Resueltos

MATERIA: Análisis Matemático I

TITULO: T.P. Nº 6

"Calculo Integral"

Edición 2000

AUTOR: Anibal Kasero

UNIDAD 6
(ANÁLISIS I)

~ Cálculo integral ~

- **A MODO DE INTRODUCCIÓN**:

Te recuerdo que si $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua SE DICE QUE $F:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ES UNA PRIMITIVA DE f si

$$F'(x) = f(x).$$

Una consecuencia del Teorema del Valor Medio es que:
Si F_1 y F_2 son dos primitivas de $f \Longrightarrow F_1 = F_2 + k$,
O sea dos primitivas de una función difieren en una constante. Veamos la demostración:

Si F_1 y F_2 son dos primitivas de f, entonces $F_1'(x) = f(x)$ y también $F_2'(x) = f(x)$. Por lo tanto $F_1'(x) = F_2'(x)$, restando

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

Y por linealidad de la derivada:

$$(F_1 - F_2)'(x) = 0$$

Pero vimos en la unidad correspondiente a derivada que esto ocurría si $F_1 - F_2 = k$, donde k es una constante. Pasando de términos

$$F_1 = F_2 + k$$

que era el resultado que queríamos demostrar.

EL CONJUNTO DE PRIMITIVAS DE f SE LLAMA INTEGRAL INDEFINIDA DE f Y SE SIMBOLIZA MEDIANTE

$$\int f(x)\,dx$$

Por este motivo se escribe $\int f(x)\,dx = F(x) + K$, $K \in \mathbb{R}$ y $F'(x) = f(x)$, o sea, F es una primitiva particular de f.

En general hallar primitivas de una función es más difícil que encontrar su derivada, pero no imposible ...
De hecho como "la primitiva" es una especie de "operación inversa" de la derivada, a partir de la tabla de derivadas podemos construir una tabla de integrales inmediatas.

1.- $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \qquad \alpha \neq -1 \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

2.- $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + K$

3.- $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + K$

4.- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + K$

5.- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + K$

6.- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + K$

7.- $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + K$

8.- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + K$

9.- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + K$

Además de las propiedades de linealidad de la derivada se deduce la PROPIEDAD DE LINEALIDAD DE LA INTEGRAL INDEFINIDA.

10.- $\int (af(x)+bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx \quad a,b\in\mathbb{R}.$

Esta propiedad se deduce de la siguiente forma:
Sea F una primitiva de f y G una primitiva de g. Entonces, usando la definición de primitiva:

$$F' = f \quad \text{y} \quad G' = g.$$

Consideremos ahora la función $H = aF + bG$, entonces H es una primitiva de $af+bg$ pues

$$H' = (aF+bG)' = aF' + bG' = af + bg.$$

Por lo tanto

$$\int (af(x) + bg(x))dx = H + k = aF + bG + k = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx + k.$$

Recordando que el <u>conjunto</u> de primitivas de f se llama integral indefinida de f, podemos "olvidarnos" de la constante y nos quedó

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx.$$

Ya podemos comenzar los ejercicios. Iremos viendo más teoría a medida que la necesitemos.

---

1. Pruebe que si G es una primitiva de g, entonces $H(x) = G(x) + k$ con $k \in \Re$ también lo es.

Demostrado en la introducción, página 2.

---

2. Demuestre que :

2.1)

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx\right) = f(x)$$

2.2)

$$d\left(\int f(x)\, dx\right) = f(x)\, dx$$

2.3)

$$\int df(x) = f(x) + C \qquad \wedge \quad C \in \mathbb{R}$$

2.4)

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$.

• 2.1) Vimos en la introducción que

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x)$$

Pero esto es lo mismo que decir

$$\frac{d\left(\int f(x)\, dx\right)}{dx} = f(x)$$

usando la notación diferencial.

• 2.2) Se desprende del 2.1).

• 2.3) Recordando, de la unidad de derivadas que

$$f'(x) = \frac{d(f(x))}{dx}$$

Tenemos

$$d(f(x)) = f'(x)\,dx. \qquad ①$$

Entonces

$$\int d(f(x)) \underset{①}{=} \int f'(x)\,dx \underset{\substack{\text{definición}\\ \text{de primitiva}}}{=} f(x) + C \quad , C \in \mathbb{R}.$$

• 2.4) Ver página 4, en la introducción.

3. Simplifique las siguientes expresiones empleando propiedades de la integral indefinida, suponiendo que $f(x)$ es "suficientemente derivable" en cada caso.

3.1. $\int 3f'(x)dx$

3.2. $\int (4f''(x) + 5f'(x))dx$

3.3. $\frac{d}{dx}\left(\int (x^2 + \operatorname{sen} x + f(x))dx\right)$

3.4. $\frac{d}{dx}\left(x + \int f'(x)dx\right)$

3.5. $\int \left[\frac{d}{dx}(xf(x))\right]dx$

3.6. $\frac{d}{dx}\left(\int \left[\frac{d}{dx}(x^2 + 3f(x) + x)\right]dx\right)$

3.7. $\int (xf'(x) + f(x))dx$

3.8. $\int \left(\frac{d^2}{dx^2}(xf(x)) + xf'(x) + f(x)\right)dx$

• 3.1) $3\int f'(x)\,dx = 3\left(f(x) + C\right) = 3f(x) + \underbrace{3C}_{k} = 3f(x) + k$

• 3.2) $4\int f''(x)dx + 5\int f'(x)dx = 4f'(x) + 5f(x) + C$

• 3.3) sea $\int (x^2 + \operatorname{sen}x + f(x))dx = F(x) + C \Rightarrow$ la derivada de esta última es igual a la función integrada:

$$\frac{d}{dx}\left[\int (x^2 + \operatorname{sen}x + f(x))dx\right] = \frac{d}{dx}\left(F(x) + C\right) = x^2 + \operatorname{sen}x + f(x)$$

• 3.4) $\frac{d}{dx}\left(x+\int f'(x)dx\right) = \frac{d}{dx}\left(x+f(x)+c\right) = 1+f'(x)$.-

• 3.5) $\int \frac{d}{dx}(x f(x))dx = \int d(x.f(x)) = x f(x) + c$ pues:

$\frac{d}{dx}\left(x f(x)+c\right) = \frac{d}{dx}\left(x f(x)\right) + \underbrace{\frac{dc}{dx}}_{0} = \frac{d}{dx}\left(x f(x)\right)$ que es

la función integranda.-

• 3.6) $\int \left[\frac{d}{dx}(x^2+3f(x)+x\right]dx = \int d\left(x^2+3f(x)+x\right) = x^2+3f(x)+x+C$

Entonces: $\frac{d}{dx}\int\left[\frac{d}{dx}(x^2+3f(x)+x)\right]dx = \frac{d}{dx}\left(x^2+3f(x)+x+C\right) =$

$= 2x + 3f'(x) + 1$.-

• 3.7) $\int (x f'(x) + f(x))dx = \int x f'(x)dx + \int f(x)dx$

para la 1º integral uso el método de integración por partes

$x = u \rightarrow 1 = u'$

$f'(x)dx = dv \rightarrow f(x) = v$

$\int x f'(x)dx = x f(x) - \int f(x)dx$

finalmente:

$\int (xf'+f)dx = x f(x) - \int f(x)dx + \int f(x)dx = x f(x) + c$.-

•3.8) $\int \frac{d^2}{dx^2}(x f(x))\,dx + \int x f'(x)\,dx + \int f(x)\,dx$

usando el truco del item anterior

$$\frac{d}{dx}(x f(x)) + x f(x) - \int f(x)\,dx + \int f(x)\,dx$$

$$\frac{d}{dx}(x f(x)) + x f(x) = f(x) + x f'(x) + x f(x)$$

4. Investigue cuál o cuáles de las siguientes funciones tienen primitivas en $\Re$:

4.1. $h(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & si \quad x \geq 1 \\ \frac{1}{x^2+2} & si \quad 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{2} & si \quad x \leq 0 \end{cases}$

4.2. $u(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \geq 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases}$ Función "***escalón unitario***" o de "***Heaviside***"

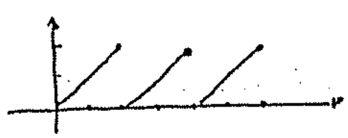
4.3. $f(t) = t \quad 0 < t < 2$ con $f(t) = f(t+2) \quad \forall t$ Función "***diente de sierra***"

<u>NOTA</u>: $u(t)$ y $f(t)$ son funciones de uso frecuente en varias ramas de la ingeniería.

•4) Usaremos que: Toda función $f(x)$ continua en $[a,b]$ es integrable.

•4.1) $h(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ (verificalo) $\Rightarrow$ es integrable.

•4.2) $U(t)$ no es continua en $t=0$ $\rightarrow$ No es integrable en $\mathbb{R}$.

•4.3) $f(t)$ posee una gráfica:  No es continua en $x = 2; 4; 6;$ etc $\rightarrow$ No posee una única primitiva.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Este método lo usaremos cuando tengamos que calcular integrales de la forma:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$$

en tal caso se hace el siguiente cambio de variables

$$u = g(x)$$
$$du = g'(x)dx$$

y se sustituye en la integral que queremos calcular

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{u}\cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du$$

después calculamos $\int f(u)du$ como si u fuese la variable

obtenemos $\int f(u)du \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aquí } F'=f}}{=} F(u)+K$

finalmente reemplazamos u por $g(x)$ en el resultado anterior, o sea

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + K.$$

FIJATE QUE LA FORMA DE LA FUNCIÓN A INTEGRAR ES UN PRODUCTO DE FUNCIONES DONDE UNO DE LOS FACTORES ES LA COMPOSICIÓN DE DOS FUNCIONES ($f(g(x))$) Y EL OTRO FACTOR ES LA DERIVADA DE LA FUNCION "DE ADENTRO" DE LA COMPOSICIÓN ($g'(x)$).

Cuando tengamos que calcular una integral de la forma

$$\int f(g(x))\,dx$$

donde $g'(x) = m$ $(m \neq 0)$ también usaremos el método de sustitución, en este caso

$u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx = m\,dx$ despejamos dx:

$$dx = \frac{1}{m}\,du$$

reemplazamos en la integral y queda:

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{dx}_{\frac{1}{m}du} = \int f(u)\frac{1}{m}\,du = \frac{1}{m}\int f(u)\,du \;\ldots$$

---

5. Halle $h(x)$ para que se verifique la igualdad propuesta en cada caso:

5.1. $\int e^{\operatorname{tg} x} h(x)dx = e^{\operatorname{tg} x} + C$

• 5.1) Al ver sustitución, llegamos a la siguiente fórmula:

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + K \qquad (1)$$

donde $F' = f$.

Si hacemos $f(x) = e^x$ y $g(x) = \operatorname{tg} x$, entonces $F(x) = e^x$

y la igualdad que te dan es

$$\int f(g(x))\,h(x)\,dx = F(g(x)) + C \qquad (2)$$

Haciendo $h(x) = g'(x)$ en esta fórmula, tenemos (1):

$$h(x) = (\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2 x} = \boxed{\sec^2 x}.$$

• 5.2. $\int \sec x\, h(x)dx = \ln|\cos x| + C$

VEÁMOSLO...

$$\int \frac{h(x)}{\cos x}dx = \ln|\cos x| + C \quad \Rightarrow \text{ derivo ambos miembros}$$

$$\frac{d}{dx}\int \frac{h(x)\,dx}{\cos x} = \frac{d}{dx}\left[\ln|\cos x| + C\right]$$

$$\frac{h(x)}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}\cdot(-\operatorname{Sen} x) \quad \Rightarrow \boxed{h(x) = -\operatorname{Sen}(x)}$$

- 5.3. $\int \frac{dx}{h(x)\sqrt{x}} = 2.\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$

$$\int \frac{dx}{h(x)\sqrt{x}} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C \quad \Rightarrow \text{ derivo}$$

$$\frac{d}{dx}\int \frac{dx}{h(x)\sqrt{x}} = \frac{d}{dx}\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C\right)$$

$$\frac{1}{h(x)\sqrt{x}} = 2\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$$

Comparando: $\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow \boxed{h(x) = 1+x}$

---

6. Encuentre las primitivas de las $f(x)$ dadas a continuación empleando los métodos que considere apropiados y verifique, de ser posible, sus resultados usando tablas.

