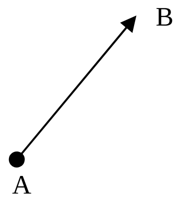
Introducción a los vectores geométricos

Muchas cantidades físicas (área, longitud, masa) se definen con un número real que representa la magnitud de la misma.
Otras cantidades físicas, denominadas vectores, no quedan definidas por completo hasta que se especifican una magnitud, una dirección (recta) y un sentido. Ejemplos: fuerza, velocidad, desplazamiento.

Representación

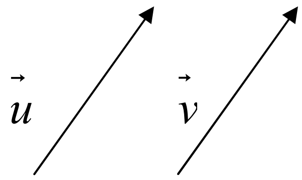


A : Origen B: Extremo

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Vectores libres equivalentes

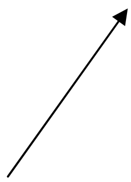
Dos vectores libres son equivalentes, equipolentes o iguales cuando tienen la misma longitud, dirección y sentido.



$\vec{u} = \vec{v}$

Vectores fijos equivalentes

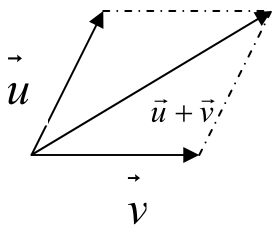
Dos vectores fijos son equivalentes cuando tienen la misma longitud, dirección, sentido, origen y extremo.

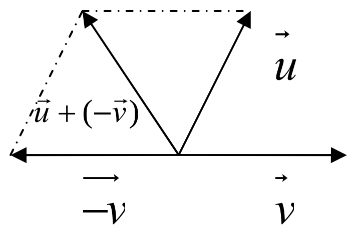


$\vec{v} \equiv \vec{w}$

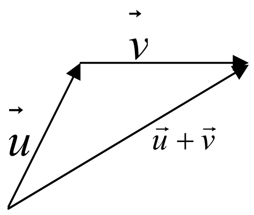
Adición y sustracción de vectores

Regla del Paralelogramo

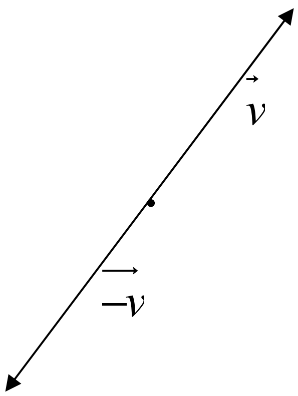




Regla de la poligonal



Vector Nulo
Es el vector de longitud cero



$\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{\mathbf{0}}$

$\vec{\mathbf{0}}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{v}$

$-\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$

Producto de un escalar por un vector

$k \in \Re \wedge \vec{v} \in V \Rightarrow k.\vec{v}=\vec{w}$

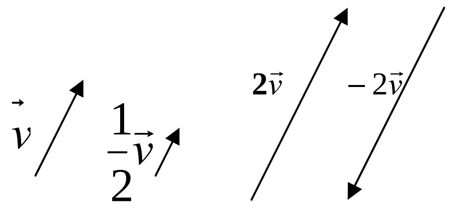
El producto de un escalar por un vector es otro vector con igual dirección que el primero.

i) Longitud de $\vec{w}$: se obtiene multiplicando k por la longitud de $\vec{v}$.
ii) Dirección de $\vec{w}$:

Si $k>0 \Rightarrow \vec{w}$ tiene la misma dirección de $\vec{v}$

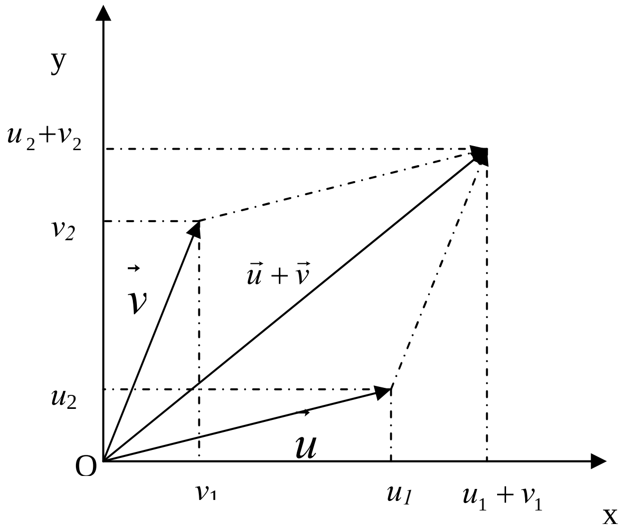
Si $k < 0 \Rightarrow \vec{w}$ tiene dirección opuesta a $\vec{v}$
Si $k = 0 \Rightarrow k.\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow k = 0 \vee \vec{v} = \vec{0}$

Ejemplos

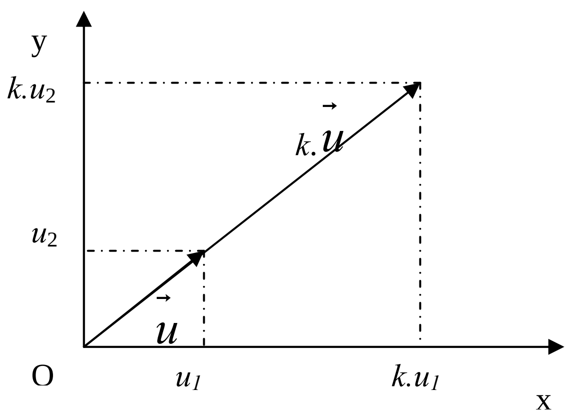


Vectores en R²

Utilizamos un sistema de coordenadas rectangulares. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores cualesquiera, ubicamos a ambos vectores haciendo coincidir sus orígenes con el origen del sistema de coordenadas rectangulares.

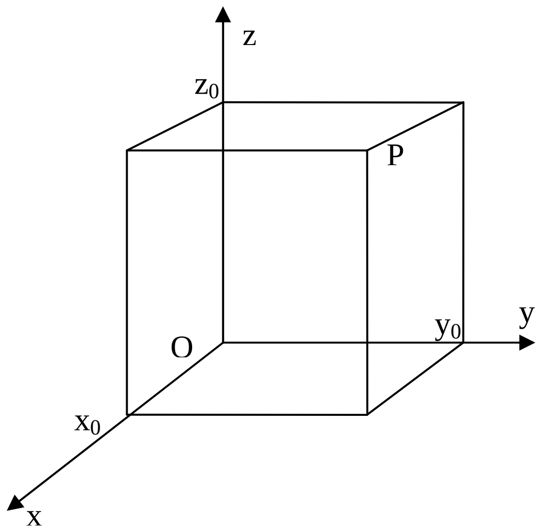


$\vec{u} = (u_1, u_2)$
$\vec{v} = (v_1, v_2)$
$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$



$\vec{u} = (u_1, u_2)$
$k.\vec{u} = (k.u_1, k.u_2)$

Coordenadas de un punto en R^3



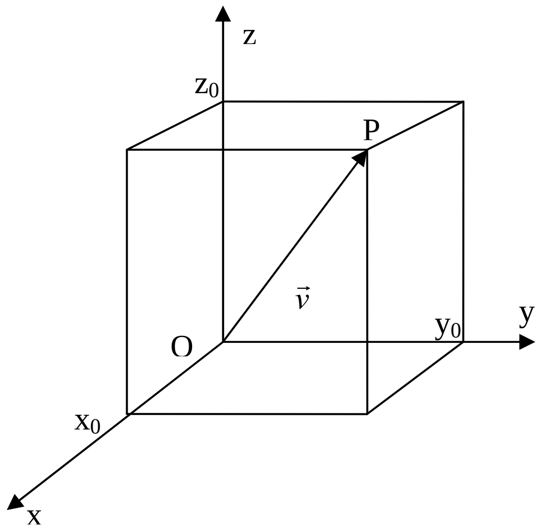
$P(x_0, y_0, z_0)$

Ejes coordenados: eje x, eje y, eje z
Planos coordenados: cada par de ejes determina un plano coordenado (plano XY, planos, plano YZ).

Para determinar las coordenadas de un punto en R^3 se hacen pasar por el punto P tres planos que sean paralelos a los planos coordenados. Luego x_0, y_0 y z_0 son los puntos de intersección de estos planos y los ejes coordenados.

