UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

UTN.BA AULAS VIRTUALES

UNIDAD 3

Espacios vectoriales

Decano: Ing. Guillermo Oliveto
Secretario Academico: Ing. Marcelo Giura
DIECV: Lic. Karina Cuzzani, Lic. Rosa Cicala
Autores: Prof. Isabel Pustilnik y Federico Gómez

Íconos

Ejemplo

Ejercicio para el Lector

Espacios vectoriales

En las unidades anteriores vimos que el álgebra de vectoresy el álgebra de matrices presentan similitudes. Pudimos observar que laspropiedades de la suma (de vectores o de matrices) y del producto por unescalar son idénticas en ambos conjuntos.

En esta unidad, generalizaremos el concepto de *vector*a partir de estas propiedades en común que hemos señalado para vectoresgeométricos y matrices.

Definición de espaciovectorial

Un ***espacio vectorial*** es un conjunto no vacío V deobjetos, llamados ***vectores***, en el que se han definido dosoperaciones: la suma y el producto por un escalar (número real) sujetas a losdiez axiomas que se dan a continuación. Los axiomas deben ser válidos paratodos los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ en V ytodos los escalares α y β reales.
Llamamos $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ a la suma de vectores en$V$,y $\alpha\boldsymbol{v}$ al producto de un número real α porun vector $\boldsymbol{v} \in V$.

1. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in V$
2. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
3. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$
4. $Existe\ un\ vector\ nulo\ \ \boldsymbol{0_V} \in V\ \ tal\ que\ \ \boldsymbol{v}+\boldsymbol{0_V} = \boldsymbol{v}$
5. $Para\ cada\ \boldsymbol{v}\ en\ V, existe\ un\ opuesto\ (-\boldsymbol{v}) \in V\ \ tal\ que\ \ \boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0_V}$
6. $\alpha\boldsymbol{v} \in V$
7. $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$
8. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v}$
9. $\alpha(\beta\boldsymbol{v}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{v}$
10. $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

Observación: En la definición anterior, cuando decimos“escalares” nos estamos refiriendo a números reales. En este caso, se dice que V esun *espacio vectorial real*.
También es posible que los escalares pertenezcan a otroconjunto numérico, por ejemplo los números complejos con los cualestrabajaremos en la última unidad.

Ejemplo 1

De acuerdo con las propiedades que vimos en la primeraunidad, podemos afirmar que $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial.
Los espacios $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$,son los ejemplos principales de espacios vectoriales. La intuición geométricadesarrollada para R^3 nos ayudará a entender y visualizarmuchos conceptos de esta unidad.
Los vectores de $\mathbb{R}^n$ son n-uplas de números reales, osea:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\ ,\ \ con\ \ x_i \in \mathbb{R}\}$$

En $\mathbb{R}^n$, la suma de vectores y el productopor un escalar se definen así:
Sean $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)\ \ \ y\ \ \ v = (v_1, v_2, \dots v_n) \in \mathbb{R}^n$

$$u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \dots, \alpha v_n) \in \mathbb{R}^n$$

Puede comprobarse que las operaciones definidas verificanlos axiomas de espacio vectorial.

Ejemplo 2

De acuerdo con las propiedades enunciadasen la segunda unidad, para cada m y n $\mathbb{R}^{mxn}$ es un espaciovectorial.
Tenemos por ejemplo $\mathbb{R}^{2x3}$, espaciovectorial cuyos vectores son las matrices de 2×3.

Ejemplo 3

Llamemos P_2 al conjunto de polinomios de grado menoro igual que 2, incluyendo el polinomio nulo.

Recordemos la suma de polinomios y la multiplicación por unescalar:

Dados $p(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 \in P_2$ y $q(x) = b_o + b_1x + b_2x^2 \in P_2$

Definimos las operaciones:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = (a_o + b_o) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \in P_2$$
$$(\alpha p)(x) = \alpha p(x) = (\alpha a_o) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 \in P_2$$

Puede demostrarse que estas operaciones verifican todos losaxiomas de espacio vectorial.

En particular, el vector nulo en este espacio es el *polinomionulo*, es decir el polinomio cuyos coeficientes son todos iguales a cero.

Generalizando, para cualquier $n \geq 0$,el conjunto P_n de todos los polinomios de grado menoro igual que n (incluyendo el polinomio nulo) es unespacio vectorial.

Observación:

¿Por qué no definimos P_n como el conjunto de polinomios degrado exactamente igual a n? Si lo definiéramos así,no sería un espacio vectorial como se muestra en el siguiente ejemplo:

$p(x) = x^2$ y $q(x) = -x^2 + 1$ son polinomios de grado 2, pero lasuma es un polinomio de grado cero.

Entonces no se verificaría el primer axiomade espacio vectorial (la suma de vectores de un espacio vectorial V debeestar en V).

Propiedades de los c espacios vectoriales

A partir de los axiomas de espacios vectoriales, pueden demostrarse estas propiedades que resultan "naturales":

Propiedad 1

$$0\,\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_V$$

Propiedad 2

$$\alpha\,\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$$

Propiedad 3

$$(-\alpha)\boldsymbol{u} = -(\alpha\boldsymbol{u})$$

En particular, para $\alpha = 1$:

$$(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$$

Propiedad 4

$$\alpha\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_V \;\Rightarrow\; \alpha = 0 \;\;\vee\;\; \boldsymbol{u} = \mathbf{0}_V$$

Veamos cómo puede demostrarse esta última propiedad:

Si $\alpha = 0$, se cumple laproposición.

Si $\alpha \neq 0$, podemos multiplicar por $\frac{1}{\alpha}$:

$$\alpha\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_V \;\Rightarrow\; \frac{1}{\alpha}\,\alpha\,\boldsymbol{u} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{0}_V \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u} = \mathbf{0}_V$$ ¡demostrado!

Subespacios vectoriales

Definición

Sea V un espacio vectorial y W unsubconjunto no vacío de V.

W es un ***subespacio*** de V si$W$ es en sí mismo un espacio vectorialcon las mismas operaciones (suma de vectores y producto por un escalar)definidas en V.

Ejemplo

$W = \{ (x_1, x_2) \in R^2 : x_2 = 3x_1 \}$ ¿es un subespacio de $\mathbb{R}^2$?

Primero analicemos el conjunto W.Son todos vectores de $\mathbb{R}^2$ tales que la segunda componente esel triple de la primera:

$$(x_1, 3x_1) = x_1(1,3)$$

W es la recta que pasa por el origen ytiene vector director (1,3), o sea la recta de ecuación $y = 3x$.

Para decidir si W es un subespaciode $\mathbb{R}^2$ habría que verificar que se cumplenlos axiomas del 1 al 10. El lector puede comprobar que todos se cumplen en estecaso.

Pero en general no es necesario verificar los axiomas porqueexiste un criterio sencillo para determinar si un subconjunto W deun espacio vectorial V es un subespacio, es el que sigue.

Condiciones necesarias y suficientes para caracterizarsubespacios

Sea Wun subconjunto de un espacio vectorial $V(W \subseteq V)$.
W es ***subespacio***de V si y sólo si secumplen las siguientes condiciones:

a. $\mathbf{0}_V$ está en W.
b. Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ están en W, entonces $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ está en W.
c. Si $\boldsymbol{u}$está en W y k es unescalar, $k\boldsymbol{u}$ está en W.

Observaciones

1. La condición (a) asegura que W noes vacío. La mejor manera de comprobar si W es un subespacio es buscar primerosi contiene al vector nulo. Si $\mathbf{0}_V$ está en W,entonces deben verificarse las propiedades (b) y (c). Si $\mathbf{0}_V$ no está en W, Wno puede ser un subespacio y no hace falta verificar las otras propiedades.
2. Las propiedades a, b y c correspondena los axiomas 4, 1 y 6 de espacios vectoriales. LINK A LOS AXIOMAS DE E.V
3. Los axiomas 2, 3, 7, 8, 9 y 10 deespacio vectorial se cumplen para W porque éste es unsubconjunto de V. Puededecirse que W "hereda" esaspropiedades de V.
4. Faltaría comprobar que cada vector de W tiene su opuesto en W (axioma 5 deespacios vectoriales):

Teniendo encuenta la condición (c) de subespacios,
c. Si $\boldsymbol{u}$ está en W y k es unescalar, $k\boldsymbol{u}$ está en W.
Si tomamos $k=-1$,resulta:
Para cada $u \in W$, $(-1)u=-u \in W$.
Y por lo tantocada vector de W tiene su opuesto en W.
De lasobservaciones anteriores se deduce que las condiciones (a), (b) y (c) sonsuficientes para demostrar que W es un espacio vectorial, ypor lo tanto subespacio de V.

Subespacios triviales

Si V esun espacio vectorial, entonces V es un subespacio de símismo.

El conjunto $\{0_V\}$, que contiene sólo al vector nulodel espacio, también es subespacio de V pues:

$0_V + 0_V = 0_V$ y $k0_V = 0_V$ *para cualquier k real*

Los subespacios $\{0_V\}$ y V sedenominan *subespacios triviales* de V.

Ejercitación sobresubespacios

Ejemplo 1

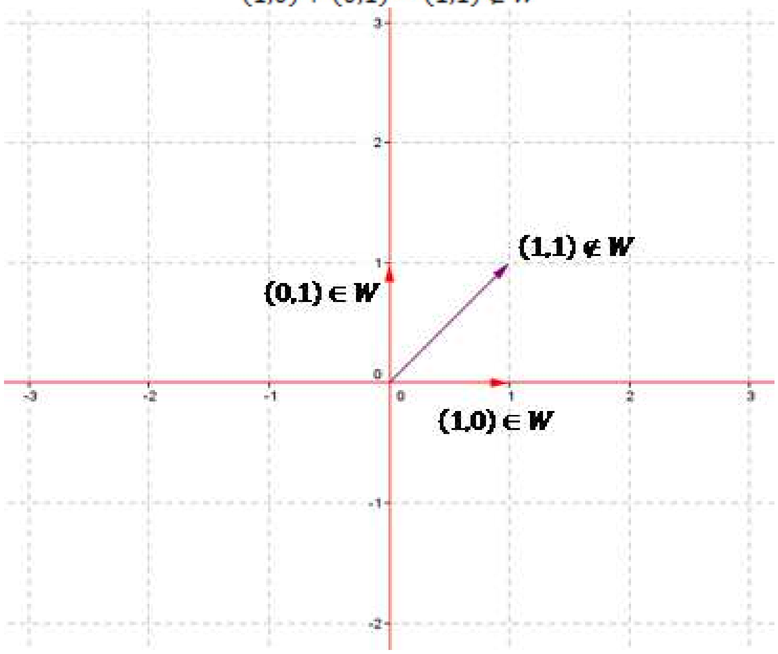
Consideremos el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$, ¿Es un subespacio de $\mathbb{R}^2$?

$$xy = 0 \iff x = 0 \lor y = 0$$

Se cumple (a) pues $(0,0) \in W$

No se cumple (b) porque la suma de dos vectores de W puedeno estar en W, por ejemplo:

$$(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin W$$



Entonces W no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2

Consideremos el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$. Es decir, la recta de ecuación $x = 0$.¿Es un subespacio de $\mathbb{R}^2$?

