TEORICO

MATERIA: Analisís Matematico I

TITULO: Teórico Práctico 1° Parte

AUTOR: Anibal Kasero

AR1AT1

UNIDAD 1

TOPOLOGIA EN LA RECTA REAL. FUNCIONES.

Vamos a empezar presentando algunos conceptos importantes de topologiá en la recta real.

Valor absoluto: Se define el valor absoluto (v.a.) o módulo de un número real x de la siguiente manera:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}}$$

Es decir, es simplemente la distancia de x al cero (sin el signo, sólo la longitud del segmento). En cualquier caso $|x|$ es un número positivo o cero, nunca negativo.

Por ejemplo: $|3| = 3$ y $|-3| = 3$ también.

Propiedades del v.a.:

(para todo número x perteneciente a los reales)

1) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\boxed{x \neq 0 \implies |x| > 0}$

O sea, el v.a. es siempre mayor que cero para valores de x no nulos. Además, de la definición se puede ver directamente que el v.a. sólo vale cero si x vale cero.

$$\boxed{x=0 \iff |x|=0}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\boxed{|x| = |-x|}$

Por ejemplo $|3|$ y $|-3|$ valen, los dos, 3.

3) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\boxed{-|x| \leq x \leq |x|}$

4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\boxed{|x.y| = |x|.|y|}$

Por ejemplo: $|(-3).2| = |-3|.|2|$

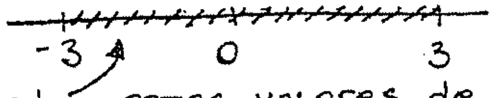
$$|-6| = 3.2$$

$$6 = 6$$

5) $\forall k>0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$: $\boxed{|x| \leq k \iff -k \leq x \leq k}$

Sabiendo que $|x|$ es la distancia de x al cero, es evidente que esta distancia será menor que k si x está entre -k y k.

Gráficamente:



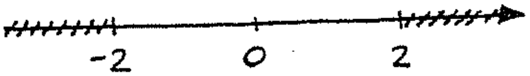
$|x| \leq 3$

todos estos valores de x son solución

6) $\forall k>0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$: $\boxed{|x| \geq k \iff x \geq k \cup x \leq -k}$

O sea, la distancia de x al cero será mayor que k si x es mayor que k o menor que $-k$.

Graficamente:



$|x| \geqslant 2$

7) <u>Desigualdad triangular</u>:

$\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\boxed{|x+y| \leqslant |x| + |y|}$

8) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\boxed{|x| - |y| \leqslant |x-y|}$

9) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\boxed{|x-y| \geqslant \big||x| - |y|\big|}$

<u>Métrica en la recta real</u>:

Una métrica es una función definida de tal manera que cumpla ciertos axiomas. Estos axiomas hacen que la métrica tenga las caracrerísticas esenciales de la distancia entre dos puntos. (por ej, que sea positiva).

En la recta real la métrica más usada es el <u>valor absoluto</u> de la diferencia entre los puntos. Es decir, la distancia entre x e y es:

$$\boxed{d(x,y) = |x-y|}$$

Así definida, la $d(x,y)$ cumple los axiomas de métrica antes nombrados.

Conjuntos acotados

- Cota inferior de un conjunto A:

h es cota inferior de $A \iff [\forall x \in A \Rightarrow x \geqslant h]$

O sea, para que h sea cota inferior de A, todos los elementos de A deben ser mayores o iguales que h. Además, si h es cota inferior, cualquier número menor a h también lo será.

- Cota superior de un conjunto A:

h es cota superior de $A \iff [\forall x \in A \Rightarrow x \leqslant h]$

Entonces, si h es cota superior, cualquier número mayor a h también lo será.

- Conjunto acotado: Un conjunto A es acotado si sólo si tiene cota superior e inferior.

- Conjunto mayorante de un conjunto A: es el conjunto formado por todas las cotas superiores del conjunto A.

- Conjunto minorante: de un conjunto A: es el conjunto formado por todas las cotas inferiores del conjunto A.

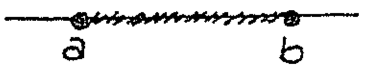
- Extremo superior: Es la mínima de todas las cotas superiores. Si este valor (también llamado supremo) pertenece al conjunto A será el máximo de A.
- Extremo inferior: Es la mayor de todas las cotas inferiores. Si este valor (también llamado ínfimo) pertenece a A, será su mínimo.

Antes de dar un ejemplo para aclarar todo lo anterior vamos a repasar Intervalos.

Intervalos:

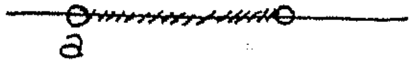
- $[a;b] = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$

Intervalo cerrado



- $(a;b) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$

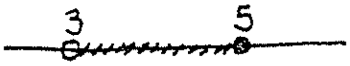
Intervalo abierto



Es decir, en ambos casos se trata de todos los puntos comprendidos entre "a" y "b". La diferencia es que en el intervalo cerrado el conj. incluye a "a" y "b" y en el abierto no.
También están los semicerrados $(a;b]$ y $[a;b)$. Siempre del lado del corchete se incluye al punto y del lado del paréntesis no.

Ahora sí, veamos el ejemplo:

Dado el conjunto $A = (3 ; 5]$:

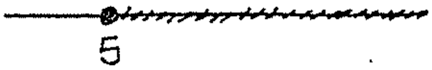


- Conjunto minorante $= (-\infty ; 3]$

cualquier Nº contenido acá es cota inferior

son todos los reales menores o igual a 3.

- Conjunto mayorante $= [5 ; +\infty)$



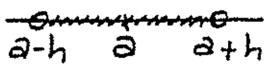
Por supuesto, como tiene cotas inferiores y superiores, es un <u>conjunto acotado</u>.

- Extremo superior $= 5$ (el mínimo del conjunto mayorante). Además, como $5 \in A$, el conjunto tiene máximo y vale 5.
- Extremo inferior $= 3$ (el máximo del conjunto minorante). En este caso $3 \notin A$, por lo tanto A no tiene mínimo.

<u>Clasificación de conjuntos de números reales</u>

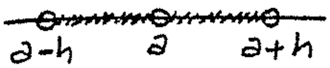
- <u>Entorno</u>: Si $a \in \mathbb{R}$ y $h \in \mathbb{R}^+$ (los reales positivos) el entorno de centro a y radio h es el intervalo abierto $(a-h ; a+h)$. O sea:

$$E(a,h) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge |x-a| < h\}$$



- <u>Entorno reducido</u>: El entorno reducido de centro a y radio h, $E'(a,h)$, es igual a $E(a,h)$ excluyendo el punto a. Es decir:

$$E'(a,h) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 0 < |x-a| < h\}$$



- **Conjunto abierto**: Un conjunto A es abierto si, sólo si, todos sus puntos son interiores. Un punto $\in A$ es interior a A si, sólo si, existe un entorno de ese punto totalmente incluído en A.

Por ejemplo: $A = (1 ; 3)$. Si tomamos el punto 2,9 , éste será interior porque $E(2{,}9 ; 0{,}1)$ está incluído en A. Se puede hacer esto con cualquier punto de A, por lo tanto A es abierto.

Cualquier intervalo abierto será un conjunto abierto. No así un intervalo semicerrado. Por ejemplo: $A = (1 ; 3]$ no es abierto porque *no* existe un entorno de 3 (de ningun radio) que esté incluido en A. (ahora el $3 \in A$, antes no)

- **Conjunto cerrado**: Un conjunto A es cerrado si su complemento es abierto. Es decir, A será cerrado si $\mathbb{R} - A$ es abierto. ($\mathbb{R} - A$ es el conjunto de todos los elementos de $\mathbb{R}$ que no pertenecen a A).

Cualquier intervalo cerrado será un conjunto cerrado. Por ejemplo: $A = [1, 3]$ es cerrado porque: $\mathbb{R} - A = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ es abierto. (fijate que cumple la definición de conjunto abierto)

Funciones

Relación: $R: A \rightarrow B$. Una relación R del conjunto A en el conjunto B es cualquier conjunto de pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$.

Función: $f: A \rightarrow B$. Una relación R de A en B será función si sólo si cumple las dos condiciones siguientes:

1) $\forall x \in A \quad \exists y \in B \; / \; (x, y) \in f$

O sea, para cada elemento del conjunto A existe un elemento del B con el cual forma un par ordenado que pertenece a la relación.
(No hay elemento de A sin "compañero")

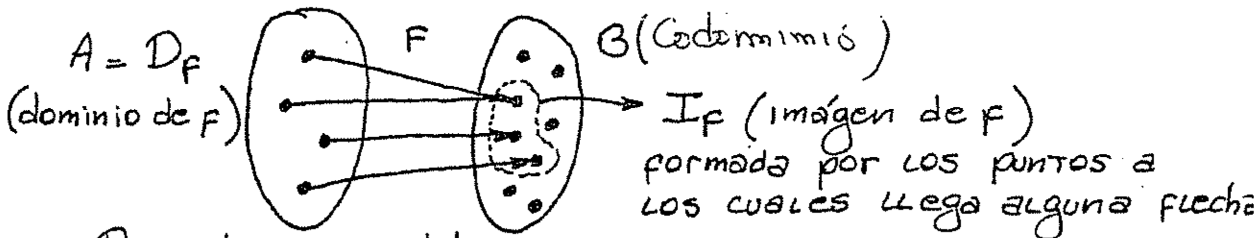
2) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \implies y = z$

Es decir, si x tiene dos compañeros, deben ser el mismo. Esta es una forma matemática de indicar que para cada elemento $x \in A$ debe haber un único compañero, al cual llamaremos imagen de x.

Además llamaremos Dominio de f al conjunto A. y Imagen de f al conjunto (incluido en B) formado por todos los elementos de B para los cuales existe algún $x \in A$ del cual son imagen.

Es decir: $I_F = \{ y / y \in B \wedge \exists x \in A / (x,y) \in f \}$

Gráficamente (para el caso en que A y B tengan una cantidad finita de elementos):



De cada punto debe salir una y sólo una flechita para que sea función

<u>Clasificación de funciones</u>:

- <u>Sobreyectivas</u> <u>o</u> <u>suryectivas</u>: Una función es sobreyectiva si, sólo si, la imágen coincide con el conjunto B. Es decir:

$f: A \to B$ es sobreyectiva $\Longleftrightarrow$ $I_F = B$

(Gráficamente: no hay elementos de B a los que no les llegue flechita).

- <u>Inyectivas</u>: Una función es inyectiva si, sólo si, cada elemento de la imágen es imágen de un único elemento del dominio. Es decir:

$f: A \to B$ es inyectiva $\Longleftrightarrow \forall x \in A \wedge \forall y \in A$:

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

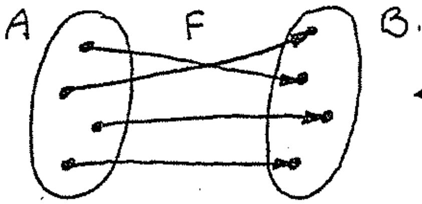
(Gráficamente: nunca hay dos flechas llegando a un elemento de B)

<u>Nota</u>: $\boxed{f(x)}$ significa "la imágen de x a través de f"

O sea, el par ordenado $(x, F(x)) \in F$. Además, por el 2º axioma de función, para cada x va a haber una única $F(x)$.

- Biyectivas: Una función es biyectiva si, sólo si, es inyectiva y sobreyectiva.

Gráficamente:



Así se ve una función biyectiva

Función inversa: Dada una función siempre se puede encontrar la relación inversa dando vuelta los pares ordenados. (Si $(a,b) \in F \Rightarrow (b,a) \in$ a la relación inversa de F). Esta relación inversa será a su vez función si, sólo si, la F era biyectiva.

Fijate en el gráfico de arriba: si das vuelta las flechas, para que vayan de un elemento de B al de A correspondiente, obtenés la relación inversa. Claramente esta relación es función.

Entonces: Si F es biyectiva, la función inversa F^{-1} es tal que: si $F(x) = y \Rightarrow F^{-1}(y) = x$

La imagen de x por F es y

La imagen de y por F^{-1} es x.

