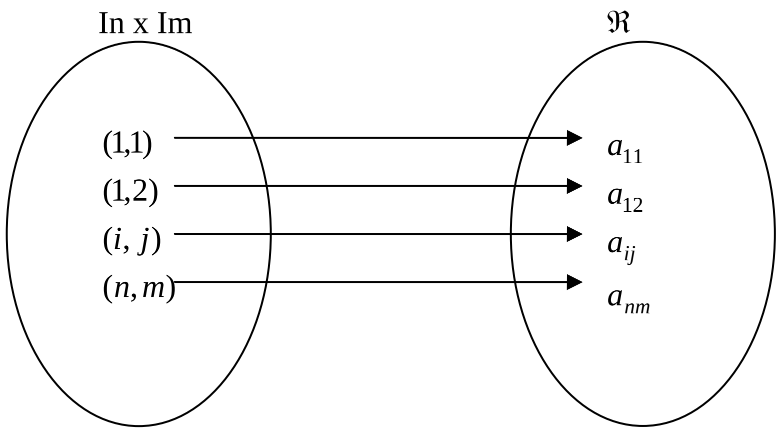
Matrices

Sea X = In x Im; el producto cartesiano de dos intervalos naturales iniciales In e Im.

Llamamos matriz n x m con elementos $\Re$ a toda función $f : \text{In x Im} \to \Re$.

La imagen del elemento *(i;j)* perteneciente al dominio de la función se denota a_{ij}.



La matriz f queda caracterizada por el conjunto de las imágenes, y suele escribirse como un cuadro de *n* filas y *m* columnas.

$$\begin{array}{l}
a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots\ldots\ldots\ \ ..a_{1m} \\
a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots\ldots\ldots\ \ .a_{2m} \\
\ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \ldots\ldots\ldots\ \ a_{nm}
\end{array}$$

El elemento de la matriz que figura en la fila i y la columna j, se lo denota a_{ij}, y es la imagen dada por la función f del par *(i;j)*. Llamando *A* a la matriz cuyo elemento genérico es el a_{ij} escribimos:

$$A = \begin{pmatrix}
a_{11}a_{12}a_{13} \ldots\ldots\ldots a_{1m} \\
a_{21}a_{22}a_{23} \ldots\ldots\ldots a_{2m} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}a_{n2}a_{n3} \ldots\ldots\ldots a_{nm}
\end{pmatrix}$$

El conjunto de todas las matrices *n x m* con elementos en $\Re$ se denota mediante $\Re^{nxm}$.

Matrices iguales

Dos matrices *A* y *B* son iguales si los elementos que ocupan la misma posición son iguales.

$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j \in IN$

Suma de matrices

Sean dos matrices *A* y *B* pertenecientes a $\Re^{nxm}$. Su suma será otra matriz $C \in \Re^{nxm}$, donde cada elemento c_{ij} se obtiene:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j \in IN$

Se suman los elementos que ocupan la misma posición.

Matriz nula

Sea $N \in \Re^{nxm}$ / N es matriz nula $\Leftrightarrow n_{ij} = 0 \forall i, j \in IN$

Producto de un escalar por una matriz

Sea $A \in \Re^{nxm}$ y $\alpha \in \Re$. Su producto será una matriz $C \in \Re^{nxm}$ cuyo elemento genérico c_{ij} se obtiene:

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}$$

Se multiplica cada uno de los elementos de la matriz por el escalar correspondiente.

Matriz cuadrada

Sea $A \in \Re^{nxm}$: $n=m \Rightarrow A \in \Re^{nxn}$ A es matriz cuadrada.

Es la matriz que tiene igual cantidad de filas y de columnas.

Matriz identidad

En $\Re^{nxn}$ la matriz identidad *I* definida por sus elementos es:

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 \forall i = j \\ a_{ij} = 0 \forall i \neq j \end{cases}$$

Matrices Conformables

Sea $A \in \Re^{nxm}, B \in \Re^{rxt}$: A conformable con $B \Leftrightarrow m = r$

La cantidad de columnas de *A* es igual a la cantidad de filas de *B*.

