Resueltos

MATERIA: Análisis Matemático I

TITULO: T.P. Nº 3
"Funciones Continuas"
Edición 2000

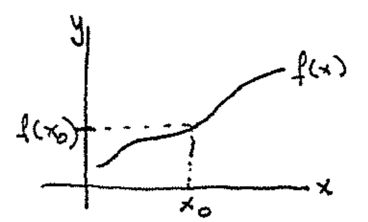
AUTOR: Anibal Kasero

AR1AP3

Unidad 3

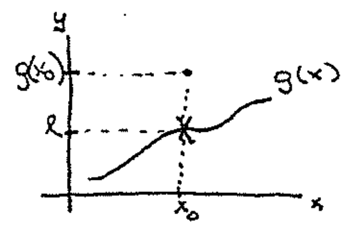
~ Funciones Continuas

▶ Hasta ahora nos hemos ocupado de averiguar los límites de funciones en un punto x_0 cuando, en general, la función ni siquiera estaba definida en x_0 ($\nexists f(x_0)$). Decíamos en estos casos, que la función f tenía una indeterminación en x_0. Ahora el problema es un poco distinto: Si suponemos que f está definida en x_0, nos interesa saber si el $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$ coincide con el valor de f en x_0. En los dos gráficos que siguen observamos que no necesariamente esto ocurre:



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(1)



$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell \neq g(x_0)$

(2)

Cuando esto <u>sí</u> sucede (gráfico (1)), decimos que la función f es <u>contínua</u> en x_0 pues:

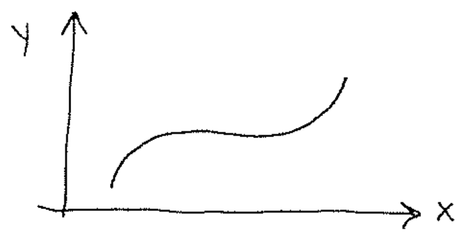
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Generalizando esta definición, podemos afirmar que una función f es contínua en (a,b) si f es contínua en x_0, $\forall x_0 \in (a,b)$.

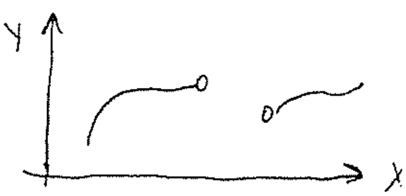
Desde el punto de vista intuitivo, uno puede ver que:

UNA FUNCION ES CONTINUA EN UN INTERVALO SI SE PUEDE GRAFICAR A LA FUNCION EN ESE INTERVALO SIN LEVANTAR LA LAPICERA DEL PAPEL

(Atención, esto es una "definición" intuitiva).



← Función continua



← Función discontinua.

Como siempre, resuelvo los ejercicios más importantes. El resto quedará para vos.

---

(1) Pruebe que si f es continua en $x = a \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

Ej. 1) Pruebe que si f es continua en $x = a \Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$

Recordemos que, dado $x = a$, llamamos $\Delta x = x - a$ y $\Delta f = f(x) - f(a)$. Nosotros queremos probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\Delta x| < \delta \Longrightarrow |\Delta f| < \varepsilon$$

Pero la función es continua y esto es prácticamente la definición de continuidad. En efecto, que f sea continua en $x = a$ quiere decir que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\underbrace{x - a}_{\Delta x}| < \delta \Longrightarrow |\underbrace{f(x) - f(a)}_{\Delta f}| < \varepsilon$$

Es decir, es lo mismo escrito de otra forma y no hay nada que probar.

---

(3) Si f y g son dos funciones continuas en x_0. Demuestre que

3.1. $f+g$ es continua en x_0

3.2. $f.g$ es continua en x_0

3.3. $\frac{f}{g}$ es continua en x_0, con $g(x_0) \neq 0$

Al definir operaciones entre funciones veíamos que:

ⓐ - $(f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$

ⓑ - $f.g\,(x_0) = f(x_0).g(x_0)$

ⓒ - $\frac{f}{g}(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ (si $g(x_0) \neq 0$)

Por otro lado sabemos, por propiedades del límite que:

ⓓ - $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

ⓔ - $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x).g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) . \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

ⓕ - $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ $(\neq 0)$.

Siempre y cuando existan $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Aplicando estas propiedades y la definición de continuidad, el ejercicio sale en forma inmediata. Por ejemplo 3.1:

Si f es continua en x_0, entonces por definición: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Si g es continua en x_0, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

- ENTONCES:

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) \underset{(a)}{=} \lim_{x\to x_0} \left(f(x)+g(x)\right) \underset{(d)}{=} \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) =$$

$$\underset{(def)}{=} f(x_0) + g(x_0) \underset{(a)}{=} (f+g)(x_0).$$

Que es precisamente la condición para que $f+g$ sea contínua en x_0. En forma análoga salen 3.2) y 3.3).

NOTA: La importancia de este ejercicio es que, cuándo te enfrentes con una función compleja puedas decidir fácilmente si es contínua al ver que se trata de sumas de contínuas, productos de contínuas y cocientes de contínuas cuyo denominador no se anulan. Por ejemplo si sabés que $f(x) = x$ y $f(x) = cte$ son dos funciones contínuas en x_0 (que lo son $\forall x_0$) entonces

$$\frac{x^{10} - x^3 + 3x^2 + 5}{x^2 + 6} \quad \text{es contínua en } x_0 \quad (\forall x_0).$$

También resulta útil saber que si dos funciones son contínuas, su composición también lo es. Esto se ve en:

AGREGADO: . Demuestre que : si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$ entonces gof es continua en x_0.

Acá usaremos el siguiente resultado de límites:

$$\lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = \lim_{x\to x_0} g\Big(\underbrace{f(x)}_{\text{continua en } x_0}\Big) \overset{\text{contínua en } f(x_0)}{=} g(f(x_0)) = g\circ f(x_0).$$

Se dice en estos casos que el límite "entra" en la g, si esta es continua:

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right).$$

---

4. Sea $|f(x)| \leq 2|x|$. Probar que f es continua en el origen.

Vamos a hacer este ejercicio de dos maneras distintas; la primera por definición y la segunda usando la propiedad del 'sandwich'.
La definición función continua en un punto $x = a$ es la siguiente:
"Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ "
Luego, dado un ε tenemos que dar δ ; para esto vamos a usar que $a = 0$ y que $|f(x)| < 2|x|$. Tomemos $\delta = \varepsilon/2$ entonces

$$\text{Si } |x| < \delta \implies |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies \varepsilon > 2|x| > |f(x)| \implies |f(x)| < \varepsilon$$

Luego

$$|x| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon$$

que es lo que queríamos probar.

El otro modo de probar esto es usar el siguiente teorema
"Si existen funciones g , f y h tales que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en un entorno de $x = a$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ "

En este caso tomamos $g(x) = 0$ y $h(x) = 2|x|$. Como

$$0 \leq |f(x)| \leq 2|x|, \qquad \lim_{x \to 0} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \to 0} h(x) = 0 \implies \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

---

5. Hallar una función $f(x)$ que sea discontinua en todos sus puntos pero $|f(x)|$ sea continua $\forall x \in \Re$.

El ejemplo típico es la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Es claro que $|f|$ es continua pues $|f(x)| = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. También podemos convencernos fácilmente de que f es discontinua:
Tomemos un punto cualquiera a . Tan cerca como querramos podemos encontrar tanto números racionales como irracionales, por lo tanto alrededor de a la función "salta" constantemente entre -1 y 1 siendo imposible que una función así sea continua.