Nota: Si la función F es inyectiva pero no sobrey., se puede obtener la función inversa restringiendo su dominio a la imagen de f. (ya vamos a ver un ejemplo, paciencia).

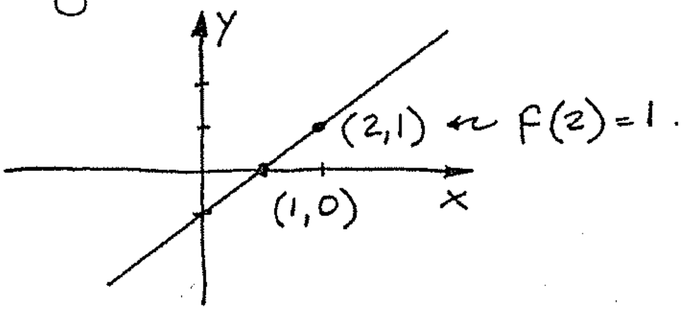
<u>Representación gráfica</u>: Las funciones $f: A \to B$ (donde A y B son $\mathbb{R}$, o están incluidos en $\mathbb{R}$) pueden representarse gráficamente en el plano. El gráfico estará dado por los puntos $(x;y)$ para los cuales $y = f(x)$.

<u>Ejemplo</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$ su imágen es: $f(x) = x - 1$

Así, la imágen de $x = 1$ será $f(1) = 1 - 1 = 0$.

$(1,0) \in f$

Su gráfico es:



Como se ve en el gráfico, a cada $x \in \mathbb{R}$ le corresponde un "y" distinto (es inyectiva).

Además, la imagen (todos los valores de "y" posibles tales que existe un "x" tal que $y = f(x)$) es igual a $\mathbb{R}$. Por lo tanto f es sobreyectiva.

En conclusión, f es biyectiva y, por lo tanto, tiene inversa f^{-1}. Para calcular f^{-1} recordamos que:

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$

Lo único que hay que hacer es despejar x de

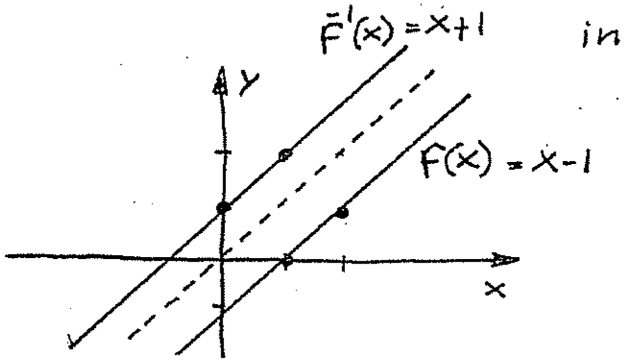
La expresión: $\underset{f(x)}{y = x-1} \Longrightarrow \underset{f^{-1}(y)}{x = y+1}$

Listo. Si ahora queremos graficar esta nueva función tenemos que llamarle "x" a los elementos del dominio de f^{-1} y "y" a las imágenes. O sea:

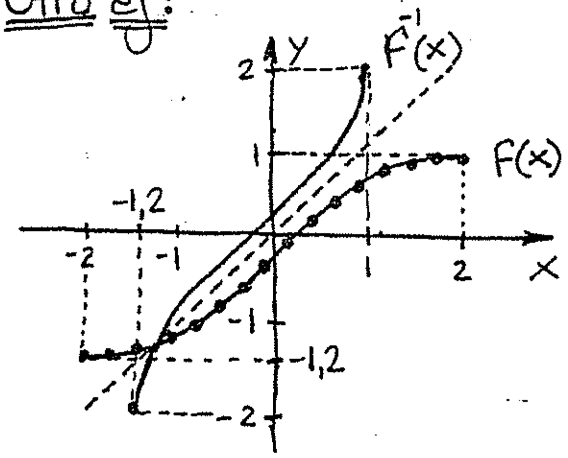
$x = y+1 \rightsquigarrow \underbrace{y = x+1}$

Cambiando x por y e y por x.

Esto lo graficamos como una $g(x) = x+1$, que es la inversa de $f(x)$.



Otro ej:



Dominio (no todo $\mathbb{R}$)

$f: [-2;2] \longrightarrow \mathbb{R}$

f no es sobreyectiva porque el conj. imagen I_f es igual a $[-1{,}2;1]$, que no coincide con $\mathbb{R}$. Entonces f^{-1} no sería función (no cumpliría el 1° axioma de función), pero esto se puede arreglar restringiendo su dominio para que sea igual a I_f.

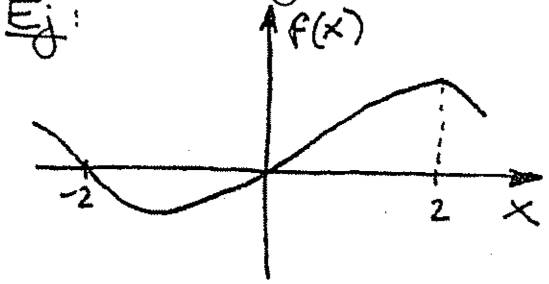
$f^{-1}: [-1{,}2;1] \longrightarrow [-2,2] \rightsquigarrow$ así sí es función.

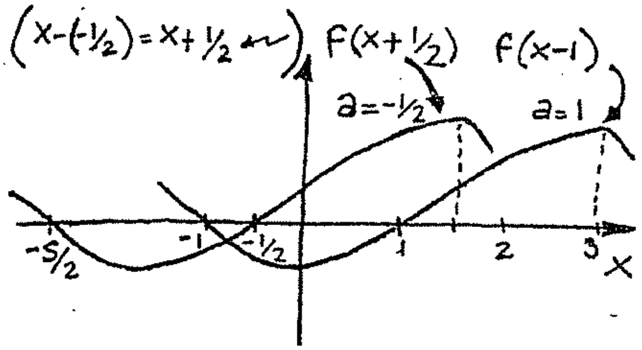
Además, fijate que la función inversa f^{-1} y la directa f son <u>simétricas</u> respecto al eje x=y. (La diagonal punteada). Esto es siempre así.

Desplazamiento y cambio de escala:

- <u>Desplazamiento</u>: Dada una f(x) cuyo gráfico es conocido y dada $g(x) = f(x-a)$, podemos obtener el gráfico de g(x) desplazando f(x) en $|a|$ hacia la derecha, si "a" es positivo, o hacia la izquierda, si "a" es negativo.

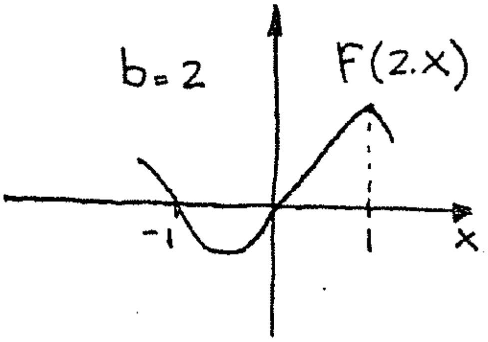
<u>Ej</u>:

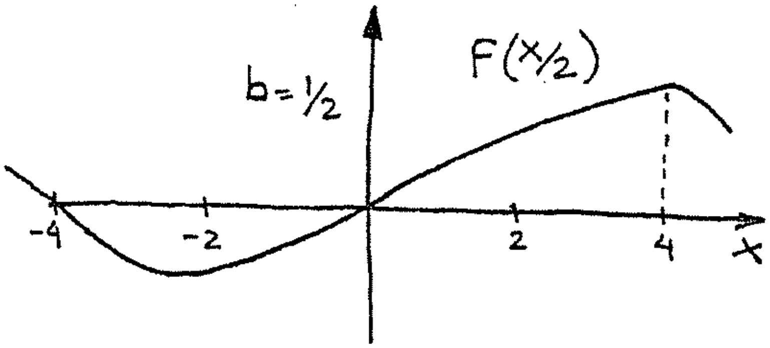




- <u>Cambio de escala</u>: Dado el gráfico de f(x), podemos obtener el de $g(x) = f(b.x)$ comprimiendo f(x) en un factor de "b", si $b > 1$, o expandiéndolo si $b < 1$.

<u>Ej</u>: Con la f(x) de arriba:



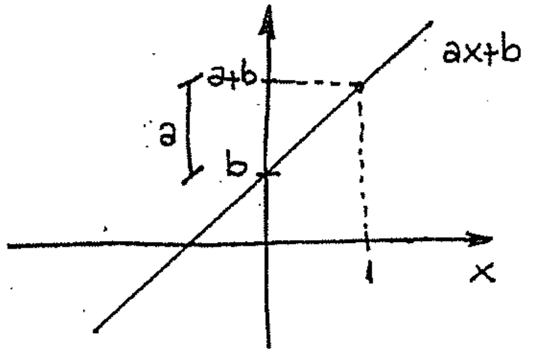


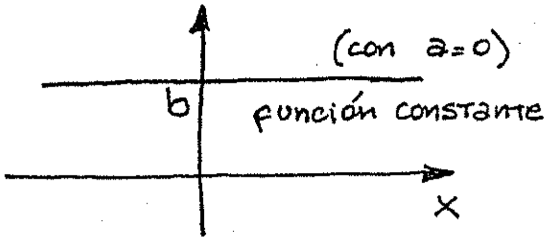
Ahora, para graficar $\boxed{g(x) = f(bx-a)}$ $\Longrightarrow$ primero desplazás $f(x)$ en $|a|$ (hacia donde corresponda, como antes) y al gráfico desplazado lo comprimís con un factor de b (o expandís, lo que corresponda). Ojo, primero desplazás, después comprimís o expandís.

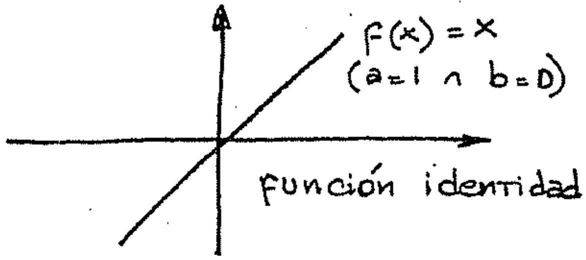
Funciones especiales:

Vamos a ver algunas funciones que aparecen con mucha frecuencia en matemática, ingeniería, etc.

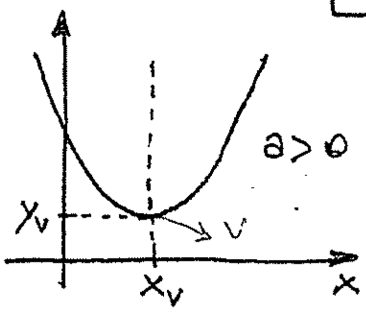
- Lineales: La forma general es: $\boxed{f(x) = ax+b}$
y su gráfico:







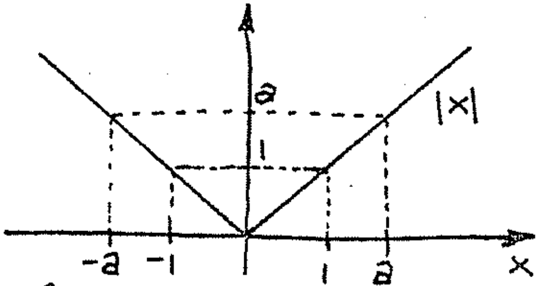
- Cuadráticas: $\boxed{f(x) = ax^2+bx+c}$



Con: $\boxed{X_v = \frac{-b}{2a}}$ $\boxed{Y_v = f(X_v)}$

Para $a<0$ el gráfico es hacia abajo: $\cap$

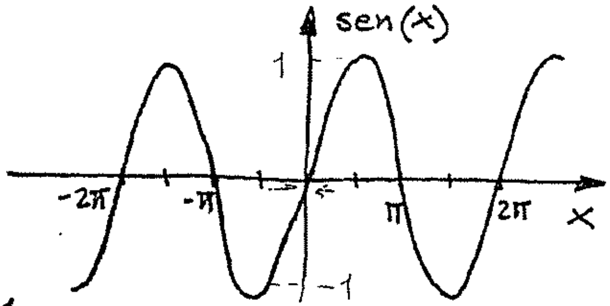
- **Valor absoluto**: $\boxed{f(x) = |x|}$

