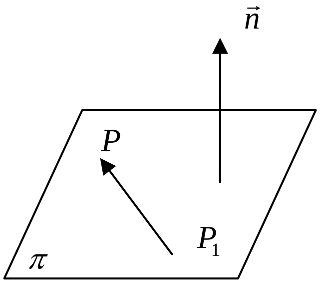
Plano y recta en R^3

Ecuación de un plano dados un punto que le pertenece y un vector perpendicular



$\vec{n} \perp \pi \qquad P_1(x_1, y_1, z_1) \in \pi$

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$

Considero $P(x, y, z) \in \pi$

$\overrightarrow{P_1P} // \pi \wedge \overrightarrow{P_1P} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P}.\vec{n} = 0$

$(x - x_1, y - y_1, z - z_1).(n_1, n_2, n_3) = 0$

$(x - x_1)n_1 + (y - y_1)n_2 + (z - z_1)n_3 = 0$

$n_1x + n_2y + n_3z + (-n_1x_1 - n_2x_2 - n_3x_3) = 0$

Haciendo $n_1 = a; n_2 = b; n_3 = c; (-n_1x_1 - n_2x_2 - n_3x_3) = d$

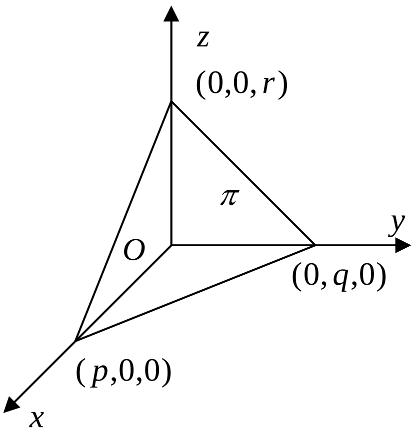
Nos queda la Ecuación General del Plano

$$\boxed{\pi : ax + by + cz + d = 0}$$

En el caso particular en que *d = 0* se dice que es un plano al origen, es decir que el origen del sistema de coordenadas está contenido en el plano.

Ecuación segmentaria del plano

Cuando $d \neq 0$ podemos obtener la ecuación segmentaria del plano.



$\pi : ax + by + cz + d = 0 \wedge d \neq 0$

$\pi : \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z = 1$

$\pi : \frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{y}{\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = 1$

$\frac{d}{a} = p$ abscisa al origen

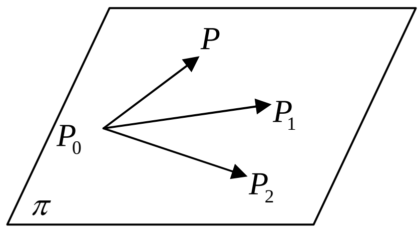
$\frac{d}{b} = q$ ordenada al origen

$\frac{d}{c} = r$ cota al origen

Entonces la ecuación segmentaria del plano queda

$$\boxed{\pi : \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1}$$

Plano determinado por tres puntos distintos



$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$
$P_1(x_1, y_1, z_1) \in \pi$
$P_2(x_2, y_2, z_2) \in \pi$
Considero $P(x, y, z) \in \pi$
Puedo definir los siguientes vectores:

$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ $\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ $\overrightarrow{P_0P_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z$

Estos tres vectores son coplanares $\Rightarrow \overrightarrow{P_0P}.(\overrightarrow{P_0P_1} x \overrightarrow{P_0P_2}) = 0$

$$\boxed{\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0}$$

Ejemplo: hallar el plano dados los puntos $P_0(1, -2, 5)$ $P_1(-2, 3, -3)$ $P_2(1, 1, -2)$

$$\pi : \begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z - 5 \\ -3 & 5 & -8 \\ 0 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : -11(x - 1) - 21(y + 2) - 9(z - 5) = 0$$

$$\pi : -11x - 21y - 9z + 14 = 0$$

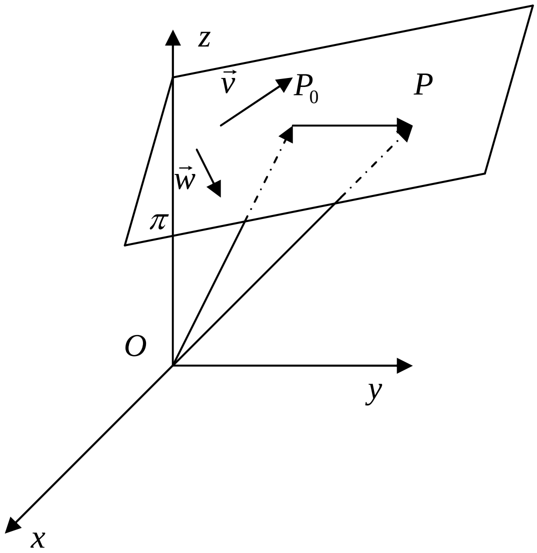
Otra manera de resolver el ejercicio es definiendo $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$, estos vectores van a ser paralelos al plano π y el producto vectorial entre ellos va a resultar el vector normal del plano.

