Resueltos

MATERIA: Análisis Matemático I

TITULO: T.P. Nº 5

"Teoremas Relativos a las Funciones Diferenciables"

Edición 2000

AUTOR: Anibal Kasero

AR1AP5

UNIDAD Nº 5 (ANÁLISIS I)

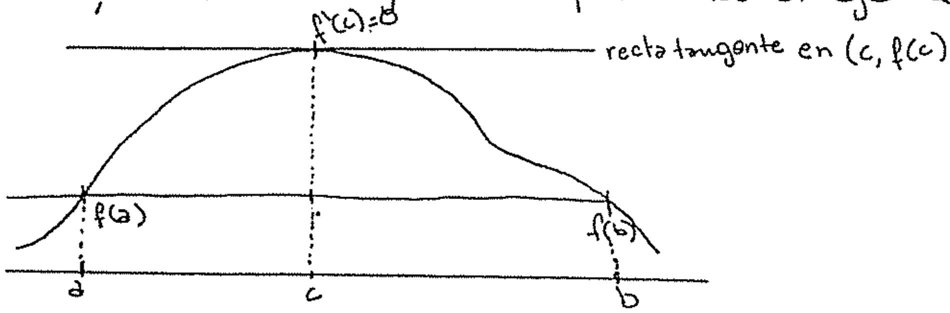
"TEOREMAS RELATIVOS A LAS FUNCIONES DIFERENCIABLES"

ALGO DE TEORIA PREVIA:

En la unidad anterior, mencionamos que la derivada es una importante herramienta para el estudio de funciones. En esta, veremos la forma concreta de utilizarla, suponiendo que ya la sabés calcular. En los primeros ejercicios, a través de algunos teoremas, luego veremos que con la derivada se pueden calcular muy fácilmente ciertos límites, usando la Regla de L'Hospital. Finalmente veremos la forma de hacer análisis completos de funciones usando tanto la derivada primera como la segunda y los desarrollos de Taylor y McLaurin. Empecemos por los teoremas.

TEOREMA DE ROLLE: Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), tal que $f(a)=f(b)$ entonces existe $c \in (a,b) \;/\; f'(c)=0$.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: El teorema te está diciendo que si $f(a)=f(b)$, entonces en algún punto entre a y b la derivada se anula, o sea la pendiente de la recta tangente es cero o lo que es lo mismo, la recta tangente es paralela al eje de las x.



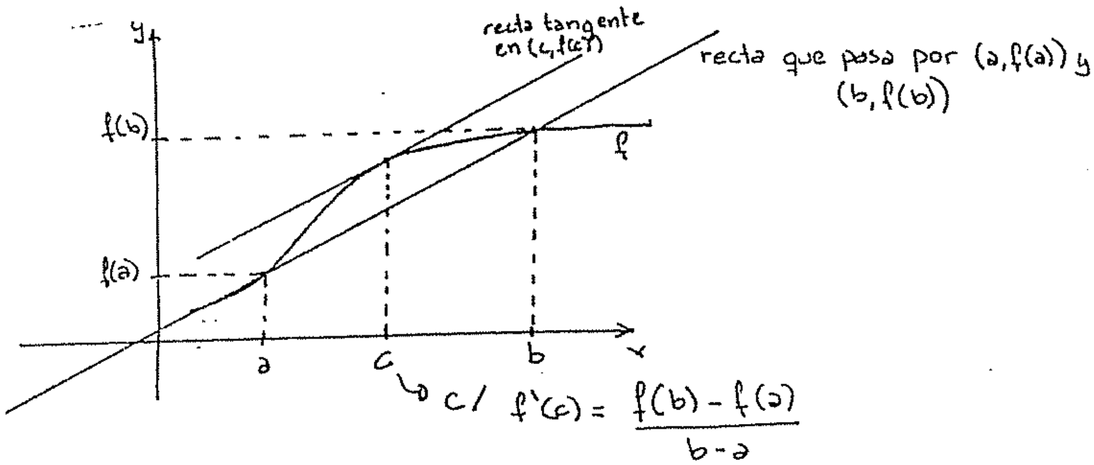
NOTA: - Puede haber más de un c que satisfaga $c \in (a,b)$ y $f'(c)=0$
- Se tienen que satisfacer todas las hipótesis para afirmar la existencia del c. Es decir:
  - Continuidad
  - Derivabilidad.
  - $f(a)=f(b)$.

TEOREMA DE LAGRANGE: Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: Este teorema tiene una interpretación un poco más complicada que el de Rolle: La recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tiene por pendiente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (ver UNIDAD I)

Sabiendo eso, lo que dice el teorema es que hay un punto, entre a y b, en donde la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto es la misma que la pendiente de la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. O sea: son paralelas.



Teoremas relativos a las funciones diferenciables

1. Verifique que se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle en el intervalo indicado. Halle el valor de "c" y determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto $(c; f(c))$.

1.1. 1.1 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ en $[1;2]$

1.2. 1.2 $f(x) = \text{sen }(2x)$ en $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

1.1) f es un polinomio, por lo tanto es contínua y derivable.
Su derivada es:

$$f`(x) = (x^3 - 2x^2 - x + 2)' = (x^3)' - (2x^2)' - (x)' + (2)' = 3x^2 - 4x - 1$$

Nos queda verificar que $f(1) = f(2)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 2 - 1 + 2 = 0 \\ f(2) = 2^3 - 2.2^2 - 2 + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) = 0 = f(2).$$

Veamos ahora cuál es el c / $f`(c) = 0$:

$$f`(c) = 3c^2 - 4c - 1 = 0$$

Usando la "formulita" para encontrar raíces de cuadráticas

$$c_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \underset{\substack{a=3\\b=-4\\c=-1}}{=} \frac{4 \pm \sqrt{16+4.3}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$$

De estas dos raíces la única que pertenece al $[1,2]$ es $\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}$

$$\boxed{c = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}}$$

Ya sabemos que la recta tangente en $(c, f(c))$ tiene pendiente 0 $(f'(c)=0)$, o sea su fórmula es:

$$y = f(c) = f\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right) + 2 = \boxed{\frac{20}{27} - \frac{14\sqrt{7}}{27} = y}$$

Como la recta tangente es paralela al eje de las x, la normal será paralela al eje de las y, o sea que será de la forma $x = ct$. Como tiene que pasar por $(c, f(c))$, la recta es $x = c$, o sea

$$\boxed{x = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}}$$

1,2) Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $\left.\begin{array}{l} f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \\ f(\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \end{array}\right\} \neq \Rightarrow$ no satisface hipótesis de Rolle.

Según lo que está en las soluciones la función debería ser

$$f(x) = \operatorname{sen}(2x)$$

Esta f satisface Rolle con $c = \frac{\pi}{4}$, pues $f'(x) = 2\cos(2x)$ y $f'(c)=0$ y las rectas tangente y normal son, respectivamente

RT: $y = 1$ RN: $x = \frac{\pi}{4}$

Pues $(c, f(c)) = \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

---

3. Si $h:\Re \to \Re$ / $h(x)=x^4-2x^3+2x^2-x$ demuestre que la ecuación $4x^3-6x^2+4x-1=0$ admite al menos una raíz real en (0;1).

La función h es continua en el $[0,1]$ y derivable en el $(0,1)$, además $h(0)=0$ y $h(1)=1-2+2-1=0$, entonces $h(1)=h(0)$ y podemos aplicar el teorema de Rolle, que dice que existe $c\in(0,1)$ tal que $h'(c)=0$. Pero

$$h'(x)=(x^4-2x^3+2x^2-x)'=4x^3-6x^2+4x-1.$$

Entonces existe c tal que

$$4c^3-6c^2+4c-1=0$$

y $c\in(0,1)$.

---

4. Demuestre que la ecuación $x^3-3x+k=0$ con $k\in\Re$ no puede tener más de una raiz en $[-1;1]$.

Supongamos que sí tuviese más de una raíz en el $[-1,1]$. Entonces existirían x_1 y x_2 tales que $f(x_1)=0$ y $f(x_2)=0$ donde

$$f(x)=x^3-3x+k$$

Suponiendo $x_1<x_2$, entonces $[x_1,x_2]\subseteq[-1,1]$ y como la f es derivable y continua en el $[-1,1]$, en particular es continua en el $[x_1,x_2]$ y derivable en el (x_1,x_2) o sea que satisface las hipótesis de Rolle. Entonces existe c tal que

$$f'(c)=0$$

$\in(x_1,x_2)$

si y solo si

$$3c^2-3=0$$

si y solo si

$$|c|=1$$

Pero tenemos que $-1 \leq x_1 < c < x_2 \leq 1$, entonces el resultado es un absurdo. Que provino de suponer la existencia de al menos dos raíces en $[-1,1]$.

(5.) ¿Es válido el recíproco del teorema de Rolle?. Justifique.

El enunciado del recíproco del teorema de Rolle sería:

"Si la función f' posee una raíz en (a,b) donde la f es continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b) \Rightarrow f(a) = f(b)$."

Intuitivamente esto no parece para nada verdadero y de hecho no lo es. Basta encontrar una función cuya derivada tenga una raíz y luego hallar el intervalo adecuado:

Si $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = 2x$ y $f'(0) = 0$ o sea que el cero es una raíz de f'. Eligiendo el $[-1,2]$ tenemos que f es continua en $[-1,2]$, derivable en $(-1,2)$ y $0 \in [-1,2]$ es raíz de la derivada de f. En este caso el recíproco del Teorema de Rolle nos diría que

$$f(-1) = f(2)$$

Pero $f(-1) = (-1)^2 = 1$ y $f(2) = 2^2 = 4$.

(6.) Determine si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & si\ x < 1 \\ 5x - 8 & si\ x \geq 1 \end{cases}$ cumple con las hipótesis del teorema de Rolle en $\left[-2; \frac{8}{5}\right]$.

Como $-2 < 1$, $f(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

Como $\frac{8}{5} \geq 1$, $f\left(\frac{8}{5}\right) = 5 \cdot \frac{8}{5} - 8 = 8 - 8 = 0$.

Entonces $f(-2) = f\left(\frac{8}{5}\right)$. Veamos si la f es continua en $\left[-2, \frac{8}{5}\right]$ y derivable en $\left(-2, \frac{8}{5}\right)$. Las dos funciones laterales son continuas y derivables en $\mathbb{R}$. Entonces el problema debería estar en el 1.

Averigüemos los límites laterales de la función para ver si es contínua:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2-4 = 1^2 - 4 = -3 \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 5x - 8 = 5.1 - 8 = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{como } f(1) = -3, \text{ la } f \text{ es contínua en el } 1.$$

Entonces f resulta contínua en el $\left[-2, \frac{8}{5}\right]$. Para ver si es derivable veremos las derivadas laterales en el 1:

$$\left.\begin{array}{l} f'^{-}(1) = \left(x^2-4\right)' = 2x = 2 \\ \\ f'^{+}(1) = (5x-8)' = 5 \end{array}\right\} \neq \Rightarrow f \text{ no es derivable en } 1.$$

Entonces la f no cumple con Rolle por no ser derivable en $\left(-2, \frac{8}{5}\right)$

AGREGADO

Pruebe que en la parábola que representa:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$, la cuerda que une los puntos $(x_0; f(x_0))$ y $(x_1; f(x_1))$ es paralela a la recta tangente en el punto:

$$\left(\frac{x_0 + x_1}{2}; f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)\right)$$

Vimos en la unidad 1 que la pendiente de la recta que pasa por los ptos. $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ es

$$m_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Por otra parte la pendiente de la recta tangente en $\left(\frac{x_0+x_1}{2}, f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\right)$ es $f'\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$. Calculemos la derivada y luego reemplacemos:

$$f'(x) = 2ax + b$$

Entonces

$$m_2 = f'\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = 2a\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + b = a(x_0+x_1)+b.$$

$\downarrow$
pendiente de
tangente en $\frac{x_0+x_1}{2}$.

Podemos calcular explícitamente m_1 reemplazando $f(x)$ por ax^2+bx+c.

$$m_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{ax_1^2+bx_1+c-(ax_0^2+bx_0+c)}{x_1-x_0} =$$

$$= \frac{a(x_1^2-x_0^2)+b(x_1-x_0)}{x_1-x_0} = \frac{(a(x_1+x_0)+b)(x_1-x_0)}{x_1-x_0} =$$

$$= a(x_1+x_0)+b.$$

Entonces $m_1 = m_2$ que es la condición para paralelismo.

(7.) Analice si cada una de las siguientes funciones verifica el teorema de Lagrange en el intervalo dado:

7.3. $f_3(x)=3(x-2)^{\frac{2}{3}}+1$ en $[1;3]$

7.4. $f_4(x)=\begin{cases} 2x+3 & si\ x<3 \\ 15-2x & si\ x\geq 3\end{cases}$ en $[-1;5]$

7.3) Si $f_3(x) = 3(x-2)^{2/3}+1 = 3\sqrt[3]{(x-2)^2}+1$, tenemos que es continua en $[1,3]$, para ver si es derivable calculemos f_3':

$$f_3'(x) = 3.\frac{2}{3}(x-2)^{2/3-1} = 2(x-2)^{-1/3} = \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$$

Esta función no está definida cuando se anula el denominador y esto pasa cuando $x=2$, como $2\in(1,3)$, la f_3 resulta <u>NO</u> derivable en el $(1,3)$ y entonces la f_3 <u>NO</u> satisface el teorema de Lagrange en el $[1,3]$

7.4) Al igual que en el ejercicio 6, como cada una de las funciones laterales es derivable y continua en $\mathbb{R}$, el punto de conflicto es el 3.

Continuidad en 3:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f_4(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 2x+3 = 2.3+3 = 9 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f_4(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 15-2x = 15-2.3 = 9 \end{array}\right\} \text{continua.}$$

Derivabilidad en 3:

$$\left.\begin{array}{l} f_4'^-(3) = (2x+3)'\Big|_3 = 2\Big|_3 = 2. \\ f_4'^+(3) = (15-2x)'\Big|_3 = -2\Big|_3 = -2 \end{array}\right\} \text{no es derivable.}$$

Entonces f_4 no verifica las hipótesis del Teorema de Lagrange en $[-1,5]$ pues f_4 no es derivable en $x=3$.

---

9. Justifique la siguiente afirmación:

"El teorema de Rolle es un caso particular del Teorema de Lagrange"

Si a las hipótesis del Teorema de Lagrange le agregamos que $f(a)=f(b)$, entonces el Teorema dice que $\exists\, c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{\overbrace{f(b)-f(a)}^{=0}}{b-a} = f'(c)$$

Entonces

$$f'(c) = 0$$

Que es lo que dice el Teorema de Rolle.

---

16. Pruebe que si f y g son funciones derivables en $(a;b)$ tales que $f'(x)=g'(x)\ \forall x\in(a;b)$, entonces $f-g$ es constante en $(a;b)$.

Si $f'(x) = g'(x)\ \forall x\in(a,b) \Rightarrow f'(x) - g'(x) = 0\ \forall x\in(a,b)$

$\Rightarrow (f'-g')(x) = 0\ \forall x\in(a,b) \Rightarrow (f-g)'(x) = 0\ \forall x\in(a,b)^{(1)}$

Sea $[x_1, x_2] \subseteq (a,b) \Rightarrow$ como $(f-g)$ es contínua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2) podemos aplicar Lagrange:

$$\exists c\in(x_1,x_2) \quad \frac{(f-g)(x_2) - (f-g)(x_1)}{x_2 - x_1} = (f-g)'(c) = 0^{(1)}$$

Entonces

$$(f-g)(x_2) = (f-g)(x_1)$$

Como esto lo vimos $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, resulta que $f-g$ es constante en (a,b).

Habíamos visto que si f es constante $\Rightarrow f' = 0$ usando la definición de derivada. Ahora probamos con el Teorema de Lagrange que si $f' = 0 \Rightarrow f =$ constante. En conclusión

$$f \text{ constante} \Leftrightarrow f' = 0 .$$

AGREGADO

Averigüe si

$$f(x) = 3|x| - x^{2/3}$$

cumple con las hipótesis del teorema de Lagrange en $[-1;1]$.

Se vio en la unidad anterior que $|x|$ no es derivable en el cero pues $|x|'^{-} = -1$ y $|x|'^{+} = 1$. Por lo tanto es de esperar que $f(x)$ tampoco sea derivable en el 0.

$$f(x) = 3|x| - x^{2/3} = \begin{cases} -3x - x^{2/3} & x<0 \\ 3x - x^{2/3} & x\geq 0 \end{cases}$$, por lo tanto

$$f'(x) = \begin{cases} -3 - \frac{2}{3}x^{-1/3} & x<0 \\ 3 - \frac{2}{3}x^{-1/3} & x>0 \end{cases} = \begin{cases} -3 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} & x<0 \\ 3 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} & x>0 \end{cases}$$

Entonces $f'(0) \nexists$ y f no satisface las hipótesis de Lagrange.

---

22. Demuestre que si f es derivable en $(a;b)$ y $f'(x)>.0 \quad \forall x \in (a;b)$ entonces f es estrictamente creciente en $(a;b)$.

Sean x_1 y $x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$, entonces como f es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2) se cumplen las hipótesis de Lagrange y existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$$

Como el cociente de la izquierda es positivo y $(x_2 - x_1)$ es positivo, tenemos que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Que es la definición de f creciente. Como x_1 y x_2 eran cualquiera $\in (a,b)$, concluimos que la f es estrictamente creciente en (a,b).

---

24. Demuestre que si f es derivable en $(a;b)$ y $f'(x)<.0 \quad \forall x \in (a;b)$ entonces f es estrictamente decreciente en $(a;b)$.

¡Todo igual al ejercicio anterior salvo que al aplicar Lagrange obtenemos:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < 0$$

De donde $f(x_2) < f(x_1)$ y como supusimos que $x_1 < x_2$, vimos que $\forall x_1 < x_2 \in (a,b)$, $f(x_2) < f(x_1)$ que es la definición de estrictamente decreciente.

(26) Determine los intervalos incluidos en sus respectivos dominios en los cuales cada una de las siguientes funciones es estrictamente creciente y/o estrictamente decreciente.

26.1. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

26.2. $g(x) = x.e^x$

26.3. $h(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

26.4. $i(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Usando EL ejercicio 16... , para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento estudiamos la derivada. Si esta es positiva, la función será creciente, si es negativa decreciente.

26.1) Si $f(x) = -x^2 + 2x - 1$, entonces $f'(x) = -2x + 2$ $(\mathrm{Dom} f = \mathbb{R})$

CRECIMIENTO: $f'(x) > 0 \iff -2x + 2 > 0 \iff 2x < 2 \iff \boxed{x < 1}$

DECRECIMIENTO: $f'(x) < 0 \iff -2x + 2 < 0 \iff 2x > 2 \iff \boxed{x > 1}$

26.2) Si $g(x) = xe^x$, entonces $g'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

En este caso $\mathrm{Dom}\, g = \mathrm{Dom}\, g' = \mathbb{R}$.