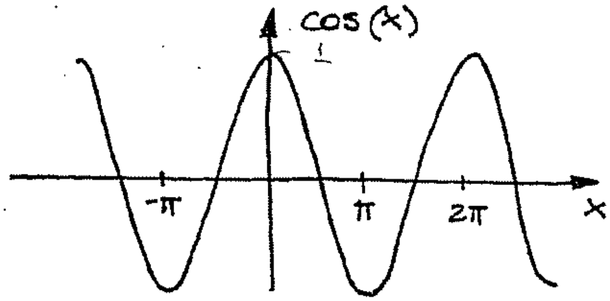


→ Te acordás que el valor absoluto de un número era siempre positivo? Por eso el conjunto imágen es $[0,+\infty)$

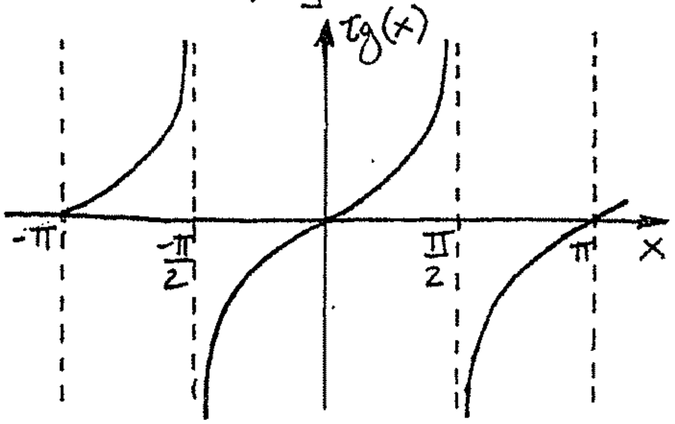
→ Es simétrica, el valor absoluto de "a" o de "-a" es siempre a.

- **Trigonométricas**: $\boxed{sen(x) \; ; \; cos(x) \; ; \; tg(x)}$; etc...





← Los gráficos son exactamente iguales, pero desplazados en $\pi/2$. En ambos casos el dominio son todos los reales y el conj. imágen sólo el intervalo $[-1 ; 1]$.



→ $Tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$

En este caso se excluyen del dominio los valores de x para los cuales el denominador es nulo (por eso de que no se puede dividir por cero, viste?). Entonces:

$$D_{tg} = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2m+1)\frac{\pi}{2} \; , \; m \in \mathbb{N}\}$$

ningún múltiplo impar de $\pi/2$

- Hiperbólicas: $\boxed{sh(x) \; ; \; ch(x) \; ; \; Th(x)}$; etc...

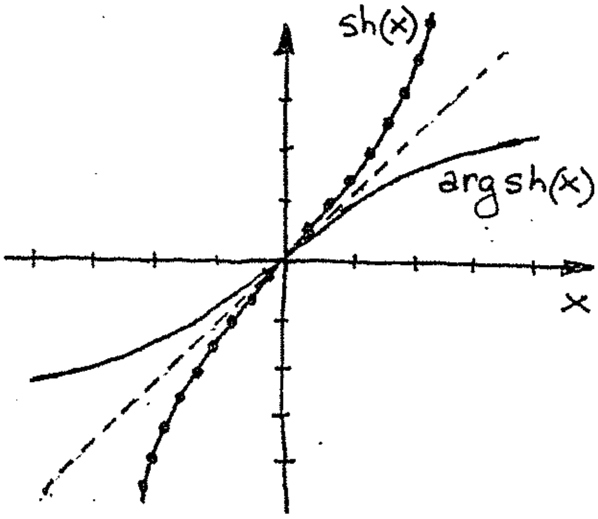
Se definen de la siguiente manera:

seno hip: $\boxed{sh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}}$

coseno hip: $\boxed{ch(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}}$

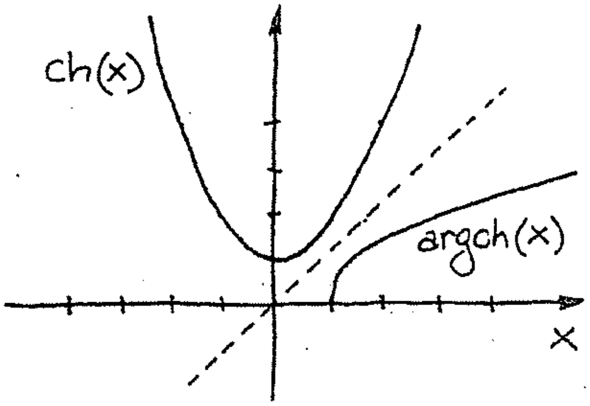
Tangente hip: $\boxed{Th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}}$

También están la cosecante, secante y cotangente hiperbólicas que son las inversas multiplicativas del seno, coseno y tangente hiperbólicos, respectivamente. (y lo mismo para las trigonométricas) Sus gráficos y los de sus funciones inversas ($\arg sh(x)$, $\arg ch(x)$ y $\arg th(x)$) son:



$sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Es biyectiva, así que no hay problema en encontrar su inversa argsh(x).

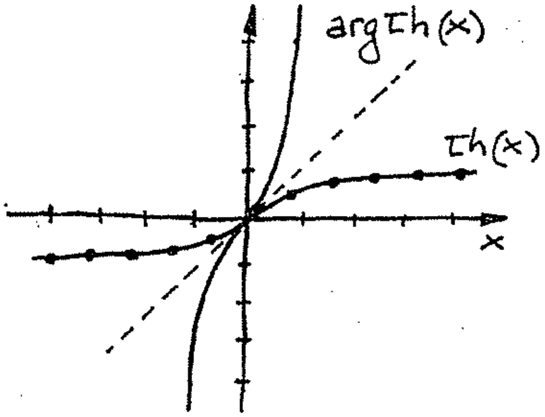


$ch: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

No es biyectiva. Para poder encontrarle inversa nos quedamos con un pedazo de función. Restringimos el dominio a $[0; +\infty)$ y el conj. de llegada a $[1; +\infty)$

O sea, graficamos la inversa para:

$\underline{ch^*: [0; +\infty) \longrightarrow [1; +\infty)}$ que sí es biyectiva.



$th: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Es inyectiva pero no sobreyectiva, el conjunto imágen es $(-1; 1)$. Tenemos que restringir el dominio de argth a ese intervalo y entonces sí, $argth: (-1, 1) \to \mathbb{R}$ es función.

Nota: Ojo, no te confundas las inversas multiplicativas ($sech(x) = 1/ch(x)$, por ejemplo) con las funciones inversas, que son las que graficamos.

* No es el ch original, es sólo la rama derecha.

Composición de funciones:

Dadas dos funciones "f" y "g" para las cuales $\boxed{I_g \subseteq D_f}$ se puede obtener la función compuesta h(x) de la siguiente manera:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

f compuesta con g

se reemplaza x por g(x) en la expresión de f(x)

Es decir, primero sacás la imagen de "x" por "g" y a ese resultado le aplicás "f". Para poder aplicar "f" a g(x) (para cualquier x que pertenezca al dominio de "g") es necesario que g(x) esté dentro del dominio de "f", o sea, que $I_g \subseteq D_f$ (imagen de g incluida en el dominio de f)

Si I_g no está incluida en D_f, habrá un conjunto de valores de x para los cuales g(x) no tiene imagen por f (puntos g(x) que $\notin D_f$). En ese caso hay que restringir el dominio de h a un subconjunto de D_g, de manera que para todo $x \in D_h$ se cumpla que $g(x) \in D_f$.

Ejemplo: Tenemos f y g tales que:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = 3x \\ g: [0;+\infty) \longrightarrow [0;+\infty) \;/\; g(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

El dominio de g no es $\mathbb{R}$ porque no existe la raiz de números negativos (en realidad existe pero no es real).

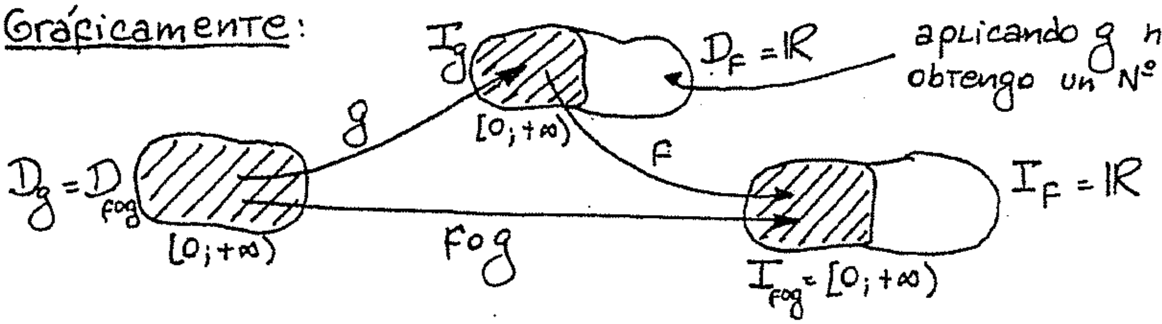
Calculamos $\boxed{f \circ g}$: $f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 3 . \sqrt{x}$

donde decía x pongo g(x)

En este caso:

$I_g = [0; +\infty)$; $D_f = \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $I_g \subseteq D_f$ se cumple

Gráficamente:



aplicando g nunca obtengo un N° < 0.

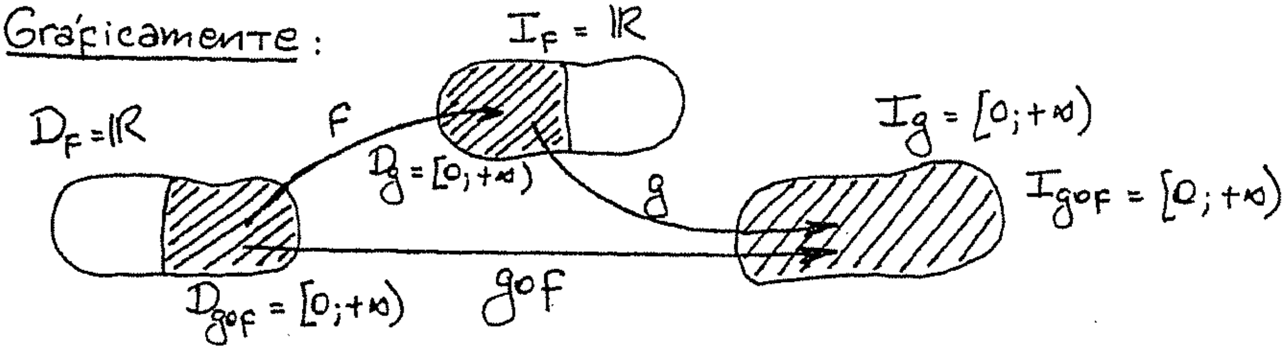
Ahora calculamos $\boxed{g \circ f}$: $g(f(x)) = g(3x) = \sqrt{3x}$

reemplazamos x por 3x en la expresión de g(x).

En este caso lo que debería cumplirse es $I_f \subseteq D_g$ (porque calculamos $g \circ f$ y no $f \circ g$). Sin embargo, como:

$I_f = \mathbb{R}$; $D_g = [0; +\infty)$ $\Longrightarrow$ $I_f \subseteq D_g$ no se cumple.

Gráficamente:



O sea, hay que elegir $D_{g \circ f}$ como un subconj de

D_f para el cual la imagen esté incluida en D_g.
(Nota: La imagen de un subconj. S es el conjunto formado por todas las imágenes de los puntos pertenecientes a S).

Curvas definidas paramétricamente:

Una curva en el plano es un conjunto continuo de pares ordenados $(x(\tau); y(\tau))$. Cuando τ, el parámetro, recorre un intervalo $[a; b]$, los pares $(x(\tau), y(\tau))$ describen una curva continua en el plano.

Las funciones describen curvas en el plano. Hasta ahora hemos definido a las funciones de manera explícita, dando la expresión $y = f(x)$ para obtener la imagen de x. Sin embargo, algunas funciones también pueden definirse paramétricamente.