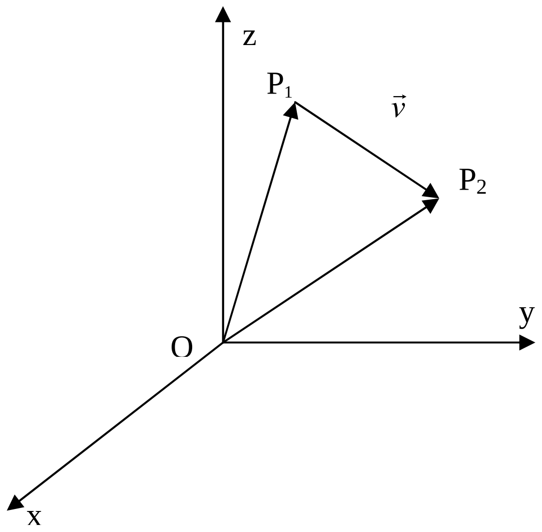
Vectores en R^3

Un vector en R^3 se ubica de modo tal que su origen coincida con el origen de un sistema rectangular de coordenadas. Entonces las coordenadas del extremo se conocen como las componentes del vector.



$\vec{v} = (x_0, y_0, z_0)$

Cuando el origen del vector no coincide con el origen del sistema de coordenadas, determinamos 2 vectores tales que uno de ellos tenga como origen el origen del sistema de coordenadas y como extremo el origen de $\vec{v}$. El otro vector tendrá como origen el origen de coordenadas y como extremo el extremo de $\vec{v}$.



$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$$
$$\overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1, z_1)$$
$$\overrightarrow{OP_2} = (x_2, y_2, z_2)$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Ley de composición interna (L.C.I.)

Ley de composición interna definida en un conjunto no vacío A, es toda función de $AxA \to A$.
Ejemplo: adición de vectores.
$(a,b) \in \Re^2$
$(c,d) \in \Re^2$
$(a+c, b+d) \in \Re^2$

Ley de composición externa (L.C.E.)

Sean dos conjuntos A y B, este último denominado de operadores sobre A. Una ley de composición externa definida en A con operadores de B, es toda función de $BxA \to A$.

Ejemplo: Sean $\alpha \in \Re$ y $(a,b) \in \Re^2$
$\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b) \Rightarrow (\alpha a, \alpha b) \in \Re^2$

Propiedades de la adición de vectores

$\forall\ \vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w} \in V$
1) L.C.I $\vec{u} \in V \wedge \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$
2) Asociativa $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3) Existencia de elemento neutro $\vec{0} \in V / \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4) Existencia de opuesto $\forall \vec{u} \in V, \exists -\vec{u} / \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
5) Conmutativa $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Propiedades del producto de escalares por vectores

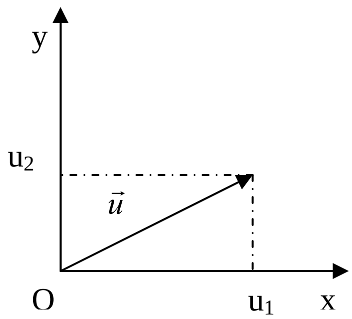
$\forall \alpha, \beta \in \Re; \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

1) L.C.E. $\alpha \in \Re \wedge \vec{v} \in V \Rightarrow \alpha\vec{v} \in V$
2) Asociatividad Mixta $\alpha.(\beta.\vec{u}) = (\alpha.\beta).\vec{u}$
3) Distributiva del producto respecto de la suma en V $\alpha.(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$
4) Distributiva del producto respecto de la suma en $\Re$ $(\alpha + \beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$
5) Existencia de unidad en $\Re$ $1 \in \Re / 1.\vec{v} = \vec{v}$

Norma de un vector

Es la longitud o medida del vector y se denota $\|\vec{u}\|$.

En R^2



Por T. de Pitágoras

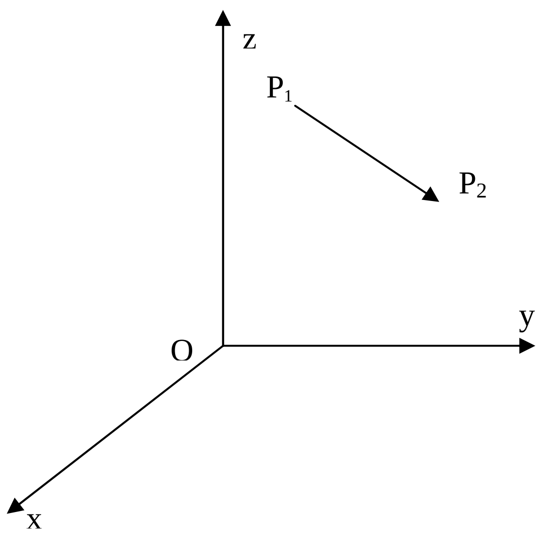
$\|\vec{u}\|^2 = u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2}$

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2}}}$$

En R^3

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} + u_3^{\ 2}}}$$

Distancia de un punto a una recta en R^3



$P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

d = $\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|$

d = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Normalización de un vector

Es el proceso de multiplicar un vector distinto del nulo por el recíproco de su longitud.