- 6.2. $f(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^2$

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{(1-x)^2}{x^2}dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2}dx =$$

$$= \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right)dx = \int \frac{1}{x^2}dx - 2\int\frac{1}{x}dx + \int 1\,dx =$$

$$= \int x^{-2}dx - 2\int x^{-1}dx + \int 1\,dx \underset{①②}{=} \frac{x^{-1}}{-1} - 2\ln|x| + x + C$$

$$= \boxed{x - \frac{1}{x} - \ln x^2 + C}$$

• 6.3. $f(x) = \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right)$

$$\int\left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right)dx = a\int x^{-1}dx + a^2\int x^{-2}dx + a^3\int x^{-3}dx =$$

$$= a\ln|x| + a^2\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + a^3\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \boxed{a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C}$$

• 6.4. $f(x) = \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}$

$$\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}dx = \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{2^x.5^x}dx = \int \frac{2^{x+1}}{2^x.5^x} - \frac{5^{x-1}}{2^x.5^x}dx$$

$$= \int\left(\frac{2}{5^x} - \frac{1}{2^x.5}\right)dx = \int\left(2.5^{-x} - \frac{2^{-x}}{5}\right)dx = 2\int 5^{-x}dx - \frac{1}{5}\int 2^{-x}dx$$

$$\underset{①}{=} 2\left(\frac{-5^{-x}}{\ln 5}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{-2^{-x}}{\ln 2}\right) + C = \boxed{-\frac{2.5^{-x}}{\ln 5} + \frac{1}{5}\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C}$$

• 6.6. $f(x) = sh(2x+1) + ch(2x-1)$

SUGERENCIA: Separá la integral en dos sumas y luego aplicá el ejercicio 6 usando que

- $\int sh\,x.dx = ch\,x + C$ $\quad\left((ch\,x)' = sh\,x\right)$

- $\int ch\,x\,dx = sh\,x + C$ $\quad\left((sh\,x)' = ch\,x\right)$

• 6.8. $f(x) = x^x.(\ln x + 1) \qquad x > 0$

$$\int x^x(\ln x+1)\,dx = x^x + C \quad \text{pues } (x^x)' = x^x(\ln x+1)$$

• 6.9. $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$ (recuerde que $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$)

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{\text{sen}^2 x}$$

$$= \int \frac{dx}{\text{sen}^2 x} - \int \underbrace{\frac{\cos x.dx}{\text{sen}^2 x}}_{\substack{u=\text{sen}\,x \\ du=\cos x\,dx}} = \int \frac{dx}{\text{sen}^2 x} - \int \frac{du}{u^2} = -\text{cotg}\,x + \frac{1}{u} + C =$$

$$= \boxed{-\text{cotg}\,x + \frac{1}{\text{sen}\,x} + C}$$

• 6.10. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,x + 2}{\cos^2 x}$

Teniendo en cuenta que $(\sec x)' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x}$ y que $(\text{tg}\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$$\int \frac{\text{sen}\,x+2}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x} + 2\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \boxed{\sec x + 2\,\text{tg}\,x + C}$$

• 6.11. $f(x) = \dfrac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}$

$$\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\,dx = \int \frac{\sqrt[5]{(1-x)^2}}{1-x}\,dx = \int \sqrt[5]{\frac{(1-x)^2}{(1-x)^5}}\,dx ::$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt[5]{(1-x)^3}}\,dx = \int (1-x)^{-\frac{3}{5}}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{usando} \\ \text{ej 6}}}{=} (-1).\frac{5}{2}(1-x)^{\frac{2}{5}}+C = \boxed{-\frac{5}{2}(1-x)^{\frac{2}{5}}+C}$$

• 6.12. $f(x)=\dfrac{x}{2+3x^2}$

Para aplicar el método de sustitución tenemos que tener una función y su derivada:

Si $u = 2+3x^2$, entonces $du = 6x\,dx$.

El x está por ahí, pero el 6 no. Nada más fácil que hacerlo aparecer multiplicando y dividiendo por 6:

$$\int \frac{x\,dx}{2+3x^2} = \int \frac{1}{6}\,\frac{\overbrace{6x\,dx}^{du}}{\underbrace{2+3x^2}_{u}} = \int \frac{du}{6u} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{6}\ln|u| + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}\ln(2+3x^2) + C}$$

• 6.13. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$

Usando que $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$, hacés lo mismo que en el anterior y llegás a que:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C}$$

• 6.14. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x+2}$

En general, cuando tenés una función cuadrática en el denominador, completás cuadrados para poder hacer una sustitución adecuada. En este caso

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

Entonces

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 2} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \int \frac{1}{7/4} \frac{dx}{\frac{4}{7}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{4}{7}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{7}}x - \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} =$$

$$\left(\text{Haciendo } v = \frac{2x}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}} \qquad dv = \frac{2}{\sqrt{7}}\,dx\right)$$

$$= \frac{4}{7}\int \frac{\sqrt{7}}{2} \frac{dv}{v^2+1} = \frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{dv}{v^2+1} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} v + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) + C = \boxed{\frac{2\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{7}(2x-1)}{7}\right) + C}$$

- 6.15: $f(x) = \dfrac{x^5}{x+1}$

En general, cuando tenés el cociente entre dos polinomios, tenés que dividirlos. Esto lo veremos con mayor profundidad al estudiar el método de fracciones simples. En este caso

$$\begin{array}{l|l}
x^5 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5 + x^4} & x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \\
-x^4 & \\
\underline{-x^4 - x^3} & \\
x^3 & \\
\underline{x^3 + x^2} & \\
-x^2 & \\
\underline{-x^2 - x} & \\
x & \\
\underline{x + 1} & \\
-1 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow x^5 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - 1$$

Reemplazando en la Integral:

$$\int \frac{x^5}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - 1}{x+1}\,dx =$$

$$= \int (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)\,dx - \int \frac{dx}{x+1} = \boxed{\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + C}$$

- 6.16. $f(x) = \operatorname{sen}^2(5x+1)\cos^2(5x+1)$

SUGERENCIA: $\begin{cases} y = \operatorname{sen}(5x+1) \\ dy = 5\cos(5x+1)\,dx \end{cases} \Rightarrow \cos(5x+1)\,dx = \dfrac{dy}{5}$

- 6.17. $f(x) = \operatorname{tg} x$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, Haciendo $y = \cos x$ $dy = -\operatorname{sen} x\,dx$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{dy}{y} = -\ln|y| + C = \boxed{-\ln|\cos x| + C}$$

- 6.18. $f(x) = \cos^3 x.\operatorname{sen}^2 x$ (Este ejercicio es similar "en razonamiento" al que te presento Abajo).

$\boxed{\int \cos^5 x\,dx =}$

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x\,.\cos x\,dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\,dx = \begin{pmatrix} y = \operatorname{sen} x \\ dy = \cos x\,dx \end{pmatrix}$$

$$= \int (1-y^2)^2\,dy = \int (1 - 2y^2 + y^4)\,dy = y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + C =$$

$$= \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C.$$

- 6.19. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} + 2.e^x + 3}$

Antes que nada hagamos la sustitución $\begin{cases} y = e^x \\ dy = e^x\,dx \end{cases}$

$$\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x} + 2e^x + 3} = \int \frac{dy}{y^2 + 2y + 3} \underset{\text{(completando cuadrados)}}{=} \int \frac{dy}{(y+1)^2 + 2} = \int \frac{dy}{2\left(\frac{1}{2}(y+1)^2 + 1\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \left(\begin{cases} u = \frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}} \\ du = \frac{dy}{\sqrt{2}} \end{cases}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}\,du}{u^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{du}{u^2+1} =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(u) + c = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + c = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(y+1)\right)+C$$

$$=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(e^x+1)\right) + C.}$$

- 6.20. $f(x) = \operatorname{tg}^5 x$

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos^5 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^4 x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^5 x}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx}{\cos^5 x} =$$

$$\left(\begin{matrix} \cos x = y \\ -\operatorname{sen} x\,dx = dy \end{matrix}\right) = -\int \frac{(1-y^2)^2\,dy}{y^5} = -\int \frac{1-2y^2+y^4}{y^5}\,dy = \frac{y^{-4}}{4} - y^{-2} - \ln|y| + C$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + c$$

- NOTA: LA TABLA DEL FINAL DE ESTA PRÁCTICA TE AYUDARÁ A RESOLVER ESTE EJERCICIO.

INTEGRACIÓN POR PARTES

- El método de integración por partes se deduce de la regla de derivación de un producto $(u \cdot v)' = u' v + u \cdot v'$, integrando esa igualdad obtenemos:

$$\int [u(x) \cdot v(x)]'\,dx = \int u'(x) \cdot v(x)\,dx + \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

y como $u(x) \cdot v(x)$ es una primitiva de $[u(x) \cdot v(x)]'$ resulta que $\quad \mathcal{U}(x)\cdot V(x) = \int \mathcal{U}'(x)\cdot V(x)\,dx + \int \mathcal{U}(x)\cdot V'(x)\,dx$

De modo que

$$\boxed{\int \mathcal{U}'(x)\cdot V(x)\,dx = \mathcal{U}(x)V(x) - \int \mathcal{U}(x)\cdot V'(x)\,dx}$$

FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

La dificultad que puede presentarle este método es saber elegir qué función tomar como $\mathcal{U}'$ y qué función como V. En general la siguiente regla memotécnica (ILPET) resuelve el problema: QUIERE DECIR.

↑	V ↓	I	: inversas	las funciones que figuran más arriba son "difíciles" de integrar y "fáciles" de derivar, se toman como V; las que están más abajo se toman como $\mathcal{U}'$.
		L	: logaritmos	
		P	: polinomios	
		E	: exponenciales	
$\mathcal{U}'$		T	: trigonométricos	

- **6.22.** $f(x) = x.e^{-x}$

$$\int \frac{x}{e^x}\,dx = \int \underbrace{x}_{V}.\underbrace{e^{-x}}_{U'}\,dx = -x.e^{-x} - \int 1(-e^{-x})\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx =$$

$$\begin{pmatrix} V = x & V' = 1 \\ U' = e^{-x} & U = -e^{-x} \end{pmatrix} \qquad = \boxed{-(x+1)e^{-x} + C}$$

- **6.23.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \int \underbrace{\ln x}_{}.\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{U'}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x^2} - \int\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x^3}\right)dx =$$

$$\begin{pmatrix} V = \ln x & V' = \frac{1}{x} \\ U' = x^{-3} & U = -\frac{1}{2}x^{-2} \end{pmatrix} \qquad = \boxed{-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{4x^2} + C}$$

• 6.24. $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{sen}^2 x}$

$$\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \underbrace{x}_{v}\cdot\underbrace{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}_{u'}\,dx = -x.\operatorname{cotg} x - \int 1.(-\operatorname{cotg} x)\,dx =$$

$$\begin{pmatrix} v=x & v'=1 \\ u'=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} & u=-\operatorname{cotg} x \end{pmatrix} \quad = -x.\operatorname{cotg} x + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \begin{pmatrix} y=\operatorname{sen} x \\ dy=\cos x\,dx \end{pmatrix}$$

$$= -x\operatorname{cotg} x + \int \frac{dy}{y} = -x\operatorname{cotg} x + \ln|y| = \boxed{-x\operatorname{cotg} x + \ln|\operatorname{sen} x| + C}$$

• 6.25. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

Antes que nada echá un vistazo a la tabla que hay al final:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C \quad \left(\Rightarrow D\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

Teniendo en cuenta este resultado:

$$\int 1.\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx \overset{*}{=} x.\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{pmatrix} y=1+x^2 \\ dy=2x\,dx \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u'=1 & u=x \\ v=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) & v'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{pmatrix} \quad = x.\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{1}{2}\frac{dy}{\sqrt{y}} =$$

$$= x.\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \sqrt{y} + C = \boxed{x.\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \sqrt{1+x^2} + C}$$

• 6.26. $f(x)=\dfrac{x.\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$

Antes de integrar por partes, vamos a hacer una sustitución para simplificar las cosas:

$$\int \frac{x.\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{pmatrix} y=\operatorname{arcsen} x \\ dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ x=\operatorname{sen} y \end{pmatrix} = \int \operatorname{sen} y.\,y\,dy = \ldots$$

$$\begin{pmatrix} u'=\operatorname{sen} y & u=-\cos y \\ v=y & v'=1 \end{pmatrix}$$

$$= -y\cos y + \int \cos y\, dy = -y\cos y + \operatorname{sen} y + C = (y = \operatorname{arcsen} x)$$

$$= \boxed{-\operatorname{arcsen} x \cdot \cos(\operatorname{arcsen} x) + x + C}$$

- 6.27. $f = x^2.\operatorname{arctg} x$

$$\int x^2 \cdot \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^3}{3}.\operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{1+x^2}\, dx =$$

$$\left(\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x. & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = x^2 & v = \frac{x^3}{3} \end{array}\right) = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x(x^2+1) - x}{x^2+1}\, dx = \ldots$$

- 6.28. $f(x) = \ln(1+x^2)$

$$\int \ln(1+x^2)\, dx \,, \quad \text{SUGERENCIA: } \begin{cases} u' = 1 & u = x \\ v = \ln(1+x^2) & v' = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$$

- 6.29. $f(x) = e^x \operatorname{sen} x \cos x$

$$\text{SUGERENCIA} \begin{cases} u' = e^x & u = e^x \\ v = \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) & v' = \cos(2x) \end{cases}$$

Luego hacer partes de vuelta y despejar el resultado

- 6.30. $f(x) = \operatorname{sen} x.\ln(\cos x)$

$$\text{SUGERENCIA: } \begin{cases} v = \ln(\cos x) & v' = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ u' = \operatorname{sen} x & u = -\cos x \end{cases}$$

- 6.31. $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

SUGERENCIA: $\begin{cases} v = -x^2 & v' = -2x \\ u' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & u = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ y luego hacer

una sustitucion $(y = 1-x^2,\ dy = -2x\,dx)$ en la integral que queda.