$$(-3, 5, -8) x (0, 3, -7) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -3 & 5 & -8 \\ 0 & 3 & -7 \end{vmatrix} = (-11, -21, -9) \Rightarrow \pi : -11x - 21y - 9z + d = 0$$

Luego $P_2(1, 1, -2) \in \pi$ entonces satisface la ecuación del plano $\Rightarrow -11(1) - 21(1) - 9(-2) + d = 0$

$d = 14 \Rightarrow \pi : -11x - 21y - 9z + 14 = 0$

Ecuación del plano conociendo un punto y dos vectores paralelos a él



$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) // \pi$ $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) // \pi$

$\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son vectores paralelos entre si

$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$

Considero $P(x, y, z) \in \pi$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$

Pero $\overrightarrow{P_0P} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} / \alpha, \beta \in \Re$

Porque existe una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los reales α y β

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} / \alpha, \beta \in \Re$

Expresándolo por las respectivas componenetes obtenemos la Ecuación Vectorial del Plano

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(v_1, v_2, v_3) + \beta(w_1, w_2, w_3) / \alpha, \beta \in \Re}$$

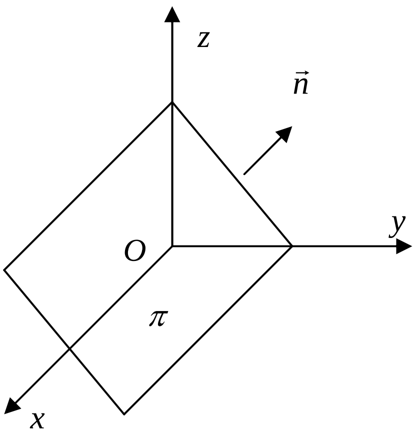
Multiplicando vectores por escalares, sumando vectores e igualando componentes obtenemos las Ecuaciones Biparamétricas del Plano (parámetros α y β).

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha v_1 + \beta w_1 \\ y = y_0 + \alpha v_2 + \beta w_2 \quad \alpha, \beta \in \Re \\ z = z_0 + \alpha v_3 + \beta w_3 \end{cases}$$

Planos paralelos a los ejes coordenados

$\pi : ax + by + cz + d = 0$

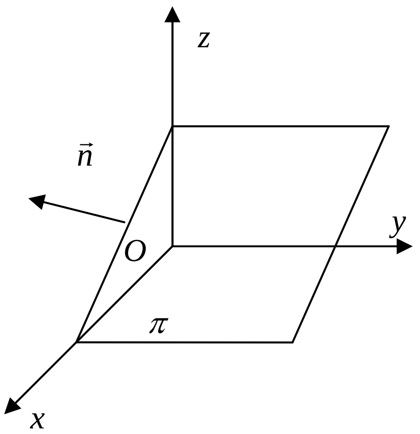
a) Plano paralelo al eje x



Vemos que el vector normal del plano es paralelo al plano yz y sus componentes son $\vec{n} = (0, n_2, n_3)$ y la ecuación del plano es

$\pi : n_2 y + n_3 z + d = 0$

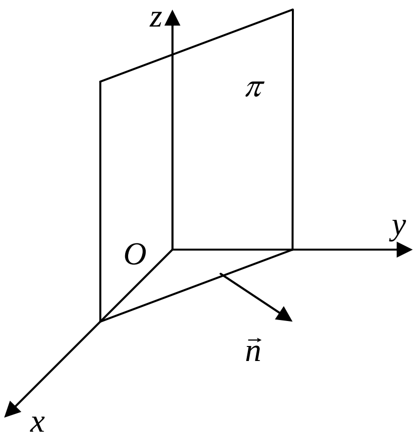
b) Plano paralelo al eje y



Vemos que el vector normal del plano es paralelo al plano *xz* y sus componentes son $\vec{n} = (n_1, 0, n_3)$ y la ecuación del plano es

$\pi : n_1 x + n_3 z + d = 0$

c) Plano paralelo al eje z

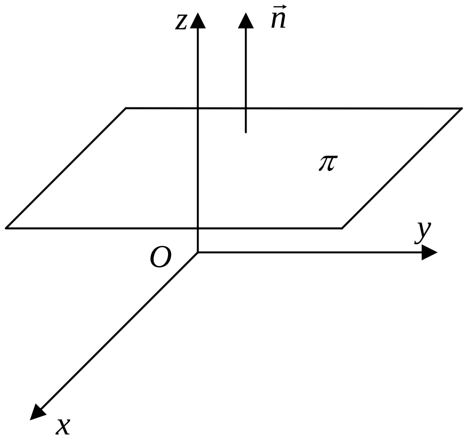


Vemos que el vector normal del plano es paralelo al plano *xy* y sus componentes son $\vec{n} = (n_1, n_2, 0)$ y la ecuación del plano es