Se cumple (a) pues $(0,0) \in W$

Se cumple (b) pues la suma de dos vectores de W,está en W:

$$(0, y_1) + (0, y_2) = (0, y_1 + y_2)$$

Se cumple (c) pues el producto de un vector de W porun número real está en W:

$$k(0, y) = (0, ky)$$

Luego W es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 3

Consideremos el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$. ¿Es un subespacio de $\mathbb{R}^2$?

$$x^2 - y^2 = 0 \iff y = x \lor y = -x$$

Se cumple (a) pues $(0,0) \in W$

No se cumple (b) porque la suma de dos vectores de W puedeno estar en W, por ejemplo:

$$(1,1) + (1,-1) = (2,0) \notin W$$

Entonces W no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4

Consideremos el conjunto $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x + y + 2z = 0\}$. Es decir un plano que pasa por elorigen. ¿Es un subespacio de $\mathbb{R}^3$?
De la ecuación del plano se deduce que: $x = -y - 2z$
Por lo tanto los vectores que pertenecen a W respondena la forma$(-y - 2z, y, z)$ con $y, z \in \mathbb{R}$.
Se cumple (a) pues $(0,0,0) \in W$
Se cumple (b) pues la suma de dos vectores del plano, sigueestando en ese plano:

$$(-y - 2z, y, z) + (y' - 2z', y', z') = (\,-(y + y') - 2(z + z')\,, y + y', z + z'\,)$$

Se cumple (c) pues $k(-y - 2z, y, z) = (-ky - 2kz, ky, kz) \in W$
Entonces W es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 5

Consideremos el conjunto $W = \{p \in P_2 \ \mid p(0) = 0\,\}$. Es decir, los polinomios de gradomenor o igual que 2 (incluyendo el polinomio nulo) tales que evaluados en 0 danpor resultado 0. ¿Es un subespacio de P_2?
Se cumple (a) pues el polinomio nulo pertenece a W.
Recordemos la definición de suma de funciones y de productode un real por una función:
$(f \ + \ g)\ (x) \ = \ f(x) \ + \ g(x)$, para todo x pertenecienteal dominio de f y de g
$(kf)(x) = \ k\, f(x)$ para todo x perteneciente aldominio de f
Los polinomios son funciones, por lo tanto si consideramos $p\,, q \in W$,resulta:

$$(p + q)(0) = \ p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \ p + q \ \in W$$
$$(kp)(0) = k\, p(0) = k\, 0 = 0 \quad \Rightarrow \ kp \ \in W$$

Demostramos que W es un subespaciode P_2.

Ejemplo 6

Consideremos el conjunto $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ \mid A = A^t\}$. Es decir, el conjunto de matricessimétricas de 2×2.
Se cumple (a) porque la matriz nula pertenece a W.
Se cumple (b) pues si $A, B \in W$ entonces $(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$, luego $(A + B) \in W$
Se cumple (c) pues si $A \in W$ entonces $(kA)^t = kA^t = kA$, luego $(kA) \in W$
Demostramos que el conjunto de matrices simétricas de 2x2 esun subespacio de R^{2x2}.
Observación: En la comprobación de las condiciones (a), (b)y (c) no fue necesario hacer referencia al tamaño de las matrices. Estosignifica que es válido para matrices simétricas de $n \times n$.

Ejemplo 7

Consideremos el conjunto $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ \mid \det(A) = 0\,\}$. ¿Es un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$?
Se cumple (a) porque la matriz nula pertenece a W.
En general $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$, entonces podría ocurrir que $A, B \in W$ peroque $A + B$ no esté en W.Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \ , \ A + B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Entonces no se cumple (b).
W no es un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Resumen de los subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Después de estos ejemplos podemos resumir cuales son losdiferentes tipos de subespacios de $\mathbb{R}^2$y $\mathbb{R}^3$:

Subespacios de $\mathbb{R}^2$	Subespacios de $\mathbb{R}^3$
• $\{(0,0)\}$ • Rectas que pasan por el origen • $\mathbb{R}^2$ (como subespacio de sí mismo)	• $\{(0,0,0)\}$ • Rectas que pasan por el origen • Planos que pasan por el origen • $\mathbb{R}^3$ (como subespacio de sí mismo)

No hay ninguna otra clase de subespacios en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Combinación lineal

Definición

Sean $v_1, v_2, \dots, v_r, w$vectores de un espacio vectorial V. Sedice que el vector $w$es una combinación lineal de losvectores $v_1, v_2, \dots, v_r$ si se puede expresar como sigue:

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r$$

donde $k_1, k_2, \dots, k_r$ son escalares.

Observación: Nosotros estamos trabajando con espaciosvectoriales reales, o sea que los escalares son números reales.

Ejemplo 1

El vector $(0,0,3)$ es combinación lineal de $(0,0,1)$ yaque

$$(0,0,3) = 3(0,0,1)$$

Veamos cómo se puede pensar esto desde la perspectivageométrica. ¿Qué vectores pueden expresarse como combinación lineal del vector $(0,0,1)$?

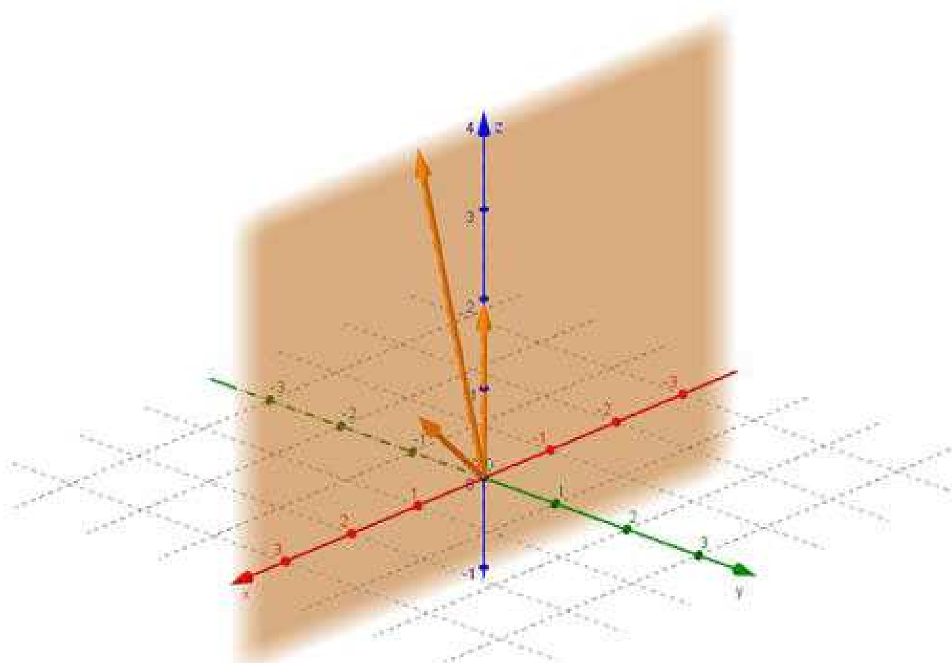
Todos los vectores $(0,0,k)$ con $k \in \mathbb{R}$. Es decir que todos los vectoressobre el eje z, son combinación lineal de $(0,0,1)$.

Ejemplo 2

El vector $(1,0,4)$ es combinación lineal de$(1,0,1), (0,0,2)$ ya que:

$$1.(1,0,1) + \frac{3}{2}.(0,0,2) = (1,0,4)$$

Geométricamente el vector $(1,0,4)$ es un vector coplanar con losvectores $(1,0,1)$ y $(0,0,2)$.Se puede ver en la siguiente gráficaque pertenecen al plano $y = 0$:



Ejemplo 3

El vector $8x - 4x^2$ es combinación lineal de losvectores$x$ y x^2 ya que:

$$8x - 4x^2 = 8.(x) + (-4).x^2$$

Ejemplo 4

¿Es el vector $(1{,}8)$ combinación lineal de los vectores $(1{,}0),(3{,}3)$?

Para responder esto debemos buscar si existen escalares α, β talesque:

$$(1{,}8) = \alpha(1{,}0) + \beta(3{,}3)$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha + 3\beta \\ 8 = 3\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = -7, \ \beta = \frac{8}{3}$$

Como existen escalares que satisfacen la igualdad entonces $(1{,}8)$ escombinación lineal de $(1{,}0),(3{,}3)$.

Ejemplo 5

¿Para qué valores de k el vector $(1,2,3)$ combinación lineal de los vectores$(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{2},\boldsymbol{k})$?

Para responder esto debemos buscar si existen escalares α, β, γ talesque:

$$(1{,}2{,}3) = \alpha(1{,}0{,}0) + \beta(0{,}1{,}0) + \gamma(0{,}2{,}k)$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + 2\gamma = 2 \\ \gamma k = 3 \end{cases}$$

Si $k = 0$ la tercera ecuación queda $0 = 3$,y el sistema es incompatible. Si $k \neq 0$ entonces se puedeobtener γ y β.

Entonces para todo $k \neq 0$ el vector $(1{,}2{,}3)$ se puede expresar como combinaciónlineal de los vectores dados.

Conjunto generador

Sea $\{v_1, v_2, \dots v_r\}$ un conjunto de vectores de unespacio vectorial V.
Si <u>todo</u> vector de V puede expresarse como combinaciónlineal de $v_1, v_2, \dots, v_r$, entonces se dice que $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es un ***conjunto generador de V*** o también que $v_1, v_2, \dots, v_r$ *generan* V.

Ejemplo 1

¿Es el conjunto $\{(1,1), (1,-1)\}$ generador de $\mathbb{R}^2$?
Siguiendo la definición, debemos ver si cualquier vector de $\mathbb{R}^2$puede expresarse como combinaciónlineal de $(1,1), (1,-1)$:

$$(x, y) = \alpha(1,1) + \beta(1,-1) \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{x+y}{2} \;,\; \beta = \frac{x-y}{2}$$

Hemos llegado a un sistema compatible determinado. Para cada$x$ e y seobtrendrá un valor para α y paraβ.
Entonces, como cualquier vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ puede expresarse como combinaciónlineal de $(1,1), (1,-1)$, decimos que $\{(1,1), (1,-1)\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2

¿Es el conjunto $\{(1,1), (1,-1), (2,0)\}$ generador de $\mathbb{R}^2$?
Otra vez planteamos un sistema de ecuaciones. Nos interesasaber si tiene solución o no:

$$(x, y) = \alpha(1,1) + \beta(1,-1) + \gamma(2,0) \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = \alpha + \beta + 2\gamma \\ y = \alpha - \beta \end{cases}$$

Veamos cómo es la resolución por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \boldsymbol{x} \\ 1 & -1 & 0 & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_1 - F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \boldsymbol{x} \\ 0 & -2 & -2 & \boldsymbol{y - x} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to -\frac{1}{2}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \boldsymbol{x} \\ 0 & 1 & 1 & \boldsymbol{\frac{x-y}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = x \\ \beta + \gamma = \dfrac{x-y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma + \dfrac{x+y}{2} \\ \beta = \dfrac{x-y}{2} - \gamma \end{cases}$$

Para cada (x, y) en $\mathbb{R}^2$, el sistema es compatible(indeterminado). Entonces$\{(1,1), (1,-1), (2,0)\}$ también genera $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 3

¿Es el conjunto $(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)$ generador de $\mathbb{R}^3$?

$$(x, y, z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(1,1,1) \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = \alpha + \gamma \\ y = \beta + \gamma \\ z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - z \\ \beta = y - z \\ \gamma = z \end{cases}$$

Como el sistema es compatible (determinado), podemos afirmarque el conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 4

¿Qué vectores pueden expresarse como combinación lineal del $(1,0)$?
Los vectores de la forma $(x, 0)$. Entonces el vector $(1,0)$no genera todo $\mathbb{R}^2$, perogenera la recta $y = 0$.

Ejemplo 5

¿Qué vectores pueden expresarse como combinación lineal de $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$?

$$(x, y, z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) = (\alpha, \beta, 0)$$

Es decir todos los vectores con componente $z = 0$.Entonces $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$no generan $\mathbb{R}^3$ sino el plano $z = 0$.

Subespacio generado

Sean $v_1, v_2, \dots, v_r$ vectores de un espacio vectorial V.