Ejemplo: Dada $f(x) = x^2$, buscamos su forma paramétrica. Tomamos a x como parámetro: $\tau = x$

$$\Rightarrow y(\tau) = x^2 = \tau^2 \Rightarrow \boxed{(\tau, \tau^2) \quad \tau \in \mathbb{R}}$$

es la forma paramétrica de $f(x) = x^2$.

Otro ejemplo: Dada la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, definir paramétricamente la curva que describen los puntos solución.

Para esto se usa un truquito muy típico; se define: $\boxed{x = r\cos\tau} \leftsquigarrow x(\tau)$

Falta, entonces, obtener $y(\tau)$. Para eso recordamos (del secundario probablemente) una propiedad de las funciones trigonométricas: $\boxed{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1}$

Fijate que si definimos $\boxed{y = r\,\text{sen}\,\tau}$, la ecuación original queda:

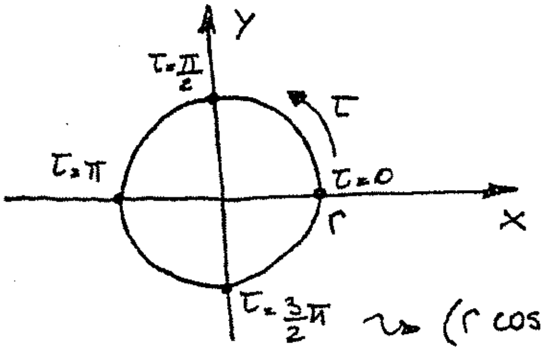
$$(r\cos\tau)^2 + (r\,\text{sen}\,\tau)^2 = r^2$$

Esta es una identidad (vale $\forall\tau$), y eso se verifica directamente usando la propiedad anterior.

Listo, la curva está formada por los pares ordenados: $\boxed{(r\cos\tau\,;\, r\,\text{sen}\,\tau) \quad \tau \in [0; 2\pi)}$

Es un círculo de radio r.

Sólo entre 0 y 2π porque después el sen y el cos empiezan a repetir sus valores.



$\rightsquigarrow (r\cos\frac{3}{2}\pi\,;\, r\,\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi) = (0, -r)$

EJERCICIOS _ PRACTICA I

A continuación vamos a ver una serie de ejercicios, algunos de los cuales son simplemente ejemplos de lo que vimos en la parte teórica, otros introducen algunas nuevas, pero sencillas, definiciones.

$\boxed{1}$ Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Si lo son, probarlo, sino, hallar un contraejemplo.

(Este ejercicio es un repaso de inecuaciones)

a) $\left|\frac{1}{x}\right| < 1 \wedge x \neq 0 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow -1 > x > 1$

(El $x \neq 0$ es necesario porque cuando $x = 0$ no se puede hacer $1/x$)

La primera implicación es verdadera. Esto sale directamente de una de las propiedades de módulo que vimos en la parte teórica.

Sin embargo, la 2º implicación ya no es verdadera. Fijate, simplemente, que no hay ningún valor de x que sea menor que (-1) y mayor que (1) al mismo tiempo.

<u>Contraejemplo</u>: Con $x = 2$: $\left|\frac{1}{2}\right|$ es < 1, pero no

cumple $-1>2>1$

b) Si $x<a<0 \Longrightarrow x^2>ax \wedge ax>0$

Esta es verdadera. Para probarlo vemos que la hipótesis $x<a<0$ implica que: $x<a$; $a<0$; $x<0$

Entonces; multiplicando las 2 primeras por x y recordando que, como $x<0$, hay que invertir la dirección de la desigualdad:

$$(x<a).x \Longrightarrow x^2>ax$$

$$(a<0).x \Longrightarrow ax>0$$

Listo, hemos comprobado que la proposición era verdadera.

$\boxed{2}$ Escribir la siguiente expresión sin la barra de módulo: $|a|-|a-b|$

Sabemos, por la definición de módulo que:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a>0 \\ -a & \text{si } a<0 \end{cases} \qquad |a-b| = \begin{cases} a-b & \text{si } a-b>0 \\ -(a-b) & \text{si } a-b<0 \end{cases}$$

Entonces, tenemos 4 combinaciones posibles:

- $a>0 \wedge a>b \Longrightarrow |a|-|a-b| = a-(a-b) = b$
- $a>0 \wedge a<b \Longrightarrow \quad = a-(-(a-b)) = 2a-b$
- $a<0 \wedge a>b \Longrightarrow \quad = -a-(a-b) = -2a+b$
- $a<0 \wedge a<b \Longrightarrow \quad = -a-(-(a-b)) = -b$

Esto se escribe:

$$|a|-|a-b| = \begin{cases} b & \text{si} \quad a>0 \ \wedge \ a>b \\ 2a-b & \text{si} \quad 0<a<b \\ b-2a & \text{si} \quad 0>a>b \\ -b & \text{si} \quad a<0 \ \wedge \ a<b \end{cases}$$

$\boxed{3}$ Determinar el conjunto solución y graficar.

$$4 \leq |x+3| < 6$$

Esto lo podemos expresar también de la siguiente manera:

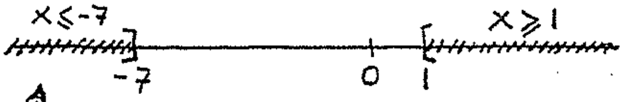
$$4 \leq |x+3| \quad \overset{\text{"y"}}{\wedge} \quad |x+3| < 6$$

Por las propiedades vistas en la teórica:

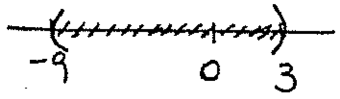
$$\left[(x+3 \geq 4) \overset{\text{"o"}}{\cup} (x+3 \leq -4)\right] \cap \left[-6 < x+3 < 6\right]$$

$$\left[(x \geq 4-3) \cup (x \leq -4-3)\right] \wedge \left[-6-3 < x < 6-3\right]$$

$$\left[\ x \geq 1 \quad \cup \quad x \leq -7\ \right] \wedge \left[-9 < x < 3\right]$$



$\wedge$

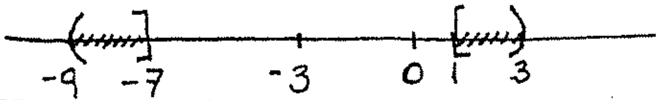


Como es ∪, es <u>unión</u> de los dos intervalos.
"]" y "[" significan que el punto correspondiente está incluido.

"(" y ")" significan que esos puntos (-9 y 3) no están incluidos en el intervalo.

Ahora hay que hacer la intersección de esos dos conjuntos.

Se obtiene, entonces:

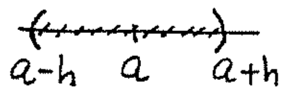


O sea: $\boxed{S = (-9 ; -7] \cup [1 ; 3)}$

Fijate que, siendo $|x+3|$ la distancia de x al (-3), los dos intervalos de la solución cumplen que su distancia al (-3) es mayor o igual que 4 $(|x+3| \geq 4)$ y menor que 6 $(|x+3| < 6)$. De esta manera podés verificar que tu solución sea correcta.

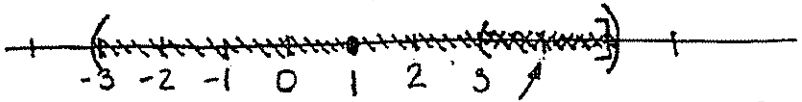
$\boxed{4}$ Hallar un entorno con centro en 1 y que contenga al intervalo $(3;5]$.

Acordate que los entornos son siempre intervalos <u>abiertos</u> del tipo: $(a-h \, ; \, a+h)$



Ya me dan $a=1$ en el enunciado. El h hay que elegirlo mayor a 4 (no igual a 4 porque el 5 está incluido en $(3;5]$ pero no estaría incluido en el entorno de $h=4$ y centro 1).

Entonces, por ejemplo, tomamos $\boxed{h = 4,1}$



Como se ve en el gráfico, el entorno de centro 1 y radio 4,1 incluye al intervalo $(3,5]$

$\boxed{5}$ Hallar los pares ordenados (a, b) tales que:

$$\left(\frac{1}{a+b};\ 4\right)=\left(\frac{1}{2a-b};\ \sqrt{a+2b}\right) \text{ siendo } 2a\neq b \wedge a,b\in\mathbb{R}^{+}$$

Para que dos pares ordenados sean iguales, sus componentes deben ser iguales. O sea:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{2a-b} \implies a+b=2a-b \qquad \boxed{2b=a} \\ 4=\sqrt{a+2b} \implies 4^2=a+2b \qquad \boxed{16=2b+a} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{b=4} \Longleftarrow \boxed{a=8} \Longleftarrow 16=2a \Longleftarrow 16=a+a$$

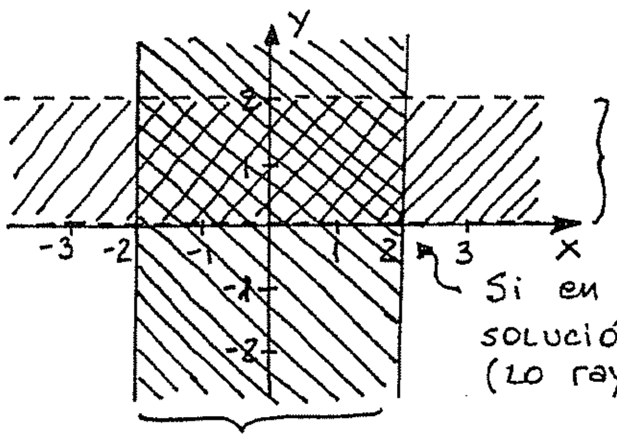
Hay un solo par que cumple lo pedido y es $(8;4)$

Nota: Hubo que pedir, como antes, que los denominadores no fueran cero. Como a y $b\in\mathbb{R}^{+}$ $(a,b>0)$, seguro $a+b$ no vale nunca cero. Y como $2a\neq b$, tampoco $2a-b$ vale cero.

$\boxed{6}$ Representar en los ejes cartesianos el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$D=\{(x,y)/|x|\leq 2 \ \cup \ |y-1|<1\}$$

Como dice "$\cup$", D será el conj. de todos los pares (x,y) tales que $|x|\leq 2$ <u>o</u> que $|y-1|<1$.
(O sea, la distancia de x al cero menor o igual que 2 <u>o</u> la dist. de y al 1 menor a 1)



Todos estos pares (x,y) tienen la distancia de y al 1 menor a 1.

Si en vez de "∪" hubiera sido "∩", la solución habría sido la intersección (lo rayado dos veces).

Todos estos pares (x,y) tienen la distancia de x al cero menor o igual a 2.

La solución es todo lo rayado, doble o no.

$\boxed{7}$ ¿La relación $y^2 = x$ es función en $\mathbb{R}^2$?

Es decir, dada una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que sus pares (x, y) cumplen $y^2 = x$, se cumplen los axiomas de función?.

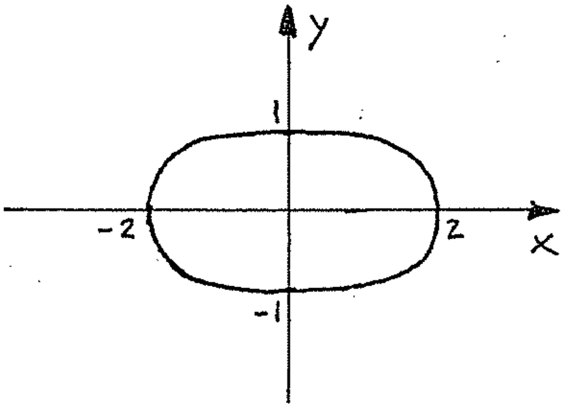
No, no se cumple ninguno de los dos:

- Hay un montón de valores de "x" para los cuales no existe ningún "y" tal que (x,y) pertenezca a la relación. Por ejemplo: $x = -2$ (no existe "y" tal que $y^2 = -2$).
- Encima hay dos valores de y que se relacionan con el mismo x. Por ejemplo: los pares $(4; 2)$ y $(4; -2)$ pertenecen a la relación.

Por lo tanto, no se cumple ninguno de los dos axiomas. $\Rightarrow$ **no** es función en $\mathbb{R}^2$.

