SUCESIONES

1. INTRODUCCION

Las sucesiones son objetos matemáticos que permiten ordenar un grupo de elementos a los cuales para manejarse con ellos, y se decide para ello asignarles números naturales como etiquetas. Por ejemplo, si tenemos un grupo de páginas que quiero ordenar a cada una le asignamos un número. Lo que asignamos a un número genérico n se llama término n-ésimo.

La sucesión es **finita** cuando la asignación a la que nos referimos termina en algún momento, caso contrario es **infinita**.

Las sucesiones de las que nos ocuparemos son aquellas en las que los "grupos de elementos" que asignamos son números. Estas sucesiones se denominan **sucesiones numéricas**.

Las sucesiones sirven para estudiar representar y predecir los fenómenos que ocurren en el tiempo en forma intermitente, es decir aparecen separadamente. Si registramos los vientos máximos de cada día y formamos una lista de números indicando con 1,2,3,... los primero, segundo tercero,... día de medición y le asociamos el valor de viento máximo del día, obtenemos una sucesión. ¿Para qué nos sirve? Y si registramos el peso de los corderos durante el primer mes, ¿para qué sirve?

Estudiar y conocer la tendencia de una sucesión tiene innegables ventajas. Si por ejemplo, contamos con los registros del precio de la lana durante los últimos diez años, podríamos concluir acerca de sus fluctuaciones y de las expectativas que el mismo aumente para la próxima temporada o determinar en que mes resulta conveniente comprar o vender.

Si el fenómeno que estamos estudiando, ocurre a lo largo de mucho tiempo, nos interesará el **comportamiento asintótico** del mismo, esto es, que pasará cuando la variable tiempo de la que depende, tienda a hacerse infinita. Si por ejemplo, medimos el número de amebas en un cultivo cada segundo y llevamos una lista de ello, y deseamos saber cuantas hay después de dos días, el número es tan grande que puede considerarse infinito.

2. DEFINICION DE SUCESIONES

Veamos la secuencia de números primos

$$2,3,5,7,11,13, \ldots$$

A esta tira de números se la llama sucesión. Es una cadena de números, **ordenados,** uno detrás de otro, que en este caso no tiene fin.

Cada uno de los elementos de una sucesión se llama **término.** Se designan

$$a_1,a_2,a_3, \ldots$$

Definición: Se llama sucesión a una función que hace corresponder a cada número natural un número real:

$$N \xrightarrow{a} R$$

Veamos distintas sucesiones:

(1) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

a_1= 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16, a_5=25, ...
Podemos hallar el término genérico o n-ésimo $a_n = n^2$.

(2) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

En el caso de los números primos no existe expresión o fórmula que nos permita obtener un número primo conociendo el lugar que ocupa.

(3) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 2, c_4 = 3, c_5 = 5, c_6 = 8, ...
El término n-ésimo se obtiene de relacionar el de esa posición con los de posiciones anteriores $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$. No obstante, el primer y segundo término deben ser fijados.

Como vemos, existen sucesiones donde el término n-ésimo puede ser calculado en función del lugar que ocupa, en otros casos la forma de conocer un término es conociendo los anteriores. Se dice que en este caso el término n-ésimo viene dado por **recurrencia.**

2.1 DEFINICIONES DE RECURRENCIA

La definición de sucesiones en forma recursiva se hacen indicando
(a) el o los valores del término o términos iniciales y
(b) una regla, llamada *fórmula de recursión* para calcular cualquier término posterior a partir de los términos que lo preceden.

EJERCICIOS

1. Escriba cinco términos más de la sucesión $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots$. ¿Cuál es su término número 30?

2. Escriba los cinco primeros términos de $a_n = \dfrac{4n^2 - 2n + 3}{n+1}$.

3. Escriba el término n-ésimo de la sucesión $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots$

3. OPERACIONES CON SUCESIONES

Igualdad $(a_n) = (b_n)$, si $\forall\ n \in$ N se cumple que $a_n = b_n$
Suma y diferencia $(a_n) \pm (b_n) = (a_n \pm b_n)$
Producto por un real $k.(a_n) = (k.a_n)$
Producto de sucesiones $(a_n) . (b_n) = (a_n.b_n)$
Cociente $a_n/b_n = (a_n/b_n)$ siendo $b_n \neq 0$, $\forall\ n \in$ N

4. SUCESIONES CONVERGENTES Y DIVERGENTES

Luego de resueltos los ejercicios podemos observar que en el caso (1) los términos se van acercando cada vez más a un cierto valor, que en este caso es cero. A este valor se le llama **límite** de la sucesión. Diremos que la sucesión es **convergente**.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

En cambio en el ejercicio (2) los términos son cada vez mayores, y en este caso decimos que la sucesión es **divergente.**

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

La sucesión (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...) no tiene límite. Es también divergente.

