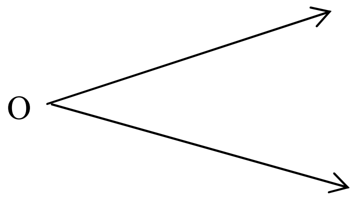
III.4 UNIDAD 4: TRIGONOMETRÍA

La Trigonometría es una parte de la matemática que estudia las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Estas son de mucha utilidad para resolver problemas en diversas ramas de esta ciencia o de otras, como la física, la química, la astronomía, etc.

La *trigonometría* (etimológicamente "medición de ángulos") fue inventada por los astrónomos griegos para calcular los elementos de un triángulo (sus ángulos y lados).

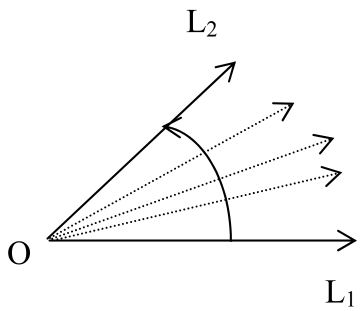
III.4.1 Sistemas de Medición de Ángulos

Para la medición de ángulos se tienen en cuenta diversos "sistemas".
Primeramente, es necesario realizar una revisión del concepto de ángulo.



Definición 1

Ángulo es una parte del plano limitada por dos semirrectas (lados del ángulo), que tienen un origen en común, denominado vértice (O).



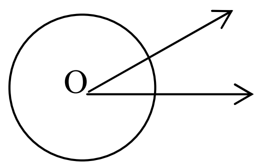
Definición 2

Dadas dos semirrectas L_1 y L_2, con origen común, **ángulo** es la porción del plano generada por el "barrido" (giro) de L_1 hasta coincidir con L_2.

Así pueden darse dos posibilidades: cuando se gira en sentido contrario al de las agujas del reloj (antihorario) se considera "ángulo positivo" y cuando se gira a favor de las agujas del reloj (horario) se considera "ángulo negativo".

En particular,

Si el origen de las semirrectas coincide con el centro de un círculo (de radio r), las semirrectas determinan un "ángulo central" del círculo.



La **medida**, o **medición** de un ángulo consiste en asociar a todo ángulo del plano un número que caracteriza su abertura (la parte del plano comprendida en el interior del ángulo). Para medir un ángulo se pueden utilizar unidades de distintos sistemas de medición.

III.4.1.1 El Sistema Sexagesimal

¿Cuántos grados sexagesimales mide:
a) un ángulo llano?
b) un ángulo recto?
c) un ángulo de giro?

Este sistema tiene como unidad de medida al **Grado Sexagesimal**. Símbolo: (°).

Definición

Un grado sexagesimal es la medida del ángulo con vértice en el centro de un círculo (ángulo central), de amplitud igual a la 360 avas parte del mismo.

Si se divide un grado en 60 partes se obtiene un minuto (′) y si se divide un minuto en 60 partes se obtiene un segundo (″). Más allá, se utilizan divisiones decimales del segundo (0,1″; 0,01″; etc.).

III.4.1.2 El Sistema Circular

En este sistema la unidad de medida es el **radián** y se indica "rad".

Si se considera una circunferencia de radio r y centro O, y se genera un ángulo central α por la rotación de la semirrecta OX, se obtiene sobre la circunferencia un arco AB de longitud L. Al efectuar la razón entre la longitud (L) del arco determinado y el radio de longitud r, se obtiene un valor adimensional L/r que es la medida del ángulo en **radianes**.