MÉTODO DE FRACCIONES SIMPLES

- Vimos que el método de sustitución se aplicaba cuando aparecía una función y "algo parecido" a su derivada. Luego integramos por partes el producto de funciones. El método que veremos a continuación se aplica a las funciones llamadas racionales.

Las FUNCIONES RACIONALES son aquellas de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Buscamos un método para calcular:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

Para empezar, podemos suponer $gr(P) < gr(Q)$. Esto se puede hacer pues en caso contrario $(gr(P) \geq gr(Q))$, dividís P por Q usando cualquier método: $P \underline{|Q}$, Regla de Ruffini, etc. y obtenés

$$P = S.Q + \underbrace{R}_{\text{resto}} \quad \text{con } gr(R) < gr(Q)$$

y la integral queda:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{S(x)Q(x) + R(x)}{Q(x)}\,dx = \underbrace{\int S(x)\,dx}_{A} + \underbrace{\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx}_{B}$$

Donde A es fácil porque es la integral de un polinomio y B es una función racional donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador. O sea que nos podemos restringir a las integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ $(\text{grado}(P) < \text{grado}(Q))$

Supongamos que grado $(Q) = n$, entonces podés factorizar Q:

$$Q(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

(*) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son distintas.

Supongamos que $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ (*), entonces el método se basa en que existen $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{a_n(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)} = \frac{1}{a_n}\left(\frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}\right)$$

Encontrar estos números es un sistema de ecuaciones, e integrar el término de la derecha es mucho más fácil que integrar $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Supongamos ahora que no todas las raíces son reales, entonces no podés factorizar en polinomios de grado 1 y te quedará algún polinomio de grado 2:

$$Q(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x^2+a_ix+b_i)\dots(x-\alpha_n)$$

En este caso:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{a_n}\left(\frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{B_1x+B_2}{x^2+a_ix+b_i} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}\right)$$

y el sistema de ecuaciones ahora incluye las B_j. Como ya temerás, la mejor forma de aprender este método es haciendo ejercicios.

- 6.32. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-x}$

Aquí $q(x) = x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$ y

$$\frac{x+1}{x^3-x} = \frac{x+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} = \frac{A_1(x-1)+A_2 x}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{(A_1+A_2)x - A_1}{x(x-1)}$$, de donde nos queda el sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ -A_1 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow A_1 = -1 \, , \, A_2 = 1$$

Integrando

$$\int \frac{x+1}{x^3-x}\,dx = \int \frac{dx}{x(x-1)} = \int\left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1}\right)dx = \int\left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= -\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x-1} = -\ln|x| + \ln|x-1| + C = \boxed{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C}$$

- 6.33. $f(x) = \dfrac{3x+5}{x^3+5x^2-2x-24}$

$$Q(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = (x-2)(x+3)(x+4)$$

$$\frac{3x+5}{x^3+5x^2-2x-24} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+3} + \frac{A_3}{x+4} \qquad (1)$$

Para averiguar A_1, A_2 y A_3 sumemos en el término de la derecha:

$$\frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+3} + \frac{A_3}{x+4} = \frac{A_1(x+3)(x+4) + A_2(x-2)(x+4) + A_3(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{A_1x^2 + 7A_1x + 12A_1 + A_2x^2 + 2A_2x - 8A_2 + A_3x^2 + A_3x - 6A_3}{(x-2)(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{(A_1+A_2+A_3)x^2 + (7A_1+2A_2+A_3)x + 12A_1 - 8A_2 - 6A_3}{(x-2)(x+3)(x+4)}$$

Igualando los numeradores de esta última fracción y (1):

$$(A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (7A_1 + 2A_2 + A_3)x + 12A_1 - 8A_2 - 6A_3 = 3x + 5$$

Y nos quedó el siguiente sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0 \\ 7A_1 + 2A_2 + A_3 = 3 \\ 12A_1 - 8A_2 - 6A_3 = 5 \end{cases}$$

Resolviendo, obtenés $A_1 = \frac{11}{30}$, $A_2 = \frac{4}{5}$, $A_3 = -\frac{7}{6}$

Entonces:

$$\int \frac{3x+5}{x^3+5x^2-2x-24}\,dx = \int \frac{11}{30} \cdot \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{4}{5}\,\frac{1}{x+3}\,dx - \int \frac{7}{6}\,\frac{1}{x+4}\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{11}{30}\ln|x-2| + \frac{4}{5}\ln|x+3| - \frac{7}{6}\ln|x+4| + C}$$

• 6.34. $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x^2+1)}$

SEGÚN YA VIMOS: ....

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2 x + A_3}{x^2+1} = \frac{A_1(x^2+1) + (A_2 x + A_3)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}$$

$$= \frac{A_1 x^2 + A_1 + A_2 x^2 + (2A_2 + A_3)x + 2A_3}{(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A_1 + A_2)x^2 + (2A_2 + A_3)x + A_1 + 2A_3}{(x+2)(x^2+1)}$$, entonces

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ 2A_2 + A_3 = 0 \\ A_1 + 2A_3 = 1 \end{cases}$$

Despejando, obtenés: $A_1 = \frac{1}{5}$ $A_2 = -\frac{1}{5}$ $A_3 = \frac{2}{5}$

O sea que:

$$\int \frac{1}{(x+2)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{A_1}{x+2}\,dx + \int \frac{A_2 x + A_3}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+2}}_{\frac{1}{5}\ln|x+2|} \underbrace{- \frac{1}{5}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx}_{\text{sustituyendo } y = x^2+1 \text{ te da } -\frac{1}{10}\ln(x^2+1)} + \underbrace{\frac{2}{5}\int \frac{dx}{x^2+1}}_{\frac{2}{5}\operatorname{arctg} x} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{5}\ln|x+2| - \frac{1}{10}\ln(x^2+1) + \frac{2}{5}\operatorname{arctg} x + C}$$

- 6.35. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4x - 12}$

En este caso $Q(x) = x^2 - 4x - 12 = (x+2)(x-6)$, según vimos:

$$\frac{2x}{x^2-4x-12} = \frac{2x}{(x+2)(x-6)} = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x-6)}$$

Efectuando esta última suma

$$\frac{2x}{x^2-4x-12} = \frac{A_1(x-6) + A_2(x+2)}{(x+2)(x-6)} = \frac{(A_1+A_2)x - 6A_1 + 2A_2}{x^2-4x-12}$$

De donde

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ -6A_1 + 2A_2 = 0 \end{cases} \iff A_1 = \frac{1}{2},\ A_2 = \frac{3}{2}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{2x}{x^2-4x-12}\,dx = \int \left(\frac{1/2}{x+2} + \frac{3/2}{x-6} \right) dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-6} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \ln|x+2| + \frac{3}{2} \ln|x-6| + C}$$

- 6.36. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}$

Sea $\begin{cases} y^6 = x+1 \\ 6y^5 dy = dx \end{cases}$ ⇝ (la única forma de volar ambas raíces)

y reemplacemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}} = \int \frac{6y^5\,dy}{y^2 - y^3} = 6\int \frac{\cancel{y^5}\, y^3}{\cancel{y^2}(1-y)}\,dy =$$

Nos quedó una función racional con numerador de grado mayor que el denominador. Dividiendo:

$$y^3 = (-y^2-y-1)(1-y) + 1$$

y reemplazando:

$$= 6\int \frac{(-y^2-y-1)(1-y) + 1}{(1-y)}\,dy = 6\int (-y^2-y-1)\,dy + 6\int \frac{dy}{1-y}$$

$$= -\frac{6y^3}{3} - \frac{6y^2}{2} - 6y - 6\ln|1-y| + C = \quad \left(\begin{matrix} y^6 = x+1 \\ y = \sqrt[6]{x+1} \end{matrix} \right)$$

$$= -2y^3 - 3y^2 - 6y - 6\ln|1-y| + C =$$

$$\boxed{= -2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} - 6\sqrt[6]{x+1} - 6\ln\left|1 - \sqrt[6]{x+1}\right| + C}$$

• 6.37. $f(x)=\sqrt{9-4x^2}$

$$\int\sqrt{9-4x^2}\,dx=\int\sqrt{9\left(1-\frac{4}{9}x^2\right)}\,dx=\int 3\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}\,dx=$$

Acá te sugiero la sustitución: $\begin{cases}\operatorname{sen}y=\frac{2}{3}x\\ \cos y\,dy=\frac{2}{3}dx\end{cases}$

$$=\int 3\sqrt{1-\underbrace{\operatorname{sen}^2y}_{\left(\frac{2}{3}x\right)^2}}\;\underbrace{\frac{3}{2}\cos y\,dy}_{dx}=\int\frac{9}{2}\cos^2y\,dy=\frac{9}{2}\int\cos^2y\,dy=$$ (Pag 30)

$$\frac{9}{2}\int\frac{1+\cos(2y)}{2}\,dy=\frac{9}{2}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2y)}{2}\right)dy=\frac{9}{4}y+\frac{9}{8}\operatorname{sen}(2y)+C$$

$$=\frac{9}{4}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}x\right)+\frac{9}{4}\operatorname{sen}y\cos y+C=\frac{9}{4}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}x\right)+\frac{9}{4}\operatorname{sen}y\sqrt{1-\operatorname{sen}^2y}+C$$

$$=\boxed{\frac{9}{4}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}x\right)+\frac{2}{3}x\sqrt{1-\frac{4}{9}x^2}\right]+C}$$

• 6.38. $f(x)=\sqrt{4x^2-25}$

$$\int\sqrt{4x^2-25}\,dx=\int\sqrt{25\left(\frac{4x^2}{25}-1\right)}\,dx=5\int\sqrt{\left(\frac{2x}{5}\right)^2-1}\,dx$$

Sustitución:

$\frac{2x}{5}=\cosh t\;\rightarrow\;\frac{2}{5}dx=\operatorname{senh}t\,dt$, la integral queda:

$$5\int\sqrt{\cosh^2t-1}\cdot\frac{5}{2}\operatorname{senh}t\,dt=\frac{25}{2}\int\sqrt{\operatorname{senh}^2t}\;\operatorname{senh}t\,dt=$$

$$=\frac{25}{2}\int\operatorname{senh}t\cdot\operatorname{senh}t\,dt=\frac{25}{2}\int\operatorname{senh}^2t\,dt.$$ ahora:

$$\operatorname{senh} t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2} \rightarrow \operatorname{senh}^2 t = \frac{1}{4}\left(e^{2t} + e^{-2t} - 2\right) \Rightarrow$$

$$\int \frac{25}{2} \operatorname{senh}^2 t \, dt = \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{4} \int \left(e^{2t} + e^{-2t} - 2\right) dt =$$

$$= \frac{25}{8}\left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - 2t\right) = \frac{25}{8}\left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} - 2t\right) =$$

$$= \frac{25}{8}\left(\operatorname{senh}(2t) - 2t\right).$$

Luego: $t = \ln\left(\frac{2x}{5} + \sqrt{\frac{4x^2}{25} - 1}\right)$, invirtiendo la sustitución $\frac{2x}{5} = \cosh t$

finalmente:

$$\int \sqrt{4x^2 - 25}\, dx = \frac{25}{8}\left[\operatorname{senh}\left(2\ln\left(\frac{2x}{5} + \sqrt{\frac{4x^2}{25} - 1}\right)\right) - 2\ln\left(\frac{2x}{5} + \sqrt{\frac{4x^2}{25} - 1}\right)\right]$$

- 6.39. $f(x) = \sqrt{5 + 2x + x^2}$

$\int \sqrt{5 + 2x + x^2}\, dx \Rightarrow$ completo cuadrado:

$$5 + 2x + x^2 = (x + a)^2 + b = x^2 + 2ax + a^2 + b \Rightarrow 2a = 2 \rightarrow \underline{a = 1}$$

$$a^2 + b = 5 \rightarrow \underline{b = 4}$$

$$\int \sqrt{(x+1)^2 + 4}\, dx = \int \sqrt{4\left(\frac{(x+1)^2}{4} + 1\right)}\, dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1}\, dx$$

ahora sea la sustitución: $\frac{x+1}{2} = \operatorname{senh} t$

$dx = 2\cosh t \, dt$

$$2\int \sqrt{\operatorname{senh}^2 t + 1}\, dt \cdot 2\cosh t = 4\int \sqrt{\cosh^2 t}\, \cosh t \, dt =$$

$$4\int \cosh^2 t\, dt = 4\int \left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}\right)dt = \int \left(e^{2t}+e^{-2t}+2\right)dt =$$

$$\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} + 2t = \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} + 2t = \operatorname{senh}(2t) + 2t.$$

ahora $t = \ln\left(\frac{x+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\right)$; el resultado final es:

$$\frac{1}{2}\operatorname{Senh}\left(2\ln\left(\frac{x+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\right)\right) + 2\ln\left(\frac{x+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\right) + C$$

---

7. Determine la función f si se sabe que $f': \Re \to \Re \,/\, f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ y $f(0) = 1$

- Si $f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} \Rightarrow f(x) = \int \frac{4}{3}x^{1/3}dx = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}x^{4/3} + C$

Entonces:

$$f(x) = x^{4/3} + C \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Por otra parte

$$f(0) = 1 \iff 0^{4/3} + C = 1 \iff C = 1$$

Entonces:

$$\boxed{f(x) = x^{4/3} + 1}$$

Esto es lo que se llama una ECUACIÓN DIFERENCIAL. O sea una ecuación escrita en términos de derivadas de la función y donde el objeto es encontrar la función que la satisface. Si no te hubiesen dado la condición "$f(0)=1$", la ecuación diferencial "$f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$" hubiese tenido infinitas soluciones "$f(x) = x^{4/3} + C$". Dicha condición se llama CONDICIÓN DE CONTORNO y lo que te asegura es la unicidad del resultado.