---

7. Sean f y $g: \Re \to \Re / f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$ y

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

7.1. Estudie la continuidad de *f og*

7.2. Grafique *f, g* y *f og*

$$f_\circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x<0 \\ f(x^2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x+|x|}{2} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x^2+|x^2|}{2} & \text{s } x \geq 0 \end{cases}$$

Pero si $x<0$ $|x| = -1$, y si $x \geq 0$ $|x^2| = x^2$, entonces

$$f_\circ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Como 0 es contínua, $f_\circ g(x)$ es contínua si $x<0$ pues vale 0. También x^2 es contínua entonces $f_\circ g(x)$ es contínua si $x>0$. El inconveniente está en el 0, para ver si $f_\circ g$ es contínua en 0 debemos ver que:

$$¿ \lim_{x \to 0} f_\circ g(x) = f_\circ g(0) = 0^2 = 0 ?$$

O sea que el límite exista y valga cero. Por la forma en que viene definida la f, conviene analizar los límites laterales en 0. Si estos coinciden y dan 0 entonces se satisface la condición de continuidad:

$$\lim_{x \to 0^-} f_\circ g(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0.$$

$$\lim_{x \to 0^+} f_\circ g(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0^2 = 0.$$

Entonces $f_\circ g$ es contínua.

(8) Sean $f:\Re\to\Re / f(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right| & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ y $g:\Re\to\Re / g(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ Estudie la continuidad de f, g, $f.g$, $\dfrac{g}{f}$

Para estudiar la continuidad de la f descompongamos el módulo:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x} & \text{si } \operatorname{sen}x\geq 0 \quad x\neq 0\\ -\dfrac{\operatorname{sen}x}{x} & \text{si } \operatorname{sen}x<0 \quad x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Tanto $\operatorname{sen}x$ como x son funciones continuas, entonces también lo es $\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$ si $x\neq 0$ y también $-\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$. Habría que analizar en cero y esto lo haremos viendo los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=-1\end{array}\right\}\neq \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x).$$

Como el límite no existe $f(x)$ no puede ser nunca continua en $0 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.

Con respecto a $g(x)$, tenemos que e^x es continua, $-\dfrac{1}{x^2}$ es continua si $x\neq 0$, entonces $g(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ es continua si $x\neq 0$ por ser composición de continuas. Falta analizar el caso $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}=e^{-\infty}=0\neq 1=g(0) \Rightarrow g \text{ discontinua en } 0.$$

Entonces $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.

$$f.g(x)=\begin{cases}\dfrac{|\operatorname{sen}x|}{x}\, e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0.\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f\cdot g(x) = \lim_{x\to 0} \overbrace{\frac{|\operatorname{sen} x|}{x}}^{\text{ACOTADO}} \overbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}^{\to 0} = 0 \neq 1 = f\cdot g(0).$$

Entonces $f\cdot g$ es discontinua en 0. Se ve que es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ porque es producto de continuas.

(9) Analizar para qué valores de $n \in N_0$, es continua $f(x) = x^n \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

Si $x \neq 0$, f es continua en x cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_0$ pues es producto, composición y cociente de funciones continuas (y en la parte del cociente π/x el denominador no se anula precisamente pues $x \neq 0$) así que todo se reduce a ver que pasa en $x = 0$. Primero consideremos el caso $n > 0$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^n} \underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}_{\text{acotada}} = 0$$

(Usamos el famoso teorema, "el límite de algo que tiende a 0 por algo acotado es 0")

De modo en ese caso el límite existe y coincide con el valor de la función en el punto,por lo tanto f es continua.

Si $n = 0$ la situación es otra; f queda $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ y vemos que desaparece la parte que tiende a 0. El efecto de esto es que el límite no va a existir. Para ver esto vamos a usar el siguiente teorema

Si f es continua en $x = a$, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $x_n \to a$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

consideremos la sucesión $x_n = \dfrac{1}{2n+1/2}$. Esta tiende a 0 y

$$f(x_n) = f\left(\frac{1}{2n+1/2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{1/(2n+1/2)}\right) = \operatorname{sen}[(2n+1/2)\pi] = 1$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$$

que no coincide con $f(0) = 0$, esto contradice la tesis del teorema enunciado, así que f no puede ser continua.

11) Dada $f(x)=\dfrac{x^4+x^3}{x^4+3x^2+1}$ en $[1,5]$ ¿tiene máximo y mínimo absolutos?

Vamos a usar el siguiente teorema:

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado, entonces f tiene una máximo y un mínimo absoluto en $[a,b]$.

Con este teorema, basta ver que f es continua en ese intervalo. El único problema que podemos tener está en el denominador, busquemos sus raíces:

$$x^4+3x^2+1=0 \implies (x^2)^2+3x^2+1 \implies x^2=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Luego,

$$x^2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}<0 \qquad \text{y} \qquad x^2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<0$$

En ambos casos, nos queda x^2 igu. ' a un número negativo lo que es absurdo, luego no hay raíces y por lo tanto el denc..iinador no se anula nunca; así, f es continua y por el teorema tiene un máximo y un mínimo absoluto.

---

12) Determinar si $f(x)=x^3$ tiene máximo y mínimo absolutos en

12.1. $[0;3]$ 12.2. $[-2,1)$ 12.3. $(2,5)$

La función f es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto lo es en cada uno de los intervalos que aparecen en el ejercicio.

1) Como el intervalo es cerrado y acotado, f tiene un máximo y un mínimo absoluto en $[0;3]$.

2) Ya no podemos usar el teorema pues el intervalo no es cerrado; en cambio usaremos que f es una función estríctamente creciente.
Tenemos que $f(-2)=-8$ y si $-2<x \implies f(-2)\leq f(x)$, por lo tanto en $x=-2$ hay un mínimo absoluto (-2 está en el dominio de f). Por otra parte, f no tiene máximos absolutos en $[-2,1)$. Vamos demostrarlo por el absurdo; supongamos que x_0 es un máximo absoluto en $[-2,1)$, entonces

$$f(x)\leq f(x_0),\quad \forall\, x\in[-2,1) \quad \text{(por ser máximo absoluto)} \qquad \text{y} \qquad -2\leq x_0<1$$

Sea x_1 que verifica $x_0 < x_1 < 1$, entonces

$$f(x_0) < f(x_1) < f(1)$$

Entonces $f(x_0)$ no puede ser un máximo pues hay un punto en el dominio donde la función toma un valor mayor.

3) En este caso f no tiene ni máximo ni mínimo absolutos en $(2,5)$. La demostración es exactamente la misma que en el ítem anterior para el máximo y muy similar para el mínimo pues
Si x_0 es un mínimo absoluto de f en $(2, 5)$ tomamos x_1 tal que $2 < x_1 < x_0$, entonces $f(x_1) < f(x_0)$ y $f(x_0)$ no puede ser una mínimo absoluto.

---

15) Enuncie el Teorema Bolzano e interprete gráficamente.

TEOREMA DE BOLZANO:

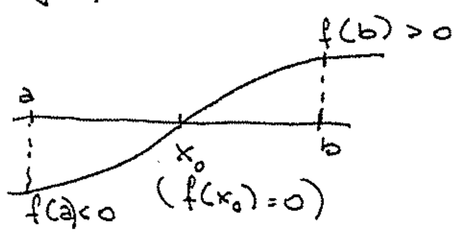
"Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a).f(b)<0$ entonces $\exists x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = 0$."