Definición

Un **radián** es la medida del ángulo con vértice en el centro de un círculo de radio r, cuyos lados determinan sobre la circunferencia un arco AB de longitud igual al radio.

$$\frac{\text{longitud del arco}}{\text{longitud del radio}} = \alpha \text{ rad}$$

III.4.1.3 Equivalencia entre el Sistema Sexagesimal y el Circular

Se puede establecer una equivalencia entre estos sistemas, considerando el cociente (en radianes) entre la longitud de una semicircunferencia de perímetro (π radio) y el radio. Este sector circular corresponde a un ángulo llano que mide 180 º (sexagesimales), por lo que se obtiene la relación:

$$\pi \text{ radianes} = 180\,^{\circ}$$

En general, si $\alpha\,^{\circ}$ es un ángulo en el sistema sexagesimal y α_r es un ángulo en radianes, se tienen las siguientes expresiones:

$$\alpha^{\circ} = \frac{180}{\pi} . \alpha_r$$

$$\alpha_r = \frac{\pi}{180} . \alpha^{\circ}$$

Una milla marítima se define como la longitud del arco subtendido en la superficie de la Tierra por un ángulo que mide 1 minuto. El diámetro de la Tierra es aproximadamente 7.927 millas (terrestres). Determinar la cantidad de millas (terrestres) que hay en una milla marítima.

Intentar lo siguiente

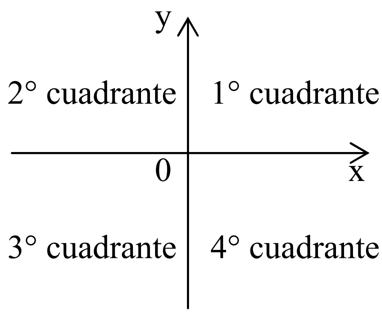
1. Calcular en radianes los siguientes ángulos particulares: 0°, 45°, 90°, 270° y 360°.
2. ¿Cuántos grados mide un ángulo de **1 radián**?
3. ¿Cuántos radianes mide un ángulo de **1 grado**?
4. Si se toma a π como 3,14 ¿qué valor en radianes se obtiene?

III.4.1.4 Sistema Cartesiano Ortogonal

Anteriormente, se ha representado al conjunto de los números reales en una recta. Si se consideran dos rectas (de números reales) que se intersecan perpendicularmente en un punto O, estas constituyen los ejes del **sistema cartesiano ortogonal**, el cual sirve como referencia para establecer las coordenadas de puntos del plano.

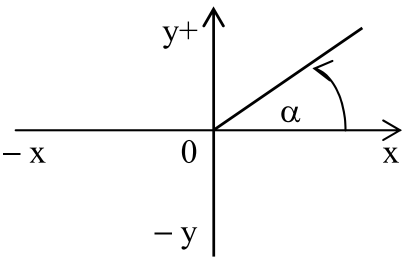
Los **ejes coordenados** (generalmente denominados "**eje *x***" o **eje de abscisas** y "**eje *y***" o **eje de ordenadas**) dividen al plano en cuatro sectores llamados **cuadrantes**. Cada punto del plano queda asociado a un par ordenado (x; y) de números reales, determinando:

el primer cuadrante: $a \in \Re^+ \wedge b \in \Re^+$.
el segundo cuadrante: $a \in \Re^- \wedge b \in \Re^+$
el tercer cuadrante: $a \in \Re^- \wedge b \in \Re^-$
el cuarto cuadrante: $a \in \Re^+ \wedge b \in \Re^-$



Entonces, como un ángulo es invariante respecto de su posición en el plano y con el único motivo de facilitar definiciones, propiedades y cálculos, es conveniente referirlo a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales.

Un ángulo se encuentra en posición normal si su vértice se ubica en el origen de coordenadas O y su lado inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas.

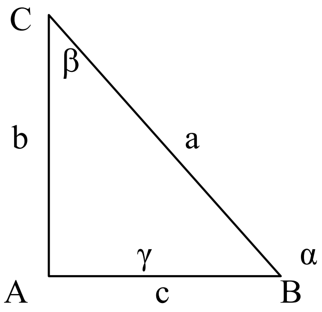


De esta forma al primer cuadrante le corresponden ángulos desde 0º hasta 90º (tomados en sentido antihorario), el segundo cuadrante desde 90º hasta 180º, el tercer cuadrante desde 180º hasta 270º y el cuarto cuadrante desde 270º hasta 360º.

Al seguir girando en ese sentido se obtienen ángulos mayores a 360º; por ejemplo un ángulo de 1125º serán 3 giros y 1/4 y estará en el primer cuadrante, un ángulo de −120º tendrá sentido horario y estará en el tercer cuadrante.