$\pi : n_1 x + n_2 y + d = 0$

Planos paralelos a los planos coordenados

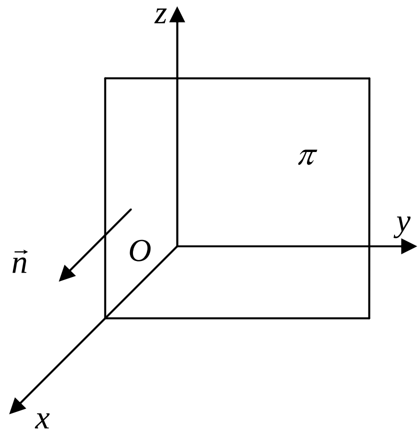
a) Plano paralelo al plano *xy*



Vemos que el vector normal del plano es paralelo al eje *z* y sus componentes son $\vec{n} = (0, 0, n_3)$ y la ecuación del plano es

$\pi : n_3 z + d = 0$

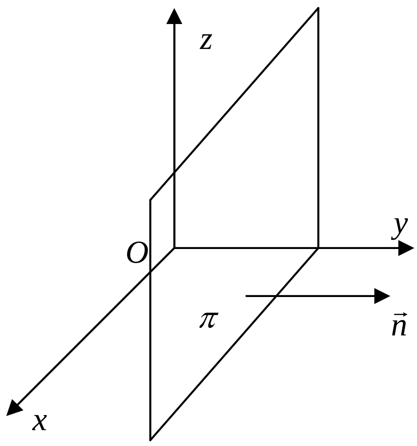
b) Plano paralelo al plano *yz*



Vemos que el vector normal del plano es paralelo al eje *x* y sus componentes son $\vec{n} = (n_1, 0, 0)$ y la ecuación del plano es

$\pi : n_1 x + d = 0$

c) Plano paralelo al plano *xz*



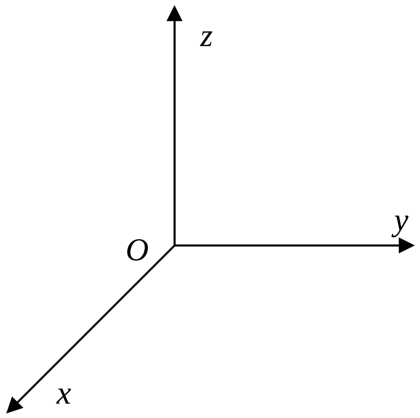
Vemos que el vector normal del plano es paralelo al eje *y* sus componentes son $\vec{n} = (0, n_2, 0)$ y la ecuación del plano es

$\pi : n_2 y + d = 0$

Ecuaciones de los planos coordenados

Plano $xy : z = 0$ Plano $xz : y = 0$ Plano $yz : x = 0$

Ecuaciones de los ejes coordenados como intersección de planos de coordenados



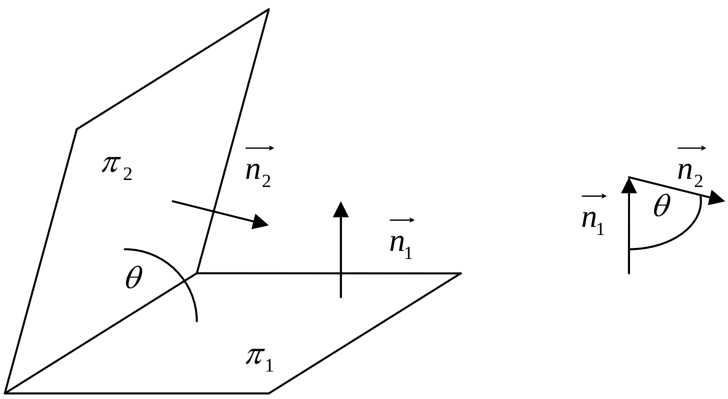
$$\text{eje } x: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{eje } y: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{eje } z: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ángulo entre planos

Es el ángulo determinado por sus vectores normales.



$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \,/\, \overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1) \wedge \overrightarrow{n_1} \perp \pi_1$$
$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \,/\, \overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2) \wedge \overrightarrow{n_2} \perp \pi_2$$
$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \frac{\overrightarrow{n_1} . \overrightarrow{n_2}}{\|n_1\| \|n_2\|}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2} + c_1^{\ 2}}\sqrt{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2} + c_2^{\ 2}}}}$$

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre planos

Sean $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \wedge \quad \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