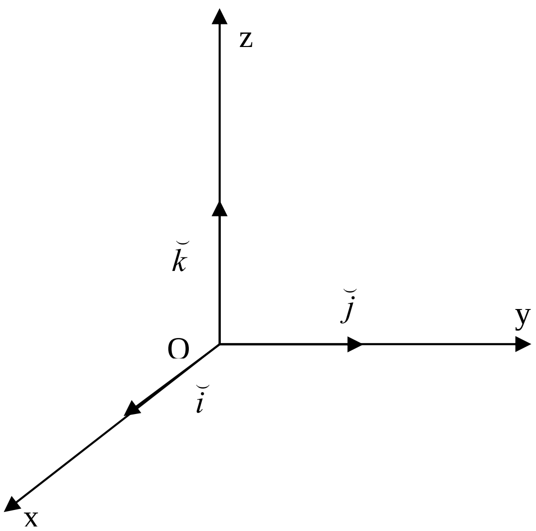
Sea $\vec{v} \in V \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$. Normalizar es $\breve{v} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} : \left\| \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| = 1$

Ejemplo: Hallar un vector ***w*** tal que tenga la misma dirección que un vector ***u*** y norma 1, $\vec{u} = (1,1,1)$

$$\vec{w} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \Rightarrow \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}.(1,1,1) \Rightarrow \vec{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Versores fundamentales

Son vectores que tienen norma 1 y la dirección de los ejes coordenados.



$\breve{i} = (1,0,0)$

$\breve{j} = (0,1,0)$

$\breve{k} = (0,0,1)$

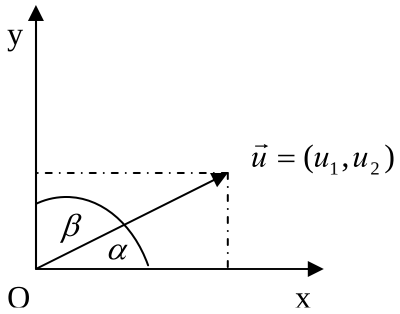
Forma canónica de un vector

Todo vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ puede expresarse como la suma de los productos de sus componentes por los versores fundamentales.

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow \vec{v} = v_1.\breve{i} + v_2.\breve{j} + v_3.\breve{k}$$

Cosenos directores de un vector

En R^2



α : es el ángulo determinado por el eje x y $\vec{u}$
β : es el ángulo determinado por el eje y y $\vec{u}$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{u_1}{\|\vec{u}\|}} \qquad \boxed{\cos\beta = \frac{u_2}{\|\vec{u}\|}}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow sen\alpha = \cos\beta$$

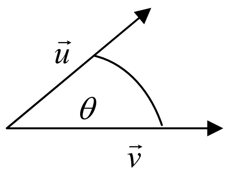
$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1}$$

En R^3
$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{u_1}{\|\vec{u}\|}} \qquad \boxed{\cos\beta = \frac{u_2}{\|\vec{u}\|}} \qquad \boxed{\cos\gamma = \frac{u_3}{\|\vec{u}\|}}$$

Producto Escalar

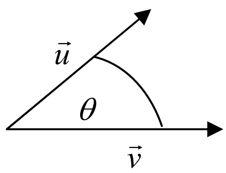
Sean $\vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$



Como resultado del producto escalar entre dos vectores obtenemos un escalar.
El producto escalar entre vectores <u>NO</u> es una ley de composición interna.