---

8. Determine la función f tal que los puntos (-1;3) y (0;2) pertenezcan a su gráfica y además $f'': \Re \to \Re \,/\, f''(x) = 2 - 4x$.

- Si $f''(x) = 2 - 4x$, entonces (por definición de primitiva)

$$f'(x) = \int (2-4x)\,dx = 2x - \frac{4x^2}{2} + C$$

Entonces

$$f(x) = \int \left(2x - \frac{4x^2}{2} + C\right) dx = \frac{2x^2}{2} - \frac{4x^3}{6} + Cx + B$$

O sea que la f que buscamos tendrá la forma:

$$f(x) = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + Cx + B \qquad (C, B \in \mathbb{R})$$

Usando las condiciones de contorno para determinar las constantes.

$$f(-1) = 3 \iff \frac{2}{3} + 1 + C(-1) + B = 3 \qquad ①$$

$$f(0) = 2 \iff \boxed{B = 2} \qquad ②$$

Reemplazando ② en ①:

$$\frac{2}{3} + 1 - C + 2 = 3$$

Despejando:

$$\boxed{C = \frac{2}{3}}$$

Nos quedó, reemplazando en la ecuación de la f:

$$\boxed{f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + \frac{2}{3}x + 2}$$

---

9. Se sabe que $y - x - 2 = 0$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función h en el punto (1;3) y además $h'': \Re \to \Re \,/\, h''(x) = 6x$. Halle h.

- Integrando dos veces, al igual que en el ejercicio anterior, para obtener primero h' y luego h:

$$\begin{cases} h'(x) = \int 6x\,dx = 3x^2 + A \\ h(x) = \int (3x^2 + A)\,dx = x^3 + Ax + B \end{cases}$$

Te dicen que "$y-x-2=0$" es la ecuación de la recta tangente al gráfico de h en (1;3). Como la derivada es la pendiente de la recta tangente, de esta frase extraemos dos conclusiones:

$$\begin{cases} h'(1)=1 \\ h(1)=3 \end{cases}$$

Reemplazando:

$$h'(1) = 3.1^2+A = 3+A = 1 \Rightarrow A=-2$$

$$h(1) = 1^3+A+B = 3 \Rightarrow B = 2-A = 2-(-2) = 4$$

Y quedó:

$$\boxed{h(x) = x^3-2x+4}$$

---

10. Halle la ecuación de la curva que pasa por el punto (-1;1) y en el que la pendiente de la recta tangente es igual a 2, si además es $y''=3x-1$ en cualquier punto de la curva.

- Es idéntico al anterior

$$y' = \int (3x-1)dx = \frac{3}{2}x^2 - x + A$$

$$y'\big|_{-1} = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(-1)^2+1+A = 2 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Entonces

$$y' = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$$

Integrando nuevamente:

$$y = \int\left(\frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + B$$

Como $y\big|_{-1}=1$,

$$\frac{(-1)^3}{2} - \frac{(-1)^2}{2} + \frac{1}{2} + B = 1$$

Entonces

$$B = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Entonces

$$\boxed{y = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$$

11. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

11.1. $y'+\frac{y}{x}=0$ 11.2. $y'+y=0$ 11.3. $y'=-x.y^4$ 11.4. $y'+4y=20$

• 11.1) $Y'+\frac{Y}{X}=0 \to \frac{dY}{dX}=-\frac{Y}{X} \to \frac{dY}{Y}=-\frac{dX}{X} \to$

$\int\frac{dY}{Y}=-\int\frac{dX}{X} \Rightarrow \ln Y=-\ln X+C \to \ln Y+\ln X=C$

$\ln(Y.X)=C \to YX=\underset{\underset{K}{\downarrow}}{e^C} \to \boxed{Y=\frac{K}{X}}$

• 11.2) $\frac{dY}{dX}+Y=0 \to \frac{dY}{dX}=-Y \to \frac{dY}{Y}=-dX \to$ integramos

$\int\frac{dY}{Y}=-\int dX \to \ln Y=-X+C \to Y=e^{-X+C}=e^{-X}.\underset{\underset{K}{\downarrow}}{e^C}$

$\boxed{Y=Ke^{-X}}$

• 11.3) $\frac{dY}{dX}=-XY^4 \to \frac{dY}{Y^4}=-X\,dX \to \int Y^{-4}\,dY=-\int X\,dX$

$\frac{Y^{-3}}{-3}=-\frac{X^2}{2}+C \to \frac{1}{3Y^3}=\frac{X^2}{2}-C$; $-C\equiv K$

$\frac{1}{3\left(\frac{X^2}{2}+K\right)}=Y^3 \to \boxed{Y=\sqrt[3]{\frac{1}{3(X^2/2+K)}}}$

• 11.4) $\frac{dY}{dX}+4Y=20 \to \frac{dY}{dX}=20-4Y \to \frac{dY}{20-4Y}=dX \to$

$$\frac{dy}{4y-20} = -dx \rightarrow \frac{dy}{y-5} = -4\,dx \rightarrow \int \frac{dy}{y-5} = -4\int dx$$

$$\ln(y-5) = -4x+c \rightarrow y-5 = e^{-4x+c} = e^{-4x}\cdot \underset{\substack{\downarrow\\ k}}{e^{c}}$$

$$\boxed{y = 5 + k\,e^{-4x}}$$

---

12. Halle en cada caso la solución particular de la ecuación dada que satisfaga la condición inicial correspondiente. Dé una interpretación geométrica.

12.1. $\begin{cases} y'+4 = 2x \\ y(0) = 3 \end{cases}$ 12.2. $\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{y} \\ y(1) = 2 \end{cases}$ 12.3. $\begin{cases} y' = y\sqrt{9x+2} \\ y(0) = 3 \end{cases}$

12).1) $\frac{dy}{dx} + 4 = 2x \rightarrow dy = (2x-4)dx$ integros

$y = \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} - 4x + c$, busco c con el dato $y(0) = 3 \Rightarrow$

$3 = 0^2 - 4.0 + c \rightarrow c = 3 \rightarrow \boxed{y = x^2 - 4x + 3}$

12.2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \rightarrow y\,dy = -x\,dx \rightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c \rightarrow y^2 + x^2 = \underset{\substack{\downarrow\\ k}}{2c}$

$y^2 + x^2 = k$ saco k con $y(1) = 2$

$\underset{\substack{\downarrow\\ 2}}{y^2} + \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{x^2} \rightarrow 4 + 1 = k = 5 \Rightarrow \boxed{y^2 + x^2 = 5}$

• 12.3) $\frac{dy}{dx} = y.\sqrt{9x+2} \rightarrow \frac{dy}{y} = \sqrt{9x+2}\,dx$ integros

$\int \frac{dy}{y} = \int \sqrt{9x+2}\,dx$ sustitución: $9x+2 = u$
$9dx = du$

$\ln y = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{9} = \frac{1}{9}\int u^{1/2}du = \frac{1}{9}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{27}(9x+2)^{3/2} =$

$\ln y = \frac{2}{27}(9x+2)^{3/2} + C \rightarrow y = e^{2/27(9x+2)^{3/2}+C}$

$y = e^{2/27(9x+2)^{3/2}}.\underbrace{e^{C}}_{K} \rightarrow \boxed{y = Ke^{2/27(9x+2)^{3/2}}}$

---

13. **Calcule las siguientes integrales:**

13.1. $\int x.f''(x)dx$ **13.2.** $\int f'(2x)dx$

• 13.1) $\int x.f''(x)\,dx$, tenemos el producto de dos funciones, así que podemos probar integrando por partes.

$$\int x.f''(x)\,dx = x.f'(x) - \int f'(x)\,dx = \boxed{xf'(x) - f(x) + C}$$

$$\begin{pmatrix} u' = f''(x) & u = f'(x) \\ v = x & v' = 1 \end{pmatrix}$$

• 13.2) $\int f'(2x)\,dx = \begin{pmatrix} y = 2x \\ dy = 2\,dx \end{pmatrix} = \int \frac{1}{2} f'(y)\,dy = \frac{1}{2}\int f'(y)\,dy =$

$= \frac{1}{2}f(y) + C = \frac{1}{2}f(2x) + C.$

¡UFF!, TOMATE UN RECREÍTO. DESPUÉS SEGUIMOS PRACTICANDO.

14. Calcule $f(x)$ en los siguientes casos si:

14.1. $f'(x^2)=\frac{1}{x}$ con $x>0$ 14.2. $f'(\operatorname{sen}^2 x)=\cos^2 x$

• 14.1) Si $f'(x^2)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$, integrando

$$\int f'(x)\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \boxed{2\sqrt{x}+C} = f(x)$$

• 14.2) $f'(\operatorname{sen}^2 x)=\cos^2 x \Leftrightarrow f'(\operatorname{sen}^2 x) = 1-\operatorname{sen}^2 x \underset{y=\operatorname{sen}^2 x}{\Leftrightarrow} f'(y) = 1-y$

$$\int f'(y)\,dy = \int (1-y)\,dy = y - \frac{y^2}{2} + C = f(y)$$

---

15. Si $df=\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+2\right)dx$ determine $f(x)$ si $f(2)=21$.

• Reemplazando a por x en la ecuación que le dan y luego integrando:

$$\int df = \int \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+2\right)dx$$

Calculando estas integrales:

$$f(x) = x^{1/3} + 2x + C.$$

De la ecuación de contorno "$f(2)=21$", podemos despejar C:

$$f(2) = 2^{1/3} + 4 + C = 21 \Rightarrow C = 21 - 4 - \sqrt[3]{2}$$

Entonces

$$\boxed{f(x) = x^{1/3} + 2x + 17 - \sqrt[3]{2}}$$

---

16. Sea $g':\Re\rightarrow\Re \,/\, g'(x)=e^x.(x^2+4x+3)$ y $g(0)=2$. Pruebe que la ecuación $g(x)=0$ no admite raices reales.

- $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int e^x (x^2+4x+3)\,dx$

Tenemos que calcular la integral de un producto. Probamos integrando por partes:

$$\int e^x (x^2+4x+3)\,dx = e^x(x^2+4x+3) - \int e^x(2x+4) =$$

$$\begin{pmatrix} u' = e^x & u = e^x \\ v = x^2+4x+3 & v' = 2x+4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u' = e^x & u = e^x \\ v = 2x+4 & v' = 2 \end{pmatrix}$$

$$= e^x(x^2+4x+3) - \Big[e^x(2x+4) - \underbrace{\int 2e^x\,dx}_{2e^x} \Big] = e^x(x^2+4x+3-2x-4+2)+C$$

$$= e^x(x^2+2x+1) + C = e^x(x+1)^2 + C.$$

Obtuvimos que

$$f(x) = e^x(x+1)^2 + C$$

Podemos usar que $f(0)=2$ para despejar C

$$f(0) = 1 \cdot 1^2 + C = 2 \Rightarrow C = 1$$

En definitiva

$$f(x) = \underbrace{e^x}_{>0}\underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0} \underbrace{+1}_{>0} > 0$$ (no admite raíces reales)

---

17. Halle $f: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ sabiendo que $f(1)=0$ y $e^{f(x)} f'(x) - 4(x-1)^3 - 2(x-1) = 0$

- Teniendo en cuenta que

$$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Podemos afirmar que

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C.$$

Ahora usemos esto, de la ecuación que te dan:

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) = 4(x-1)^3 + 2(x-1)$$

INTEGRANDO A AMBOS LADOS:

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \int \left[4(x-1)^3 + 2(x-1)\right] dx$$

Calculando las integrales y usando lo que vimos recién:

$$e^{f(x)} + C = (x-1)^4 + (x-1)^2$$

Como $f(1)=0$

$$e^{f(1)} + C = 0 \Longrightarrow 1 + C = 0 \Longrightarrow C = -1$$

Obtuvimos entonces que:

$$e^{f(x)} = (x-1)^4 + (x-1)^2 + 1$$

Aplicando logaritmo y usando que $\ln(e^a) = a$.

$$\boxed{f(x) = \ln\left[(x-1)^4 + (x-1)^2 + 1\right]}$$

---

18. Indique las razones por las cuales se llega a la siguiente falacia:

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{x} x - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = 1 + \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad 0 = 1$$

- $\int \frac{dx}{x}$ = Usan el método de integración por partes

$\frac{1}{x} = u \rightarrow \frac{-1}{x^2}\,dx = du$

$dx = dv \rightarrow x = v$

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{x} \cdot x - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = 1 + \int \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \int \frac{dx}{x} = 1 + \int \frac{dx}{x} \rightarrow \underbrace{\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x}}_{0} = 1$$

$0 = 1$ absurdo.