1. El vector nulo puede expresarse como combinación linealde dichos vectores:
$$0_V = 0\, v_1 + 0\, v_2 + \dots + 0 v_r$$
2. Si sumamos dos combinaciones lineales de los vectoresdados, obtenemos otra combinación lineal:
$$(a_1 v_1 + \dots + a_r v_r) + (b_1 v_1 + \dots + b_r v_r) = (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_r + b_r) v_r$$
3. Si multiplicamos un escalar k por una combinación linealde los vectores dados, obtenemos una combinación lineal de dichos vectores:
$$k\,(a_1 v_1 + \dots + a_r v_r) = (k a_1) v_1 + \dots + (k\, a_r) v_r$$

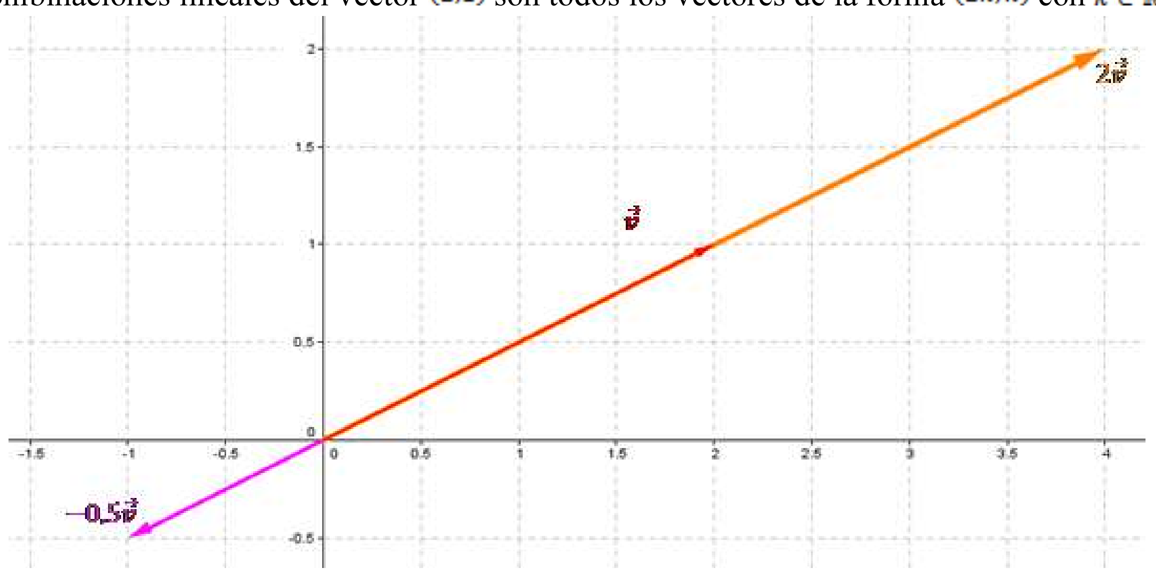
Estas tres condiciones permiten afirmar que el conjunto detodas las combinaciones lineales de $v_1, v_2, \dots, v_r$ es un subespacio de V.

Entonces:

Dados los vectores$v_1, v_2, \dots, v_r$ en V,llamamos ***subespacio generado*** por $v_1, v_2, \dots, v_r$al conjunto de todas lascombinaciones lineales de estos vectores. Lo denotamos con la expresión $\boldsymbol{gen\{v_1, v_2, \dots, v_r\}}$.
$$gen\{v_1, v_2, \dots, v_r\} = \{v \in V:\ v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r\ , con\ \alpha_i \in R\}\ subespacio\ de\ V$$

Ejemplo 1

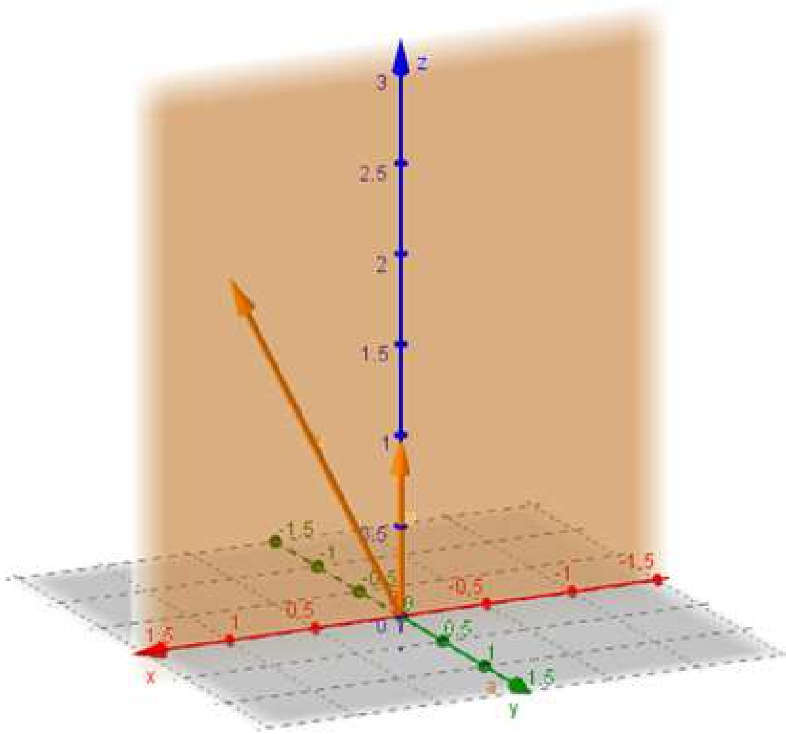
Las combinaciones lineales del vector $(2{,}1)$ son todos los vectores de la forma $(2k, k)$ con $k \in \mathbb{R}$.



Geométricamente el subespacio generado por $(2{,}1)$ es la recta que pasa por el origen ytiene la dirección de dicho vector.

Ejemplo 2

Las combinaciones lineales de los vectores $(1{,}0{,}2), (0{,}0{,}1)$ son los vectores coplanares con $(1{,}0{,}2)$ y $(0{,}0{,}1)$:



Veamos, analíticamente, cual es el espacio generado por $(1,0,2), (0,0,1)$:

$$(x, y, z) = \alpha(1,02) + \beta(0,0,1) = (\alpha, 0, 2\alpha + \beta) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Son todos los vectores con segunda componente nula. Es decirque el subespacio generado es el plano $y = 0$.

O sea: $gen\{(1,0,2), (0,0,1)\} = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ y = 0\ \}$

Ejemplo 3

Tomemos los vectores del ejemplo anterior:$(1,0,2)$, $(0,0,1)$ y además el vector$(-1,0,1)$.

¿Qué espacio generan?

$$(x, y, z) = \alpha(1,02) + \beta(0,0,1) + \gamma(-1,0,1) = (\alpha - \gamma\ , 0\ , 2\alpha + \beta + \gamma)$$

Son vectores con segunda componente nula. Se genera el mismosubespacio que en el ejemplo anterior. Esto se explica porque el tercer vectores coplanar con los primeros dos.

Independencia lineal ydependencia lineal

En los ejemplos 1 y 2 (de "Conjuntogenerador")vimos que los conjuntos $\{\,(1{,}1)\,,(1,-1)\,\}\ y\ \{\,(1{,}1)\,,(1,-1)\,,(2{,}0)\,\}$ generan $\mathbb{R}^2$. Si tuviéramos que elegir uno deellos como generador de $\mathbb{R}^2$, ¿por cuál nos inclinaríamos?
El problema de encontrar los conjuntos generadores más"pequeños" para un espacio vectorial depende de la noción de independencialineal, que presentamos en esta sección.

Si $A = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es un conjunto de vectores de unespacio vectorial V, entonces la ecuación vectorial

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r = 0_V$$

tiene al menos la solución trivial: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$
Si ésta es la única solución, entonces se dice que$A$esun ***conjunto linealmente independiente***.
Si hay otras soluciones (además de la trivial) entonces A esun ***conjunto linealmente dependiente***.

Una forma alternativa de caracterizar la *dependencialineal* es la siguiente:

Un conjunto de vectores $\{\,v_1, v_2, \dots, v_r\,\}$ de un espacio vectorial V es*linealmente dependiente* si y sólo si al menos uno de los vectores puedeexpresarse como combinación lineal de los demás. **[1]**

Demostración:
$\Rightarrow$ Si el conjunto $\{\,v_1, v_2, \dots, v_r\,\}$ es *linealmente dependiente*,la ecuación

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ \dots + \ \alpha_r v_r = 0_V$$

admite otras soluciones además de la trivial. O sea, existeuna combinación lineal donde al menos uno de los escalares es distinto de cero,que da el vector nulo.
Supongamos que $\alpha_1 \neq 0$. Entonces resulta:

$$v_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) v_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_r}{\alpha_1}\right) v_r$$

Por lo tanto, el vector v_1 es combinación lineal de los demás.
$\Leftarrow$ Sabemos que uno de los vectorespuede expresarse como combinación de los demás. Sin perder generalidad,supongamos que:

$$v_1 = k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r$$

Entonces:

$$-1v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r = 0_V$$

Existe una combinación lineal no trivial (al menos uno delos escalares es distinto de cero) que es igual al vector nulo. Por lo tanto,el conjunto $\{\,v_1, v_2, \dots, v_r\,\}$ es *linealmente dependiente*,como queríamos demostrar.

Ejemplo 1

¿Es el conjunto $\{(1{,}1), (1,-1)\}$ LI o LD?
Planteamos la ecuación:

$$\alpha_1(1{,}1) + \alpha_2(1,-1) = (0{,}0)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0\ ,\ \alpha_2 = 0$$

Luego el conjunto es LI.

Ejemplo 2

¿Es el conjunto $\{(1{,}1), (1,-1), (2{,}0)\}$LI o LD?
Planteamos un sistema de ecuaciones. Nos interesa saber sitiene solución única o infinitas

soluciones:

$$\alpha(1,1)+\beta(1,-1)+\gamma(2,0)=(0,0)\quad\Rightarrow\begin{cases}0=\alpha+\beta+2\gamma\\ 0=\alpha-\beta\end{cases}$$

Veamos cómo es la resolución por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & \mathbf{0}\\ 1 & -1 & 0 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2\to F_1-F_2]{}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & \mathbf{0}\\ 0 & -2 & -2 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2\to -\frac{1}{2}F_2]{}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & \mathbf{0}\\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\gamma\\ \beta=-\gamma\end{cases}$$

El sistema de ecuaciones es compatible indeterminado, o seatiene infinitas soluciones. Luego, el conjunto es LD.

Notemos que también se cumple la forma alternativa decaracterizar la dependencia lineal, pues es posible escribir $(2,0)$ como combinación lineal de $(1,1)$ y$(1,-1)$:

$$(1,1)+(1,-1)=(2,0)$$

Ejemplo 3

¿Es el conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ LI o LD?

$$\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(1,1,1)=(0,0,0)\ \Rightarrow\begin{cases}0=\alpha+\gamma\\ 0=\beta+\gamma\\ 0=\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Como el sistema es compatible determinado, el conjunto es LI.

Ejemplo 4

¿Es el conjunto$\{(1,0,0),(0,1,0)\}$LI o LD?

$$\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)=(0,0,0)\ \Rightarrow\ \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$$

Como el sistema tiene solución única el conjunto es LI.

Ejemplo 5

¿Es el conjunto $\{x\ ,\ \ -x^2\ \ ,\ \ 4x^2-x\}$ LI o LD?

$$\alpha_1(x)+\alpha_2(-x^2)+\alpha_3(4x^2-x)=0x^2+0x+0$$

$$\begin{cases}-\alpha_2+4\alpha_3=0\\ \alpha_1-\alpha_3=0\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}\alpha_2=4\alpha_3\\ \alpha_1=\alpha_3\end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado. Luego el conjunto esLD.

Notemos que es posible escribir $4x^2-x$ cómo combinación lineal de x yde $-x^2$:

$$(-1)(x)+(-4)(-x^2)=4x^2-x$$

Propiedades

Propiedad 1

Un conjunto formado por un solo vector, ¿es linealmenteindependiente (LI) o dependiente (LD)?
Planteamos la combinación lineal:

$$\alpha\, v = 0_V$$

Si $v = 0_V$, α puede tomar cualquier valor. Por lotanto: $\{0_V\}$ es LD.
Si $v \neq 0_V$, la única solución es $\alpha = 0$.Por lo tanto: $\{v\}$ es LI.

Propiedad 2

Si un conjunto de vectores contiene al vector nulo, entonceses linealmente dependiente (LD).
Demostración:
Sea $A = \{v_1, v_2, \dots, v_r, 0_V\} \subset V$
Entonces se tiene que:

$$0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_r + 1\,0_V = 0_V$$

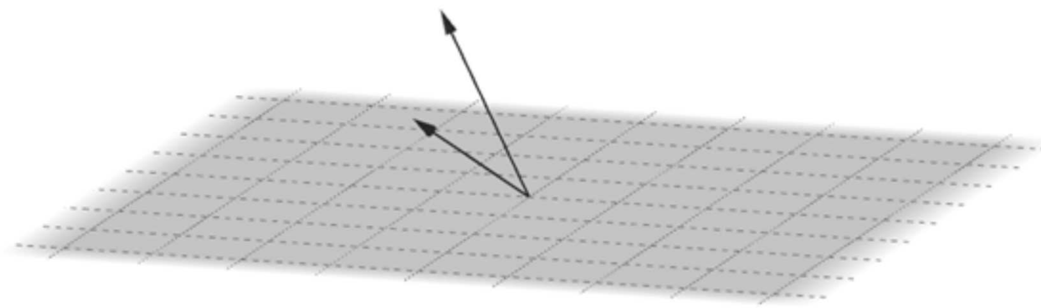
Probamos que existe una combinación lineal con escalares no todos nulos, que da el vector nulo.
Por lo tanto, A eslinealmente dependiente.

Interpretación geométrica

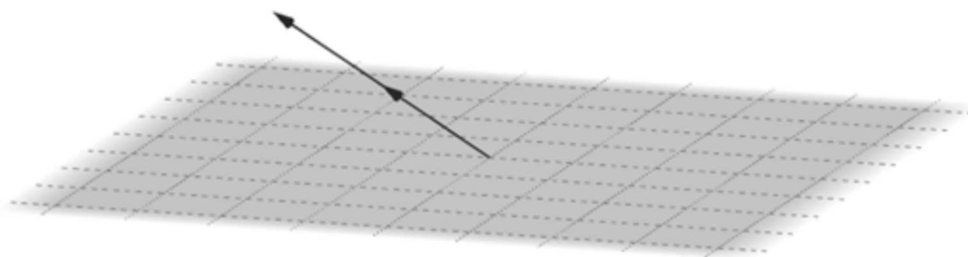
Observación previa: En lo que sigue consideramos losvectores colocados a partir del origen de coordenadas.

De **[1]** resulta que dos vectores v_1 y v_2 son linealmente dependientes (LD) siy sólo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

Podemos afirmar entonces que dos vectores en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ son LD si y sólo si están sobre lamisma recta que pasa por el origen (vectores paralelos).

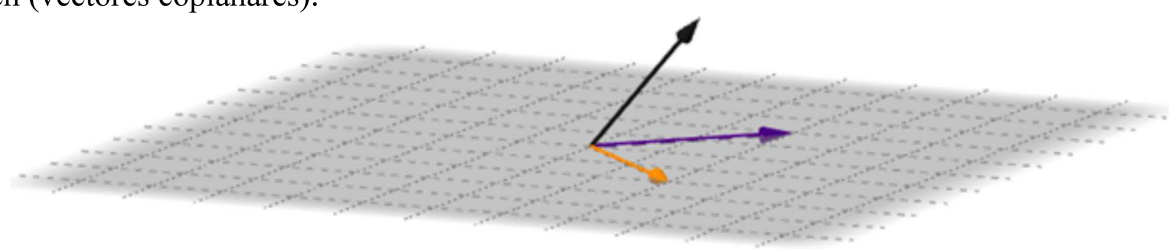


Dos vectores LI en $\mathbb{R}^3$

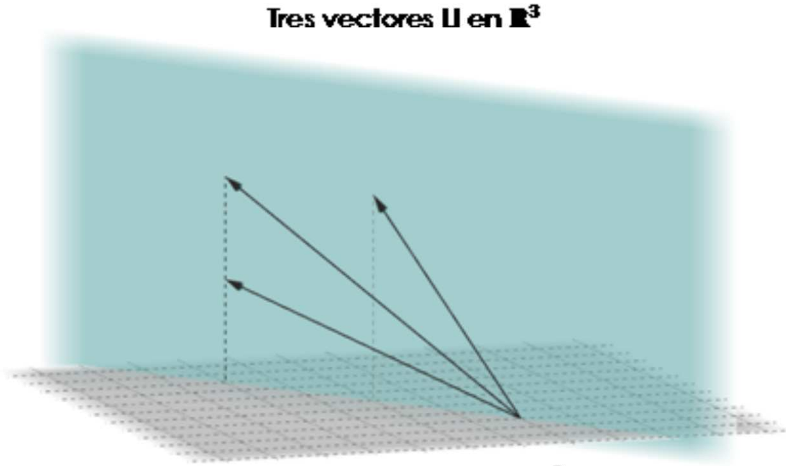


Dos vectores LD en $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$, tres vectores v_1, v_2, v_3 son LD si y sólo si están situadosen el mismo plano que pasa por el origen (vectores coplanares).



Tres vectores LI en $\mathbb{R}^3$



Tres vectores LD en $\mathbb{R}^3$

Base y dimensión de un espacio vectorial

Habíamos visto que los conjuntos $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ y $C = \{(1,1),(1,-1),(2,0)\}$ generan $\mathbb{R}^2$. ¿Cuál es la diferencia entre ellos?

B es un conjunto linealmenteindependiente, en cambio C es linealmente dependienteporque $(2,0) = (1,1) + (1,-1)$.

> Un conjunto de vectores $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de un espacio vectorial V sedenomina ***base*** de Vsi y sólo si:
>
> i. B es linealmenteindependiente;
> ii. B genera a V.

Teniendo en cuenta esta definición, $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Otra base de $\mathbb{R}^2$ muy usual es la que contiene a losversores canónicos:$E = \{(1,0),(0,1)\}$.

Observamos que las dos bases están compuestas por dosvectores linealmente independientes. ¿Será ésta una característica de cualquierbase de $\mathbb{R}^2$?

Puede demostrarse que:

Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de$V$, entonces todoconjunto con <u>más de n</u> vectores es linealmente dependiente.

De acuerdo con esta propiedad, podemosdeducir una característica común a toda base de un espacio vectorial:

Sean $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_q\}$ dos bases delespacio vectorial V.

Como B es una base, todo conjunto de más de n vectores es LD. Pero B' es LI, entonces:$q \le n$. [1]

Como B' es una base, todo conjunto de más de q vectores es LD. Pero B es LI, entonces: $n \le q$. [2]

De [1] y [2] se deduce que $q = n$.

En consecuencia:

Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V, cualquier otra base de V tiene n vectores. Esto permite definir el concepto de dimensión.

> La ***dimensión*** de un espacio vectorial V esla cantidad de vectores que componen una base de V.
> Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V, la dimensión de V es n y lo indicamos como $\mathbf{dim}(V) = n$.

Si no existe una base de V formada por un conjunto finito de vectores, se dice que V es un espacio de dimensión infinita. Un ejemplo es el espacio detodos los polinomios (de cualquier grado).

Comoel vector nulo es linealmente dependiente, el espacio $\{0_V\}$ no tiene base. Aeste espacio compuesto únicamente por el vector nulo, se le asigna dimensióncero:

$$\dim(\{0_V\}) = 0$$

Para determinar la dimensión de un espacio vectorial, essuficiente hallar una base de dicho espacio.

Veamos qué dimensión tienen losespacios vectoriales con los cuales trabajaremos:

En $\mathbb{R}^2$ conocemos la basecanónica:

$$E_2 = \{(1,0),(0,1)\} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

En $\mathbb{R}^3$ la base canónicaes:

$$E_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

Análogamente en $\mathbb{R}^4$:

$$E_4 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^4) = 4$$

De acuerdo con el número de vectores quecomponen cada una de estas bases, podemos afirmar que:

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

Para determinar la dimensión de losespacios de matrices, consideremos por ejemplo $V = \mathbb{R}^{3\times 2}$.
Cualquiermatriz de 3×2 puede expresarse como sigue:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos la similitud con $\mathbb{R}^6$, sólo cambia elformato.
Encontramos seis matrices linealmente independientes que generan $V = \mathbb{R}^{3\times 2}$. Es decir,encontramos una base (llamada base canónica) de este espacio y por lo tanto: $\dim(\mathbb{R}^{3x2}) = 3x2 = 6$.
Generalizando, podemos afirmar que:

$$\dim(\mathbb{R}^{mxn}) = mxn$$

Busquemos la dimensión de los espacios de polinomios. Consideremos por ejemplo $V = P_2$.
Cualquierpolinomio de P_2 puede expresarse cómo sigue:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2$$

El conjunto $\{1, x, x^2\}$ genera P_2 y además eslinealmente independiente. Hemos obtenido una base (llamada canónica) de P_2, y por lo tanto $\dim(P_2) = 3$.
Análogamente:

$$\{1, x, x^2, x^3\} \ base\ canónica\ de\ P_3$$
$$\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}\ base\ canónica\ de\ P_n$$

Entonces:

$$\dim(P_n) = n + 1$$

Ejemplo 1

Existen diferentes bases para un mismoespacio vectorial. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el conjunto:
$B = \{(1,0), (1,1)\}$
Es fácil ver que B es linealmente independiente (sólo la combinación linealtrivial produce el vector nulo).Nos falta probar que genera $\mathbb{R}^2$.

$$(x, y) = \alpha(1,0) + \beta(1,1)$$
$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \beta = y \end{cases} \Rightarrow \alpha = x - y \ \wedge \ \beta = y$$

Para cualquier (x, y) en $\mathbb{R}^2$ es posibleencontrar los escalares α y β. Probamos que B genera $\mathbb{R}^2$.
Entonces $B = \{(1,0), (1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo2

Hemos visto en ejemplos anteriores que el conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$, y que son vectores LI. Por lo tantoes una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3

Veamos que el conjunto $B = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$ es una base de P_2.
Para esto debemos probar las dos condiciones.
Probemos que B es LI:

$$0 + 0x + 0x^2 = \alpha\, 1 + \beta(1 + x) + \gamma(1 + x^2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \ \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Cómo la única solución es la trivial, entonces el conjuntoes LI.
Probemos que genera P_2:

$$a + bx + cx^2 = \alpha\, 1 + \beta(1 + x) + \gamma(1 + x^2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ \beta = b \\ \gamma = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = a - b - c \\ \beta = b \\ \gamma = c \end{cases}$$

El sistema es compatible. Entonces para cualquier polinomioen P_2 es posible hallar los escalares α, β, γ.Luego B genera P_2.

Propiedades relacionadas con la dimensión

Si $\dim(V) = n$, puede afirmarseque:

1. **Todo conjunto de n vectoreslinealmente independientes en V es una base.**
2. Todo conjunto de n vectores que genere V es una base.
3. Todo conjunto de <u>más de n</u> vectores en el espacio vectorial V es linealmente <u>dependiente</u>.
4. Todo conjunto linealmenteindependiente en V puedeextenderse a una base.

Ejemplo1

¿Es el conjunto $A = \{(1,1,0),(2,-1,1),(0,1,0)\}$base de $\mathbb{R}^3$?

Cómo $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ y A tienetres vectores, entonces por la propiedad 1, es suficiente probar que$A$ esLI para asegurar que es una base de $\mathbb{R}^3$.

En $\mathbb{R}^3$, tres vectores v_1, v_2, v_3 son LD si y sólo si están situadosen el mismo plano que pasa por el origen (vectores coplanares). Veamos si soncoplanares haciendo el producto mixto:

$$(1,1,0).(2,-1,1) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

No son coplanares, por lo tanto son LI.

Luego A es base de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2

$$C = \{1 + x + x^2, 3 - x, 2 + kx^2\} \subset P_2$$

Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que C sea una base de P_2.

$\dim(P_2) = 3 \Rightarrow$ Todo conjunto de tres vectores L.I. en P_2 es base.

$$\alpha(1 + x + x^2) + \beta(3 - x) + \gamma(2 + kx^2) = 0_{P_2}$$

Igualando coeficientes, resulta:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + k\gamma = 0 \end{cases}$$

Como es un sistema homogéneo, siempretiene solución. ¿Buscamos que tenga solución única, o infinitas?