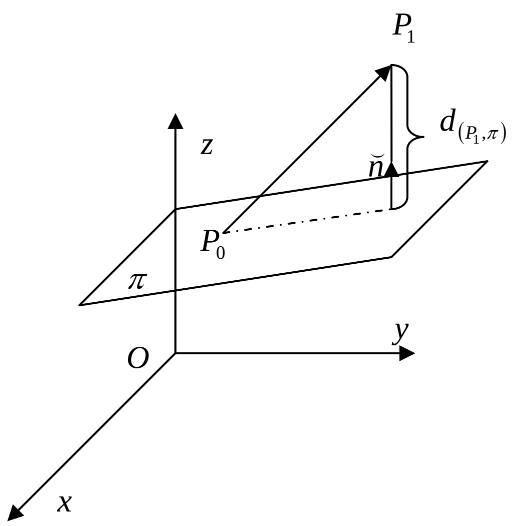
1) $\pi_1 // \pi_2 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \lambda \overrightarrow{n_2} \ \lambda \in \Re$

si $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0, c_1 \neq 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0, c_2 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

Si la proporción se extiende al término independiente entonces $\pi_1 \equiv \pi_2$ (planos coincidentes)

2) $\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Rightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

Distancia de un punto a un plano



$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi \quad P_1(x_1, y_1, z_1) \notin \pi \quad \vec{n} = (a,b,c) \perp \pi \quad \breve{n} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$

$\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \qquad d_{(P_1,\pi)} = \left\| \overrightarrow{\operatorname{Pr} oy_{\breve{n}}\, \overrightarrow{P_0P_1}} \right\|$

$\left\| \overrightarrow{\operatorname{Pr} oy_{\breve{n}}\, \overrightarrow{P_0P_1}} \right\| = \dfrac{\left| \overrightarrow{P_0P_1}.\breve{n} \right|}{\|\breve{n}\|}$ pero $\|\breve{n}\| = 1 \Rightarrow \left\| \overrightarrow{\operatorname{Pr} oy_{\breve{n}}\, \overrightarrow{P_0P_1}} \right\| = \left| \overrightarrow{P_0P_1}.\breve{n} \right|$

$\left\| \overrightarrow{\operatorname{Pr} oy_{\breve{n}}\, \overrightarrow{P_0P_1}} \right\| = \left| (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0). \left(\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c) \right) \right|$

$$d_{(P_1,\pi)} = \left| \frac{(x_1 - x_0)a + (y_1 - y_0)b + (z_1 - z_0)c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right|$$

$$d_{(P_1,\pi)} = \left| \frac{ax_1 - ax_0 + by_1 - by_0 + cz_1 - cz_0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| \Rightarrow d_{(P_1,\pi)} = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + (-ax_0 - by_0 - cz_0)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Pero $P_0 \in \pi \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ satisfacen la ecuación del plano $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$

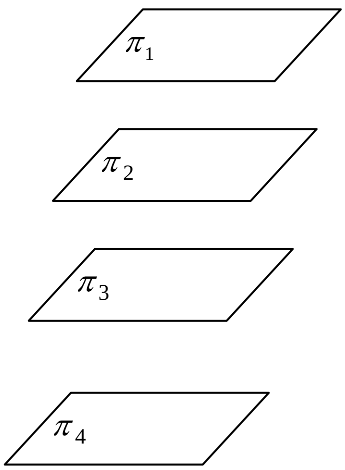
$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$

$$\boxed{d_{(P_1,\pi)} = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|}$$

Haz de planos

Un plano queda determinado si se conocen un punto y un vector normal .El vector normal también lo podemos obtener en el caso de “tres puntos distintos” y también en el caso de “un punto y dos vectores paralelos a él”.
Cuando de un plano sólo conozco el vector normal, o sólo una recta que está incluida, es decir solamente una condición, no se puede definir un único plano, sino infinitos que cumplen la condición dada. La totalidad de estos planos se denomina haz de planos.

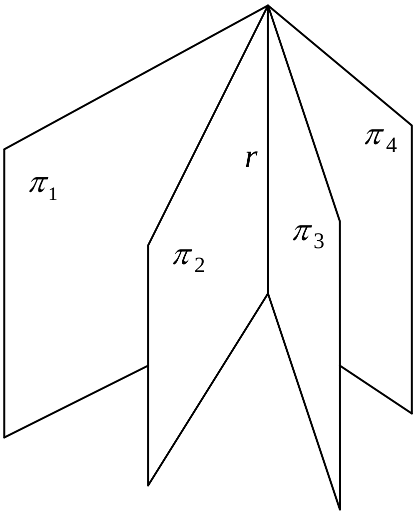
1° Caso: haz de planos paralelos



Conozco el vector normal, la ecuación del haz es:

$$\boxed{hz: Ax + By + Cz + k = 0, k \in \Re}$$

2° Caso: haz de planos cuya intersección es en una recta



Conozco dos planos cuya intersección es una recta, la ecuación del haz es:

$$\boxed{hz: \alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0}$$

Haciendo $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}$

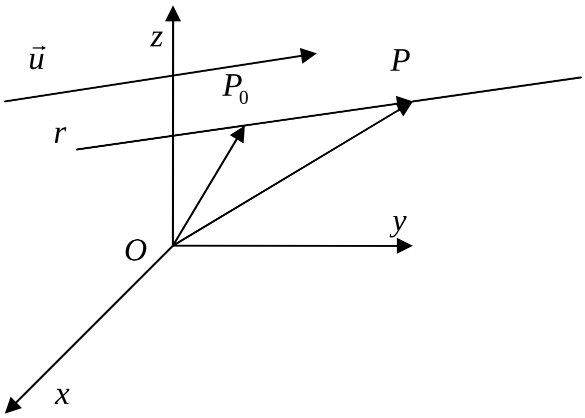
$$\boxed{hz: (a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0}$$

Debemos tener en cuenta los siguientes casos:

Si $\nexists\lambda \Rightarrow \alpha = 0$

Si $\lambda = 0 \Rightarrow \beta = 0$

Ecuación de la recta en R^3



$P_0(x_0, y_0, z_0) \in r$ $\quad\quad$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) // r$ $\quad\quad$ Considero $P(x, y, z) \in r$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{v} \text{ con } \lambda \in \Re$$

Reemplazando por componentes obtenemos la ecuación vectorial de la recta en R^3.

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \text{ con } \lambda \in \Re}$$

Haciendo el producto de un escalar por un vector, sumando vectores y luego igualando componentes encontramos las ecuaciones paramétricas de la recta en R^3.

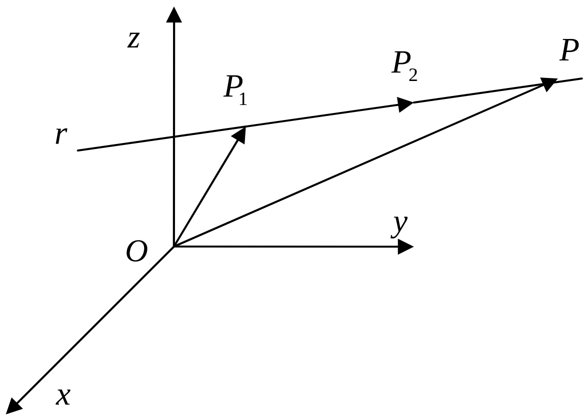
$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 & \lambda \in \Re \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{cases}}$$

Si $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0, v_3 \neq 0$

Despejando λ en las ecuaciones paramétricas $\Rightarrow \lambda = \dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2} = \dfrac{z - z_0}{v_3}$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}}$$ Ecuación simétrica de la recta en R^3

Ecuación de la recta conociendo dos puntos distintos en R³



$P_1(x_1, y_1, z_1) \in r \qquad P_2(x_2, y_2, z_2) \in r \qquad P_1 \neq P_2$

Considero $P(x, y, z) \in r$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P}$ pero $\overrightarrow{P_1P} // \overrightarrow{P_1P_2} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{P_1P_2} \quad \lambda \in \Re$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \overrightarrow{P_1P_2} \quad \lambda \in \Re$

$$\boxed{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad \lambda \in \Re}$$ Ecuación vectorial

$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + (\lambda(x_2 - x_1), \lambda(y_2 - y_1), \lambda(z_2 - z_1)) \quad \lambda \in \Re$

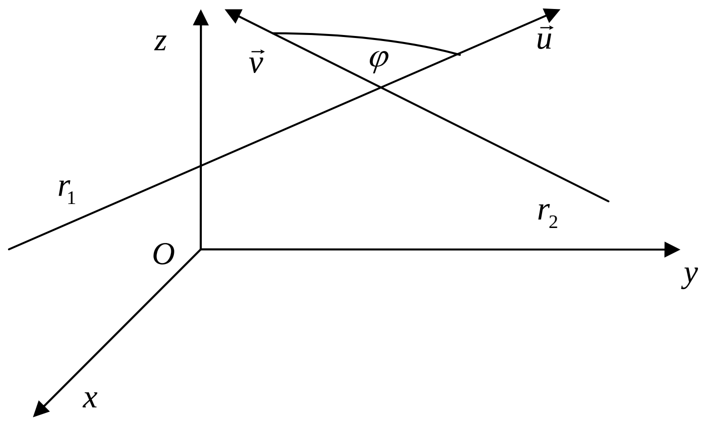
$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{cases}$$ Ecuaciones paramétricas

Si $x_2 - x_1 \neq 0, y_2 - y_1 \neq 0, z_2 - z_1 \neq 0$

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$ Forma simétrica

Ángulo entre rectas



El ángulo determinado por r_1 y r_2 es el ángulo formado por sus vectores directores.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$$

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

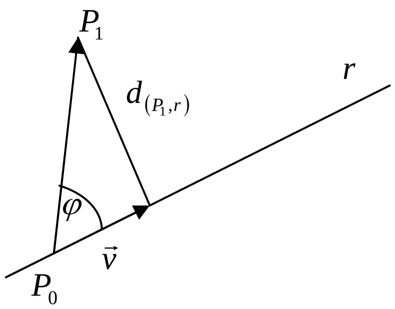
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}}$$