El absurdo proviene de suponer que es valido el método de integración por partes para la funcion $f(x) = 1/x$, pero $1/x$ no es una función diferenciable en $\mathbb{R}$. (No lo es para $x=0$) $\Rightarrow$ No es aplicable el método.

Nota: para la funcion $f(x) = x$ si pues es diferenciable en todo $\mathbb{R}$:

$$\int x\,dx \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = u \to dx = du \\ dx = dv \to x = v \end{array}\right\} \text{ de donde:}$$

$$\int x\,dx = x^2 - \int x\,dx \Rightarrow \int x\,dx + \int x\,dx = x^2 \to$$

$$2\int x\,dx = x^2 \to \int x\,dx = x^2/2 \checkmark$$

---

19. Demuestre que la función $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{5x} + e^x + 1}$ tiene una primitiva sencilla de encontrar por cualquiera de los métodos vistos. (No es necesario que la encuentre).

- $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{5x} + e^x + 1}$ queremos hallar:

$$\int \frac{e^x\,dx}{e^{5x} + e^x + 1} \to \text{sustitución: } \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array}$$

$$\int \frac{dt}{t^5 + t + 1}\text{; el integrando es } \frac{1}{t^5 + t + 1} \Rightarrow$$

si $t = -1 \rightarrow t^5 + t + 1$ da -1
si $t = 1 \rightarrow t^5 + t + 1$ da 3

Luego, vemos que $t^5 + t + 1$ tiene raíces reales (teorema de Bolzano) $\Rightarrow$ es aplicable el método de fracciónes simples (No quiere decir que sea facil hallar dichas raices; por eso no nos piden que la encontremos).

AHORA PASEMOS A RESOLVER LA PARTE DE "ALGUNAS APLICACIONES DEL CÁLCULO DE PRIMITIVAS"

---

20. Un cuerpo se mueve sobre el eje x, partiendo del origen de coordenadas, con velocidad inicial nula y con una aceleración instantánea $a(t) = \dfrac{1}{(t+1)^3}$,

con t medido en segundos y a en cm/s^2. Determinar la velocidad y la posición del cuerpo a los 5 segundos de haber comenzado su movimiento.

- Sabemos que: $\dfrac{d\,v(t)}{dt} = a(t) \Rightarrow v(t) = \int a(t)\,dt \Rightarrow$

$$v(t) = \int \frac{1}{(t+1)^3}\,dt = \int (t+1)^{-3}\,dt = \frac{(t+1)^{-2}}{-2} + C \Rightarrow$$

$v(t) = -\dfrac{1}{2(t+1)^2} + C$; la constante C de integración la obtenemos con el dato de que $v(0) = 0$ (Condición inicial) $\Rightarrow$

$$v(0) = 0 = \frac{-1}{2(0+1)^2} + C \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow$$

$C = 1/2$. Luego: $\boxed{v(t) = \dfrac{-1}{2(t+1)^2} + \dfrac{1}{2}}$

Para hallar $x(t)$ usamos que $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ $\Rightarrow$

$$x(t) = \int v(t)\,dt = \int \left(\frac{-1}{2(t+1)^2} + \frac{1}{2} \right) dt$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} \int (t+1)^{-2}\,dt + \frac{1}{2} \int dt$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} \frac{(t+1)^{-1}}{-1} + \frac{1}{2} t + C = \frac{1}{2(t+1)} + \frac{t}{2} + C$$

Y la constante C de integración la obtemos con la condición inicial $x(0) = 0$ (parte del origen de coordenadas)

$$x(0) = 0 = \frac{1}{2(0+1)} + \frac{0}{2} + C = \frac{1}{2} + C \rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Luego $\boxed{x(t) = \dfrac{1}{2(t+1)} + \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2}}$

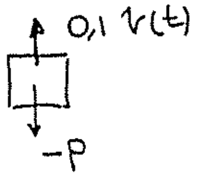
Para finalizar debemos hallar $x(5)$ y $v(5)$

$$\Rightarrow x(5) = \frac{1}{2(5+1)} + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{25}{12} \sim 2{,}08\,m$$

$$v(5) = \frac{-1}{2(5+1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{35}{72} \sim 0{,}486\,m/s$$

21. Un cuerpo de masa $m = 1$ Kg. Se deja caer, con velocidad nula, desde una altura grande. Suponga que la resistencia que ofrece el medio al movimiento de caída del cuerpo es una fuerza igual a $0,1\ v(t)$ (Newton) en donde $v(t)$ es la velocidad instantánea del cuerpo. Determinar la velocidad que lleva el cuerpo a los 10 segundos de haber comenzado a caer.

• Sobre el cuerpo tenemos entonces actuando 2 fuerzas: La de resistencia ($F = 0{,}1\ v(t)$) y la gravitatoria ($F = -P$)



→ la 2º ley de Newton nos dice que:

$\sum F = ma$ y para este problema la ecuación queda: $0{,}1\ v(t) - P = ma$ y sabemos que

$P = mg$ (g es la aceleración de la gravedad) y $a = \dfrac{dv(t)}{dt} \Rightarrow$

$0{,}1\ v(t) - mg = m\dfrac{dv(t)}{dt}$, tenemos entonces una ecuación diferencial de la cual podemos hallar $v(t)$:

$$0{,}1\ v(t) - mg = m\frac{dv(t)}{dt} \rightarrow 0{,}1 v - mg = m\frac{dv}{dt} \rightarrow$$

$$dt = \frac{m\,dv}{0{,}1 v - mg}$$, separe las variables y ahora integro:

$$\int dt = \int \frac{m\,dv}{0{,}1 v - mg} \rightarrow t + C = \int \frac{m\,dv}{0{,}1 v - mg}$$

Para calcular la última integral realizamos una sustitución:

$$0{,}1 v - mg = u \rightarrow 0{,}1\,dv = du \rightarrow dv = \frac{du}{0{,}1}$$

$$\int \frac{m\,dv}{0{,}1v - mg} = \int \frac{m}{u}\,\frac{du}{0{,}1} = \frac{m}{0{,}1}\int \frac{du}{u} = \frac{m}{0{,}1}\ln u + c'$$

juntando: $t + c = \frac{m}{0{,}1}\ln u + c' \rightarrow t + c - c' = \frac{m}{0{,}1}\ln u$

ambas constantes de integración $(c - c')$ las definimos como c'' (una nueva constante) $\Rightarrow$

$$t + c' = \frac{m}{0{,}1}\ln u \rightarrow \ln u = \frac{0{,}1}{m}(t + c') = \frac{0{,}1}{m}t + \underbrace{\frac{0{,}1\,c'}{m}}_{\text{otra cte } c''}:$$

$$\ln u = \frac{0{,}1}{m}t + c'' \rightarrow u = e^{0{,}1t/m + c''} = e^{0{,}1t/m}\cdot \underbrace{e^{c''}}_{c'''}$$

$$\rightarrow u = c'''\, e^{0{,}1t/m} \rightarrow 0{,}1v - mg = c'''\, e^{0{,}1t/m} \rightarrow$$

$v(t) = \frac{mg}{0{,}1} + \frac{c'''}{0{,}1}e^{0{,}1t/m}$, a la constante $\frac{c'''}{0{,}1}$ la llamamos $k \Rightarrow$ $v(t) = mg/_{0{,}1} + k\,e^{0{,}1t/m}$.

Para determinar la constante k usamos que $v(0) = 0$ (se deja caer significa que la velocidad inicial es 0)

$$\Rightarrow 0 = mg/_{0{,}1} + k\,e^{0} = mg/_{0{,}1} + k \rightarrow k = -mg/_{0{,}1}$$

Luego: $v(t) = mg/_{0{,}1} - mg/_{0{,}1}\, e^{0{,}1t/m} = mg/_{0{,}1}\left(1 - e^{0{,}1t/m}\right)$

- CON ESTO PODEMOS RESOLVER LA PREGUNTA DEL PROBLEMA:

$$v(10) = mg/_{0,1}\left(1 - e^{0,1\cdot 10/m}\right) \quad \text{siendo } g = 10;\ m = 1 \Rightarrow$$

$$\left\{ v(10) = 100(1-e) \right\}. \quad \left(\text{Da negativa, pues va hacia abajo}\right)$$

22. Determinar la distancia recorrida x del cuerpo del problema anterior, a los 10 segundos de haber comenzado a caer.

- Tenemos que hallar ahora la ecuación del movimiento; es decir: $x(t)$, para hallarla usamos que $v_{(t)} = \frac{dx(t)}{dt}$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow mg/_{0,1} - mg/_{0,1}\, e^{0,1t/m} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\left(mg/_{0,1} - mg/_{0,1}\, e^{0,1t/m}\right) dt = dx \Rightarrow \text{integramos:}$$

$$\int \left(mg/_{0,1} - mg/_{0,1}\, e^{0,1t/m}\right) dt = \int dx$$

$$\frac{mg}{0,1} t - \frac{mg}{0,1} \cdot \frac{m}{0,1} \cdot e^{0,1\, t/m} + C = x(t)$$

Para hallar la constante C supongamos que a $t=0$ el cuerpo se hallaba en $x_0 \Rightarrow$

$$\frac{mg}{0,1} \cdot 0 - \frac{m^2 g}{(0,1)^2} e^{0,1\cdot 0/m} + C = x_0 \Rightarrow$$

$$0 - m^2 g/_{0,01} + C = x_0 \Rightarrow C = x_0 + m^2 g/_{0,01}$$

Luego: $x(t) = x_0 + m^2 g/_{0,01} + mg/_{0,1}\, t - m^2 g/_{0,01}\, e^{0,1 t/m}$

La distancia recorrida será $x(t) - x_0 = D$ (es decir la posición final menos la inicial) con lo cual:

$$D = D(t) = m^2 g/_{0,01} + mg/_{0,1}\, t - m^2 g/_{0,01}\, e^{0,1\, t/m}$$

$$\Rightarrow D(10) = m^2 g/_{0,01} + mg/_{0,1} \cdot 10 - m^2 g/_{0,01}\, e^{0,1 \cdot 10/m}$$

$D(10) \cong -718,3\ m$ (el menos es por ir hacia abajo, pero debemos tomarla positiva pues $D \geq 0$)

$\rightarrow$ entonces $\boxed{D = 418,3\,m}$

---

23. Un cohete se dispara verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_0. Sea h la altura máxima sobre la superficie que alcanza el cohete.

23.1. Demuestre que $v_0 = \sqrt{\dfrac{2\, g\, R\, h}{R + h}}$

23.2. Calcule $v_e = \lim\limits_{h \to \infty} v_0$, que es la denominada velocidad de escape de la Tierra.

(1) Los datos son: $v(0) = v_0$; $h_{max} = h \Rightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{2ghR}{R+h}}$

Usando la sugerencia: $m\dfrac{dv}{dt} = mv\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{-mgR^2}{(x+R)^2} \rightarrow$

$mv\,dv = -\dfrac{mgR^2\,dx}{(x+R)^2} \rightarrow v\,dv = -gR^2\dfrac{dx}{(x+R)^2} \rightarrow$

pasamos a integrar: $\int v\,dv = \int -gR^2 \dfrac{dx}{(x+R)^2} \rightarrow$

$\dfrac{v^2}{2} = -gR^2\dfrac{(x+R)^{-1}}{(-1)} + C$ unificando las 2 constantes de

Integración (una en cada miembro) en una sola.

$$\frac{V^2}{2} = \frac{gR^2}{(x+R)} + C \; ; \quad \text{ahora: si } x=h \Rightarrow V=0 \text{ (Altura}$$

máxima) $\Rightarrow \quad 0 = \dfrac{gR^2}{(h+R)} + C \rightarrow C = \dfrac{-gR^2}{(h+R)} \rightarrow$

$$\frac{V^2}{2} = \frac{gR^2}{x+R} - \frac{gR^2}{h+R} = gR^2\left(\frac{1}{x+R} - \frac{1}{h+R}\right)$$

Con lo cual: $V(x) = \sqrt{2gR^2\left(\dfrac{1}{x+R} - \dfrac{1}{h+R}\right)}$, Si $V=V_0 \Rightarrow$

$X = X_0 = 0$ (la posición inicial es la tierra! $\rightarrow x=0$)

$$V_0 = \sqrt{2gR^2\left(\frac{1}{0+R} - \frac{1}{h+R}\right)} = \sqrt{2gR^2\left(\frac{h+R-R}{R(h+R)}\right)}$$

$$V_0 = \sqrt{2gR^2\,\frac{h}{R(h+R)}} = \sqrt{\frac{2gR^{\cancel{2}}h}{\cancel{R}(h+R)}}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{h+R}}$$

(2) En la expresión anterior tomamos $\lim\limits_{h\to\infty}$:

$V_e = \lim\limits_{h\to\infty} V_0 = \lim\limits_{h\to\infty} \sqrt{\dfrac{2gRh}{h+R}}$, el argumento de la raiz está indeterminada $\infty/\infty \Rightarrow$ saco factor común h:

$$\frac{2gRh}{h+R} = \frac{h\,(2gR)}{h\,(1+R/h)} = \frac{2gR}{1+\underbrace{R/h}_{0}} \to 2gR$$

$\to$ LUEGO : $\boxed{v_e = \sqrt{2gR}}$

---

24. Demuestre que $N(t)=\dfrac{M}{1+be^{-ct}}$, donde b y c son constantes. Este modelo es denominado ***función logística***.