Algunas consideraciones:

- Continua en $[a,b]$ significa continua en (a,b), continua a derecha en a, y continua a izquierda en b.
- $f(a).f(b)<0$ es sencillamente que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo.
- Este teorema sirve para cuando querés asegurar la existencia de una raíz en un intervalo y es un ejercicio frecuente en parciales. En ese caso lo que tenés que hacer es:

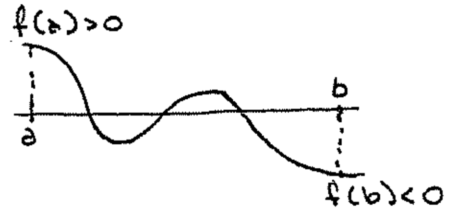
  1. fijarte si f es continua.
  2. ver que cambia de signo.

La interpretación gráfica del teorema de Bolzano sería:



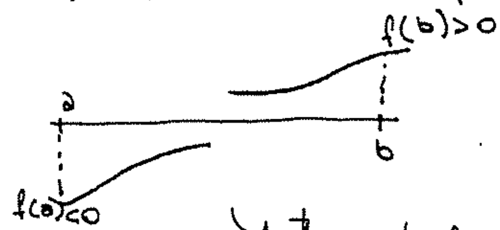
f continua

Puede suceder que el x_0 no sea único:



f continua.

IMPORTANTE: Si la f no es continua puede no valer Bolzano



f discontinua

$\nexists x_0 \mid f(x_0)=0$ pero $f(a)f(b)<0$.

---

(16) Sea $f:\Re \to \Re / f(x) = x^5 + kx$ [illegible] con $k \in \Re$

16.1. ¿Para qué valores de k la función f cumple con la hipótesis del T. de Bolzano en $[-1;1]$?

16.2. ¿Para qué valores de k la función f alcanza un máximo y un mínimo absolutos en $[-1;1]$?

- ESTE EJERCICIO ES APLICAR EL TEOREMA DE BOLZANO:

Para asegurar que exista una raíz real debe suceder que la función sea continua en el intervalo $[-1;1]$. (Esto ocurre para todo $K \in \mathbb{R}$).

Además:

$$f(-1) \cdot f(1) < 0$$

lo cual sucede si:

$$f(-1) < 0 \;\wedge\; f(1) > 0 \quad (a)$$

$$\text{ó } f(-1) > 0 \;\wedge\; f(1) < 0 \quad (b)$$

Vayamos a ⓐ: $f(-1)<0 \wedge f(1)>0$

- ⓐ $F(-1)<0 \iff (-1)^5+K(-1)+1<0 \iff$

$$-1-K+1<0 \iff$$

$$\boxed{K>0}$$

$$f(1)>0 \iff 1^5+K.1+1>0 \iff$$

$$2+K>0 \iff$$

$$\boxed{K>-2}$$

$$K \in (0,+\infty)$$

- ⓑ $f(-1)>0 \iff (-1)^5+k(-1)+1>0 \iff -1-k+1>0 \iff \boxed{k<0}$

$f(1)<0 \iff 1^5+k.1+1<0 \iff \boxed{k<-2}$

$$k \in (-\infty,-2)$$

Para que exista la raíz debe ser $k \in (-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$.

16.2) Acá se usa el TEOREMA DE WEIERSTRASS:

"Si f es continua en un intervalo cerrado entonces f presenta un valor máximo y un valor mínimo absoluto en dicho intervalo"

Como en nuestro caso la f es continua, en todo $[-1,1]$, tenemos que el enunciado vale $\forall k \in \mathbb{R}$.

AGREGADO: Halle las constantes a y b de manera que

$$f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}\ /\ f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\le 3 \\ x^2+ax+b & \text{si } x>3 \end{cases}$$

cumpla con la hipótesis del teorema de Bolzano en $[2;4]$

- PARA QUE SE CUMPLAN LAS HIPÓTESIS DE BOLZANO EN $[2,4]$ DEBE SER:

ⓐ $f(2).f(4)<0$

ⓑ f tiene que ser continua en $[2,4]$

Veamos primero ⓐ:

$$f(2) = 2+1 = 3$$

$$f(4) = 4^2 + a4 + b = 16 + 4a + b.$$

Como $3>0$, debe ser $\boxed{16+4a+b<0}$

ⓑ El único punto donde hay inconvenientes es en el tres. Como $f(3) = 3+1 = 4$, para que la función sea continua deben coincidir los límites laterales en 3 y ser ambos igual a 4. De esta manera el $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4 = f(3)$.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} x+1 = 3+1 = 4.$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} x^2+ax+b = \boxed{9+a.3+b = 4.}$$

Entonces concluimos que a y b deben satisfacer que:

ⓐ $16+4a+b<0$

ⓑ $9+3a+b=4$

De ⓑ $b = 4-9-3a = -5-3a$

Reemplazando en ⓐ:

$$16+4a+b<0 \iff 16+4a-5-3a<0 \iff 11+a<0$$

$$\iff \boxed{a<-11}$$

$$\boxed{b=-5-3a}$$

19. Dada $f:\Re \to \Re / f(x)=\begin{cases} ax-1 & \text{si } x<2 \\ ax^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

19.1. Halle $a \in \Re$ de manera que f cumpla con el teorema del valor intermedio en el intervalo $[1;3]$.

19.2. Para el valor de "a" hallado; resuelva la ecuación $f(x)+3=0$ en $[1;3]$.

19.3. Justifique la unicidad de la raíz anterior y grafique *f*.

- Una generalización del teorema de Bolzano es el Teorema del Valor Medio:

" Si la función f es continua en $[a,b]$ y $f(a)<k<f(b)$ (o $f(b)<k<f(a)$) entonces existe $x_0 \in (a,b)$ / $f(x_0)=k$"

1) Antes que nada se debe cumplir que $f(x)$ sea continua.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \iff$$

$$\lim_{x\to 2^-} ax-1 = \lim_{x\to 2^+} ax^2 \iff$$

$$a.2-1 = a.2^2 = 4a \iff$$

$$-1 = 4a-2a \iff$$

$$\boxed{a=-\frac{1}{2}}$$

2) $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x-1 & \text{si } x<2 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x\geq 2. \end{cases}$

Entonces

$$g(x)=f(x)+3=\begin{cases} -\frac{1}{2}x-1+3 & \text{si } x<2 \\ -\frac{1}{2}x^2+3 & \text{si } x\geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2}x+2 & \text{si } x<2 \\ -\frac{1}{2}x^2+3 & \text{si } x\geq 2. \end{cases}$$

$g(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>0 \quad g(3)=-\frac{9}{2}+3=-\frac{3}{2}<0$, además

como $g(x)=f(x)+3$ y la f es contínua, $g(x)$ es contínua.
Entonces usando Bolzano, $\exists\, x_0 \mid g(x_0)=f(x_0)+3=0$.
Para hallarlo hay que despejar:
Supongamos $x_0<2$, tenemos que despejar

$$-\frac{1}{2}x_0+2=0 \iff -\frac{1}{2}x_0=-2 \iff x_0=4$$

Lo cual no puede ser pues $x_0 \in (1,3)$, supongamos entonces que $x_0 \geq 2$, entonces

$$g(x_0)=-\frac{1}{2}x_0^2+3=0 \iff -\frac{1}{2}x_0^2=-3 \iff x_0^2=6 \iff x_0=\pm\sqrt{6}.$$

Pero como x_0 tiene que pertenecer al $(1,3)$ y además ser mayor o igual que 2 la única respuesta posible es

$$\boxed{x_0=\sqrt{6}}$$

Obtuvimos un x_0 tal que $f(x_0)+3=0$ y $x_0\in(1,3)$. Su existencia ya la teníamos asegurada por el Teorema de Bolzano.