CRECIMIENTO: $g'(x) > 0 \iff (x+1)\underbrace{e^x}_{>0} > 0 \iff x+1 > 0 \iff x > -1$

$$\boxed{x \in (-1, +\infty)}$$

DECRECIMIENTO: $g'(x) < 0 \iff (x+1)e^x < 0 \iff x+1 < 0 \iff x < -1$

$$\boxed{x \in (-\infty, -1)}$$

26.3) Si $h(x) = \dfrac{x}{\ln x} \Rightarrow$

$$h'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{(x)'.\ln x - x(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

Como $\ln x = 0 \iff x = 1$ y además para calcular el logaritmo la x tiene que ser positiva, tenemos que

$$\text{Dom } h(x) = \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

Entonces sólo tiene sentido encontrar intervalos de crecimiento y decrecimiento en el dominio de $h(x)$.

CRECIMIENTO: $h'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x - 1}{\underbrace{\ln^2 x}_{>0}} > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1$

$\Leftrightarrow x > e \Leftrightarrow \boxed{x \in (e, +\infty)}$

DECRECIMIENTO: $h'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} < 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1$

$\Leftrightarrow x < e$ como además x tiene que pertenecer al dominio de h, tenemos que $\boxed{x \in (0,1) \cup (1,e)}$.

26.4) Si $i(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, como $1+x^2 > 0$ siempre, $\text{Dom}(i) = \mathbb{R}$.

$$i'(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(x)'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

CRECIMIENTO: $i'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1$

$\Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow \boxed{x \in (-1,1)}$

DECRECIMIENTO: $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0 \Leftrightarrow 1-x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 1$

$\Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x > 1 \vee x < -1 \Leftrightarrow \boxed{x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)}$

(29.) Demuestre que la ecuación $\frac{1}{3^x} - x = 0$ tiene una única raíz y aproxímela con tres cifras significativas.

El Teorema de Bolzano decía que si una función continua toma dos valores entonces toma todos los valores intermedios. En particular si $f(a)$ 0 y $f(b)$ 0, entonces $\exists c \in (a,b) \,/\, f(c)=0$. Si consideramos

$f(x) = \frac{1}{3^x} - x$, entonces $f(0) = \frac{1}{3^0} - 0 = 1$ y $f(1) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$, entonces $\exists c \in (0,1) \,/\, f(c)=0$. O sea que la función f posee una raíz en el $(0,1)$. Y la parte entera de dicha raíz es 0. Todavía tenemos que ver que es la única. Para esto calcularemos la derivada

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3^x} - x\right)' = \left(3^{-x} - x\right)' = \underbrace{-3^{-x} \cdot \ln 3}_{>0} - 1 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

entonces por el ejercicio **24**, la función f es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$. Entonces puede tener una única raíz. Veamos esto último: Si c_1 y c_2 fuesen dos raíces de f con $c_1 < c_2$, como f es estrictamente decreciente $f(c_2) < f(c_1)$, pero $f(c_2) = f(c_1) = 0 \Rightarrow 0 < 0$ absurdo que provino de suponer que la f podría tener dos raíces.

AGREGADO. Pruebe que

$$x^{1000} + ax + b = 0 \qquad (\text{con } a \text{ y } b \text{ reales})$$

tiene a lo sumo dos raíces reales.

* FIJATE QUE ESTE PROBLEMA ES MUY SIMILAR AL PROBLEMA (30) DE LA GUÍA DE EJERCICIOS.

Sea $f(x) = x^{1000} + ax + b$, queremos ver que la ecuación

$$f(x) = 0$$

tiene a lo sumo dos raíces. Si tuviese tres raíces a_1, a_2 y a_3, teniendo en cuenta que f es derivable en todo $\mathbb{R}$, podemos usar Rolle entre a_1 y a_2 y entre a_2 y a_3 deduciendo que hay

$$c_1 \in (a_1, a_2) \ / \ f'(c_1) = 0$$
$$c_2 \in (a_2, a_3) \ / \ f'(c_2) = 0 .$$

Obtenemos así que si f es derivable y tiene tres raíces, entonces f' tiene al menos dos raíces. Calculemos f' para el ejercicio:

$$f'(x) = (x^{1000} + ax + b)' = 1000 . x^{999} + a .$$

Entonces la ecuación $f'(x) = 0$ tiene una única raíz. Vimos que si f tuviese tres raíces o más, f' tendría al menos dos raíces. Entonces f puede tener a lo sumo dos raíces.

El resultado que demostramos recién usando el Teorema de Rolle se puede generalizar y es bastante útil:

Si f es continua y derivable en $[a, b]$ y tiene n raíces en $[a, b]$, entonces f' tiene al menos $n-1$ raíces en (a, b).

---

10. Pruebe la validez de la desigualdad $x < \operatorname{tg} x \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Este ejercicio es una típica aplicación del Teorema de Lagrange. Para $f(x) = \operatorname{tg} x$ y el intervalo $[0, x]$ con $x < \frac{\pi}{2}$, este teorema afirma que

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 0}{x - 0} = \frac{\operatorname{tg} x}{x} = f'(c) \quad \text{con } c \in (0, x)$$

$$f'(c) = (\operatorname{tg} c)' = \frac{1}{\cos^2 c}$$

como $0 < c < \frac{\pi}{2}$, $0 < \cos(c) < 1 \Rightarrow 0 < \cos^2 c < 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 c} > 1 \Rightarrow f'(c) > 1$

Entonces $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\frac{\operatorname{tg} x}{x} > 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x > x$

AGREGADO → **Pruebe que:**

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a} \quad \text{con} \quad 0 < a < b$$

Nuevamente aplicamos el teorema de Lagrange. En este caso

$f(x) = \ln x$ y por lo tanto $f'(x) = \frac{1}{x}$. El teorema dice que hay un $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{c}$$

Usando que $\ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$, y pasando de términos $b-a$, la igualdad se transforma en:

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b-a}{c}$$

Como $a < c < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{c} > \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{b-a}{a} > \frac{b-a}{c} > \frac{b-a}{b}$

y reemplazando $\frac{b-a}{c}$ por $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ obtenemos:

$$\frac{b-a}{a} > \ln\left(\frac{b}{a}\right) > \frac{b-a}{b}$$

AGREGADO → **Calcule $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x}\right)$ como aplicación del teorema de Lagrange.**

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y consideramos el intervalo $[x, x+5]$ con $x > 0$, el teorema de Lagrange dice:

$$\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}}{x+5-x} = f'(c) \qquad \text{con } c \in (x, x+5)$$

Teniendo en cuenta que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y pasando de términos

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x} = \frac{5}{2\sqrt{c}}$$

Cuando $x \to +\infty$, como $c > x$, c también tiende a $+\infty$ entonces podemos aplicar límite a ambos lados de la siguiente manera

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right) = \lim_{c\to+\infty}\frac{5}{2\sqrt{c}} = 0.$$

Una forma más formal de hacer esto es usando la propiedad del sandwich. Como $x < c < x+5 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{c} > \frac{1}{x+5} \Rightarrow$

$$\frac{5}{2\sqrt{x}} > \frac{5}{2\sqrt{c}} > \frac{5}{2\sqrt{x+5}} \Rightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}} > \sqrt{x+5}-\sqrt{x} > \frac{5}{2\sqrt{x+5}}$$

Aplicando límite:

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2\sqrt{x}}}_{\downarrow\ 0} > \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)}_{\downarrow\ 0} > \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2\sqrt{x+5}}}_{\downarrow\ 0}$$

AGREGADO

Demuestre que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{(1-x)x} & \text{si } x \neq 0 \wedge x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 0 \ \underline{\vee}\ x = 1 \end{cases}$$

cumple con la hipótesis de Lagrange en el intervalo $[0;1]$

Hay que ver que f es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$.

Veamos lo segundo, si $x \in (0,1)$,

$$f'(x) = \left(\frac{\operatorname{sen}\pi x}{(1-x)x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen}\pi x)'(1-x)x - (\operatorname{sen}\pi x)((1-x)x)'}{((1-x)x)^2} =$$

$$= \frac{\pi\cos(\pi x)(1-x)x - \operatorname{sen}(\pi x)(1-2x)}{(1-x)^2 x^2}$$

Entonces las únicas restricciones en la derivada están donde se anula el denomiuador y esto sucede en 0 y en 1. Entonces la f es derivable en el $(0,1)$.

Ahora estudiemos la continuidad de la función en los puntos problemáticos o sea 0 y 1. Queremos ver que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \pi$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \pi$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{(1-x)x} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\pi}{(1-x)}}_{\to \pi} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x}}_{\to 1} = \pi = f(0)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{(1-x)x} \underset{\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}(\pi - x)}{=} \lim_{x\to 1^-} \pi \frac{\operatorname{sen}(\pi-\pi x)}{(\pi-\pi x)x} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{sen}(\pi-\pi x)}{\pi-\pi x} \cdot \frac{\pi}{x} = \pi = f(1).$$

Entonces f cumple con las hipótesis de Lagrange en el $[0,1]$.

¿Cumple con las hipótesis de Lagrange la función

AGREGADO

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \;/\; f(x) = \begin{cases} x^2 . \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

en $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$**?**

$$\text{Si } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Vimos que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0 = f(0)$, entonces la función es continua. Veamos que es derivable. Si $x \neq 0$,

$$f'(x) = \left(x^2 \cdot \cos\frac{1}{x}\right)' = 2x \cdot \cos\frac{1}{x} + x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)' = 2x\cos\frac{1}{x} - x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$= 2x\cos\frac{1}{x} + \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, que no tiene límite cuando x tiende a 0,

por lo tanto la f no es derivable en 0 y no satisface entonces las hipótesis de Lagrange.

AGREGADO

Pruebe que si f y h son funciones contínuas en $[a;b]$, derivables en $(a;b)$ y $h'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a;b)$ entonces existe al menos un $c \in (a;b)$ tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)} = \frac{f'(c)}{h'(c)}$$

Usando el Teorema de Lagrange para la f, $\exists c_1 \in (a,b)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c_1)$$

Y usando el teorema para h, $\exists c_2 \in (a,b)$

$$\frac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(c_2)$$

Como $h'(x) \neq 0 \ \forall x$ tenemos que $h(b) \neq h(a)$ (si fuese $h(b)=h(a)$ usando Rolle $\exists x \,/\, h'(x)=0$), entonces dividiendo la primera ecuación por la segunda:

$$\frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)} = \frac{f'(c_1)}{h'(c_2)}$$

Todo bien, salvo que nada te asegura que $c_1 = c_2$ y en el teorema dice $\frac{f'(c)}{h'(c)}$. Entonces tenemos que pensar distinto.

Consideremos la función

$$\varphi(x) = [f(x)-f(a)] - \frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)}[h(x)-h(a)]$$

Como f y h son contínuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b),

$\varphi(x)$ también lo es, además

$$\varphi(a) = 0 \quad y \quad \varphi(b) = 0$$

Entonces usando el teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ /

$$\varphi'(c) = 0$$

Pero $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)} h'(x)$

Y $\varphi'(c) = 0 \iff f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)} \cdot h'(c) = 0$

Pasando de términos queda la igualdad que queríamos probar.

Lo que probamos se llama

TEOREMA DE CAUCHY: Si h y f satisfacen las hipótesis de Lagrange en el intervalo $[a,b]$ y además $h'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)} = \frac{f'(c)}{h'(c)}$$

Vos te preguntarás para qué escribí la primera demostración fallida, si no lleva a absolutamente nada. Pasa que tomar x verdadera esa demostración es un error muy frecuente, está ahí como ayuda memoria para que vos no lo cometas.

AGREGADO

Calcule el valor de "θ" en la fórmula de Cauchy

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{g'(x+\theta h)} \qquad \text{con} \quad 0 < \theta < 1$$

Si se aplica a $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ en $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Reemplazando por los valores de f y de g:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{\cos(x+h) - \cos(x)} = \frac{\cos(x+\theta h)}{-\operatorname{sen}(x+\theta \cdot h)}$$

como $x=0$ $h=\frac{\pi}{2}$ y sea $c = x+\theta h = 0+\theta\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\theta$

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}(0)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos(0)} = \frac{\cos(c)}{-\operatorname{sen}(c)}$$

Reemplazando por los valores correspondientes:

$$\frac{1}{-1} = \frac{\cos(c)}{-\operatorname{sen}(c)}$$

O sea que buscamos $c \,/\, \frac{\cos(c)}{\operatorname{sen}(c)} = 1$ · esto sucede cuando $c=\frac{\pi}{4}$. Como $c=\frac{\pi}{2}\theta$, el valor buscado es $\theta=\frac{1}{2}$.

AGREGADO → **Defina máximos y mínimos relativos y absolutos de una función.**

Primero definiremos máximos y mínimos y después nos ocuparemos de la forma de hallarlos.

EXTREMOS RELATIVOS:

- Decimos que x_0 es un mínimo relativo de f si para todo x en un entorno "pequeño" de x_0: $f(x_0) \leq f(x)$ $\quad |x-x_0|<\varepsilon$

- Decimos que x_0 es un máximo relativo de f si para todo x en un entorno "pequeño" de x_0: $f(x_0) \geq f(x)$ $\quad |x-x_0|<\varepsilon$.

EXTREMOS ABSOLUTOS:

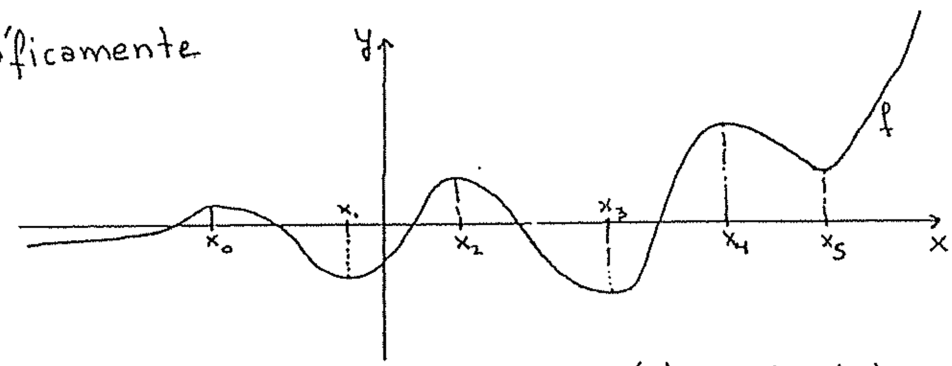
- Decimos que x_0 es un mínimo absoluto de f si para todo $x \in \operatorname{Dom} f$

$$f(x_0) \leq f(x)$$

- Decimos que x_0 es un máximo absoluto de f si para todo $x \in \operatorname{Dom} f$.

$$f(x_0) \geq f(x)$$

Gráficamente



todo extremo absoluto es un extremo relativo.

x_0 : máximo relativo
x_1 : mínimo relativo
x_2 : máximo relativo

x_3 : mínimo absoluto
x_4 : máximo relativo
x_5 : mínimo relativo

(f no tiene máximo absoluto)

(35.) Determine si cada una de las funciones f_i, $i = 1, \dots, 7$

35.1. $f_1 : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R} \;/\; f_1(x) = x^2 - 3x + 2$

35.2. $f_2 : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R} \;/\; f_2(x) = 4$

35.3. $f_3 : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R} \;/\; f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & si\ x \neq 1 \\ 3 & si\ x = 1 \end{cases}$

35.4. $f_4 : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R} \;/\; f_4(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 5 & si\ x \neq -2 \\ 0 & si\ x = -2 \end{cases}$

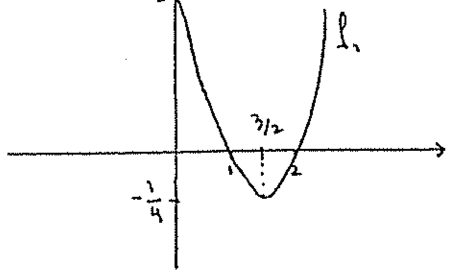
35.5. $f_5 : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R} \;/\; f_5(x) = -|1 - x| + 4$

35.6. $f_6 : \mathfrak{R} - \{-3\} \to \mathfrak{R} \;/\; f_6(x) = \dfrac{x^3 + 9x^2 + 28x + 30}{x + 3}$

35.7. $f_7 : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R} \;/\; f_7(x) = x^{\frac{2}{3}}$

* VOY A GRAFICARLAS TAMBIÉN ASÍ LO VES MEJOR...

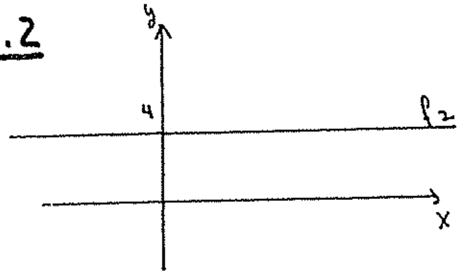
35.1 f_1 es una parábola con raíces en 1 y 2. Su gráfico es:



En $3/2$ hay un mínimo absoluto y f_1 no posee máximo absoluto pues es no acotada.

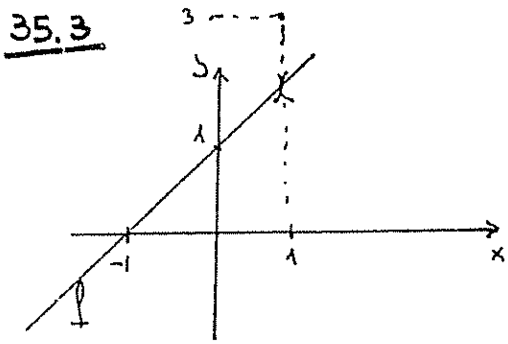
$f_1(3/2) = -1/4$

35.2



Son todos máximos y mínimos relativos y absolutos pues todo $x \in \mathbb{R}$ satisface la definición.

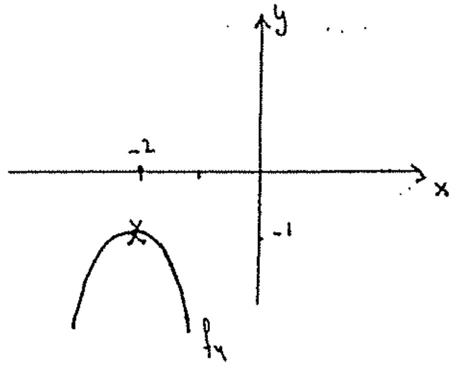
35.3



$$f_3(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1 \quad (x \neq 1)$$

1 es un máximo relativo y no posee ni máximos ni mínimos absolutos. $f_3(1) = 3$

35.4 Esta es una parábola sin raíces y que apunta hacia abajo, su gráfico es:

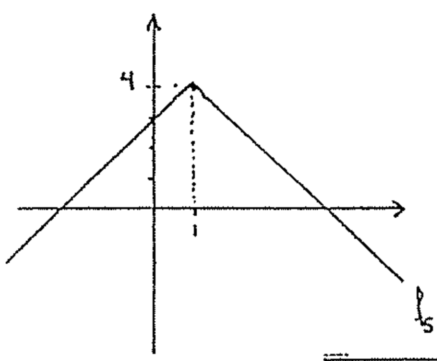


En -2 hay un máximo absoluto de f_4.