Buscamos los valores de $k$para que la única solución sea la trivial: $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

En la unidad anterior habíamos visto que <u>enlos sistemas cuadrados homogéneos</u>, el determinante de la matriz decoeficientes permite decidir si son SCD o SCI.

En este caso, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$ y $\det(A) = 2 - 4k$

Si $k = \frac{1}{2}$el sistema quedacompatible indeterminado.

Para cualquier $k \neq \frac{1}{2}$ el sistema escompatible determinado, por lo tanto$\{1 + x + x^2, 3 - x, 2 + kx^2\}$ es LI, y entonces es base de P_2.

Ejemplo3

Dado $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^3$puede afirmarseque este conjunto es LD. Si hubiera tres vectores

LI,éstos formarían una base de $\mathbb{R}^3$y por lo tanto elvector restante podría expresarse como combinación lineal de ellos.

Ejemplo4

El conjunto $\{u = (1,2,3), v = (1,1,0)\}$ es LI en $\mathbb{R}^3$ pero no generatodo $\mathbb{R}^3$ sino que generaun plano. Podemos extenderlo a una base agregandoalgún vector LI, podría ser por ejemplo el productovectorial entre estos dos. Obtenemos $\{u, v, u \times v\}$ que es una basede $\mathbb{R}^3$.

Coordenadas de un vector respecto de una base

Propiedad: Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base delespacio vectorial V, todo vector de Vpuede expresarse de forma única como combinación lineal delos vectores de B.

Demostración:

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V.

Supongamos que un vector $u \in V$ puede expresarse mediante dos combinaciones lineales distintasde los vectores de la base B:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \text{y} \qquad u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$$

Restando miembro a miembro, se obtiene:

$$0_V = (\alpha_1 - \beta_1)\, v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\, v_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\, v_n$$

Como las bases son conjuntos linealmente independientes, resulta:

$$\alpha_i - \beta_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Por lo tanto, los escalares de lacombinación lineal son únicos para cada vector de V.

Esta propiedad permite definir *coordenadas de un vector respecto de una base*.

> Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V.
> Para cada $u \in V$, existen únicosescalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que:
> $$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$
> Estos escalares se denominan **coordenadasdel vector u respecto de la base B**.

Indicaremos las coordenadas mediante lasiguiente notación:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Ejemplo1

Sean,

$$B = \{(1,0,0), (1,1,0), (2,2,1)\} \; base \; de \; \mathbb{R}^3$$
$$u = (-1,4,3)$$

a. Hallar:
   - $[u]_B$,coordenadas del vector u enla base B
   - $[u]_E$, coordenadas del vector u enla base canónica

b. Sabiendoque:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Hallar v.

Resolución

Ítem a

$$\alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(2,2,1) = (-1,4,3)$$
$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = -1 \\ \beta + 2\gamma = 4 \\ \gamma = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

Estos escalares son las coordenadas de u esla base B:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En el caso de la base canónica, lascoordenadas del vector coinciden con sus componentes, ya que:

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Entonces:

$$[u]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ítem b

Dadas una base y las coordenadas de unvector en esa base, podemos hallar el vector:

$$v = 3(1,0,0) + 1(1,1,0) + 2(2,2,1) = (8,5,2)$$

Observación: Las bases son conjuntos ordenados.O sea, si reordenamos los vectores de una base, obtenemos una base diferente. Así:

$B = \{(1,0,0), (1,1,0), (2,2,1)\}$ y $B' = \{(2,2,1), (1,0,0), (1,1,0)\}$ son basesdistintas de $\mathbb{R}^3$.

¿Por qué son distintas? Porque lascoordenadas de un vector cambian si se reordena la base. Por ejemplo para $u = (-1,4,3)$ las coordenadasen cada base son:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y \quad [u]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Dados los vectores de $\mathbb{R}^2$, y sus coordenadas en la base B:

$$u = (5,2) \ , \ v = (7,1)$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \ [v]_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hallar, si es posible, la base B.

Resolución

Una base B de $\mathbb{R}^2$ tiene dosvectores:

$$B = \{v_1, v_2\}$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 3v_1 + 2v_2 = (5,2)$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 5v_1 + 3v_2 = (7,1)$$

Entonces podemos resolverlo como unsistema de ecuaciones vectorial:

$$\begin{cases} 3v_1 + 2v_2 = (5,2) \\ 5v_1 + 3v_2 = (7,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15v_1 + 10v_2 = (25,10) \\ 15v_1 + 9v_2 = (21,3) \end{cases}$$

Restando las ecuaciones, se obtiene:

$$v_2 = (4,7)$$

Sustituyendo y despejando, resulta: $v_1 = (-1, -4)$.

Entonces

$$B = \{(-1, -4), (4,7)\}$$

Base y dimensión de un subespacio vectorial

Recordemos que un subespacio es unespacio vectorial en sí mismo, por lo tanto podemos hallar una base y sudimensión.

Si S es un subespacio de V, entonces: $\dim(S) \leq \dim(V)$.

Veamos cuáles son las dimensiones de losdistintos tipos de subespacios de $\mathbb{R}^3$:

- $\{(0,0,0)\}$
- Rectas que pasan por el origen,
- Planos que pasan por el origen y
- $\mathbb{R}^3$

Sabemos que $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión3.

$S = \{(0,0,0)\}$ no tiene base ycomo habíamos dicho, se le asigna dimensión 0.

$$\dim(\{0_V\}) = 0$$

Consideremos un plano que pase por elorigen, por ejemplo:

$$\pi:\ x + 3y - 2z = 0$$
$$x = -3y + 2z$$
$$(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow (x,y,z) = (-3y+2z, y, z) = (-3y, y, 0) + (2z, 0, z) = y(-3,1,0) + z(2,0,1)$$

Esto quiere decir que cualquier vector enese plano se puede escribir como combinación lineal de $(-3,1,0)$ y $(2,0,1)$. Cómo son LI:

$$\{(-3,1,0),(2,0,1)\}\ es\ una\ base\ de\ S_1$$
$$\dim(S_1) = 2$$

Los planos que pasan por el origen sonsubespacios de dimensión 2.

Ahora consideremos el subespacio:

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y = 0\ \ ,\ \ x - y - z = 0\}$$
$$\begin{cases} x + y = 0 & \pi_1 \\ x - y - z = 0 & \pi_2 \end{cases}\ ,\ \ \pi_1 \cap \pi_2 = r$$

La intersección de dos planos noparalelos es una recta. ¿Cómo podemos encontrar una base de una recta?

$$y = -x$$
$$\Rightarrow\ x - (-x) - z = 0 \Rightarrow\ z = 2x$$

Si llamamos $x = t$, resulta:

$$(x,y,z) = (t, -t, 2t) = t(1,-1,2)$$

Observamos que todos los vectores de larecta pueden expresarse como combinación lineal del vector director $(1,-1,2)$, que además es LIPor lo tanto, $\{(1,-1,2)\}$ es una base deeste subespacio.

Las rectas que pasan por el origen sonsubespacios de dimensión 1.

En los ejemplos anteriores observamoscómo disminuye la dimensión de un subespacio a medida que agregamos ecuaciones,tal como se muestra en el siguiente cuadro:

$$V = \mathbb{R}^3$$

Número mínimo de ecuaciones que definen S	Dimensión del subespacio	Objeto geométrico	Ejemplo
0	3	$\mathbb{R}^3$	
1	2	Planos por el origen	$z = 0$
2	1	Rectas por el origen	$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
3	0	$\{(0,0,0)\}$	$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

EPL 1

Indicar si $A = \{(1,1,1), (1,3,2)\}$ es una base de $W = \{(x, y, z,) \in R^3 \colon\ x + y - 2z = 0\ \}$, justificando larespuesta.

Ejemplo 1

Consideremos el siguiente subespacio de R^4y busquemos base y dimensión:

$$T_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 |\, x_1 + x_4 = 0\ \wedge\ x_2 - x_4 = 0\}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones quedefinen T_1, ¿podríananticipar su dimensión?

Observación: Como x_3 no aparece enlas ecuaciones que definen el subespacio, un <u>error frecuente</u> es suponer $x_3 = 0$.

Si x_3 no está en lasecuaciones, significa que es una *variable libre*, o sea que puede tomarcualquier valor real.

Entonces:

$$T_1 \colon \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \end{cases} \forall x_3\ ,\ \forall x_4$$

Escribimos el vector genérico(representativo) del subespacio que debe quedar expresado en función de lasvariables libres x_3 y x_4 :

$$(-x_4, x_4, x_3, x_4) = x_3(0,0,1,0) + x_4(-1,1,0,1)$$

Encontramos dos vectores L.I. que generanel subespacio. Entonces una base de T_1 es:

$$B_{T_1} = \{(0,0,1,0), (-1,1,0,1)\} \text{ por lo tanto } \dim(T_1) = 2$$

Ejemplo2

Hallemos una base y la dimensión delsubespacio de matrices simétricas de 2x2:

$$T_2 = \{A \in R^{2\times 2} \mid A = A^t\}$$

¿Cómo es una matriz simétrica de 2x2? $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tres matrices halladas son L.I. ygeneran el subespacio de matrices simétricas, por lo tanto hemos encontrado unabase de dicho subespacio:

$$B_{T_2} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \ \Rightarrow\ \dim(T_2) = 3$$

EPL 2

Hallar una base y la dimensión delsubespacio de matrices antisimétricas de 2x2 y de 3x3.

Ejemplo 3

Hallar base y dimensión de $S = \{p(x) \in P_2 \mid a_0 - 2a_1 + 3a_2 = 0\}$

Resolución

¿Cómo es un polinomio de P_2?

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

La dimensión de P_2 es 3, peroestamos agregando la condición $a_0 - 2a_1 + 3a_2 = 0$.

Podemos anticipar que la dimensión del subespacio es 2, para comprobarlo busquemosuna base:

$$a_0 - 2a_1 + 3a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 2a_1 - 3a_2$$
$$p(x) = (2a_1 - 3a_2) + a_1 x + a_2 x^2$$
$$p(x) = a_1 \underbrace{(2 + x)}_{p_1(x)} + a_2 \underbrace{(-3 + x^2)}_{p_2(x)}$$

Estos dos vectores generan S, y además vemos que son LI.

Entonces encontramos una base delsubespacio:

$$B_S = \{2 + x \,, -3 + x^2\}$$
$$\dim(S) = 2$$

Bases de subespacios definidos por generadores

Hasta ahora hemos buscado bases de subespaciosdefinidos por ecuaciones. ¿Qué ocurre cuando el subespacio está definido porsus generadores?

Veamos el siguiente ejemplo:

Hallar una base y la dimensión de $S = gen\{(1,1,2),(1,-1,0),(0,1,1)\} \subset R^3$.

En este caso, por la definición de Ssabemos que $\{(1,1,2),(1,-1,0),(0,1,1)\}$ es un conjuntogenerador de S. Para determinar si es una base, tendremos que analizar laindependencia lineal:

- Si son vectores LI, entonces son basedel subespacio.
- Si son LD, tendremos que extraer unabase eliminando los vectores “que sobren”.

En el caso específico de 3 vectores en R^3,podemos utilizar el determinante (que es el producto mixto). Como eneste caso el determinante da cero, los vectores soncoplanares y por lo tanto L.D. Tenemos que extraer una base eliminando algunode los vectores, por ejemplo:

- $\{(1,1,2),(1,-1,0)\}$ es una base de S
- $\{(1,-1,0),(0,1,1)\}$ es otra base deS.

Podemos afirmar que la dimensión de S es2.

Una forma práctica de extraer bases esarmar una matriz con los vectores dados y llevarla a la *forma escalonada:*

> Una matriz es *escalonada (por filas)*si satisface las siguientes propiedades:
>
> 1. Las filas nulas (todos sus elementosson ceros) se encuentran en la parte inferior.
> 2. En cada fila no nula, el primerelemento distinto de cero (pivote) está a la derecha del pivote de la filaanterior.