---

3) Si vemos que la f es monótona en $[1,3]$, usando el ejercicio 12, concluimos que la raíz obtenida en 20.2) es única.

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x-1 & \text{si } x<2\\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$

Veamos que es monótona decreciente. Queremos ver que si

$$x<y \Rightarrow f(x)\geq f(y)$$

Supongamos primero que $x<y<2$ y quiero ver que

$$-\frac{1}{2}x-1 \geq -\frac{1}{2}y-1$$

Simplificando los -1

$$-\frac{1}{2}x \geq -\frac{1}{2}$$

Si y solo si

$$x \leq y$$

Pero esto es lo que habíamos supuesto. Ahora supongamos que $2 \leq x < y$, en este caso lo que queremos ver es que

$$-\frac{1}{2}x^2 \geq -\frac{1}{2}y^2$$

Simplificando el $-\frac{1}{2}$ se da vuelta la desigualdad:

$$x^2 \leq y^2$$

Como x e y son positivos pues los supusimos mayores o iguales que 2, tenemos que

$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |x| \leq |y| \qquad (x, y \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq y$$

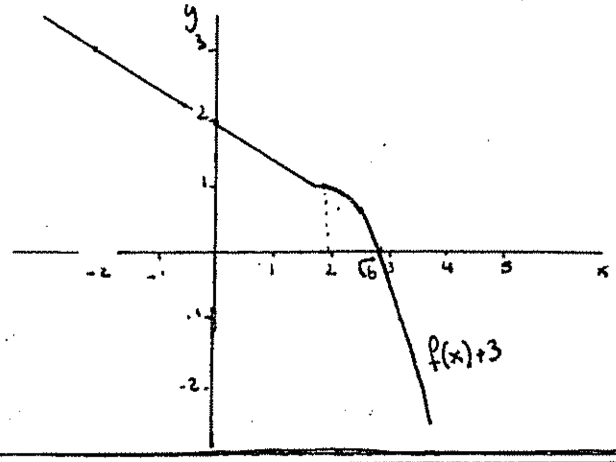
Que era lo que habíamos supuesto. En este punto vale que estés un poco perdido por eso te resumo lo que vamos haciendo:

Para ver que la raíz es única debemos ver que la función es decreciente. Pero la función viene definida de a partes, por lo tanto primero nos fijamos que su "lado izquierdo" lo sea, luego demostramos que su "lado derecho" también lo es. Ahora yo digo que con esto nos alcanza para ver que <u>toda</u> la función es decreciente. Esto es cierto porque coinciden en $x=2$, o sea que se pegan. Formalmente lo que debemos hacer es: si $x < 2 < y$ ver que $f(x) \geq f(y)$

Pero ya vimos que $f(x) \geq f(2)$ pues el lado izquierdo es decreciente y continuo y que $f(y) \leq f(2)$ pues el lado derecho es decreciente por lo tanto, uniendo estos resultados

$$f(x) \geq f(2) \geq f(y).$$

O sea que $f(x)$ es decreciente. Por lo tanto también lo es $f(x)+3$ y $\Rightarrow$ la raíz obtenida en $[1,3]$ es única.
Esto se termina de corroborar con el gráfico:



---

(21) Encuentre a y b reales, tal que: $f:\Re \to \Re / f(x)=\begin{cases} x+1 & si\, x<1 \\ ax+b & si\, 1\le x\le 2 \\ 3x & si\ x>2 \end{cases}$ resulte continua en x=1 y x=2

Todos estos ejercicios se limitan a encontrar a y b de manera tal que las funciones en las que está partida la función f se "peguen" en forma continua. Y el "pegarlas" es hacer que los límites laterales coincidan, para que exista el límite y se satisfaga la definición de continuidad.

En el ejercicio cada una de las funciones son continuas en los intervalos que están definidas, entonces hay que solucionar el problema en los "puntos conflictivos" : el 1 y el 2

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x+1 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} ax+b = a+b\end{array}\right\}$$ TIENEN QUE COINCIDIR.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} ax+b = 2a+b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 3x = 6\end{array}\right\}$$ TIENEN QUE COINCIDIR.

Me quedaron las ecuaciones $\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=6 \end{cases}$

Despejando, te queda $a=4$ y $b=-2$ y por lo tanto:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<1 \\ 4x-2 & 1\leq x\leq 2 \\ 3x & x>2 \end{cases}$$

---

(24) Dada $f: A \to \Re / f(x) = \dfrac{x^2+c}{x^2+ax+b}$

24.1. Halle *a*, *b* y *c* tal que *f* presente una discontinuidad evitable en $x=-1$ y una no evitable con salto infinito para $x=2$.

24.2. Halle *A* y grafique *f*.

Las discontinuidades de una función se dividen en dos tipos:

EVITABLES: (en x_0) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq f(x_0)$ ó $\nexists\, f(x_0)$.

ESENCIALES: (en x_0) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ ó $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Cuando esto último suced... y existen los límites laterales (no coinciden entre sí) decimos ...e la discontinuidad es esencial de primera especie. Si ni siquiera existe al menos uno de los límites laterales entonces será esencial de segunda especie.

Cuando te encontrás con un cociente de polinomios, las discontinuidades se van a producir allá donde se anula el denominador. Esto es una consecuencia inmediata de las propiedades de funciones continuas: Un polinomio es continuo y el cociente de funciones continuas es continuo salvo donde se anula el denominador. Esto es obvio porque los puntos en que se anula el denominador ni siquiera están en el dominio. Entonces de ninguna manera se puede estudiar la continuidad ($\nexists f(x_0)$ pues $x_0 \notin Dom(f)$) en esos pun...s.

Para que la discontinuidad sea evitable, la raíz también debe ser raíz del numerador, para que el factor $(x-a)$, donde "a" es la raíz se cancele. Esto lo vas a entender mucho mejor viendo la forma en que resolvemos el ejercicio:

Primero quiero que -1 y 2 sean raíces del denominador, entonces:

$$x^2+ax+b = (x+1)(x-2)$$

Distribuyendo

$$x^2+ax+b = x^2-x-2$$

De donde:

$$\boxed{a=-1} \qquad \boxed{b=-2}$$

Dijimos que para que -1 sea evitable, entonces debe ser raíz del numerador pero $(x-1)(x+1) = x^2-1$, entonces tomando

$$\boxed{c=-1}$$

me queda el resultado deseado. Verifiquémoslo:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2-x-2}}_{\left(\frac{0}{0} \text{ indeterminado}\right)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{(x-2)\cancel{(x+1)}} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x-2} = \frac{0}{-1-2} = 0$$ el límite $\exists$ y es finito $\Rightarrow$ la discontinuidad quedó EVITABLE

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \frac{3}{0} = \infty$$ ESENCIAL

$\boxed{\text{24.2) VER SOLUCIONES}}$

---

(25) · SIENDO:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{2+x^2} & si\, x < a \\ x^2 & si\, a \le x < b \\ a^2x & si\, x \ge b \end{cases}$$

Halle a y b reales positivos tal que f sea continua en $\Re$.