Producto de matrices

Sean dos matrices $A \in \Re^{nxp}$ y $B \in \Re^{pxm}$. Llamaremos producto de las matrices *A* y *B* en ese orden, a la matriz $C \in \Re^{nxm}$, cuyo elemento genérico c_{ij} es la suma de los productos de los elementos de una fila *i* de *A* por los elementos de la columna *j* de *B*.

$$C = A.B \Rightarrow c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \dots\dots\dots + a_{ip}.b_{pj}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}.b_{kj} \qquad i = 1,2,3,\dots\dots,n$$

$$\mathrm{j} = 1,2,3,\dots\dots,m$$

Para que dos matrices se puedan multiplicar, deben ser conformables.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1.1 + 2.5 + (-1).0 & 1.(-2) + 2.3 + (-1).(-4) & 1.2 + 2.(-1) + (-1).1 & 1.0 + 2.4 + (-1).(-1) \\ 3.1 + 4.5 + 0.0 & 3.(-2) + 4.3 + 0.(-4) & 3.2 + 4(-1) + 0.1 & 3.0 + 4.4 + 0.(-1) \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 11 & 8 & -1 & 9 \\ 23 & 12 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices

1) Sean $A \in \Re^{nxn}$ e $I \in \Re^{nxn} \Rightarrow A.I = I.A = A$

2) El producto de matrices no es, en general, conmutativo.

3) El producto de matrices es asociativo *A.(B.C)=(A.B).C*

4) El producto de matrices es distributivo respecto de la suma o resta de matrices.

A derecha $\forall A, B \in \Re^{nxp}$ y $C \in \Re^{pxm} \Rightarrow (A + B).C = A.C + B.C$

A izquierda $\forall C \in \Re^{nxp}$ y $A, B \in \Re^{pxm} \Rightarrow C.(A + B) = C.A + C.B$

5) El producto de matrices no nulas puede ser la matriz nula.

Matriz triangular superior

La matriz $A \in \Re^{nxn}$ es triangular superior $\Leftrightarrow \forall i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

<u>Propiedad</u>: el producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior.

Matriz triangular inferior

La matriz $A \in \Re^{nxn}$ es triangular superior $\Leftrightarrow \forall i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

<u>Propiedad</u>: el producto de dos matrices triangulares inferiores es una matriz triangular inferior.

Matriz diagonal

La matriz $A \in \Re^{nxn}$ es diagonal $\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \forall i \neq j$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz escalar

Una matriz escalar es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son iguales.

A es matriz escalar $\Leftrightarrow A = \alpha.I, \alpha \in \Re$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta

La matriz $B \in \Re^{mxn}$ es la traspuesta de $A \in \Re^{nxm} \Leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}$.

Se denota $B = A^t$ y se lee "A traspuesta".

Ejemplo:

Sea $A \in \Re^{2X3}$ entonces si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Para hallar la traspuesta de una matriz se permutan filas por columnas.

<u>Propiedades</u>

i) Toda matriz de orden uno es igual a su traspuesta.

ii) La traspuesta de una suma es igual a la suma de las traspuestas. $(A+B)^t = A^t + B^t$

iii) La traspuesta del producto de un escalar por una matriz es igual al producto del escalar por la traspuesta de la matriz. $(\alpha.A)^t = \alpha.A^t, \alpha \in \Re$

iv) La traspuesta de un producto de matrices es igual al producto de las traspuestas en orden permutado. $(A.B)^t = B^t.A^t$

v) La traspuesta de la traspuesta de una matriz, es la misma matriz $(A^t)^t = A$

Matriz simétrica

Una matriz cuadrada es simétrica $\Leftrightarrow$ es igual a su traspuesta

$A \in \Re^{nxn}$ es simétrica $\Leftrightarrow A = A^t$

Ejemplo:

$A \in \Re^{3x3} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Se la puede identificar a simple vista pues es simétrica respecto de la diagonal.