Nota: Fijate que si redefinimos la relación para que vaya de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$, sí se cumplen los dos axiomas y, entonces, la relación es función.

$\boxed{8}$ Dado el siguiente gráfico, analizar cuáles deben ser los conjuntos A y B para que $f: A \to B$, dada por el pedazo de gráfico correspondiente, sea función biyectiva.

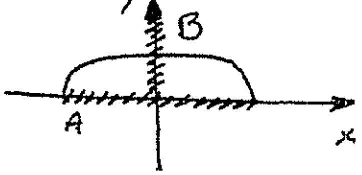


- Primero veamos qué debe pasar para que sea función: En principio, no debe haber ningún punto del conjunto A que no tenga imagen. Por lo tanto A debe ser algún subconjunto del intervalo $[-2;2]$, porque el resto de los reales no tienen imagen.

Además, no debe haber ningún $x \in$ al dominio que tenga dos imagenes distintas. Por lo tanto, hay que elegir alguna de las dos tapas de la elipse, la ⌒ o la ◡. Elegimos la primera, tomando $B = \mathbb{R}_0^+$ (los reales positivos incluyendo al cero).

Conclusión:

$f: [-2,2] \to \mathbb{R}_0^+$



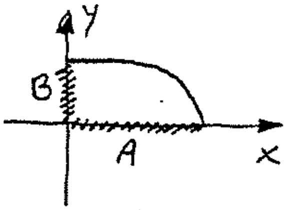
es función.

- Ahora, para que sea biyectiva debe ser: inyectiva y sobreyectiva. Para que sea sobre es fácil, no debe haber ningún punto del conjunto B que no tenga "preimagen" (o sea, un x del cual ser imagen). Ningún valor de "y" mayor a 1 tiene preimagen, así que reducimos B al conjunto $[0; 1]$. Con ese B, f es sobreyectiva.

Para que sea inyectiva, no debe haber dos "x" con la misma imagen (o una "y" con dos preimágenes, que es otra forma de decirlo). Como para "x", tengo la misma imagen que para "-x", hay que elegir alguno de los dos pedazos: ╭ ó ╮. Elegimos ╮, entonces A debe ser $[0; 2]$.

<u>Conclusión</u>:

$f : [0; 2] \rightarrow [0; 1]$



es función biyectiva

$\boxed{9}$ Hallar el dominio para: $y = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$

El dominio está formado por todos los puntos que tienen imagen. En este caso tenemos 2 restricciones:

- que el denominador no sea cero, o sea,

$x + 2 \neq 0 \implies \boxed{x \neq -2}$

- que el argumento de la raíz no sea negativo,

(porque no se puede sacar raíz de números negativos)

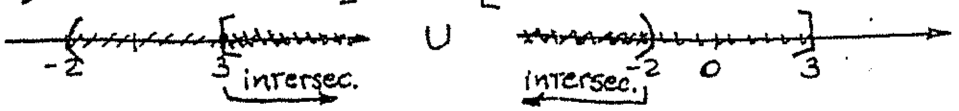
O sea: $\frac{x-3}{x+2} \geq 0$

Para que una división de 2 números sea positiva, ambos números deben ser positivos o ambos negativos:

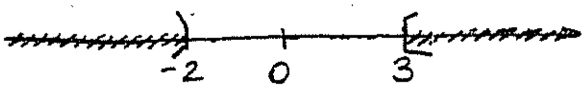
sin = porq' es el denominador.

$$\left[x-3 \geq 0 \ \cap\ x+2 > 0\right] \cup \left[x-3 \leq 0 \ \cap\ x+2 < 0\right]$$

$$\left[x \geq 3 \ \cap\ x > -2\right] \cup \left[\ x \leq 3 \ \cap\ x < -2\right]$$



unión →

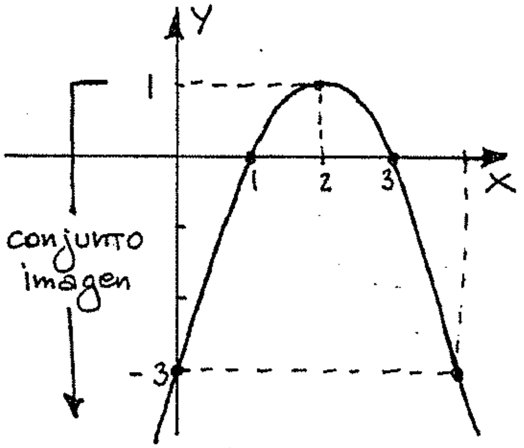


→ el -2 ya quedó excluido.

Entonces: $\boxed{D = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)}$

$\boxed{10}$ Determinar el conjunto imagen, los ceros y signos de la función: $\boxed{f(x) = -x^2+4x-3}$

Primero la graficamos. Es fácil porq' es una parábola.



$$\underline{X_V} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = \boxed{2}$$

$$\underline{Y_V} = -(2)^2+4(2)-3 = \boxed{1}$$

- El conjunto imagen es el conj. de todos los puntos que tienen preimagen.

$$\boxed{I = (-\infty; 1]}$$

- Los ceros de la función son los valores de x tales que $\boxed{f(x) = 0}$. Gráficamente son los valores de x donde la curva corta al eje x. En este caso del gráfico (o con la calculadora o con la formulita $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$) obtenés:

$\boxed{x_1 = 1}$ y $\boxed{x_2 = 3}$ ⟹ los dos ceros de la función.

Podés verificar además que $f(1) = f(3) = 0$

- Los signos de la función están dados por el conjunto de positividad y de negatividad. El conj. de pos., C^+, es el conj. de puntos del dominio para los cuales la imagen es positiva. Análogamente se define el de negatividad.

$$C^+ = \{x \in D / f(x) > 0\} = (1; 3)$$

$$C^- = \{x \in D / f(x) < 0\} = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$$

$\boxed{11}$ Para la función anterior determinar cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximos y mínimos del conjunto imagen, si existen.

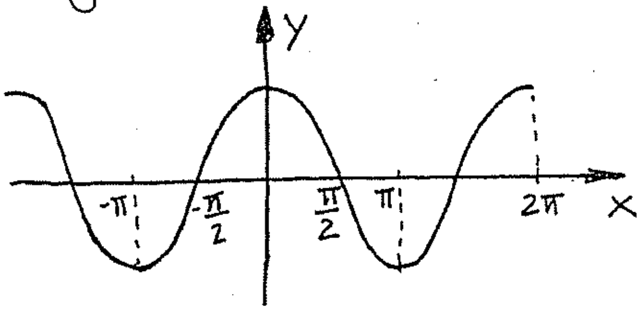
El conjunto imagen es: $\boxed{(-\infty; 1]}$. Por lo tanto:

- Conjunto mayorante (formado por todas las cotas superiores): $\boxed{[1; +\infty)}$

- Conjunto minorante: $\emptyset$ (no hay cotas inferiores)
- Supremo y máximo: $\boxed{1}$
- Infimo y mínimo: no hay.

$\boxed{12}$ Determinar dominio e imagen para que exista función inversa y hallarla. $\boxed{f(x) = \cos x}$

La graficamos:

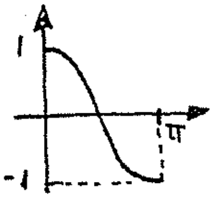


$f: A \rightarrow B$.

Si tomamos A y B igual a $\mathbb{R}$, f no es biyectiva ni a palos, o sea, no va a tener inversa.

Para que una función sea biyectiva se debe cumplir que "para cada y de B exista una y solo una preimagen x en A". Dicho así resumimos la sobrey. y la inyectividad en una sola frase.

En este caso si tomamos: $\boxed{\begin{array}{l} A = [0;\pi] \\ B = [-1;1] \end{array}}$



el pedacito de coseno que queda es una función biyectiva. Su inversa es el $\boxed{\arccos(x)}$ y va de B en A, o sea: $\arccos : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$

$\boxed{13}$ Determinar analíticamente si las sig. funciones son pares o impares.

Primero veamos las definiciones

- Una función f es par $\Longleftrightarrow$ $\boxed{f(x) = f(-x)}$ $\forall x$
- Una función f es impar $\Longleftrightarrow$ $\boxed{f(x) = -f(x)}$ $\forall x$

a) $f(x) = x - 3x^3$

Calculamos $f(-x)$: $f(-x) = (-x) - 3(-x)^3$

(Donde decía x ponés $(-x)$ y listo).

$$\Longrightarrow f(-x) = -x - 3(-x^3) = -x + 3x^3$$

[cuando es potencia impar el (-) sale. si es potencia par el (-) desaparece. Por ejemplo $(-x)^4 = x^4$.]

Si ahora sacás el (-) factor común:

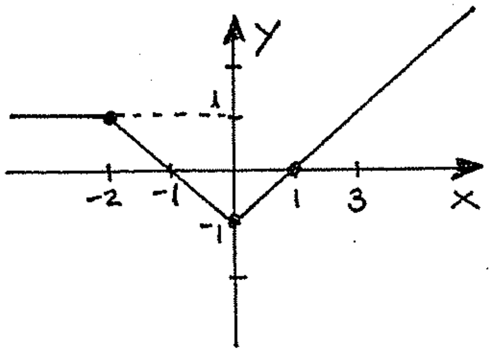
$$\Longrightarrow f(-x) = -\left[x - 3x^3\right] = -f(x) \Longrightarrow \text{es impar}$$

b) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ ⤳ Es fácil ver que no es ni par ni impar. Por ejemplo, para $x = 1 \Longrightarrow f(1) = 0$

En cambio $f(-1)$ ni siquiera existe (-1 no pertenece al dominio porque anula al denominador).

Por lo tanto no se cumple ni $f(x) = f(-x)$ ni $f(x) = -f(-x)$ (porque para $x = 1$ no se cumple y debe cumplirse para toda x). y no es ni par ni impar.

$\boxed{14}$ Dado el sig. gráfico hallar: a) dominio e imagen b) ceros y signos ; c) definición analítica de la función ; d) los gráficos para $f(x+2)$; $f(x)-2$; $f(-2x)$; $-2f(x)$.



a) $D=\mathbb{R}$ (no hay restricciones)

$I=[-1\,;+\infty)$

b) Ceros $=\{-1\,;\,1\}$

$C^{+}=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

$C^{-}=(-1;1)$

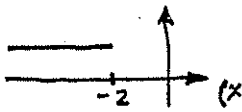
c) Hay que definirla por partes. En cada parte tenemos una formulita distinta. En este caso las 3 partes son rectas, así que es fácil.

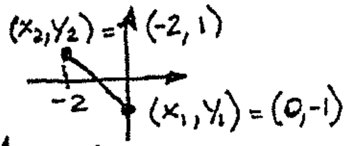
Toda recta cumple: $\boxed{y=ax+b}$ con $\boxed{a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$

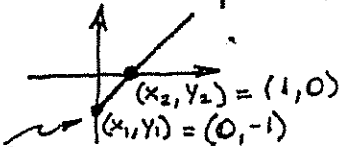
y $\boxed{b}$ la <u>ordenada al origen</u> (donde la recta corta al eje "y"). Los pares (x_2,y_2) y (x_1,y_1) son dos puntos conocidos de la recta.

Entonces:

$$F(x)=\begin{cases} 1 & x<-2 \implies \\ \dfrac{1-(-1)}{-2-0}\cdot x+(-1) & -2\leq x<0 \implies \\ \dfrac{0-(-1)}{1-0}\,x+(-1) & x\geqslant 0 \implies \end{cases}$$





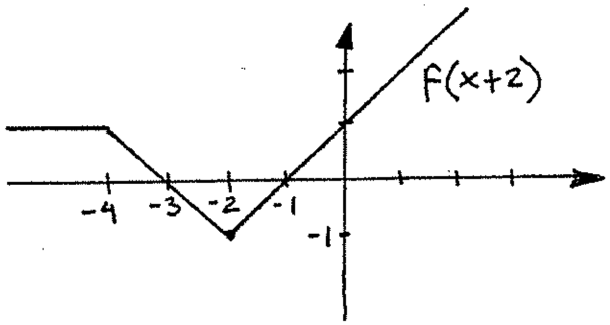


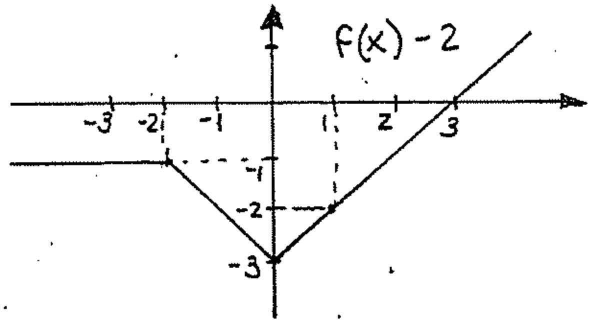
"•" son los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) q' elegimos para calcular a.