Caso particular: $si\ \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

Ángulo entre vectores



$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

$$\boxed{\theta = arc\cos\left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)}$$

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre vectores

$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

$\vec{u} // \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \lambda.\vec{v}, \lambda \in \Re$

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_2) / u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0 \wedge \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) / v_1 \neq 0, v_2 \neq 0, v_3 \neq 0 / \vec{u} // \vec{v}$

$(u_1, u_2, u_2) = \lambda(v_1, v_2, v_3)\ \lambda \in \Re \Rightarrow u_1 = \lambda v_1, u_2 = \lambda v_2, u_3 = \lambda v_3$

$$\boxed{\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}}$$

Propiedades del producto escalar

$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

1. $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$

   $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\|\cos 0$

   $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

   $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \|\vec{u}\|$

2. $$\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \begin{cases} 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} > 0 \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} < 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \end{cases}$$

3. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

   $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$

   $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos\theta$ Propiedad conmutativa en $\Re$

   $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

4. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

5. $k \in \Re \Rightarrow k(\vec{u}.\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v})$

Producto escalar entre los versores fundamentales

$\breve{i}.\breve{i}=1$	$\breve{i}.\breve{j}=0$	$\breve{i}.\breve{k}=0$
$\breve{j}.\breve{j}=1$	$\breve{j}.\breve{i}=0$	$\breve{j}.\breve{k}=0$
$\breve{k}.\breve{k}=1$	$\breve{k}.\breve{i}=0$	$\breve{k}.\breve{j}=0$

Producto escalar expresado como la suma de los productos de las componentes

$$Sean\ \vec{u},\vec{v}\in\Re^3 \quad \vec{u}=u_1\breve{i}+u_2\breve{j}+u_3\breve{k} \quad \wedge \quad \vec{v}=v_1\breve{i}+v_2\breve{j}+v_3\breve{k}$$

$$\vec{u}.\vec{v}=(u_1\breve{i}+u_2\breve{j}+u_3\breve{k}).(v_1\breve{i}+v_2\breve{j}+v_3\breve{k})$$

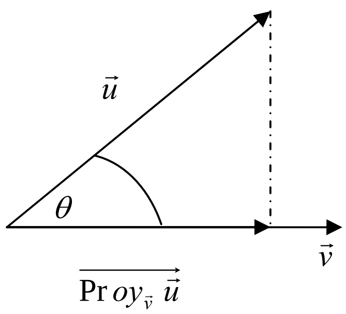
$$\vec{u}.\vec{v}=u_1\breve{i}.v_1\breve{i}+u_1\breve{i}.v_2\breve{j}+u_1\breve{i}.v_3\breve{k}+u_2\breve{j}.v_1\breve{i}+u_2\breve{j}.v_2\vec{j}+u_2\breve{j}.v_3\breve{k}+u_3\breve{k}.v_1\breve{i}+u_3\breve{k}.v_2\breve{j}+u_3\breve{k}.v_3\breve{k}$$

$$\vec{u}.\vec{v}=u_1v_1(\breve{i}.\breve{i})+u_1v_2(\breve{i}.\breve{j})+u_1v_3(\breve{i}.\breve{k})+u_2v_1(\breve{j}.\breve{i})+u_2v_2(\breve{j}.\breve{j})+u_2v_3(\breve{j}.\breve{k})+u_3v_1(\breve{k}.\breve{i})+u_3v_2(\breve{k}.\breve{j})+$$
$$+u_3v_3(\breve{k}.\breve{k})$$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}$$

$$Sean\ \vec{u},\vec{v}\in\Re^2 \Rightarrow \boxed{\vec{u}.\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2}$$

Proyección ortogonal de un vector en la dirección de otro



$$|\vec{u}.\vec{v}|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\cos\theta|$$

$$\cos\theta=\frac{\left\|\overrightarrow{\Pr oy_{\vec{v}}\ \vec{u}}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

$$|\vec{u}.\vec{v}|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\frac{\left\|\overrightarrow{\Pr oy_{\vec{v}}\ \vec{u}}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

$$\left\|\overrightarrow{\Pr oy_{\vec{v}}\ \vec{u}}\right\|=\frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$$