<u>Propiedades</u>

i) El producto de toda matriz por su traspuesta es una matriz simétrica.

$A \in \Re^{nxm} : A.A^t$ es simétrica

Demostración $(A.A^t)^t = (A^t)^t.A^t$

$= A.A^t \Rightarrow A.A^t$ es simétrica

ii) La suma de toda matriz cuadrada con su traspuesta es una matriz simétrica. $A \in \Re^{nxn} : A + A^t$ es simétrica

Demostración $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t$

$= A^t + A$

$= A + A^t \Rightarrow A + A^t$ es simétrica

Matriz antisimétrica

Una matriz cuadrada es antisimétrica $\Leftrightarrow$ es igual a la opuesta de su traspuesta

$A \in \Re^{nxn}$ es antisimétrica $\Leftrightarrow A = -A^t$

$A = -A^t \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji} \forall i \neq j \wedge a_{ij} = 0 \forall i = j$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

En las matrices antisimétricas los elementos diagonales son nulos y los elementos simétricos son opuestos.

Propiedades

i) La diferencia de toda matriz cuadrada con su traspuesta es una matriz antisimétrica. $A \in \Re^{nxn} : A - A^t$ es antisimétrica

Demostración $-(A - A^t)^t = -(A^t - (A^t)^t)$

$= -A^t + A$

$= A - A^t \Rightarrow A + A^t$ es antisimétrica

ii) Toda matriz cuadrada es la suma de una matriz simétrica y de una antisimétrica.

Demostración $A + A^t$ es simétrica $\Rightarrow \frac{1}{2}(A + A^t)$ es simétrica [1]

$A - A^t$ es antisimétrica $\Rightarrow \frac{1}{2}(A - A^t)$ es antisimétrica [2]

Sumando las expresiones [1] y [2]

$$\frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^t + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^t = A$$

Matriz idempotente

Una matriz cuadrada es idempotente si y sólo si es igual a si misma elevada al cuadrado.

$A \in \Re^{nxn} : A$ idempotente $\Leftrightarrow A^2 = A$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matriz involutiva

Una matriz cuadrada es involutiva si y sólo si su cuadrado es la identidad.

$A \in \Re^{nxn} : A$ involutiva $\Leftrightarrow A^2 = I$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Matriz inversible

Una matriz cuadrada es inversible, regular o no singular si y sólo si existe una matriz del mismo orden tal que su producto por derecha y por izquierda es la identidad.

$A \in \Re^{nxn} : \exists A^{-1} \Leftrightarrow A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

Ejemplo:

Hallar la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Considero $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & \mathrm{y} \\ \mathrm{z} & \mathrm{w} \end{pmatrix}$

Se verifica que $A.A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & \mathrm{y} \\ \mathrm{z} & \mathrm{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \mathrm{y} + 2\mathrm{w} = 0 \\ 3\mathrm{y} - \mathrm{w} = 1 \end{cases}$$

Resolviendo los sistemas de ecuaciones lineales queda:

$$x = \frac{1}{7} \quad y = \frac{2}{7} \quad z = \frac{3}{7} \quad w = -\frac{1}{7}$$

Finalmente $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$

Propiedades

i) La inversa de la inversa de una matriz es la misma matriz. $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) La inversa de un producto de matrices es el producto de las inversas en el orden permutado. $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

Matriz ortogonal

Una matriz cuadrada no singular es ortogonal si y sólo si su inversa es igual a su traspuesta.

$A \in \Re^{nxn} : \exists A^{-1}$ es matriz ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$

Propiedades

i) Una matriz cuadrada es ortogonal si y sólo si el producto de dicha matriz con su traspuesta es la identidad. $A.A^t = I$

ii) El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal.