Resueltos

MATERIA: Análisis Matemático I

TITULO: T.P. Nº 5 (Parte 2)

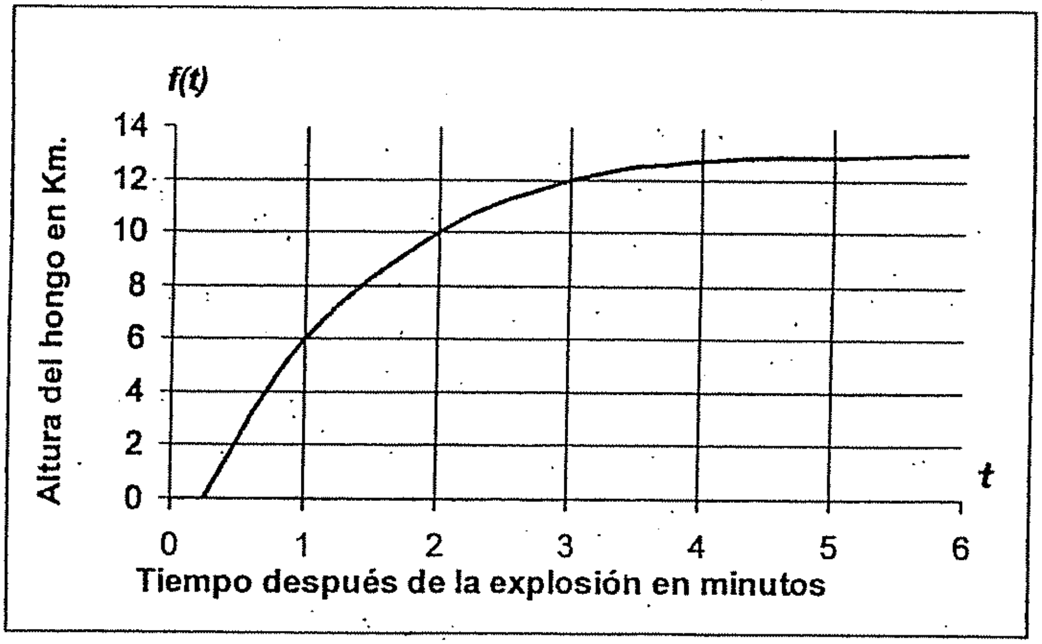
"Teoremas Rel. a las Funciones Diferenciables" -Problemas-

Edición 2000

AUTOR: Anibal Kasero

Problemas

112. Sean $f(t)$ la altura en km. del hongo atómico t minutos después de la explosión de una bomba de 1 megatón, en uno de lo últimos ensayos nucleares realizados en el Pacífico. Suponga que la nube no se ha dispersado.



112.1. ¿Cuál es el significado físico de $f'(t)$?

112.2. ¿Qué sucede con $f(t)$ y $f'(t)$ a medida que t aumenta?

112.3. Estime la rapidez con que se eleva la nube en el momento de la explosión.

112.4. Repita el cálculo de 112.3. en $t = 1$ y $t = 4$ minutos.

(1) Significado físico de la derivada. Aquí $f'(t)$ es la derivada de la función $f(t)$ respecto de su argumento (t). Matemáticamente, la definición de esta derivada es:

$$f'(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right]$$

Como en este caso $f(t)$ representa una longitud, y su argumento (t) representa un intervalo de tiempo, el cociente incremental $\Delta f / \Delta t$ será una velocidad.

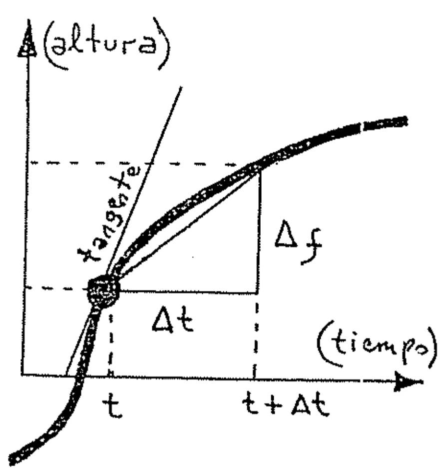
$\left(\frac{\Delta f}{\Delta t}\right)$ es la velocidad media en el intervalo de tiempo que transcurre entre t y $t+\Delta t$.

$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta t}\right)$ es la velocidad instantánea en el tiempo t.

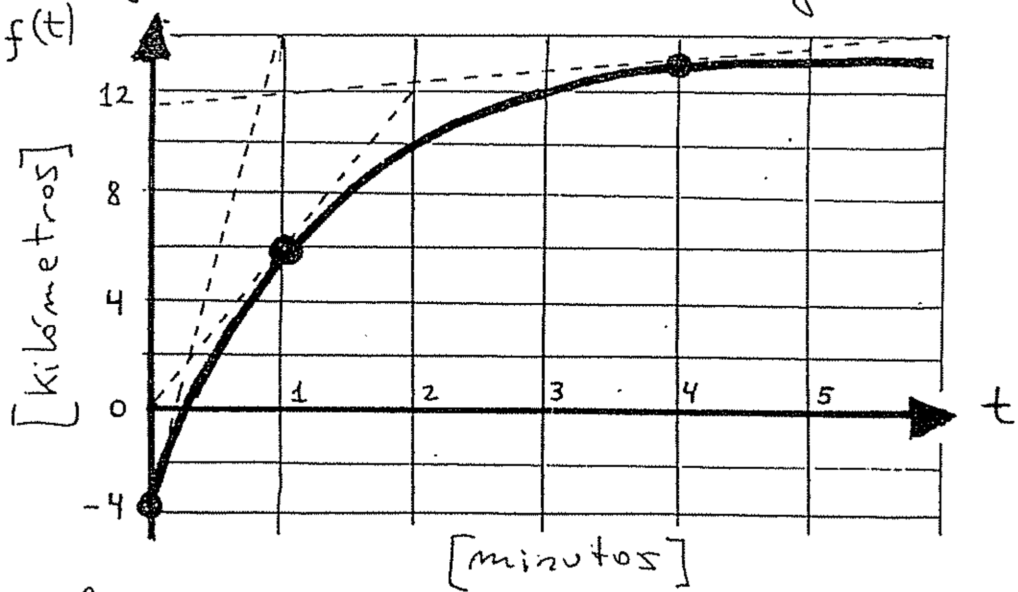
En este problema, nos estamos refiriendo concretamente a la velocidad de ascenso de la parte superior del hongo atómico.

(2) A medida que pasa el tiempo, vemos que la altura del hongo sigue creciendo, pero lo hace cada vez más lentamente, hasta el punto de que la altura permanece casi constante después de los primeros 4 minutos. Más allá de los 6 minutos, no podemos decir nada: la altura podría aumentar, mantenerse fija o disminuir, pero no lo sabemos....

Como la derivada $f'(t)$ representa la tangente de la gráfica de f, es fácil ver que esta velocidad instantánea disminuye con el tiempo, pues la tangente se hace cada vez más chica.



③ Como en $\underline{\underline{t=0}}$ no sabemos que valor toma la función, pues la gráfica no lo muestra, debemos estimar este valor haciendo algunas suposiciones. Lo más intuitivo parece prolongar la curva hacia abajo, más o menos a ojo:



En primer lugar, observamos que a tiempo cero, la altura es negativa. Podemos interpretar esto diciendo que la explosión se desarrolló bajo tierra, a unos 4 Km de profundidad.
En segundo lugar, si trazamos una tangente aproximada por la curva en: $\underline{\underline{t=0}}$, $\underline{\underline{f(t)=-4}}$, vemos que su valor es:

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} = \left[\frac{14-(-4)}{1-0}\right]\frac{Km}{minuto} = \boxed{\begin{array}{c}18\ Km/minuto\\ en: t=0\end{array}}$$

④ Trazamos, como antes, tangentes geométricas por los puntos $\underline{\underline{t=1}}$ y $\underline{\underline{t=4}}$ de la curva.

- $t=1$: $\left[\dfrac{12-0}{2-0}\right]\dfrac{Km}{minuto} = \boxed{6\ Km/minuto \text{ en } t=1}$

- $t=4$: $\left[\dfrac{14-12}{6-1}\right]\dfrac{Km}{minuto} = \boxed{0{,}33\ Km/minuto}$

Y con ésto vemos que la velocidad de expansión del hongo nuclear va disminuyendo con el tiempo, tal como habíamos supuesto.

---

113. Un insecto se encuentra en movimiento sobre el eje x. A los t segundos está en el punto $x = t^2 - 2t$, con las distancias medidas en metros.

113.1. ¿Cuál es la velocidad del insecto en el instante t? ¿Y en $t = \dfrac{1}{4}$?

113.2. ¿Cuál es la rapidez del insecto en $t = \dfrac{1}{4}$? ¿En este instante se desplaza hacia la derecha o hacia la izquierda? Justificar.

La ecuación de movimiento del insecto es:

$x = x(t) = t^2 - 2t$ (con t en segundos y x en metros)

① USANDO LAS REGLAS DE DERIVACIÓN USUALES:

$x'(t) = 2t - 2$ (velocidad del insecto)

① USANDO LA DEFINICIÓN DE DERIVADA:

$$x'(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta x}\right].$$

Hagamos primero el cociente incremental y luego apliquemos el límite para $\Delta t \to 0$:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\left[(t+\Delta t)^2 - 2(t+\Delta t)\right] - \left[t^2 - 2t\right]}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\cancel{t^2} + 2.t.\Delta t + \Delta t^2 \cancel{-2t} - 2.\Delta t \cancel{-t^2} \cancel{+2t}}{\Delta t} =$$

$$= 2t - 2 + \Delta t \, .$$ Entonces:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t - 2 + \Delta t) = \boxed{2t - 2 = x'(t)}$$

Obtuvimos lo mismo que antes, pero con mayor esfuerzo...

Ahora, si hacemos: $t = 1/4$, será $\boxed{x'(t=1/4) = -3/2}$

2 La rapidez es la velocidad absoluta, es decir, el módulo o valor absoluto de la magnitud velocidad. Por lo tanto, mientras la velocidad tiene un signo (que nos indica el sentido del movimiento), la rapidez es siempre positiva. Entonces la rapidez en $t = 1/4$ será: $+3/2$. El signo menos en la velocidad para $t = 1/4$ da un movimiento hacia los "equis negativos", es decir, hacia la izquierda.

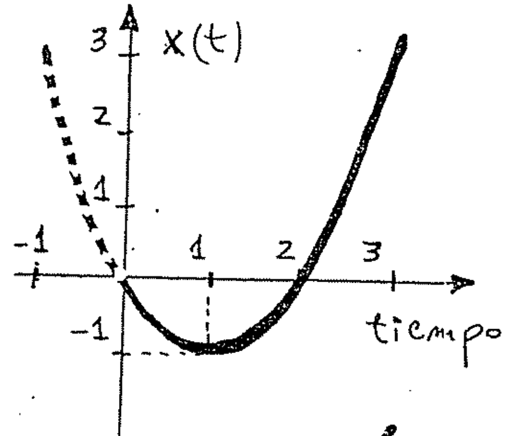
- Velocidad negativa significa moverse hacia distancias negativas, pues:

$$x'(t) < 0 \implies \frac{\Delta x}{\Delta t} < 0 \;;\; y \; \Delta t > 0 \implies \Delta x < 0 .$$

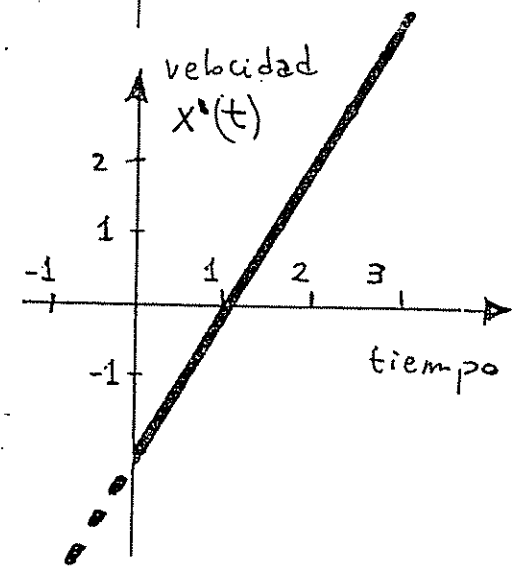
Y como $\Delta x = x(\text{final}) - x(\text{inicial}) < 0$, será:

$x(\text{final}) < x(\text{inicial})$, si $x'(t) < 0$

Gráficamente se puede ver que el insecto comienza estando en $x=0$ y luego viaja hacia equis negativas, hasta llegar a $x = -1$ en $t = 1$. En este punto se frena, pues la velocidad $x'(t)$ es cero en $t = 1$, y comienza a aumentar su velocidad pero para el lado de las equis positivas.



Podemos graficar también la velocidad en función del tiempo, para apreciar mejor el movimiento.



114. En el estudio de la filtración del agua de irrigación en el suelo, uno de los modelos matemáticos usados propone la relación $y=\sqrt{t}$ para la penetración del agua (y medido en metros y t en horas).

114.1. ¿Cuál es el significado de $y'(t)$?

114.2. ¿Cuál es la razón de penetración del agua en el suelo para valores grandes del tiempo?

1 La razón $\left[\Delta y / \Delta t\right]$ es una magnitud expresada en unidades de metros/hora, y por lo tanto es una velocidad.

Más precisamente, nos indica la profundidad de penetración por unidad de tiempo, es decir, la velocidad de penetración del agua. Este es, entonces, el significado de la derivada $y'(t)$.

(2) Para hallar la expresión explícita de la velocidad de penetración en función del tiempo debemos derivar $y(t)$: $\boxed{y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}}$

Y para valores grandes del tiempo, será:

$$\lim_{t \to \infty} y'(t) = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \right) = 0$$; o sea que

la velocidad de penetración del agua tiende a cero con el paso del tiempo.

115. Una masa sujeta de un resorte realiza el denominado movimiento armónico simple. Su ecuación horaria es $x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. Encuentre:

115.1. La posición inicial de la masa.

115.2. La velocidad y la aceleración en t =0,5 segundos.

115.3. Determine los instantes en que la velocidad y la aceleración toman sus valores extremos.

(1) $\boxed{x(t) = 3 \cdot \cos\left(\pi/2 \cdot t\right)}$ La posición inicial es la que tiene el móvil a $t=0$.

$\underbrace{x(t=0) = x(t)\Big|_{t=0}} = 3$ (pues $\cos(0) = 1$)

(Éstas son distintas notaciones para x evaluado en $t=0$)

(2) Según el apunte introductorio, las definiciones de velocidad y aceleración son:

$$\begin{cases} \text{Ecuación de movimiento} : x = x(t) \\ \underline{\underline{\text{Velocidad}}} : x'(t) \\ \underline{\underline{\text{Aceleración}}} : x''(t) \end{cases}$$

$$x'(t) = \left[3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)\right]' = 3 \cdot \left[-\operatorname{sen}(\pi/2\, t)\right] \cdot \pi/2 = \left(-\frac{3\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} t\right)$$

$$x''(t) = \left[\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\pi/2\, t\right)\right]' = \left(-\frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\pi/2\, t\right) \cdot \pi/2 = -3\,(\pi/2)^2 \cdot \cos(\pi/2\, t)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Velocidad}: v = x'(t) = v(t) = -\frac{3\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}(\pi/2 \cdot t) \\ \text{Aceleración}: a = x''(t) = a(t) = -3\,(\pi/2)^2 \cdot \cos(\pi/2 \cdot t) \end{array}}$$

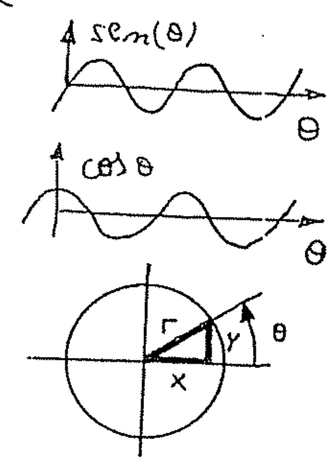
$v(t)\Big\vert_{t=1/2} = -\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$	$a(t)\Big\vert_{t=1/2} = -3\,(\pi/2)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) Los valores extremos para las funciones senoidales y cosenoidales son (-1) y $(+1)$.

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\theta) = +1 & \text{para } \theta = \pi/2 + 2K\pi \\ \operatorname{sen}(\theta) = -1 & \text{para } \theta = 3\pi/2 + 2K\pi \\ \cos(\theta) = +1 & \text{para } \theta = 2K\pi \\ \cos(\theta) = -1 & \text{para } \theta = \pi + 2K\pi \end{cases}$$

$K \in \mathbb{Z}$ $(K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$

Como hicimos el reemplazo de $\theta \equiv \pi/2\, t$, es: $t = \frac{2\theta}{\pi}$



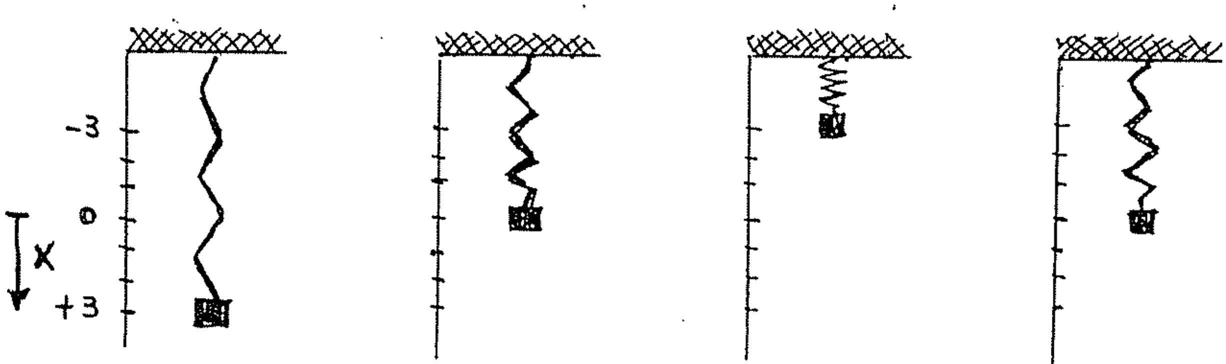
$\operatorname{sen}(\theta) = y/r$; $\cos(\theta) = x/r$

Entonces:

$$\boxed{\begin{array}{ll} v = -\frac{3\pi}{2} & \text{para}: t = 4K+1 \\ v = +\frac{3\pi}{2} & \text{para}: t = 4K+3 \\ a = -3(\pi/2)^2 & \text{para}: t = 4K+0 \\ a = +3(\pi/2)^2 & \text{para}: t = 4K+2 \end{array}}$$

$K = 0, 1, 2, 3, \ldots$ si consideramos que no hay tiempos negativos

Si analizamos las ecuaciones de la posición, la velocidad y la aceleración en: $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ veremos que en el instante inicial el resorte estará elongado al máximo, sin velocidad y con aceleración negativa. Luego, cuando $t = 1$, el resorte se hallará en $x = 0$, con velocidad máxima y aceleración nula. Continuamos con $t = 2$ y $t = 3$, después de lo cual el ciclo de valores de x, v, a se repite. Con este análisis podemos dibujar los cuatro instantes extremos del ciclo del "oscilador armónico":



(t = 0) (t = 1) (t = 2) (t = 3)

116. Una rueda gira θ radianes en t segundos, de acuerdo con $\theta(t) = 128t - 12t^2$

116.1. Halle la velocidad angular media y la aceleración angular media en los intervalos $t \in [0;1]$ y $t \in [3;3,1]$.

116.2. Halle su velocidad angular y su aceleración angular al cabo de 3 segundos.

① $\boxed{\theta(t) = 128.t - 12.t^2}$ desplazamiento angular

La velocidad angular está definida como el ángulo girado por unidad de tiempo. Al ángulo se lo suele medir en radianes ($180° \equiv \pi$ radianes).

Las definiciones pertinentes son:

velocidad angular media : $\bar{\omega} \equiv \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$	velocidad angular instantánea : $\omega \equiv \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$
aceleración angular media : $\bar{\gamma} \equiv \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$	aceleración angular instantánea : $\gamma \equiv \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

$$\bar{\omega}\left(t \in [0;1]\right) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{1-0} = 116 \ \frac{\text{radianes}}{\text{segundo}}$$

$$\bar{\gamma}\left(t \in [0;1]\right) = \frac{\omega(1) - \omega(0)}{1-0} = -24 \ \frac{\text{radianes}}{\text{segundo}^2}$$

$$\bar{\omega}\left(t \in [3;3,1]\right) = \frac{\theta(3,1) - \theta(3)}{3,1-3} = \quad \frac{\text{radianes}}{\text{segundo}}$$

$$\bar{\gamma}\left(t \in [3;3,1]\right) = \frac{\omega(3,1) - \omega(3)}{3,1-3} = \quad \frac{\text{radianes}}{\text{segundo}^2}$$

valores medios en un intervalo

Donde usamos: $\boxed{\omega(t) = \theta'(t) = 128 - 24.t}$ velocidad angular

en el cálculo de $\bar{\gamma}$.

② Para hallar $\omega'(t) = \theta''(t)$ derivamos la velocidad angular. Queda

$$\frac{\text{aceleración}}{\text{angular}} \quad \boxed{\gamma(t) = \omega'(t) = \theta''(t) = -24 \ \text{rad}/s^2}$$

Ahora evaluamos $\omega(t)$ y $\gamma(t)$ en $t=3$:

$$\underbrace{\omega(t=3) = 56 \ \frac{\text{radianes}}{\text{segundo}}} \qquad \underbrace{\gamma(t=3) = -24 \ \frac{\text{radianes}}{\text{segundo}^2}}$$

---

117. Las coordenadas (x,y) de un punto móvil, expresadas en metros, vienen dadas por $x(t) = \cos t - 1,\ \ y(t) = 2\,\mathrm{sen}\, t + 1$.

117.1. ¿Qué tipo de trayectoria describe?

117.2. Determine los vectores velocidad y aceleración.

117.3. Calcule la rapidez con que se mueve el móvil en $t = \frac{5\pi}{3}$

117.4. Si usted viajara en ese móvil, sabiendo que no se detiene, ¿cuáles serían los puntos más adecuados para tomar la decisión de arrojarse del mismo? ¿y los menos adecuados? Justifique ambas respuesta, aún cuando decida esperar a que el móvil se detenga para bajarse.

① $\left.\begin{array}{l} x = \cos t - 1 \\ y = 2 \cdot \mathrm{sen}\, t + 1 \end{array}\right\}$ ecuaciones paramétricas en (t)

Podemos tomar : $\mathrm{sen}\, t = \sqrt{1-\cos^2 t}$ (T. de pitágoras)

y hacer :

$y = 2 \cdot \sqrt{1-\cos^2 t} + 1 = 2 \cdot \sqrt{1-(x+1)^2} + 1 \Rightarrow$

$y = 2\sqrt{(-x).(x+2)}$. Luego evaluamos los posibles valores de (x) que hacen positivo el interior de la raíz, etc...

Pero es más fácil (y elegante) buscar $[\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t]$ para simplificar las cosas.

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos t - 1 \implies \cos t = x+1 \\ y = 2.\operatorname{sen} t + 1 \implies \operatorname{sen} t = 1/2\,(y-1) \end{array}\right\}$$

$$1 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = \left[\tfrac{1}{2}(y-1)\right]^2 + (x+1)^2$$

Pero veamos qué pinta tiene esta curva en el plano (x, y). Sabemos que la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2 \implies \left[\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1\right]$$

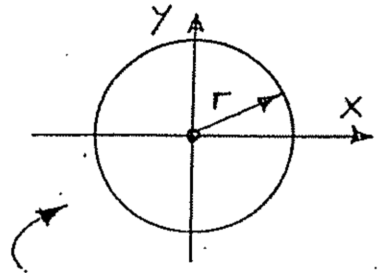
es la ecuación de una circunferencia de radio (r).

Si estiramos el círculo unitario en el eje (x) en un factor de (a),

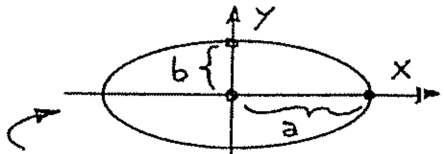
$$\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + y^2 = 1\right]$$

será la ecuación de una circunferencia de radio $(r = 1)$ estirada en (x) un factor de (a). Análogamente, expandiendo un círculo en (x) e (y):

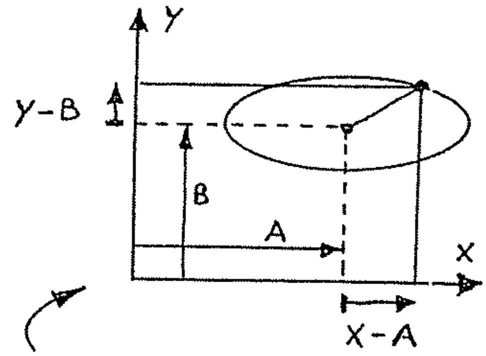
$$\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right] \longmapsto \text{elipse de semiejes } (a), (b)$$



CIRCUNSFERENCIA DE RADIO: r



CÍRCULO ACHATADO EN EL EJE (X) e (Y): UNA ELIPSE

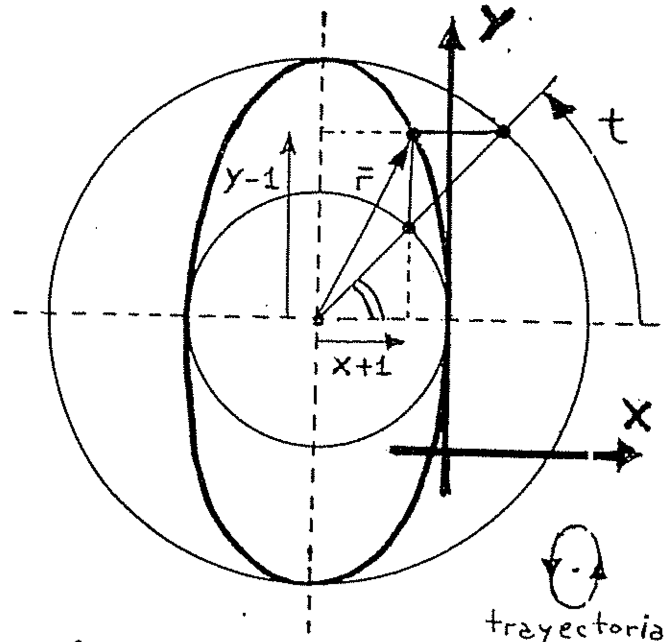


ELIPSE DESPLAZADA

Ahora, si desplazamos esta elipse fuera del origen, hasta el punto $(x, y) = (A, B)$ del plano, será

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underbrace{\left(\dfrac{x-A}{a}\right)}_{(\cos t)}{}^2 + \overbrace{\left(\dfrac{y-B}{b}\right)}^{(\operatorname{sen} t)}{}^2 = 1 & \text{ecuación de una elipse de semiejes: } a, b \\ (\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 = 1 & \text{desplazada a } (x,y) = (A,B) \end{array}}$$

Es decir que nuestra ecuación, podemos escribirla



$$\left[\frac{x-(-1)}{1}\right]^2 + \left[\frac{y-1}{2}\right]^2 = 1$$

la que representa una elipse centrada en $(x,y)=(-1,1)$ de semiejes $a=1$; $b=2$.

El parámetro (t) es un ángulo relacionado con la construcción de la elipse.

Las ecuaciones representan un móvil que se mueve a lo largo de la elipse en sentido antihorario.

② Velocidad:

Como vimos, el vector de posición es:

$$\vec{r} = (x,y) = (x(t), y(t)) = (\cos t - 1, 2 \operatorname{sen} t + 1) = \bar{r}(t)$$

El vector velocidad (en dos dimensiones: (x) e (y)) se define como:

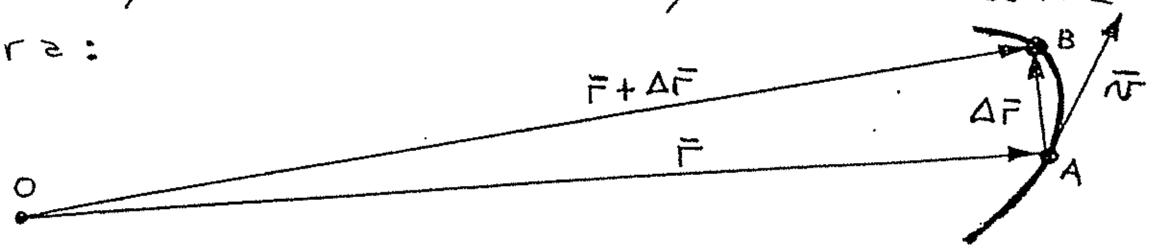
$$\boxed{\begin{aligned} \bar{v}(t) &= \bar{r}'(t) = \frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \Rightarrow \\ \bar{v}(t) &= \bar{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) \quad \text{Vector Velocidad} \end{aligned}}$$

donde expresamos todas las notaciones usuales para este vector derivado.

En virtud de esto, determinamos el vector velocidad del problema:

$$\underbrace{\bar{v}(t) = (x'(t), y'(t)) = (-\operatorname{sen} t, 2.\cos t)}$$

Notemos que el vector velocidad es siempre tangente a la trayectoria del móvil, como muestra la figura:



En efecto, cuando el vector $\overline{OB}$ se acerca al $\overline{OA}$, el límite de $\Delta\bar{r}/\Delta t$ será un vector tangente a la curva en el punto (A).

<u>Aceleración</u>:

Por definición, tenemos

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{a} = \bar{v}'(t) = \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \Rightarrow \\ \bar{a}(t) = \bar{v}'(t) = (x''(t), y''(t)) \quad \underline{\text{Vector Aceleración}} \end{array}}$$

con las notaciones usuales para la aceleración.

Derivando el vector velocidad:

$$\underbrace{\bar{a}(t) = (v_x'(t), v_y'(t)) = (-\cos t, -2.\operatorname{sen} t)}$$

<u>NOTA EXTRA</u>: Este movimiento elíptico es el mismo que ejecutan los planetas alrededor del Sol. En este caso, el Sol está ubicado cerca de uno de los focos de la elipse.

③ $\boxed{\begin{array}{l}\text{La } \underline{\text{rapidez}} \text{ de un móvil es, por definición:} \\ |\bar{v}| = v(t) = \left|\dfrac{d\bar{r}}{dt}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\end{array}}$

Así, calculamos la rapidez en este caso:

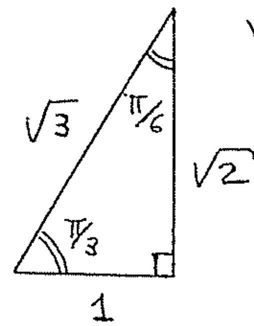
$$|\bar{v}| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (2 . \cos t)^2} = \underline{\sqrt{1 + 3 . \cos^2 t} = v(t)}$$

La rapidez oscila entre: 1 y 2, pero nunca se anula (pues $0 \leq \cos^2 t \leq 1$, $\forall t$). En particular:

$$v\left(t = 5\pi/3\right) = \sqrt{1 + 3 . \left(1/\sqrt{3}\right)^2} = \underline{\sqrt{2} = v\left(5\pi/3\right)}$$

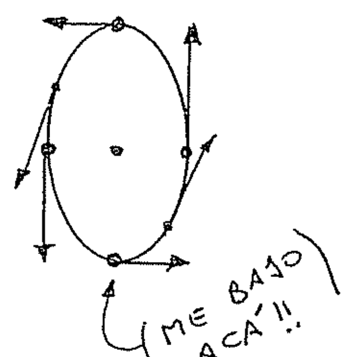
(Recordando que para un triángulo como el de la figura, las longitudes de los lados están en relación $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$

$\cos(5\pi/3) \equiv \cos(-\pi/3) \equiv \cos(\pi/3) = 1/\sqrt{3}$)



④ Como vimos recién, la rapidez nunca se anula, pero es mínima en: $\cos(t) = 0$, es decir, en $t = K(\pi/2)$, K: impar, o

$\underline{t = (2m+1)\,\pi/2}$, $m \in \mathbb{Z}$



Estos son los puntos inferior y superior de la elipse.

Los puntos extremos a izquierda y derecha son los de mayor rapidez, en $\underline{t = m . \pi}$, $m \in \mathbb{Z}$

113. Un móvil recorre la trayectoria de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x(\theta) = 25\cos\theta \\ y(\theta) = 25\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ siendo θ el ángulo que forma el vector posición con el eje x y que varía con el tiempo t según la ley $\theta = \frac{3}{5}t$.

118.1. Encuentre la ecuación de la trayectoria expresando y en términos de x.

118.2. Halle la velocidad angular del móvil.

118.3. Determine los vectores velocidad y aceleración.

118.4. Calcule la rapidez y el módulo del vector aceleración cuando el móvil está en el punto de coordenadas (20, 15).

118.5. Determine la ecuación de la recta tangente a la trayectoria en el punto (20, 15). ¿Cuál de los vectores que determinó en 118.3. tiene en este punto la dirección de este vector? Justificar.

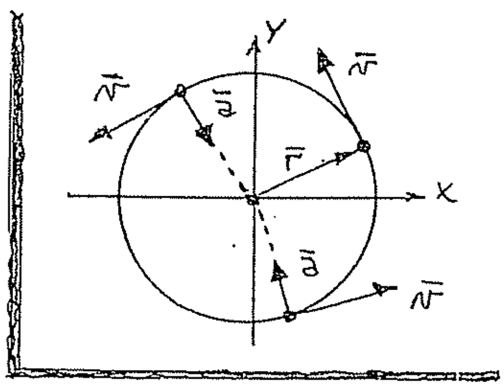
118.6. Repita el punto 118.5. para la recta normal.

Un poco rebuscado ¡buscar esta recta!

$$\left.\begin{array}{l} x(\theta) = 25.\cos\theta \rightarrow x(t) = 25.\cos(3/5\,t) \\ y(\theta) = 25.\,\mathrm{sen}\,\theta \rightarrow y(t) = 25.\,\mathrm{sen}(3/5\,t) \end{array}\right\} \quad \left[\theta(t) \equiv \tfrac{3}{5}t\right]$$

Como vimos en el ejercicio anterior, esto representa la ecuación de una circunferencia:

$$x^2 + y^2 = 25^2 \quad (\text{radio}: 25)$$



(1) $\underbrace{y = \sqrt{25^2 - x^2} = y(x)}$

(2) $\boxed{\begin{array}{l}\text{Velocidad Angular: Definición} \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \theta'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega(t)\end{array}}$

$\underbrace{\theta'(t) = 3/5}$ = Velocidad angular constante. ✓

(3)
$$\left\{\begin{array}{l} \bar{v}(t) \equiv (x'(t),\, y'(t)) = (-15.\,\mathrm{sen}(3/5\,t),\, 15.\cos(3/5\,t)) \\ \bar{a}(t) \equiv (x''(t),\, y''(t)) = (-9.\cos(3/5\,t),\, -9.\,\mathrm{sen}(3/5\,t)) \end{array}\right\}$$

NOTA:

Calculamos estos vectores por la regla de la cadena:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \underbrace{\left[\frac{d}{d\theta}(25.\cos\theta)\right]}_{[-25 \operatorname{sen}\theta]} \cdot \underbrace{\left[\frac{d}{dt}\left(\tfrac{3}{5}t\right)\right]}_{[3/5]} = -15.\operatorname{sen}\theta$$

etcétera para: $y'(t)$, $x''(t)$, $y''(t)$.

(4) • <u>Rapidez</u>: $v(t) \equiv |\bar{v}(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ (def.)

$$v(t) = \sqrt{(-15.\operatorname{sen}\theta)^2 + (15.\cos\theta)^2} = \underbrace{15 = v(t)}$$ ← para todo (t)

• <u>Módulo de la Aceleración</u>: $a(t) \equiv |\bar{a}(t)| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$$a(t) = \sqrt{(-9.\cos\theta)^2 + (-9.\operatorname{sen}\theta)^2} = \underbrace{9 = a(t)}$$ ← para todo (t)

En todo punto, velocidad y aceleración en módulo son constantes ↦ sólo cambia la orientación de los vectores

(5) Como vimos (en el ejercicio anterior):

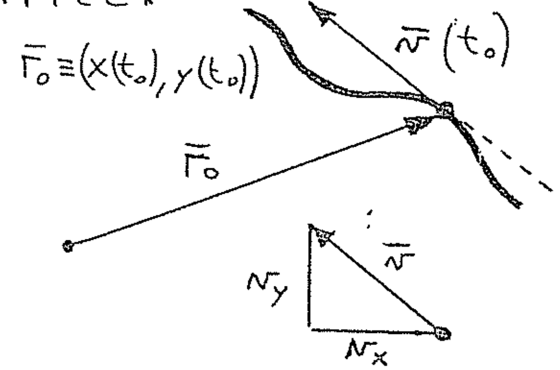
EL VECTOR VELOCIDAD ES SIEMPRE TANGENTE A LA TRAYECTORIA, EN TODO PUNTO

Por lo tanto, para determinar la recta tangente de cualquier curva paramétrica:

$$\begin{bmatrix}\text{PENDIENTE} \\ \text{RECTA} \\ \text{TANGENTE}\end{bmatrix} = \left.\frac{v_y}{v_x}\right|_{\bar{r}_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$(x, y) \in$ recta tangente

$(x_0, y_0) = \bar{r}_0 \in$ recta tangente



$\left.\dfrac{v_y}{v_x}\right|_{\bar{r}_0}$: es el cociente de velocidades evaluado en el punto : $\bar{r}_0 = (x_0, y_0) = \big(x(t_0), y(t_0)\big)$.

Queda :

$$\boxed{\begin{array}{l} y = y_0 + \left.\dfrac{v_y}{v_x}\right|_{\bar{r}_0} \cdot (x - x_0) \quad , \text{ o también:} \\ y(t) = y(t_0) + \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \cdot \big[x(t) - x(t_0)\big]. \end{array}}$$

ECUACIÓN DE LA TANGENTE EN (x_0, y_0)

Por lo tanto, en este ejercicio : $(x_0, y_0) = (20, 15)$

$$y = 15 + \left[\frac{15 . \cos(3/5 \cdot t_0)}{-15 . \operatorname{sen}(3/5 . t_0)}\right] \cdot (x - 20) = 15 - \frac{(x-20)}{tg(3/5\, t_0)}$$

Falta averiguar a qué (t_0) corresponde el $\bar{r}_0 = (20, 15)$

Usando las ecuaciones paramétricas de la curva, obtenemos quién es (t) dado (x) e (y) :

$$\left.\begin{array}{l} x = 25 . \cos\theta \\ y = 25 . \operatorname{sen}\theta \end{array}\right\} \Rightarrow tg\,\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = y/x \Rightarrow \underline{t = \tfrac{5}{3} . arctg(y/x)}$$

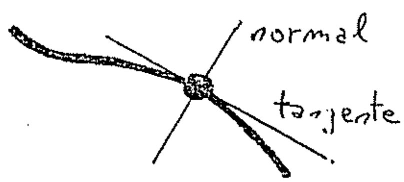
En nuestro caso $t_0 = 5/3 \cdot arctg\left(\frac{15}{20}\right) \Rightarrow tg(3/5\, t_0) = 15/20$

Con lo que la recta tangente por $(x_0, y_0) = (20, 15)$ es

$$y = 15 - \frac{x-20}{15/20} \Rightarrow \underline{y = \frac{125}{3} - \frac{4}{3} \cdot x} \left\{ \begin{array}{l}\text{RECTA} \\ \text{TANGENTE} \\ \text{EN } (20, 15)\end{array}\right.$$

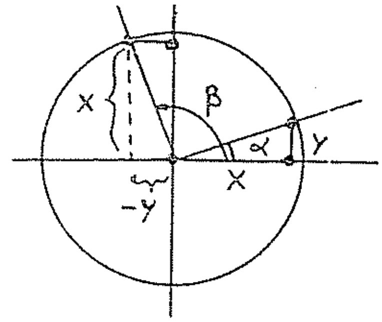
6 Busquemos la ecuación general de la <u>recta normal</u> a una curva parametrizada.

Por definición, la normal es la perpendicular a la tangente.



Pendiente de una recta dada: $tg\,\alpha$
Pendiente de su normal: $tg\,\beta$

$$tg\,\beta = \frac{x}{-y} = -\frac{1}{(y/x)} = -\frac{1}{tg\,\alpha}$$



Entonces, la pendiente de la normal será

$$-\frac{1}{v_y/v_x} = -\frac{v_x}{v_y} = -\frac{x'(t)}{y'(t)}$$, y la recta normal

$$\boxed{y = y_0 - \frac{v_x}{v_y}\Big|_{\bar{r}_0}\cdot(x - x_0)\ , \text{ o también} \quad y(t) = y(t_0) - \frac{x'(t_0)}{y'(t_0)}\cdot\left[x(t) - x(t_0)\right]}$$

ECUACIÓN DE LA NORMAL EN (x_0, y_0)

Igual que en el punto anterior:

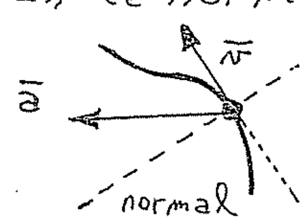
$$y = 15 + \underbrace{tg\left(\tfrac{3}{5}t_0\right)}_{15/20}\cdot(x-20) = \underline{\frac{3}{4}\cdot x = y}$$ RECTA NORMAL EN (20,15)

En este ejercicio donde la trayectoria es circular, la normal siempre es un rayo que pasa por el centro de la circunferencia, pues

$$\bar{a} = (-9)\cdot(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (-9)\cdot\left(\frac{x(t)}{25}, \frac{y(t)}{25}\right) = -\frac{9}{25}(x,y)$$

$$\underline{\bar{a} = (-9/25)\cdot\bar{r}} \longmapsto$$ El vector aceleración apunta al centro de la circunferencia y aquí coincide con la normal

NOTA: EL VECTOR ACELERACIÓN **NO** SIEMPRE ES NORMAL A LA TRAYECTORIA   CUIDADO!!



119. La compañía Aseievú fabrica sillas. Con sus máquinas actuales tiene una producción anual máxima de 500 unidades. Si fabrica x sillas, puede venderlas a un precio $p(x)=200-0{,}15x$ pesos cada una y tener un costo anual total de $c(x)=4000+6x-0{,}001x^2$ pesos. ¿Qué nivel de producción maximiza la ganancia total al año?

Según las definiciones calculemos la ganancia.

GANANCIA : $g(x) \equiv i(x) - c(x) = (\text{INGRESO}) - (\text{COSTO})$

INGRESO : $i(x) \equiv x \cdot p(x) = \begin{pmatrix}\text{Cantidad}\\ \text{de Unidades}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{precio}\\ \text{unitario}\end{pmatrix}$

COSTO : $c(x) \equiv c_0 + c^*(x) = (\text{COSTO FIJO}) + \begin{pmatrix}\text{COSTO}\\ \text{VARIABLE}\end{pmatrix}$

—— o ——

$$g(x) = x \cdot p(x) - c(x) = x \cdot \left(200 - \frac{150}{1000} \cdot x\right) - \left(4000 + 6x - \frac{x^2}{1000}\right)$$

$$g(x) = 194 \cdot x - \frac{149}{1000} \cdot x^2 - 4000$$: FUNCIÓN GANANCIA

Tenemos que hallar cómo varía la ganancia, en función de las unidades fabricadas:

Variación de ganancia por unidad (media) $= \dfrac{\Delta g}{\Delta x} \rightarrow g'(x)$

Buscamos $g'(x)$ (que se llama GANANCIA MARGINAL) derivando:

$$\boxed{g'(x) = 194 - \frac{298}{1000}\, x}$$

El máximo o mínimo de esta función estará en: $g'(x_1) = 0$:

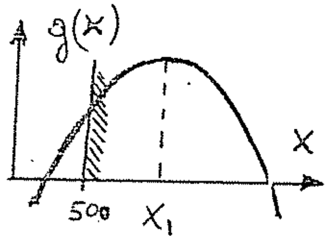
$$0 = 194 - \frac{298}{1000} x_1 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{97000}{149}}$$ Mínimo o máximo

$$\boxed{x_1 \approx 651}$$

Como es $g(x)$ una función cuadrática en (x), su gráfica es una parábola hacia abajo o hacia arriba.

La parábola de la ganancia apunta hacia abajo, pues el término cuadrático que domina para $|x|$ grandes es negativo.

Por lo tanto $x = x_1$ es el máximo de la ganancia, donde la tangente a la curva es horizontal.



Ahora bien, la producción no puede ser mayor que $x = 500$, y por ello éste será el valor de máxima ganancia

120. De acuerdo con el resultado obtenido en el problema anterior, el gerente de Aseievú decide incorporar una nueva máquina, con la que la producción anual se eleva a 750 sillas. Sin embargo, su función costo varía y toma la forma

$$C(x) = \begin{cases} 4000 + 6x - (0{,}001)x^2 & \text{si } 0 \le x \le 500 \\ 6000 + 6x - (0{,}003)x^2 & \text{si } 500 < x \le 750 \end{cases}$$

¿Qué nivel de producción maximiza la ganancia total en estas circunstancias?

Tenemos dos curvas de ganancia. Llamémoslas $g_1(x)$ para $0 \le x \le 500$, y $g_2(x)$ para $500 < x \le 750$.

Hallamos, como en el ejercicio anterior, $g_2(x)$ y $g_2'(x)$

$$g_2(x) = x \cdot p_2(x) - C_2(x) = x\left(200 - \frac{150}{1000}x\right) - \left(6000 + 6x - \frac{x^2}{3000}\right)$$

$$g_2(x) = 194 \cdot x - \frac{449}{3000} \cdot x^2 - 6000 \quad ; \quad 500 < x \le 750$$

$$\boxed{g_2'(x) = 194 - \frac{898}{3000}x}$$

Si llamamos (x_2) al mínimo de $g_2(x)$, debe cumplir que $g_2'(x_2) = 0$.

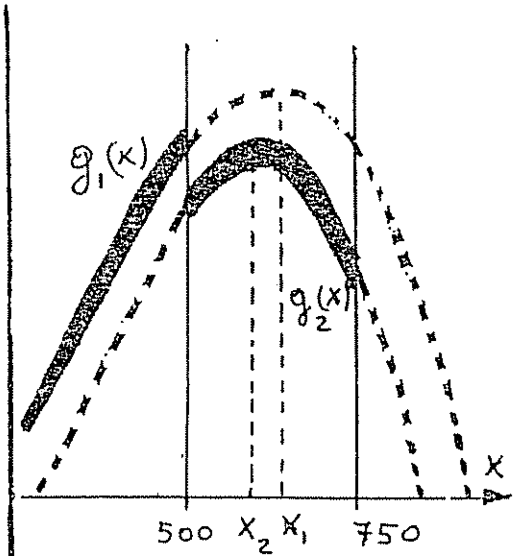
Así, $0 = g_2'(x_2) = 194 - \frac{898}{3000}x_2 \Rightarrow \boxed{x_2 \approx 648}$ MÁXIMO DE $g_2(x)$

Tenemos dos parábolas

$g_1(x)$ en $0 \leq x \leq 500$; $x_1 \approx 651$

$g_2(x)$ en $500 < x \leq 750$; $x_2 \approx 648$

con sus respectivos máximos.



PARÁBOLAS DE LAS GANANCIAS $g_1(x)$ y $g_2(x)$ CON SUS MÁXIMOS

- $g_1(0) = -4000$
  $g_2(0) = -6000$
  $\left\{ \right.$ g_2 está debajo de g_1 en el eje (y)

- $g_1(500) = 55750$
  $g_2(500) = 53583$
  $\left\{ \right.$ g_2 está debajo de g_1 en $x = 500$

- $g_1(x_1) = 59148$
  $g_2(x_2) = 56866$
  $\left\{ \right.$ El máximo de $g_1(x)$ es mayor que el máximo de $g_2(x)$

Como el máximo (x_2) de $g_2(x)$ está entre 500 y 750, y es mayor aún que el valor máximo de $g_1(x)$ (que es $g_1(x=500) = 55750$), entonces fabricar $x = x_2 = 648$ sillas da la máxima ganancia anual de $g_2(x_2) = 56866$ pesos.

---

121. Un fabricante tiene n obreros que producen x unidades a la semana, y se venden a un precio $p(x)$. El ingreso total semanal $I(x)=x.p(x)$ puede ponerse en función del número n de obreros, al considerar que x depende de n.

121.1. Demuestre que el ingreso marginal, tomando a n como variable, viene dado por

$$\frac{dI}{dn} = \frac{dx}{dn}\left(p + x.\frac{dp}{dx}\right)$$

121.2. Si se determinó que n obreros pueden producir $x=\frac{5n^2}{\sqrt{n^2+13}}$ unidades a la semana, que luego venderá al precio $p=10x-0{,}1x^2$ pesos, determine el ingreso marginal cuando n=6

(1) Para resolver este ejercicio, tenemos que usar dos propiedades de la derivación:

$\boxed{1}$ $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x) \Rightarrow \frac{df}{dx}=\frac{df_1}{dx}\cdot f_2+f_1\cdot\frac{df_2}{dx}$

(DERIVADA DEL PRODUCTO DE FUNCIONES)

$\boxed{2}$ $\left.\begin{array}{l} z=z(y) \\ y=y(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$

(DERIVADA DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES o REGLA DE LA CADENA)

Tenemos: $I(x)=x\cdot p(x)$ y $x=x(n)$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dI}{dn} \underset{\boxed{1}}{=} \frac{dx}{dn}\cdot p(x)+x\cdot\frac{dp}{dn} \\ \frac{dp}{dn} \underset{\boxed{2}}{=} \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{dn} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dI}{dn}=\frac{dx}{dn}\cdot\left[p(x)+x\cdot\frac{dp}{dx}\right]}$$

(2) Utilizando el resultado anterior y sabiendo que:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{5.n^2}{\sqrt{n^2+13}}=5n^2\cdot(n^2+13)^{-1/2} \\ p=10.x-x^2/10 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dm} = 5 \cdot 2m \cdot (\quad)^{-1/2} + 5m^2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)(\quad)^{-3/2} \cdot 2m =$$

$$= 10 \cdot m \left[\frac{2 \cdot (\quad)}{2(\quad)^{3/2}} - \frac{m^2}{2(\quad)^{3/2}} \right] = 10 \cdot m \left[\frac{2(m^2+13) - m^2}{2(m^2+13)^{3/2}} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dm} = \dfrac{5m(m^2+26)}{(m^2+13)^{3/2}} \\[2ex] \dfrac{dp}{dx} = 10 - x/5 \end{array} \right\}$$

$(\quad) \equiv (m^2+13)$

Usamos ahora la ecuación demostrada en el punto anterior (1)

$$\frac{dI}{dm} = \underbrace{\frac{5m(m^2+26)}{(m^2+13)^{3/2}}}_{\xrightarrow{m=6} \left[\frac{1860}{7^3}\right]} \cdot \underbrace{\left[\left(10x - \frac{x^2}{10}\right) + x \cdot \left(10 - \frac{x}{5}\right) \right]}_{\underbrace{20x - \frac{3x^2}{10}}_{\to \left[-\frac{180}{7}\right]}}$$

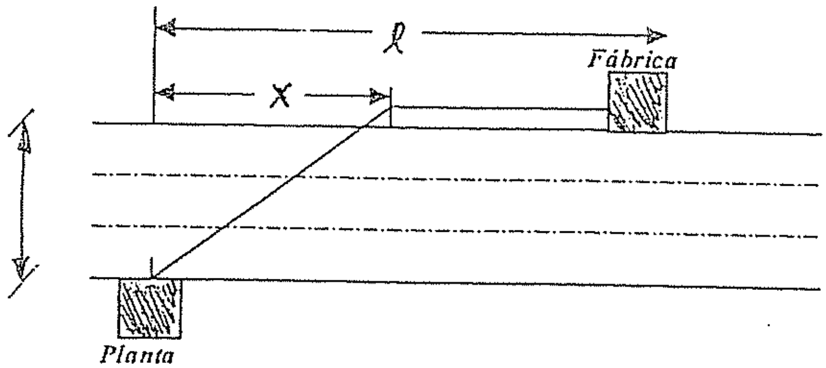
$x(6) = 180/7$
$m=6$

$$\left.\frac{dI}{dm}\right|_{m=6} = -\frac{334800}{7^4} \approx -139{,}44$$

122. En la ribera de un río de 1 Km. de ancho hay una planta eléctrica; en la otra ribera, a l Km. corriente arriba hay una fábrica. Tender cables por tierra cuesta \$3 por metro y hacerlo bajo el agua cuesta \$5 por metro. ¿Cuál es la forma más económica de tender un cable desde la planta a la fábrica?

122.1. Sin usar los elementos del cálculo diferencial, estime cuál sería el mejor tendido si l es muy grande, ¿y si fuera muy pequeño?

122.2. Ahora resuelva el problema para cualquier l (tenga en cuenta que minimizar la longitud del cable no es lo mismo que minimizar el costo del tendido del cable).



Supongamos que el ancho del río es (a) y que el precio del tendido terrestre es (T) y el del tendido acuático es (A) pesos. Entonces el gasto (g) será función de: ℓ, x, a, T, A.

$$\boxed{g = \underbrace{\sqrt{a^2 + x^2}}_{\text{tendido por agua}} \cdot A + \underbrace{(\ell - x)}_{\text{tendido por tierra}} \cdot T}$$

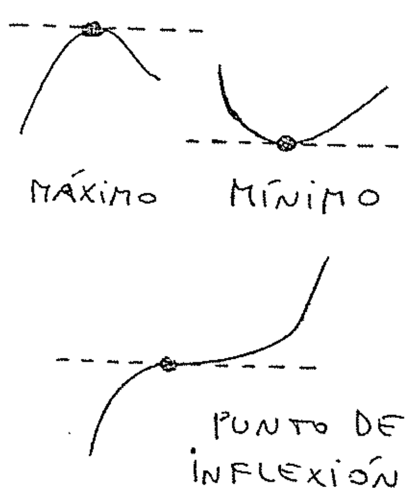
$A, T = \text{ctes}; \; x < \ell$

$a, \ell = \text{ctes}$

$\downarrow$

$g = g(x)$

Busquemos ahora los máximos o mínimos o puntos de inflexión de esta curva, haciendo: $g'(x) \equiv 0$



[Todos son puntos de derivada o pendiente nula]

Primero hallamos $g'(x)$:

$$g'(x) = A \cdot \frac{1}{2}\left(a^2 + x^2\right)^{-1/2} \cdot 2x - T$$

$$\boxed{\frac{dg}{dx} = \frac{A . x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - T}$$

Busquemos ahora el (x_0) que satisface $g'(x_0)=0$

$$0 = g'(x_0) = \frac{A\cdot x_0}{\sqrt{a^2+x_0^2}} - T \Rightarrow A\cdot x_0 = T\cdot\sqrt{a^2+x_0^2}$$

$\left(\begin{array}{l}\text{elevo al}\\ \text{cuadrado}\end{array}\right) \Rightarrow A^2\cdot x_0^2 = T^2\cdot(a^2+x_0^2) \Rightarrow \boxed{x_0 = \dfrac{T\cdot a}{\sqrt{A^2-T^2}}}$

En este último paso hemos sacado raíz cuadrada y se podría pensar que (x_0) puede ser negativo (ya que $\sqrt{w^2} = \pm w$, pues $(-w)^2 = w^2$), pero un (x_0) negativo da $g'(x_0)$ negativo, y no nulo, como buscábamos.

¿Pero cómo sabemos si (x_0) es mínimo, máximo o punto de inflexión?

Bueno, hallemos el gasto para $x=0$ y para $x=\ell$ y comparémoslo con el gasto en $x=x_0$.

- $g(x=0) = aA + \ell T$
- $g(x=x_0) = \sqrt{a^2+x_0^2}\cdot A + (\ell - x_0)T =$

$$= \sqrt{a^2 + \frac{T^2a^2}{A^2-T^2}}\cdot A + \left(\ell - \frac{Ta}{\sqrt{A^2-T^2}}\right)T =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2A^2}{A^2-T^2}}\cdot A + \ell T - \frac{aT^2}{\sqrt{A^2-T^2}} = \frac{a(A^2-T^2)}{\sqrt{A^2-T^2}} + \ell T =$$

$$= a\sqrt{A^2-T^2} + \ell T = g(x_0)$$

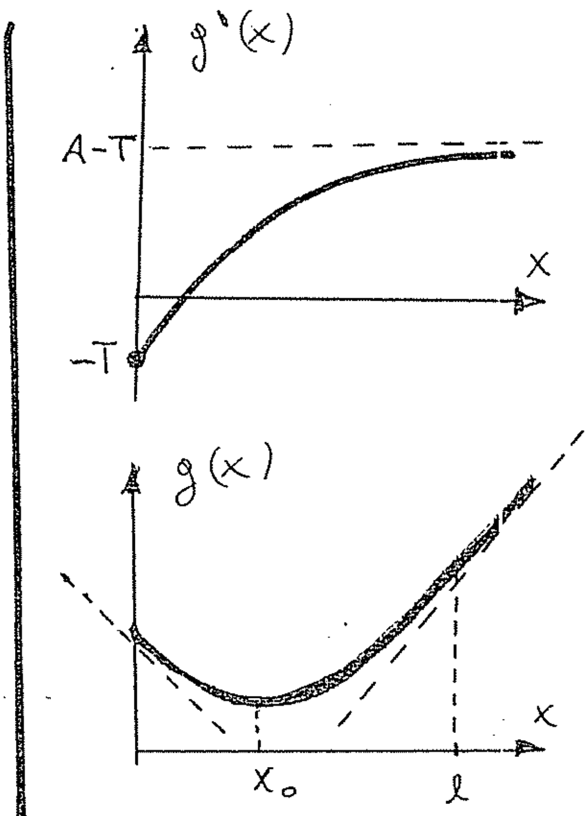
- $g(x=\ell) = \sqrt{a^2+\ell^2}\cdot A$

- Una forma intuitiva o rápida (que puede fallar a veces, y por eso hay que recurrir siempre a la forma analítica finalmente) para saber si (x_0) es mínimo o no, es estudiar $g'(x)$ y $g(x)$ en algunos puntos, o tendiendo a cero e infinito.

Vemos que: $g'(0) = -T$

y: $\lim_{x\to\infty} g'(x) = A-T > 0$

es decir que $g'(x)$ tiende asintóticamente a una constante positiva en el infinito. Por lo tanto, $g(x)$ tendrá pendiente positiva constante en $x \to \infty$. Además, en $x=0$ la pendiente de $g(x)$ es negativa. Finalmente, ya sabríamos que: $g(0), g(x_0), g(\ell) > 0$



- La forma analítica sería demostrar que

$g(0) > g(x_0)$	$g(x_0) < g(\ell)$

En efecto, como $\sqrt{A^2-T^2} < \sqrt{A^2} = A$, será

$$2\sqrt{A^2-T^2} + \ell T < 2A + \ell T \Rightarrow g(x_0) < g(0)$$

Por otra parte, $g(x_0)<g(\ell)$ implica que

$a\sqrt{A^2-T^2}+\ell T<\sqrt{a^2+\ell^2}\cdot A$. Para sacar estas horribles raíces, elevamos al cuadrado a cada lado (es todo positivo, pues $A>T$). Queda

$$a^2(A^2-T^2)+\ell^2T^2+2aT\ell\sqrt{A^2-T^2}<(a^2+\ell^2)A^2 \Rightarrow$$

$$2aT\ell\sqrt{A^2-T^2}<a^2T^2+\ell^2(A^2-T^2)$$

Llamemos a la cantidad positiva $A^2-T^2\equiv B^2$

$$0<(B\ell)^2+(aT)^2-2(B\ell)(AT)=(B\ell-aT)^2$$

Pero esta desigualdad es siempre cierta, salvo para $B\ell=aT \Rightarrow \ell=\frac{aT}{B}=\frac{a.T}{\sqrt{A^2-T^2}}\equiv x_0$.

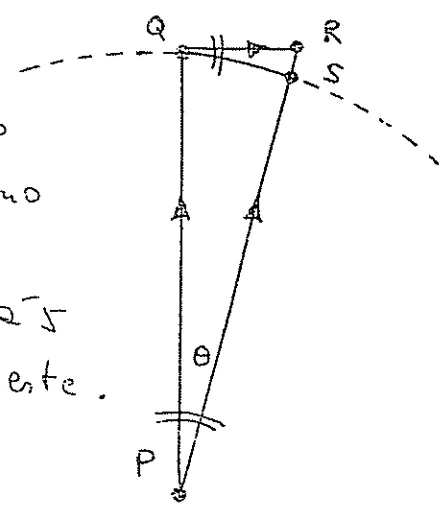
Es decir que: $\ell\neq x_0 \Rightarrow g(x_0)<g(\ell)$

Volviendo todo el razonamiento anterior hacia atrás. Demostramos que (x_0) es MÍNIMO.

---

1 • Analicemos qué pasa si (ℓ) es chico:

$\underline{\ell<<a}$ $\left(\ell\equiv\overline{QR},\ a\equiv\overline{PQ}\right)$



Si hago el camino [PQR], en el tramo $\overline{PQ}$ gasto lo mismo que en el tramo $\overline{PS}$. Es decir que si voy por [PQR] puede ser que gaste más que si voy por [PSR] directamente.

Entonces, hacer el camino directo, en diagonal y por el agua, será más económico si:

$$\begin{bmatrix}\text{GASTO POR} \\ \overline{QR}\end{bmatrix} > \begin{bmatrix}\text{GASTO POR} \\ \overline{SR}\end{bmatrix} \Rightarrow \overline{QR}\cdot T > \overline{RS}\cdot A \Rightarrow$$

$$l\cdot T > \frac{\overline{QR}^2}{\overline{PR}}\cdot A \qquad \left\{ \text{Dado que } \frac{\overline{RS}}{\overline{QR}} \approx \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \operatorname{sen}\theta \text{ cuando el ángulo } \theta \ll 1 \text{ o } l \ll a . \right\}$$

$$\Downarrow$$

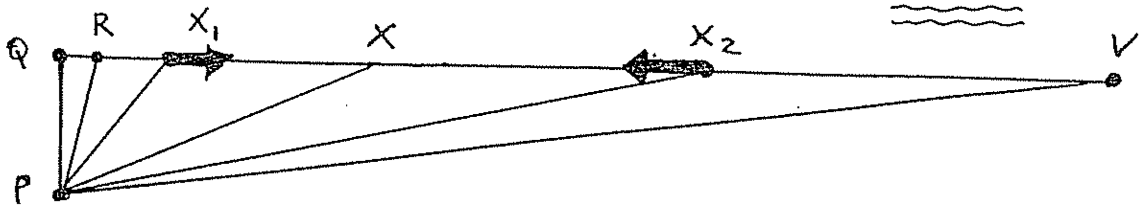
$$l\cdot T > \frac{l^2\cdot A}{\sqrt{a^2+l^2}} \Rightarrow T^2(a^2+l^2) > l^2A^2 \Rightarrow$$

$$(aT)^2 > l^2(A^2-T^2) \Rightarrow l < \frac{a\cdot T}{\sqrt{A^2-T^2}} \equiv X_0$$

Es decir:

$$\boxed{\text{EL CAMINO DIRECTO POR EL AGUA, EN DIAGONAL SERÁ EL MÁS ECONÓMICO CUANDO } l < X_0}$$

- Analicemos ahora el caso de $l \gg a$:



Evidentemente, el cableado [PV] en diagonal es de longitud similar al tramo por tierra [QV], y por lo tanto habrá más gasto si se utiliza esa diagonal. Analíticamente:

$$\begin{bmatrix}\text{GASTO POR} \\ [PQV]\end{bmatrix} < \begin{bmatrix}\text{GASTO POR} \\ [PV]\end{bmatrix} \Leftrightarrow \left(\overline{PQ}\cdot A + \overline{QV}\cdot T < \overline{PV}\cdot A\right) \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\overline{QV}}{\overline{PV}-\overline{PQ}} < \frac{A}{T} \Longleftrightarrow \underbrace{\frac{1}{\overline{PV}/\overline{QV} - \overline{PQ}/\overline{QV}}}_{} < \frac{A}{T}$$

FIJO

Y cuando $\overline{QV} \mapsto \infty$: este miembro se aproxima tanto como uno quiera a la unidad, con lo cual vale la desigualdad para $\overline{QV} \mapsto \infty$ y vale, por tanto, afirmar que NO CONVIENE CABLEAR EN DIAGONAL si $l \gg a$

- Entonces, cuando $l \gg a$, debe haber una diagonal $\overline{PX}$ que abarate el gasto, pues

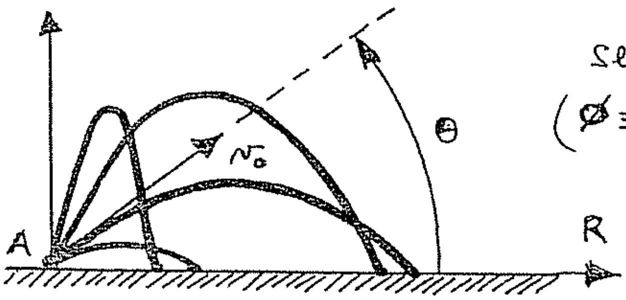
$\overline{PX}_1$ es más conveniente que $\overline{PQ}$
$\overline{PX}_2$ es más conveniente que $\overline{PV}$
$\Rightarrow$ $\overline{PX}$: valor mínimo de gasto

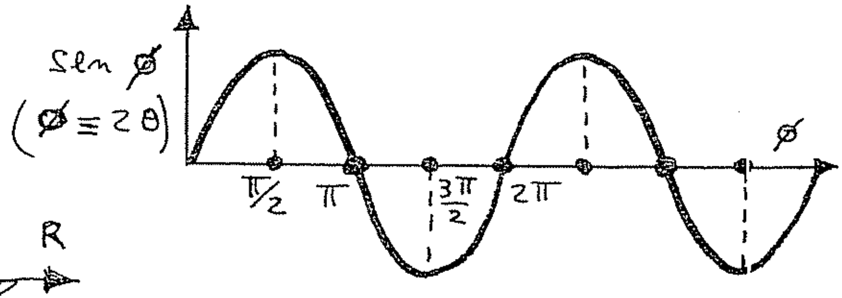
(2) Este punto ya se resolvió al estudiar el punto (1) y el problema inicial del valor mínimo x_0.

CON LOS DATOS DEL PROBLEMA : $a = 1$, $A = 5$, $T = 3$

$$\boxed{\begin{array}{l} l \geq x_0 = 3/4 \text{ Km} \Rightarrow x_{\text{MÍNIMO}} = 3/4 \text{ Km} \\ l < x_0 = 3/4 \text{ Km} \Rightarrow x_{\text{MÍNIMO}} = l \text{ Km} \end{array}}$$

123. Se desea arrojar una pelota con un puntapié lo más lejos posible. Si el tiro lo patea Diego, ¿Qué valor le sugeriría dar al ángulo de inclinación con que tiene que salir la pelota para lograr el objetivo propuesto? La expresión del alcance horizontal R en el tiro oblicuo (despreciando la resistencia del aire)es: $R = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$ donde θ es el ángulo de elevación v_0 la velocidad inicial y g la aceleración de la gravedad





TIRO OBLICUO DESDE (A)

Alcance : $R = \frac{v_0 \cdot \text{sen}(2\theta)}{g}$ $[v_0, g = \text{ctes}]$

- Si conocemos la pista de la función senoidal, vemos que el máximo lo toma en:

$$2\theta_0 \equiv \phi_0 = (4K+1)\,\pi/2 \,, \text{ con } K \in \mathbb{Z}.$$

Entonces $\phi_0 = 2\theta_0 = \pi/2 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = \pi/4 = 45^\circ \text{ MÁXIMO ALCANCE}}$

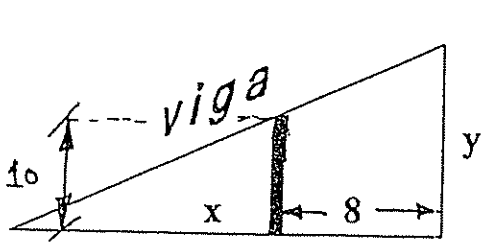
- Si no conocemos la forma funcional del seno (del seno matemático, claro) para hallar el máximo habrá que derivar e igualar la derivada a cero:

$$R = R(\theta) \longrightarrow R'(\theta) = \frac{dR}{d\theta} = \frac{2 v_0}{g} \cos(2\theta)$$

$$R'(\theta_0) = 0 \Rightarrow \cos(2\theta_0) = 0 \Rightarrow 2\theta_0 \equiv \pi/2 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = \pi/4}$$

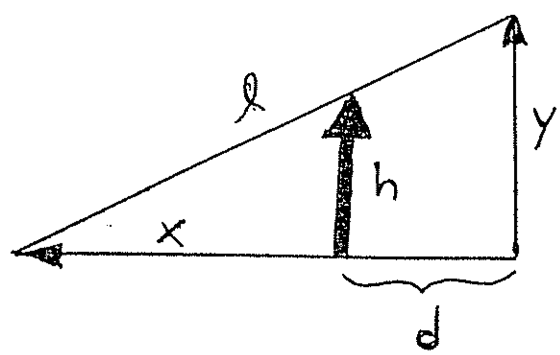
124. Un edificio debe apuntalarse con una viga que ha de pasar sobre un muro paralelo de 10 m. de altura ubicado a 8 m del edificio.

Hallar la menor longitud posible de esta viga.



Buscamos la longitud

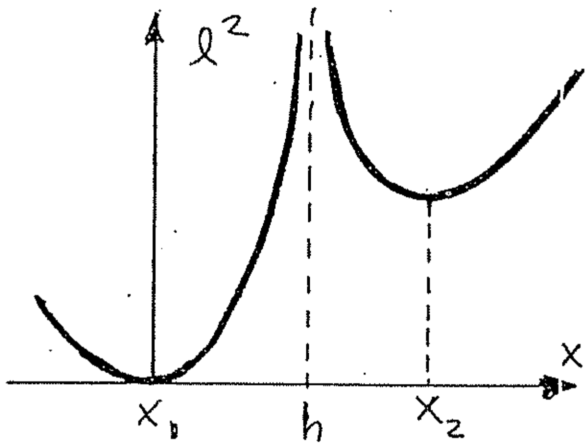
$$\ell^2 = x^2 + y^2$$



Pero la viga debe cumplir la condición:

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{x-d}$$

(Aquí generalizamos el problema utilizando $\underline{\underline{h}}$ y $\underline{\underline{d}}$)



A partir de aquí, tenemos que calcular ~~la~~ la longitud mínima posible

Hacemos:

$$\boxed{\ell^2 = x^2 + \left(\frac{hx}{x-d}\right)^2} \qquad [h, d = \text{ctes.}]$$

Buscar un mínimo en (ℓ) es lo mismo que buscarlo en (ℓ^2), así que derivamos (ℓ^2) respecto de (x) para encontrar el (x) que minimiza tal cantidad (siempre positiva):

$$\frac{d(\ell^2)}{dx} = 2x + 2\left(\frac{h \cdot x}{x-d}\right)\left(\frac{hx}{x-d}\right)'$$

derivada de lo de adentro respecto de (x)

$$\left(\frac{hx}{x-d}\right)' = \left[hx \cdot (x-d)^{-1}\right]' = h\left[(x-d)^{-1} + x(-1)(x-d)^{-2}\right] =$$

$$= h\left[\frac{(x-d)-x}{(x-d)^2}\right] = -\frac{hd}{(x-d)^2}$$

. Entonces

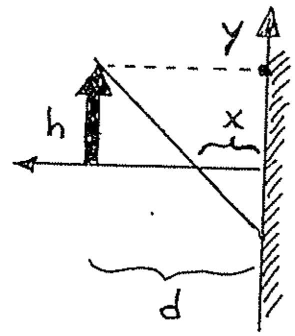
$$\frac{d(\ell^2)}{dx} = 2x - \frac{2x\,h}{(x-d)} \cdot \frac{h\,d}{(x-d)^2}$$

$$\boxed{\frac{d(\ell^2)}{dx} = 2x \cdot \left[1 - \frac{d h^2}{(x-d)^3}\right]}$$ derivada de la longitud al cuadrado respecto de x

Ahora buscamos puntos de derivada nula candidatos a mínimos, haciendo

$$0 \equiv \frac{d(\ell^2)}{dx} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \left[1 - \frac{dh^2}{(x_2-d)^3}\right] = 0 \end{cases}$$

- $x_1 = 0$ NO TIENE SENTIDO, pues para apuntalar debe ser $x > d$. Una "viga" con $0 < x < d$, sería como la de la figura (¿?) →



- $\left[1 - \frac{dh^2}{(x_2-d)^3}\right] = 0 \Rightarrow (x_2-d)^3 = dh^2$

$$x_2 = d + \sqrt[3]{dh^2}$$ — Con los datos del problema, $d \equiv 8$; $h \equiv 10$

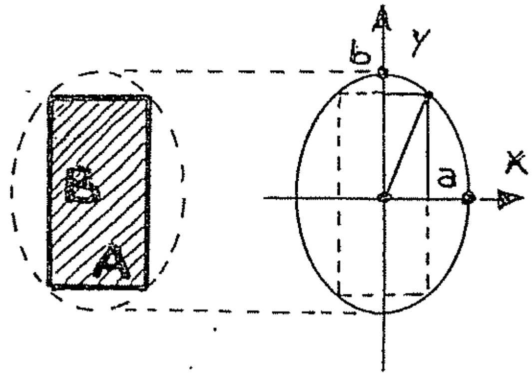
$$x_2 = 8 + \sqrt[3]{8 \cdot 10^2} = 8 + 2 \cdot \sqrt[3]{100} \approx 17{,}3 \text{ (metros)}$$

Reemplazando en $\ell = \sqrt{x^2 + \left(\frac{hx}{x-d}\right)^2}$, es

$\boxed{\ell \approx 25{,}4}$ LONGITUD MÍNIMA DE LA VIGA

NOTA: También podríamos haber puesto $\ell = \ell(y)$ o en función de un ángulo θ.

125. Si la resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de su base por el cuadrado de su altura, encuentre las dimensiones de la viga más fuerte que se pueda cortar de un tronco cuya sección transversal tiene la forma de la elipse $9x^2+8y^2=72$



Para un rectángulo de lados A y B (altura y base) inscripto en una elipse, tenemos:

$$\underline{\underline{A = 2x}} \quad , \quad \underline{\underline{B = 2y}}$$

Siendo (x,y) un punto cualquiera de la elipse:

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}$$, con (a) y (b) semiejes de la elipse.

- La resistencia de la viga viene dada por

$$R = \text{base} \cdot (\text{altura})^2 = B \cdot A^2$$

$$R = 2y \cdot (2x)^2 = 8y \cdot x^2 = 8y \cdot a^2\left[1 - \left(y/b\right)^2\right]$$

$$\boxed{R = 8a^2\left[y - \left(\frac{1}{b^2}\right) \cdot y^3\right] = R(y)}$$ = RESISTENCIA EN FUNCIÓN DE (y)

Buscamos los puntos mínimos, máximos e de inflexión de $R = R(y)$ haciendo nula la derivada $R'(y) = dR/dy$.

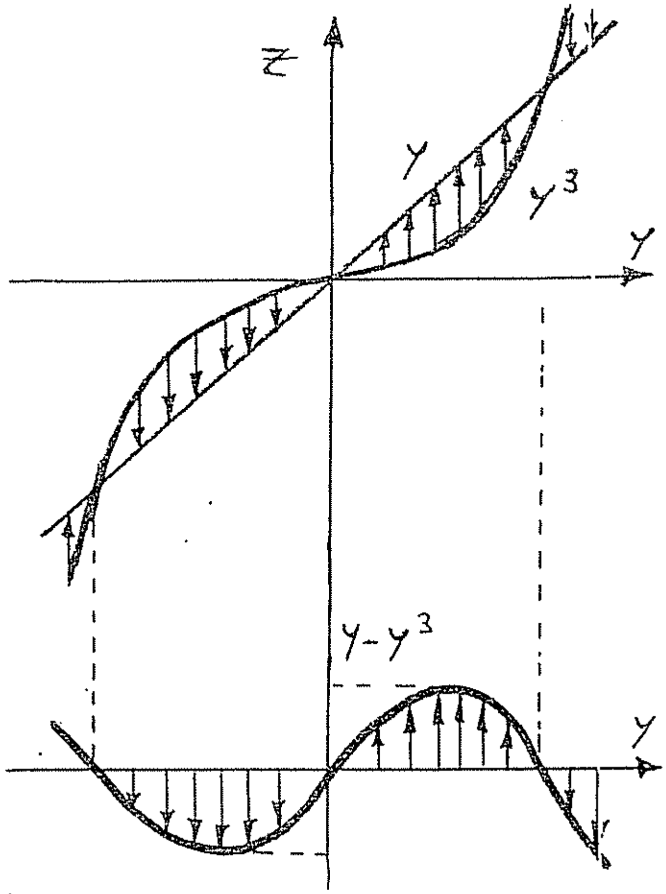
$$\boxed{R'(y) = 8a^2\left[1 - \left(\frac{3}{b^2}\right) \cdot y^2\right]}$$ DERIVADA DE LA RESISTENCIA DE LA VIGA

Antes de anular la derivada, veamos qué pinta tiene $R(y)$

Podemos graficar

$y - y^3 = z(y)$

que es aproximadamente como graficar $R(y)$, y es la distancia que hay desde la curva $z = y^3$ hasta la $z = y$



Observamos que para (y) positivos hay un máximo:

Lo buscamos, haciendo: $R'(y_0) = 0$

$\Rightarrow \left[1 - \left(\frac{3}{b^2}\right) \cdot y_0^2\right] = 0 \Rightarrow \boxed{y_0 = \frac{b}{\sqrt{3}}}$

Reemplazando en $\left[\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = 1\right] \Rightarrow \left(\frac{x_0}{a}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{3}}}$. Y según los datos del problema:

ECUACIÓN ELIPSE : $b^2 \cdot x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

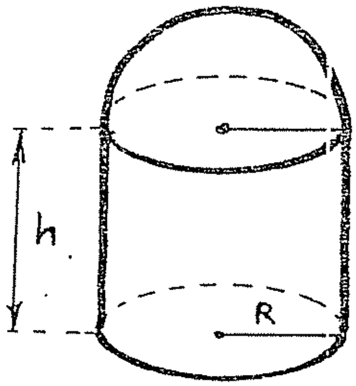
$9 \cdot x^2 + 8\, y^2 = 72 \Rightarrow b = 3 \,;\, a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$A = 2x_0 = \frac{2\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{3}}$	$B = 2y_0 = \frac{2b}{\sqrt{3}}$	$A = 8/\sqrt{3}$	$B = 6/\sqrt{3}$

126. Un observatorio debe tener la forma de un cilindro circular recto, rematado por la bóveda hemisférica, con su volumen dado por V_0. Si la bóveda hemisférica cuesta el doble por m^2 que el muro cilíndrico, cuáles son las proporciones más económicas?

$$\begin{pmatrix}\text{Volumen}\\ \text{Total}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\text{Volumen}\\ \text{esfera}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Volumen}\\ \text{cilindro}\end{pmatrix}$$

$$V_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) + \pi R^2 . h$$



Suponiendo que el precio por m^2 de superficie del cilindro es (P) tenemos:

$$\begin{pmatrix}\text{Precio}\\ \text{TOTAL}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Precio}\\ \text{cilindro}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Precio}\\ \text{esfera}\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\text{Superficie}\\ \text{cilíndrica}\\ \text{sin base}\\ \text{ni tapa}\end{pmatrix} + 2P\begin{pmatrix}\text{Superf.}\\ \text{semi}\\ \text{hesfera}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{GASTO}\\ \text{TOTAL}\end{pmatrix} = g = P.(2\pi R . h) + 2P.\left[\frac{1}{2}\left(4\pi R^2\right)\right]$$

$g = 2P\pi R(h + 2R) = g(R, h)$. Podemos poner la función gasto dependiendo sólo de (R) y para ello utilizamos el vínculo entre (R) y (h) que da un volumen (V_0) prefijado. O sea:

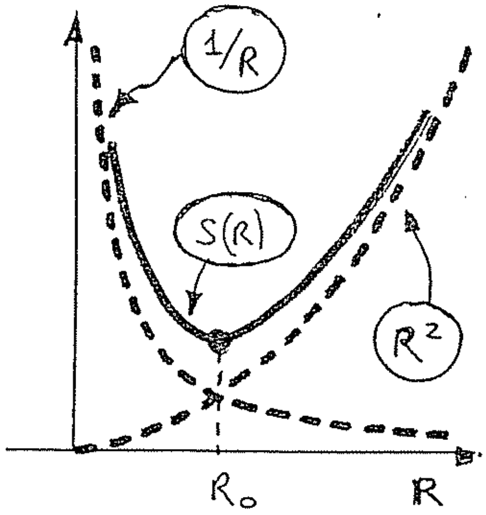
$$h = \frac{V_0 - 2/3\,\pi R^3}{\pi R^2} \Rightarrow g = 2P\pi R\left(\frac{V_0 - 2/3\,\pi R^3}{\pi R^2} + 2R\right) =$$

$$= 2P\pi R\left(\frac{V_0 - 2/3\,\pi R^3 + 2\pi R^3}{\pi R^2}\right) = \frac{2P}{R}.\left(V_0 + \frac{4}{3}\pi R^3\right) = g$$

$$\boxed{g = g(R) = \frac{2P}{R}\left(V_0 + 4/3\,\pi . R^3\right)} \longrightarrow g = 2P\left(\frac{V_0}{R} + \frac{4\pi}{3}R^2\right)$$

Veamos la "pinta" de esta curva.

Podemos estimar la forma de la curva $g(R)$ evaluando $\left[\frac{1}{R} + R^2\right]$ como suma de dos curvas independientes. Vemos que $g(R)$ presenta un mínimo en (R_o).



Busquemos (R_o) analíticamente:

Como aquí la pendiente es horizontal, la derivada será nula. Entonces $g'(R_o) = 0$ nos dará (R_o).

$$\boxed{\frac{dg}{dR} = g'(R) = 2P\left[\frac{8\pi R}{3} - \frac{V_o}{R^2}\right]} \longrightarrow$$ Ahora anulo ésto en (R_o)

$$0 = g'(R_o) \Rightarrow \left[\frac{8\pi R_o}{3} - \frac{V_o}{R_o^2}\right] = 0 \Rightarrow \boxed{R_o = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_o}{8\pi}}}$$

Falta hallar la altura del cilindro:

$$h_o = \frac{V_o - \frac{2}{3}\pi R_o^3}{\pi R_o^2} = \frac{V_o - \frac{1}{4}V_o}{\pi R_o^2} = \frac{3V_o}{4\pi} \cdot \left(\frac{8\pi}{3V_o}\right)^{2/3} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot V_o^3}{\cancel{4^3} \cdot \pi^3} \cdot \frac{\cancel{8^2} \cdot \pi^2}{3^2 \cdot V_o^2}} = \sqrt[3]{\frac{3V_o}{\pi}} \Rightarrow \boxed{h_o = \sqrt[3]{\frac{3V_o}{\pi}}}$$

127. En cinemática se define el movimiento rectilíneo uniformemente variado como aquél en que el desplazamiento es una función cuadrática del tiempo: $s(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$. Encuentre la velocidad y la aceleración, e interprete físicamente las constantes c_0, c_1 y c_2.

Definiciones de velocidad y aceleración:

$$\boxed{v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$ Velocidad

$$\boxed{a(t) = v'(t) = s''(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$ Aceleración

$$\begin{cases} s = c_0 + c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^2 = s(t) & \text{DESPLAZAMIENTO} \\ s' = c_1 + 2c_2 t = v(t) & \text{VELOCIDAD} \\ s'' = 2c_2 = a(t) & \text{ACELERACIÓN} \end{cases}$$

- $s(t=0) = c_0$: Posición Inicial del móvil
- $v(t=0) = c_1$: VELOCIDAD Inicial del móvil
- $a(t=0) = 2c_2 = a(t)$: ACELERACIÓN CONSTANTE del móvil.

---

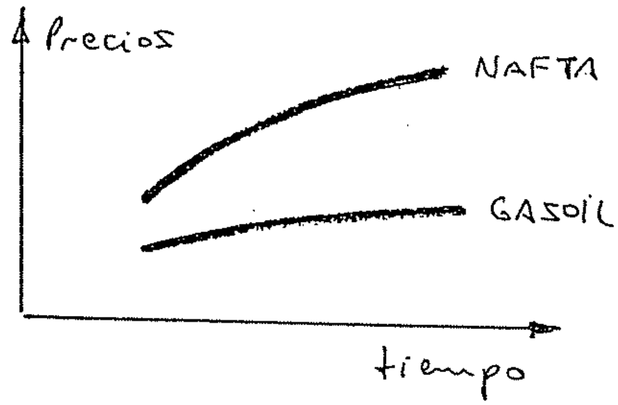
128. Exprese en términos de lo que aprendió en esta unidad el siguiente título aparecido en los diarios: "*A lo largo del tiempo el precio del litro de gasoil ha crecido siempre más lentamente que el litro de nafta*".

Sea (G) el precio del gasoil y (N) el de la nafta.

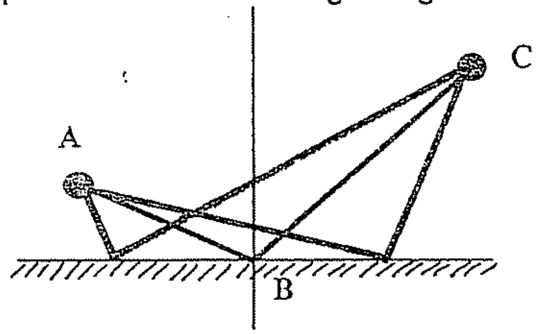
- Ambos dependen del tiempo : $G = G(t)$, $N = N(t)$
- Las variaciones del precio respecto del tiempo son : $G'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta t}$; $N'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t}$
- Se menciona que ambos precios siempre han crecido.

CONCLUSIONES :

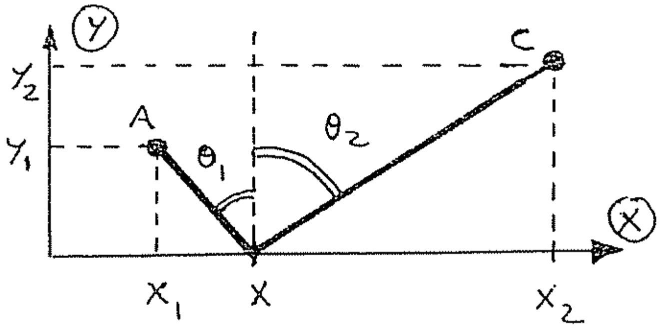
- $G'(t) < N'(t)$
- ES ARGENTINA el país donde nunca va a bajar el precio de los combustibles.



129. Se desea ir del punto A al C siguiendo trayectorias rectilíneas que pasen por B, de modo que el camino ABC tenga longitud mínima.



Considerando fijas las posiciones de A y C ¿Cómo se decidirá la posición de B para que esto ocurra? Justifique (en la óptica geométrica usted encontrará este problema con el nombre de "Principio de Fermat o del camino mínimo" y su resultado como "Ley de la reflexión de los rayos luminosos").



Sea $\underset{\sim}{l \doteq l_1 + l_2}$ suma de longitudes $l_1 \equiv \overline{AB}$, $l_2 \equiv \overline{BC}$

$$\begin{cases} l_1^2 = (x-x_1)^2 + y_1^2 \\ l_2^2 = (x-x_2)^2 + y_2^2 \end{cases}$$

Es decir: $l = l_1 + l_2 = l_1(x) + l_2(x) = l(x)$.

Una función que sólo depende de (x), pues $\underline{x_1, x_2, y_1, y_2}$ son fijos. Derivando respecto de (x):

$$\left\{\begin{array}{l} 2\, l_1 \cdot \dfrac{dl_1}{dx} = 2(x-x_1) \implies \dfrac{dl_1}{dx} = \dfrac{x-x_1}{l_1} \\ 2\, l_2 \cdot \dfrac{dl_2}{dx} = 2(x-x_2) \implies \dfrac{dl_2}{dx} = \dfrac{x-x_2}{l_2} \end{array}\right\}$$

Buscamos la mínima longitud del camino, es decir, el valor de (x) que haga: $l'(x) = \dfrac{dl}{dx} = 0$

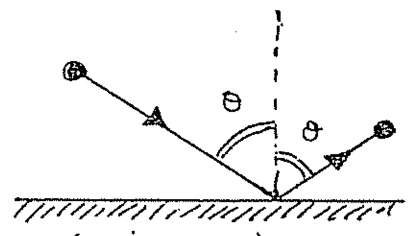
$$\frac{dl}{dx} = \frac{d}{dx}(l_1 + l_2) = \frac{dl_1}{dx} + \frac{dl_2}{dx} = \boxed{\frac{x-x_1}{l_1} + \frac{x-x_2}{l_2} = l'(x)}$$

(x_0) MINIMIZA el camino $\iff l'(x_0) = 0 \iff \dfrac{x_0-x_1}{l_1} = \dfrac{x_2-x_0}{l_2} \iff$

$\operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_2 \implies \boxed{\theta_1 = \theta_2}$

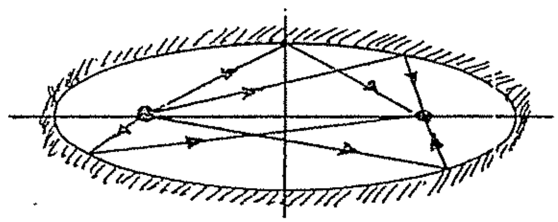
ÁNGULOS IGUALES respecto de la normal

Esto significa que el camino mínimo de un rayo que va de (A) hasta (C) tocando la superficie, se consigue con una reflexión especular ($\theta_1 = \theta_2$). (LEY DE REFLEXIÓN)

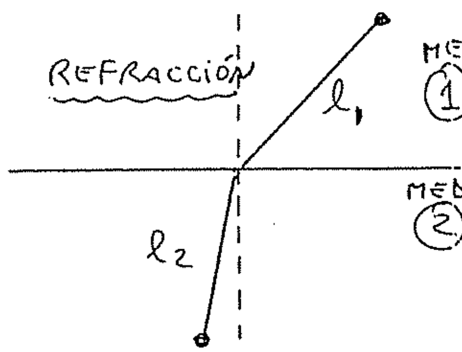


(espejo)

Notas extras: En el Principio de Fermat no siempre se busca el camino mínimo. Por ejemplo, en una elipse "espejada" por dentro, si colocamos una fuente en el foco, todos los rayos se concentrarán en el otro foco.



Pero en este caso, la trayectoria de los haces es máxima, no mínima. En ocasiones se utiliza una fuente de calor intensa en un "horno" elipsoidal para soldar o quemar una muestra.



En la ley de refracción, lo que se minimiza es el tiempo de viaje del haz:

$$\frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{1}{c}\left[\left(\frac{c}{v_1}\right) l_1 + \left(\frac{c}{v_2}\right) l_2\right] = \frac{1}{c}\underbrace{\left[n_1 l_1 + n_2 l_2\right]}_{\text{"longitud de camino óptico"}}$$

o la "longitud de camino óptico", que se define como la longitud por el índice de refracción (n)

130. Los costos de operación de un camión (gasoil, aceite, depreciación) son $20+\frac{x}{2}$ centavos por km. siendo x la velocidad en km/h. El conductor cobra \$18 por hora. ¿Cuál es la velocidad más económica en un viaje de 600 km?.

130.1. Considere sólo el camión ¿sería deseable que x fuese grande o pequeña?

130.2. Si el empleador sólo toma en cuenta el sueldo del conductor, ¿preferiría una x pequeña o grande?

130.3. Exprese el costo como función de la velocidad x y resuelva (no olvide poner todos los costos en pesos o en centavos).

130.4. Si el viaje fuera de 1000 km, ¿la respuesta sería diferente? Justifique.

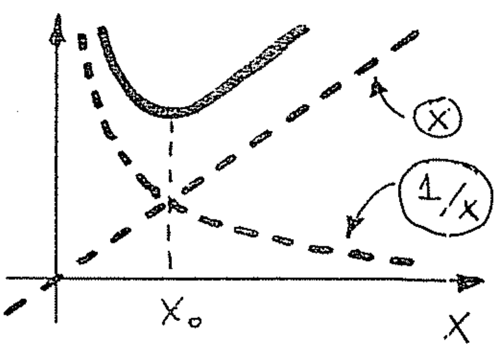
En virtud del punto 4, vamos a utilizar una distancia generalizada (d).

$$\begin{pmatrix}\text{GASTO}\\\text{TOTAL}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{GASTO}\\\text{CAMIÓN}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{GASTO}\\\text{CONDUCTOR}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{GASTO}\\\text{CAMIÓN}\\\text{POR}\\\text{KILÓMETRO}\end{pmatrix} \cdot d + \begin{pmatrix}\text{TIEMPO}\\\text{VIAJE}\\\text{TOTAL}\end{pmatrix} \cdot 18$$

$$g = \underbrace{\left(20+\frac{x}{2}\right)}_{\text{en centavos}} \cdot d + \left(d/x\right) \cdot \underbrace{18\,\$}_{\text{en pesos}}$$

$$\boxed{g = \left(d/100\right)\left[20 + \frac{x}{2} + \frac{1800}{x}\right] = \left[\begin{matrix}\text{gasto total en}\\\text{pesos del viaje}\end{matrix}\right]}$$

Primero tratamos de ver la forma aproximada de la función. Analizamos la suma de funciones: $x + 1/x$ como muestra la figura. Vemos que existe un mínimo en $x = x_0$ del gasto $g(x)$.



La derivada del gasto respecto de la velocidad

$$\boxed{g'(x) = \left(d/100\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1800}{x^2}\right)}$$

nos proporciona el mínimo de $g(x)$. En este mínimo: $x = x_0$ y $g'(x_0) = 0$. Es decir:

$$\left(1/2 - \frac{1800}{x_0^2}\right) = 0 \implies \boxed{x_0 = 60 \text{ Km/hora}}$$

(1) Si el conductor no cobra (o no le pagan), el gasto será: $g = (d/100)\cdot\left(20 + \frac{x}{2}\right)$

cuyo valor mínimo se da para $x = 0$ o una (x) lo más pequeña posible.

(2) Por el contrario, si se pretende explotar al máximo al chofer del camión, habrá que indicarle que maneje lo más rápido posible, ya que: $g = 18 \cdot d/x$ = el gasto, disminuye cuando (x) aumenta.

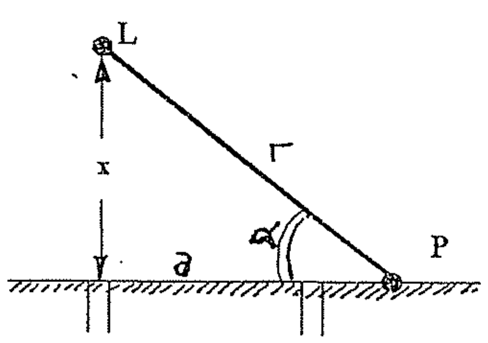
(3) El costo aparece expresado en el punto inicial. Para: $x = x_0 = 60$ Km/hora, será

$$g(x_0) = (d/100)\left(20 + \frac{60}{2} + \frac{1800}{60}\right) = \boxed{0{,}8 \cdot d = g(x_0)}$$

Siendo $d \equiv 600$ Km, queda: $g(x_0) = 480$ \$

(4) Si ahora $d \equiv 1000$ Km, queda: $g(x_0) = 800$ \$

131. La iluminación en un punto de una superficie viene dada por la relación



$I = I_0 \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{x^2 + a^2}$ donde I_0 (constante) es la intensidad del foco luminoso.

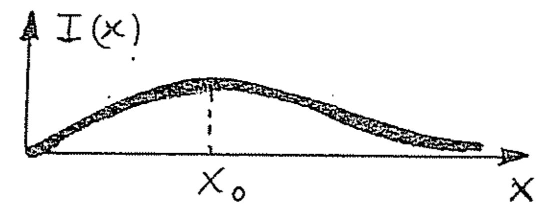
Determine a que altura x sobre una mesa horizontal se debe colocar la lámpara L para que la iluminación en P sea máxima.

(a = constante)

$$I = I_0 \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha}{r^2} = I_0 \cdot \frac{x}{r^3} = \boxed{I_0 \, \frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}} = I(x)}$$

Estudiemos un poco esta función. Sólo se anula en $\underline{x=0}$ (y no en otro punto). Para $\underline{x \to \infty}$ es $x/r^3 \mapsto 1/x^2 \mapsto$ cero. Sin embargo, si por ejemplo $\underline{x=a}$, $I = \dfrac{a}{(2a^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\cdot a^2} > 0$

Podemos decir que habrá un máximo de $I(x)$ en algún punto (x_0) con: $0 < x_0 < \infty$



Busquemos ese punto de pendiente horizontal o derivada nula.

$$I = I_0 \cdot x\,(a^2+x^2)^{-3/2} \Longrightarrow$$

$$I'(x) = \frac{dI}{dx} = I_0 \left[(\ \ )^{-3/2} + x \cdot \left(-\tfrac{3}{2}\right) \cdot (\ \ )^{-5/2} \cdot 2x \right] =$$

$$= I_0 \left[\frac{(\ \ ) - 3x^2}{(\ \ )^{5/2}} \right] = I_0 \left[\frac{a^2+x^2-3x^2}{(a^2+x^2)^{5/2}} \right] \Longrightarrow$$

$$\boxed{I'(x) = \frac{dI}{dx} = \frac{(a^2-2x^2) \cdot I_0}{(a^2+x^2)^{5/2}}}$$

derivada de la iluminación respecto de la altura

Anulando esta derivada, obtenemos el máximo:

$$I'(x_0) = 0 \Rightarrow (a^2 - 2x_0^2) = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}} \checkmark$$

132. Halle la raíz cuadrada aproximada de 10, usando tres iteraciones mediante el Método de Newton – Raphson, comenzando con el valor inicial $x_0 = 3$. Utilice redondeo con dos decimales en los cálculos .

Tenemos que hallar: $X = \sqrt{10}$, es decir, un (x) tal que: $x^2 = 10$ o que anule la función: $\boxed{f(x) = x^2 - 10}$. Para utilizar el método de N-R, recordemos que necesitamos $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$; construir $g(x)$ para la iteración y luego evaluar $|g'(x)| < 1$ para su validez.

$\boxed{f'(x) = 2x}$, $\boxed{f''(x) = 2}$. La iteración viene dada por: $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$; $g(x_{n+1}) = g(x_n)$

$$g(x) = x - \frac{x^2-10}{2x} = \frac{2x^2 - x^2 + 10}{2x} = \frac{x^2+10}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{5}{x}$$

$\boxed{g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{x}}$. La iteración será: $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{5}{x_n}$

Partiendo de un $x_0 = 3$, obtenemos:

$$x_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{5}{x_0} = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} = \frac{9+10}{6} = \frac{19}{6} \cong 3{,}17 \quad (\text{Aproximo})$$

$$x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{5}{x_1} = \frac{3{,}17}{2} + \frac{5}{3{,}17} \cong 3{,}162287\ldots \cong 3{,}16$$

$$x_3 = \frac{x_2}{2} + \frac{5}{x_2} = \frac{3{,}16}{2} + \frac{5}{3{,}16} \cong 3{,}162278\ldots \cong 3{,}16$$

Como en la iteración vuelvo a obtener el dato, o sea $[x_{n+1} = x_n]$, entonces el método ya convergió y me detengo. Así $\boxed{\sqrt{10} \approx 3{,}16}$

NOTA : Veamos la validez de la convergencia exigiendo: $\left| g'(x) \right| = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$

En efecto: $\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| = \left| \frac{(x^2-10) \cdot 2}{4x^2} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{5}{x^2} \right| < 1$

Es decir (dado que: $|a|<b \Rightarrow |-a|<b \Rightarrow -b<-a<b$)

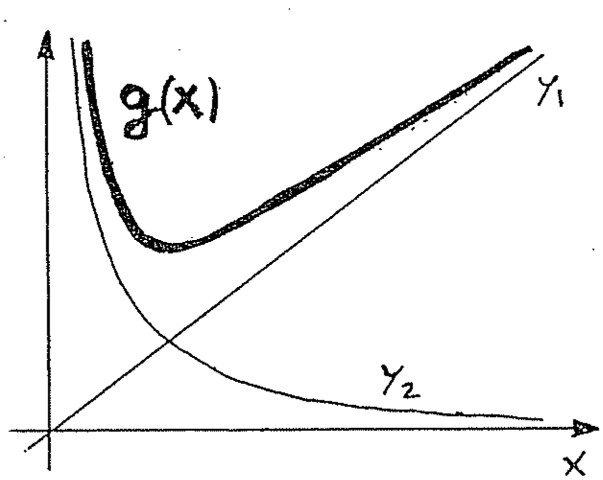
$-1 < \frac{5}{x^2} - \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{5}{x^2} < \frac{3}{2}$ (sumando $+1/2$ a todo)

Pero $x^2>0 \Rightarrow 0 < 5/x_2$ (positivo siempre) $\Rightarrow$

$\frac{5}{x^2} < \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 > \frac{10}{3} \Rightarrow x > \sqrt{\frac{10}{3}}$. Como $2 > \sqrt{\frac{10}{3}}$ (pues: $2^2 \cdot 3 > 10$) si exigimos $x>2$ ya se verifica $|g'(x)|<1$. Dado que nosotros partimos de $x_0 > 2$, garantizamos la convergencia de la serie iterativa.

Veamos la pinta de la función iterativa $g(x)$. Ella es suma de dos curvas: $y_1 = x$ y $y_2 = 1/x$

Vemos que para $x \mapsto \infty$ su pendiente nunca llegará a ser uno ($|g'(x)| < 1$).