¿Son Verdaderas o Falsas estas proposiciones?
1. un ángulo de 300º está en el cuarto cuadrante
2. un ángulo de 120º está en el primer cuadrante
3. un ángulo de 1500º está en el cuarto cuadrante

III.4.2 Relaciones Trigonométricas de un Ángulo



a) Sea un triángulo rectángulo ABC (con el ángulo recto en A). Las medidas de sus lados son a, b y c. Sus ángulos interiores son α, β y el ángulo recto γ.
El lado b se denomina **cateto opuesto** al ángulo α.
El lado c se denomina **cateto adyacente** al ángulo α.
El lado a se denomina **hipotenusa** del triángulo.

Se pueden encontrar las razones entre los catetos y la hipotenusa respecto a un determinado ángulo, (por ejemplo α). Los valores que se obtienen son números reales que dependerán del valor del ángulo α. Estas razones se conocen como relaciones trigonométricas y son seis:

el seno del ángulo α:
es el cociente entre el **cateto opuesto** a α y la **hipotenusa**.

$$\boxed{sen\ \alpha = \frac{b}{a}}$$

el coseno del ángulo α:
es el cociente entre el **cateto adyacente** a α y la **hipotenusa**.

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{c}{a}}$$

la tangente del ángulo α:
es el cociente entre el **cateto opuesto** a α y el **cateto adyacente** *a* α.

$$\boxed{tg\ \alpha = \frac{b}{c}}$$

la cotangente del ángulo α:
es el cociente entre el **cateto adyacente** a α y el **cateto opuesto** *a* α.

$$\boxed{ctg\ \alpha = \frac{c}{b}}$$

la secante del ángulo α:
es el cociente entre la **hipotenusa** y el **cateto adyacente** *a* α.

$$\boxed{\sec \alpha = \frac{a}{c}}$$

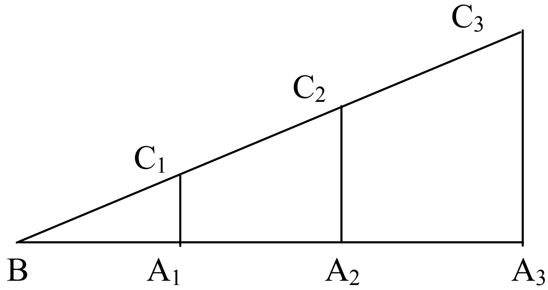
la cosecante del ángulo α:
es el cociente entre la **hipotenusa** y el **cateto opuesto** *a* α.

$$\boxed{\cos ec\ \alpha = \frac{a}{b}}$$

Las tres primeras se denominan **relaciones trigonométricas directas**. Las tres últimas son las **relaciones trigonométricas recíprocas** de las anteriores. O sea, en símbolos se puede escribir:

$$\cos ec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}; \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \qquad ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

Si se tienen tres triángulos rectángulos semejantes (como en la figura), rectángulos en A y B = 30º, con BA_1 = 3 cm, BA_2 = 5 cm y BA_3 = 8 cm respectivamente. ¿Qué se puede decir de los cocientes CA/BC en los tres casos?

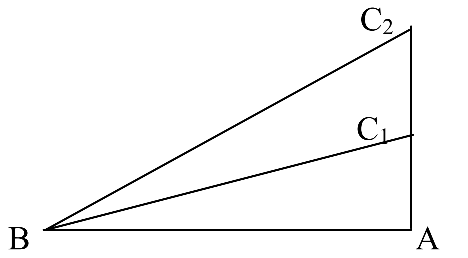


Los cocientes CA/BC corresponden a cateto opuesto al ángulo B dividido la hipotenusa de dicho ángulo, con lo que se estaría calculando el seno del ángulo B. Como se ve, los cocientes son iguales, o sea:

$$sen\, B = sen\, 30º = \frac{C_1 A_1}{BC_1} = \frac{C_2 A_2}{BC_2} = \frac{C_3 A_3}{BC_3} = 0{,}5 .$$

De igual forma, se obtienen razones iguales, si se calculan las demás razones trigonométricas mencionadas anteriormente.