$f_4(-2) = 0$

35.5 Aplicando la definición absoluto:

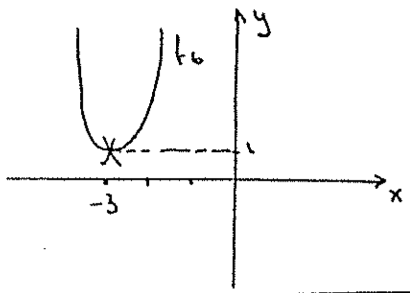
$$f_5(x) = -|1-x| + 4 = \begin{cases} -(1-x)+4 & \text{si } 1-x \geq 0 \\ -(x-1)+4 & \text{si } 1-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3+x & \text{si } x \leq 1 \\ 5-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



El 4 es un máximo absoluto de f_5

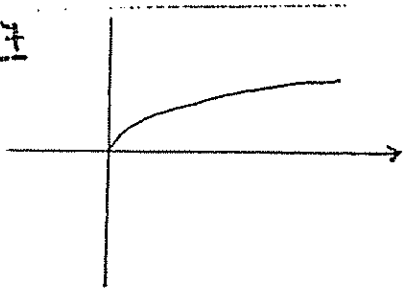
$f_5(1) = 4$

35.6 $f_6(x) = \dfrac{x^3+9x^2+28x+30}{x+3} = \dfrac{(x+3)(x^2+6x+10)}{x+3} = x^2+6x+10 \qquad x \neq -3$



f_6 no tiene máximos pues no está acotada superiormente y tampoco posee mínimo pues no está definida en $x=-3$.

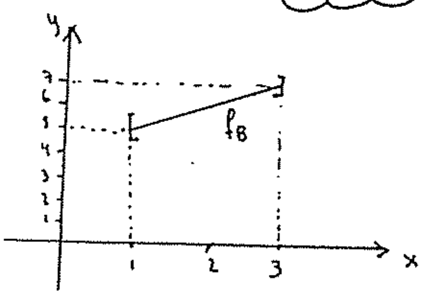
35.7



f_7 posee un mínimo absoluto en $x=0$ pues $x^{2/3} \geq 0 \quad \forall x$. Y no posee máximo absoluto.

$f_7(0)=0$

AGREGADO → $f_8 : [1;3] \to \mathbb{R} \;/\; f_8(x) = x+4$



En 1 hay un mínimo absoluto. → $f_8(1)=5$

En 3 hay un máximo absoluto. $f_8(3)=7$

NOTA: En las soluciones del ejercicio 35 figuran como soluciones los valores que toman las funciones en los puntos críticos. En las soluciones de esta práctica resuelta figuran también los puntos críticos porque considero que es lo más importante: Una vez que encontramos un punto en que la función posee un extremo (x_0) encontrar el valor de ese extremo es simplemente hacer $f(x_0)$. Lo difícil es encontrar x_0. En los ejercicios que siguen vamos a ver la forma de hacerlo porque sería bastante molesto (y muchas veces imposible) tener que graficar f y después buscar los extremos en el gráfico.

AGREGADO

Determine si cada una de las funciones anteriores son o no derivables en las abscisas de sus puntos extremos. Justifique su respuesta.

35.1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 2$.

sí, es derivable porque es un polinomio, y por lo tanto $\exists$ la derivada $\forall x \in \mathbb{R}$: $f_1'(x) = 2x - 3$

35.2) $f_2(x) = 4$.

sí, es derivable en todo $\mathbb{R}$ pues es una constante y (usando la definición de derivada) su derivada vale 0.

35.3) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

f_3 es derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, veamos qué sucede si aplicamos la definición en 1:

$$f_3'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f_3(1+h) - f_3(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2+h-3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h-1}{h} = \infty.$$

Entonces no es derivable. Podríamos haber deducido este resultado de un teorema que vimos en la unidad 5:

f derivable en $a \Rightarrow f$ continua en a.

El contrarrecíproco de este teorema se lee:

$\boxed{f \text{ no es continua en } \Rightarrow f \text{ no es derivable en } a}$

De ahora en más nos alcanzará con afirmar que es no continua para justificar que es no derivable. OJO: Puede ser continua y no derivable (puntos angulosos).

35.4) $f_4(x) = \begin{cases} -x^2-4x-5 & \text{si } x \neq -2 \\ 0 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

f_4 no es contínua en -2 : $\lim\limits_{x \to -2} f_4(x) = -1 \neq 0 = f_4(-2)$

Entonces f_4 es no derivable en -2. (Sí es derivable en $\mathbb{R} - \{-2\}$.

35.5) $f_5(x) = -|1-x| + 4 = \begin{cases} 3+x & \text{si } x \leq 1 \\ 5-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

En este caso el máximo relativo (y absoluto) es 4 y se alcanza en $x=1$. La función es contínua en $x=1$ y viendo su gráfica podemos suponer que es no derivable. Demostrémoslo analizando las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f_5'^{+}(1) = (3+x)'\big|_1 = 1\big|_1 = 1 \\ f_5'^{-}(1) = (5-x)'\big|_1 = -1\big|_1 = -1 \end{array}\right\} \text{no coinciden} \Rightarrow f_5 \text{ es no derivable en } x=1.$$

35.6) $f_6(x) = \dfrac{x^3+9x^2+28x+30}{x+3} = x^2+6x+10 \quad (x \neq -3).$

No posee máximos ni mínimos.

35.7) $f_7(x) = x^{2/3} \Rightarrow f_7'(x) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

No está definida la derivada de f_7 en 0.

34.8) $f_8(x) = x+4$ donde $f_8 : [1,3] \to \mathbb{R}$.

$f_8'(x) = 1 \quad \forall x \in (1,3)$ mientras que en 1 y 3 sólo podemos calcular las derivadas laterales que también dan 1.

36. Si f admite en $x=a$ un extremo relativo y existe $f'(a)$, entonces $f'(a)=0$ (condición necesaria para la existencia de extremos relativos).

Supongamos que $f(a)$ es un extremo relativo de f, entonces

si $f(a)$ es un máximo $\quad f(a) \geq f(a+h) \quad \forall h \in E_a(\varepsilon)$

si $f(a)$ es un mínimo $\quad f(a) \leq f(a+h) \quad \forall h \in E_a(\varepsilon)$.

De la primera desigualdad deducimos que

$$f(a+h) - f(a) \leq 0$$

Divididiendo por $h>0$ y tomando límite

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$$

Entonces $f'^{+}(a) \leq 0$; pero como te dicen que existe $f'(a)$:

$$f'(a) = f'^{+}(a) \leq 0 . \qquad (1)$$

Haciendo un razonamiento análogo con la segunda desigualdad, obtenemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$$

Y por lo tanto

$$f'(a) \geq 0 \qquad (2).$$

Juntando (1) con (2) tenemos el resultado deseado:

TEOREMA DE FERMAT: Si $\exists f'(a)$ y $f(a)$ es un extremo relativo de $f \Rightarrow f'(a)=0$

OBSERVACIÓN: Este teorema es importantísimo. Básicamente, porque ahorra mucho laburo. A partir de ahora para encontrar extremos podés proceder de la sgte manera:

1) Fijate si hay extremos en donde la f no es derivable.

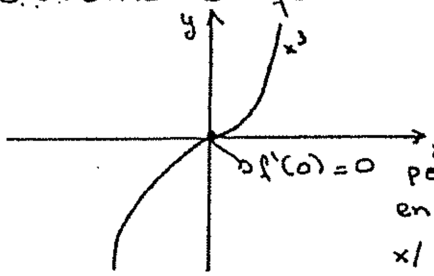
2) Si la f es derivable buscá los $a / f'(a)=0$ y fijate si estos a son extremos. (Que la derivada se anule no te asegura la existencia de un extremo. Sino valdría la recíproca de Fermat y en el ejercicio 43 veremos que esto no es cierto)

AGREGADO → **¿Es válido el recíproco del teorema de Fermat?. Justifique.**

Nos basta con encontrar un contraejemplo para afirmar que no es válido. El enunciado del recíproco del teorema de Fermat sería:

" Si existe $f'(a)$, y $f'(a)=0 \Rightarrow f(a)$ es un extremo de f ".

Si consideramos $f(x)=x^3$, entonces f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $f'(x)=3x^2$. En $x=0$, $f'(0)=0$. Según el recíproco deberíamos poder afirmar que $f(0)$ es un extremo. En el gráfico de $f(x)=x^3$ se puede ver claramente que no es así:

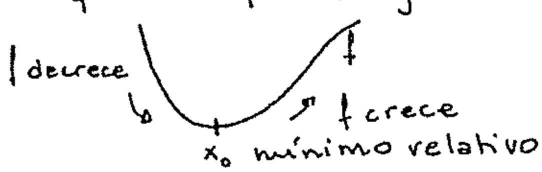


pero 0 no es un extremo pues en todo entorno de 0 hay $x / x^3>0$ y $x / x^3<0$.

---

39. Pruebe que si $f:(a;b)\rightarrow \Re$ es diferenciable y $x_0 \in (a;b)$ es la abscisa de un punto crítico siendo f estrictamente decreciente a izquierda (a derecha) de x_0 y estrictamente creciente a derecha (a izquierda), entonces el punto $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo local (máximo local). ¿Sigue siendo válido este resultado si f no es diferenciable en el punto x_0?. Justifique.

Intuitivamente podemos pensar este resultado de la sgte. manera: Si una función viene decreciendo y en cierto punto comienza a crecer está claro que tocó fondo y dicho punto es un mínimo.



La demostración se hace usando las definiciones de estrictamente decreciente y estrictamente creciente:

Si $x < x_0 \Rightarrow$ como f es estrictamente decreciente $f(x_0) < f(x)$

Si $x > x_0 \Rightarrow$ como f es estrictamente creciente $f(x_0) < f(x)$

Juntando estos dos resultados obtenemos la definición de mínimo.

---

41. Determine la función $g : \Re \to \Re \ / \ g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que $g(-2) = 3$ sea máximo relativo y $g(1) = 0$ mínimo relativo.

Las condiciones que te dan se traducen en las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

- $g(-2) = 3$
- $g(1) = 0$
- $g'(-2) = 0$
- $g'(1) = 0$

$\left.\begin{array}{l} g'(-2) = 0 \\ g'(1) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} g'(x) > 0 & \text{si } x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty) \\ g'(x) < 0 & \text{si } x \in (-2, 1) \end{array}$

Reemplazando, te queda el siguiente sistema:

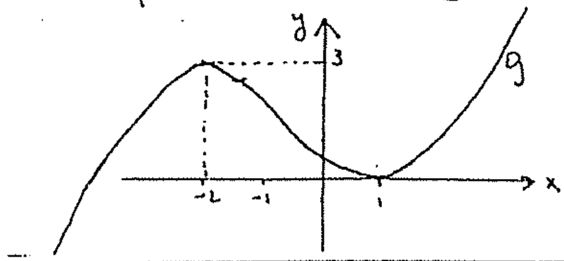
$$\begin{aligned} -8a + 4b - 2c + d &= 3 \\ a + b + c + d &= 0 \\ 12a - 4b + c &= 0 \\ 3a + 2b + c &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, por ejemplo despejando c de la última y reemplazando en las otras tres, luego despejando d y reemplazando en las otras dos y así sucesivamente, podés obtener los valores de a, b, c y d. Otra forma de resolverlo es usando el método de Gauss, si es que alguna vez escuchaste hablar de él. Te da

$a = \frac{2}{9} \quad b = \frac{1}{3} \quad c = -\frac{4}{3} \quad d = \frac{7}{9}$.

Por lo tanto, $g(x) = \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{7}{9}$

El gráfico de g es:



---

42. Sea la función $h: \Re \to \Re / h(x) = \begin{cases} x-39 & si\ x \leq -4 \\ x^3+3x^2-9x & si\ -4 < x < 3 \\ 30-x & si\ x \geq 3 \end{cases}$

Determine los extremos relativos de h.

Averigüemos la derivada en cada una de las partes de la función h:

$$h'(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < -4 \\ 3x^2+6x-9 & si\ -4 < x < 3 \\ -1 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

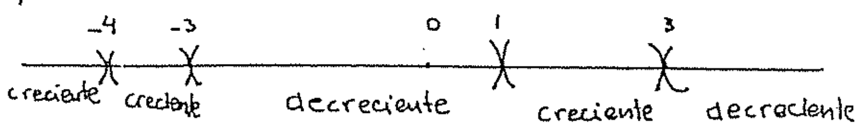
Usando que $3x^2+6x-9 = 3(x^2+2x-3) = 3(x-1)(x+3)$ y que este último producto es >0 si $x \in (-\infty,-3) \cup (1,+\infty)$

<0 si $x \in (-3,1)$

Obtenemos que

$$h'(x) \text{ es} \begin{cases} >0 & si\ x \in (-\infty,-4) \\ >0 & si\ x \in (-4,-3) \\ <0 & si\ x \in (-3,1) \\ >0 & si\ x \in (1,3) \\ <0 & si\ x \in (3,+\infty) \end{cases}$$

O sea que la h es

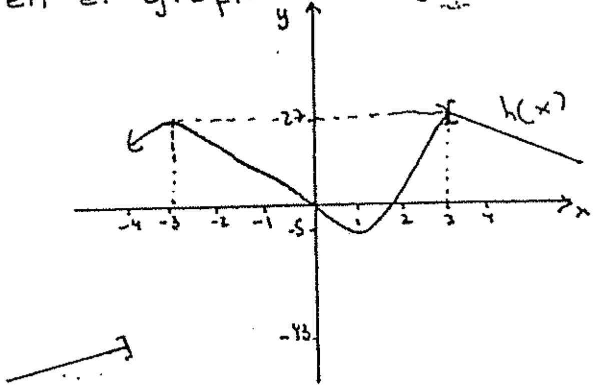


Además $h(-4) = -43$, $h(-3) = 27$, $h(1) = -5$, $h(3) = 27$, entonces concluimos que en -3 toma un máximo relativo (27)

en 1 toma un mínimo relativo (-5)

en 3 toma otro máximo relativo (27)

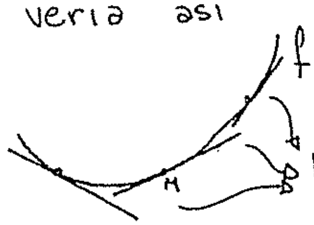
Esto se ve bien en el gráfico de $h(x)$:



NOTA TEÓRICA: Supongamos que la función f es dos veces derivable. Vimos que la positividad o negatividad de f' coincidía con los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la f. De la misma forma la positividad o negatividad de f'' coincidirá con los intervalos de de crecimiento y decrecimiento de la f'. Pero, ¿qué significa que f' sea creciente o decreciente?

Teniendo en cuenta que f' es la pendiente de la recta tangente, si f' es creciente entonces la pendiente de la tangente aumenta a medida que nos movemos, entonces el gráfico de la f se vería así

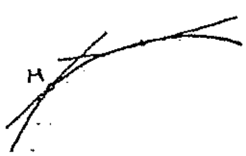
(1)



la pendiente crece, f' crece
$(f''>0)$

Si en cambio $f''<0$, entonces f' es decreciente y entonces la pendiente de la recta tangente al gráfico de f va disminuyendo a medida que "avanzamos" y el gráfico se ve así:

(2)



la pendiente decrece, f' decrece
$(f''<0)$

De esta manera vemos cómo influye la positividad o negatividad de la derivada segunda en la función. Pongámosle nombres a todo esto.

CONCAVIDAD HACIA ARRIBA: Decimos que una función es "cóncava hacia arriba" en un punto M, si al trazar la tangente al gráfico de f que pasa por M, todos los puntos suficientemente próximos a M están situados por encima de la tangente. Es el caso 1. O sea vimos que

$\boxed{\text{si existe } f'' \text{ y es } f''>0 \text{, entonces la función } f \text{ es cóncava hacia arriba.}}$

Exactamente de la misma forma definimos:

CONCAVIDAD HACIA ABAJO: Decimos que una función es "cóncava hacia abajo" en un punto M, si al trazar la tangente al gráfico de f que pasa por M, todos los puntos suficientemente próximos a M están situados por debajo de la tangente. Es el caso 2. O sea vimos

$\boxed{\text{si existe } f'' \text{ y es } f''<0 \text{, entonces (por ser } f' \text{ decreciente), } f \text{ es cóncava hacia abajo.}}$

PUNTO DE INFLEXIÓN: Se llama punto de inflexión a todo punto donde la curva cambia el sentido de su concavidad. A partir del Teorema de Fermat se puede demostrar que si x_0 es un punto de inflexión de $f \Longrightarrow f''(x_0)=0$. Esto se ve en los ejercicios:

---

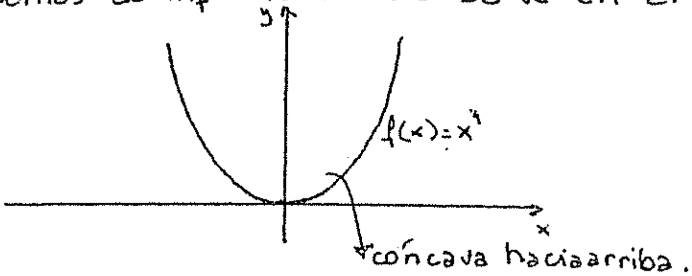
43. Si f es diferenciable hasta el segundo orden en el punto $x = x_0$, pruebe que si $(x_0; f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f entonces $f''(x_0) = 0$.

44. ¿Es válido el recíproco del teorema anterior?. Justifique.

El 43 está resuelto en las soluciones al final de la unidad. El 44 no es válido y el contraejemplo que te sugieren es $f(x)=x^2$ que es incorrecto pues $f''(x)=2 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. El recíproco del teorema afirma:

"Sea f diferenciable hasta el orden 2. Entonces si $f''(x_0)=0$, $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión del gráfico de f."

