}{2} =$ "positivo", o sea buscamos un entorno del 1, donde $f(x) > 0$.

Sabemos que este entorno va a existir por el resultado 4.2), la forma de averiguarlo es mucho más sencilla que demostrar su existencia.

$$f(x) > 0 \iff \underbrace{\begin{array}{c} (x-1)\sqrt{2-x} > 0 \\ \wedge \\ x^2-1 > 0 \end{array}}_{ⓐ} \quad \text{ó} \quad \underbrace{\begin{array}{c} (x-1)\sqrt{2-x} \\ \wedge \\ x^2-1 < 0 \end{array}}_{ⓑ}$$

ⓐ $(x-1)\sqrt{2-x} > 0$ $\quad \underline{x \leq 2}$ porque sino la raíz no está definida

$x - 1 > 0 \quad \underline{x > 1}$

$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow \underline{-1 > x > 1}$

Conclusión: $\boxed{x \in (1,2)}$

(b) $(x-1)\sqrt{2-x} < 0$ Como $\sqrt{2-x} \geq 0 \ \forall x \leq 2$, debe ser

$x - 1 < 0 \Rightarrow \underline{x < 1}$ (Para que el producto de negativo)

$x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow \underline{-1 < x < 1}$

Conclusión: $\boxed{x \in (-1,1)}$

En consecuencia un A posible es $A = (-1,1) \cup (1,2)$

Eligiendo $\delta = 1$ $\quad E'(1,1) = (0,1) \cup (1,2) \subseteq A$.

---

(10) Siendo $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}$

10.1. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

10.2. Calcule $\lim\limits_{x \to a} f(x) \quad \forall a \in \Re - \{0\}$

• (10.1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \dfrac{0}{0}$ indeterminación

Acá tenemos el cociente entre dos raíces, la indeterminación se salva multiplicando por los respectivos "conjugados", (ver UNIDAD 1).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)\left(\sqrt{x^2+1} + 1\right)\left(\sqrt{x^2+16} + 4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16} - 4\right)\left(\sqrt{x^2+16} + 4\right)\left(\sqrt{x^2+1} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2+1-1)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{(x^2+16-16)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1} \underset{\boxed{A1} \text{ y } \boxed{A5}}{=} \frac{\sqrt{16}+4}{\sqrt{1}+1} = \frac{8}{2} = 4$$

• 10.2) $\lim_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ $\begin{array}{l} \longrightarrow \sqrt{a^2+1}-1 \\ \longrightarrow \sqrt{a^2+16}-4 \end{array}$

Para poder decir que el límite es el cociente entre estos dos límites y aplicar $\boxed{A3}$, debe ser

$$\sqrt{a^2+16}-4 \neq 0$$

Entonces

$$\sqrt{a^2+16} \neq 4 \iff a^2+16 \neq 16 \iff a^2 \neq 0$$

Entonces debe ser $a \neq 0$, pero $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \frac{\sqrt{a^2+1}-1}{\sqrt{a^2+16}-4} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

($a=0$ analizado en 10.1))

---

(11) Calcule $\lim_{x \to 2} f(x)$, si $\forall x \in E'(2;\delta): |f(x)-7| \leq 5(x-2)^2$

Sabemos que

$$|f(x)-7| \leq 5(x-2)^2$$

Aplicando propiedad del valor absoluto, esto sucede si

$$-5(x-2)^2 \leq f(x)-7 \leq 5(x-2)^2$$

$$7 - 5(x-2)^2 \leq f(x) \leq 5(x-2)^2 + 7$$

Acá tenemos algo parecido a la propiedad del "sánguche" que aparece en el ejercicio 5. Si vemos que ambas cotas convergen al mismo límite cuando $x \to 2$, entonces ese será el límite de $f(x)$.

Pero $\lim_{x \to 2} 7 - 5(\overset{\nearrow 2}{x}-2)^2 = 7 - 0 = 7$

y $\lim_{x \to 2} 7 + 5(x-2)^2 = 7 + 0 = 7$

Tenemos entonces:

$$\underbrace{7 - 5(x-2)^2}_{\downarrow \atop 7} \leq \underset{\downarrow \atop 7}{f(x)} \leq \underbrace{5(x-2)^2 + 7}_{\downarrow \atop 7}$$

Entonces $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$

---

(12) Calcule $\lim_{x \to \pi} [f(x).\text{sen}\, x]$, si $\forall x \in \Re : f^2(x) \leq 9$

Como $f^2(x) \leq 9$, $|f(x)| \leq 3$, por lo tanto la f está acotada. Por otro lado:

$\lim_{x \to \pi} \text{sen}\, x = 0$. Entonces para averiguar $\lim_{x \to \pi} f(x).\text{sen}\, x$,

podemos aplicar el resultado demostrado en el ejercicio 4.4):

Si f está acotada y $\lim_{x \to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x).g(x) = 0$.

Concluyendo que $\lim_{x \to \pi} f(x)\, \text{sen}\, x = 0$.

---

(14) Calcule $\lim_{x\to 2} f(x-2) \quad \forall x \in E'(0;\delta): x^2 \le f(x) \le arc\,\text{sen}\, x^2$

Primero usaremos:

$$\text{"} \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x+a) \text{"}$$

Pues cuando x se acerca a 0, $x+a$ se acerca a a, si uno hace $z = x+a$, tiene que $\lim_{x\to 0} f(x+a) = \lim_{z\to a} f(z)$, pero escribir z o x es lo mismo pues se trata de una variable.

$$\lim_{x\to 2} f(x-2) = \lim_{x\to 0} f(x-2+2) = \lim_{x\to 0} f(x).$$

Pero la función f está acotada superior e inferiormente, por las funciones x^2 y $\text{arcsen}\, x^2$, si probamos que estas dos funciones convergen al mismo límite cuando $x \to 0$, entonces ese será el límite de la f.

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

$\lim_{x\to 0} \text{arcsen}\, x^2 = 0$ sale reemplazando x por cero, como el arcsen está definido allí y no me queda ninguna indeterminación, el límite da 0.

Quedó

$$\underset{\downarrow\atop 0}{x^2} \le \underset{\downarrow\atop 0}{f(x)} \le \underset{\downarrow\atop 0}{\text{arcsen}\, x^2} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x-2) = 0.$$

Ej (18) Demuestre que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l$$

EJ18) Cuando trabajamos con límite, x se acerca al valor a por ambos lados, siendo la definición

"$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$".