Hay que proceder de la misma manera que antes, o sea hacer coincidir los límites laterales:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to a^-} \sqrt{2+x^2} &= \sqrt{2+a^2} \\ \lim_{x \to a^+} x^2 &= a^2 \end{aligned}\right\}$$ TIENEN QUE COINCIDIR. (A)

$$\lim_{x \to b^-} x^2 = b^2 \quad \}$$

$$\lim_{x \to } a^2 x = 2a^2$$ } TIENE QUE COINCIDIR. (B)

La primera conclusión que extraemos es que $\boxed{b=2}$ pues como f tiene que ser continua <u>en $\mathbb{R}$</u> se tienen que pegar los intervalos.
Entonces de (B)

$$2a^2 = b^2 = 2^2 = 4$$

Entonces

$$a^2 = 2$$

Te dicen que a es positivo, entonces

$$\boxed{a = \sqrt{2}}$$

Verifiquemos que (A) tambien se verifica; o sea que

$$\sqrt{2 + a^2} = a^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+2} = 2 \quad \checkmark$$

Nos quedó:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2+x^2} & \text{si } x < \sqrt{2} \\ x^2 & \text{si } \sqrt{2} \leq x < 2 \\ \sqrt{2}\,x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

---

26. Sea f una función continua en $x = 2$. Sabiendo que la gráfica de g presenta en dicho punto un salto infinito, y que $g(x) = \dfrac{1}{f(x)-2}$. Estudie la continuidad en $x=2$ de las siguientes funciones.

26.1. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{[f(x)]^2 - 4} & si\ x \neq 2 \\ 0 & si\ x = 2 \end{cases}$

26.2. $r(x) = g(x) - h(x)$

De los datos que te dan, la primera conclusión que se puede sacar es que $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$, porque de esta manera

$\lim_{x \to 2} f(x) - 2 = 0$ y $\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{f(x)-2} = \infty$.

Estudiemos ahora la continuidad de $h(x)$ en $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2} \frac{4}{[f(x)]^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{4}{\underbrace{(f(x)-2)}_{\to 0}\underbrace{(f(x)+2)}_{\not\to 0 \text{ pues } f \text{ continua.}}} = \infty$$

$\boxed{\text{Entonces } h \text{ tiene una discontinuidad esencial en } 2.}$

Ahora estudiemos $r(x)$ en $x = 2$.

$$r(x) = g(x) - h(x) = \begin{cases} g(x) - \dfrac{4}{[f(x)]^2-4} & x \neq 2 \\ g(x) & x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} r(x) = \lim_{x \to 2} \left(g(x) - \frac{4}{[f(x)]^2 - 4} \right) = \lim_{x \to 2} \left(g(x) - \frac{4}{(f(x)-2)(f(x)+2)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{f(x)-2} - \frac{4}{(f(x)-2)(f(x)+2)} \right) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{f(x)+2 \quad -4}{(f(x)-2)(f(x)+2)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 2}{(f(x)-2)(f(x)+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\underbrace{f(x) + 2}_{\to 2 \text{ x lo que vimos}}} = \frac{1}{4}$$

Entonces r tiene una discontinuidad evitable en 2. Notá que $r(x)$ no está definido en el 2 pues $r(2) = g(2)$ $\nexists$.

Ej. 27) Analizar la validez de las siguientes proposiciones:

a) Si $x = a$ **es asíntota de** $f \Longrightarrow \exists f(a)$ **.**

b) Si $y = b$ **es asíntota de** $f \Longrightarrow \exists c \in D_f \;/\; f(b) = c$

c) Si $x_0 \notin D_f \Longrightarrow x = x_0$ **es una asíntota de** f **.**

d) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Longrightarrow f$ **no posee asíntotas.**

a) Falso. Por ejemplo tomemos $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. La recta $x = 0$ es una asíntota de f y no existe $f(0)$ (aunque ciertamente podríamos definir f allí si quisiéramos ... (claro que no quedaría continua)

b) Falso. Tomemos ahora $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal y sabemos que $e^x > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, así que es imposible que existe x tal que $f(x) = 0$.

c) Falso. Tomemos $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$. El punto $x = 1$ no pertenece al dominio de f pues el denominador se anula ahí; pero no es asíntota pues

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(\cancel{x}-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

d) Falso otra vez. En estas condiciones f no tiene asíntotas horizontales, pero todavía puede tener asíntotas oblicuas; consideremos $f(x) = x + 1/x$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \implies \text{no tiene asíntotas horizontales}$$

Pero

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1/x}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$$

de modo que si tiene una asíntota oblicua su pendiente es $m = 1$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por lo tanto la recta $y = x$ es una asíntota (oblicua) de f .

---

28) Hallar $a,b,c \in \Re \,/\, f(x) = \begin{cases} \dfrac{a-bx}{x} & x \ge 2 \\ c - x & -1 < x < 2 \\ \dfrac{1+ax}{x} & x \le -1 \end{cases}$ sea continua en $\Re$ y el $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+3] = 0$

a) Primero concentrémonos en la continuidad. La función f es continua en

$$(-\infty,\,-1)\cup(-1,\,2)\cup(2,\,+\infty)$$

pues en $(-1,2)$ f es un polinomio y en $(-\infty,\,-1)\cup(2,\,+\infty)$ los denominadores no se anulan. Entonces sólo hay que ver que pasa en -1 y en 2. Como la función está definida de distinta manera a la derecha y a la izquierda de esos valores calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{1+ax}{x} = \frac{1-a}{-1} = a-1$$

Por la derecha

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} c-x = c+1\,.$$

Luego, para que f sea continua en $x=-1$ debe ser $a-1=c+1$. Nos guardamos esto y estudiamos que pasa en $x=2$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} c-x = c-2,$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{a-bx}{x} = \frac{a-2b}{2}$$

Y para que sea continua debe ser $c-2=\dfrac{a-2b}{2}$.
Ahora juntamos todo y nos queda el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a-1=c+1 \\ c-2=\dfrac{a-2b}{2} \end{cases}$$

Como tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, si llega a tener solución no es única. Veamos si la condición del límite aporta algo.

$$0=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+3] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{a-bx}{x}+3\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{a-bx+3x}{x} =$$
$$\lim_{x\to+\infty} x\frac{a/x-b+3}{x} = -b+3 \implies -b+3=0$$

Ahora nos queda

$$\begin{cases} a-1=c+1 & \implies a=c+2 \\ c-2=\dfrac{a-2b}{2} & \\ -b+3=0 & \implies b=3 \end{cases} \implies \begin{cases} a=c+2 \\ c-2=\dfrac{a-6}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} a=c+2 \\ 2c-4=a-6 \end{cases}$$

Luego,

$$2c-4=c+2-6 \Longrightarrow 2c-4=c-4 \Longrightarrow c=0 \Longrightarrow a=2$$

Entonces los valores de a , b y c buscados son

$$\boxed{a=2, \quad b=3 \quad \text{y} \quad c=0}$$

b) DEMOSTREMOS QUE f ESTÁ ACOTADA

La función es $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2-3x}{x} & \text{si } x \geq 2 \\ -x & \text{si } -1<x<2 \\ \dfrac{1+2x}{x} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

Ya vimos que es continua y que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$. Calculemos el límite para $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+2x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1/x+2)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+2=2$$

Ahora la existencia de estos dos límites quiere decir que dado un valor $\varepsilon>0$ fijo, por ejemplo $\varepsilon=1$. Entonces existen $M_1>0$ y $M_2>0$ tales que:

si $x>M_1 \Longrightarrow |f(x)+3|<1 \Longrightarrow -1-3<f(x)<1-3 \Longrightarrow |f(x)|<4 \ \forall x>M_1$

si $x<-M_2 \Rightarrow |f(x)-2|<1 \Rightarrow -1+2<f(x)<1+2 \Rightarrow |f(x)|<3 \ \forall x<-M_2$

Con estos valores M_1 y M_2 podemos construir el intervalo cerrado y acotado $[-M_2, M_1]$, como la función es continua en ese intervalo, entonces alcanza un máximo y un mínimo absoluto y, por lo tanto, está acotado allí. Luego existe M_3 tal que

$$|f(x)|<M_3 \ \ \forall x\in[-M_2, M_1]$$

Entonces sea $M=\max\{M_3,3,4\}$, veamos que $|f(x)|\leq M$, para todo $x\in\mathbb{R}$. En efecto, dado $x\in\mathbb{R}$ hay tres posibilidades,

1) Si $x\in[M_2, M_1] \Longrightarrow |f(x)|\leq M_3\leq M$

2) Si $x<-M_2 \Longrightarrow |f(x)|<3\leq M$

3) Si $x>M_1 \Longrightarrow |f(x)|<4<M$

Por lo tanto, f es acotada.