   24.1. Realice el estudio completo de $N(t)$ y trace su gráfica. La curva que va a obtener se denomina ***curva logística***.

   24.2. Calcule $\lim\limits_{t\to\infty} N(t)$ y saque conclusiones.

▸ La ecuación diferencial que se nos propone resolver es:

$\dfrac{dN}{dt} = k.N\,(M-N)$; con $N=N(t)$; k y M constantes.

Separando las variables: $\dfrac{dN}{N(M-N)} = k\,dt \to$

$\displaystyle\int \frac{dN}{N(M-N)} = \int k\,dt = kt$, para la 1ª integral

aplicamos fracciones simples $\Rightarrow$

$$\frac{1}{N(M-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{M-N} = \frac{A(M-N)+BN}{N(M-N)} \Longrightarrow$$

$1 = A(M-N)+BN \quad \forall N \to$ a) $N=0 \to 1 = AM \to A=\frac{1}{M}$
b) $M=N \to 1 = BM \to B=\frac{1}{M}$

$$\Rightarrow \frac{1}{N(M-N)} = \frac{1/M}{N} + \frac{1/M}{M-N}$$

$$\int \frac{dN}{N(M-N)} = \frac{1}{M}\int \frac{dN}{N} + \frac{1}{M}\int \frac{dN}{M-N} = \frac{1}{M}\ln N - \frac{1}{M}\ln(M-N)$$

$$= \frac{1}{M}\left(\ln N - \ln(M-N)\right) = \frac{1}{M}\ln\left(N : (M-N)\right)$$

Teniendo en cuenta una única constante de integración para toda la ecuación:

$$\frac{1}{M}\ln\left(\frac{N}{M-N}\right) = kt + C \rightarrow \ln\left(\frac{N}{M-N}\right) = kMt + \underset{\displaystyle\downarrow \atop \displaystyle C}{MC}$$

$$\ln\left(\frac{N}{M-N}\right) = kMt + C \rightarrow \frac{N}{M-N} = e^{kMt+C} = Ce^{kMt}$$

$$N = (M-N)Ce^{kMt} = \underbrace{MC}_{C'}e^{kMt} - NCe^{kMt}$$

$$N + N\left(Ce^{kMt}\right) = C'e^{kMt} = MCe^{kMt}$$

$$N\left(1 + Ce^{kMt}\right) = MCe^{kMt} \rightarrow N\left(\frac{1+Ce^{kMt}}{Ce^{kMt}}\right) = M$$

$$N\left(\frac{1}{Ce^{kMt}} + 1\right) = M \rightarrow N\left(\frac{1}{C}\cdot e^{-kMt} + 1\right) = M$$

$$N = \frac{M}{\frac{1}{C}e^{-kMt} + 1}$$ → llamamos a $\frac{1}{C} = b$; $kM = c$ ⇒

$$\boxed{N(t) = \frac{M}{1 + be^{-ct}}}$$

• 1) NOS PIDEN AHORA UN ESTUDIO COMPLETO DE ESTA FUNCIÓN: COMENZAMOS VIENDO QUE TIENE DOMINIO $\mathbb{R}^+_0$. NO POSEE RAÍCES Y ES SIEMPRE POSITIVA. EXAMINEMOS LAS ASÍNTOTAS HORIZONTALES:

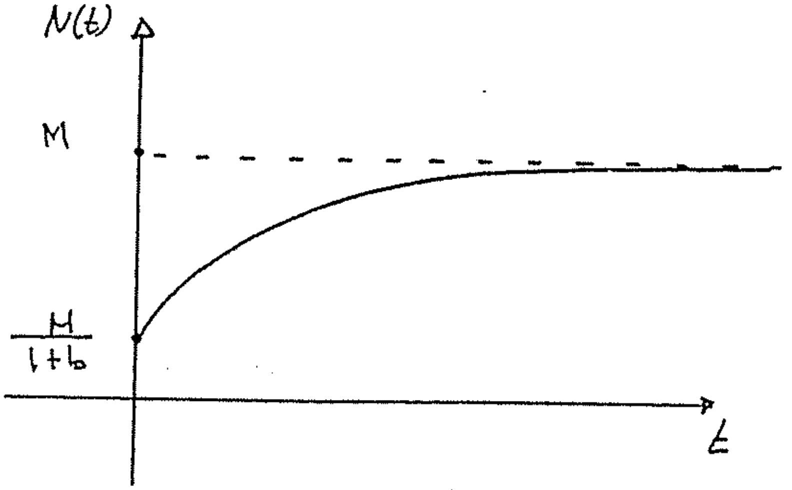
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{M}{1+be^{-ct}} = \frac{M}{1+b\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{ct}}} = \frac{M}{1+b.0} = M$$

Como el dominio es $\mathbb{R}^+_0$, el 1º valor de t será $t=0 \Rightarrow$

$$N(0) = \frac{M}{1+be^0} = \frac{M}{1+b}$$, Ahora estudiemos $N'(t)$:

$$N'(t) = \frac{-Mb(-c)e^{-ct}}{(1+be^{-ct})^2} = \frac{Mbc\,e^{-ct}}{(1+be^{-ct})^2}$$ y notamos

que $N'(t) \neq 0\ \forall t$ y además $N'(t)>0\ \forall t \Rightarrow N(t)$ es siempre creciente. Podemos ya dibujar:



• 2) YA LO CALCULAMOS ANTES $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = M$ LA POBLACIÓN TIENDE A SU MÁXIMO POSIBLE M.

25. En 1992 una ciudad del interior tenía 100.000 habitantes. Dos años después la población era de 110.000 personas. Suponiendo que el crecimiento de esta población es exponencial, estime el número de habitantes para el año 2000.

- La guía nos dice que si el crecimiento de una población es exponencial $\Rightarrow$ la ecuación a resolver es: $\frac{dx}{dt} = kx \rightarrow \frac{dx}{x} = k\,dt \rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int k\,dt$

$\rightarrow \ln x = kt + c \rightarrow x = e^{kt+c} = \underset{\downarrow\, C}{e^c} \cdot e^{kt}$

$x(t) = C \cdot e^{kt}$; para obtener C: $\underbrace{x(0) = x_0}$ $\Rightarrow$

$x_0 = C e^{k \cdot 0} \rightarrow x_0 = C$. Luego $\left\{ \underbrace{x(t) = x_0 e^{kt}} \right\}$

que es el resultado que figura en la guía.

Nos dan datos para obtener x_0 y k: x_0 es la población inicial $\Rightarrow$ $x_0 = 100.000$ (cuando $t=0$, en 1992)

Cuando $t = 2 \Rightarrow x = 110000 \Rightarrow$

$110.000 = 100000\, e^{k.2} \Rightarrow 1{,}1 = e^{2k} \rightarrow 0{,}095 = 2k$

$k = 0{,}048$. Con esto $x(t) = 100000\, e^{0{,}048t}$, ahora averiguamos la población en el año 2000 ($t = 8$)

$x(8) = 100.000\, e^{0{,}048 \cdot 8} \approx 146.410$ habitantes...

26. Se forma un cultivo con un cierto número x_0 de bacterias. Una hora después se observa que el número de bacterias en el cultivo se duplicó. Si crece exponencialmente, cuánto tardará en triplicar la población inicial?

• Usamos la ecuación obtenida en el ejercicio anterior:
$X(t) = X_0 e^{kt}$, siendo X_0 la población inicial de bacterias. pasada 1h ($t=1$) se duplica $\Rightarrow X(1) = 2X_0 \Rightarrow$
$2X_0 = X_0 e^{k1} \rightarrow 2 = e^k \rightarrow k = \ln 2 \sim 0{,}69$. Queremos hallar t / $X = 3X_0 \Rightarrow 3X_0 = X_0 e^{\ln 2 . t} \rightarrow$
$3 = e^{\ln 2 t} \rightarrow \ln 3 = \ln 2 t \rightarrow \frac{\ln 3}{\ln 2} = t \sim 1{,}5$.
la respuesta es aproximadamente 1 hora y media después.

---

27. Una población tenía un millón de habitantes el 1° de enero de 1994. En enero de 1996 el número de habitantes era de 1,4 millones. ¿En qué momento habrá tenido esta población 2 millones de habitantes?

• Usamos nuevamente que $X(t) = X_0 e^{kt}$. Al 1° de enero de 1994 lo llamaremos $t_0 = 0$, en ese momento existía 1 millón de habitantes $\Rightarrow X_0 = 1$ (en millones).
$X(t) = 1 . e^{kt} = e^{kt}$. Enero de 1996 es lo que designaremos como $t=2 \rightarrow$ en ese momento existen 1,4 millones de habitantes $\Rightarrow 1{,}4 = e^{k.2} \rightarrow k = 0{,}17 \rightarrow$
$X(t) = e^{0{,}17t}$, queremos hallar t / X sea $2 \Rightarrow$
$2 = e^{0{,}17t} \rightarrow t = 4$, enero del 1998.-

---

28. La reproducción de células cancerosas en un tejido obedece a un modelo de crecimiento exponencial. Suponga que un tejido contiene inicialmente 10 células cancerosas y que después de una hora el número se ha duplicado. ¿Cuántas células malignas tendrá el tejido después de un día?

• Directamente $X_0 = 10$; a $t = 1 \to X = 20$ con lo cual:

$20 = 10 e^{k.1} \to 2 = e^k \to k = \ln 2 \to$

$X(t) = 10 e^{\ln 2 . t}$; luego de 1 día (24 horas) $\Rightarrow$

$X(24) = 10 e^{\ln 2 . 24} \sim 16'777'216 \sim 17$ millones

(¡¡proso no!!(?)

29. La manera en que se "propaga" un rumor (la forma en que crece el número de personas que lo recibe) en una cierta población obedece a un modelo de crecimiento exponencial. A las 9 de la mañana en un bar de una población de 100.000 habitantes, se genera un rumor político en una mesa con 5 personas, cada una de las cuales tiene una familia de 4 miembros. A las dos horas las familias de estas personas ya saben el rumor y lo comienzan a difundir. ¿A qué hora la población entera estará enterada del rumor?.

• El rumor se inicia a las 9hs (lo que llamaremos $t_0 = 0$)

Luego ; la cantidad de personas que lo inician son 5 $\Rightarrow$

$X_0 = 5 \to X(t) = 5 e^{kt}$, pasadas 2hs , la cantidad de personas que lo saben son 20 (5 familias de 4 miembros c/u) $\to 20 = 5 e^{k.2} \to 4 = e^{2k} \to \frac{\ln 4}{2} = k \sim 0{,}69$

$\Rightarrow X(t) = 5 e^{0{,}69t}$; queremos hallar t / se entere toda la población $\Rightarrow 100.000 = 5 e^{0{,}69t} \to t \cong 14$hs

la población se entera a las 23hs de ese mismo día.

30. La población de un barrio tiene un crecimiento logístico y está limitada a 40.000 habitantes. Si la población era de 20.000 en 1984 y de 25.000 en 1989, ¿cuál fue su población en 1994?

- Como el crecimiento es logístico entonces la formula es $N(t) = \dfrac{M}{1+b e^{-ct}}$, estando $N(t)$ limitada a M.

Nos dan el valor de M: $M = 40.000$ y nos dan 2 datos para hallar b y c: en 1984 ($t=0$) $N = 20000$ y en 1989 ($t=5$) $N = 25000$ $\Rightarrow$

$$20000 = \frac{40000}{1+b.e^{-c.0}} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{1+b} \rightarrow 1+b = 2$$

$\underset{\sim\sim}{b=1}$.

$$25000 = \frac{40000}{1+e^{-5c}} \rightarrow 1+e^{-5c} = \frac{40}{25}$$

$$e^{-5c} = \frac{3}{5} \rightarrow \underset{\sim\sim\sim}{C = 0{,}1}. \Rightarrow N(t) = \frac{40000}{1+e^{-0{,}1t}}$$

Queremos saber la población en 1994 ($t = 10$) $\Rightarrow$

$$N = \frac{40000}{1+e^{-0{,}1.10}} = 29242$$

---

31. En un país con 3 millones de habitantes el primer ministro sufrió un infarto, que el gobierno no da a conocer en forma pública. Al principio 50 miembros del personal gubernamental saben del problema y pasan la información como rumor. Al cabo de una semana 5.000 personas están enteradas del rumor. Suponiendo crecimiento logístico, determinar el número de personas que tendrán noticias del infarto del ministro después de 2 semanas.