Nos puede interesar saber qué sucede cuando x se acerca a a únicamente por la izquierda; esto es:

"$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\ a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l^-| < \varepsilon$"

Y análogamente por la derecha:

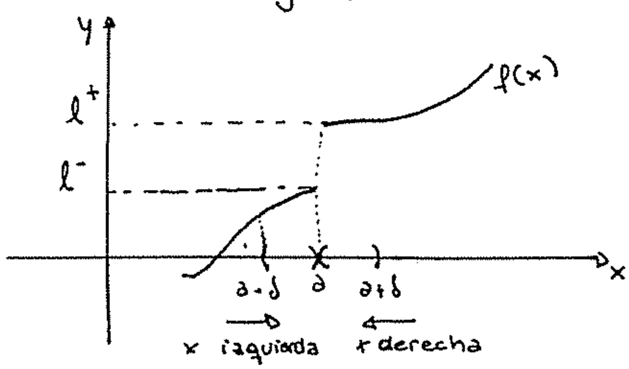
"$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\ a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l^+| < \varepsilon$"

Simbolizamos estas dos últimas definiciones, cuando se cumplen:

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l^-$ "<u>límite lateral izquierdo</u>"

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l^+$ "<u>límite lateral derecho</u>"

Puede suceder que estos dos límites laterales sean distintos, lo cual se entiende bien con un gráfico:



Queda también claro, a partir del gráfico, que si los límites laterales no coinciden, entonces el límite no existe. Esta conclusión se formaliza con el ej 18) que dice "Si el límite existe, entonces los límites laterales también y coinciden, y viceversa". Veamoslo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

$\Rightarrow$) Veremos que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$, el límite lateral derecho se ve de la misma manera:

Dado $\varepsilon > 0$, usando que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, sabemos que $\exists \delta > 0 /$
$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Pero si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow -\delta < x - a < \delta \quad (x \neq a)$

$\Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta$; en particular si $x < a < a+\delta$ son menos los x, por lo tanto sigue valiendo que $|f(x)-\ell| < \varepsilon$ que es precisamente la definición de límite lateral izquierdo.

Vimos que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$.

De la misma manera si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell .$$

$\Leftarrow$) Es trivial pues juntando las dos definiciones de límite lateral se obtiene la definición de límite.

---

(23) Siendo $f(x) = \begin{cases} -bx & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + ax & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -bx + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$ determine las constantes *"a"* y *"b"* para que existan los límites en $x = -1$ y en $x = 2$

Acá usaremos el resultado del ejercicio 18) que dice que si los límites laterales coinciden entonces el límite existe y vale lo mism que los límites laterales. Por eso lo que debemos hacer es averiguar los límites laterales de la f y acomodar a y b para que coincidan.

$$\lim_{\substack{x \to -1^- \\ (x < -1)}} f(x) = \lim_{x \to -1^-} -bx = -b(-1) = b$$

DEBEN COINCIDIR

$$\lim_{\substack{x \to -1^+ \\ (x>-1)}} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2 + ax = (-1)^2 + a(-1) = 1 - a$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 2^- \\ (x<2)}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 + ax = (2)^2 + 2a = 4 + 2a \\ \lim\limits_{\substack{x \to 2^+ \\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} -bx + a = -2b + a \end{array}\right\} \text{DEBEN COINCIDIR.}$$

Haciendo coincidir los límites laterales:

$$b = 1 - a \quad (1) \qquad\qquad 4 + 2a = a - 2b \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$4 + 2a = a - 2(1 - a)$$

$$4 + 2a = a - 2 + 2a$$

$$4 + 2a = 3a - 2$$

$$\boxed{6 = a}$$

Reemplazando en (1):

$$\boxed{b = 1 - 6 = -5}$$

---

24) Halle $n \in \aleph$ tal que exista $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ siendo: $f(x) = \begin{cases} (x+1)^n \operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > -1 \\ |x+1| & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

Nuevamente buscamos el valor de los límites laterales en el punto del problema, o sea el -1.

$$\lim_{x \to -1^-} |x+1| = \lim_{x \to -1^-} -(x+1) = -(-1+1) = 0 .$$

$$x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow |x+1| = -(x+1)$$

$$\lim_{x\to -1^+} (x+1)^n \underbrace{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{x+1}}_{\text{acotado}}$$ separaremos en casos según el signo de n.

$\boxed{n=0}$ $$\lim_{x\to -1^+} (x+1)^0 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{\underset{\to 0}{x+1}} \Big\}^{\to\infty} \nexists$$

$\boxed{n<0}$ $$\lim_{x\to -1^+} \underbrace{(\underset{\to 0}{x+1})^{n<0}}_{\to\infty} \underbrace{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{x+1}}_{\text{acotado.}} \quad \nexists$$

$\boxed{n>0}$ $$\lim_{x\to -1^+} (\underset{\to 0}{x+1})^n \underbrace{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{x+1}}_{\text{acotado}} \underset{4.4)}{=} 0.$$

O sea que los límites coinciden si $n>0$, lo que es lo mismo $n\in\mathbb{N}$.

NOTA POR SI TE INTERESA:

Recién afirmamos, con mucha soltura, sobre dos límites que no existen. La manera formal de ver esto es con la negación de la definición de límite: "Existe $\varepsilon>0$, tal que $\forall\delta$ $0<|x-a|<\delta$ $|f(x)-\ell|>\varepsilon$". También hay resultados que involucran a sucesiones que facilitan estas pruebas de "no existencia". Por ahora no los veremos.

---

(25) Sabiendo que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ pruebe que $\lim_{z\to 0^+}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$

Si $x\to+\infty$, siempre podemos considerar $x>0$. Hagamos el cambio de variables $z=\frac{1}{x}$, entonces siempre $z>0$.

Además si $x\to+\infty \Rightarrow \frac{1}{\underset{\to \text{positivo.}}{x}} \to 0^+ \Rightarrow z\to 0^+$

Entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{z \to 0^+} f(z)$

En nuestro caso: si $z = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{z} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = (1+z)^{1/z}$

y $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0^+} (1+z)^{1/z} = e$.