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas

$r_1 \perp r_2 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$

$r_1 // r_2 \Rightarrow \vec{u} = \lambda\vec{v}, \lambda \in \Re$

Distancia de un punto a una recta



$P_1(x_1, y_1, z_1) \notin r$ y $\vec{v} \,//\, r$

Considero $P_0(x_0, y_0, z_0) \in r$

Determino $\overrightarrow{P_0P_1}$

$\left\| \vec{v} x \overrightarrow{P_0P_1} \right\| = \|\vec{v}\| . \left\| \overrightarrow{P_0P_1} \right\| . sen\,\varphi$

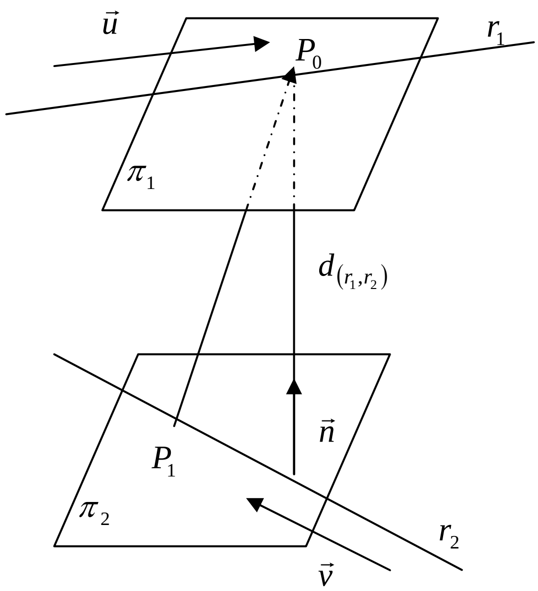
Pero $sen\,\varphi = \dfrac{d_{(P_1,r)}}{\left\| \overrightarrow{P_0P_1} \right\|} \Rightarrow d_{(P_1,r)} = \left\| \overrightarrow{P_0P_1} \right\| . sen\,\varphi$

$$\boxed{d_{(P_1,r)} = \frac{\left\| \vec{v} x \overrightarrow{P_0P_1} \right\|}{\|\vec{v}\|}}$$

Rectas Alabeadas

Dos rectas son alabeadas si y sólo si no son paralelas y no se cortan (la intersección entre ellas es el conjunto vacío).

Mínima distancia entre rectas alabeadas



$d_{(r_1,r_2)} = \left\| \Pr oy_{\vec{n}}\, \overrightarrow{P_1P_0} \right\|$

$d_{(r_1,r_2)} = \dfrac{\left| \overrightarrow{P_1P_0} . \vec{n} \right|}{\|\vec{n}\|} \; (i)$

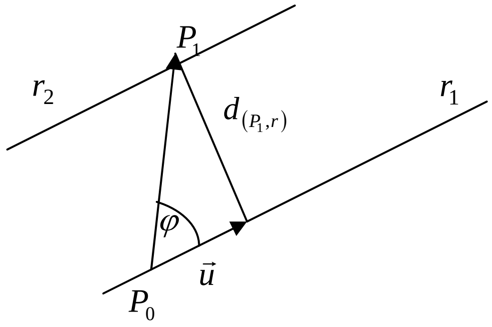
$P_0 \in r_1 \wedge P_1 \in r_2$

$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \,//\, r_1 \wedge \vec{v} \,//\, r_2 \\ \vec{n} \perp r_1 \wedge \vec{n} \perp r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} = \vec{u} x \vec{v}$

Reemplazando en (i)

$$\boxed{d_{(r_1,r_2)} = \frac{\left| \overrightarrow{P_1P_0} . (\vec{u} x \vec{v}) \right|}{\|\vec{u} x \vec{v}\|}}$$

Distancia entre rectas paralelas



$$r_1 : \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases} \lambda \in \Re \quad r_2 : \begin{cases} x = x_1 + t(ku_1) \\ y = y_1 + t(ku_2) \\ z = z_1 + t(ku_3) \end{cases} t, k \in \Re$$

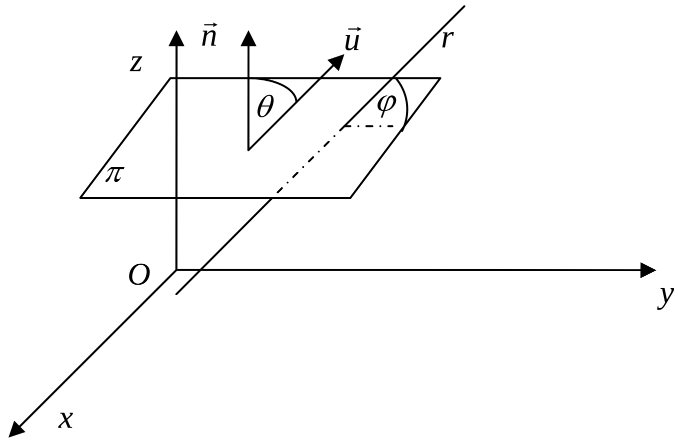
Determino $\overrightarrow{P_0P_1}$

$$\left\| \vec{u} x \overrightarrow{P_0P_1} \right\| = \|\vec{u}\| . \left\| \overrightarrow{P_0P_1} \right\| .sen\,\varphi$$