Una matriz cualquiera puede llevarse a laforma escalonada aplicando operaciones elementalesentre sus filas. Por ejemplo consideremos la matriz que armamos con losgeneradores de S:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_1 - F_2]{} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_2 - 2F_3]{} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Se denomina ***rango*** de una matriz al *númerode filas LI que tiene la matriz*. Veremos en la siguiente unidad laimportancia de este concepto en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales.

Puede demostrarse que:

1. Si se realizan operaciones elementales entre las filas deuna matriz, el rango se conserva.
2. Las filas no nulas de una matriz escalonada son LI.

Por lo tanto, para determinar el rango de una matriz seaplican operaciones elementales para obtener una matriz escalonada y se cuentanlas filas no nulas.

En el ejemplo, la matriz escalonada tiene rango 2, por lotanto la matriz que armamos con los generadores de S tiene rango 2. Estosignifica que de los tres generadores de S hay dos linealmente independientes.¿Cuál es entonces la dimensión de S? $\dim(S) = 2$

Este método también permite obtenerbases: las filas no nulas de la última matriz son otra base de S, ya que fueronobtenidas como combinaciones lineales de los vectores de S:

$$\{(1,1,2),(0,2,2)\}\ otra\ base\ de\ S$$

Ejemplo

Dado el conjunto:

$$A = \{1 + x; 1 - x^2; 2 + 3x + kx^2\} \subset P_2$$

Hallar todos los valores de k par que A genere unsubespacio de dimensión 2

Para el k hallado encontrar las ecuaciones del subespacio generado por A.

Resolución

Sabemos que $\dim(P_2) = 3$, entonces todoconjunto de 3 vectores LI en P_2es base de P_2. Como se pide que la dimensión del subespacio sea 2, debemos hallar k de modo que los vectores sean LD.

Los dos primeros vectores de A son LI, entonces se trata de analizar para qué valores de k el tercer vector es combinación lineal de los anteriores:

$$2 + 3x + kx^2 = \alpha(1 + x) + \beta(1 - x^2)$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta \\ 3 = \alpha \\ k = -\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = -1, \quad k = 1$$

Para $k = 1$,el polinomio$2 + 3x + kx^2$ es combinaciónlineal de $1 + x$ y $1 - x^2$. Entonces:

$$gen\{1 + x; 1 - x^2; 2 + 3x + x^2\} = gen\{1 + x; 1 - x^2\}$$

$$\{1 + x; 1 - x^2\} \text{ es base de } P_2$$

Ahora busquemos la <u>ecuación del subespacio</u>. Tomamos unpolinomio genérico, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ y lo escribimos como combinación lineal de los vectores de la base:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = \alpha(1 + x) + \beta(1 - x^2)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a_0 \\ -\beta = a_2 \\ \alpha = a_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = a_1 \wedge \beta = -a_2 \Rightarrow a_0 = a_1 - a_2$$

Entonces ésa esla ecuación que define al subespacio:

$$S = gen(A) = \{p \in P_2 \mid a_0 - a_1 + a_2 = 0\}$$

Como verificación, puede comprobarse quelos dos vectores de la base verifican la ecuación obtenida.

Operaciones con subespacios

Intersección

Sean S y T subespaciosdel mismo espacio vectorial V. Definimos laintersección como sigue:

$$\boxed{S \cap T = \{v \in V : \ v \in S \ \wedge \ v \in T\} \qquad \textit{intersección de subespacios}}$$

Propiedad: $S \cap T$ essubespacio de V.
Demostración:

1. $0_v \in S \ \wedge \ 0_v \in T \ \Rightarrow \ 0_v \in S \cap T$
2. Consideremos $u, v \in S \cap T$

$$\Rightarrow \ u \in S \ \wedge \ u \in T \ \wedge \ v \in S \ \wedge \ v \in T$$
$$u \in S \ \wedge \ v \in S \ \Rightarrow \ u + v \ \in S \quad [1]$$
$$u \in T \ \wedge \ v \in T \ \Rightarrow \ u + v \ \in T \quad [2]$$

   De [1] y [2] se deduce que $u + v \in S \cap T$

3. Dejamos a cargo del lector demostrar:$u \in S \cap T \ \Rightarrow \ (ku) \in S \cap T$

Ejemplo 1

Sean los subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \mid x - 3z = 0\}$$
$$T = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$$

Hallar $S \cap T$.
Resolución
Por definición $S \cap T$ es un conjuntoque estará formado por los vectores que pertenezcan a S ya T. Es decir aquellos vectores quesatisfagan las ecuaciones de S y las de T:

$$S \cap T = \{(x, y, z) \mid x - 3z = 0 \ \wedge \ x + y - z = 0\}$$

Se trata de una recta definida como intersección de dosplanos. Una base de la recta es un vector director.
Geométricamente podemos buscar el vector director como elproducto vectorial de los vectores normales a los planos:

$$v = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3, -2, 1)$$
$$S \cap T = \{(x, y, z) = \lambda(3, -2, 1) \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Entonces$\{(3, -2, 1)\}$es una basede $S \cap T$.
Otra forma de resolverlo es buscar la solución del sistemade ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = z - x = -2z \end{cases} \Rightarrow \ (3z, -2z, z) \forall z \in \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) = z(3, -2, 1)$$

Y entonces otra vez llegamos a que$\{(3, -2, 1)\}$es una base de $S \cap T$.

Ejemplo2

Sean los subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A = A^t\}$$
$$T = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Hallar $S \cap T$.
Resolución

La intersección de subespacios está formada por los vectoresque verifican las ecuaciones de dichos subespacios.
¿Qué tiene que cumplir una matriz parapertenecer a S?

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;|\; c = b \right\}$$

¿Qué tiene que cumplir una matriz parapertenecer a T?
Tiene que poder escribirse como combinación lineal de: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Hallemos las ecuaciones del subespacio T:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ 2\alpha+\beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = 0 \\ c = 2\alpha + \beta \\ d = -\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = a + d \\ b = 0 \\ \beta = c + 2d \\ \alpha = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + d = c + 2d \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | \; b = 0 \wedge \; a - c - d = 0 \right\}$$

Ahora planteamos que las matrices de $S \cap T$ deben cumplir con las ecuaciones de S ylas de T:

$$S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \;|\; b = c \wedge b = 0 \wedge a - c - d = 0 \right\}$$

O sea:

$$b = c = 0 \;\wedge\; a = d$$

Entonces las matrices de $S \cap T$ son de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y una base de $S \cap T$ es:

$$B_{S\cap T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Hay un método alternativo más breve para hallar una base de $S \cap T$sin necesidad de obtener las ecuaciones de T, como veremos a continuación.
Escribamos una matriz de T como combinación lineal de losvectores que la generan:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = 0 \\ c = 2\alpha + \beta \\ d = -\alpha \end{cases}$$

Pero además deben cumplirse las ecuaciones de S queestablecen que $c = b$. Entonces:

$$2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -2\alpha \Rightarrow \begin{cases} a = -\alpha \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = -\alpha \end{cases}$$

Por lo tanto, una matriz de $S \cap T$ es:

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad B_{S\cap T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sumade subespacios

Dados S,T subespacios de V, se define la suma como sigue:

$$S+T=\{v\in V:\ v=v_1+v_2\ ,\ con\ v_1\in S,\ v_2\in T\}\qquad suma\ de\ subespacios$$

<u>Propiedad</u>:$S+T$ es un subespaciodel espacio vectorial V.
Dejamos la demostración a cargo dellector.
Si conocemos conjuntos generadores de S yde T, podemos hallar generadores de la suma:

$$S=gen\{v_1,v_2,\dots,v_q\}\text{ y }T=gen\{w_1,w_2,\dots,w_r\}\ \Rightarrow\ S+T=gen\{v_1,v_2,\dots v_q,w_1,w_2,\dots,w_r\}$$

Para hallar la suma es usual buscar las basesde S y T.Como las bases son conjuntos generadores LI, si conocemosuna base de cada subespacio podremos obtener un conjunto generador de la suma:

Dadas las bases $B_S=\{v_1,v_2,\dots,v_q\}$ y $B_T=\{w_1,w_2,\dots,w_r\}$
Resulta: $\{v_1,\dots,v_q,w_1,\dots,w_r\}$ ***conjunto generador*** *de la suma*

Observación: Se obtiene así un conjuntogenerador de la suma pero <u>no siempre es linealmente independiente</u>.

- Si es LI, encontramos una base de la suma.
- Si es LD, podemos extraer una base de la suma eliminandolos vectores “que sobran”.

Ejemplo 1

Dados los siguientes subespacios de $V=\mathbb{R}^3$:

$$S=\{(x,y,z)|\ x-3z=0\}$$
$$T=\{(x,y,z)|\ x+y-z=0\}$$

Nos interesa hallar $S+T$.
Busquemos una base de S. Para eso en la ecuación despejamos una variable:

$$x=3z$$

Ahora armamos un vector genérico:

$$(x,y,z)=(3z,y,z)=z(3,0,1)+y(0,1,0)$$
$$B_S=\{(3,0,1),(0,1,0)\}$$

Busquemos una base de T. Para esto en la ecuación despejamos una variable:

$$z=x+y$$

Ahora armamos un vector genérico:

$$(x,y,z)=(x,y,x+y)=x(1,0,1)+y(0,1,1)$$

Entonces

$$B_T=\{(1,0,1),(0,1,1)\}$$
$$S+T=gen\{(3,0,1),(0,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$$

Sabemos que todo conjunto de más de 3vectores en $\mathbb{R}^3$ es linealmentedependiente, ya que la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3. ¿Cómopodemos extraer una base de la suma?
Podríamos armar una matriz con estos 4vectores y llevarla a la forma escalonada. O si no, como el espacio es $\mathbb{R}^3$ podemos pensargeométricamente:

$$S+T=gen\left\{\overbrace{(3,0,1),(0,1,0)}^{B_S},\overbrace{(1,0,1)}^{\notin S},(0,1,1)\right\}$$

Como $(1,0,1)$ no verifica la ecuación del plano S, los 3 primeros vectores <u>no</u>son coplanares y por lo

tanto forman una base de $R3$. Podemos eliminar $(0,1,1)$ porque escombinación lineal de dicha base.
Por lo tanto: $B = \{(3,0,1),(0,1,0),(1,0,1)\}$ es base de $S+T$ y es base de R^3.
En este caso, como $S+T$ es un subespaciode R^3 de dimensión 3,podemos afirmar que:

$$S+T = \mathbb{R}^3$$

Generalizando:

$$\boxed{S \ \mathit{subespacio\ de}\ V \ \ y \ \ \dim(S) = \dim(V) \ \Rightarrow \ S = V}$$

Ejemplo2

Dados los siguientes subespacios de $V = \mathbb{R}^4$:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 |\, x_1 + x_2 = x_2 + x_4 = 0\}$$
$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 |\, x_1 - x_4 = x_3 + x_4 = 0\}$$

Hallar base y dimensión de $S_1 + S_2$.