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x < -2 \\ -x-1 & -2 \leq x < 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$ Definición analítica

d) $f(x+2) \rightarrow$ se mueve 2 hacia la izquierda

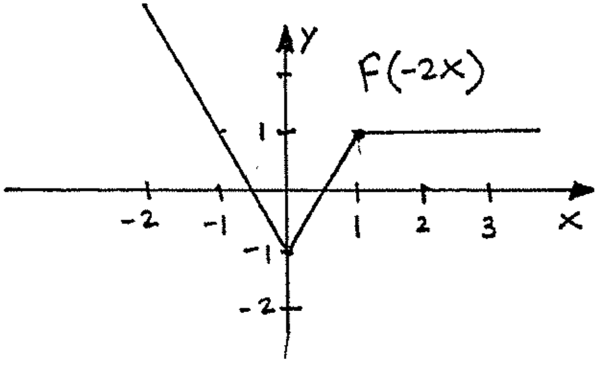
$f(x)-2 \rightarrow$ se mueve 2 hacia abajo.

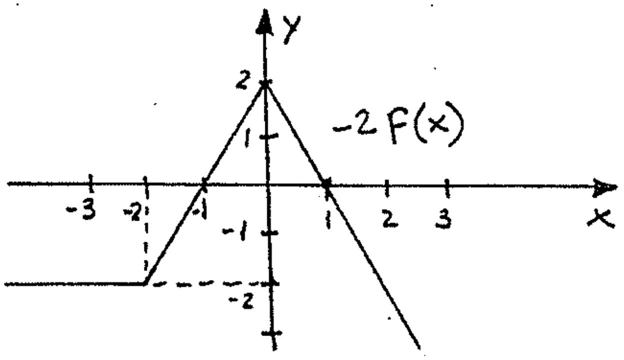




$f(-2x) \rightarrow$ se da vuelta (por el $-$) y se contrae en un factor de 2, en "x".

$-2\,f(x) \rightarrow$ se da vuelta en "y" y se expande en un factor de 2 también en "y".



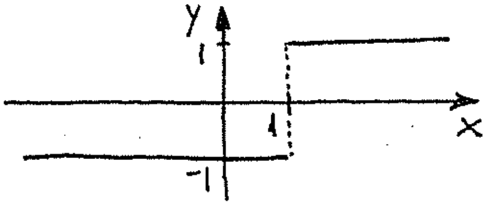


$\boxed{15}$ Representar las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ b) $f(x) = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ c) $f(x) = \ln|x|$

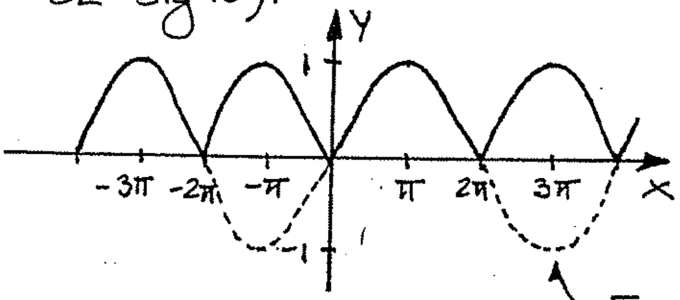
a) $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ ⇝ expresamos el módulo según su definición:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-1} & \text{si } x-1>0 \\ \frac{x-1}{-(x-1)} & \text{si } x-1<0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{f(x) = \begin{cases} 1 & x>1 \\ -1 & x<1 \end{cases}}$$



⇝ $x=1$ no pertenece al dominio (para que no se anule el denom.)

b) $f(x) = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ ⇝ se trata de hacer el gráfico de $\operatorname{sen}(x/2)$ y después reflejar hacia arriba todos los puntos negativos (porque al sacar el módulo de un N° neg. queda ese mismo N° pero sin el signo).



⇝ El gráfico de $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ es como el de $\operatorname{sen}(x)$ pero expandido en un factor de 2.

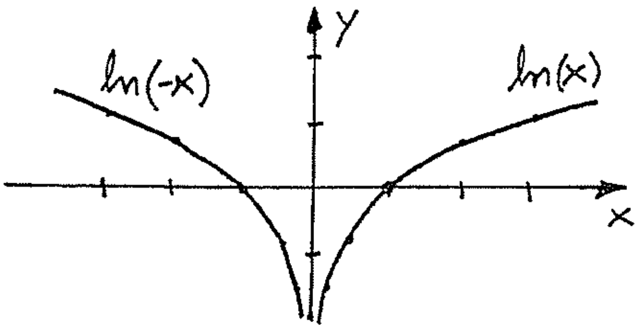
Estas partes se reflejan hacia arriba debido al módulo.

c) $f(x) = \ln|x|$ ⇝ otra vez, la expresamos por partes.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x>0 \\ \ln(-x) & \text{si } x<0 \end{cases}$$

(el $x=0$ no está en el dominio porque $\nexists \ln 0$).

↳ se da vuelta en x



$\boxed{16}$ En el ejercicio anterior determinar:

a) cuáles son periódicas. b) cuáles son acotadas.

c) supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conj. imagen, si es que existen.

a)

Definición: Una función es periódica si sólo si existe algun T tal que $\boxed{F(x) = f(x+T) \cdot \ (\text{con } T > 0) \ \forall x}$

Gráficamente es muy fácil ver si una función es periódica o no: si existe un patrón de repetición, es decir, si hay un cierto cachito (de long. T) que se repite, la función es periódica, sino no.

Entonces, sólo la función b) del ej anterior es periódica. (El período es 2π, el "patrón" es ∩)

b) Cuando pregunta si una función es acotada se refiere al conjunto imagen. O sea, si el conj. imagen es acotado, la función es acotada.

Los conjuntos imagen para las f. del ej anterior son: a. $\boxed{I = \{-1 ; 1\}}$ ⇝ sólo esos dos puntos tienen preimagen (ojo, no es el intervalo (-1;1), sino sólo esos dos puntos).

b. $\boxed{I = [0;1]}$ c. $\boxed{I = \mathbb{R}}$

Por lo tanto los casos "a" y "b" corresponden a funciones acotadas. El "c" no.

c) a. Supremo = Máximo = 1
Infimo = Mínimo = -1

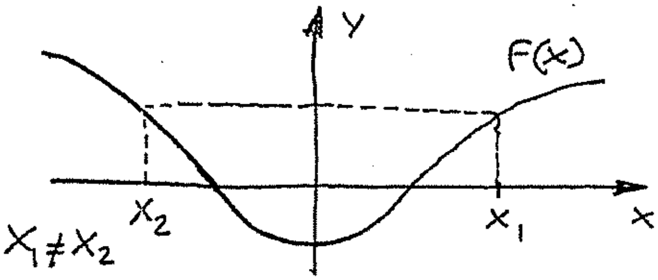
b. Supremo = Máximo = 1
Infimo = Mínimo = 0

c. No tiene ni supremo ni ínfimo y por lo tanto tampoco tiene máximo ni mínimo.

$\boxed{17}$ ¿Una función par puede ser inyectiva?

Acordate que para que una función sea inyectiva no debe haber dos "x" con la misma imagen.
Todas las funciones pares cumplen que:
$f(x) = f(-x)$, por lo tanto, para cualquier x, el correspondiente $(-x)$ tiene la misma imagen.
Conclusión: <u>Nunca</u> una función par puede ser inyectiva.

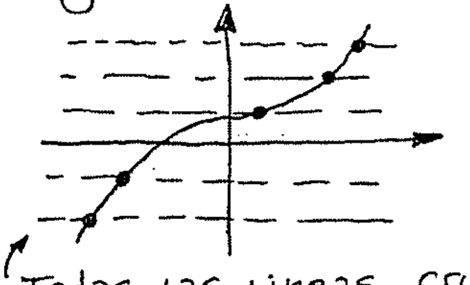
<u>Gráficamente</u> ⟹



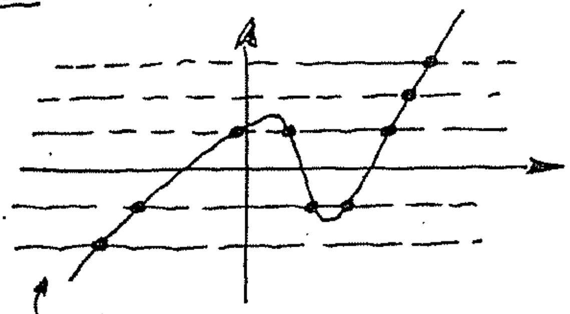
Esa f(x) es par y,
por ej., $f(x_1) = f(x_2)$ con $x_1 \neq x_2$
por lo tanto, no es inyectiva.

NOTA Gráficamente podemos ver si una función es inyectiva o sobreyectiva imaginando líneas paralelas al eje X (horizontales):

- Si todas esas líneas cortan al menos una vez al gráfico $\Longrightarrow$ es <u>sobreyectiva</u>
- Si todas esas lineas cortan a lo sumo una vez al gráfico $\Longrightarrow$ es <u>inyectiva</u>



Todas las lineas cruzan justo una vez al gráfico, es sobrey. e iny.



Todas cruzan al menos una vez (es sobrey.), algunas más de una vez (no es iny.)

---

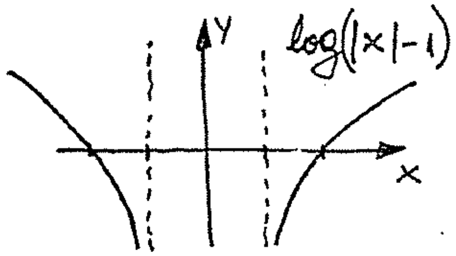
18 Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$ determinar dominio e imagen de cada una para que existan $f \circ g$ y $g \circ f$ y hallarlas.

$$\boxed{f(x) = \log(|x|-1)} \qquad \boxed{g(x) = \sqrt{x-2}}$$

Primero analicemos las dos por separado, como si no las fuéramos a componer.

- $f(x) = \log(|x|-1) \Longrightarrow$ Para poder sacar log se debe cumplir: $\underbrace{|x|-1}_{\text{argumento. del log}} > 0 \Longrightarrow |x| > 1 \Longrightarrow x > 1 \cup x < -1$

$\Rightarrow \boxed{D_f = (-\infty;-1)\cup(1;+\infty)}$

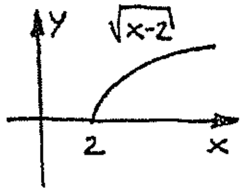


Además $\boxed{I_f = \mathbb{R}}$

(el logaritmo puede tomar cualquier valor si se deja que su argumento vaya desde cero (sin incluirlo) hasta $+\infty$, como en este caso).