Si se tienen dos triángulos rectángulos (como en la figura), rectángulos en A, con B_1 = 30º y B_2 = 45°. ¿Qué se puede decir de los cocientes CA/CB en los dos casos?



En el primer caso, se ha calculado sen 30° = 1/2, y en el segundo caso sen 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Conclusiones

Los valores de las razones trigonométricas **dependen** del valor del ángulo considerado.

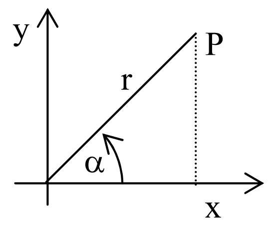
Para un mismo ángulo, las razones trigonométricas **se mantienen**, independientemente de la longitud de los lados del triángulo.

Valores de seno y coseno para algunos ángulos más utilizados, del primer cuadrante.

	0º	**30º**	**45º**	**60º**	**90º**
seno	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0

b) Sea α un ángulo de posición normal y P(x, y) un punto sobre el lado terminal del ángulo.

Se forma un triángulo rectángulo que tiene:
como cateto opuesto a **y**, como cateto adyacente a **x** ,
y como hipotenusa a **r**.



Por el teorema de Pitágoras: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Por lo tanto: $sen\, \alpha = \frac{y}{r}$, $\cos \alpha = \frac{x}{r}$

Si se efectúa el cociente de estas dos expresiones, queda: $\dfrac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{y}{x}$

El segundo miembro corresponde a la definición de **tangente** del ángulo, por lo que se tiene:

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha}$$

Intentar lo siguiente

1) Completar la tabla anterior con la tangente de los ángulos dados, utilizando para ello la última relación obtenida.
2) Utilizar la calculadora científica para calcular seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:

   0º ; 32º ; 45º ; 16º 35' ; 60º ; 260º 22' 54" ; 300º.
3) Utilizar la calculadora científica para calcular seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:

   2 rad; 5,5 rad; 1,2 rad; 2π rad; 3/2 π rad; 5/6 π rad.
4) Obtener (con calculadora) las relaciones trigonométricas recíprocas, para los ángulos del ítem 2.

III.4.2.1 Signo de las Relaciones Trigonométricas

En los cálculos realizados en el ítem 2 del ejercicio anterior, algunos de los valores obtenidos tienen signo positivo y otros son negativos.

Esto se debe a la posición del punto P en el plano: según en qué cuadrante se ubique el punto P sus coordenadas irán tomando signo positivo o negativo según corresponda; por lo tanto, aplicando las definiciones de las diferentes relaciones trigonométricas, su signo dependerá del signo del cociente efectuado y éste, a su vez, de los signos de **x** y de **y** (con **r** $\in \Re^+$).

Intentar lo siguiente

Completar la tabla con los signos que correspondan:

A	sen α	cos α	tg α	cotg α	sec α	cosec α
1^{er} cuadrante	+	+	+	+	+	+
2^{do} cuadrante						
3^{er} cuadrante						
4^{to} cuadrante						

III.4.2.2 Relación Fundamental de la Trigonometría

Sea **α** un ángulo cualquiera en posición normal y sea P(x, y) un punto sobre el lado terminal del ángulo.
Por definición:

$$sen\ \alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad [1]$$

Por el Teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = r^2$

Dividiendo por r^2: $\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \left(\frac{r}{r}\right)^2$

Reemplazando por [1]: $(\text{sen}\ \alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

Relación fundamental
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

III.4.2.3 Relaciones Trigonométricas Inversas

Si se conoce el valor de la relación trigonométrica ¿es posible conocer el valor del ángulo correspondiente?. O sea, si se sabe que sen α = 0,5 entonces ¿se puede saber cuánto vale α?

La respuesta es afirmativa: se utilizan las relaciones inversas. Cada relación trigonométrica tiene su inversa. En el ejemplo: α = arc sen 0,5. Si se hace la pregunta ¿cuál es el ángulo cuyo seno es 0,5?. La respuesta es 30°. Entonces: arc sen 0,5 = 30°.

En general:

Si sen α = b ⇒ α = arc sen b
Si cos α = b ⇒ α = arc cos b
Si tg α = b ⇒ α = arc tg b

En la calculadora o en algunos textos se utiliza el símbolo: $\alpha = \text{sen}^{-1}\ b$.

Ejemplo: Si sen α = $\sqrt{2}/2 \Rightarrow \alpha = \text{arc sen}\ \sqrt{2}/2 = \pi/4$.

Intentar lo siguiente

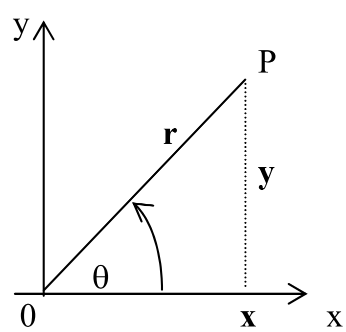
Hallar: 1) arc cos (-0,8) 2) arctg 2 3) arc sec 4

III.4.2.4 Coordenadas Polares (Aplicación de las relaciones trigonométricas)

Si se conoce un punto P(x; y) en coordenadas cartesianas es posible determinar su posición mediante otras coordenadas, denominadas **coordenadas polares**.

Para ello se debe conocer la distancia desde el origen al punto P(r) y el ángulo θ (en posición normal).

Las coordenadas polares son: r (radio vector) y θ (argumento), y se escribe P (r; θ).



Cálculo de θ: $tg\,\theta = \frac{y}{x}$ → $\theta = arc\ tg \frac{y}{x}$

Cálculo de r: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

También, conociendo el punto P(r, θ) se pueden obtener las coordenadas cartesianas, haciendo:

Cálculo de ***x*** e ***y***: $sen\ \theta = \frac{y}{r}$ → $y = r \cdot sen\ \theta$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ → $x = r \cdot \cos\theta$

Intentar lo siguiente

a) Hallar las coordenadas polares de los puntos P(3, 4) y Q(5; 0)

b) Hallar las coordenadas cartesianas de los puntos T(3; (7/6)π) y S(2; 90°).

III.4.2.5 Círculo trigonométrico

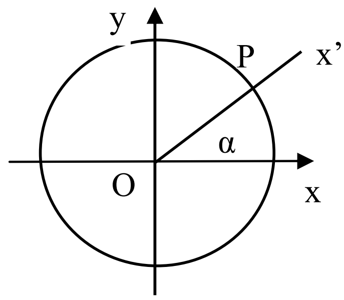
Si se considera un círculo de radio **R = 1**, con centro en el origen O del sistema de coordenadas cartesianas y un ángulo central α comprendido entre las semirrectas OX y OX'; sea P un punto del plano de coordenadas (x, y) que es la intersección de Ox' con la circunferencia, y además R = OP = 1, queda determinado un triángulo rectángulo (como el de la figura del ítem **6b**) sobre el que se pueden aplicar las relaciones trigonométricas.

Entonces:

sen α = y cosec α = 1/y

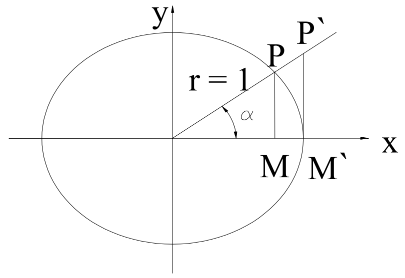
cos α = x sec α = 1/x

tg α = y/x cotg α = x/y



Intentar lo siguiente

En el círculo trigonométrico de la figura se ha marcado un ángulo α, demuestra que:



a) $sen\alpha = \overline{PM}$

b) $\cos\alpha = \overline{OM}$

c) $tg\alpha = \overline{P'M'}$

III.4.2.6 Funciones trigonométricas (circulares)

Se puede observar que para cada ángulo se obtiene un valor correspondiente del seno, del coseno o de la tangente. Es decir, que se puede establecer una función entre los valores de un ángulo y su correspondiente valor de la relación trigonométrica. Es por eso que se obtiene una función (denominada *función trigonométrica*) entre un valor de variable independiente ***x*** (ángulo en grados o en radianes) y un valor dependiente ***y*** (un número real) que es la imagen de *x* a través de una relación trigonométrica. Por ejemplo, $y = \text{sen}\, x$ ó $y = \cos x$ son funciones trigonométricas. También lo son las demás relaciones estudiadas.

Si se llevan los valores de ***x*** y de ***y*** sobre los ejes cartesianos es posible obtener un gráfico de la función trigonométrica.

III.4.2.7 Relación entre los valores de las Funciones Trigonométricas de un Mismo Ángulo

Entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo existe una serie de relaciones, algunas de las cuales veremos a continuación.

a) $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ b) $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$ c) $ctg\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}$

d) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ e) $\cos ec\,\alpha = \dfrac{1}{sen\,\alpha}$ f) $tg\,\alpha = \dfrac{1}{ctg\,\alpha}$

g) $tg^2\,\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$

Intentar lo siguiente

Aplicando las relaciones anteriores, calcular todas las funciones de "α", sabiendo que:

a) $\text{sen}\,\alpha = 0.70$; 2º cuadrante b) $\text{tg}\,\alpha = -2$; 4º cuadrante

III.4.2.8 Identidades Trigonométricas

Son igualdades entre relaciones trigonométricas que se cumplen para cualquier valor de los ángulos que intervienen en la identidad.

Aquellas que contengan secantes, cosecantes y cotangentes se pueden derivar fácilmente dado que estas funciones son las recíprocas del coseno, seno y tangente, respectivamente.

Ejemplo: Demostrar la siguiente identidad: $\text{tg}^2\,x - \text{sen}^2\,x = \text{sen}^2\,x\,.\,\text{tg}^2\,x$

$$\frac{sen^2\,x}{\cos^2 x} - \text{sen}^2\,x = \text{sen}^2\,x\,\frac{sen^2\,x}{\cos^2 x}$$ Escribiendo en términos de sen x y cos x:

$$\frac{sen^2\,x - sen^2\,x\,\cos^2 x}{\cos^2 x} = \text{sen}^2\,x\,\frac{sen^2\,x}{\cos^2 x}$$ Encontrando denominador común y restando:

$$\frac{sen^2\,x\,(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} = \text{sen}^2\,x\,\frac{sen^2\,x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{sen^2\,x\;sen^2\,x}{\cos^2 x} = \text{sen}^2\,x\,\frac{sen^2\,x}{\cos^2 x}$$

$$1 = 1$$ Con lo que queda demostrado.

Intentar lo siguiente

Demostrar la siguiente identidad: $ctg^2 x - cos^2 x = cos^2 x \cdot ctg^2 x$.

III.4.3 Resolución de triángulos

III.4.3.1 Resolución de Triángulos Rectángulos

Los triángulos rectángulos tienen muchas aplicaciones, en parte porque son muchas las situaciones en el mundo real que los comprenden. Antes de resolver algunos problemas, debemos recordar que:

a) Los ángulos interiores y los lados de un triángulo reciben el nombre de **elementos fundamentales** del mismo, y
b) Un triángulo queda determinado en sus dimensiones si y sólo si se conocen **tres** de sus elementos fundamentales, siendo por lo menos, uno de ellos un lado.

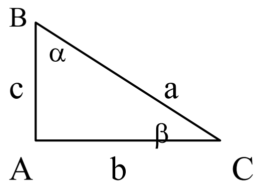
Si el triángulo es rectángulo, como ya conocemos uno de sus elementos fundamentales (el ángulo recto), bastarán **dos** elementos fundamentales más, que pueden ser:

1. la hipotenusa y un ángulo agudo,
2. un cateto y un ángulo agudo,
3. los dos catetos, y
4. la hipotenusa y un cateto.

Son éstos, los cuatro casos que se estudian en la resolución de triángulos rectángulos.

Recordemos también:

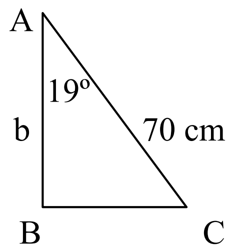
a) que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios ($\alpha + \beta = 90º$),
b) el Teorema de Pitágoras ($b^2 + c^2 = a^2$), y
c) que el área de un triángulo rectángulo es $S = (b \cdot c) / 2$



Por otra parte, debemos tener presente que para calcular una incógnita de un problema, mientras sea posible, debemos calcularla utilizando los datos del problema. Al proceder así, evitaremos que un error en el cálculo de una incógnita, utilizada para calcular otra, se trasmita a esta otra.

Ejemplo: Calcular la longitud b del siguiente triángulo.

Solución. El lado conocido es la hipotenusa. El cateto que buscamos es el adyacente al ángulo conocido. Por lo tanto, utilizaremos el coseno,



$$\cos A = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{70\,cm} \text{ y resolvemos para b:}$$

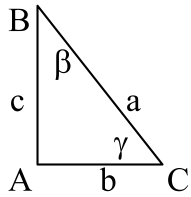
$$\cos 19º = \frac{b}{70\,cm} \quad \rightarrow \quad b = 70 \,.\, 0{,}9455 \quad \rightarrow \quad b \approx 66{,}19 \text{ cm.}$$

Cuando resolvemos un triángulo, encontramos las **medidas** de sus lados y sus ángulos hasta entonces desconocidas. En ocasiones abreviamos esto diciendo que *"encontramos los ángulos"* o *"encontramos los lados"*.

Intentar lo siguiente

Resolver los siguientes triángulos rectángulos. Hallar el área.

a) a = 34,63 m. y β = 60º 45' 20''
b) c = 110,43 m. y β = 32º 25' 17''
c) b = 30 m. y c = 40 m.
d) a = 150 m. y c = 120 m.



III.4.3.2 Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Se estudian cuatro casos, conocidos como clásicos, cuyos datos son:

a) dos lados y el ángulo comprendido,
b) un lado y dos ángulos,
c) tres lados y,
d) dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

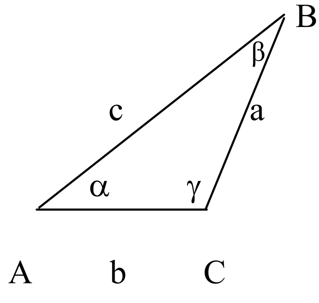
Para la resolución de triángulos oblicuángulos, tenemos que tener presente:

1. el teorema del seno
2. el teorema del coseno

- **Teorema del seno**

En todo triángulo, las medidas de los lados son proporcionales a los senos de los lados opuestos.

$$\frac{a}{sen\,A}=\frac{b}{sen\,B}=\frac{c}{sen\,C} \qquad \text{o} \qquad \frac{a}{sen\,\alpha}=\frac{b}{sen\,\beta}=\frac{c}{sen\,\gamma}$$



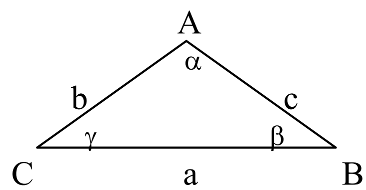
- **Teorema del coseno**

En todo triángulo, el cuadrado de la medida de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos, menos el doble producto entre las mismas y el coseno del ángulo opuesto al primero.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$$

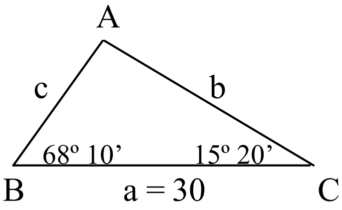
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2\,ba\cos\gamma$$



Ejemplo: Resolver el triángulo oblicuángulo y calcular su área conociendo las medidas de un lado (a = 30 m.) y de los dos ángulos adyacentes al mismo ($\beta = 68º10'$ y $\gamma = 15º\ 20'$)

Solución.



Cálculo de A: $A = 180º - (B + C)$

$A = 180º - (68º10' + 15º\ 20')$

$A = 180º - 83º\ 30'$

$A = 96º\ 30'$

Cálculo de b: $\dfrac{a}{sen\,A} = \dfrac{b}{sen\,B} \rightarrow b = \dfrac{a \cdot sen\,B}{sen\,A}$

$$b = \frac{30 \cdot \text{sen}\,68º\,10'}{sen\,96º\,30'} = \frac{30 \cdot 0{,}92827}{0{,}99357} \rightarrow b = 28{,}03 \text{ m.}$$

Cálculo de c: $\dfrac{a}{sen\,A} = \dfrac{c}{sen\,C} \rightarrow c = \dfrac{a \cdot sen\,C}{sen\,A}$

$$c = \frac{30 \cdot \text{sen}\,15º\,20'}{sen\,96º\,30'} = \frac{30 \cdot 0{,}26443}{0{,}99357} \rightarrow c = 7{,}98 \text{ m.}$$

Cálculo del área: $S = \dfrac{1}{2}\, a\, b \text{ sen } C \rightarrow S = \dfrac{1}{2} \cdot 30\ .\ 28{,}03\ .\ 0{,}26443 = 111{,}17 \text{ m}^2$

Intentar lo siguiente

Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos, sabiendo que:

a) A = 132 m.; C = 148 m. y $\beta = 51º\ 26'\ 12''$
b) C = 156,35 m.; $\alpha = 36º\ 52'\ 12''$ y $\beta = 69º\ 23'\ 13''$
c) A = 176 m.; B = 241 m. y C = 123 m.
d) A = 300 m.; B = 200 m. y $\beta = 30º$

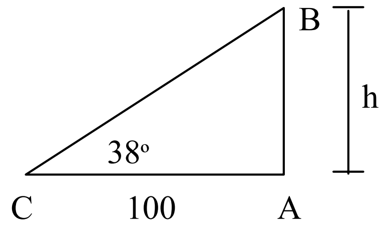
III.4.3.3 Aplicaciones de la Resolución de Triángulos

A menudo, para resolver un problema comenzamos por determinar un triángulo que después resolvemos para encontrar una solución.

Directrices para resolver un problema de triángulos

1. Dibujar un croquis de la situación del problema.
2. Buscar triángulos y representarlos en el dibujo.
3. Señalar lados y ángulos, tanto conocidos como desconocidos.
4. Expresar el lado o el ángulo buscado en términos de razones trigonométricas conocidas. Después, resolver.

Ejemplo 1: Calcular la altura h de un pino tal que si nos colocamos a una distancia de 100 m. del pie del pino (A), la medida del ángulo formado entre la visual dirigida a la copa del pino y el suelo es de 38º.

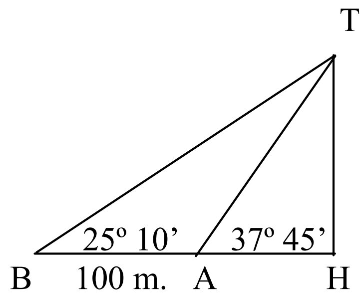


Solución. $\text{tg } 38^\circ = \dfrac{h}{100}$ → $h = 100 \cdot \text{tg}$

$h = 100 \cdot 0{,}78129$ → $h = 78{,}129$ m.

Ejemplo 2: Calcular la altura h de una torre cuyo pie (H) es inaccesible, sabiendo que si dos observadores se ubican en las posiciones A y B, a una distancia entre sí de 100 m., ven la torre bajo un ángulo de 37º 45' y 25º 10', respectivamente. (A, B y H están alineados)

Solución.



En el triángulo ATH:

$$\text{sen } A = \frac{h}{|AT|} \quad \rightarrow \quad h = |AT| \cdot \text{sen } A$$

[1]

En el triángulo BTA, por el teorema del seno,

$$\frac{|AT|}{\text{sen B}} = \frac{|AB|}{\text{sen T}} \quad \rightarrow \quad |AT| = \frac{|AB| \cdot \text{sen B}}{sen\, T} \qquad [2]$$

De [1] y [2] resulta

$$h = |AB| \cdot \frac{\text{sen A} \cdot \text{sen B}}{sen\, T}$$

Además, por propiedad de los ángulos exteriores de un triángulo, es:

$$37^\circ\, 45' = 25^\circ\, 10' + T \quad \rightarrow \quad T = 12^\circ\, 35'$$

$$h = 100\, \frac{sen\, 37^\circ\, 45' \cdot \text{sen } 25^\circ\, 10'}{\text{sen } 12^\circ\, 35'} = 100 \cdot \frac{0{,}61222 \cdot 0{,}42525}{0{,}21786} \quad \rightarrow \quad h = 119{,}50 \text{ m}^2.$$