Aquí, de los tantos contraejemplos es $f(x)=x^4$, entonces $f'(x)=4x^3$ y $f''(x)=12x^2$ y $f'(0)=0$ y $f''(0)=0$. Pero 0 no es un punto de inflexión. La razón es que $f''(x)=12x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, entonces la función es siempre cóncava hacia arriba (ver definición) y por lo tanto no tiene puntos de inflexión. Esto se ve en el gráfico:



(45.) ¿Para qué valores reales de a y b, el punto $(1;3)$ es un punto de inflexión de la gráf de $y=ax^3+bx^2$.

Para que un punto sea de inflexión, debe cambiar de sentido la concavidad. Y para que esto ocurra debe cambiar de signo la derivada segunda. Vimos también que si $(x_0, f(x_0))$ es de inflexión, entonces $f''(x_0)=0$. Por lo tanto lo que se hace es buscar $x_0 \,/\, f''(x_0)=0$ y luego verificar si es de inflexión fijándote si la derivada segunda cambió de signo. Si $f(x)=y=ax^3+bx^2$, entonces

$$y' = 3ax^2 + 2bx$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

$f''(x)=y''=6ax+2b=0 \iff 6ax=-2b \iff 3ax=-b$ (en 1) $3a=-b$

Por otro lado $f(1)=3 \iff a+b=3$

Reemplazando b por $-3a$ $\quad a-3a=3 \iff a=-\frac{3}{2}$

Despejando b, $b=-3a=-3\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}$.

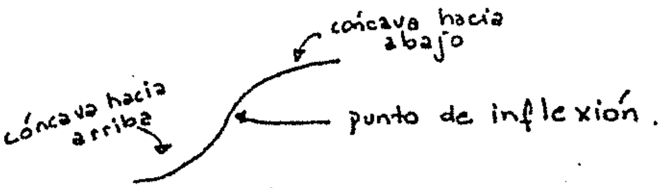
Nos quedó $\boxed{y=-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{2}x\,.}$

Verifiquemos que efectivamente $(1,3)$ es un punto de inflexión del gráfico de esta función observando que y" cambia de signo en el 1:

$$y'' = 6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x + 2\cdot\frac{9}{2} = -9x+9$$

$$y''<0 \iff -9x+9<0 \iff 9<9x \iff x>1$$
$$y''>0 \iff -9x+9>0 \iff 9>9x \iff x<1$$

De este último resultado podemos afirmar que 1 es un punto de inflexión y agregar que el gráfico de y pasa de ser cóncavo hacia arriba a ser cóncavo hacia abajo esto en el gráfico se vería así:



---

(50) Dibuje una gráfica posible de una función que satisfaga las condiciones propuestas y determine las ecuaciones de sus asíntotas.

50.1. $Dom\, f = \Re - \{0\}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$; f continua en $Dom\, f$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty \;\wedge\; \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - x] = 0$; $\quad \forall x \in \Re^- : f'(x) > 0$

$\forall x \in Dom f : f''(x) > 0$ y $f(2) = 4$ extremo relativo.

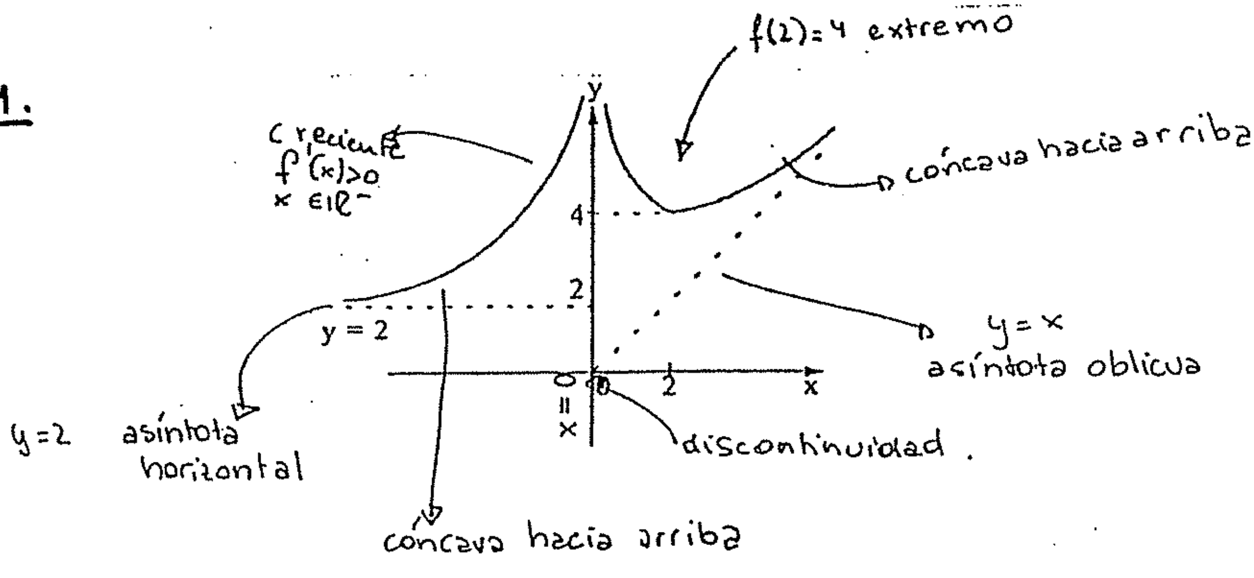
50.2. f diferenciable en $\Re$; $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$f(0) = -2 \;\wedge\; f'(0) = 0$; $\quad \forall x \in (-2;2) : f''(x) > 0$

$f''(-2) = f''(2) = 0 \quad \wedge \quad |f'(2)| = |f'(-2)|$

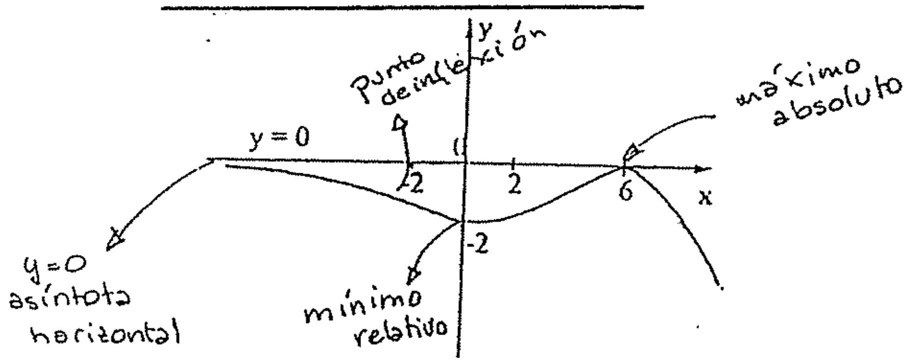
$f(6) = 0$, máximo absoluto.

<u>**50.1.**</u>



Se ve acá cómo a partir de datos exclusivamente teóricos se puede aproximar la gráfica de una función sin siquiera conocerla. Acordate del principio de la materia en donde para graficar una función hacías la tablita...

50.2.



ESTUDIO COMPLETO DE FUNCIONES

SÍNTESIS: Dada una función f:

(I) Averiguás el dominio de f y restringís tu estudio a los x tal que $x \in \mathrm{Dom} f$.

(II) Analizás la continuidad de f obteniendo todas las discontinuidades.

(III) Buscás las asíntotas de la siguiente forma:

III.1) Las verticales las buscás entre los puntos que no están en el dominio y $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

III.2) Las horizontales y oblicuas las obtenés si alguno de estos dos límites da 0:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - ax - b \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) - ax - b.$$

(IV) Calculás $f'(x)$ y el dominio $f'(x)$. Y buscás los intervalos

$\{x / f'(x) > 0\}$ ⟶ crecimiento

$\{x / f'(x) < 0\}$ ⟶ decrecimiento.

Y los valores

$\{x / f'(x) = 0\}$ ⟶ posibles extremos.

Analizando los posibles extremos, y los puntos en que f no es derivable (discontinuidades y $x / x \notin \text{Dom} f'$) encontrás máximos y mínimos relativos.

(V.) Calculas $f''(x)$ y $\text{Dom} f''$. Y buscás los intervalos

$\{x / f''(x) > 0\}$ ⟶ concavidad hacia arriba

$\{x / f''(x) < 0\}$ ⟶ concavidad hacia abajo.

Y los valores

$\{x / f''(x) = 0\}$ ⟶ posibles puntos de inflexión.

Analizando los posibles puntos de inflexión y el cambio de signo ves cuáles realmente lo son.

(VI.) Buscando los puntos en que el gráfico de la función cruza los ejes (Resolviendo $f(x) = 0$ y $f(0)$) ya estás en condiciones de trazar un gráfico aproximado de la función.

(VII) Finalmente fijándote en los máximos y mínimos relativos relativos, determinás los extremos absolutos (si existen) y con estos extremos podes determinar la imágen de f:

$$\text{Im} f = \{ y \in \mathbb{R} / \exists\, x \in \text{Dom} f \text{ con } f(x) = y \}.$$

---

(51) Realice el estudio completo de las siguientes funciones con sus gráficos correspondientes

Vamos a hacer el estudio completo de algunas de las funciones que figuran en el ejercicios, siguiendo los pasos detallados en la síntesis previa.

$$\boxed{f(x) = e^{-x^2}}$$

(I) Como la función no tiene ningún tipo de restricción $Dom f = \mathbb{R}$ y no presenta ningún tipo de discontinuidad.

(III) Asíntotas verticales no posee. Teniendo en cuenta que

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0$$

podemos afirmar que $y=0$ es una asíntota horizontal de f.

(IV) $f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2}\left(-x^2\right)' = -2x\,e^{-x^2}$

El dominio de f' es $\mathbb{R}$ porque no tiene restricciones.

$$f'(x) > 0 \iff -2x\,e^{-x^2} > 0 \iff x\,\underbrace{e^{-x^2}}_{\substack{>0 \\ \forall x}} < 0 \iff x<0.$$

$$f'(x) < 0 \iff -2xe^{-x^2} < 0 \iff x>0.$$

En consecuencia $f(x)$ es creciente en el $(-\infty, 0)$

y $f(x)$ es decreciente en el $(0, +\infty)$

Por lo tanto la f tiene un maximo relativo (y absoluto) en $f(0) = e^0 = 1$.

(V) $f''(x) = \left(-2x\,e^{-x^2}\right)' = (-2x)'e^{-x^2} + (-2x)\left(e^{-x^2}\right)' =$

$= -2e^{-x^2} + (-2x)\left(-2x\,e^{-x^2}\right) = -2e^{-x^2} + 4x^2\,e^{-x^2}$

Entonces

$$f''(x) = \left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2}$$

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow (4x^2-2)e^{-x^2} > 0 \Leftrightarrow 4x^2-2>0 \Leftrightarrow 4x^2>2 \Leftrightarrow$
$x^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow (4x^2-2)e^{-x^2} < 0 \Leftrightarrow 4x^2-2<0 \Leftrightarrow |x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Entonces $f''(x)>0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, y estos son los intervalos en que la f es cóncava hacia arriba.

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y en este intervalo la f es cóncava hacia abajo.

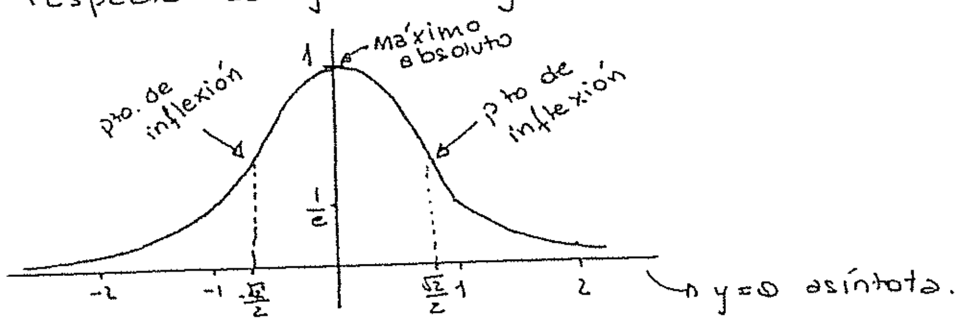
Entonces f cambia su concavidad en $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y los puntos de inflexión son:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$$

y

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right).$$

(VI) Teniendo en cuenta lo observado ya podemos trazar un gráfico aproximado de la función. Una propiedad importante de esta función es la de ser par $(f(x) = f(-x)\ \forall x)$ y esto hace que su gráfico sea simétrico respecto del eje de las y.



Esta función es muy importante en la estadística, tan importante que hasta tiene nombre: CAMPANA DE GAUSS.

Del gráfico deducimos que el conjunto imagen es $(0,1]$.

$$\boxed{f(x) = x\sqrt{1-x^2}}$$

(I.) Una restricción sobre el dominio es que no se le puede calcular la derivada a valores negativos. Entonces

$$1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1$$

De donde $\quad \mathrm{Dom} f = [-1, 1]$

(II) · La función no presenta asíntotas verticales pues no hay una discontinuidad en todo el dominio. O sea la f es continua en el $[-1,1]$

(III) Como el dominio de f es acotado no tiene sentido buscar asíntotas horizontales u oblicuas.

(IV) $f'(x) = \left(x\sqrt{1-x^2}\right)' = (x)'\sqrt{1-x^2} + x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'$

$$= \sqrt{1-x^2} + x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)' = \sqrt{1-x^2} + \frac{x\cdot(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

El dominio de la derivada es $\mathrm{Dom} f' = (-1, 1)$ pues a la restricción en la raíz se agrega el no poder dividir por cero.

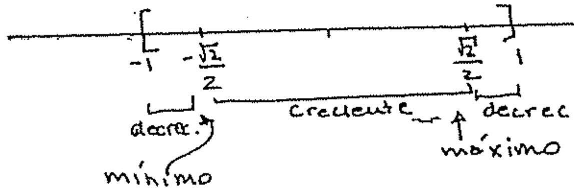
$$f'(x) > 0 \iff \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \iff 1-2x^2 > 0 \iff \frac{1}{2} > x^2 \iff$$

$x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightsquigarrow$ intervalo de crecimiento.

$$f'(x) < 0 \iff \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} < 0 \iff 1-2x^2 < 0 \iff x^2 > \frac{1}{2} \iff$$

$x \in \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \rightsquigarrow$ intervalos de decrecimiento.

A partir de esto deducimos los máximos y mínimos:



$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Analicemos ahora la concavidad de la función mediante la derivada segunda:

$$f''(x) = \left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{(1-2x^2)'\left(\sqrt{1-x^2}\right) - (1-2x^2)\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{1-x^2} =$$

$$= \frac{(-4x)\sqrt{1-x^2} - (1-2x^2)\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{2x^3-3x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

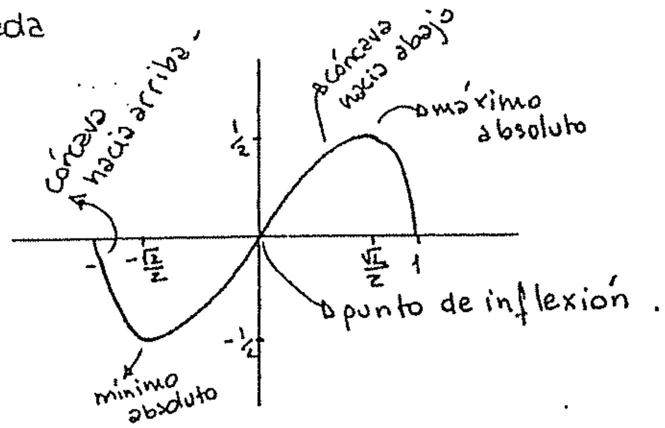
$$f''(x) > 0 \iff \frac{2x^3-3x}{(1-x^2)^{3/2}} > 0 \iff (2x^2-3)\,x > 0$$

Como $x^2 \leq 1$ $(x \in [-1,1])$ $2x^2 \leq 2$ y $2x^2-3 \leq 2-3 < 0$ resulta entonces que $2x^2-3<0$ y para que $(2x^3-3)\,x>0$ tiene que ser $x<0$. O sea que en el intervalo $(-1,0)$ la función es cóncava hacia arriba.

$$f''(x) < 0 \iff \frac{2x^3-3x}{(1-x^2)^{3/2}} < 0$$, haciendo un razonamiento idéntico al anterior obtenemos que para que $f''<0$ tiene que ser $x>0$. O sea que la función es cóncava hacia abajo en el $(0,1)$.

Juntando los últimos dos resultados tenemos que en cero hay un punto de inflexión, el $(0, f(0)) = (0,0)$.

El gráfico nos queda



$$\boxed{f(x) = x - \ln x}$$

(I.) Como no le podés calcular el logaritmo a valores negativos, $\text{Dom} f = \mathbb{R}^+$

(II.) La función es continua por ser suma de continuas, por lo tanto no presenta discontinuidades.

(III.) Como $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, tenemos que

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x - \ln x = +\infty$, entonces $x = 0$ es una asíntota vertical.

Para buscar asíntotas horizontales u oblicuas fijate en

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax - b = \lim_{x \to +\infty} x - \ln x - ax - b = \lim_{x \to \infty} (1-a)x - b - \ln x = \underbrace{\pm\infty}_{\text{dependiendo de } a}.$$

Entonces la f no tiene asíntotas horizontales u oblicuas.

(IV.) $f'(x) = (x - \ln x)' = x' - (\ln x)' = 1 - \frac{1}{x}$

$f'(x) > 0 \iff 1 - \frac{1}{x} > 0 \iff 1 > \frac{1}{x} \underset{(x>0)}{\iff} x > 1 \rightsquigarrow$ crecimiento en $(1, +\infty)$

$f'(x) < 0 \iff 1 - \frac{1}{x} < 0 \iff 1 < \frac{1}{x} \iff x < 1 \rightsquigarrow$ decrecimiento en $(0,1)$

Teniendo en cuenta que

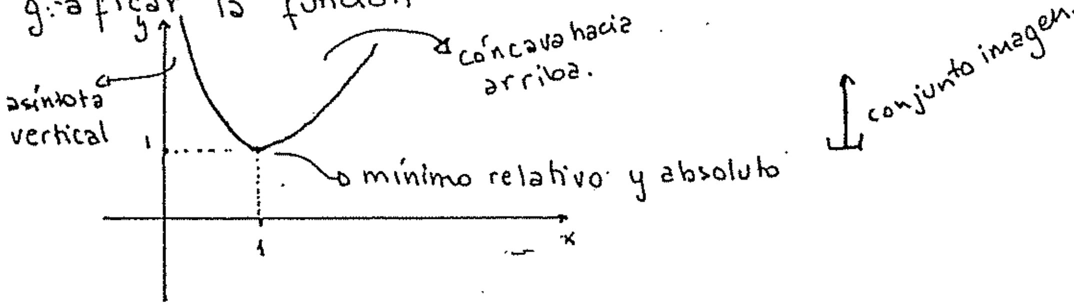
0 decreciente 1 creciente

mínimo relativo: $f(1) = 1$.

(V) $f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$

Como $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \text{Dom} f = \mathbb{R}^+$ la función es <u>siempre</u> cóncava hacia arriba y no posee puntos de inflexión.

(VI.) Ya podemos graficar la función



Se ve en el gráfico que el conjunto imagen es el $[1, +\infty)$.

$$\boxed{f(x) = y = \frac{x^2+1}{x^2-1}}$$

(I.) Las restricciones al dominio las aporta el no poder dividir por cero. Entonces el dominio será todo $\mathbb{R}$, menos los valores 1 y -1, que es donde el denominador se anula: $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

(III.) Buscamos las asíntotas verticales donde no está definida la función, o sea en el 1 y el -1

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0} = \infty \quad , \quad \lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2-1} = \frac{2}{0} = \infty$$

Entonces $\boxed{x=1}$ y $\boxed{x=-1}$ son asíntotas verticales.

Además, teniendo en cuenta que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

Concluimos que $\boxed{y=1}$ es una asíntota horizontal

(II) La función es continua en todo punto salvo donde se anula el denominador, porque es un cociente de polinomios. O sea que los puntos de discontinuidad son 1 y -1.

(IV.) Si calculás la derivada obtenés:

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

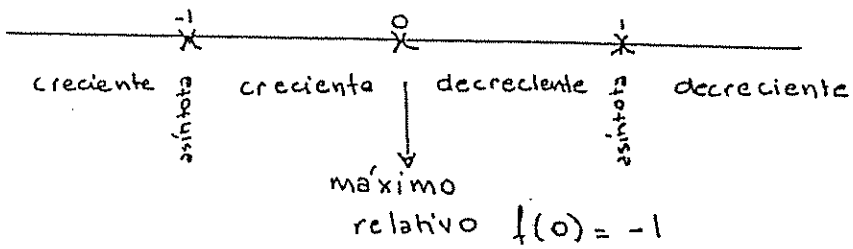
$$f'(x) > 0 \iff \frac{-4x}{\underbrace{(x^2-1)^2}_{\text{positivo}}} > 0 \iff -4x > 0 \iff x < 0$$

Como además $x \neq -1$, tenemos que la f es creciente en los intervalos $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

$$f'(x) < 0 \iff \frac{-4x}{(x^2-1)^2} < 0 \iff x > 0$$

Como además $x \neq 1$, tenemos que la f es decreciente en los intervalos $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

En base a esto busquemos los extremos:



(V.) La derivada segunda de f es

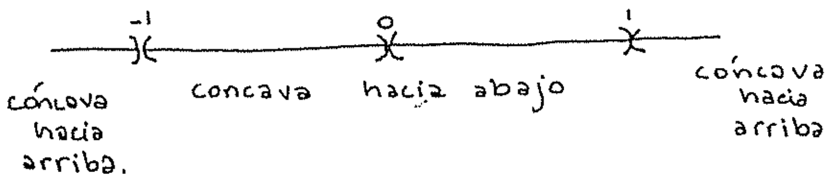
$$f''(x) = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

Para analizar positividad de la derivada segunda, tenemos en cuenta que el numerador es siempre positivo y por lo tanto sólo hay que fijarse en el signo del denominador:

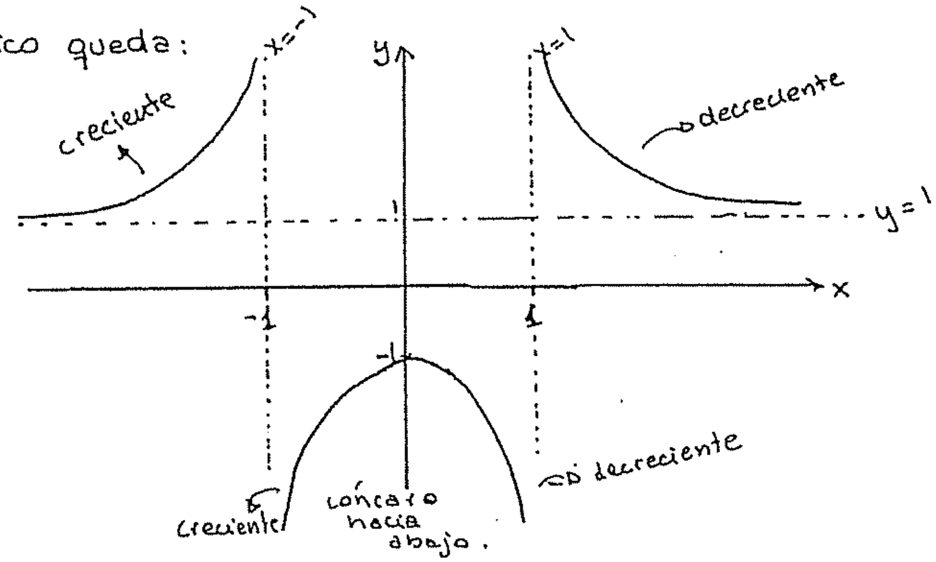
$$(x^2-1)^3 > 0 \iff x^2-1 > 0 \iff x^2 > 1 \iff |x| > 1 \iff x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$$

$(x^2-1)^3 \leq 0 \iff x^2-1<0 \iff x^2<1 \iff |x|<1 \iff x \in (-1,1)$

Nos quedó:



(VI) El gráfico queda:



A partir del gráfico podés deducir que el conjunto imagen es

$$\operatorname{Im} f = (-\infty,-1] \cup (1,+\infty)$$

---

52. Determine todos los puntos para los cuales la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $h(x)=e^{2x+1}\left(x^2-7x+\frac{1}{2}\right)$ es mínima.

Buscar la mínima pendiente de la recta tangente es lo mismo que buscar el mínimo valor de la derivada. Si para buscar el mínimo de una función usamos la derivada, para buscar el mínimo de la derivada usamos la derivada segunda. (Notar que un mínimo en la derivada es candidato a punto de inflexión. de la función).

$$h'(x) = \left(e^{2x+1}\cdot\left(x^2-7x+\frac{1}{2}\right)\right)' = 2e^{2x+1}\left(x^2-7x+\frac{1}{2}\right)+e^{2x+1}(2x-7)$$

Entonces

$$h'(x) = e^{2x+1}\left(2x^2-12x-6\right)$$

$$h''(x) = \left(e^{2x+1}\cdot\left(2x^2-12x-6\right)\right)' = 2e^{2x+1}\left(2x^2-12x-6\right)+e^{2x+1}(4x-12)$$

Entonces

$$h''(x) = e^{2x+1}\left(4x^2 - 20x - 24\right).$$

$$h''(x) > 0 \iff e^{2x+1}\left(4x^2-20x-24\right) > 0 \underset{\text{factorizando}}{\iff} 4e^{2x+1}\left(x^2-5x-6\right) > 0$$

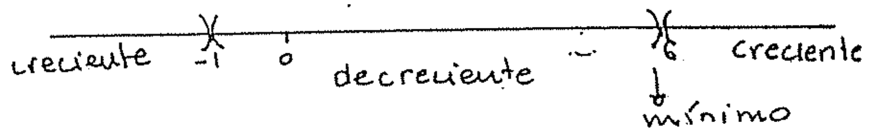
$$\iff \underbrace{4e^{2x+1}}_{>0}(x-6)(x+1) > 0 \iff (x-6)(x+1) > 0$$

$x - 6 > 0$ y $x+1 > 0$ ó $x-6 < 0$ y $x+1 < 0$

$x > 6$ y $x > -1$ ó $x < 6$ y $x < -1$

$x > 6$ $x < -1$

entonces la derivada es creciente cuando $x \in (-\infty,-1) \cup (6,+\infty)$ y decreciente en el intervalo que queda: $(-1, 6)$



Entonces un mínimo de la derivada es en 6, viéndolo en el gráfico de $h(x)$ es el $(6, h(6)) = \left(6,\ e^{13}\cdot\left(-\frac{11}{2}\right)\right)$

---

(53) Halle dos números positivos cuya suma sea 20 y su producto máximo.

Planteando el problema en términos de ecuaciones, buscamos x, y tales que $x+y=20$, y si $f = x.y$ queremos encontrar el máximo de $f(x,)$ De la primera ecuación podemos despejar $y = 20-x$ para que, reemplazando en el producto, nos quede una ecuación de una sola variable y podamos trabajar con ella. O sea que buscamos x / $f(x) = x(20-x)$ sea máximo. Pero como f es continua y derivable si tiene un máximo en x_0, $f'(x_0)=0$ (Teorema de Fermat). Calculando la derivada, obtenés:

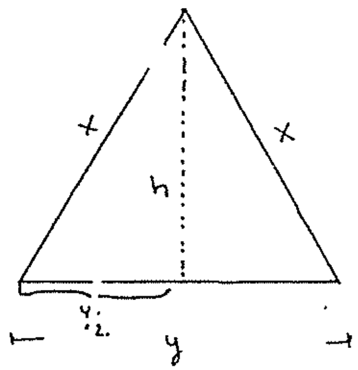
$$f'(x) = -2x + 20$$

O sea que $f'(x) = 0 \iff -2x+20=0 \iff x = 10$

Como f es una parábola que apunta hacia abajo, podés afirmar que toma un valor máximo en $x=10$: la punta de la parábola. Despejando "y" a partir del valor obtenido de x, tenemos que los dos números buscados 10 y 10.

---

54. El perímetro de un triángulo isósceles es 24, cuáles serán sus dimensiones para que su área sea máxima.



$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 + h^2 = x^2$$

Entonces $h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}$

$$P = y + 2x = 24$$

Entonces $y = 2(12-x)$

$$\text{AREA} = \frac{(\text{base})(\text{altura})}{2} = \frac{y\cdot h}{2} = \frac{y}{2}\cdot\sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}$$

Reemplazando con la ecuación $\frac{y}{2} = 12 - x$ queda

$$\text{AREA} = (12-x)\sqrt{x^2-(12-x)^2} = (12-x)\sqrt{x^2 - 144 + 24x - x^2}$$

Entonces

$$\text{AREA} = (12-x)\sqrt{24x-144}$$

O sea nos quedó el área en función de una sóla variable y lo que pretendemos es encontrarle un máximo a esta función.

$$(\text{AREA})' = \left((12-x)\cdot\sqrt{24x-144}\right)' = -\sqrt{24x-144} + \frac{(12-x)\cdot\cancel{24}^{12}}{\cancel{2}\sqrt{24x-144}} =$$

$$= \frac{-(24x-144) + 144 - 12x}{\sqrt{24x-144}} = \frac{288-36x}{\sqrt{24x-144}}$$

Igualando a cero

$$(AREA)' = \frac{288 - 36x}{\sqrt{24x - 144}} = 0$$

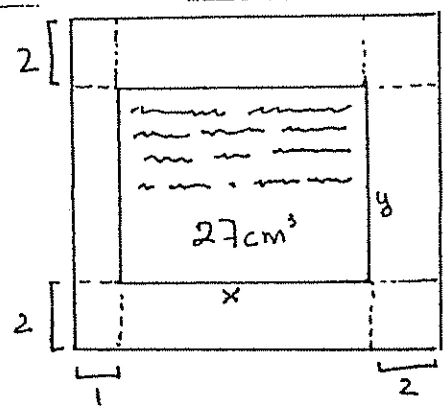
Esto sucede únicamente cuando $x = 8$. Por las características del problema podemos concluir que cuando $x = 8$, el AREA es máxima.
Otra forma de ver esto es viendo que el AREA es creciente a izquierda de 8 y decreciente a derecha. Recordando que

$$y = 2(12 - x)$$

Obtenemos que $y = 8$. Obtuvimos así que el triángulo que maximiza el area para perímetro fijo es el equilátero.

---

56. Un volante debe contener 27 cm^2 de impresión. Los márgenes inferior, superior y de un lado medirán 2 cm y del otro lado 1 cm. ¿De qué dimensiones debe ser el volante para gastar la menor cantidad de papel?



Sabemos que $x.y = 27$

Entonces la cantidad de papel será

$$CP = (x+3)(y+4)$$

lo que deseo minimizar.

Despejando y de $xy = 27$, $y = \frac{27}{x}$ y reemplazando en CP:

$$CP = (x+3)(y+4) = (x+3)\left(\frac{27}{x} + 4\right) = 39 + 4x + \frac{81}{x}$$

Derivando,

$$(CP)' = 4 - \frac{81}{x^2}$$

Igualando a cero para buscar candidatos a extremos

$$4 - \frac{81}{x^2} = 0 \iff 4x^2 = 81 \iff x^2 = \frac{81}{4}$$

Como x tiene que ser positivo por las características del problema,

$$x = \frac{9}{2}$$

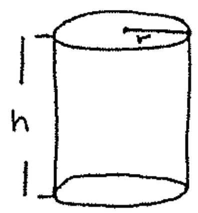
entonces $y = \frac{27}{x} = \frac{27}{9/2} = \frac{2.27}{9} = 2.3 = 6$

Y las dimensiones finales del volante son

$$(x+3) \times (y+4) = \left(\frac{9}{2}+3\right) \times (6+4) = \boxed{7,5 \times 10}$$

---

57. Se trata de hacer una lata de gaseosa en forma cilíndrica con capacidad para un cuarto litro de gaseosa. ¿Qué dimensiones de la lata requerirán la menor cantidad de material? $(1\,l \equiv 1\,dm^3)$



VOLUMEN DEL CILINDRO $= \pi r^2 . h = \frac{1}{4}$ (litro = dm^3)

SUPERFICIE DEL CILINDRO $= \underbrace{2\pi r.h}_{\text{pared}} + 2\underbrace{\pi r^2}_{\text{tapas}} = 2\pi r(h+r)$

Lo que deseamos es minimizar la superficie. Como el volumen es fijo, podemos despejar la altura en función del radio:

$$h = \frac{1}{4\pi r^2}$$

Reemplazando en la superficie:

$$\text{SUP} = 2\pi r\left(\frac{1}{4\pi r^2} + r\right) = \frac{1}{2r} + 2\pi r^2$$

Para encontrar extremos nos fijamos en dónde se anula la derivada:

$$(\text{SUP})' = -\frac{1}{2r^2} + 4\pi r$$

Igualando a cero:

$$(\text{SUP})' = 0 \iff 4\pi r = \frac{1}{2r^2} \iff r^3 = \frac{1}{8\pi} \iff \boxed{r = \frac{1}{2\sqrt[3]{\pi}}}$$

Usando que $h = \dfrac{1}{4\pi r^2} = \dfrac{1}{4\pi\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{\pi}\right)^2}{\pi} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Nos quedó que la lata que usa la menor cantidad de material tiene un radio de $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{\pi}}$ y una altura de $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$.

<u>NOTA</u>: – Coca Cola ya lo sabe y no le da ni pelota ¿por qué?

① Nadie quiere 250cc de gaseosa

② Como el diámetro es el doble del radio, tenés que la respuesta es una lata con igual diámetro que altura:

① fea y cuadrada

② pierde todo el gas

<u>CONCLUSIÓN</u>: Otro ejercicio que <u>no</u> te va a hacer rico.

---

58. Determine el punto de la parábola cuya ecuación es $y^2 = 2x$ que esté más próximo al punto $(1;4)$.

La distancia de un punto (x,y) cualquiera al punto $(1,4)$ es

$$d\big((x,y);(1,4)\big) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

Como no podés elegir (x,y) cualquiera pues tienen que satisfacer la ecuación $y^2 = 2x$, o sea que $x = \dfrac{y^2}{2}$ y lo que queremos es minimizar:

$$d = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2}$$

Minimizar la distancia es lo mismo, que minimizar el cuadrado de la distancia. Y derivar el cuadrado de la distancia es mucho más fácil porque desaparece la raíz. O sea buscamos (x,y) que alcance el extremo de:

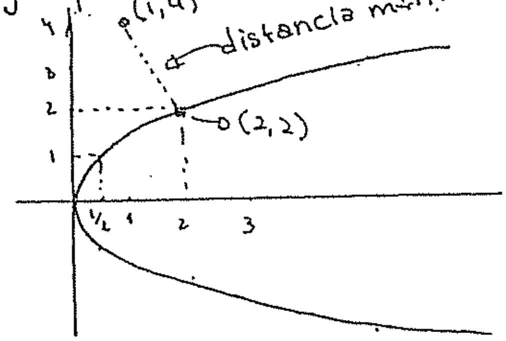
$$d^2 = \left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2$$

$$(d^2)' = 2\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)\cdot\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}} + 2(y-4) = y^3 - 2y + 2y - 8 = y^3 - 8$$

Igualando a cero: $y^3 = 8 \iff y = 2$

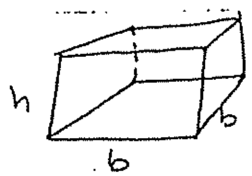
Como $x = \frac{y^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Tenemos entonces que el punto de la parábola que minimiza la distancia es el $(2,2)$. Gráficamente:



---

59. Si se dispone de una hoja laminada de 1200 cm^2 para construir una caja de base cuadrada sin tapa. Encuentre el volumen máximo posible de la caja.



Caja muy mal hecha.

VOLUMEN $= h \cdot b^2$.

SUPERFICIE $= \underbrace{4b \cdot h}_{\text{lados}} + \underbrace{b^2}_{\text{base}} = 1200$

Como la superficie es dada, podemos despejar la altura en funcion de la base:

$$h = \frac{1200 - b^2}{4b}$$

Reemplazando en la fórmula del volumen:

$$VOL = b^2 \cdot \left(\frac{1200 - b^2}{4b} \right) = \frac{b \cdot 1200 - b^3}{4} = -\frac{b^3}{4} + 300b$$

Derivando:

$$(VOL)' = -\frac{3b^2}{4} + 300$$

Igualando a cero para encontrar los candidatos a extremo:

$$\frac{3b^2}{4} = 300 \iff b^2 = 400$$

Como la solución negativa no tiene sentido nos queda

$$\boxed{b = 20}$$

Despejando h:

$$h = \frac{1200 - b^2}{4b} = \frac{1200 - 400}{80} = \frac{800}{80} = 10$$

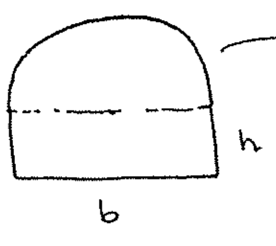
Nos queda que la caja tiene que tener una base cuadrada de 20cm por lado y una altura de 10 cm. El volumen resultante es

$$\boxed{VOL = 20^2 \cdot 10 = 4000 \, cm^3}$$

---

60. Una ventana tiene forma de rectángulo con un semicírculo encima. El perímetro de la ventana es 12 m. Encuentre las dimensiones de la ventana de manera que admita la máxima cantidad de luz.

Decir que admita la máxima cantidad de luz es lo mismo que decir que tenga área máxima:



perímetro del semicírculo : $\frac{2\pi r}{2} = \pi r = \pi \cdot \frac{b}{2}$ base

$$PERÍMETRO = \underbrace{\frac{\pi \cdot b}{2}}_{\text{semicírculo}} + \underbrace{2h + b}_{\text{rectángulo}} = 12$$

$$AREA = \underbrace{b.h}_{\text{rectángulo}} + \frac{\pi b^2}{8}$$ semicírculo: $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi b^2}{8}$.

Como el perímetro está dado, podés despejar la altura en función de la base y te queda:

$$h = \frac{12 - \frac{\pi b}{2} - b}{2}$$

Reemplazando, para que el área te quede en función de la base y puedas derivar:

$$AREA: b\left(\frac{12 - \frac{\pi b}{2} - b}{2}\right) + \frac{\pi b^2}{8} = 6b - \frac{\pi b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + \frac{\pi b^2}{8}$$

$$= 6b - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\right) b^2.$$

Derivando,

$$(AREA)' = 6 - \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) b$$

Igualando a cero para encontrar los candidatos a extremos:

$$6 - \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) b = 0 \iff b = \frac{6}{\frac{\pi}{4} + 1} = \boxed{\frac{24}{\pi + 4}}$$

Despejando la altura:

$$h = \frac{12 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{24}{\pi+4}\right) - \left(\frac{24}{\pi+4}\right)}{2} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{muchas} \\ \text{cuentas}}}{\dots} = \frac{12}{\pi + 4} = \frac{b}{2}.$$

Nos quedó que la ventana tiene que tener como altura la mitad de la base y luego el semicírculo tendrá un radio igual a la altura.

NOTA TEÓRICA:

La derivada también es útil para calcular límites complejos. Esto es lo que afirma la Regla de L'Hospital que te indica la forma de salvar ciertas indeterminaciones usando las derivadas de las funciones involucradas:

REGLA DE L'HOSPITAL:

- Si $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$ y <u>existe</u> el $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$

entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell .$$

- Si $|f(x)| \to \infty$, $|g(x)| \to \infty$ cuando $x \to a$ y <u>existe</u> $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$

entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell .$$

IMPORTANTE:

- Si en vez de a, ponemos ∞ sigue valiendo.
- Si en vez de ℓ, ponemos ∞ sigue valiendo.
- Que no exista el $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ no te asegura NADA sobre el $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. En esos casos <u>NO</u> se puede aplicar la Regla de L'Hospital.
- ¿Cómo uso esta regla? Fácil, cuando te encontrás con una indeterminación $0/0$ ó ∞/∞ derivás el numerador y el denominador y probás encontrar el límite. Si existe, es ese; si no existe, no se puede aplicar L'Hospital.
- Podés aplicar L'Hospital cuantas veces quieras, sin cargo adicional.

El ejercicio 62, es encontrar unos cuantos límites usando L'Hospital:

62. Calcule, verificando previamente que se cumplen las hipótesis del Teorema de L' Hôpital

62.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$

Vamos a hacer este paso por paso:

$f(x) = 2^x - 1$

$g(x) = x$

Entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2^x - 1 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

$f'(x) = 2^x . \ln 2$

$g'(x) = 1$.

Entonces $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x . \ln 2}{1} = \ln 2$

Como este límite existe, usando la Regla de L'Hospital podemos afirmar que

$$\underline{\underline{\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}}} = \boxed{\ln 2}.$$

62.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$

Para ahorrar trabajo aplicaremos L'Hospital de la siguiente manera: (cuando hay 0/0 o ∞/∞)

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = l$.

En base al teorema esta igualdad no es del todo correcta, por que si ℓ no existe, no valdrá la igualdad. En ese caso anulamos todo, volvemos atrás e intentamos calcular el límite nuevamente. Pero si ℓ existe todo lo que escribimos es correcto.

Volvamos al ejercicio:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg x - x}{x^3} \underset{(0/0)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(tg x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{sec^2 x - 1}{3x^2} \underset{\substack{\text{L'Hosp}\\ \text{nuevamente}}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(sec^2 x - 1)'}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\,sen x}{cos^3 x}}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen x}{3x} \cdot \frac{1}{cos^3 x} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

62.3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{sen\,\frac{1}{x}}{arc\ tg\,\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{sen\, 1/x}{arctg\, 1/x} \underset{\substack{(0/0)\\ \text{L'Hosp}}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{cos(1/x).(-1/x^2)}{\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\cdot(-1/x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{cos(1/x)}{\frac{x^2}{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{cos(1/x)}_{1} \frac{(x^2+1)}{x^2} = \boxed{1}$$

62.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-3^x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{x} \underset{\substack{(0/0)\\ \text{L'Hosp}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2^x \ln 2 - 3^x \ln 3}{1} = \boxed{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

62.5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \underset{\substack{(\frac{\infty}{\infty})\\ \text{L'Hosp}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{\substack{(\frac{\infty}{\infty})\\ \text{L'Hosp}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

62.7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2x+3\ \text{sen}\ x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x+3\,\text{sen}\,x} \underset{\substack{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\ \text{L`Hosp}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{2+3\cos x}_{\text{oscila.}}} \quad \nexists$$

Vimos que la no existencia del límite del cociente entre derivadas no significa que no exista el límite original y lo veremos en este ejemplo calculando el límite usando la propiedad del sánguche al no poder aplicar L`Hospital. Como $-1 \le \text{sen}\,x \le 1 \quad \forall x$

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+3}}_{\downarrow\ \frac{1}{2}} \le \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+3\,\text{sen}\,x}}_{\downarrow\ \boxed{\frac{1}{2}}} \le \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x-3}}_{\downarrow\ \frac{1}{2}}$$

62.8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$; $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} \underset{\substack{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\ \text{L`Hosp.}}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n\cdot x^{n-1}} \underset{\substack{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\ \text{L`Hosp}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n(n-1)\,x^{n-2}} \underset{\text{L`Hospitaleando}}{=} \cdots$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n!} = \boxed{+\infty}.$$

62.9. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} \cdot \ln x$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{x\,e^x}_{\to\infty}} = \boxed{0}$$

62.11. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \operatorname{tg} x)$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\cos x \to 0}{-\operatorname{sen} x \to 1} = \boxed{0}.$$

AGREGADO $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right)$

Tenemos que llevarlo a un cociente para poder aplicar L'Hospital. Para esto multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x+1 \quad -x^2+x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x}}$$

Sin necesidad de usar L'Hospital podes dividir el numerador y el denominador por x, que entra en la raíz como x^2:

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 + 1/x}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{2}{2} = \boxed{1}.$$

62.12. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

Si uno hiciese $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{(x+1)^x}$ y aplicase la Regla de L'Hospital direCtamente, se las tendría que ver con la horrible formulita deducida en otra unidad:

$$\left(g(x)^{f(x)}\right)' = g(x)^{f(x)}\left[f'(x)\ln g(x) + \frac{f(x)\,g'(x)}{g(x)}\right]$$

Y no avanzaría nada pues el término $g(x)^{f(x)}$ que molestaba, también aparece en la derivada. Para resolver esto se usa un truco bastante común para eliminar potencias, basado en la continuidad de la función exponencial:

$$\boxed{\lim\left(g(x)^{f(x)}\right) = \lim e^{f(x).\ln g(x)} = e^{\lim f(x).\ln g(x)}}$$

Entonces ya podemos intentar calcular de otra forma el límite de $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$, que antes calculábamos haciendo todos los truquitos para límites que involucraban al número e.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)} = e^{\ell}$$

Calculemos ℓ:

$$\ell = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left[\ln x - \ln(x+1)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x - \ln(x+1)}{1/x}$$

$$\underset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x(x+1)}}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{x^2+x} = -1$$

Obtuvimos $\ell = -1$, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x = e^\ell = \boxed{e^{-1}}$$

62.14. $\lim_{x \to \pi} \left(\frac{1}{x-\pi}\right)^{\operatorname{sen} x}$

Hacemos lo mismo que en el anterior

$$\lim_{x \to \pi} \left(\frac{1}{x-\pi}\right)^{\operatorname{sen}x} = \lim_{x \to \pi} e^{\operatorname{sen}x \,.\, \ln\left(\frac{1}{x-\pi}\right)} = e^{\lim_{x \to \pi} \operatorname{sen}x \,.\, \ln\left(\frac{1}{x-\pi}\right)} = e^\ell$$

Calculamos ℓ:

$$\ell = \lim_{x \to \pi} \operatorname{sen}x \ln\left(\frac{1}{x-\pi}\right) = \lim_{x \to \pi} \operatorname{sen}x \left(\ln 1 - \ln(x-\pi)\right) \underset{(\ln 1 = 0)}{=}$$

$$= \lim_{x \to \pi} -\operatorname{sen}x \,.\, \ln(x-\pi) = \lim_{x \to \pi} -\frac{\ln(x-\pi)}{\frac{1}{\operatorname{sen}x}} = \text{(Aplicando L'Hosp)}$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{-\frac{1}{x-\pi}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(x-\pi)\cos x} = \lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen}x}{x-\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x \to \pi} \underbrace{-\frac{\operatorname{sen}(x-\pi)}{x-\pi}}_{-1} \cdot \frac{\overbrace{\operatorname{sen}x}^{0}}{\underbrace{\cos x}_{1}} = 0 .$$

Entonces:

$$\lim_{x \to \pi} \left(\frac{1}{x-\pi}\right)^{\operatorname{sen}x} = e^\ell = e^0 = \boxed{1}$$

Los ejercicios que no estan hechos se hacen de manera similar.

63. ¿Es aplicable el teorema de L'Hôpital para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\cos(3x)}{x-\cos(3x)}$?

¿Por qué?. Calcúlelo.

Supongamos que sí se puede aplicar la Regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos(3x)}{x-\cos(3x)} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3\operatorname{sen}(3x)}{1+3\operatorname{sen}(3x)} \quad \nexists$$

La razón por la cual este límite no existe es porque se tratan de funciones oscilantes:

$$\text{Si } x = k\pi \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3\operatorname{sen}(3x)}{1+3\operatorname{sen}(3x)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1-3\overset{0}{\operatorname{sen}(3k\pi)}}{1+3\underset{0}{\operatorname{sen}(3k\pi)}} = 1$$

$$\text{Si } x = \frac{(4k+1)\pi}{6} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3\operatorname{sen}(3x)}{1+3\operatorname{sen}(3x)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1-3\overset{1}{\operatorname{sen}\left(\left(\frac{4k+1}{2}\right)\pi\right)}}{1+3\underset{1}{\operatorname{sen}\left(\left(\frac{4k+1}{2}\right)\pi\right)}} = \frac{-2}{4}$$

La forma de averiguar este límite es con la regla del sándwich:

Teniendo en cuenta que $\quad -1 \leq \cos(3x) \leq 1$

Tenemos que

$$x-1 \leq x+\cos(3x) \leq x+1 \qquad (1)$$

Y por otro lado

$$x-1 \leq x-\cos(3x) \leq x+1$$

Invirtiendo

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x-\cos(3x)} \leq \frac{1}{x-1} \qquad (2)$$

Multiplicando (1) × (2)

$$\frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x+\cos(3x)}{x-\cos(3x)} \leq \frac{x+1}{x-1}$$

Aplicando límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1} \le \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos(3x)}{x-\cos(3x)} \le \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad \boxed{1} \qquad\qquad 1$$

Otra forma de hacerlo, bastante más fácil, figura en las soluciones.

---

64. Demuestre que f es diferenciable en $x=0$, siendo $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & si\ x\neq 0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$

Para ver que es diferenciable en $x=0$ aplicamos la definición de derivada:

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

Entonces

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{\frac{e^h-1}{h}-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^h-1-h}{h^2}= \text{(aplicando L'Hospital)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{2h}\underset{\substack{\text{(L'Hosp}\\ \text{de nuevo)}}}{=}\lim_{h\to0}\frac{e^h}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

---

65. Calcule a y b reales tales que $\lim_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}(3x)+ax+bx^3}{x^3}=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(3x)+ax+bx^3}{x^3}\underset{\substack{(\%)\\ \text{L'Hosp}}}{=}\lim_{x\to0}\frac{3\cos(3x)+a+3bx^2}{3x^2}$$

Para poder aplicar L'Hospital nuevamente tengo que tener una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Como el denominador tiende a 0 pretendo que el numerador también y de esta manera poder aplicar la Regla de L'Hospital. Entonces quiero que

$$\lim_{x \to 0} \underset{\downarrow}{3\cos(3x)} + a + bx^2 = 0$$

Esto sucede si $\boxed{a=-3}$. Siguiendo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\cos(3x) - 3 + 3bx^2}{3x^2} \underset{\substack{(L'Hosp)\\(0/0)}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-9\operatorname{sen}(3x) + 6bx}{6x} \underset{\substack{(L'Hosp)\\0/0}}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-27\cos(3x) + 6b}{6} = \frac{-27 + 6b}{6}$$

Pero te piden que este límite sea 0 :

$$\frac{-27 + 6b}{6} = 0$$

Entonces $b = \frac{27}{6} = \boxed{\frac{9}{2}}$

---

66. Halle $k \in \Re \,/\, \lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} x)^{k/x} = e$

Hacemos lo mismo que hacíamos en ejercicios anteriores:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{k}{x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{k}{x} \ln(1 + \operatorname{sen} x)} = e^{\lim_{x \to 0^+} \frac{k}{x} \ln(1 + \operatorname{sen} x)}$$

O sea que buscamos $k \in \mathbb{R} \,/\, \lim_{x \to 0^+} \frac{k}{x} \ln(1 + \operatorname{sen} x) = 1$

Apliquemos la Regla de L'Hospital para encontrar el límite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{k \ln(1 + \operatorname{sen} x)}{x} \underset{\substack{L'Hosp\\0/0}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{k}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \cos x}{1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{k \overset{1}{\cos x}}{1 + \underset{0}{\operatorname{sen} x}} = k$$

Entonces tenemos que hacer $\boxed{k=1}$

(67.) Sea $f:\Re\to\Re \ / \ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x} & si\ x\neq 0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$. Calcule $f'(0)$

Aplicando la definición, seguro que va a haber que aplicar L'Hospital.

$$f'(0) \underset{Def}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cos h-1}{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h^2} \underset{\substack{¿Ulk?\\ 0/0}}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen} h}{2h} \underset{\substack{De\\ nuevo\\ 0/0}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{-\cos h}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

(68.) Si sabe que $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & si\, x\neq 0\\ 0 & si\, x=0\end{cases}$ $g(0)=g'(0)=0$ y $g''(0)=17$. ¿Puede asegurar que estos son datos suficientes para afirmar que $f'(0)=\dfrac{17}{2}$?. Justifique.

Para ver si son suficientes, intentemos calcular $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(h)}{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h^2}$$

Como $g'(0)=0$ (existe) entonces g es continua en cero. Además como $g(0)=0$ $\lim_{h\to 0} g(h) = g(0) = 0$, entonces tenemos una indeterminación del tipo $0/0$ y podemos aplicar la Regla de L'Hospital. (Si no probábamos esto no se podía). Entonces

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{g'(h)}{2h}$$

Haciendo el mismo razonamiento que recién: Como existe $g''(0)$, g' es derivable en cero y por lo tanto continua, entonces tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ $(g'(0)=0)$ y aplicamos L'Hospital.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g'(h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{g''(h)}{2}$$

Podríamos acá decir que este límite es $\frac{17}{2}$ teniendo en cuenta que $g''(0) = 17$. Pero ¿quién te afirma que $\lim_{h \to 0} g''(h) = g''(0)$? No hay nada que te asegure que la g'' es continua en 0. Conclvimos que esta derivada no se puede calcular usando L'Hospital.

---

69. Calcule $h'(0)$ si es $h(x) = \begin{cases} \frac{s(x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ y además $s(0) = s'(0) = 0$, $s''(0) = 2$ y que s'' es derivable en $x = 0$.

Este ejercicio es idéntico al anterior sólo que en vez de $g(x)$, dice $s(x)$. Además te dicen que s'' es derivable en $x=0$ que es la condición que le faltaba a la g del ejercicio anterior para poder calcular el último límite de la cadena de igualdades:

$$h'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{s(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{s'(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{s''(x)}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

---

70. Calcule $\lim_{x \to 1} \frac{\ln[g(2-x)]}{f(x^2-2)-3}$ si $g(1)=1; g'(1)=4; f(-1)=3$ y $f'(-1)=\frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 1} \frac{\ln[g(2-x)]}{f(x^2-2)-3}$, teniendo en cuenta que $g(1)=1$ y que $f(-1)=3$, tenemos $\frac{0}{0}$.

Aplicando L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln[g(2-x)]}{f(x^2-2)-3} \underset{\text{L'Hosp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{g(2-x)} \cdot g'(2-x).(-1)}{f'(x^2-2).2x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-g'(2-x)}{f'(x^2-2).2x\, g(2-x)} =$$ (suponiendo que son funciones continuas)

$$= \frac{-g'(2-1)}{f'(1-2)\,2.1\,g(2-1)} = \frac{-g'(1)}{f'(-1)\,2\,g(1)} = \frac{-4}{\frac{1}{2}\,2.1} = \boxed{-4}$$

---

71. Sea $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}} & si\ x\neq 0 \\ 1 & si\ x=0 \end{cases}$

71.1. Analice la continuidad en $x=0$

71.2. Si existe, calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

71.1) Queremos ver si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$. Calculando este límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)\ \text{L'Hosp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{2e^{2x}+2e^{-2x}} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto la f tiene una discontinuidad evitable en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} \neq 1 = f(0).$$

71.2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}} \underset{\%\,e^{2x}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^x}-\frac{e^{-x}}{e^{2x}}}{1-\frac{e^{-2x}}{e^{2x}}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}-\underbrace{e^{-3x}}_{\to 0}}{\underbrace{1}_{\to 1}-\underbrace{e^{-4x}}_{\to 0}} = \boxed{0}.$$

72. Analice la continuidad y derivabilidad de $f:\Re \to \Re / f(x)=\begin{cases} |x|^x & si\ x\neq 0 \\ 1 & si\ x=0 \end{cases}$ en el origen.

Continuidad : Ya vimos en la unidad anterior que

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1.$$

De aquí se desprende de la función es continua en 0.

Derivabilidad: $f'(0)^+ = (x^x)'\Big|_0 = x^x(\ln x - 1)\Big|_0 = -\infty$

Entonces $\nexists\ f'(0)$.