- Otra vez tenemos un crecimiento logístico del rumor, en este

(14

Caso el crecimiento esta limitado a $M = 3.000.000$; a $t=0$

lo conocen 50 personas $\Rightarrow$ $50 = \dfrac{3000000}{1+b\,e^{-c.0}} \rightarrow 5 = \dfrac{300000}{1+b}$

$1+b = 60000 \rightarrow \underline{b = 59999}$. Una semana despues ($t = 7$ dias)

lo saben 5000 personas $\Rightarrow$ hallamos c:

$5000 = \dfrac{3000000}{1+59999\,e^{-c7}} \rightarrow 1 + 59999\,e^{-7c} = 600 \rightarrow$

$e^{-7c} = \dfrac{599}{59999} \rightarrow c \sim 0{,}66 \Rightarrow N(t) = \dfrac{3000000}{1+59999\,e^{-0{,}66t}}$

Luego de 2 semanas ($t=14$) lo saben:

$N(14) = \dfrac{3000000}{1+59999\,e^{-0{,}66.14}} = 2.999.701$ personas

(Casi todo el pais)

---

32. En una ciudad de 100.000 habitantes se presenta una epidemia de gripe. Cuando la secretaría de salud pública comienza el registro de datos ya hay 500 personas afectadas. Una semana después los enfermos suman 1.000. Suponiendo crecimiento logístico estime el número de afectados dos semanas después de que se comenzó a llevar el registro.

- Es igual al anterior $\Rightarrow$ vamos mas rápido!

$N(t) = \dfrac{100000}{1+b\,e^{-ct}} \rightarrow 500 = \dfrac{100000}{1+b\,e^{-c.0}} \rightarrow$

$1+b = 200 \rightarrow \underline{b = 199} \rightarrow N(t) = \dfrac{100000}{1+199\,e^{-ct}} \rightarrow$

$$1000 = \frac{100000}{1+199\,e^{-c.7}} \rightarrow 1+199\,e^{-7c} = 100 \rightarrow c \doteq 0{,}1$$

$$N(14) = \frac{100.000}{1+199\,e^{-0{,}1.14}} = 1990 \text{ personas.-}$$

---

33. En una reacción química elemental, las moléculas individuales de dos reactivos A y B forman una molécula del producto C : $A+B \rightarrow C$.

Si las concentraciones iniciales de A y B son respectivamente a y b medidos en *moles/litros*, y la concentración instantánea de C es $x(t)$, la ley de acción de masas establece que la velocidad de reacción es proporcional al producto de las concentraciones de A y B:

$$\frac{dx}{dt} = k.(a-x).(b-x)$$

Encontrar $x(t)$ suponiendo:

33.1. $a \neq b$ 33.2. $a = b$

• 1) Separamos las variables para resolver la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x) = k(x-a)(x-b) \rightarrow \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = k\,dt$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \int k\,dt = kt \quad ; \text{ para resolver la } 1^{a}$$

integral usamos el método de fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \Rightarrow$$

$$1 = A(x-b) + B(x-a) \quad \forall x \Rightarrow \text{si elejimos } x=a \Rightarrow$$

$$1 = A(a-b) \Rightarrow A = \frac{1}{a-b} \quad ; \text{ si elejimos } x=b \Rightarrow$$

$$1 = B(b-a) \Rightarrow B = \frac{1}{b-a}$$; Luego:

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{(a-b)}\int \frac{dx}{(x-a)} + \frac{1}{(b-a)}\int \frac{dx}{(x-b)}$$

$$= \frac{\ln(x-a)}{(a-b)} + \frac{\ln(x-b)}{(b-a)} = \frac{1}{(a-b)}\left(\ln(x-a) - \ln(x-b)\right)$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{(a-b)} \ln\left(\frac{x-a}{x-b}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(a-b)} \ln\left(\frac{x-a}{x-b}\right) = kt + C \rightarrow \ln\left(\frac{x-a}{x-b}\right) = (a-b)kt + \underset{\text{(redefinida)}}{C}$$

$$\frac{x-a}{x-b} = e^{(a-b)kt} \cdot \underset{C}{e^{C}} = C e^{(a-b)kt}$$

despejando x de esta última ecuación:

$$x(t) = \frac{a - bCe^{(a-b)kt}}{1 - Ce^{(a-b)kt}}$$ siendo C la constante de integración.

---

2) $a = b \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = k(a-x)^2 \rightarrow \dfrac{dx}{(a-x)^2} = k\,dt$

como $(a-x)^2 = (x-a)^2 \Rightarrow \dfrac{dx}{(x-a)^2} = k\,dt$ y ahora integramos

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = \int k\,dt \rightarrow \int (x-a)^{-2}dx = kt + C \rightarrow$$

$$-(x-a)^{-1} = kt + C \rightarrow \frac{1}{a-x} = kt + C \rightarrow \frac{1}{kt+C} = a - x$$

$$\boxed{x(t) = a - \frac{1}{kt+c}}$$ con c = cte de integración.

---

34. Un gramo de elemento radiactivo de desintegración muy rápido, tarda 5 minutos para perder la mitad de su masa. Si inicialmente se tienen 20 g. de ese elemento, calcule la cantidad que habrá después de media hora.

• Primero debemos resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = -kx \rightarrow \frac{dx}{x} = -k\,dt \rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int -k\,dt \rightarrow$$

$$\ln x = -kt + c \rightarrow x = e^{-kt+c} = e^{-kt} \cdot \underset{\downarrow\, C}{e^{c}} = C e^{-kt}$$

$x(t) = C e^{-kt}$. si $t=0 \Rightarrow x(0) = e^{-k \cdot 0} \cdot C = C$; luego C es la cantidad inicial de materia radioactiva.

$x(t) = x_0 e^{-kt}$. Si tenemos 1 gr ($x_0 = 1$) que en 5 minutos ($t=5$) decae a la mitad ($x = 0{,}5$) $\Rightarrow$

$$0{,}5 = 1 \cdot e^{-k \cdot 5} \rightarrow k \approx 0{,}137 \Rightarrow \underbrace{x(t) = x_0\, e^{-0{,}137\,t}}$$

Nuestro problema comienza con $x_0 = 20$ gr y queremos saber cuanto queda después de media hora ($t = 30$) $\Rightarrow$

$$x(30) = 20\, e^{-0{,}137 \cdot 30} = 0{,}3125 \text{ gr}.$$

---

35. La *vida media* de un elemento radiactivo, derrotada por $t_{1/2}$, es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de una cierta cantidad x_0 del elemento.

35.1. Demuestre que $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{k}$, siendo k la constante de proporcionalidad de la ley de desintegración del elemento.

35.2. La vida media del radio es de 1.700 años. Si se tienen inicialmente x_0 g de radio, calcular la cantidad que quedará 100 años después.

1) Partimos de la ley del decaimiento:

$x(t) = x_0 e^{-kt}$; entonces para $t = t_{1/2}$ $x = \frac{x_0}{2}$ $\Rightarrow$

$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kt_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-k t_{1/2}} \rightarrow e^{k t_{1/2}} = 2$

$k t_{1/2} = \ln 2 \rightarrow \boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}}$

2) $t_{1/2} = 1700$; inicialmente hay x_0 gr $\rightarrow$ luego de 100 años habrá: $x(100) = x_0 e^{-k.100}$; pero tenemos que determinar $k \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} \rightarrow k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{1700} \cong 4.10^{-4} \Rightarrow$

$x(100) = x_0 e^{-4.10^{-4}.100} = x_0 e^{-0,04} \sim 0,96 x_0$

---

36. La vida del isótopo carbono 14 es de aproximadamente 5.550 años. Se sabe que un cierto fósil corresponde a un animal que, al morir, se quedó con x_0 g de C-14 en su tejido óseo. Ahora se descubre que el fósil tiene solamente $0,7x_0$ g del isótopo radiactivo. Calcular la edad aproximada del fósil.

El enunciado debe decir: " La vida "media" del isótopo ..."
por lo tanto $t_{1/2} = 5550 \rightarrow k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \sim 1,25.10^{-4} \Rightarrow$

$x(t) = x_0 e^{-1,25.10^{-4} t}$; si $x(t) = 0,7 x_0$ podremos saber t:

$0,7 \cancel{x_0} = \cancel{x_0} e^{-1,25.10^{-4} t} \rightarrow -0,357 = -1,25.10^{-4} t \rightarrow t = 2856$ años.

---

37. Un cuerpo que se encuentra inicialmente a 80° C se coloca en un medio cuya temperatura es de 25°C. Después de 15 minutos, se vio que la temperatura del cuerpo era de 60°C. Demuestre que la constante k de la ley de Newton en este caso es $k = -0,030$. (¿medida en qué unidades?)

• La primer tarea es resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \rightarrow \frac{dT}{T - T_m} = k\,dt \rightarrow \int \frac{dT}{T - T_m} = \int k\,dt$$

$$\ln(T - T_m) = kt + C \rightarrow T - T_m = e^{kt + C} = \underset{\downarrow\, C}{e^{C}} \cdot e^{kt}$$

$$T(t) = T_m + C e^{kt}$$

En este problema $T_m = 25°C$ y a $t = 0$ $T = 80°C$ $\Rightarrow$

$$80°C = 25°C + C e^{k.0} \rightarrow 80°C - 25°C = C = 55°C$$

$T(t) = 25°C + 55°C\, e^{k.t}$ y sabemos que a $t = 15\,min$

$$T = 60°C \Rightarrow 60°C = 25°C + 55°C\, e^{k.15\,min} \rightarrow$$

$$35°C = 55°C\, e^{k.15\,min} \rightarrow 0{,}6\overset{\frown}{3} = e^{k.15\,min} \rightarrow$$

$$-0{,}45 = k.15\,min \rightarrow k = \frac{-0{,}45}{15\,min} = -0{,}03\ {}^{1}/_{min}.$$

---

38. Un cuerpo a 90°C se coloca en un cuarto que está a una temperatura de 30°C. A la media hora la temperatura del cuerpo descendió a 55° C. ¿Cuánto tiempo habrá de transcurrir para que el cuerpo esté a una temperatura de 30°C?

A lo mejor en un par de horas Ud. observa que la temperatura es aproximadamente 30°C. ¿Pero cómo lo expresa matemáticamente? ¿Hay contradicción entre lo calculado y lo observado?).

• La temperatura del medio es de 30° y la temperatura inicial del cuerpo es de 90° (a $t = 0$) $\Rightarrow$

$90° = 30° + C e^{0k} \rightarrow 60° = C \rightarrow T(t) = 30° + 60° e^{kt}$

transcurridos 30min el cuerpo esta a 55° ⇒ busco k:

$55° = 30° + 60° e^{k.30min} \rightarrow \frac{55° - 30°}{60°} = e^{k.30min}$

$-0,87 = k.30min \rightarrow \underbrace{k = -0,029\ 1/min}$

Podemos hallar ahora el tiempo t en el cual el cuerpo se enfrie a 30°:

$30° = 30° + 60° e^{-0,029\,1/min\ .\ t} \rightarrow 0° = 60° e^{-0,029\,1/min\ t}$

$0 = e^{-0,029\, t}$ y vemos que esto es solo posible cuando $t \rightarrow +\infty$; la interpretación es que luego de "mucho" tiempo, el cuerpo entra en equilibrio con el ambiente.

---

39. Cuando se saca una torta del horno se encuentra a 130ºC. La temperatura de la cocina es de 20ºC. Después de una hora la de la torta es de 50ºC. Hallar la temperatura de la torta en función del tiempo. ¿Tendrá que esperar mucho tiempo para comer la torta si la quiere cortar cuando esté a la temperatura de la cocina? (¿Será necesario esperar tanto?)

- La temperatura ambiente es $T_m = 20°C$ (la de la cocina)

a $t = 0$ la torta se encuentra a 130° ⇒

$130° = 20° + C e^{k.0} \rightarrow 130° - 20° = 110° = C$

a $t = 60\,min$ $T = 50°$ $\rightarrow 50° = 20° + 110° e^{k.60min}$

$0,\widehat{27} = e^{60k} \rightarrow k = -0,022\ 1/min$

$T(t) = T_m + Ce^{kt} \Rightarrow \boxed{T(t) = 20° + 110° e^{-0{,}022 \, 1/min \, t}}$

Si quiero que $T = 20°$ $\rightarrow$ $20° = 20° + 110\, e^{-0022t}$ $\rightarrow$

$0 = 110\, e^{-0{,}022t}$ $\Rightarrow$ $t = \infty$, tendriamos que esperar una infinita cantidad de tiempo, en la práctica este infinito sera de un par de horas (un centenar de minutos).

---

40. Se encontró asesinado en su casa a un rico industrial. La policía llegó al lugar del crimen a las once de la noche. En ese momento la temperatura del cuerpo era de 31°C y una hora después era de 30°C. La temperatura del cuarto donde se encontró el cuerpo era de 22°C (constante durante todo el tiempo transcurrido) y la víctima estaba sana (por lo que su temperatura antes de ser asesinado era de 37°C). ¿A qué hora se cometió el crimen?