Pero $sen\,\varphi = \dfrac{d_{(r_1,r_2)}}{\left\| \overrightarrow{P_0P_1} \right\|} \Rightarrow d_{(r_1,r_2)} = \left\| \overrightarrow{P_0P_1} \right\| .sen\,\varphi$

$$\boxed{d_{(r_1,r_2)} = \frac{\left\| \vec{u} x \overrightarrow{P_0P_1} \right\|}{\|\vec{u}\|}}$$

Ángulo determinado por una recta y un plano



$P = \pi \cap r \qquad \vec{n} \perp \pi \qquad \vec{u} // r$

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \wedge \vec{n} = (a, b, c)$

$\varphi + \theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow sen\varphi = \cos\theta$

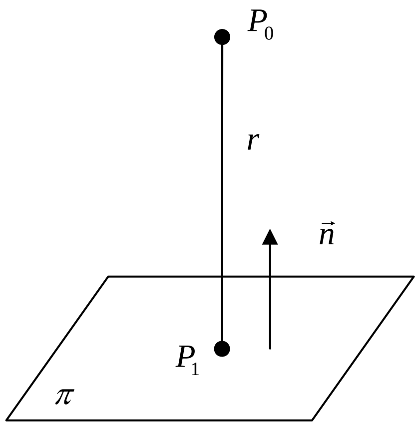
Pero $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}.\vec{n}}{\|\vec{u}\| . \|\vec{n}\|}$

$$\boxed{sen\varphi = \frac{a.u_1 + b.u_2 + c.u_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}}}}$$

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre recta y plano

$$r \,//\, \pi \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$$
$$r \perp \pi \Rightarrow \vec{u} \,//\, \vec{n} \Rightarrow \vec{u} = \lambda.\vec{n}, \lambda \in \Re$$

Proyección de un punto sobre un plano



Datos $\pi : ax + by + cz + d = 0$

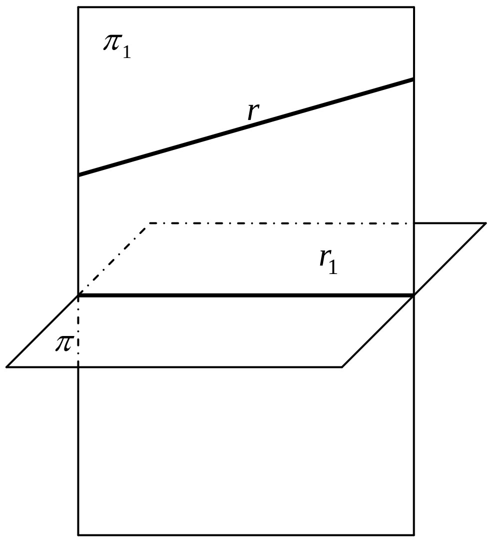
$P_0(x_0, y_0, z_0) \notin \pi$

Determino

$r : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) \quad \lambda \in \Re$