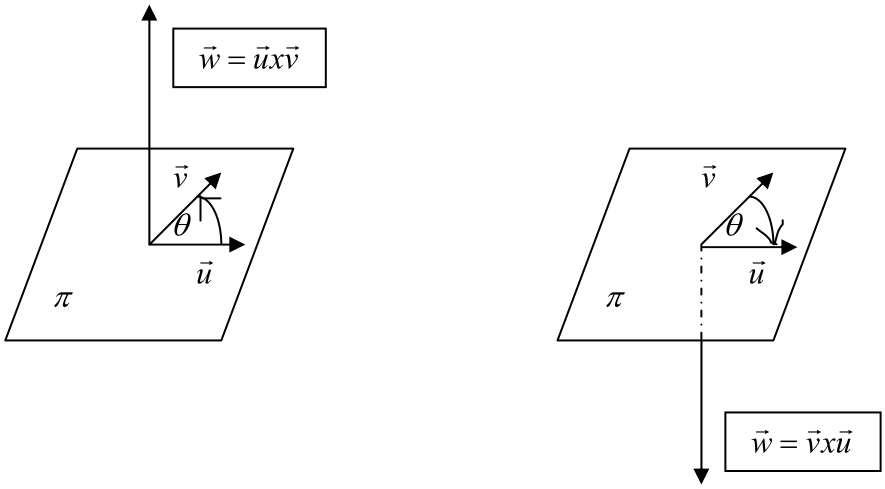
El vector $\overrightarrow{\Pr oy_{\vec{v}}\ \vec{u}}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{\Pr oy_{\vec{v}}\ \vec{u}}=\frac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{v}\|}\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\Pr oy_{\vec{v}}\ \vec{u}}=\frac{(\vec{u}.\vec{v}).\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}}$$

Producto vectorial

Solamente está definido para vectores de R^3.

Sean $\vec{u} \in \Re^3 \wedge \vec{v} \in \Re^3 \Rightarrow \|\vec{u}x\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| sen\theta$



El producto vectorial entre dos vectores nos da como resultado otro vector que es perpendicular al plano en que están “contenidos” los dos vectores.
El sentido lo determinamos por la siguiente convención: si consideramos que los vectores están “contenidos” en el plano XY y el ángulo en el sentido de las agujas del reloj, entonces $\vec{w}$ va a tener el sentido del semieje negativo de z. Si el ángulo lo consideramos en el sentido contrario al de las agujas del reloj, entonces $\vec{w}$ va a tener el sentido del semieje positivo de z.

Propiedades del producto vectorial

Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \Re^3 \wedge \alpha \in \Re$

1. $\vec{u}.(\vec{u}x\vec{v}) = 0$

2. $\vec{v}.(\vec{u}x\vec{v}) = 0$

3. Identidad de Lagrange: $\|\vec{u}x\vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}x\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 sen^2\theta \\
&= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2\theta \\
&= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2
\end{aligned}$$

4. $\vec{u}x\vec{v} = -(\vec{v}x\vec{u})$

5. $\vec{u}x(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}x\vec{v} + \vec{u}x\vec{w}$

6. $(\vec{u}+\vec{v})x\vec{w}=(\vec{u}x\vec{w})+(\vec{v}x\vec{w})$

7. $\alpha(\vec{u}x\vec{v})=(\alpha\vec{u})x\vec{v}=\vec{u}x(\alpha\vec{v})$

8. $\vec{u}x\vec{0}=\vec{0}x\vec{u}=\vec{0}$

9. $\vec{u}x\vec{u}=\vec{0}$

Producto vectorial de versores canónicos

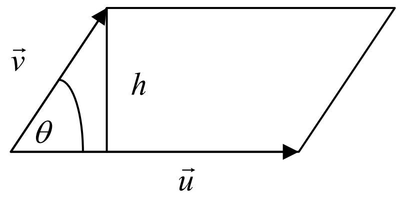
$\breve{i}.xi=\vec{0}$	$\breve{i}x\breve{j}=\breve{k}$	$\breve{i}x\breve{k}=-\breve{j}$
$\breve{j}x\breve{j}=\vec{0}$	$\breve{j}x\breve{i}=-\breve{k}$	$\breve{j}x\breve{k}=\breve{i}$
$\breve{k}x\breve{k}=\vec{0}$	$\breve{k}x\breve{i}=\breve{j}$	$\breve{k}x\breve{j}=-\breve{i}$