Además $[g(x) \to x]$ si $[x \to \infty]$

133. La función $f(x)=\dfrac{4x-7}{x-2}$ tiene una raíz en $x=1{,}75$. Utilice el Método de Newton- Raphson con las siguientes aproximaciones iniciales, estudiando, en cada caso, previamente, si se produce un proceso convergente o no a la raíz:

133.1. $x_0=1{,}6$

133.2. $x_0=1{,}5$

133.3. $x_0=3$

La función a evaluar es: $\boxed{f(x)=\dfrac{4x-7}{x-2}}$ y sus respectivas derivadas son:

$$f'(x)=\frac{4(x-2)-(4x-7).1}{(x-2)^2} \Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}}$$

$$f''(x)=\left[-(x-2)^{-2}\right]'=-(-2)(x-2)^{-3} \Rightarrow \boxed{f''(x)=\frac{2}{(x-2)^3}}$$

La función iterativa: $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ es:

$$g(x)=x-\left(\frac{4x-7}{x-2}\right)\cdot\frac{(x-2)^2}{(-1)}=x+(4x-7).(x-2)=x+4x^2-7x-8x+14$$

$$\boxed{g(x)=4x^2-14x+14} \quad ; \quad \boxed{x_{n+1}=4.x_n^2-14.x_n+14}$$

- $x_0=1{,}6 \Rightarrow x_1=1{,}6 \Rightarrow x_2=1{,}84 \Rightarrow x_3=1{,}7824 \Rightarrow$
  $x_4=1{,}75419904 \Rightarrow x_5=1{,}75007052775 \Rightarrow$
  $x_6=1{,}75000000199 \Rightarrow x_6=1{,}75 \Rightarrow x_7=1{,}75$ ✓
  Vemos que converge en 8 pasos a la solución.
- $x_0=1{,}5 \mapsto x_1=2 \mapsto x_2=2$
  Esta serie se estanca en $x=2$ que no es la solución buscada, ya que $f(x=2)$ no está definido. Enseguida veremos las condiciones suficientes para que haya convergencia y la forma de las funciones involucradas.

• $x_0 = 3 \mapsto x_1 = 8 \mapsto x_2 = 158 \mapsto x_3 = 97658 \dots$

Dado que x_{n+1} = función cuadrática de (x_n), cuando $(x_n \mapsto \infty) \Rightarrow (x_{n+1} \mapsto \infty)$. Este valor de (x_0) hace que la función $g(x)$ diverja.

Sabemos que una condición suficiente para garantizar convergencia es que $|g'(x)| < 1$.

$\boxed{g'(x) = 8x - 14} \Rightarrow |g'(x)| = |8x - 14| < 1$

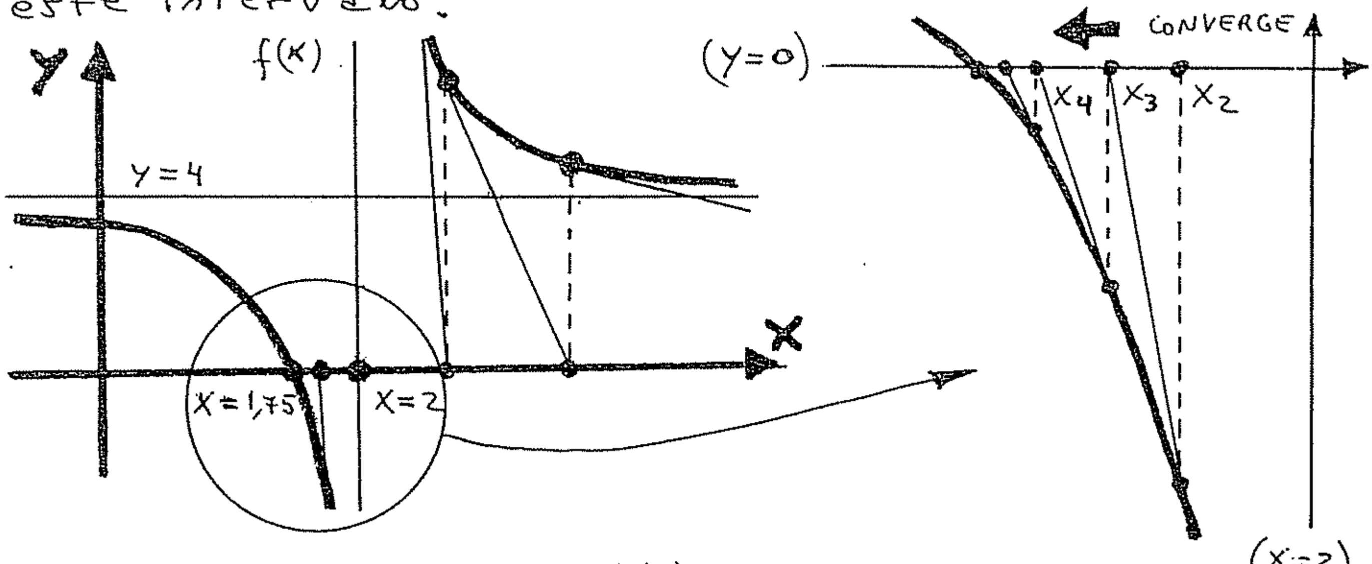
Como; $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$, es: $-1 < 8x - 14 < 1$

sumando 14 a todos los miembros:

$13 < 8x < 15 \Rightarrow 13/8 < x < 15/8$. Es decir

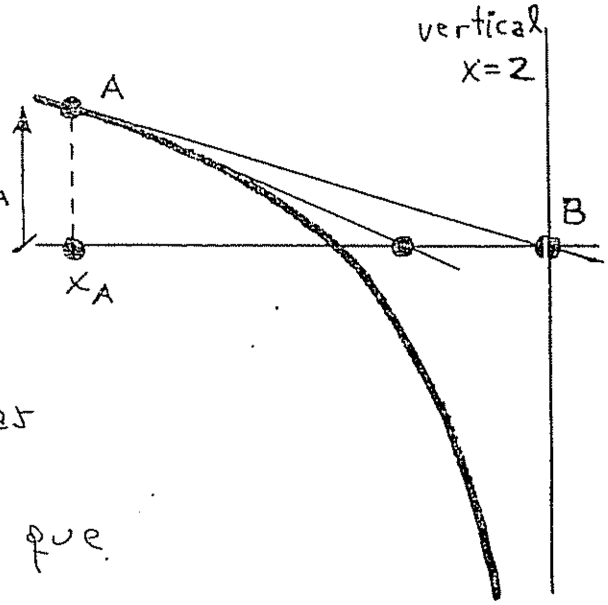
$\boxed{1{,}625 < x < 1{,}875 : \text{garantiza convergencia}}$

Pero nuestros valores de (x_0) están fuera de este intervalo.



graficando la función $f(x)$, vemos que al trazar tangentes, si en algún momento estas tangentes intersecan el eje (x) entre $\underline{\underline{1,75}}$ y $\underline{\underline{2}}$, entonces, las sucesivas intersecciones de cada tangente se van aproximando cada vez más a la raíz de $f(x)$ por la izquierda.

Puede haber valores de (x) con $x < 1{,}75$ tales que sus tangentes corten al eje (x) entre $1{,}75$ y 2.



Busquemos esos valores.
Las tangentes a $f(x)$ trazadas a la derecha del punto (A) intersecarán en un $x < 2$, que es lo que buscamos.

Pero: $\dfrac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B} = f'(X_A)$ y como $\begin{cases} (X_A, Y_A) = (x, f(x)) \\ (X_B, Y_B) = (2, 0) \end{cases}$

tenemos: $\dfrac{f(x) - 0}{x - 2} = f'(x) \Rightarrow f(x) = (x-2) \cdot f'(x)$

$$\Rightarrow \left(\frac{4x-7}{x-2}\right) = (x-2) \cdot \left[\frac{-1}{(x-2)^2}\right] \Rightarrow 4x - 7 = -1 \Rightarrow x = 3/2$$

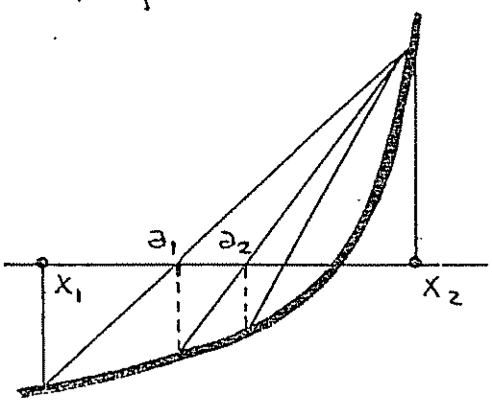
Es decir que habrá convergencia del método cuando y sólo cuando: $1{,}5 < X_0 < 2$

Y ahora queda claro que la condición: $|g'x| < 1$ es suficiente, pero no necesaria, pues $1{,}625 < x < 1{,}875$ es suficiente y $1{,}5 < x < 2$ es necesario para la convergencia.

MÉTODO DE LAS CUERDAS

Si queremos hallar la raíz de la función $f(x)$ en un intervalo en que sea monótona creciente o decreciente, podemos usar este método. Supongamos un intervalo $[x_1, x_2]$ que verifique la monotonía y contenga al (x) tal que $f(x) = 0$. Tomando (para generalizar) $f(x_1) < f(x_2)$, si trazamos una cuerda $\overline{AB}$

Con $\begin{cases} A \equiv (x_1, f(x_1)) \\ B \equiv (x_2, f(x_2)) \end{cases}$ obtenemos



una recta que verifica:

$$\frac{y - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Dado que $\underline{y = 0}$ para $\underline{x = a_1}$, queda: $\frac{-f(x_1)}{a_1 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1) \cdot f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}}$$

Si $f(a_1) < 0$ un valor más próximo a la raíz que (x_1), y continuamos el procedimiento en el intervalo $[a_1, x_2]$. Si (caso contrario) $f(a_1) > 0$, entonces trabajamos con igual procedimiento en el intervalo $[x_1, a_1]$. Reiterando esta técnica, nos acercamos más y más a la raíz buscada.

Bibliografía: "Cálculo dif. e integral", de N. Piskunov (LIMUSA)

134. Sabiendo que la ecuación $x^3+x=6$ tiene una raíz en el intervalo $[1{,}55;1{,}75]$ hállela utilizando:

134.1. Método de Bisección

134.2. Método de Newton – Raphson

134.3. ¿Qué método elegiría? ¿ Por qué?

$\boxed{f(x) = x^3 + x - 6} \Longrightarrow \boxed{f'(x) = 3x^2 + 1} > 0$

La derivada $f'(x)$ es siempre mayor que cero, por lo tanto, en cualquier intervalo de (x) la función es monótona creciente.

Método de Cuerdas: Intervalo $[x_1, x_2]$

1 (*) Calcular: $x = x_1 - \dfrac{(x_2 - x_1)\cdot f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$

(*) Calcular: $f(x)$.

- Si $f(x) < 0 \Rightarrow x_1 = x$ y vuelvo al 1º paso
- Si $f(x) > 0 \Rightarrow x_2 = x$ y vuelvo al 1º paso
- Si $f(0) = 0 \Rightarrow$ TERMINAR.

Comenzando con $(x_1 = 1{,}55)$ y $(x_2 = 1{,}75)$, tenemos:

x_1	x_2	x	$f(x)$
1,55	1,75	1,6281	−0,04714
a_1	x_2	1,634	−0,0028
a_1	x_2	1,6343	−1,7330
a_1	x_2	1,6344	$-1{,}05\cdot10^{-5}$
		1,634365	$-6{,}3\cdot10^{-7}$
⋮	⋮	1,6343652887 6	$-3{,}8\cdot10^{-8}$
a_1	x_2	⋮	$-2{,}3\cdot10^{-9}$
a_1	x_2	⋮	$-8{,}4\cdot10^{-12}$
a_1	x_2		
a_1	x_2	1,634365289301	$-4\cdot10^{-13}$
a_1	x_2	1,634365289301	$-4\cdot10^{-13}$

REPITE...

Vemos que se llega a un valor de la raíz $x = 1,634365 2 9 301$ con $f(x) \approx -4 \cdot 10^{-13}$ en (9) pasos y con el método de cuerdas.

(2) Método de Newton-Raphson:

Tomemos, por ejemplo: $x_0 = x_1 = 1,55$

(Hacemos la iteración desde aquí).

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad ; \quad x_{n+1} = g(x_n) \; ; \; (n = 0,1,\ldots)$$

$$g(x) = x - \frac{x^3 + x - 6}{3x^2+1} = \frac{3x^3 + x - x^3 - x + 6}{3x^2+1} \Rightarrow \boxed{\frac{2x^3+6}{3x^2+1} = g(x)}$$

$$\left(\lim_{x\to\infty} g(x) = \tfrac{2}{3}x \; ; \; \text{con: } \lim_{x\to\infty} g'(x) = \tfrac{2}{3} < 1 \right).$$

Así, la iteración será: $\boxed{x_{n+1} = \dfrac{2 \cdot x_n^3 + 6}{3 \cdot x_n^2 + 1}}$

$x_0 = 1,55$	$x_0 = 1,75$
$x_1 = 1,63847\ldots$	$x_1 = 1,641104\ldots$
$x_2 = 1,63437443\ldots$	$x_2 = 1,6343899\ldots$
$x_3 = 1,634365 29306$	$x_3 = 1,63436529 3\ldots$
$x_4 = 1,634365 29301$	$x_4 = 1,634365 29301$
$x_5 = 1,634365 29301$	$x_5 = 1,634365 29301$

Vemos que en sólo (6) pasos llegamos al valor buscado (con nuestra calculadora).

Comprobemos que esta es una buena solución.

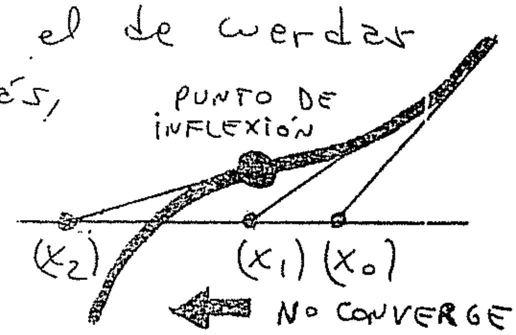
En efecto:

$$\begin{cases} x = 1{,}63436529300 \Rightarrow f(x) = -1\cdot 10^{-10} \\ x = 1{,}63436529301 \Rightarrow f(x) = -3\cdot 10^{-1} \\ x = 1{,}63436529302 \Rightarrow f(x) = 6\cdot 10^{-11} \end{cases}$$

y la solución que mejor aproxima es la que hemos hallado.

③ • En el método de cuerdas, necesitamos un algoritmo que posea una sentencia para decidir, evaluando $f(x)$ si es negativa o positiva. Esto implica mayores recursos de cálculo y un programa de mayores líneas. (Además la convergencia tarda más en llegar, pues si utilizamos la tangente vamos "acompañando" la curva mejor que usando la cuerda. Pero esto depende mucho de la forma de la curva $y = f(x)$ y es válido sólo en este caso).

• En el método N-R es muy ventajosa la sencillez de la técnica y el algoritmo, y aquí la convergencia resultó más rápida. En este método es necesario derivar la función, mientras que en el de cuerdas esto no hace falta. Además, este método falla si hay puntos de inflexión (donde la curvatura pasa de cóncava a convexa



• Por lo dicho, aquí es PREFERIBLE el MÉTODO DE N-R.

¡FIN DEL APUNTE!