En los ejemplos anteriores no nos hemos interesado en encontrar la función f a la cual la serie de potencias converge, o bien, define.
Encontrar esta función no es sencillo y solo lo hemos hecho para una serie de potencias de forma geométrica pues contábamos con el resultado de la suma de dichas series, sin embargo no siempre será posible hacerlo.

Operaciones con series de potencias:
Se puede demostrar que en su intervalo de convergencia una serie de potencias se comporta en muchos aspectos como un polinomio.
Se puede, por ejemplo, evaluar a la función en un punto x_0 a través de evaluar la serie en el mismo punto x_0, o también aplicar el cálculo de límites.
En particular la derivada de una serie de potencias puede obtenerse derivando término a término.
También la integral de la serie es igual a la serie de la integral de cada término.
Enunciamos, sin demostración, que:

1) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ tiene radio de convergencia $R \neq 0$ y la serie converge a $f(x)$ para $|x| < R$,

entonces f es derivable en $|x| < R$ y su derivada vale: $f'(x) = D\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$

2) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ tiene radio de convergencia $R \neq 0$ y la serie converge a $f(x)$ para $|x| < R$,

entonces f es integrable en $|x| < R$ y vale: $\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

Serie de Taylor: Ahora nos ocuparemos del problema inverso al planteado, dada una función encontrar una serie de potencias que la represente, o bien, sea convergente a ella.

Si f admite derivadas en todos los órdenes en un intervalo con centro en $x = a$, que contenga al punto c, y si el resto $R_n(x)$ en la fórmula de Taylor tiende a cero con n tendiendo a infinito $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ para todo x del intervalo, entonces f está representada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{en} \quad |x-a| < R$$

En donde el segundo miembro de la igualdad anterior es la Serie de Taylor de f en $x = a$, R es el radio de convergencia de la serie.
Donde $R_n(x) = \dfrac{f^n(c)}{n!}(x-a)^n$, $a < c < x$ es el resto de Lagrange de la fórmula de Taylor.
En particular si $a = 0$ la serie se denomina Serie de MacLaurin de f.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n \quad \text{en} \quad |x| < R$$

Hemos visto que una serie de potencias se puede obtener utilizando series geométricas, por ejemplo:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+........+(-1)^n\ x^{2n}+.........=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Entonces tomando en cuenta lo anterior enunciamos que: "Una serie de potencias, en su intervalo de convergencia, es la serie de Taylor o de MacLaurin de la función f".
Obtengamos algunos desarrollos en serie, y para eso utilicemos los polinomios de Taylor y MacLaurin de algunas funciones y generemos así la serie.

Desarrollo en serie de MacLaurin de algunas funciones, verifique el intervalo de convergencia.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+...........+\frac{x^n}{n\,!}+........... \quad\Rightarrow\quad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\,!}\ \text{ en } I$$

Calculemos ahora el intervalo de convergencia para ver donde es válida esta última igualdad.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\ n\,!}{x^n\ (n+1)\,!}\right|<1 \quad\Rightarrow\quad |x|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}<1 \quad\Rightarrow\quad |x|\ 0<1$, el desarrollo es válido para todo x.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\,!}\qquad \forall x\in\Re$$

$$\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}-\frac{x^7}{7\,!}+........+(-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\,!}+...... \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\,!}\qquad\forall x\in\Re$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^4}{4\,!}-\frac{x^6}{6\,!}+........+(-1)^n\,\frac{x^{2n}}{2n\,!}+....... \quad\Rightarrow\quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n}}{2n!}\qquad\forall x\in\Re$$

Desarrollo en serie de Taylor de $f(x)=\ln x$ en $x=1$

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+...... \quad\Rightarrow\quad \ln x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{(x-1)^n}{n}\ \text{ en } I$$

Hallemos el intervalo de convergencia: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}\ n}{(x-1)^n\ (n+1)}\right|<1 \quad\Rightarrow\quad |x-1|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}<1$

$$|x-1|\,1<1 \quad\Rightarrow\quad 0<x<2$$

Estudiamos los extremos:

Si $x = 0$, la serie numérica resultante es: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ armónica negativa, divergente.

Si $x = 2$, la serie resulta: $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,1}{n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ armónica alternada, convergente.