- $g(x)=\sqrt{x-2} \Rightarrow$ Para poder sacar raíz se debe cumplir: $x-2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$

$\Rightarrow \boxed{D_g = [2;+\infty)}$ y $\boxed{I_g = [0;+\infty)}$



Ahora hagamos las composiciones:

- $\boxed{f \circ g(x)} = f(g(x)) \Rightarrow$ Existe si $I_g \subseteq D_f$

Por lo que hicimos recién vemos que no se cumple que $I_g \subseteq D_f$ porque I_g incluye a los puntos $[0;1]$ y D_f no. Así que vamos a hacer una restricción de g, g^*, de manera que su imagen sea: $\boxed{I_{g^*} = (1;+\infty)}$ (ahora sí $I_{g^*} \subseteq D_f$)

Buscamos el dominio de g^* de manera que esa sea su imagen. (Todos los $y=\sqrt{x-2}$ deben ser >1):

$\sqrt{x-2} > 1 \Rightarrow x-2 > 1 \Rightarrow x > 3$

Por lo tanto: $\boxed{D_{g^*} = (3;+\infty)}$

Listo, ahora sí podemos calcular $f\circ g^*$ (con la g restringida).

la fórmula de g^* es la misma que la de g, obvio.

$$f\circ g^*(x) = f(g^*(x)) = \log\left(|g^*(x)|-1\right)$$

$$= \log\left(|\underbrace{\sqrt{x-2}}|-1\right) = \boxed{\log\left(\sqrt{x-2}-1\right)}$$

esto es siempre > 1 (xq' $I_{g^*} = (1;+\infty)$)

así que $|\sqrt{x-2}| = \sqrt{x-2}$

El dominio de $f\circ g^*$ es igual al dominio de g^*. La imagen de $f\circ g^*$ está formada por las imágenes, por f, de todos los puntos de I_{g^*}.

En este caso: $\boxed{D_{f\circ g^*} = (3;+\infty)}$ $\boxed{I_{f\circ g^*} = \mathbb{R}}$

- $\boxed{g\circ f(x)} = g(f(x)) \Longrightarrow$ Existe si $I_f \subseteq D_g$

Debemos restringir f de manera que: $\boxed{I_{f^*} = [2;+\infty)}$

Para que eso se cumpla:

$$\log(|x|-1) \geq 2 \Longrightarrow 10^{\log(|x|-1)} \geq 10^2 \Longrightarrow |x|-1 \geq 100$$

↳ log en base 10.

$$\Longrightarrow |x| \geq 101 \Longrightarrow x \geq 101 \cup x \leq -101$$

$$\Longrightarrow \boxed{D_{f^*} = (-\infty;-101] \cup [101;+\infty)}$$

$$g\circ f^*(x) = g(f^*(x)) = \sqrt{f^*(x)-2} = \boxed{\sqrt{\log(|x|-1)-2}}$$

Con $\boxed{D_{g\circ f^*} = (-\infty;-101]\cup[101;+\infty)}$ $\boxed{I_{g\circ f^*} = [0;+\infty)}$

Terminamos !!

$\boxed{19}$ Definir paramétricamente la sig. curva: $x+4y^2=1$

$\boxed{x+4y^2=1} \Rightarrow$ Elegimos $\boxed{y=\tau}$ (no $x=\tau$ porque se complica, hay que sacar raíz, aparecen restricciones...)

$\Rightarrow x+4\tau^2=1 \Rightarrow x=1-4\tau^2$

Por lo tanto: $\boxed{(x;y)=(1-4\tau^2;\tau)}$ con $\tau\in\mathbb{R}$

Esta no es la única forma de definir τ. Podemos tomar $\boxed{\tau=2y} \Rightarrow \tau^2=4y^2 \Rightarrow$ en la ec. de la curva: $x+\tau^2=1 \Rightarrow x=1-\tau^2$

Y en este caso la expresión paramétrica es:

$\boxed{(x;y)=\left(1-\tau^2;\frac{\tau}{2}\right)}$ $\rightsquigarrow$ Es distinta a la otra, aunque definen la misma curva.

$\boxed{20}$ Graficar y obtener una expresión cartesiana para la siguiente expresión paramétrica:

$$\begin{cases} x = a\cos\tau \\ y = b\,\text{sen}\,\tau \end{cases} \Rightarrow \text{o, como lo escribimos arriba}$$

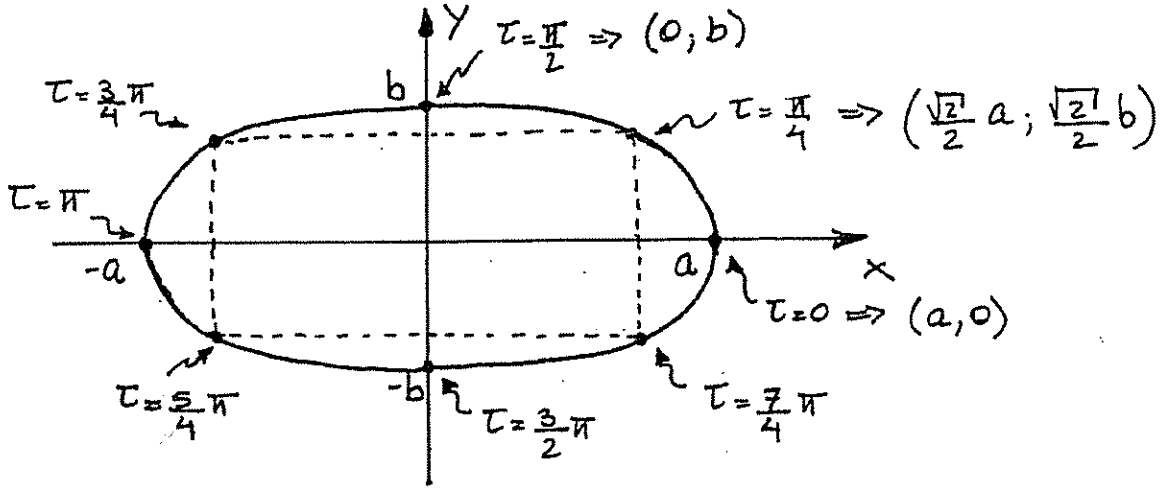
$$(x,y)=(a\cos\tau\,;\,b\,\text{sen}\,\tau)$$

Buscamos la expresión cartesiana. Vamos a usar que $\cos^2\tau + \operatorname{sen}^2\tau = 1$, así podemos eliminar la τ y obtener una ecuación que relacione x con y.

$$\begin{matrix} x^2 = a^2 \cos^2\tau \\ y^2 = b^2 \operatorname{sen}^2\tau \end{matrix} \implies \begin{matrix} x^2/a^2 = \cos^2\tau \\ y^2/b^2 = \operatorname{sen}^2\tau \end{matrix} \implies$$

sumando $\implies \boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ Listo!, esa es la exp. cartesiana

Ahora grafiquemos. Para eso tenés que ir variando el valor de τ y graficando el par $(x;y)$ que corresponda a cada τ.



Con $\tau = 2\pi$ volvemos al punto de partida. O sea, cuando τ varía entre 0 y 2π ($\tau \in [0;2\pi)$) conseguimos el gráfico completo.

PRÓXIMO TEMA: LÍMITE

Noción intuitiva de límite

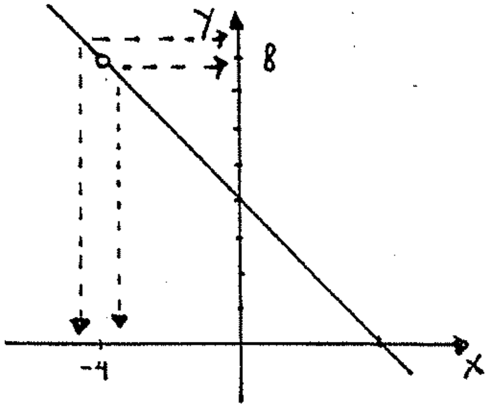
Límite de una función cuando x tiende a un número:

Pensemos en la función $f(x)=\dfrac{16-x^2}{4+x}$, su dominio son todos los números reales menos el -4. Aunque f(-4) no esta definida, f(x) la podemos calcular en cualquier x cercano a -4. Por ejemplo $f(-4{,}01)=8{,}01$ y $f(-4{,}001)=8{,}001$ o también $f(-3{,}99)=7{,}99$ y $f(-3{,}999)=7{,}999$. Entonces cuando x se acerca a -4 por izquierda o por derecha la función se acerca a 8.

Podemos decir que el "límite" de f(x) cuando x tiende a -4 es 8 y lo escribimos: $\displaystyle\lim_{x\to -4}\frac{16-x^2}{4+x}=8$

Si $x\neq -4$ podemos simplicar f(x): $\dfrac{16-x^2}{4+x}=\dfrac{(4+x)(4-x)}{4+x}$

$\Rightarrow f(x)=4-x$. Como vemos en la figura, el gráfico de



f(x) es casi como el de la función lineal $Y=4-x$, solo q' nuestra f(x) tiene un hueco en el lugar que corresponde a $x=-4$. Al mismo tiempo, las flechas punteadas nos muestran que si x se acerca a -4, f(x) se acerca a 8.

Definición intuitiva

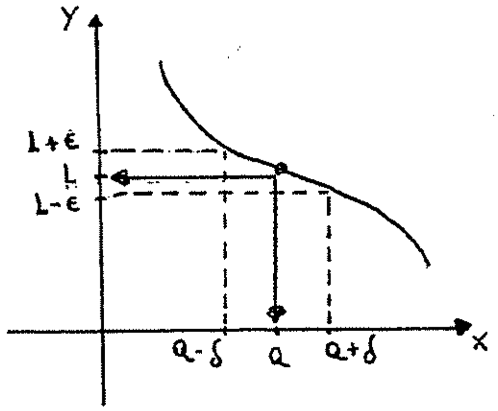
Si f(x) puede aproximarse todo lo que querramos a un número finito L, tomando x suficientemente cercano pero distinto de un número a; acercandonos por el lado izquierdo y derecho entonces: $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Ésta idea de acercarnos a un número nos alcanza para calcular un límite, por ejemplo si X se acerca a 2. la función $f(x) = 2x+6$ se acerca a 10. es decir: $\lim_{x\to 2} f(x) = 10$. ¿Pero como demostramos este resultado!

Necesitamos una definición precisa para el límite:

Definición de límite

Imaginemos que f(x) esta definida en un intervalo abierto que contiene al número a (puede no estar definida en el propio a). Entonces: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si: $|f(x)-L| < \epsilon$ entonces $|x-a| < \delta$. Si miramos la figura, la definición dice que todo X en el intervalo $(a-\delta ; a+\delta)$ con la posible exepción del propio a, tiene su imagen f(x) en $(L-\epsilon ; L+\epsilon)$.



Podemos ahora demostrar que $\lim_{x\to 2} 2x+6 = 10$:

Para cualquier $\epsilon > 0$ tenemos que encontrar un $\delta > 0$ tal que si $|2x+6-10| < \epsilon$ entonces $|x-2| < \delta$. Comencemos: $|2x+6-10| = |2x-4| = 2|x-2|$ Entonces si $2|x-2| < \epsilon \rightarrow |x-2| < \epsilon/2$ solo se necesita escoger $\delta = \epsilon/2$ para que $|x-2| \leq \delta$. (Dado un ϵ pudimos hallar un δ). (entonces pudimos demostrar el límite.) Casi siempre vamos a tener que calcular el límite y no demostrarlo. [Cuando decimos que x tiende a a por la izquierda estamos hablando de un "límite lateral" y lo escribimos: $x \rightarrow a^-$. Si x tiende a a por la derecha diremos $x \rightarrow a^+$. Nos encontramos ahora con la siguiente conclusión: [si los límites laterales existen y son iguales entonces existe el límite de f(x) y tiene el mismo valor: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} = L \Rightarrow$

$\lim_{x \to a} f(x) = L$. Los límites laterales deben ser iguales para que exista el límite de f(x), pero ¿puede una función f(x) tener límites distintos en un valor a? La respuesta a la pregunta es el ..

Teorema de unicidad:

Si existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$ entonces es único.

Como a nosotros nos importara mucho calcular el valor de un límite tenemos que conocer las propiedades que podemos usar:

* . si c es una constante entonces $\lim_{x\to a} c f(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$

* . si $f(x) = x \to \lim_{x\to a} x = a$

* . si existen $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ entonces

* i) $\lim_{x\to a} \left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$

* El límite de una suma es la suma de los límites.

ii) $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$

* El límite de un producto es el producto de los límites

iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$

El límite de un cociente es el cociente de los límites.