---

26 Calcule los siguientes límites

26.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

26.2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$

26.3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]$

26.4. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$

• 26.1) Todos estos límites te van a parecer fáciles si ensayaste con los "límites que involucran al número e" en la UNIDAD 2 BIS correspondiente a sucesiones. Los trucos que hay que hacer son básicamente los mismos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1+1+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\underbrace{\frac{x^2-1}{2}}_{\text{lo llevo al exponente}}}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{2x^2}{x^2-1}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}}_{e \text{ haciendo } \frac{x^2-1}{2}=z}\Bigg]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}}$$

Falta averiguar $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}$

Hacemos lo mismo que hacíamos con las sucesiones dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia que encontram en la fracción. En este caso es x^2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} = \frac{2}{1-0} = 2,$$

Entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} = e^2 .$$

- 26.2) Hay un error en el enunciado y debería decir:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} (1+\operatorname{sen} x)^{1/x} = \lim_{x \to 0^+} (1+\operatorname{sen} x)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \Big(\underbrace{(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}}_{\to e \text{ haciendo } z = \operatorname{sen} x} \Big)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1} = e^1 = e .$$

- 26.3) En este caso la f a la cual le debemos averiguar el límite es $f(x) = x \cdot [\ln(x+a) - \ln x]$, aplicando propiedades del logaritmo vistas en la unidad 2, podemos reescribir $f(x)$:

$$f(x) = \ln \left(\frac{x+a}{x} \right)^x$$

Sea $g(x) = e^{f(x)} = e^{\ln\left(\frac{x+a}{x}\right)^x} = \left(\frac{x+a}{x} \right)^x$

Y averigüemos $\lim_{x \to +\infty} g(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+a}{x} \right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{a}} \right)^x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \Bigg[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{a}} \right)^{\frac{x}{a}}}_{\to e \text{ haciendo } z = \frac{x}{a}} \Bigg]^{a} = e^{a}.$$

Pero $e^{a} = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{f(x)} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

26.4) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$, usaremos que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - 1}{x} = 1$

Esto último se ve de la siguiente manera.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x}-1}{x} \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix}$, o sea que es una indeterminación.

Haciendo el cambio de variables $z = e^{x} - 1$, entonces si $x \to 0$ tenemos que $z \to 0$ y además:

$$z = e^{x} - 1 \Leftrightarrow z + 1 = e^{x} \Rightarrow x = \ln(z+1) \quad (z > -1)$$

Entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{1/z}} \underset{\substack{\boxed{A3} \\ y \\ \boxed{A6}}}{=} \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{z \to 0} (z+1)^{1/z}\right)} \underset{\text{EJ23}}{=} \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1.$$

En definitiva $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - 1}{x} = 1}$

Ahora hagamos el ejercicio: $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e} \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix}$ indet.

Haciendo $z = \ln x - 1 \Rightarrow z + 1 = \ln x \Rightarrow e^{z+1} = x$,

además cuando $x \to e$, $\ln x - 1 \to \ln e - 1 = 0 \Rightarrow z \to 0$.

Entonces:

$$\lim_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{e^{z+1} - e} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{e(e^z - 1)} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{1}{e\underbrace{\left(\frac{e^z - 1}{z}\right)}_{\to 1 \text{ x lo visto}}} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

---

(27) Halle la constante $h \in \Re$ de modo tal que exista $\lim_{x \to 0} f(x) = l$ y determinar $l \in \Re$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-h)^2(x+1)}{2(1-\cos x)} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Intentamos hacer coincidir los límites laterales:

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ (x>0)}} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

Hacemos $z = \ln(x+1)$
Cuando $x \to 0$, $z \to 0$ y
$e^z - 1 = x$

$$= \lim_{z \to 0^+} \frac{z}{e^z - 1} = 1$$ lo visto en el ejercicio anterior.

O sea que busco h tal que el límite lateral izquierdo también de 1. Esto es:

$$\lim_{\substack{x \to 0^- \\ (x<0)}} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{(x-h)^2(x+1)}{2(1-\cos x)}$$

Si fuese $h \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \dfrac{\overbrace{(x-h)^2}^{\to h^2}\overbrace{(x+1)}^{\to 1}}{\underbrace{2(1-\cos x)}_{\to 0}} = \dfrac{h^2 \overset{\neq 0}{}}{0} = +\infty$

Entonces no coincidirían los límites laterales y no existiría

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Supongamos ahora que $h=0$, busco

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(x+1)}{2(1-\cos x)}$$

Hay que usar lo que ya sabemos, y sabemos que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}}{x} = 1$.

Quiero que aparezca un sen x, teniendo en cuenta que $1-\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$, multiplicamos por $(1+\cos x)$ en el denominador y en el numerador y obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(x+1)(1+\cos x)}{2\underbrace{(1-\cos x)(1+\cos x)}_{(1-\cos^2 x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x+1)(1+\cos x)}{2\ \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \overbrace{\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}}^{\to 1} \cdot \frac{\overset{\to 0}{(x+1)}\overset{\to 1}{(1+\cos x)}}{2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{2} = \frac{2}{2} = 1 .$$

Entonces la condición para que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ es que $\boxed{h=0}$.

---

(28) Halle la constante $k \in \Re$ tal que: $\lim\limits_{x\to k} \frac{x^3-7x+6}{x^3+x^2-6x}$ sea un cociente de infinitésimos.

Para que sea un cociente de infinitésimos, tanto el numerador como el denominador deben converger al valor 0. O sea $k^3-7k+6=0$ $\boxed{1}$ y también $k^3+k^2-6k=0$ $\boxed{2}$

O sea que tenemos que encontrar las raíces de estos polinomios y ver si coinciden en alguna.

$\boxed{2}$ $k^3+k^2-6k=0 \iff k(k^2+k-6)=0$

Resolviendo la cuadrática que quedó, las raíces son $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ si $ak^2+bk+c=0$.

En este caso $a=1$, $b=1$, $c=-6$ $\Rightarrow$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4.1(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

Entonces las raíces son $k = \frac{-1+5}{2} = 2$ ó $k = \frac{-1-5}{2} = -3$

Resumiendo, las raíces de k^3+k^2-6k son $k = 0, 2$ ó -3.
Veamos si alguna de estas también es raíz de $\boxed{1}$

$k^3-7k+6\big|_0 = 0 - 7.0 + 6 = 6 \Rightarrow 0$ no es raíz

$k^3-7k+6\big|_2 = 2^3 - 7.2 + 6 = 8 - 14 + 6 = 0 \Rightarrow 2$ sí es raíz

$k^3-7k+6\big|_{-3} = (-3)^3 + 7.3 + 6 = -27 + 21 + 6 = 0 \Rightarrow -3$ sí es raíz.