74. Analice la continuidad en $x=0$

$$f:\Re \to \Re / f(x)=\begin{cases} \dfrac{(1+x)^n-1}{x} & si\ x\neq 0 \\ n & si\ x=0 \end{cases} \quad n\in \mathrm{N}$$

Para verificar que es continua en $x=0$, tiene que ser:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = n$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n-1}{x} \underset{\substack{\left(\frac{0}{0}\right)\\ \text{L'Hosp}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{n(1+x)^{n-1}}{1} = \boxed{n}$$

Otra forma de verificar la continuidad es: Sea

$$g(x) = (1+x)^n$$

Sabemos que $g(x)$ es continua y derivable:

$g'(x) = n(1+x)^{n-1}$, entonces $g'(0) = n$

Pero

$$n = g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n-1}{x}$$

que era precisamente lo que queríamos verificar.

---

75. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{nx+1}{nx-1}\right)^x = 9$ determine n.

Tenés dos formas de hacer este ejercicio.

1) Con L'Hospital.

2) Típico límite que involucra e.

Optamos por la segunda, cansados de hacer L'Hospital.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{nx+1}{nx-1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{nx-1+2}{nx-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{nx-1}{2}}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{nx-1}{2}}\right)^{\frac{nx-1}{2}}}_{\to e\text{, haciendo } y=\frac{nx-1}{2}}\right]^{\underbrace{\frac{2}{nx-1}\cdot x}_{\to\frac{2}{n}}} = e^{\frac{2}{n}}$$

Queremos que $e^{\frac{2}{n}} = 9 \iff \dfrac{2}{n} = \ln 9 \Longrightarrow \boxed{n = \dfrac{2}{\ln 9}}$

---

76. Si $f(x)=\begin{cases}\left(1-e^{4x}\right)^x & si\ x<0\\ k & si\ x\geq 0\end{cases}$ determine k tal que f sea continua en el origen.

Para que sea continua, tienen que coincidir los límites laterales.

$f(0)=k$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} k = k$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(1-e^{4x}\right)^x = \lim_{x\to0^-} e^{x\ln\left(\underbrace{1-e^{4x}}_{>0 \text{ pues } x<0}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to0^-} x\ln(1-e^{4x})} = e^{\ell}$$

Calculemos ℓ:

$$\ell = \lim_{x\to 0^-} x\ln(1-e^{4x}) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1-e^{4x})}{1/x} \underset{\substack{\frac{\infty}{\infty} \\ \text{L'Hosp}}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{1-e^{4x}}\cdot(-4e^{4x})}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{4e^{4x}\cdot x^2}{1-e^{4x}} \underset{\substack{(0/0) \\ \text{L'HOSP}}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{8e^{4x}\,x}{-4e^{4x}} = 0$$

Entonces $\lim_{x\to 0^-} f(x) = e^{\ell} = e^0 = 1$

Y en consecuencia, tiene que ser $\boxed{k=1}$.

(77.) Calcule $\lim_{x\to 1^+} \log_{(x-1)}\left(2^x-2\right)$. Se sugiere efectuar un cambio de base.

De la UNIDAD 1, nos traemos la fórmula para cambiarle la base al logaritmo:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Haciendo $a = x-1$, $b = e$ y "$x = $" 2^x-2 y reemplazando:

$$\log_{(x-1)}(2^x-2) = \frac{\ln(2^x-2)}{\ln(x-1)}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 1^+} \log_{(x-1)}(2^x-2) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(2^x-2)}{\ln(x-1)} \underset{\substack{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) \\ \text{L'HOSP.}}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{2^x-2}\cdot 2^x\cdot\ln 2}{\frac{1}{x-1}} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1) \cdot 2^x \cdot \ln 2}{2^x - 2} \underset{\substack{(0/0) \\ \text{L'HOSP.}}}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{2^x \cdot \ln 2 + (x-1) 2^x \cdot \ln^2 2}{2^x \cdot \ln 2} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \left(1 + (x-1) \cdot \ln 2 \right) = \boxed{1}$$

EL EJERCICIO **78** ES ANÁLOGO AL **51**. POR LO TANTO SELECCIONAREMOS ALGUNAS FUNCIONES PARA ANALIZAR Y NO NOS DETENDREMOS EN DETALLES. TE RECUERDO QUE EN LA PÁGINA **-36-** HAY UNA SÍNTESIS QUE INDICA LOS PASOS A SEGUIR AL ANALIZAR UNA FUNCIÓN. ESOS MISMOS PASOS SE VAN A RESPETAR EN LOS ANÁLISIS QUE SIGUEN.

(79) $(f(x)=)$ $\boxed{y = \frac{e^x}{x}}$

(I.) La única restricción sobre el dominio de f es que se anule el denominador. Entonces $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$.

(II) Por ser cociente de continuas, $f(x)$ es continua en el Dominio de f. O sea que la única discontinuidad posible está en el $\{0\}$.

(III) La única asíntota vertical posible podría estar en el 0. Y de hecho allí está:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

Entonces $x=0$ es una asíntota vertical. Notar además que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{+0} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{-0} = -\infty .$$

Veamos ahora las asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ L'HOSP}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$ es una asíntota horizontal (a izquierda)

(IV) $$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

- $f'(x) > 0 \iff \dfrac{e^x(x-1)}{x^2} > 0 \iff \underset{>0}{e^x}(x-1) > 0 \iff x-1>0 \iff x>1$

Entonces el $(1,+\infty)$ es un intervalo de crecimiento de la f.

- $f'(x) < 0 \iff \dfrac{e^x(x-1)}{x^2} < 0 \iff x<1$, pero $0 \notin \text{Dom} f$.

Entonces los intervalos de decrecimiento de f son $(-\infty,0)\cup(0,1)$.

A partir de esto podemos concluir que f tiene un mínimo relativo en el 1 y $f(1)=e$.

(V) $$f''(x) = \left(\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right)' = \frac{(e^x(x-1)+e^x)x^2 - 2xe^x(x-1)}{x^4} =$$

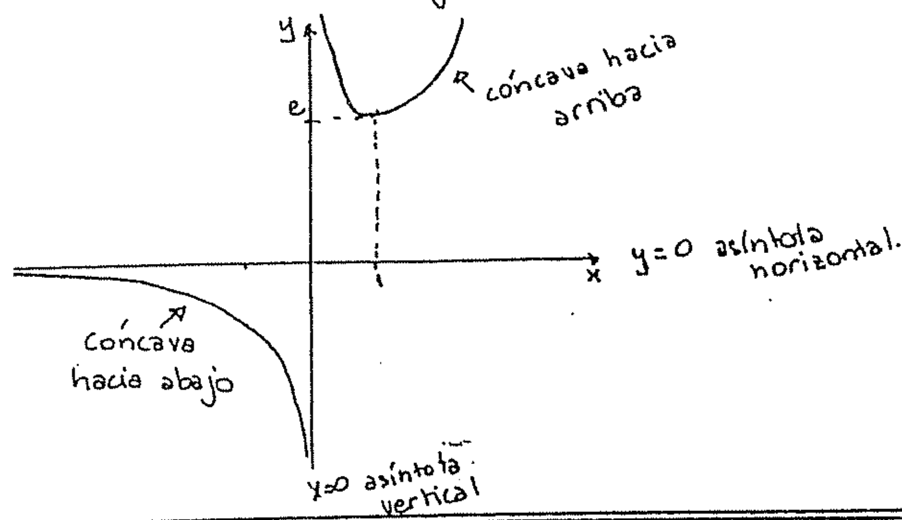
$$= \frac{e^x(x^3-2x^2+2x)}{x^4} = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3} = \frac{e^x((x-1)^2+1)}{x^3}$$

$$f''(x) < 0 \iff \frac{e^x\overbrace{((x-1)^2+1)}^{>0}}{x^3} < 0 \iff x^3<0 \iff x<0.$$

$$f''(x) > 0 \iff \frac{e^x((x-1)^2+1)}{x^3} > 0 \iff x^3>0 \iff x>0.$$

En consecuencia en $(-\infty,0)$ la función f es cóncava hacia abajo y es cóncava hacia arriba en el $(0,+\infty)$. Como $0 \notin \text{Dom} f$, f no posee puntos de inflexión.

Ya estamos en condiciones de trazar el gráfico:



AGREGADO → $\boxed{f(x) = y = 2^{\frac{1}{x-1}}}$

(I) No se tiene que anular el denominador del exponente, entonces $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$.

(II.) La única discontinuidad de f ocurre cuando $x=1$.

(III.) Primero veamos si en 1 hay una asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 1^+} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{-\infty} = 0$$

Entonces f tiene una asíntota vertical a derecha en $\boxed{x=1}$. Por otra parte:

$$\lim_{x \to \infty} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^0 = 1$$

Entonces $\boxed{y=1}$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

(IV) Estudio de la derivada:

$$f'(x) = \left(2^{\frac{1}{x-1}}\right)' = 2^{\frac{1}{x-1}} \left(\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{-2^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}$$

Como $(x-1)^2 \geq 0 \ \forall x$ y $-2^{\frac{1}{x-1}} < 0 \ \forall x \neq 1$, tenemos que $f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$. Y por lo tanto la función f es decreciente en todo su dominio.

(V) Estudio de la derivada segunda: (Haciendo cuentas, obtenés)

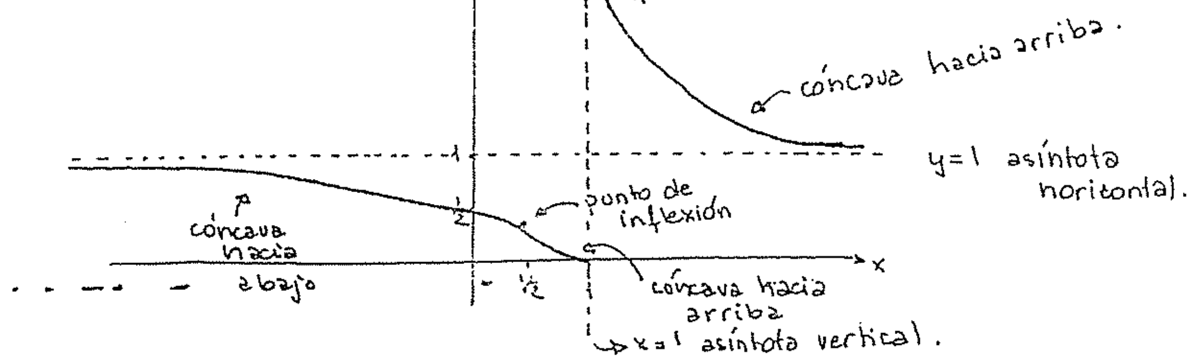
$$f''(x) = \frac{\overbrace{2^{\frac{1}{x-1}}}^{>0} . (2x-1)}{\underbrace{(x-1)^4}_{>0}}$$

$$f''(x) > 0 \iff 2x-1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$$

$$f''(x) < 0 \iff 2x-1 < 0 \iff x < \frac{1}{2}$$

Entonces f es cóncava hacia arriba en $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$. De donde se desprende que $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, 2^{\frac{1}{\frac{1}{2}-1}}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ es un punto de inflexión del gráfico de f.

Ya podemos trazar el gráfico:



81 $\boxed{f(x) = y = x^2 . \ln x}$

I) Dominio: Como sólo se puede calcular el logaritmo de valores positivos, el $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}^+$

II) DISCONTINUIDADES: No presenta pues es el producto de dos funciones continuas.

III) ASÍNTOTAS: No posee (hacer $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$).

IV) ESTUDIO DE LA DERIVADA:

$$f'(x) = (x^2 . \ln x)' = 2x . \ln x + x^2 . \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$$

$$f'(x) > 0 \iff \underset{\substack{\vee \\ 0 \\ (\in \mathbb{R}^+)}}{x}(2.\ln x + 1) > 0 \iff 2\ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -\frac{1}{2}$$

$$\iff x > e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} .$$

$$f'(x) < 0 \iff 2\ln x + 1 < 0 \iff x < e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} .$$

Nos quedó que f es creciente en $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. Entonces posee un mínimo en $\frac{1}{\sqrt{e}}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{e}}$

V) ESTUDIO DE LA DERIVADA SEGUNDA:

Haciendo las cuentas...

$$f''(x) = 2\ln x + 3 .$$

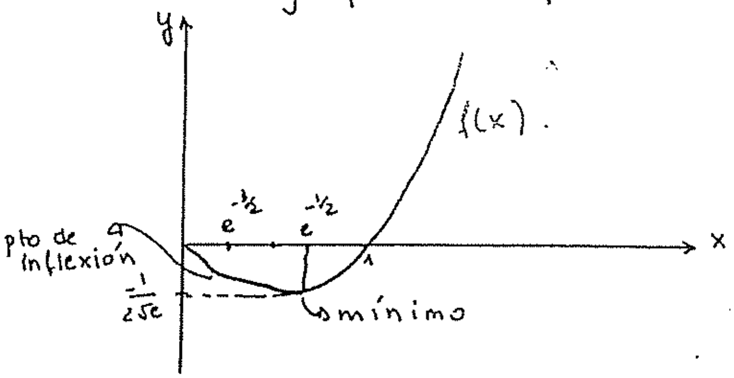
$$f''(x) > 0 \iff -(2\ln x + 3) > 0 \iff \ln x > -\frac{3}{2} \iff x > e^{-3/2}$$

También obtenemos que

$$f''(x) < 0 \iff x < e^{-3/2}$$

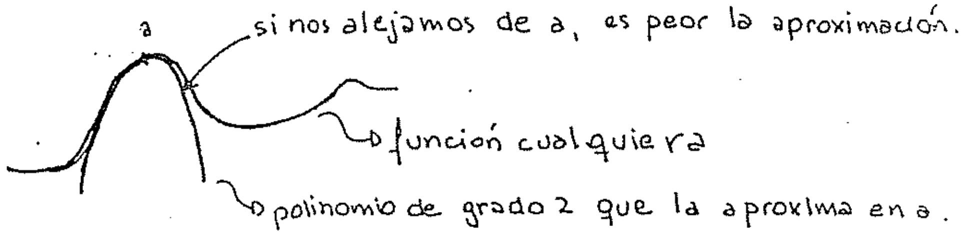
Entonces la función f es cóncava hacia arriba en el $(e^{-3/2}, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en el $(0, e^{-3/2})$. De donde se deduce que $(e^{-3/2}, f(e^{-3/2})) = (e^{-3/2}, -\frac{3}{2}e^{-3})$ es un punto de inflexión.

Ya podemos trazar el gráfico de la f:



POLINOMIO DE TAYLOR

Veremos ahora que cualquier función, bajo ciertas condiciones, puede ser aproximada por un polinomio alrededor de un punto.



Sea $f(x)$ n veces derivable en un entorno de a. Conociendo el valor de la función y sus derivadas en el punto a, el polinomio de Taylor que aproxima f será:

(1)
$$\boxed{f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \underset{\text{resto}}{R_n}}$$

Otra forma de expresar este mismo polinomio, es haciendo el cambio de variables: $x = a+h$ $(x-a=h)$. En este caso:

②
$$\boxed{f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + \underbrace{R_n}_{\text{resto}}}$$

Si $a=0$, el Polinomio de Taylor ① se llama Polinomio de Mc Laurin:

③
$$\boxed{f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \underbrace{R_n}_{\text{resto}}}$$

Sobre el RESTO: En ②

$$R_n(h) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\xi) \qquad \xi \in E_a(|h|)$$

- El resto es un infinitésimo de orden superior a h^{n-1} $(o(h^{n-1}))$. O sea que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{R_n(h)}{h^{n-1}} = 0$. Esto significa que cuanto más cerca está h de 0 (si $h=x-a$, cuanto más cerca está x de a), mejor es la aproximación. Y además mejora cuanto más alto es el grado del polinomio pues $R_n \sim o(h^{n-1})$.

---

91. Escriba el polinomio $P(x) = x^6 - 3x^3 + x^2 - 2$ en potencias enteras y positivas de:

91.1. $(x+1)$ 91.2. $(x-1)$

91.1) Si te fijás en la forma ① del polinomio de Taylor, haciendo $a=-1$, te queda:

$$f(x) = f(-1) + (x+1)f'(-1) + \frac{(x+1)^2}{2!}f''(-1) + \frac{(x+1)^3}{3!}f'''(-1) + \ldots$$

O sea que te queda $f(x)$ expresado en potencias de $(x+1)$, que es precisamente lo que estás buscando. Haciendo $a=1$ obtenés 83.2):

$$f(x) = f(1) + (x-1) f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!} f'''(1) + \dots$$

Entonces calculemos las derivadas, para luego reemplazar con 1 o -1:

EXPRESIÓN	$x=-1$	$x=1$
$f(x) = x^6 - 3x^3 + x^2 - 2$	3	-3
$f'(x) = 6x^5 - 9x^2 + 2x$	-17	-1
$f''(x) = 6.5x^4 - 18x + 2$	50	14
$f'''(x) = 6.5.4x^3 - 18$	-138	102
$f^{IV}(x) = (6.5.4.3)x^2$	6.5.4.3	6.5.4.3
$f^{V}(x) = (6.5.4.3.2)x = 6!x$	$-6!$	$6!$
$f^{VI}(x) = 6!$	$6!$	$6!$
$f^{VII}(x) = 0$	0	0

Reemplazando en las respectivas fórmulas, te queda:

$$f(x) = 3 - 17(x+1) + \frac{50}{2!}(x+1)^2 - \frac{138}{3!}(x+1)^3 + \frac{6.5.4.3}{4!}(x+1)^4 - \frac{6!}{5!}(x+1)^5$$

$$+ \frac{6!}{6!}(x+1)^6 + \underbrace{R_n}_{0} = 3 - 17(x+1) + 25(x+1)^2 - 23(x+1)^3 + 15(x+1)^4$$

$$- 6(x+1)^5 + (x+1)^6.$$

Haciendo la misma cuenta, el 91.2) te da:

$$f(x) = -3 - (x-1) + 7(x-1)^2 + 17(x-1)^3 + 15(x-1)^4 + 6(x-1)^5 + (x-1)^6.$$

---

92. Determine el polinomio de Taylor de grado dos asociado a la función $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ en $x = \frac{\pi}{2}$.