Resolución

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-x_2,x_2,x_3,-x_2) = x_2(-1,1,0,-1) + x_3(0,0,1,0)$$
$$B_{S_1} = \{(1,-1,0,1),(0,0,1,0)\}$$
$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_4,x_2,-x_4,x_4) = x_4(1,0,-1,1) + x_2(0,1,0,0)$$
$$B_{S_2} = \{(1,0,-1,1),(0,1,0,0)\}$$
$$S_1 + S_2 = gen\{(1,-1,0,1),(0,0,1,0),(1,0,-1,1),(0,1,0,0)\}$$

Cómo hemos visto, un método para analizar si son LI o LD,consiste en armar una matriz con los vectores como filas y llevarla a su formaescalonada. Por conveniencia colocaremos los vectores en el siguiente orden:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[F_4 \to F_4 - F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada tiene 3 filas LI (su rango es 3),entonces podemos afirmar que la dimensión de $S+T$ es3.
Como se anuló la última fila, el vector $(0,0,1,0)$ escombinación lineal de los otros tres, por lo tanto una base de $S+T$es: $B_{S+T} = \{(1,-1,0,1),(0,1,0,0),(1,0,-1,1)\}$.
Recordemos que las filas de la matrizescalonada componen otra base de la suma:

$$B'_{S+T} = \{(1,-1,0,1),(0,1,-1,0),(0,0,1,0)\}$$

Suma directa

La suma de dos subespacios es directa siy sólo si la intersección de los subespacios es el vector nulo.

$$\boxed{S + T \text{ es directa } \Leftrightarrow S \cap T = \{0_V\}}$$

Cuando la suma es directa se escribe:

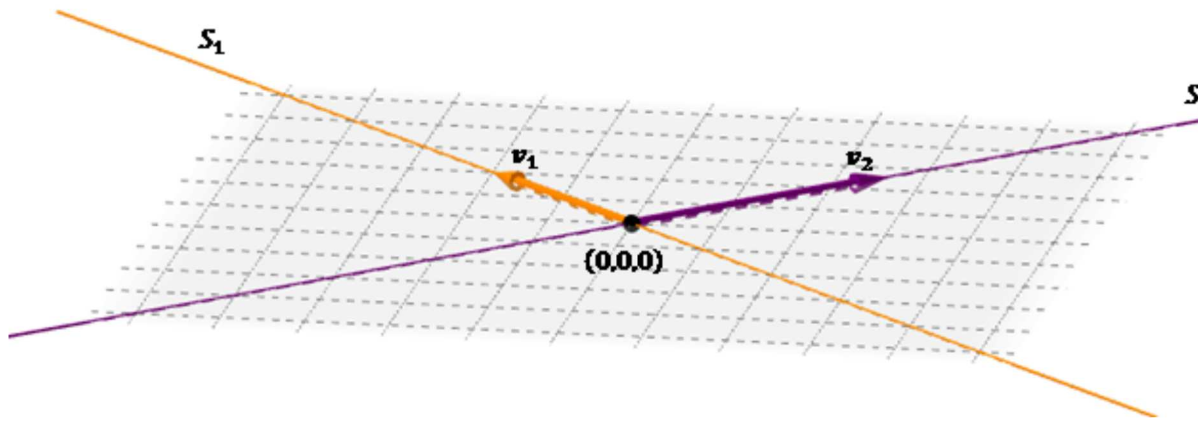
$$S \oplus T$$

Ejemplos en $V = \mathbb{R}^3$

A continuación consideraremos diferentes casos de suma desubespacios en $\mathbb{R}^3$.

Dos rectas

Un caso posible de suma de dos subespacios en $\mathbb{R}^3$es el de dos rectas que se cortan:



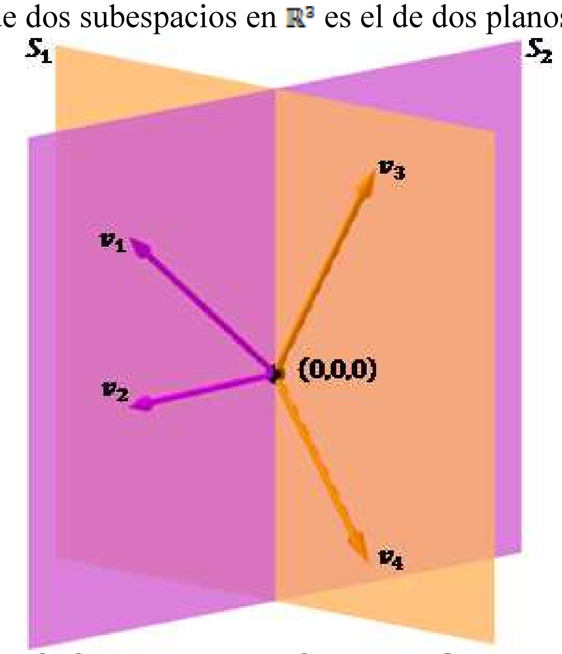
Los dos vectores LI de las rectas generan un plano: aquélque contiene a ambas rectas. La suma es directa porque la intersección entrelas rectas es el vector nulo.

$$S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\} \;\; y \;\; S_1 + S_2 = gen\{v_1, v_2\}$$

$$S_1 \oplus S_2 = S \quad \text{donde S es el plano que contiene a las dos rectas}$$

Dos planos que se cortan

Otro caso posible de suma de dos subespacios en $\mathbb{R}^3$ es el de dos planos que se cortan enuna recta:



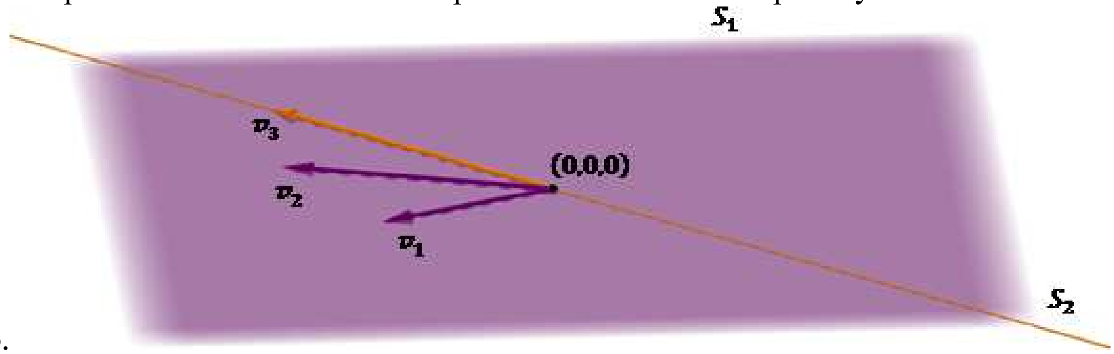
$$S_1 \cap S_2 \neq \{0_V\} \;\; y \;\; S_1 + S_2 = gen\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = gen\{v_1, v_2, v_3\}$$

La suma de los subespacios es $\mathbb{R}^3$ pero no es sumadirecta porque la intersección no es el vector nulo:

$$S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$$

Un plano y unarecta incluida en el plano

Otro caso posible de suma de dos subespacios en $\mathbb{R}^3$ es el de un plano y una rectaincluida en el



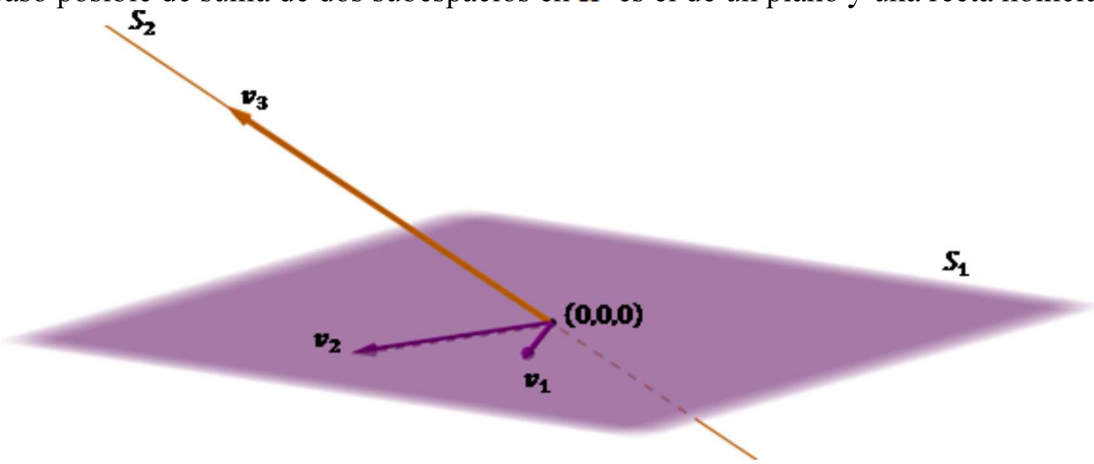
plano.

$$S_1 + S_2 = S_1 \quad pues \;\; S_2 \subset S_1$$

Se obtiene el mismo plano, y la suma no es directa porque laintersección no es igual al vector nulo.

Un plano y una recta no incluida en el plano

Otro caso posible de suma de dos subespacios en $\mathbb{R}^3$ es el de un plano y una recta noincluida en el



plano.

$$S_1 \cap S_2 = \{(0{,}0{,}0)\} y S_1 + S_2 = gen\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$$

Se genera $\mathbb{R}^3$ porque el vector director de larecta no es coplanar con los vectores del plano, y además es directa porque laintersección es el vector nulo:

$$\boxed{S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3}$$

Observación: En el último caso, la uniónde las bases de los dos subespacios forma una base de todo el espacio.En este caso, cada vector de $\mathbb{R}^3$ puede expresarse deforma única como suma de un vector de S_1 y otro de S_2.

EPL 3

Dados $S_1 = gen\{(1,2,1), (0,2,0)\}$ y $S_2 = \{(x, y, z):\; x + y = y - kz = 0\}$,

a. Hallar losvalores de k para los cuales $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$;
b. Para $k = 0$, comprobar que $v = (3,2,1)$ puede expresarse de forma única como suma de un vector $v_1 \in S_1$ y otro de $v_2 \in S_2$.

EPL 4

Sean los subespacios de$\mathbb{R}^4$:

$S = gen\{(1,1,1,1), (0,1,0,1)\}$ y $T = \{(x, y, z, t):\; x - z = 0 \;\; , \; x - z + t = 0\}$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones escorrecta? Justificar.

1. $S \oplus T = \mathbb{R}^4$
2. $S + T = \mathbb{R}^4$
3. $S + T = W \;\; y \; \dim(W) = 3$
4. $S \oplus T = W \;\; y \; \dim(W) = 3$

Teorema de la dimensiónde la suma

Si S_1 y S_2 son subespacios de un espaciovectorial$V$ (de dimensión finita), entonces:

$$\boxed{\dim(S_1+S_2)=\dim(S_1)+\dim(S_2)-\dim(S_1\cap S_2)}$$

En el caso particular de que lasuma sea directa, como $S_1\cap S_2=\{0_V\}$, resulta:

$$\dim(S_1\oplus S_2)=\dim(S_1)+\dim(S_2)$$

Ejemplo

Dados los subespacios de P_2:

$$S_1=\{p\in P_2 \mid p(0)=0\}$$
$$S_2=\{p\in P_2 \mid p(1)=0\}$$

Hallar bases de ambos subespacios y de la intersección

Resolución

Hallemos una base de S_1:

$$p(0)=a_0+a_1 0+a_2 0^2=0\Rightarrow a_0=0$$

Entonces son los polinomios de la forma:

$$a_1x+a_2x^2$$

Luego una base de S_1 es:

$$B_{S_1}=\{x,x^2\}\Rightarrow \dim(S_1)=2$$

Hallemos una base de S_2:

$$p(1)=a_0+a_1 1+a_2 1^2=0\Rightarrow a_0+a_1+a_2=0$$

Entonces son los polinomios de la forma:

$$(-a_1-a_2)+a_1x+a_2x^2=a_1(-1+x)+a_2(-1+x^2)$$
$$B_{S_2}=\{-1+x\ ,\ -1+x^2\}\ \Rightarrow\ \dim(S_2)=2$$

Para buscar $S_1\cap S_2$ debemos plantear que se cumplan lasecuaciones de S_1 y también las de S_2:

$$a_0=0\ \wedge\ a_0+a_1+a_2=0\Rightarrow\ a_0=0\ \wedge\ a_1=-a_2$$

Los polinomios serán de la forma:

$$a_1x-a_1x^2=a_1(x^2-x)$$

Luego:

$$B_{S_1\cap S_2}=\{x^2-x\}\ \Rightarrow\ \dim(S_1\cap S_2)=1$$

Nótese que como conocemos las dimensiones de S_1, S_2 y $S_1\cap S_2$, podemos calcular la dimensión de S_1+S_2:

$$\dim(S_1+S_2)=2+2-1=3$$

Pero el único subespacio de P_2 con dimensión 3 es P_2. Luego: $S_1+S_2=P_2$.