Ej. 29 Indicar si son verdaderas o falsas y justificar:

a) Si f **es continua en** a **y** $f(a) > 0 \Rightarrow \exists E(a,\delta) \,/\, \forall x \in E(a,\delta) : f(x) > 0$ **.**

b) Si f **es continua y periódica** $\Longrightarrow$ **está acotada.**

c) Si f **y** g **son continuas en** $[a, b] \,/\, f(a) < g(a) \wedge f(b) > g(b) \Longrightarrow$ $\exists c \in (a,b) \,/\, f(c) = g(c)$

a) Es verdadera. Como $f(a) > 0$, sea $\varepsilon > 0$ tal que $0 < f(a) - \varepsilon < f(a)$ y tomemos $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Como

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \Longrightarrow 0 < f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$$

Luego, para todo $x \in E(a,\delta) = \{x \,/\, |x - a| < \delta\} \Longrightarrow f(x) > 0$

b) Es verdadera. Como f es periódica, existe $p > 0$ tal que $f(x) = f(x + p)$ para todo x . Dado que f es continua y el intervalo $[0, p]$ es cerrado y acotado, f está acotada en ese intervalo es decir existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para $x \in [0, p]$; pero entonces está acotada en todo $\mathbb{R}$ por que si $x \in \mathbb{R}$, existe $x' \in [0, p]$ tal que $f(x) = f(x')$ y $|f(x')| < M$.

c) Es verdadera. Vamos a usar el teorema de Bolzano que dice,
"Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a)f(b) < 0$ (esto lo que dice es que el signo de $f(a)$ es distinto al de $f(b)$), entonces existe c tal que $a < c < b$ y $f(c) = 0$ "

Definamos $h(x) = f(x) - g(x)$, entonces

$$h(a) = f(a) - g(a) < 0 \;\text{ y }\; h(b) = f(b) - g(b) > 0 \Longrightarrow \exists c \in (a, b) \,/\, h(c) = 0$$

Pero si $h(c) = 0 \Longrightarrow f(c) - g(c) = 0$ es decir $f(c) = g(c)$

Ej. 30 Considerando las funciones h **y** g **del Ej. 25, determine, si es posible,** $k \in \mathbb{R}$ **para que la función** θ **sea continua en** $x = 2$ **siendo**

$$\theta(x) = \begin{cases} g(x) - h(x) & \textbf{si } x \neq 2 \\ k & \textbf{si } x = 2 \end{cases}$$

No queda claro cual es g y cual es h en el ejercicio 21. Supongamos que

$$g(x) = f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \qquad \text{y} \qquad h(x) = f_8(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para que la función sea continua en $x = 2$, el límite tiene que existir y ser igual al valor de la función en el punto, entonces:

$$\lim_{x\to 2} \theta(x) = \lim_{x\to 2} g(x) - h(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{|x|}} - \cos\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\frac{1}{2}$$

Luego, para que θ sea continua debe ser

$$\boxed{k = \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\frac{1}{2}}$$

---

(33) Dada $f: \Re - \{k\} \to \Re \,/\, f(x) = \dfrac{x^2-2}{ax+b}$ Halle *a*, *b* y *k* tal que $y = \frac{1}{2}x - 4$ sea asíntota a la cur de *f*.

Recordemos la definición de asíntota oblicua:

> La recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de f sí y solo si
> $$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - (mx+b) \right) = 0$$

En nuestro caso queremos que

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - \left(\tfrac{1}{2}x - 4\right) \right) = 0$$

O lo que es lo mismo

$$0 = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-2}{ax+b} - \left(\tfrac{1}{2}x - 4\right) \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2 - \left(\frac{1}{2}x-4\right)(ax+b)}{ax+b}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2 - \left(\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}bx - 4ax - 4b\right)}{ax+b} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - \frac{1}{2}ax^2 + \left(4a - \frac{b}{2}\right)x + 4b - 2}{ax+b} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1-\frac{a}{2}\right)x^2 + \left(4a - \frac{b}{2}\right)x + 4b - 2}{ax+b}$$

Para que este último límite sea 0, hemos visto en la unidad anterior que el grado del polinomio que está en el numerador debe ser menor que el del denominador, entonces:

$$\begin{cases} 1 - \frac{a}{2} = 0 \iff \boxed{a=2} \\ 4a - \frac{b}{2} = 0 \iff b = 8a \iff \boxed{b=16} \end{cases}$$

Nos quedó:

$$f(x) = \frac{x^2-2}{2x+16}$$

Pero esta función no está definida donde se anula el denominador $\iff$

$$2x + 16 = 0$$

$$\boxed{x = -8}$$

Nos queda que $f: \mathbb{R} - \{-8\} \to \mathbb{R}$, entonces $k = -8$.

AGREGADO $\to$ Siendo

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + a & \text{si } x \leq -1 \\ -x + b & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \frac{a}{x} - c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1) Halle a, b y c para que f_1 resulte continua en $\mathbf{R}$ y la recta $y = -3$ sea asíntota para $x \to +\infty$.

2) Defina f_1 y grafíquela.

3) Demuestre que la función f_1 es acotada.

1)- De nuevo nos tenemos que preocupar por los límites laterales, pero además nos tenemos que preocupar porque

$y = -3$ sea una asíntota horizontal de f_1. $\therefore$ Nos quedan las siguientes condiciones sobre a, b y c:

$$\lim_{x \to -1^-} f_1(x) = \lim_{x \to -1^+} f_1(x) \qquad (A)$$

$$\lim_{x \to 2^-} f_1(x) = \lim_{x \to 2^+} f_1(x) \qquad (B)$$

$$\lim_{x \to \infty} f_1(x) = -3 \qquad (C)$$

Desarrollemos estas condiciones:

(A)
$$\lim_{x \to -1^-} f_1(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x} + a = a - 1$$

$$\lim_{x \to -1^+} f_1(x) = \lim_{x \to -1^+} -x + b = 1 + b$$

Entonces

$$\boxed{a - 1 = 1 + b}$$

(B)
$$\lim_{x \to 2^-} f_1(x) = \lim_{x \to 2^-} -x + b = -2 + b$$

$$\lim_{x \to 2^+} f_1(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{a}{x} - c = \frac{a}{2} - c$$

Entonces

$$\boxed{-2 + b = \frac{a}{2} - c}$$

(C)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x} - c = -3 \iff \lim_{x \to \infty} \frac{a - cx}{x} = -3 \iff \boxed{c = 3}$$

Reemplazando en (B) $\quad -2 + b = \frac{a}{2} - 3 \iff b = \frac{a}{2} - 1$

Reemplazando en A $\quad a-1 = \frac{a}{2} - 1 + 1 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow$

$$\boxed{a=2 \;,\; b = \frac{a}{2} - 1 = 0 \;,\; c = 3.}$$

---

36 Dadas las funciones:

$$f : A \to \Re / f(x) = \frac{x^3 + x + a}{x^2 + bx + c}$$

$$g : \Re - \{-1\} \to \Re / g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$$

36.1. Halle *a*,*b* y *c* sabiendo que *f* y *g* tienen las mismas asíntotas.

36.2. Obtenga las ecuaciones de dichas asíntotas.

Hallemos las asíntotas de g para luego determinar a, b y c.