Veamos primero la forma general de Taylor de grado 2 en este caso:

$$f(x) \cong f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(x-\frac{\pi}{2}\right) f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}$$

Si $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

$f'(x) = \cos x \, e^{\operatorname{sen} x}$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \, e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x \, e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x}\left(\cos^2 x - \operatorname{sen} x\right)$

Entonces $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = e$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = e\left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = -e$

Y te queda:

$$\boxed{f(x) = e - \frac{e}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

---

93. Siendo f una función polinómica de cuarto grado si:

$f(2)=-1;\ f'(2)=0;\ f''(2)=2;\ f'''(2)=-12 \quad f^{iv}(2)=24$

Calcule $f(-1),\ f'(0),\ f''(1)$

Si f es una función polinómica de cuarto grado, el polinomio de Taylor de grado 4 para f será exacto. Teniendo en cuenta los datos, desarrollamos Taylor en $a=2$:

$$f(x) = -1 + \frac{2}{2!}(x-2)^2 - \frac{12}{3!}(x-2)^3 + \frac{24}{4!}(x-2)^4$$

O sea que

$f(x) = -1 + (x-2)^2 - 2(x-2)^3 + (x-2)^4$

5.1) $f(-1) = -1 + (-3)^2 - 2(-3)^3 + (-3)^4 = -1+9+54+81 = \boxed{143.}$

5.2) $f'(x) = 2(x-2) - 6(x-2)^2 + 4(x-2)^3$

$f'(0) = 2(-2) - 6(-2)^2 + 4(-2)^3 = -4-24-32 = \boxed{-60.}$

5.3) $f''(x) = 2 - 12(x-2) + 12(x-2)^2$

$f''(1) = 2 - 12(-1) + 12(-1)^2 = \boxed{26}$

(94.) Exprese $P(x)$ en potencias de x.

94.2. $P(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$

6) Como P es de grado 6 tenemos que averiguar hasta la derivada sexta en el cero para poder aplicar Mc Laurin (ver fórmula en la página -82-)

$P(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$
$P'(x) = 3(x^2 - 3x + 1)^2 (2x-3)$
$P''(x) = 6(x^2 - 3x + 1)(2x-3)^2 + 3(x^2 - 3x + 1)^2 . 2$
$P'''(x) = 6(2x-3)^3 + 6(x^2-3x+1) 2.(2x-3).2 +$
$12(x^2 - 3x + 1)(2x-3) = 6(2x-3)^3 + 36(x^2-3x+1)(2x-3)$
$P^{IV}(x) = 18(2x-3)^2 . 2 + 36(2x-3)^2 + 72(x^2-3x+1) =$
$= 72(2x-3)^2 + 72(x^2-3x+1)$
$P^{V}(x) = 144.(2x-3).2 + 72(2x-3) = 360(2x-3)$
$P^{VI}(x) = 720.$

Entonces, evaluando en 0:

$P(0) = 1$ $\qquad P'(0) = -9$ $\qquad P''(0) = 60$

$P'''(0) = -270$ $\quad P^{IV}(0) = 720$ $\quad P^{V}(0) = -1080$ $\quad P^{6}(0) = 720$

Reemplazando en el Polinomio de Mc Laurin de grado 6:

$$P(x) = P(0) + xP'(0) + \frac{x^2}{2}P''(0) + \frac{x^3}{3!}P'''(0) + \frac{x^4}{4!}P^{IV}(0) +$$
$$+ \frac{x^5}{5!}P^{V}(0) + \frac{x^6}{6!}P^{VI}(0)$$

$$\boxed{P(x) = 1 - 9x + 30x^2 - 45x^3 + 30x^4 - 9x^5 + x^6}$$

---

95. Sean $f(x) = a\ln(1+bx)$. Sabiendo que su polinomio de Mc Laurin de segundo grado es: $-15x - \frac{75}{2}x^2$, determine los valores reales de a y b.

7) Sabemos que

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = -15x - \frac{75}{2}x^2$$

Entonces $f(0) = 0$, calculando estas derivadas:

$f'(0) = -15$

$f''(0) = -75$

$f(x) = a\ln(1+bx) \Longrightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{a}{1+bx}\cdot b \Longrightarrow f'(0) = a.b = -15$

$f''(x) = -\frac{ab}{(1+bx)^2}\cdot b \Longrightarrow f''(0) = ab^2 = -75$

Haciendo $\frac{f''(0)}{f'(0)} = \frac{ab^2}{ab} = b = \frac{-75}{-15} = \boxed{5 = b}$

De donde deducimos inmediatamente $\boxed{a=-3}$

NOTA: En las soluciones aparecen al revés.

---

96. Dada la función $f:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}\ /\ f(x)=\operatorname{sen}(ax+b)$ Determine los valores reales positivos de a y b. tales que el polinomio de Mc Laurin de primer grado sea: $\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}x$

8) El polinomio de Mc Laurin de primer grado es

$$p(x)=f(0)+f'(0).x$$

Teniendo en cuenta que

$$f(x)=\operatorname{sen}(ax+b) \Rightarrow f(0)=\operatorname{sen} b$$

$$f'(x)=a\cos(ax+b) \Rightarrow f'(0)=a\cos b.$$

El sistema de ecuaciones que nos queda para determinar a y b es:

$$\begin{cases}\operatorname{sen} b=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a\cos b=2.\sqrt{2}\end{cases}$$

De donde se deduce que $\boxed{b=\frac{\pi}{4}+2k\pi\ (k\in\mathbb{N})}$ y $\boxed{a=4}$.

---

97. Justifique la validez de las siguientes fórmulas aproximadas, para $|x|<<1$

97.1. $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$

97.2. $arc\operatorname{sen} x\approx x+\frac{x^3}{6}$

97.3. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}\approx 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

Decir "para pequeños valores de x" es lo mismo que decir "para x en un entorno del 0". Y sabemos que el polinomio de Mc Laurin aproxima la función en un entorno del cero. Veamos entonces que los polinomios que figuran a la derecha son los primeros términos de la serie de Mc Laurin correspondiente a la función de la izquierda. Recordando que el polinomio de Mc Laurin es:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + x^2 \frac{f''(0)}{2!} + x^3 \frac{f'''(0)}{3!} + \cdots$$

97.1) Si $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ $\Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$ $\Rightarrow f'(0) = \frac{1}{3}$

$f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}$ $\Rightarrow f''(0) = -\frac{2}{9}$

Y el polinomio de Mc Laurin de grado 2 para $\sqrt[3]{1+x}$:

$$\underline{\underline{f(x) \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9.2}x^2 = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 .}}$$

97.2) Si $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ $\Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ $\Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{5/2}}$ $\Rightarrow f'''(0) = 1$

Y el polinomio de Mc Laurin de grado 3 para arcsen(x) es

$$f(x) \simeq x + \frac{1}{6}x^3 .$$

Si $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(= \operatorname{ch} x)$ $\Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $(= \operatorname{sh} x)$ $\Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\Rightarrow f''(0) = 1$

$f'''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\Rightarrow f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\Rightarrow f^{IV}(0) = 1$.

Y el polinomio de Mc Laurin de grado 4 para ch x es

$$f(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{\underset{\overset{\|}{4!}}{24}}$$

---

101) Dada la ecuación: $\ln x^2 - \frac{5}{16}x^2 = 0$ Si admitimos que tiene una raiz en proximidades de $x_0 = 1$; calcule, usando el polinomio de Taylor de segundo grado en $x_0 = 1$, una raíz aproximada de la ecuación planteada.

Si $f(x) = \ln x^2 - \dfrac{5}{16}x^2$ $\Rightarrow f(1) = -\dfrac{5}{16}$

$f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{8}x$ $\Rightarrow f'(1) = 2 - \dfrac{5}{8} = \dfrac{11}{8}$

$f''(x) = -\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{5}{8}$ $\Rightarrow f''(1) = -\dfrac{21}{8}$

El desarrollo es:

$$f(x) \approx -\frac{5}{16} + \frac{11}{8}(x-1) - \frac{21}{16}(x-1)^2$$

Entonces

$\ln x^2 - \frac{5}{16}x^2 = 0$ si $f(x) = -\frac{5}{16} + \frac{11}{8}(x-1) - \frac{21}{16}(x-1)^2 = 0$

en las soluciones falta dividir x 2

Distribuyendo

$$f(x) = -\frac{21}{16}x^2 + 4x - 3 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtenemos como raíces $x = \frac{4}{3}$ y $x = \frac{12}{7}$. Como $\frac{4}{3}$ es más próxima a 1 podemos suponer que es una mejor aproximación. Veamos cuan buena es

$$\ln x^2 - \frac{5}{16}x^2 \Big|_{\frac{4}{3}} = \ln\frac{16}{9} - \frac{5}{16}\cdot\frac{16}{9} = \ln\left(\frac{16}{9}\right) - \frac{5}{9} = 0{,}0198\ldots$$

que es bastante cercano al 0.

---

05) Dada la función $h:\Re - \{1\} \to \Re \;/\; h(x) = \dfrac{x}{x-1}$ Exprese la fórmula de Taylor de tercer orden alrededor de $x_0 = 2$. Trace las gráficas de la función dada y del polinomio obtenido mediante software matemático.

$h(x) = \dfrac{x}{x-1}$ $\qquad h(2) = 2$

$h'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$ $\qquad h'(2) = -1$

$h''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$ $\qquad h''(2) = 2$

$h'''(x) = \dfrac{-6}{(x-1)^4}$ $\qquad h'''(2) = -6$

$h^{IV}(x) = \dfrac{24}{(x-1)^5}$ $\qquad h^{IV}(2) = 24$

La fórmula de Taylor de orden 3, incluido el resto, queda así:

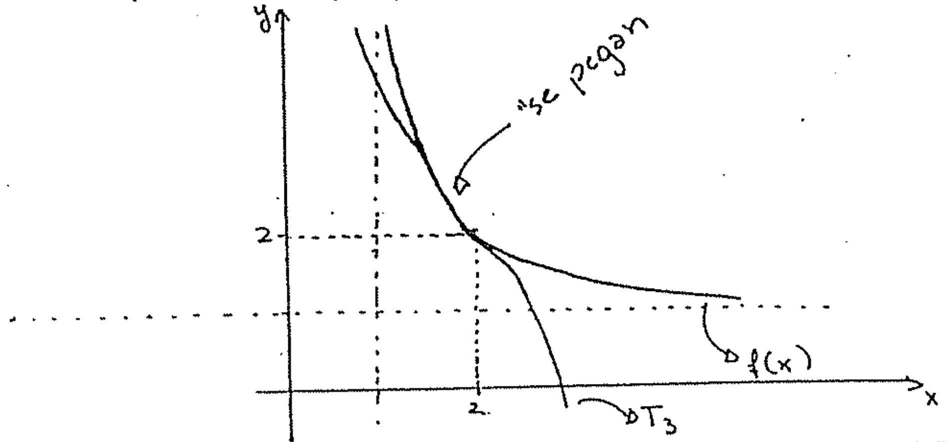
$$f(x) = \underbrace{2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3}_{T_3} + \frac{(x-2)^4}{[2+\theta(x-2)]^5}$$

El resto se obtuvo a partir de la fórmula:

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}\left(a + \theta(x-a)\right) \qquad 0<\theta<1$$

(Esta fórmula es equivalente a $R_n = \frac{(x-a)^n}{n} f^{(n)}(\xi) \quad \xi \in E_a(|x-a|)$, presentada en la página 82)

Los correspondientes gráficos son:



(106) Mediante el polinomio de Taylor que incluye al término de 3er grado asociado a la función $f(x) = \cos x$ alrededor del punto $x_o = \frac{\pi}{4}$, calcule $\cos 46°$ y determine la precisión del resultado obtenido.

Si $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x \quad \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'''(x) = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f^{IV}(x) = \cos x \quad \Rightarrow f^{IV}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Entonces Taylor de orden 3, incluido el resto R_4 queda así:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

O lo que es lomismo:

$$f(x) = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right]}_{T_3(x)} + \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}\cos(\xi)$$

$$\frac{\pi}{4} < \xi < x$$

Si te pidiesen $\cos 45° = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y no tendrías que haber hecho todo este desarrollo para averiguarlo. En cambio $\cos 46°$ sí justifica todo este cuenterío porque no hay forma de calcularlo sin calculadora. Pasando a radianes $46° = \frac{46}{180}\cdot\pi$

Entonces aproximamos $f\left(\frac{46}{180}\pi\right) = \cos\left(\frac{46}{180}\pi\right) = \cos 46°$ por $T_3\left(\frac{46}{180}\pi\right)$:

$$T_3\left(\frac{46}{180}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\frac{\pi}{180}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\right] = 0{,}6946583677734$$

Teniendo en cuenta que

$$\cos\left(\frac{46}{180}\pi\right) = 0{,}69465837045 8$$

Podemos decir que la aproximación es muy buena Pero esto lo podríamos haber visto analizando el resto:

$$R_n(x) = \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}\cos(\xi)$$

como $|\cos\xi| \leq 1$

$$\left|R_n\left(\frac{46}{180}\pi\right)\right| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^4}{4!} = \frac{\pi^4}{180^4\cdot 4!} < 4\cdot 10^{-9}$$

107. Escriba la fórmula de Mc. Laurin de grado n de cada una de las siguientes funciones.

107.1. $f:\Re\to\Re \;/\; f(x)=\operatorname{sen} x$ 107.2. $g:\Re\to\Re \;/\; g(x)=\cos x$

107.3. $h:\Re\to\Re \;/\; h(x)=e^x$ 107.4. $r:\Re\to\Re \;/\; r(x)=\ln(1+x)$

107.5. $s:\Re\to\Re \;/\; s(x)=x.e^x$

(La fórmula de Mc Laurin figura en la página 82, La expresión que usaremos para el resto es $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} \quad 0<\theta<1$)

107.1) $f(x)=\operatorname{sen}x$

$f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\operatorname{sen}x$

$f'''(x)=-\cos x$

$f^{IV}(x)=\operatorname{sen}x \;(=f(x))$

$f^{V}(x)=\cos x \;(=f'(x))$

...

En general $\boxed{f^{(n)}(x)=\operatorname{sen}\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)}$

(si querés probalo usando $\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x\cos y+\operatorname{sen}y\cos x$)

Entonces la fórmula de Mc Laurin te queda

$$f(x)=\operatorname{sen}0+x\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{x^2}{2!}\operatorname{sen}\left(2.\frac{\pi}{2}\right)+\frac{x^3}{3!}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\dots$$

Calculando los valores de las sucesivas derivadas en 0:

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+\frac{x^n}{n!}\underbrace{\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)}_{f^{(n)}(0)}+R_{n+1}(x)$$

Donde $R_{n+1}(x)=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\operatorname{sen}\left(\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

$0<\theta<1$

107.2) $f(x)=\cos x$

Haciendo las mismas cuentas que en 94.1) obtenés que

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)}$$

Entonces $f^{(n)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ $(= 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1 \dots)$
Y la fórmula de Mc Laurin te queda:

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + R_{n+1}(x)$$

Donde $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

$0 < \theta < 1$

107.3) Este es bien fácil pues:

$$\boxed{f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n}$$

Entonces $f^{(n)}(0) = 1$ y la fórmula de Mc Laurin te queda

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$$

Donde $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$ $\quad 0 < \theta < 1$.

107.4), $f(x) = \ln(1+x)$ $\quad (f(0) = 0)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

En general

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \geq 1)}$$

$$f^{IV}(x) = \frac{-2.3}{(1+x)^4} \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \quad \left(\Rightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$$

$$(n \geq 1)$$

$$f^{V}(x) = \frac{2.3.4}{(1+x)^5}$$

A partir de esto, la fórmula de Mc Laurin, queda

$$f(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(x)$$

Donde $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{x^{n+1}(-1)^n}{n(1+\theta x)^{n+1}}$ $(0<\theta<1)$

107.5) Si $f(x) = xe^x$

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$
$$f''(x) = 2e^x + xe^x = (x+2)e^x$$
$$f'''(x) = 3e^x + xe^x = (x+3)e^x$$
$$f^{IV}(x) = 4e^x + xe^x = (x+4)e^x$$

En general

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (x+n)e^x}$$

$$f^{(n)}(0) = n \quad \left(\Rightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}\right)$$

Entonces la fórmula de Mc Laurin te queda:

$$f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} + R_{n+1}(x)$$

Donde $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\theta x \quad)e^{\theta x}$ $0<\theta<1$

---

108. Calcule

108.1. $e^{0.1}$ con un error menor que 10^{-6}

108.2. $\ln(1.1)$ con un error menor que 10^{-4}

Usamos el 107.3), pretendiendo buscar n /

$$R_{n+1}\left(\frac{1}{10}\right) < 10^{-6}$$

Si encontramos tal n, como

Taylor de orden n.

$$e^x = T_n(x) + R_{n+1}(x)$$

Reemplazando por $x = \frac{1}{10}$

$$e^{\frac{1}{10}} = T_n\left(\frac{1}{10}\right) + R_{n+1}\left(\frac{1}{10}\right)$$

Entonces

$$e^{\frac{1}{10}} - T_n\left(\frac{1}{10}\right) = R_{n+1}\left(\frac{1}{10}\right) < 10^{-6}$$

Y podemos calcular $T_n\left(\frac{1}{10}\right)$, sabiendo que difiere de $e^{\frac{1}{10}}$ en menos que 10^{-6}. Calculemos n, entonces:

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \qquad 0<\theta<1$$

Entonces $$R_{n+1}\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\frac{\theta}{10}}$$

Como $\theta < 1$, $e^{\frac{\theta}{10}} < e^{\frac{1}{10}} < e$, entonces

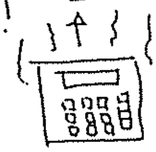
$$\left|R_{n+1}\left(\frac{1}{10}\right)\right| = \left|\frac{e^{\frac{\theta}{10}}}{10^{n+1}.(n+1)!}\right| < \frac{e}{10^{n+1}(n+1)!}$$

Para que esto sea menor que 10^{-6} me alcanza que $n=5$, en este caso

$$\left|R_6\left(\frac{1}{10}\right)\right| < \frac{e}{10^6.6!} < \frac{1}{10^6} \quad \text{pues } \frac{e}{6!} < 1 .$$

Entonces $T_5\left(\frac{1}{10}\right)$ me va a dar el valor que aproxima a $e^{0,1}$ con error menor que 10^{-6}:

$$T_5\left(\frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{1}{10} + \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^5}{5!} = 1{,}10517091\overline{6}\ldots$$



108.2) Haciendo exactamente el mismo razonamiento que en el ejercicio anterior, buscamos $n \,/\, \left|R_{n+1}\left(\frac{1}{10}\right)\right| < 10^{-4}$

$$\left|R_{n+1}\left(\tfrac{1}{10}\right)\right| = \left|\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}(-1)^n}{(n+1)\underbrace{\left(1+\frac{\theta}{10}\right)^{n+1}}_{> 1^{n+1}}}\right| < \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$$

Y esto es menor que 10^{-4} si $n=3$:

$$\left|R_4\left(\tfrac{1}{10}\right)\right| < \left(\frac{1}{10}\right)^4\cdot\frac{1}{4} < 10^{-4}.$$

Entonces ahora $T_3\left(\frac{1}{10}\right)$ me va a dar el valor que aproxima a $\ln\left(1+\frac{1}{10}\right)$ en menos de 10^{-4}:

$$T_3\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} - \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^3}{3} = 0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}000\widehat{3} = 0{,}095\widehat{3}.$$

¡¡ FIN DE LA PRÁCTICA !!