Obtuvimos que los posibles valores de k son 2 ó -3.

---

29 Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}(x^2+1)}{g(x)}$ si $\forall x \in \Re : x^2+1 \le g(x)$. Justifique adecuadamente.

Como está planteado el ejercicio no podemos afirmar nada; el límite puede dar cosas distintas según sea g, veamos dos ejemplos:
Supongamos que $g(x) = x^2+1$, entonces evidentemente vale que

$$x^2+1 \le g(x) = x^2+1 \qquad \text{y} \qquad \frac{e^x(x^2+1)}{x^2+1} = e^x$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(x^2+1)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(x^2+1)}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Por otra parte, consideremos $g(x) = (x^2+1)(1+e^x)$. En este caso también vale que

$$x^2+1 \le g(x), \qquad \text{pues } x^2+1 \le (x^2+1)+\underbrace{(x^2+1)e^x}_{\ge 0} = (x^2+1)(1+e^x)$$

Y ahora el límite da

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(x^2+1)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(x^2+1)}{(e^x+1)(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\to 0}} = 1$$

---

(30) En cada caso indique si existe indeterminación y de qué tipo; luego, si existe, calcule el límite indicado:

- 30.1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$

↳ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8 \to 0}{x^2-3x+2 \to 0}$ indeterminación. Como tenemos un cociente entre polinomios los factorizamos:

Entonces $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x-1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x+4}{x-1} = \dfrac{2^2+2.2+4}{2-1} = \boxed{12}$

- 30.2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2}{2-2^{\frac{1}{x+1}}}$

↳ Este es un buen ejemplo para no calcular el límite a los apurones. El lugar del problema es el $2^{\frac{1}{x+1}}$.

Si $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^+} 2^{\frac{1}{x+1}} = 2^{+\infty} = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -1^+} \frac{2}{2 - \underbrace{2^{\frac{1}{x+1}}}_{+\infty}} = \frac{2}{-\infty} = \underline{\underline{0}}.$$

Por otro lado $\lim\limits_{\substack{x \to -1^- \\ x<-1 \\ x+1<0}} 2^{\overset{\frac{1}{x+1}}{\hat{0}}} = 2^{-\infty} = 0.$

Entonces $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2}{2 - \underbrace{2^{\frac{1}{x+1}}}_{0}} = \dfrac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$

Como los límites laterales no coinciden, el límite $\nexists$.

- 30.3. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1} \right)$

$\hookrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{\infty} - \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\infty} = \infty - \infty$ Indeterminación

Para salvar la indeterminación, multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2+2) - (x^2+1)}{\left(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{\infty} + \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

- 30.4. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{9 - x^2}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

$\hookrightarrow \lim_{x \to 3^+} \frac{9-x^2 \longrightarrow 0}{\sqrt{x}-\sqrt{3} \longrightarrow 0}$ indeterminación.

Desarrollemos $(9-x^2) = (3-x)(3+x) = (\sqrt{3}-\sqrt{x})(\sqrt{3}+\sqrt{x})(3+x)$

Entonces:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{9-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{x})(\sqrt{3}+\sqrt{x})(3+x)}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})} =$$

$$= \lim_{x \to 3^+} (-1)(\sqrt{3}+\underset{\sqrt{3}}{\underset{\downarrow}{\sqrt{x}}})(3+\underset{3}{\underset{\downarrow}{x}}) = -1(\sqrt{3}+\sqrt{3})(3+3) = -6.2\sqrt{3}$$

$$= \boxed{-12\sqrt{3}}$$

- 30.5. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$\hookrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} \longrightarrow 0}{x \longrightarrow 0}$ indeterminación. Habiendo raíces, multiplico por el conjugado.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \text{(distribuyendo)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{(\sqrt{1+\underset{0}{\underset{\downarrow}{x}}}+\sqrt{1-\underset{0}{\underset{\downarrow}{x}}})} = \frac{2}{1+1} = \boxed{1}$$

- EJEMPLO AGREGADO $\longrightarrow$ $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}$

$\hookrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1 \longrightarrow 0}{x^2 \longrightarrow 0}$ indeterminación.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x^2\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\underset{0}{x}\left(\underset{0}{\sqrt{x+1}}+1\right)} = \frac{1}{0.2} = \frac{1}{0} = \boxed{\infty}$$

- 30.6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{1-x^3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1}{\underset{0^+}{x-1}} + \dfrac{3}{1-x^3} \right) = \infty - \infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{1-x^3} \right) = -\infty + \infty \end{array}\right\} \text{indeterminado.} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{(-1)(x^2+x+1)+3}{1-x^3} \right) =$$

$1-x^3 = (x-1)(x^2+x+1)(-1)$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x^2-x-1+3}{1-x^3} = \lim_{x \to 1} \frac{-x^2-x+2}{1-x^3} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-1} \begin{array}{l}\to 0 \\ \to 0\end{array}$$

Nuevamente tenemos que salvar la indeterminación:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{\overset{1}{x}+2}{\underset{1}{x^2}+\underset{1}{x}+1} = \frac{3}{3} = \boxed{1}$$

- EJEMPLO AGREGADO $\to$ $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2-5x+6}} \Rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}\sqrt{3-x}} = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{\sqrt{3-x}} = \frac{1}{\sqrt{3-2}} = \boxed{1}$$

- 30.7. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x}$

$\hookrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x} \begin{array}{l}\longrightarrow 0 \\ \longrightarrow 0\end{array}$

Usaremos que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{\cos x})}{x}\frac{(1+\sqrt{\cos x})}{(1+\sqrt{\cos x})} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x(1+\sqrt{\cos x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1} \frac{\overset{\to 0}{\operatorname{sen} x}}{\underset{\to 1}{(1+\sqrt{\cos x})}\underset{\to 1}{(1+\cos x)}} =$$

$$= 1 \cdot 0 = \boxed{0}$$

- 30.8. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{9x^2+x+2}+3x}$

$\hookrightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{9x^2+x+2}+3x} \begin{array}{l}\longrightarrow +\infty \\ \longrightarrow +\infty\end{array}$ indeterminación

Divido denominador y numerador por $x = \sqrt{x^2}$ (si $x>0$).