Finalmente $P_1 = \Pr oy_\pi P_0 = r \cap \pi$

Proyección de una recta sobre un plano



Datos $r : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3)$

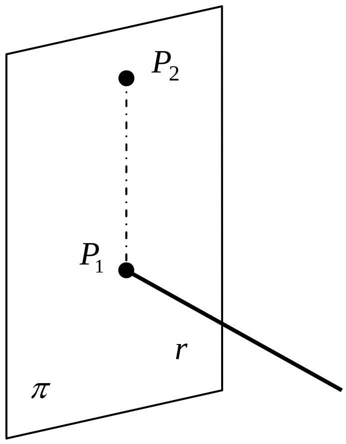
$\pi : ax + by + cz + d = 0$

Defino $\pi_1 \perp \pi$

$\pi_1 : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(a, b, c)$

Finalmente $r_1 = \Pr oy_\pi r = \pi \cap \pi_1$

Proyección de un punto sobre una recta



Datos $r:(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(u_1,u_2,u_3)$

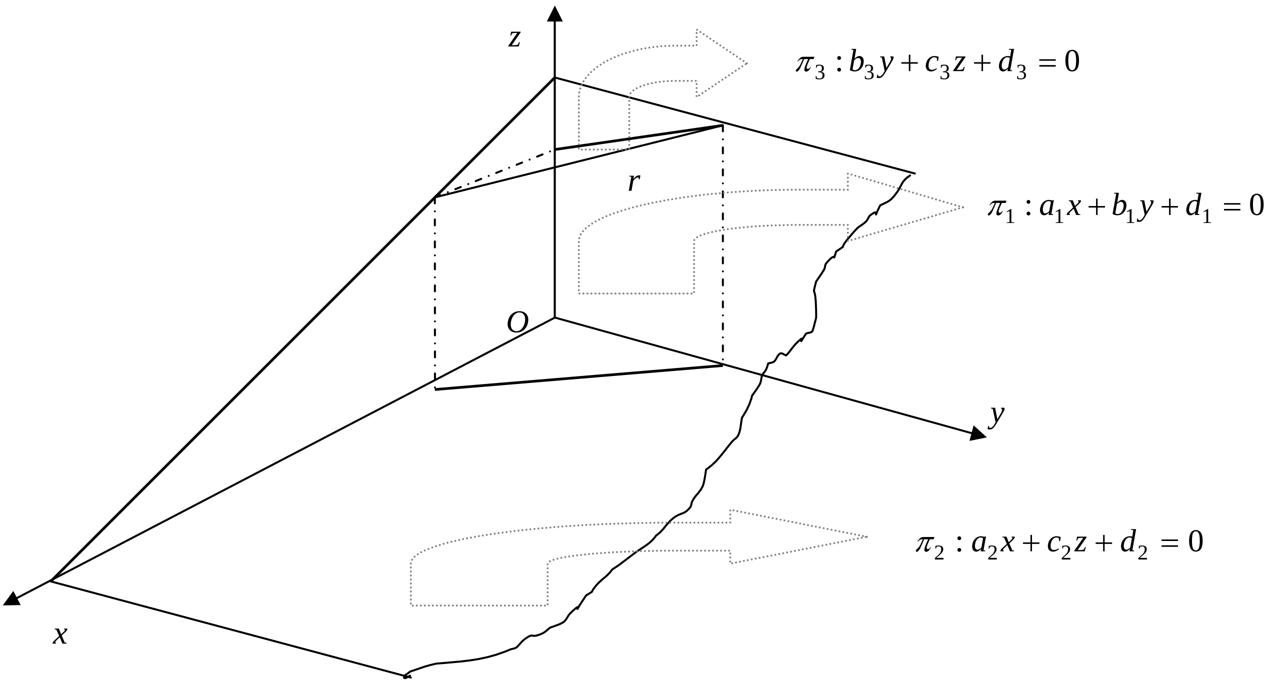
$P_2(x_2,y_2,z_2)$

Defino $\pi \perp r$ cuyo vector normal es (u_1,u_2,u_3)

y el punto que está contenido en π es $P_2(x_2,y_2,z_2)$

Finalmente $P_1 = \mathrm{Proy}_r P_2 = r \cap \pi$

Planos proyectantes de una recta



Son planos que contienen a la recta y además son perpendiculares a los planos coordenados.

Sea $r: \dfrac{x-x_0}{u_1} = \dfrac{y-y_0}{u_2} = \dfrac{z-z_0}{u_3}$

Hallo las ecuaciones de los planos de la siguiente manera:

$$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}\Rightarrow (x-x_0).u_2=(y-y_0)u_1$$
$$\Rightarrow u_2x-u_2x_0=u_1y-u_1y_0$$
$$\Rightarrow u_2x-u_1y+(u_1y_0-u_2x_0)=0$$

Haciendo $u_2=a_1, -u_1=b_1$ y $(u_1y_0-u_2x_0)=d_1$ obtengo la ecuación del plano perpendicular al XY en el cual está incluída la recta.

$$\boxed{\pi_1 : a_1x+b_1y+d_1=0}$$

$$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{z-z_0}{u_3}\Rightarrow (x-x_0)u_3=(z-z_0)u_1$$
$$\Rightarrow u_3x-u_3x_0=u_1z-u_1z_0$$
$$\Rightarrow u_3x-u_1z+(u_1z_0-u_3x_0)$$

Haciendo $u_3=a_2, -u_1=c_1$ y $(u_1z_0-u_3x_0)=d_2$ obtengo la ecuación del plano perpendicular al XZ en el cual está incluída la recta.

$$\boxed{\pi_2 : a_2x+c_2z+d_2=0}$$

$$\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}\Rightarrow (y-y_0)u_3=(z-z_0)u_2$$
$$\Rightarrow u_3y-u_3y_0=u_2z-u_2z_0$$
$$\Rightarrow u_3y-u_2z+(u_2z_0-u_3y_0)=0$$

Haciendo $u_3=b_3, -u_2=c_3$ y $(u_2z_0-u_3y_0)=d_3$ obtengo la ecuación del plano perpendicular al YZ en el cual está incluída la recta.

$$\boxed{\pi_3 : b_3y+c_3z+d_3=0}$$