$g(x) = \frac{x^2+x-2}{x+1}$, la primera conclusión es que $\boxed{x=-1}$ es una asíntota vertical de g pues $\lim_{x \to -1} g(x) = \infty$.

Busquemos las horizontales u oblicuas resolviendo la ecuación:

$$\lim_{x \to \infty} \left(g(x) - (mx+b)\right) = 0$$

Esto sucede sí y solo si:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+x-2}{x+1} - (mx+b) \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x-2-(x+1)(mx+b)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x-2-mx^2-(b+m)x-b}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(1-m)x^2+(1-b-m)x-2-b}{x+1} = 0$$

Por el mismo argumento que usamos en algún ejercicio anterior, esto sucede si y solo si:

$1 - m = 0 \iff m = 1$

$1 - b - m = 0 \iff 1 - b - 1 = 0 \iff b = 0$

$\Rightarrow \quad AO = mx + b = x$

Nos quedó que una asíntota oblicua es $\boxed{y = x}$

Como te dicen que f y g tienen las mismas asíntotas debe ser $y=x$ una asíntota oblicua de f (A) y debe ser $x=-1$ una asíntota vertical de f (B).

Veamos (A), por definición de asíntota oblicua.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - x = 0$$, esto sucede si y solo si:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x + a}{x^2 + bx + c} - x = 0 \iff \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x + a - x(x^2 + bx + c)}{x^2 + bx + c} = 0$$

$$\iff \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x + a - x^3 - bx^2 - cx}{x^2 + bx + c} = 0$$

$$\iff \lim_{x \to \infty} \frac{-bx^2 + (1-c)x + a}{x^2 + bx + c} = 0$$

Esto sucede si y solo si $\boxed{b = 0}$ (usando el mismo argumento que antes).

Ahora veamos qué conclusión extraemos de (B); que $x=-1$ sea una asíntota vertical de f significa que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + x + a}{x^2 + c} = \infty$$

En consecuencia debe ser $(-1)^2 + c = 0$ y $(-1)^3 + (-1) + a \neq 0$, entonces $c=-1$ y $a \neq 2$ quedando

$$f(x) = \frac{x^3+x+a^{x^2}}{x^2-1} = \frac{x^3+x+a}{(x-1)(x+1)}$$

Pero 1 también es una raíz del denominador de f, entonces podría ser que

$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{k}{0} = \infty$ si $k \neq 0$, entonces $x=1$ sería una asíntota vertical de f. Esto es imposible pues f tiene las mismas asíntotas que g y $x=1$ <u>no</u> es asíntota de g. La única forma de zafar de esto es que $\lim_{x \to 1} f(x) \neq \infty$ y esto se logra haciendo $k=0$.

O sea queremos que

$$\lim_{x \to 1} x^3+x+a = 0 \iff 1+1+a=0 \iff \boxed{a=-2}$$

Nos queda $\boxed{f(x) = \frac{x^3+x-2}{x^2-1}}$

36.2) Está incluido en 36.1): $\begin{cases} y = x \\ x = -1 \end{cases}$

---

38) La ecuación $e^x - 3x = 0$ tiene por raíz a $r = 0{,}61906129$. Comenzando con el intervalo $[0,1]$, realizar 6 iteraciones por el Método de Bisección para encontrar la raíz aproximada.

38.1. ¿Cuántos decimales correctos tiene dicha aproximación?

38.2. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para que la raíz obtenida tenga 4 decimales significativos ?.

El método de bisección se basa en el teorema de Bolzano, que ya fue enunciado en el ejercicio 28) c)

Veamos en que consiste desarrollando el ejercicio:

Primera iteración: Consiste en evaluar la función en los extremos del intervalo. Como $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) - e - 3 < 0$ por el teorema es seguro que va a existir una raíz de f (es decir un punto c tal que $f(c) = 0$) entre 0 y 1 .

Segunda iteración: Dividimos al intervalo que tiene la raíz por la mitad; nos quedan los intervalos $[0; 0,5]$ y $[0,5; 1]$. Calculemos la función en los extremos

$$f(0) = 1 > 0, \qquad f(1) = e - 3 < 0, \qquad f(0,5) = 0,148 > 0$$

Como f cambia de signo en el intervalo $[0,5; 1]$ la raíz debe estar en el $[0,5; 1]$

Tercera iteración: Tomamos el intervalo $[0,5; 1]$ y lo partimos en dos mitades, nos quedan los intervalos $[0,5; 0,75]$ y $[0,75; 1]$. Evaluamos la función en los extremos y tenemos

$$f(0,5) = 0,148 > 0, \qquad f(1) = e - 3 < 0, \qquad f(0,75) = -0,13 < 0$$

Como el cambio de signo se produce en el $[0,5; 0,75]$ la raíz esta en él.

Y así seguimos,

Cuarta iteración: Nos quedan los intervalos $[0,5; 0,625]$ y $[0,625; 0,75]$. La función cambia de signo en el $[0,5; 0,625]$ pues $f(0,625) = -0,00675 < 0$.

Quinta iteración: Dividimos al $[0,5; 0,625]$ nos quedan
$[0,5; 0,5625]$ y $[0,5625; 0,625]$, f cambia de signo en el $[0,5625; 0,625]$

Sexta iteración: dividimos $[0,5625; 0,625]$ en dos y nos queda
$[0,5625; 0,59375]$ y $[0,59375; 0,625]$.
La función cambia de signo en el intervalo $[0,59375; 0,625]$ así que la raíz está ahí. Su valor aproximado es el punto medio, es decir $0,609375$

a) Para saber cuanto decimales exactos tenemos, tengamos en cuenta que, como la raíz esta en el último intervalo que elegimos ($[0,59375; 0,625]$), el error que cometemos es menor que la diferencia entre los extremos, los decimales exactos es la cantidad de 0 que aparece en esa diferencia:

$$0,625 - 0,59375 = 0,03125 \Longrightarrow \text{Tiene un decimal correcto}$$

b) Queremos que la longitud del último intervalo sea menor que 10^{-4} . En general, si el intervalo inicial es el $[a; b]$, longitud del intervalo en la n -ésima iteración es

$$\frac{1}{2^n}(b - a)$$

De modo que tenemos que buscar n para que

$$\frac{1}{2^n}(1-0) < \frac{1}{10^4} \implies 10^4 < 2^n \implies 4 < n\log_{10}(2) \implies n > \frac{4}{\log_{10}(2)} \simeq 13,29$$

Así que necesitamos por lo menos 14 iteraciones.

Ej. 39 Encontrar un intervalo que contenga la raíz positiva de

$$x^2 - 2x - 2 = 0.$$

a) usar el Método de Bisección para calcular dicha raíz con dos decimales significativos.

b) Determinar el número de pasos necesarios para localizar la raíz en un intervalo de longitud menor que 10^{-6}

- El intervalo lo encontramos a ojo, pero conviene que no sea muy grande pues afecta la cantidad de iteraciones. Sea $f(x) = x^2 - 2x - 2$, entonces $f(0) = -2 < 0$ y $f(-1) = 1 > 0$, así que un intervalo es el $[-1; 0]$ (otro posible es el $[2; 3]$).