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{\sqrt{x^2}} + \frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{9x^2+x+2}}{\sqrt{x^2}} + \frac{3x}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{4+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}} + \sqrt{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{9+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}+\underset{\to 0}{\frac{2}{x^2}}} + 3} =$$

$$= \frac{\sqrt{4}+\sqrt{1}}{\sqrt{9}+3} = \frac{2+1}{3+3} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Falta considerar el caso en que $x \to -\infty$. Es todo igual salvo que $\sqrt{x^2} = -x$ pues $x<0$ y queda:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} + \frac{3x}{-x}} = \frac{\sqrt{4}+\sqrt{1}}{\sqrt{9}-3} = \frac{2+1}{3-3} = \frac{3}{0} = \boxed{\infty}.$$

- 30.10. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos^2 x - 2\cos x - 3}{\operatorname{sen}^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1}$

$\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos^2 x - 2\cos x - 3}{\operatorname{sen}^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1} = \dfrac{0}{0}$ $\quad \left(\begin{array}{l}\cos \pi = -1 \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1\end{array}\right)$

Usaremos el siguiente resultado de trigonometría:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha}$$

Entonces

$$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}x \overset{0}{\cos\frac{\pi}{2}} - \overset{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} \cos x = -\cos x.$$

Entonces $\operatorname{sen}^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$. y

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\cos^2 x - 2\cos x - 3}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x \to \pi} \frac{(\cos x + 1)(\cos x - 3)}{(\cos x + 1)(\cos x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{\overset{\nearrow -1}{\cos x} - 3}{\underset{\searrow -1}{\cos x} - 1} = \frac{-4}{-2} = \boxed{2}$$

- 30.9. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (1+\cos x)^{\operatorname{tg} x}$

$\hookrightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (1+\cos x)^{tg\,x} = 1^{\infty}$ indeterminado.

Parece ser un límite que involucra a e. Recordemos que

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x} = e$$

Entonces

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (1+\cos x)^{tg\,x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left((1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} \right)^{\operatorname{sen} x} = e^1 = \boxed{e}$$

• AGREGADO $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{9-\sqrt{x^2-1}}-3}$

$\hookrightarrow \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{9-\sqrt{x^2-1}}-3} \quad \frac{\to 0}{\to 0}$ indeterminación

Conjugando una vez, al igual que en varios ejercicios anteriores:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{9-\sqrt{x^2-1}}-3} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{9-\sqrt{x^2-1}}+3\right)}{-\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\left(\overbrace{\sqrt{9-\sqrt{x^2-1}}}^{\to 0}+3\right)}{-\sqrt{\underbrace{x+1}_{\to 1}}} = -\frac{6}{\sqrt{2}} = -\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \boxed{-3\sqrt{2}}$$

• AGREGADO $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

$\hookrightarrow \lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$ indeterminado.

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0} (1-\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{-\operatorname{sen}^2 x}\frac{1}{2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} (1-\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{1}{-\operatorname{sen}^2 x}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2x}} = \lim_{x\to 0} \underbrace{(1-\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{1}{-\operatorname{sen}^2 x}}}_{e}\underbrace{(-\operatorname{sen} x)}_{0}\underbrace{\frac{\operatorname{se}}{2}}_{\frac{1}{2}}$$

$$= e^0 = 1 .$$

- AGREGADO $\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt[3]{t^3+1}-\sqrt[3]{t^3+t}\right)$

$$\to \lim_{t\to\infty}\left(\sqrt[3]{t^3+1}-\sqrt[3]{t^3+t}\right) \therefore \infty-\infty \text{ indeterminación.}$$

Para salvar la indeterminación usaremos : $(x^3-y^3) = (x-y)(x^2+xy+y\ \ )$

Entonces:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(\underbrace{\sqrt[3]{t^3+1}}_{x}-\underbrace{\sqrt[3]{t^3+t}}_{y})\left[\underbrace{\left(\sqrt[3]{t^3+1}\right)^2}_{x^2}+\underbrace{\sqrt[3]{(t^3+1)(t^3+t)}}_{xy}+\underbrace{\left(\sqrt[3]{t^3+t}\right)^2}_{y^2}\right]}{\left(\sqrt[3]{t^3+1}\right)^2+\sqrt[3]{(t^3+1)(t^3+t)}+\left(\sqrt[3]{t^3+t}\right)^2}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{(t^3+1)-(t^3+t)}{\left(\sqrt[3]{t^3+1}\right)^2+\sqrt[3]{(t^3+1)(t^3+t)}+\left(\sqrt{t^3+t}\right)^2} = \text{(restando)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1-t}{\left(\sqrt[3]{t^3+1}\right)^2+\sqrt[3]{(t^3+1)(t^3+t)}+\left(\sqrt[3]{t^3+t}\right)^2} = \text{(usando } \left(\sqrt[3]{\ }\right)^2 = \sqrt[3]{(\ )^2}\text{)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1-t}{\left(\sqrt[3]{(t^3+1)^2}+\sqrt[3]{(t^3+1)(t^3+t)}+\sqrt[3]{(t^3+t)^2}\right.} = \text{(distribuyendo)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1-t}{\sqrt[3]{t^6+2t^3+1}+\sqrt[3]{t^6+t^4+t^3+t}+\sqrt[3]{t^6+2t^4+t^2}} =$$

% denominador y numerador x mayor potencia $t^2 = \sqrt[3]{t^6}$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{t^2} - \frac{t}{t^2}}{\sqrt[3]{\frac{t^6+2t^3+1}{t^6}} + \sqrt[3]{\frac{t^6+t^4+t^3+t}{t^6}} + \sqrt[3]{\frac{t^6+2t^4+t^2}{t^6}}} =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\overset{\to 0}{\frac{1}{t^2}} - \overset{\to 0}{\frac{1}{t}}}{\sqrt[3]{1 + \underset{\to 0}{\frac{2}{t^3}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{t^6}}} + \sqrt[3]{1 + \underset{\to 0}{\frac{1}{t^2}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{t^3}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{t^5}}} + \sqrt[3]{1 + \underset{\to 0}{\frac{2}{t^2}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{t^4}}}} = \frac{0}{3} = \boxed{0}.$$