Expresión cartesiana del producto vectorial

$$\vec{u}x\vec{v}=(u_1\breve{i}+u_2\breve{j}+u_3\breve{k})x(v_1\breve{i}+v_2\breve{j}+v_3\breve{k})$$
$$\vec{u}x\vec{v}=(u_1\breve{i}+u_2\breve{j}+u_3\breve{k})xv_1\breve{i}+(u_1\breve{i}+u_2\breve{j}+u_3\breve{k})xv_2\breve{j}+(u_1\breve{i}+u_2\breve{j}+u_3\breve{k})xv_3\breve{k}$$
$$\vec{u}x\vec{v}=u_1\breve{i}xv_1\breve{i}+u_2\breve{j}xv_1\breve{i}+u_3\breve{k}xv_1\breve{i}+u_1\breve{i}xv_2\breve{j}+u_2\breve{j}xv_2\breve{j}+u_3\breve{k}xv_2\breve{j}+u_1\breve{i}xv_3\breve{k}+u_2\breve{j}xv_3\breve{k}+$$
$$+u_3\breve{k}xv_3\breve{k}$$
$$\vec{u}x\vec{v}=u_1v_1(\breve{i}x\breve{i})+u_2v_1(\breve{j}x\breve{i})+u_3v_1(\breve{k}x\breve{i})+u_1v_2(\breve{i}x\breve{j})+u_2v_2(\breve{j}x\breve{j})+u_3v_2(\breve{k}x\breve{j})+u_1v_3(\breve{i}x\breve{k})+$$
$$+u_2v_3(\breve{j}x\breve{k})+u_3v_3(\breve{k}x\breve{k})$$
$$\vec{u}x\vec{v}=u_1v_1\vec{0}+u_2v_1(-\breve{k})+u_3v_1\breve{j}+u_1v_2\breve{k}+u_2v_2\vec{0}+u_3v_2(-\breve{i})+u_1v_3(-\breve{j})+u_2v_3\breve{i}+u_3v_3\vec{0}$$
$$\vec{u}x\vec{v}=(u_2v_3-u_3v_2)\breve{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\breve{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\breve{k}$$
$$\vec{u}x\vec{v}=\breve{i}\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}-\breve{j}\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}+\breve{k}\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{u}x\vec{v}=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}}$$

Interpretación geométrica de la norma del producto vectorial



Área del paralelogramo=$\|\vec{u}\|h$

$h = \|\vec{v}\| sen\theta$

Área del paralelogramo=$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| sen\theta$

$$\boxed{\text{Área del paralelogramo}=\|\vec{u}x\vec{v}\|}$$

Producto mixto

Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \Re^3 \,/\, \vec{a} = (a_1, a_2, a_3); \vec{b} = (b_1, b_2, b_3); \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Producto mixto son los productos $\vec{a}.(\vec{b}x\vec{c})$.

El producto mixto entre tres vectores da como resultado un número real.

El producto mixto solo está definido para vectores de R^3.

$$\vec{a}.(\vec{b}x\vec{c}) = (a_1, a_2, a_3).[(b_1, b_2, b_3)x(c_1, c_2, c_3)]$$

$$\vec{a}.(\vec{b}x\vec{c}) = (a_1, a_2, a_3).\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

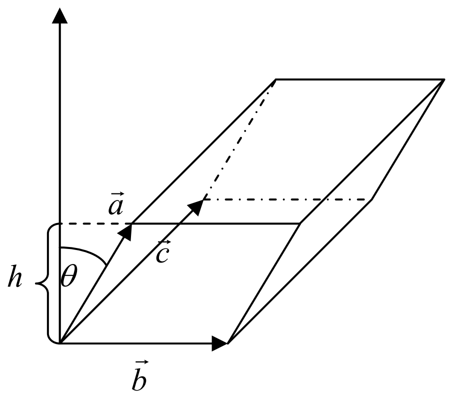
$$\vec{a}.(\vec{b}x\vec{c}) = (a_1\breve{i} + a_2\breve{j} + a_3\breve{k}).[(b_2c_3 - b_3c_2)\breve{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\breve{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\breve{k}]$$

$$\vec{a}.(\vec{b}x\vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}x\vec{c}) = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}.(\vec{b}x\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Interpretación geométrica del valor absoluto del producto mixto



Es el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Volumen = Sup paralelogramo . h

$h = \left| \|\vec{a}\| \cos\theta \right|$

Sup paralelogramo = $\|\vec{b} x \vec{c}\|$

Volumen = $\left| \|\vec{a}\| \|\vec{b} x \vec{c}\| \cos\theta \right|$

$$\boxed{\text{Volumen} = \left| \vec{a}.(\vec{b} x \vec{c}) \right|}$$

Propiedad producto mixto

La condición necesaria y suficiente para que tres vectores sean coplanares (vectores paralelos a un mismo plano) es que el producto mixto entre ellos sea cero.

$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \Re^3 \,/\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ coplanares $\Leftrightarrow \vec{a}.(\vec{b} x \vec{c}) = 0$