- a) Calculemos la cantidad de iteraciones necesarias para tener dos decimales exactos. De acuerdo con la fórmula

$$\frac{1}{2^n}(0-(-1)) < \frac{1}{10^2} \implies 10^2 < 2^n \implies 2 < n\log_{10} 2 \implies n > \frac{2}{\log_{10} 2} \simeq 6,64$$

Por lo tanto necesitamos 7 iteraciones.

Como el procedimiento es exactamente igual al del ejercicio anterior no vamos a repetirlo totalmente. Hagamos dos o tres iteraciones

Primera iteración: Partimos al $[-1; 0]$ en dos mitades, nos quedan los intervalos

$$[-1; -0,5] \qquad \text{y} \qquad [-0,5; 0]$$

Como $f(-0,5) = -0,75 < 0$, f cambia de signo en el primero de los intervalos ($f(-1) > 0$) así que nos quedamos con él, es decir con $[-1; -0,5]$

Segunda iteración: Partimos al $[-1; -0,5]$ en dos mitades, obtenemos

$$[-1; -0,75] \qquad \text{y } [-0,75; -0,5]$$

Ahora $f(-0,75) = 0,062 > 0$. Como $f(-0,5) < 0$. f cambia de signo en el intervalo $[-0,75; -0,5]$; nos quedamos con él.

Veamos en que consiste desarrollando el ejercicio:
Primera iteración: Consiste en evaluar la función en los extremos del intervalo. Como $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) - e - 3 < 0$ por el teorema es seguro que va a existir una raíz de f (es decir un punto c tal que $f(c) = 0$) entre 0 y 1 .

Segunda iteración: Dividimos al intervalo que tiene la raíz por la mitad; nos quedan los intervalos $[0; 0,5]$ y $[0,5; 1]$. Calculemos la función en los extremos

$$f(0) = 1 > 0, \qquad f(1) = e - 3 < 0, \qquad f(0,5) = 0,148 > 0$$

Como f cambia de signo en el intervalo $[0,5; 1]$ la raíz debe estar en el $[0,5; 1]$

Tercera iteración: Tomamos el intervalo $[0,5; 1]$ y lo partimos en dos mitades, nos quedan los intervalos $[0,5; 0,75]$ y $[0,75; 1]$. Evaluamos la función en los extremos y tenemos

$$f(0,5) = 0,148 > 0, \qquad f(1) = e - 3 < 0, \qquad f(0,75) = -0,13 < 0$$

Como el cambio de signo se produce en el $[0,5; 0,75]$ la raíz esta en él.

Y así seguimos,

Cuarta iteración: Nos quedan los intervalos $[0,5; 0,625]$ y $[0,625; 0,75]$. La función cambia de signo en el $[0,5; 0,625]$ pues $f(0,625) = -0,00675 < 0$.

Quinta iteración: Dividimos al $[0,5; 0,625]$ nos quedan $[0,5; 0,5625]$ y $[0,5625; 0,625]$, f cambia de signo en el $[0,5625; 0,625]$

Sexta iteración: dividimos $[0,5625; 0,625]$ en dos y nos queda $[0,5625; 0,59375]$ y $[0,59375; 0,625]$.
La función cambia de signo en el intervalo $[0,59375; 0,625]$ así que la raíz está ahí. Su valor aproximado es el punto medio, es decir $0,609375$

a) Para saber cuanto decimales exactos tenemos, tengamos en cuenta que, como la raíz esta en el último intervalo que elegimos ($[0,59375; 0,625]$), el error que cometemos es menor que la diferencia entre los extremos, los decimales exactos es la cantidad de 0 que aparece en esa diferencia:

$$0,625 - 0,59375 = 0,03125 \implies \text{Tiene un decimal correcto}$$

b) Queremos que la longitud del último intervalo sea menor que 10^{-4} . En general, si el intervalo inicial es el $[a; b]$, longitud del intervalo en la n -ésima iteración es

$$\frac{1}{2^n}(b - a)$$

De modo que tenemos que buscar n para que

$$\frac{1}{2^n}(1-0) < \frac{1}{10^4} \Longrightarrow 10^4 < 2^n \Longrightarrow 4 < n\log_{10}(2) \Longrightarrow n > \frac{4}{\log_{10}(2)} \simeq 13,29$$

Así que necesitamos por lo menos 14 iteraciones.

Ej. 39 Encontrar un intervalo que contenga la raíz positiva de

$$x^2 - 2x - 2 = 0.$$

a) usar el Método de Bisección para calcular dicha raíz con dos decimales significativos.

b) Determinar el número de pasos necesarios para localizar la raíz en un intervalo de longitud menor que 10^{-6}

- El intervalo lo encontramos a ojo, pero conviene que no sea muy grande pues afecta la cantidad de iteraciones. Sea $f(x) = x^2 - 2x - 2$, entonces $f(0) = -2 < 0$ y $f(-1) = 1 > 0$, así que un intervalo es el $[-1; 0]$ (otro posible es el $[2; 3]$).

- a) Calculemos la cantidad de iteraciones necesarias para tener dos decimales exactos. De acuerdo con la fórmula

$$\frac{1}{2^n}(0-(-1)) < \frac{1}{10^2} \Longrightarrow 10^2 < 2^n \Longrightarrow 2 < n\log_{10} 2 \Longrightarrow n > \frac{2}{\log_{10} 2} \simeq 6,64$$

Por lo tanto necesitamos 7 iteraciones.

Como el procedimiento es exactamente igual al del ejercicio anterior no vamos a repetirlo totalmente. Hagamos dos o tres iteraciones

Primera iteración: Partimos al $[-1; 0]$ en dos mitades, nos quedan los intervalos

$$[-1; -0,5] \qquad \text{y} \qquad [-0,5; 0]$$

Como $f(-0,5) = -0,75 < 0$, f cambia de signo en el primero de los intervalos ($f(-1) > 0$) así que nos quedamos con él, es decir con $[-1; -0,5]$

Segunda iteración: Partimos al $[-1; -0,5]$ en dos mitades, obtenemos

$$[-1; -0,75] \qquad \text{y } [-0,75; -0,5]$$

Ahora $f(-0,75) = 0,062 > 0$. Como $f(-0,5) < 0$, f cambia de signo en el intervalo $[-0,75; -0,5]$; nos quedamos con él.

Tercera iteración: Dividimos por la mitad al $[-0,75;\ -0,5]$, obtenemos

$$[-0,75;\ -0,625] \qquad \text{y} \qquad [-0,625;\ -0,5]$$

La función vale $f(-0,625) = -0,359 > 0$; así que nos quedamos con el intervalo $[-0,75;\ -0,625]$
Y así continuamos, hasta encontrar con que intervalo nos quedamos en la séptima iteración; la raíz aproximada es el punto medio del intervalo.

b) Si queremos que la raíz este en un intervalo de longitud menor de 10^{-6} , partiendo de uno de los intervalos de longitud 1 que elegimos al principio del ejercicio, tenemos que la cantidad de iteraciones n debe satisfacer

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^{-6}} \implies 10^6 < 2^n \implies 6 < n \log_{10} 2 \implies n > \frac{6}{\log_{10} 2} \simeq 19,93$$

Así que necesitamos 20 iteraciones.

FIN TP3