- 30.12. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{3x^4+x^2}}$

↳ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{3x^4+x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$. Indeterminación

En este caso, la mayor potencia del cociente es $x^2 = \sqrt{x^4}$;
entonces divido denominador y numerador por $\sqrt{x^4}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^4}}}{\frac{\sqrt{3x^4+x^2}}{\sqrt{x^4}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}}{\sqrt{\frac{3x^4+x^2}{x^4}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- 30.13. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_px^p}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_qx^q}$ con $a_pb_q \neq 0$ Para $p<q$, $p=q$, y $p>q$

↳ i) si $p<q$, entonces la mayor potencia es x^q y dividimos numerador y denominador por x^q.

$$(q-p>0)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_px^p}{x^q}}{\dfrac{b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_qx^q}{x^q}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{a_0}{x^q}+\dfrac{a_1}{x^{q-1}}+\dots+\dfrac{a_p}{x^{q-p}}}{\dfrac{b_0}{x^q}+\dfrac{b_1}{x^{q-1}}+\dots+b_q} = (A)$$

todos los términos en este cociente tienden a 0 cuando $x\to\infty$, excepto b_q que permanece constante y distinto de 0 pues $b_q\cdot a_p\neq 0$. Entonces:

$$(A) \longrightarrow \frac{0}{b_q} = \boxed{0}$$

(ii) Si $q=p$, hacemos lo mismo que en el ítem anterior, salvo que en (A), $x^{p-q}=x^0=1$ y obtenemos que todos los términos convergen a 0 salvo a_p y b_q que permanecen constantes y distintos de 0 pues $b_q\cdot a_p\neq 0$. Entonces

$$(A) \longrightarrow \boxed{\frac{a_p}{b_q}}$$

(iii) Falta considerar el caso $p>q$, la potencia mayor será x^p y hay que dividir numerador y denominador por x^p

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_px^p}{x^p}}{\dfrac{b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_qx^q}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{a_0}{x^p}+\dfrac{a_1}{x^{p-1}}+\dots+a_p}{\dfrac{b_0}{x^p}+\dfrac{b_1}{x^{p-1}}+\dots+\dfrac{b_q}{x^{p-q}}} = (B)$$

$$(p-q>0)$$

Haciendo el mismo razonamiento que en (i) y en (ii):

$$(B) \longrightarrow \frac{a_p}{0} = \boxed{\infty}$$

NOTA CONCLUSIÓN: Este ejercicio te dice cómo hacer si te encontrás con cualquier cociente entre polinomios. De ahora en más obviamos la parte de dividir por la mayor potencia y directa mente afirmamos:

(I) Si el grado del de arriba es mayor $\longrightarrow \infty$

(II) " " " " " abajo es mayor $\longrightarrow 0$

(III) Si tienen = grado, $\longrightarrow$ cociente de coeficientes principales

---

• AGREGADO $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x .\ \operatorname{arctg} x)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x . \operatorname{arctg} x = 0 . \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}}_{\in\mathbb{R}} = \boxed{0}$ ∄ indeterminación.

• 30.11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\cos x . \operatorname{tg} x)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\cos x . \operatorname{tg} x) = 0 . \infty$ indeterminación, que se salva con sólo aplicar la definición de tangente:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\cos x . \operatorname{tg} x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\cos x . \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{sen} x = \boxed{1}$$

• AGREGADO $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} \quad \frac{\longrightarrow \infty}{\longrightarrow \infty} \quad \text{indeterminación.}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}}{\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{x}{x} + \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{1+1/x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{0+0}}}{\sqrt{1+0}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} = \boxed{1} .-$$

- 30.15. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1-\cos(2x)}$

$\hookrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1-\cos(2x)} = \frac{0}{0}$ indeterminación.

Nuevamente vamos a usar un resultado de la trigonometría. Es conveniente, para tu examen, que te adjuntes una tablita de ecuaciones que involucran al seno y coseno del tipo:

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$
- $\cos(x) = \cos(-x)$
- $\operatorname{sen}(2x) = 2\cos x \operatorname{sen} x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

...

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1-\cos 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1-(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1-\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2\operatorname{sen} x \cos x} = \infty .$$

- 30.14. $\lim\limits_{x \to 0} \left(1+3x^2\right)^{\frac{2}{x^2}}$

$$\lim_{x \to 0} (1+3x^2)^{\frac{2}{x^2}} \to 1^{\infty} \quad \text{indeterminación.}$$

$$\lim_{x \to 0} (1+3x^2)^{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x \to 0} (1+3x^2)^{\frac{3 \cdot 2}{3x^2}} = \lim_{x \to 0} \Big[\underbrace{(1+3x^2)^{\frac{1}{3x^2}}}_{\to e \text{ haciendo } z = 3x^2} \Big]^6$$

$$= \boxed{e^6}$$

- 30.16. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2+3x}{4+3x} \right)^{2x+1}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2+3x}{4+3x} \right)^{2x+1} \longrightarrow 1^{\infty} \quad \text{indeterminado.}$$

Este es el típico "e"mbole.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2+3x}{4+3x} \right)^{2x+1} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2+2-2+3x}{4+3x} \right)^{2x+1} = \lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{2}{4+3x} \right)^{2x+1} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{4+3x}{2}} \right)^{2x+1} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{4+3x}{2}} \right)^{\left(-\frac{4+3x}{2}\right)\left(\frac{-2}{4+3x}\right)2x+1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \Bigg[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{-\frac{4+3x}{2}} \right)^{\left(-\frac{4+3x}{2}\right)}}_{\to e} \Bigg]^{\overbrace{\left(\frac{-4x-2}{4+3x} \right)}^{\to -\frac{4}{3} \text{ usando } 28.17)}} = e^{-\frac{4}{3}}$$

- 30.17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6^{\frac{1}{x}} - 2}{4 + 6^{\frac{1}{x}}}$

Este límite es similar al 30.2) donde había que tener cuidado porque si $x \to 0^-$ entonces $\frac{1}{x} \to -\infty$ y $6^{\frac{1}{x}} \to 0$ y si $x \to 0^+$ entonces $\frac{1}{x} \to +\infty$ y $6^{1/x} \to +\infty$

DE ESTAS CONSIDERACIONES DECIMOS QUE:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{6^{\frac{1}{x}} - 2}{4 + 6^{\frac{1}{x}}} = -\frac{2}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{6^{\frac{1}{x}} - 2}{4 + 6^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{6^{\frac{1}{x}} - 2}{6^{\frac{1}{x}}}}{\frac{4 + 6^{\frac{1}{x}}}{6^{\frac{1}{x}}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \frac{2}{6^{\frac{1}{x}}}}{\frac{4}{6^{\frac{1}{x}}} + 1} = \boxed{1}$$

Como los límites laterales no coinciden, el límite no existe.