Por lo tanto el intervalo de convergencia es $I = (0\,,2]$ finalmente podemos escribir:

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} \quad \text{en} \quad (0\,,2]$$

Si observamos el resultado anterior podemos calcular el valor de $\ln 2$ a través de la serie y este es:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\ldots\ldots$$

Evidentemente se trata de la serie armónica alternada como vimos en el cálculo del intervalo de convergencia. Esto muestra que la serie armónica alternada converge a ln2, o sea su suma es $S = \ln 2$, si ahora reordenamos la misma de forma de poner un término positivo seguido de dos negativos obtendríamos otra suma para la serie y esta era $\frac{S}{2}$ según deducimos anteriormente, por lo tanto.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \ldots\ldots\ldots\ldots = \ln 2$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots\ldots\ldots = \frac{\ln 2}{2} = \ln\sqrt{2}$$

De esta forma las series de potencias nos permiten encontrar la suma de series numéricas.

Aplicaciones de Series de Potencias: Hay veces que es más fácil obtener un desarrollo a partir de uno dado que deducirlo según las serie de Taylor o MacLaurin, como lo muestra estos ejemplos:

1) Desarrollo de MacLaurin de $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots + x^n + \ldots$ si $|x| < 1$

reemplacemos x por $(-x)$ y obtengamos el desarrollo de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ es decir:

$f(x) = \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots\ldots + (-1)^n x^n + \ldots\ldots$ en I.

2) Derivamos $\operatorname{sen} x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \forall x \in \Re$

$$(\operatorname{sen} x)' = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right\}' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n-1) \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \quad \forall x \in \Re$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots\ldots$ hemos encontrado el desarrollo en serie de $\cos x$ a expensas de derivar el desarrollo de $\operatorname{sen} x$ en su intervalo de convergencia.

3) Definimos $\int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x$, obtengamos el desarrollo MacLaurin de la función

$f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ operando sobre la base de serie geométrica.

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \quad , \quad |t| < 1$$

Integremos el desarrollo:
$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left. \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left. \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \quad |x| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots = \operatorname{arctg} x \quad , \quad |x| < 1$$

Hemos encontrado el desarrollo en serie de $\operatorname{arctg} x$ integrando el desarrollo de $\dfrac{1}{1+t^2}$ en su intervalo de convergencia.

- Podemos calcular con series de potencias, sea el caso:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \forall x \in \Re$$

$$\operatorname{sen} \pi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$0 = \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + ...$$

- También resolver límites indeterminados: Determine las constantes a y b tal que:

$$\lim_{n \to 0} \frac{e^{-x} - (1 + ax + bx^2)}{x^2} = 0$$

Reemplacemos la función e^{-x} por su serie de potencias de MacLaurin que la representa para todo valor de x, entonces en un entorno de cero también, y de esta forma convertimos el límite en un límite de funciones polinómicas.

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \;, \; \forall x \in \Re$$

Entonces el límite resulta:

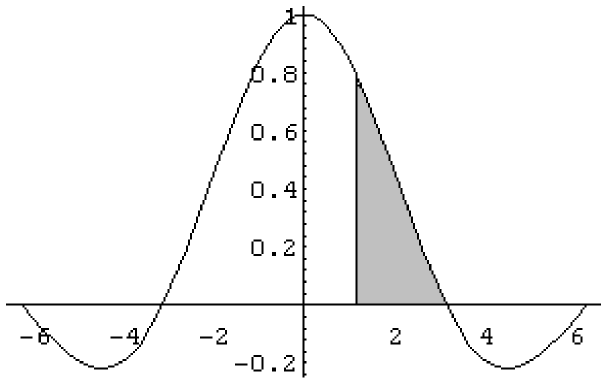
$$\lim_{n \to 0} \frac{e^{-x} - (1 + ax + bx^2)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - .....\right) - 1 - ax - bx^2}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(-1-a) + x^2\left(\frac{1}{2} - b\right) - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4} - ......}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{-1-a}{x} + \frac{1}{2} - b\right) + \lim_{x \to 0} \left(-\frac{x}{6} + \frac{x^2}{4} - ....\right) = 0$$

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{-1-a}{x} + \frac{1}{2} - b\right) = 0$ para que este último se anule debe ser: $-1 - a = 0$ y $\frac{1}{2} - b = 0$

$$a = -1 \quad \wedge \quad b = \frac{1}{2}$$

- Halle el área limitada por la gráfica de la función $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ y el eje x, si $1 \le x \le \pi$



Existen funciones cuya primitiva no puede expresarse como una combinación de un número finito de funciones elementales, y este es un caso.
Como el cálculo del área mediante integrales exige el cálculo de la primitiva nos ayudaremos mediante series de potencias:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$A = \int_1^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left. \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n-1)} \right|_1^{\pi}$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!\ (2n-1)} \left[\pi^{2n-1} - 1\right]$$