EPL 5

Dados los subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$W_1:\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2}\ \mid A=A^t\}$$
$$W_2:\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2}\mid A=-A^t\}$$

a. Hallarbases de W_1 y W_2
b. Obtener $W_1\cap W_2$.
c. Sin hallarW_1+W_2 analizar la validez de la siguienteafirmación:
$$W_1\oplus W_2=\mathbb{R}^{2\times 2}$$
d. Proponeruna base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ formada por matrices simétricas yantisimétricas, y expresar la matriz
$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

como suma de una matriz simétrica más una antisimétrica.

Producto interno

En la primera unidad vimos producto escalar entre vectores y sus aplicaciones a la Geometría. En esta sección nosproponemos generalizar esta operación a otros espacios vectoriales definiendola noción general de producto interno a partir de las propiedades del productoescalar.

Definición: Un ***producto interno***en un espacio vectorial real V es una operaciónque asigna a cada par de vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ de V un número real $\boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{v}$ tal que severifican las siguientes propiedades (para todo vector $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ de V y todo escalar α):

1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $u \cdot (v + w) = (u \cdot v) + (u \cdot w)$
3. $\alpha u \cdot v = \alpha(u \cdot v)$
4. $u \cdot u \geq 0 \quad y \quad u \cdot u = 0 \quad \Leftrightarrow u = 0_V$

Es posible definir así distintos productos internos en cualquier espacio vectorial (mientras se verifiquen estaspropiedades). En nuestra materia, sólo trabajaremos con el *producto internocanónico* en $\mathbb{R}^n$, que es laextensión del producto escalar:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n).(y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n \qquad \textit{producto interno canónico en } R^n$$

Esta definición nos permite extender elconcepto de *ortogonalidad* a $\mathbb{R}^n$:

$$u \perp v \quad \Leftrightarrow \quad u.v = 0 \qquad \textit{condición de ortogonalidad}$$

Ejemplo

Realicemos el producto interno de los vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$u = (1,2,3,4) \qquad v = (1,0,1,-1)$$
$$u.v = 1.1 + 2.0 + 3.1 + 4.(-1) = 0$$

Como $u.v = 0$ entonces u y v sonortogonales.

Complemento ortogonal de un subespacio

Sea S subespacio de V (espacio vectorial con productointerno).
El *complemento ortogonal de* S, que denotamos como $S^{\perp}$, es el conjuntode vectores de V que sonortogonales a cada uno de los vectores de S:

$$\boxed{S^{\perp} = \{\, v \in V : \ v \cdot w = 0 \quad \forall w \in S \,\} \qquad \textit{complemento ortogonal de } S}$$

Propiedad: $S^{\perp}$ es un subespaciode V.

1. 0_V pertenece a $S^{\perp}$ pues $0_V.w = 0$ para todo w de S
2. Sean $u, v \in S^{\perp} \Rightarrow u.w = 0 \wedge v.w = 0 \quad \forall w \in S \Rightarrow (u+v).w = u.w + v.w = 0$
   Por lo tanto $u + v$ está en $S^{\perp}$
3. Si $u \in S^{\perp} \Rightarrow ku \in S^{\perp}$. ¿Por qué?

Ejemplo1

Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$. Hallar $S^{\perp}$.

Resolución

Tenemos que buscar los vectores de $\mathbb{R}^3$ que seanperpendiculares a todos los vectores de ese plano.
Primero buscamos una base de S, por ejemplo:

$$B_S = \{(-1,1,1), (0,1,3)\}$$

Para hallar el complemento ortogonal, buscamostodos los vectores (x, y, z) que sean ortogonalesa $(-1,,1,1)$ y a $(0,1,3)$.
Se obtiene así un sistema de ecuacionesque define el complemento ortogonal:

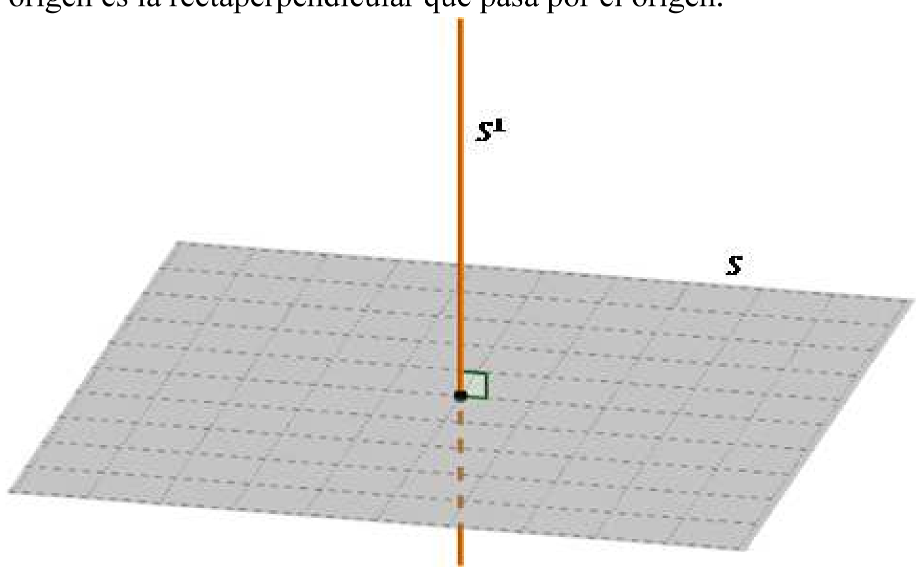
$$\begin{cases} (x,y,z).(-1,1,1) = 0 \\ (x,y,z).(0,1,3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ \qquad y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow -x - 3z + z = 0$$

$$\begin{cases} x = -2z \\ y = -3z \end{cases} \quad \textit{Ecuaciones de } S^{\perp}$$

¿Cuál es unabase del subespacio $S^{\perp}$?

$$B_{S^{\perp}} = \{(-2, -3, 1)\}$$

La base es un vector perpendicular alplano S. Por lo tanto, elcomplemento ortogonal de un plano que pasa por el origen es la rectaperpendicular que pasa por el origen.



Si S es una recta que pasa porel origen: ¿cuál es su complemento ortogonal?

EPL 6

Para justificar el procedimiento queutilizamos para encontrar las ecuaciones de $S^{\perp}$, les pedimos quedemuestren la siguiente propiedad:
Sean u, v, w vectores de $\mathbb{R}^n$.
Si w es ortogonal a u y a v, entonces es ortogonal a cualquier combinación lineal de u y v.

Ejemplo 2

Dado siguiente subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \wedge x_2 - x_4 = 0\}$$

Halle base y dimensión del complemento ortogonal.

Resolución

Tenemos que buscar los vectores de $\mathbb{R}^4$ que son ortogonales a los vectoresde S.
Hallemos una base de S:

$$(-x_2 + 3x_3 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_2) = x_2(-1,1,0,1) + x_3(3,0,1,0)$$
$$\Rightarrow B_S = \{(-1,1,0,1),(3,0,1,0)\}$$

Ahora buscamos los (x_1,x_2,x_3,x_4) tales que:

$$\begin{cases} (x_1,x_2,x_3,x_4)(3,0,1,0) = 0 \\ (x_1,x_2,x_3,x_4)(-1,1,0,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Hallamos las ecuaciones que definen a $S^{\perp}$:

$$S^{\perp} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 + x_3 = 0 \wedge -x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$

Busquemos una base de $S^{\perp}$:

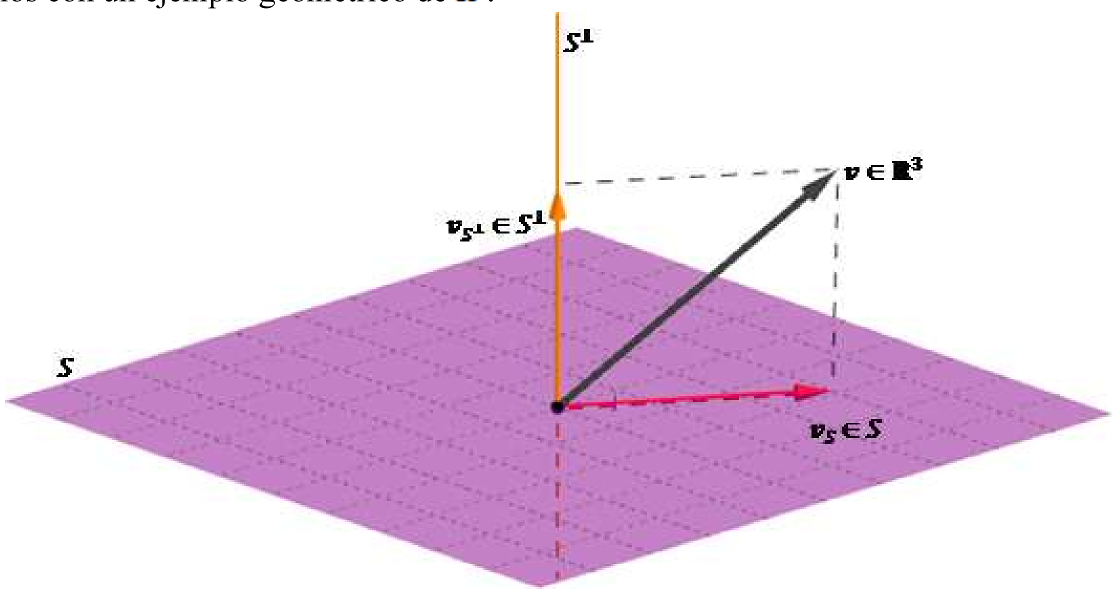
$$(x_1 \ , \ x_2 \ , \ -3x_1 \ , \ x_1 - x_2) = x_1(1,0,-3,1) + x_2(0,1,0,-1)$$
$$\Rightarrow B_{S^{\perp}} = \{(1,0,-3,1),(0,1,0,-1)\} \Rightarrow \dim(S^{\perp}) = 2$$

Propiedades del complemento ortogonal

Sea V un espacio vectorial dedimensión finita, con producto interno, y sea$S$ unsubespacio de V. Entonces se verifican lassiguientes propiedades:

1. $(S^{\perp})^{\perp} = S$
2. $V^{\perp} = \{ 0_V \}$ y $\{ 0_V \}^{\perp} = V$
3. $S \cap S^{\perp} = \{0_V\}$
4. $S + S^{\perp} = V$

Esta última propiedad significa que cualquier vector de V puedeexpresarse como suma de un vector de S más otro de $S^{\perp}$.
Ilustramos con un ejemplo geométrico de $\mathbb{R}^3$:



De las propiedades 3 y 4 se deduce:

$$\boxed{S \oplus S^{\perp} = V}$$

Y por lo tanto:

$$\boxed{\dim(S) + \dim(S^{\perp}) = \dim(V)}$$

La unión de una base de S con una base de $S^{\perp}$ es base de V. Esto se aplica para extender unabase de Sa una base de V,como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Sea $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_4 = 0 \ , \ x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \}$.
Hallar una base de S y extenderla a una base de $\mathbb{R}^4$.
Resolución
Buscamos una base de S, por ejemplo:

$$B_S = \{ (1, -2, 0, -1), (0, 0, 1, 0)\}$$

Como $dim(S) = 2$, podemos anticipar que: $\dim(S^{\perp}) = 4 - 2 = 2$
A partir de la base de S, obtenemos las ecuaciones de $S^{\perp}$:

$$S^{\perp}: \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Y hallamos una base de $S^{\perp}$, por ejemplo:

$$B_{S^{\perp}} = \{ (2,1,0,0), ((0,1,0,-2)\}$$

Entonces uniendo las bases de S y $S^{\perp}$resulta:

$$B = \{ (1,-2,0,-1), (0,0,1,0), (2,1,0,0), \big((0,1,0,-2)\big\} \quad base\ de\ \mathbb{R}^4$$

EPL7

Dados los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \ x_1 = 0 \ , \ x_2 + 2x_3 = 0 \} \quad \text{y} \quad W = gen\{ (1,0,0,0), (2,3,k,0)\}$$

Hallar los valores de k para los cuales $W = S^{\perp}$.

Halle, si es posible, los valores de h demodo que $V \cap W = S$