- AGREGADO $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} \right)^{\ln(x-2)}$

$\hookrightarrow \lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} \right)^{\ln(x-2)} \longrightarrow \left(\frac{0}{0} \right)^0$ indeterminado.

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} \right)^{\ln(x-2)} = \lim_{x \to 3} \left(\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-1)} \right)^{\ln(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\ln(x-2)} = \left(\frac{4}{2} \right)^0 = \boxed{1}$$

- 30.18. $\lim_{x \to -2} \left[(x+2)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} \right]$

$\hookrightarrow$ EL SENO ESTÁ SIEMPRE ACOTADO, COMO:

$$(x+2)^2 \xrightarrow[x \to -2]{} 0 \implies f(x) \longrightarrow 0.$$

- 30.19. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x} \rightarrow \frac{0}{0}$ indeterminado.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x} \underset{\text{conjugado}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x})(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}{\operatorname{sen}^2 x\,(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2-(1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x\,(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x\,(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}^{\to \frac{1}{2}\ (28.26)}}{\underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}}_{\to 1}\,(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})} = \frac{1}{2.1.2\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{8}}$$

- 30.20. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}$

$\Rightarrow$ Sale haciendo $y = \operatorname{sen} x \Rightarrow x = \operatorname{arcsen} y$ y cuando $x \to 0$, $y \to 0$. Luego hay que usar 30.21).

- 30.21. $\lim_{x\to 0}\frac{2\,arc\operatorname{sen} x}{3x}$

$\Rightarrow$ cuando $x \to 0$ $\begin{cases}\operatorname{sen} x \to 0\\ \operatorname{arcsen} x \to 0\end{cases} \Rightarrow y \to 0$

Haciendo $x = \operatorname{sen} y \Rightarrow y = \operatorname{arcsen} x$, reemplazando:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{arcsen} x}{3x} = \lim_{\to 0}\frac{2y}{3\operatorname{sen} y} = \boxed{\frac{2}{3}} \quad \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\right)$$

• AGREGADO $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x}$

↳ Te va a salir usando las siguientes igualdades:

$\cos(a+x) = \cos a . \cos x - \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} x$

$\cos(a-x) = \cos a . \cos x + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} x$.

$\boxed{-2 \operatorname{sen} a}$

• AGREGADO $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{6x^2 - x^3}}{x}$

↳ $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{6x^2-x^3}}{x} \to \frac{-\infty}{\infty}$ indeterminado.

Metiendo el x dentro de la raíz:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{6x^2-x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} = \sqrt[3]{-1} = \boxed{-1}$$

• AGREGADO $\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(3-x)}{\sqrt{x^2+7} - 2\sqrt{x^2-5}}$

↳ $\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(3-x)}{\sqrt{x^2+7} - 2\sqrt{x^2-5}} \rightleftarrows \frac{0}{0}$ indeterminado.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(3-x)}{\sqrt{x^2+7} - 2\sqrt{x^2-5}} \overset{\times \text{ conjugado}}{=} \lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(3-x)\left(\sqrt{x^2+7} + 2\sqrt{x^2-5}\right)}{(x^2+7) - 4(x^2-5)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(3-x)\left(\sqrt{x^2+7} + 2\sqrt{x^2-5}\right)}{-3x^2 + 27} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(3-x)\left(\sqrt{x^2+7} + 2\sqrt{x^2-5}\right)}{3(3-x)(3+x)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(3-x)}{3-x}}_{\substack{\to 1 \\ \text{haciendo } y = 3-x}} \frac{\left(\sqrt{x^2+7} + 2\sqrt{x^2-5}\right)}{3(3+x)} = \frac{1 \cdot \left(\sqrt{16} + 2\sqrt{4}\right)}{3(3+3)} =$$

$$= \frac{4+4}{18} = \frac{8}{18} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

● 30.23. $\lim\limits_{x \to \infty} \left[x \left(arc\,\mathrm{tg}\, x - \frac{\pi}{2} \right) \right]$

↳ Debemos considerar por separado los casos $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$. Primero consideremos el segundo caso. Cuando $x \to -\infty$ el $\operatorname{arctg} x$ tiende a $-\frac{\pi}{2}$ (esto se debe a que cuando x tiende a $-\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x \to -\infty$). Entonces:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[x \underbrace{\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right)}_{-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi} \right] = -\infty \cdot -\pi = \boxed{+\infty}$$

Ahora consideremos el primer caso $(x \to +\infty)$. Tendremos en cuenta la siguiente sustitución:

$$x = \operatorname{tg} t \quad \Rightarrow \operatorname{arctg} x = t \quad \text{y cuando } x \to +\infty,\ t \to \frac{\pi}{2}$$

Entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{tg} t \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right] =$$

$$= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right] \qquad (*)$$

Tendremos en cuenta que $\cos t = -\operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$, entonces

$$(*) = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \left[\underbrace{\frac{\operatorname{sen} t}{-\operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)} \left(t - \frac{\pi}{2} \right)}_{= \operatorname{sen} t \frac{\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}{-\operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}} \right] = \boxed{-1}$$

Esto último se debe a que cuando $t \to \frac{\pi}{2}$, $t - \frac{\pi}{2} \to 0$,
entonces $\frac{t-\frac{\pi}{2}}{\text{sen}(t-\frac{\pi}{2})} \to 1$ y $\text{sen}\, t \to \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ -

---

• AGREGADO $\lim_{x \to 2} (3-x)^{\frac{3}{x-2}}$

↳ $\lim_{x \to 2} (3-x)^{\frac{3}{x-2}} \to 1^{\infty}$ indeterminado.