5. LIMITE DE UNA SUCESION

Decimos que el límite de una sucesión *(a_n)* es L y escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$
si podemos conseguir que $|a_n - L|$ sea tan pequeño como queramos, sin más que darle a n valores tan grandes como sea necesario.

Definición: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ *sí y sólo sí* $|a_n - L| < \varepsilon$ *sin más que tomar* $n \geq N$.

Esto significa que, si queremos que los términos de la sucesión se separan de L menos que una cierta distancia ε lo podemos conseguir para los términos posteriores a un cierto número natural N. Cuanto más pequeño sea ε más grande tendrá que ser N.
Observemos en la Figura 1 que ε significa el ancho de una banda alrededor de L dentro de la cual queremos que estén todos los términos de la sucesión a partir de uno de ellos. Cuanto más estrecha sea la banda, más avanzado estará el término a partir del cual todos caen dentro de ella.

EJEMPLO

Usando la definición de limite, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} \neq \frac{3}{2}$.

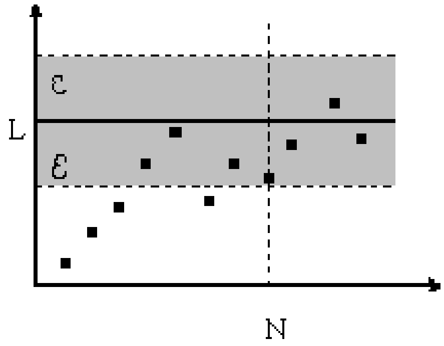

FIGURA 1

Consideramos el entorno ($\frac{3}{2}-\varepsilon, \frac{3}{2}+\varepsilon$) a fin de verificar para que valores de n se cumple que

$$\frac{2n1}{n+1} \in \left(\frac{3}{2}-\varepsilon, \frac{3}{2}+\varepsilon \right)$$

Vamos a operar sobre la condición recientemente expuesta para saber que valores de n cumplen

$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2(2n+1)-3(n+1)}{2(n+1)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{4n+2-3n-3}{2(n+1)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n-1}{2n+2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n-1}{2n+2} \right| = \frac{n-1}{2n+2} \; \forall n \in N$$

$$\frac{n-1}{2n+2} < \varepsilon$$

$$n-1 < 2\varepsilon n + 2\varepsilon$$
$$n(1-2\varepsilon) < 1+2\varepsilon$$

Si tomamos ε= 1/3

$$n(1-2.\tfrac{1}{3}) < 1+2.\tfrac{1}{3}$$
$$n.\tfrac{1}{3} < \tfrac{5}{3}$$
$$n < 5$$

Esto significa que tomando el valor propuesto para ε, sólo los primeros 4 términos de la sucesión están dentro del entorno elegido, quedando fuera los infinitos restantes términos.

Recordemos que por definición de limite de una sucesión, elegido un ε debe quedar definido un N / ∀ n ≥ N, $\left| a_n - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$.

EJERCICIOS

Calcular los siguientes límites:

(1) $a_n = \dfrac{3n+5}{3n-2}$

(2) $b_n = \dfrac{5n-1}{3n^2+7}$

(3) $c_n = \dfrac{7n^3+3}{n^2+2}$

6. PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES CONVERGENTES

Dos sucesiones cualesquiera pueden sumarse, restarse, multiplicarse, dividirse y elevarse una a la otra haciéndolo término a término. El único problema que puede surgir es que, en el cociente, algún término de la sucesión denominador sea 0, pues no se puede dividir por 0. Tampoco se pueden extraer raíces cuadradas de índice par a los términos negativos de cualquier sucesión.

Si $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \to \infty} b_n = b$, entonces:

- $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = a - b$
- $\lim_{n \to \infty} (a_n * b_n) = a * b$
- $\lim_{n \to \infty} (a_n : b_n) = a : b$, *si* $b \neq 0$.
- $\lim_{n \to \infty} a_n^{b_n} = a^b$ si no son a la vez a = 0 y b = 0.
- Si además $\forall$ n $a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$

Si $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ entonces:

- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$ salvo que k sea par y a < 0.
- $\lim_{n \to \infty} K * a_n = K * a$

Teorema del emparedado: Si existen tres sucesiones a_n, b_n y c_n, que cumplen $a_n \leq b_n \leq c_n$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n = c$$

entonces $\lim_{n \to \infty} b_n = c$.

Observemos que todas estas propiedades son dicen que si las sucesiones que intervienen en una operación son convergentes, la sucesión resultante es también convergente y su límite es el resultado de efectuar la misma operación con los límites de las componentes.
La única condición que se exige es que la operación sea permitida, por lo que se excluye la división por cero y la potencia 0^0.

7. SUCESIONES DIVERGENTES

Decimos que una sucesión a_n tiende a infinito si podemos conseguir que a_n sea tan grande como queramos dándole a *n* valores tan grandes como sea necesario.
Suele notarse

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty,$$

pero en realidad no existe el límite y la sucesión es divergente. El símbolo ∞ no es un número, y por lo tanto no debe ser tratado como tal.

Existen otras sucesiones, como por ejemplo

1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, ...

que son divergentes, pero que no tienden ni a ∞ ni a -∞. Para que tienda a infinito hace falta que a partir de un término, todos superen una franja prefijada.

Definición: $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ *equivale a decir que podemos conseguir que dado un valor K positivo,* $|a_n| > K$ *sin más que tomar* $n \geq N$.

8. PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES DIVERGENTES

- Si $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, y $a_n \neq 0$, $\forall n$, entonces $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{|a_n|} = +\infty$.
- Si $\lim_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$, entonces $\lim_{n \to \infty} 1/a_n = 0$.
- Si $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \to \infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n * b_n) = \begin{cases} +\infty, a > 0 \\ -\infty, a < 0 \end{cases}$

Aquí resulta importante mencionar, cuales son **indeterminaciones** matemáticas. Cuando decimos que el límite de una sucesión es indeterminado, queremos decir que, si nos fijamos solamente en los límites de las sucesiones componentes no sabemos cuál puede ser el resultado final. Por ello, para el cálculo, debemos hacer desaparecer la indeterminación..

Indeterminaciones			
$\infty + (-\infty)$	$\infty \cdot 0$	$\frac{0}{0}$	∞^0
$\infty - \infty$	$-\infty \cdot 0$	1^{∞}	0^0
$(-\infty) - (-\infty)$	$\frac{\infty}{\infty}$	$1^{-\infty}$	

9. SUCESIONES MONOTONAS

Dada una sucesión podemos plantearnos si es convergente o no, y en caso de serlo, a que valor converge, o sea cual es su límite. Para ciertas sucesiones puede saberse que son convergentes, pero no conocer exactamente a que valor converge.

Por ello resulta conveniente precisar los conceptos de sucesión creciente, decreciente y monótona.

9.1 SUCESIONES CRECIENTES, DECRECIENTES Y MONOTONAS

Definición: *Sea una sucesión a_n, diremos que es*
- *creciente : si $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n \in N$*
- *decreciente : si $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \in N$*
- *monótona : si es creciente o decreciente.*

9.2 SUCESIONES ACOTADAS

Una sucesión (a_n) está acotada superiormente si existe un número M tal que $a_n \leq M$ para todo n.

Si los términos de una sucesión creciente (a_n) están **acotados superiormente**, entonces decimos que tiene limite M y M es el extremo superior o **supremo** del conjunto formado por los elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Análogamente, para sucesiones decrecientes **acotadas inferiormente**, existe el límite de la sucesión y este limite es el extremo inferior o **ínfimo** del conjunto que forman los términos de la sucesión.

EJEMPLO

Probar que la sucesión cuyo término general es $a_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ es creciente, acotada y tiene límite.

(i) Veamos que (a_n) es creciente. Para ello debe cumplirse que

$$a_{n+1} \geq a_n$$

Construyamos la expresión de a_{n+1}

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)-3}{(n+1)+1} = \frac{2n+2-3}{n+2} = \frac{2n-1}{n+2}$$

Debemos entonces probar que

$$\frac{2n-1}{n+2} \geq \frac{2n-3}{n+1}$$

operando

$$(2n-1)(n+1 \geq (2n-3)(n+2)$$

$$2\cancel{n}^2 + 2n - n - 1 \geq 2\cancel{n}^2 + 4n - 3n - 6$$

$$\cancel{n} - 1 \geq \cancel{n} - 6$$

$$-1 \geq -6$$

Como es cierta la conclusión a que llegamos, podemos afirmar que la hipótesis de la que partimos es cierta, o sea que, $a_{n+1} \geq a_n$. De aquí, hemos probamos que la sucesión es creciente.

(ii) Queremos ahora demostrar que (a_n) es acotada.

El primer término de la sucesión es

$$a_1 = \frac{2.1-3}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

Como la sucesión es creciente, los restantes términos serán mayores que el primero. Si es acotada debe cumplirse que

$$a_n \leq c$$

donde representamos con c a la cota. Debemos analizar que condiciones debe cumplir *n* para verificar la desigualdad anterior.

$$\frac{2n-3}{n+1} \leq c$$

$$2n-3 \leq c(n+1)$$

$$2n-3 \leq cn+c$$

$$n(2-c) \leq 3+c$$

Si elijo $c > 2$, $2 - c < 0$, por lo tanto

$$n \geq \frac{3+c}{2-c}$$

Esto se verifica siempre ya que $n \in N$ y el signo del cociente es negativo, porque el numerador es positivo y el denominador negativo.

Podemos por tanto concluir que (a_n) es acotada.

(iii) Como la sucesión es creciente y acotada, tiene límite y se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-(3/n)}{1+(1/n)} = 2\,.$$