- A las 11 de la noche ($t = h$) $T = 31°$, a las 12 ($t = 24$) $T = 30°$, la $T_m = 22°$ (Temperatura ambiente) $\Rightarrow$

$31 = 22 + c\, e^{23k}$ y $30 = 22 + c\, e^{24k}$

$9 = c\, e^{23k}$; $8 = c\, e^{24k}$ dividiendo ambos:

$8/9 = e^{k}$ $\rightarrow$ $k = \ln(8/9) \sim -0{,}12\ 1/h$ ahora sacamos c.

$31 = 22 + c\, e^{-0{,}12 . 23}$ $\Rightarrow$ $9 = c . 0{,}067$ $\Rightarrow$ $c = 135$.

finalmente: $T(t) = 22 + 135\, e^{-0{,}12t}$ y buscamos $t / T = 37°C$

$$37 = 22 + 135\, e^{-0{,}12t} \to -2{,}2 = -0{,}12t \to t = 18{,}3$$

El crimen se cometió aproximadamente a las 6 de la tarde.

41. Un circuito muy sencillo (RL serie) se muestra en al figura 1. Una batería suministra una voltaje de V volt y está conectada a una resistencia R ohm y una inductrancia de L henry. Todas las cantidades V, R y L son constantes.

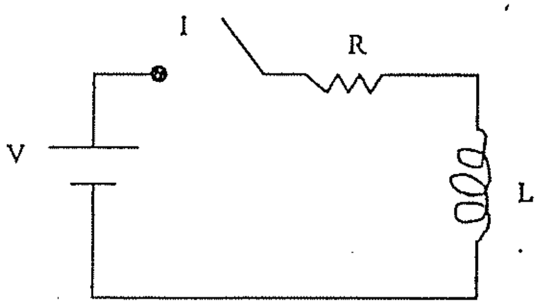


Fig. 1

Al cerrar el interruptor I, por el circuito empieza a circular una corriente $i(t)$ ampère. La ley de Ohm establece que la caída de voltaje en la resistencia es Ri y en la inductancia es $L\dfrac{di}{dt}$. Una de las leyes de Kirchhoff nos dice que la suma de estas caídas de voltaje es igual al voltaje aplicado

$$V:\ Ri + L\frac{di}{dt} = V\ .$$

Si se cierra el interruptor I en $t = 0$ de modo que $i(0) = 0$, hallar $i(t)$ y mostrar que para valores grandes del tiempo circulará por el circuito una corriente constante.

- Vamos a resolver la ecuación diferencial:

$$R\, i(t) + L\frac{di(t)}{dt} = V \Rightarrow L\frac{di}{dt} = V - Ri \Rightarrow$$

$$\frac{di}{V - Ri} = \frac{dt}{L} \to \text{integramos: } \int \frac{di}{V-Ri} = \int \frac{dt}{L}$$

$$\int -\frac{1}{R}\frac{di}{i - V/R} = \frac{t}{L} + C \Rightarrow \int \frac{di}{i - V/R} = -R/L\, t + C \to$$

$$\ln(i - V/R) = -R/L\, t + C \Rightarrow i - V/R = e^{-R/L\, t + C} = C e^{-R/L\, t}$$

$$i(t) = V/R + C e^{-R/L\, t}.$$ Para hallar C usamos que a $t=0$

$$i = 0 \Rightarrow 0 = V/R + C e^{0} = V/R + C \to C = -V/R.$$

finalmente: $\boxed{i(t) = V/R - V/R\, e^{-R/L\, t}}$ y notamos que si

tomamos el $\lim\limits_{t\to\infty} i(t) = V/R - V/R \underbrace{\lim\limits_{t\to\infty} e^{-R/L\,t}}_{0} = V/R$

la corriente que circulara tiende a ser $i = V/R$.

---

42. En la figura 2 se muestra otro circuito sencillo (R C serie): Una bateria de V volt conectada en serie con una resistencia de R ohm y un capacitor de C farad. Si $q(t)$ es la carga instantánea del condensador, medida en coulomb; la caída de potencial en el capacitor es $\frac{1}{C}q$. Como la relación entre la carga y la corriente $i(t)$ es $i(t)=\frac{dq}{dt}$, la caída de potencial en la resistencia es $R\,.\,i = R\,\frac{dq}{dt}$. Las leyes mencionadas en el problema

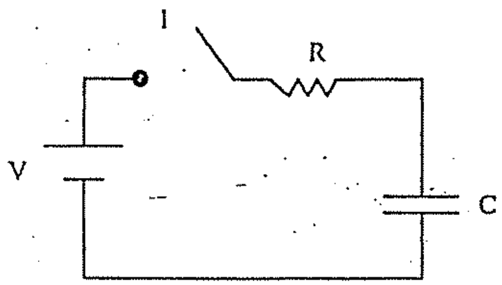


Fig. 2

número 41 conducen a: $R\,\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\,q = V$. Si al cerrar el interruptor I el condensador está descargado:

42.1. hallar $q(t)$ e $i(t)$ 42.2. ¿qué ocurre cuando $t \to \infty$?

- 1) Hallemos $q(t)$: $R\,\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\,q = V \rightarrow$

$R\,\frac{dq}{dt} = V - q/C \Rightarrow \frac{dq}{V - q/C} = \frac{dt}{R} \rightarrow$

$-\frac{c\,dq}{q - VC} = \frac{dt}{R}$ y ahora integramos:

$-C\int \frac{dq}{q - VC} = \frac{1}{R}\int dt \Rightarrow -C\ln(q - VC) = \frac{t}{R} + K$

siendo K la constante de integración.

$$\ln(q - VC) = -t/_{RC} + k \rightarrow q - VC = e^{-t/_{RC}} \cdot \underbrace{e^{k}}_{K}$$

$$\boxed{q(t) = VC + K e^{-t/_{RC}}}$$

y sabemos que a $t=0$ $q(0)=0$ (todavia no se ha acumulado carga) $\Rightarrow$

$$0 = VC + K e^{0} \rightarrow e^{0} K = -VC \rightarrow K = -VC$$

$$\boxed{q(t) = VC - VC e^{-t/_{RC}}}$$

Podemos obtener ahora $i(t)$

Como: $i(t) = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(VC - VC\, e^{-t/_{RC}}\right)$

$$\boxed{i(t) = \frac{V}{R}\, e^{-t/_{RC}}}$$

• 2) cuando $t \rightarrow \infty$ vemos que $\lim\limits_{t\to\infty} i(t) = \lim\limits_{t\to\infty} V/_{R}\, e^{-t/_{RC}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} i(t) = 0$, lo que significa que pasado "mucho" tiempo o "suficiente" tiempo ya no circula corriente. Es porque el condensador ya estaria totalmente cargado.

---

43. Considere el circuito de la figura 3, con el condensador C inicialmente cargado con una carga q_0 coulomb. Se cierra el interruptor I y el condensador comienza a descargarse. La ecuación diferencial es la misma del problema anterior con V=0.

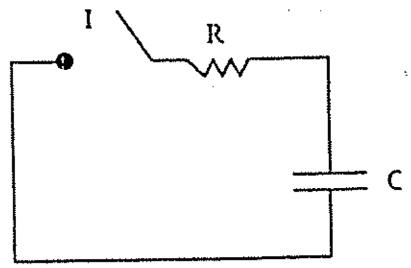


Fig. 3

43.1. Encuentre la carga $q(t)$ y la corriente $i(t)$

43.2. ¿Qué ocurre cuando $t \to \infty$?

• La ecuación diferencial es ahora: $R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C} q = 0$

con la condición inicial de $q(0) = q_0$

• 1) $\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{RC} q = 0 \rightarrow \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{q}{RC} \rightarrow$

$\dfrac{dq}{q} = -\dfrac{1}{RC}\, dt \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{dq}{q} = -\dfrac{1}{RC}\int dt \Rightarrow$

$\ln q = -\dfrac{1}{RC} t + K \Rightarrow q = e^{-t/RC + K} = e^{-t/RC} \cdot \underset{K}{\underset{\downarrow}{e^{K}}}$

$q(t) = K\, e^{-t/RC}$, usamos ahora la condición inicial:

$q_0 = K e^{0} \rightarrow K = q_0 \rightarrow \boxed{q(t) = q_0\, e^{-t/RC}}$

Para hallar $i(t)$ derivamos:

$\boxed{i(t) = -\dfrac{q_0}{RC}\, e^{-t/RC}}$

• 2) Cuando $t \to \infty$ $\quad \lim\limits_{t\to\infty} q(t) = \lim\limits_{t\to\infty} q_0\, e^{-t/RC} = 0$

es decir: se descargó completamente el condensador.

$$\lim_{t\to\infty} i(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{-q_0}{RC} e^{-t/RC} = 0$$, tambien se acaba la corriente al descargarse por completo el condensador.

---

44. Si para los problemas 42 y 43 se toman valores de R y de C tales que $R.C = 2.10^{-3}$ segundos (valor razonable para un circuito de este tipo),

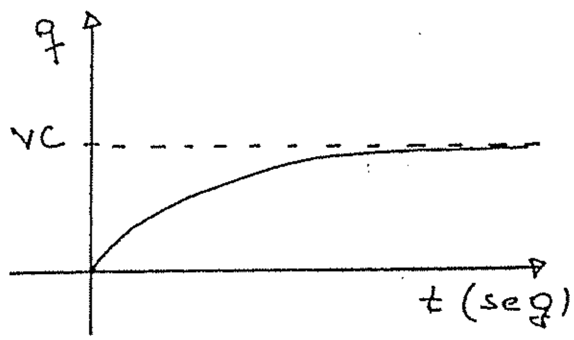
44.1. Represente gráficamente $q(t)$ e $i(t)$ en función del tiempo.

44.2. Calcule los valores de $q(t)$ e $i(t)$ para $t = 2$, $t = 4$ y $t = 8$ milisegundos. ¿qué conclusión puede sacar con respecto a los resultados obtenidos en el segundo apartado de ambos problemas?

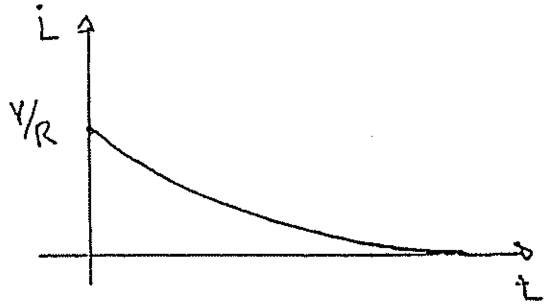
1) Tenemos que: $RC = 2.10^{-3}$ s.

En el problema 42: $q(t) = VC - VC\, e^{-t/2.10^{-3}s}$

$q(t) = VC\left(1 - e^{-500t}\right)$



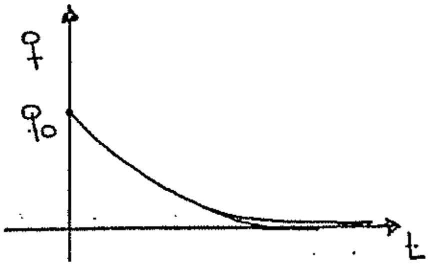
$i(t) = V/R\, e^{-500t}$



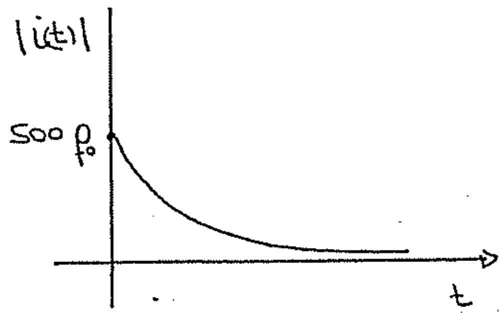
Cuando el capacitor se carga.

En el problema 43:

$q(t) = q_0 \, e^{-500t}$



$i(t) = -500 q_0 \, e^{-500t}$ (graficamos el modulo de $i(t)$)



descarga del capacitor.

• 2) Durante la carga: (Nota: 2 miliseg. $= 2 \cdot 10^{-3}$ s)

$q(2) = VC(1 - e^{-1}) \approx 0{,}6 VC$

$q(8ms) = VC(1 - e^{-4}) \approx 0{,}98 VC$

aprox. en 1s se carga.

Durante la descarga:

$q(2ms) = q_0 \, e^{-1} \approx 0{,}37 \, q_0$

$q(8ms) = q_0 \, e^{-4} \approx 0{,}018 \, q_0$

aprox. en 1seg. se descarga..

¡UFF!. FIN DE LA PRÁCTICA 6.

• A CONTINUACIÓN ENCONTRARÁS LA TABLA DE INTEGRALES...

TABLA DE INTEGRALES

- $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
- $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$
- $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$
- $\int \operatorname{ch} x\,dx = \underset{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{sh} x}} + C$
- $\int \operatorname{sh} x\,dx = \underset{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{ch} x}} + C$
- $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{argsh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{argch} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C$
- $\int \frac{1\,dx}{1-x^2} = \operatorname{argth} x + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$

MÉTODOS

- Linealidad de la integral:

$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

- Si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

$\boxed{\text{SUSTITUCIÓN}}$

- $$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx.$$

$\boxed{\text{PARTES}}$