Para trabajar mejor hacemos la sustitucion $y = x-2$, entonces
$x = y+2$ y cuando $x \to 2$ $y = x-2 \to 2-2 = 0$.

$$\lim_{x \to 2} (3-x)^{\frac{3}{x-2}} = \lim_{y \to 0} (3-(y+2))^{\frac{3}{y}} = \lim_{y \to 0} (3-2-y)^{\frac{3}{y}} =$$

$$= \lim_{y \to 0} (1+(-y))^{\frac{-3}{-y}} = \lim_{y \to 0} \underbrace{\left((1+(-y))^{\left(\frac{1}{-y}\right)}\right)}_{e}{}^{-3} = \boxed{e^{-3}}$$

• AGREGADO $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

↳ $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix}$ $\frac{0}{0}$ indeterminado.

Habrá que usar las siguientes igualdades:

$\text{sen}(x+y) = \text{sen}\,x\cos y + \text{sen}\,y\cos x$

$\text{sen}(x-y) = \text{sen}(x+(-y))$ y usar

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,y$

$\text{sen}(x) = -\text{sen}(-x)$

$\cos(x) = \cos(-x)$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. $\left(\operatorname{sen} x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Usando todo esto deberías llegar a que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\cos 2x}{\cos x} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}} .$$

AGREGADO: $\lim_{x \to 2} (3-x)^{x^{3/2}}$

→ EN ESTE CASO NO TENEMOS MAYORES PROBLEMAS: LA BASE VERIFICA ...

$$\lim_{x \to 2} 3 - x = 1$$

Y el exponente

$$\lim_{x \to 2} x^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

Luego

$$\lim_{x \to 2} (3-x)^{x^{3/2}} = \boxed{1}$$

- 30.24. $\lim_{x \to \infty} \left(x^{-1} \cdot \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \right)$

Otra indeterminación, esta vez del tipo " $0 \cdot \infty$ ". Probablemente, lo mejor que podemos hacer es "meter" x^{-1} dentro de la raíz para reducir todo a ver que ocurre con el cociente de dos polinomios (lo que está dentro de la raíz.) Entonces:

$$\lim_{x \to \infty} x^{-1} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^2(x-1)}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

Pero

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x(1-\frac{1}{x})} = 1$$

Luego

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = \boxed{1}$$

- 30.25. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2x - arc\,\mathrm{sen}\, x}{2x + arc\,\mathrm{tg}\, x}$

Este tiene un aspecto espantoso. Si calculamos los límites del numerador y del denominador, vemos que ambos tienden a 0 de modo que es indeterminado. Para tratar de salvar la indeterminación, primero sacamos x de factor común, nos queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \operatorname{arcsen} x}{2x - \operatorname{arctg} x} = \lim_{y\to 0} \frac{x}{x} \frac{2 - \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}}{2 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}}$$

Ahora bien, tratemos de calcular los límites de $\dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}$ y $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ cuando $x \to 0$

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$

  Hagamos el cambio de variable $y = \operatorname{arcsen} x$, entonces tenemos que:

  a) Si $x \to 0$, entonces $y \to 0$.

  b) $y = \operatorname{arcsen} x \implies x = \operatorname{sen} y$

  Así que el límite que queremos calcular nos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{sen} y} = 1 \qquad \text{pues } \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

  Ahora hacemos el cambio de variable $y = \operatorname{arctg} y$, y obtenemos:

  a) Si $x \to 0$, entonces $y \to 0$.

  b) $y = \operatorname{arctg} x \implies x = \operatorname{tg} x$

Y el límite que queremos calcular nos da

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{(\operatorname{sen} y)/(\cos y)}=\lim_{y\to 0}\frac{y\cos y}{\operatorname{sen} y}=$$

$$\lim_{y\to 0}\underbrace{\frac{y}{\operatorname{sen} y}}_{\searrow 1}\underbrace{\cos y}_{\searrow 1}=1$$

Ahora juntamos todo y el límite resulta,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{arcsen} x}{2x-\operatorname{arctg} x}=\lim_{y\to 0}\frac{2-\overbrace{\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}}^{\nearrow 1}}{2-\underbrace{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}_{\searrow 1}}=\frac{2-1}{2-1}=\boxed{1}$$

• 30.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$

↳ Veamos a que tiende la base:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

Veamos que pasa entonces cuando $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)}_{\searrow 1/2}{}^{x}=0$$

Por otro parte,

$$\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)}_{\searrow 1/2}{}^{x}=+\infty$$

Por lo tanto, el límite para $x\to\infty$ no existe.

- 30.27. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{-\frac{1}{x}}$

Esta vez la indeterminación es del tipo " $0^{+\infty}$ ". El truco usual en estos casos es recurrir al logaritmo:

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(\operatorname{sen} x)^{-1/x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}\ln(\operatorname{sen} x)} \qquad (\star)$$

Y ahora todo se reduce a estudiar que pasa con

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x}\ln(\operatorname{sen} x) \ldots$$

Pero en este caso no hay nada que hacer pues $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} \ln(\operatorname{sen} x) = -\infty$; luego,

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x}\ln(\operatorname{sen} x) = +\infty$$

Para terminar, reemplazamos esto en $(\star)$ (No se olviden de esto; es una de los errores más comunes y resulta una verdadera pena pues ya está todo hecho) y nos queda

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\overbrace{-\frac{1}{x}\ln(\operatorname{sen} x)}^{\nearrow +\infty}} = \boxed{+\infty}$$

- 30.28. $\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ con $a > 0 \wedge a \neq 1$.

Indeterminación del tipo " $0/0$ ". Consideremos el cambio de variable $k = a^h - 1$; tenemos que $h \to 0 \Longrightarrow k \to 0$ y el límite que queremos calcular nos queda

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{\frac{\ln(k+1)}{\ln a}} = \ln a \lim_{k\to 0} \frac{1}{\frac{1}{k}\ln(k+1)} = \ln a \lim_{k\to 0} \frac{1}{\ln\left[(k+1)^{1/k}\right]}$$

$$k = a^h - 1 \Rightarrow \ln(k+1) = h\ln a \Rightarrow h = \ln(k+1)/\ln a$$

Pero

$$= \lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = e \Longrightarrow \lim_{k\to 0} \ln\left[(1+k)^{\frac{1}{k}}\right] = 1$$

Así que el límite da

$$\ln a \lim_{k\to 0} \frac{1}{\ln\left[(k+1)^{1/k}\right]} = \boxed{\ln a}$$

FIN DE LA PRACTICA 2