[Si el límite de alguna de estas funciones no existe No se pueden usar las propiedades. Por ejemplo si $f(x) = \frac{1}{x}$ y queremos $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$, este límite no exist

porque si x se acerca a cero el denominador es cada vez mas chico y la fracción se agranda, y se agranda tanto que $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty}$. Aclaremos que el límite No existe porque no existe "finito" y No porque la función no este definida en el origen. Las propiedades las podemos usar entonces para calcular límites, por ejemplo:

$\lim\limits_{x\to -1} \frac{3x-4}{6x+2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} 3x-4 = -7$ y $\lim\limits_{x\to -1} 6x+2 = -4$

Como el límite de las 2 funciones existe entonces:

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x-4}{6x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to -1} 3x-4}{\lim\limits_{x\to -1} 6x+2} = \frac{-7}{-4} = 7/4$$.-

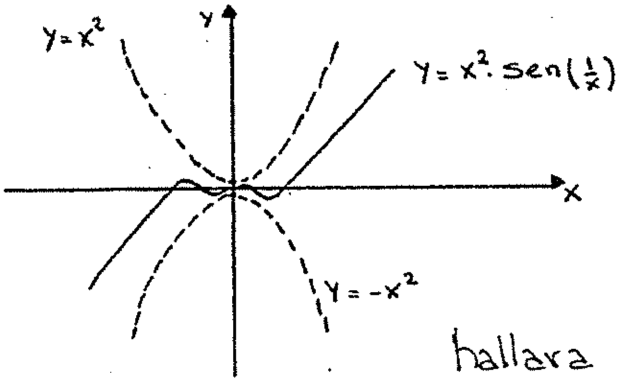
Aveces es útil el |Teorema de intercalación|:

Si f; g; h son funciones tales que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene al número a, exepto posiblemente el mismo a, entonces si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

Como ejemplo resolvamos el siguiente límite:

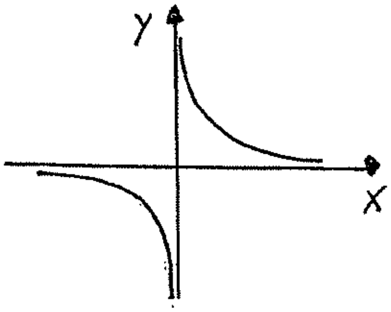
$\lim\limits_{x\to 0} x^2 . \operatorname{sen}(1/x)$; si $x \neq 0$ sabemos que $-1 \leq \operatorname{sen}(x^{-1})$ y $\operatorname{sen}(x^{-1}) \leq 1 \rightarrow -1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq 1$. multiplico por $x^2 \rightarrow$ $-x^2 \leq x^2 . \operatorname{sen}(1/x) \leq x^2$. Si llamamos a $h(x) = +x^2$ y $g(x) = -x^2$ y como $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

Entonces $\lim\limits_{x\to 0} x^2 . \operatorname{sen}(1/x) = 0$



La figura nos aclara la idea de que como f(x) esta atrapada entre otras 2 funciones su límite también se hallara atrapado entre otros dos.

Prestemos atención ahora a la función $f(x) = 1/x$



podemos ver en la gráfica q' si $x \to 0^+$ la función se hace infinitamente grande mientras q' si $x \to 0^-$ se hace infinitamente chica.

Vemos entonces que hay límites en los que interviene el infinito. Podemos decir entonces que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

En esta misma función podemos ver que si x se hace muy grande, la función se aproxima a cero,

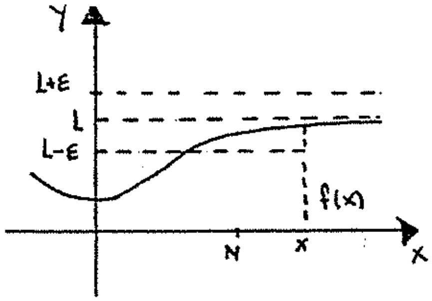
* entonces: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ y podemos ver también que $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$. En general para cualquier función f(x) nos interesara saber que le sucede si x se hace infinitamente grande o infinitamente chico. Estos son los llamados:

* Límites al infinito

Definición:

- si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ entonces para cada $\epsilon > 0$ debe existir un $N > 0$ de modo que $|f(x) - L| < \epsilon$ siempre y cuando $x > N$.

Para entender la definición miremos el gráfico de una función que tienda a L si x tiende a +∞:



La definición nos quiere decir q' para que f(x) este en un entorno de L ($f(x) \in (L-\epsilon; L+\epsilon)$) tenemos que tomar un valor de x mayor que un cierto número N. Por ejemplo la funcion $f(x) = \frac{1}{x}$ se acerca a cero si x se hace muy grande, entonces: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. para mostrar que esto es realmente cierto usemos la definición:

$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon \to \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon \to \frac{1}{|x|} < \epsilon$ como $x \to +\infty$ (es positivo) $\to \frac{1}{x} < \epsilon \to x > \frac{1}{\epsilon}$; podemos tomar $N = \frac{1}{\epsilon}$

Entonces si $x > N = 1/\epsilon \to \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$ $\blacksquare$. Podemos dar casi la misma "definición para cuando $x \to -\infty$":

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $N < 0$ de manera que $|f(x) - L| < \epsilon$ siempre que $x < N$.

Como ya dijimos nos interesara calcular límites en el infinito mas q' demostrarlos, por ejemplo: que le sucede a la función $f(x) = e^x$ si $x \to \pm\infty$?

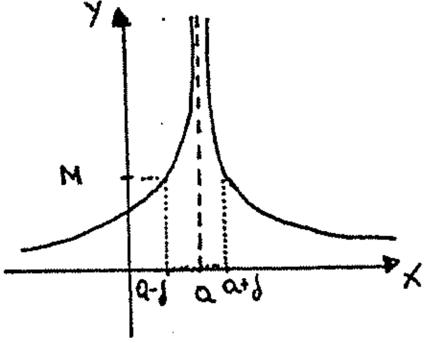
$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ porque e^x es una función creciente y como x crece infinitamente. e^x también crece., en cambio $\lim_{x \to -\infty} e^x$ es distinto. para hallarlo talvez nos conviene pensar en otra variable x' que sea $x'=-x$ entonces si $x\to-\infty$ nuestra $x'\to+\infty$ y la función e^x se convierte en $e^{-x'}$, entonces:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x'\to+\infty} e^{-x'} = \lim_{x'\to+\infty} \frac{1}{e^{x'}} = \frac{1}{\lim\limits_{x'\to+\infty} e^{x'}} = 0$$

porque ya vimos q' $\lim_{x'\to+\infty} e^{x'} = +\infty$ y vimos tambien que $\frac{1}{+\infty} = 0$ (Con la función $\frac{1}{x}$).

Dentro de los límites de una función en un punto ó de una función en el infinito. puede suceder que nuestra función se haga infinitamente grande. como por ejemplo: $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x} = +\infty$, estas son las funciones que tienden al infinito ó funciones no acotadas y para ellas existe la siguiente "definición":

La función f(x) tiende al infinito cuando $x\to a$ si para cualquier número positivo M, existe un valor $\delta>0$ tal que si $|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)|>M$.



Ésta definición nos permite demostrar que $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x} = +\infty$ porque para cualquier $M>0$ tenemos que:

$\left|\frac{1}{x}\right| > M \rightarrow \frac{1}{|x|} > M \rightarrow \frac{1}{x} > M \rightarrow x < \frac{1}{M}$ y podemos elegir $\delta = \frac{1}{M}$ ▪

Las funciones que para un cierto valor de x tienden a cero van a ser importantes para nosotros y se les dice infinitesimales:

La función f(x) se denomina infinitesimal si cuando $x \rightarrow a$ ó $x \rightarrow \infty$, entonces $f(x) \rightarrow 0$.

Estas funciones tienen algunas propiedades que nos van a resultar muy útiles:

- Si la función f(x) puede ser escrita como una constante b mas un infinitesimal $\alpha(x)$,

  $f(x) = b + \alpha(x) \rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = b$ pues $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$

Como un ejemplo pensemos en $f(x) = \frac{x+1}{x}$ y queremos el límite cuando $x \rightarrow +\infty \Rightarrow$

$f(x) = \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ pudo ser escrita como una constante mas una función que tiende a cero si $x \rightarrow +\infty$, entonces:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

- La suma de dos infinitesimos es otro infinitesimo. Esta propiedad es vastante intuitiva pues si $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ y $\beta(x) = \frac{1}{x^2}$ entonces la función suma: $f(x) = \alpha(x) + \beta(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ tiende a cero si $x \to \infty$

- Si $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son infinitesimos, entonces $f(x)=\alpha(x).\beta(x)$ es un infinitesimo y de orden superior al de $\alpha(x)$ y $\beta(x)$.

Esta propiedad nos dice que el producto de 2 funciones que tienden a cero también tiende a cero pero con "mas fuerza" que ellas, por ejemplo si $\alpha(x)=x$ y $\beta(x)=x^2$ $\Rightarrow$ $f(x)=\alpha(x).\beta(x)$ es $f(x)=x^3$ y $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ y tiende a cero con mas fuerza ó "mas rapidamente" que α y β.

Esta propiedad es muy útil cuando tengo un cociente de infinitesimos: por ejemplo si tomamos el

$\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ = ambas tienden a cero entonces ¿quien gana! $\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$

Vemos que ganó $\beta(x)$ porque era un infinitesimo de orden superior a $\alpha(x)$.

Esto último nos lleva naturalmente a la existencia de "indeterminaciones". Las indeterminaciones son cuentas que "No sabemos cuanto valen", por ejemplo si $\alpha \to 0$ y $\beta \to 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\alpha}{\beta} \to \frac{0}{0}$ y si α es de orden superior a β entonces el resultado es cero, pero si llega a ser alrevez el resultado sera infinito. Existen siete casos en que el limite es indeterminado:

$\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0.\infty$; $\infty - \infty$; 0^0 ; $(+\infty)^0$; $(\to 1)^{\pm\infty}$

El caso que vimos con $\frac{x^2}{x}$ es del tipo $\frac{0}{0}$, en muchos ejercicios se nos dará un limite indeterminado y tendremos que resolverlo, por ejemplo: hallar $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1}{3x^2-4}$: el numerador tiende a infinito igual que el denominador, entonces tenemos una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en donde no sabemos cual sera el resultado, para saberlo podemos hacer lo siguiente: tomo x^2 factor común en el numerador y denominador:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1}{3x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(2+1/x+1/x^2\right)}{x^2\left(3-4/x^2\right)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+1/x+1/x^2}{3-4/x^2}$$

y ahora sabemos que los términos $1/x$; $1/x^2$; $4/x^2$ son infinitesimos, es decir que tienden a cero si $x\to+\infty$. El resultado es finalmente $2/3$.

Existe un limite sumamente importante con la indeterminación $(\to 1)^\infty$ y es el siguiente:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ donde vemos que la expresión entre parentesis tiende a uno, mientras que el exponente tiende a infinito. El resultado de este límite es uno de los números mas importantes de la matemática, es el número e, es un número irracional siendo aproximadamente igual a: $e \approx 2{,}71828$

Entonces decimos que:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e}$$

la demostración la podemos hallar en cualquier texto de analisis I. A veces tambien se lo escribe como

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{1/x} = e$$

que es exactamente lo mismo.

Como ejemplo calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-4}\right)^{x}$$

, comencemos sumando y restando un 1:

$$\left(\frac{2x+1}{2x-4}-1+1\right)=\left(\frac{2x+1-(2x-4)}{2x-4}+1\right)=$$

$$\left(1+\frac{2x+1-2x+4}{2x-4}\right)=\left(1+\frac{5}{2x\ 4}\right)$$

donde vemos que si $x\to\infty$ esto tiende a uno, ahora:

$$\left(1+\frac{5}{2x-4}\right)^{x}=\left(1+\frac{1}{\frac{2x-4}{5}}\right)^{x}$$

y el exponente podemos transformarlo en $x\cdot\frac{2x-4}{5}\cdot\frac{5}{2x-4}$ que sigue siendo igual a x ⇒

$$\left(1+\frac{1}{\frac{2x-4}{5}}\right)^{x} = \left(1+\frac{1}{\frac{2x-4}{5}}\right)^{\frac{2x-4}{5}\cdot\frac{5}{2x-4}\cdot x} =$$

$$\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{2x-4}{5}}\right)^{\frac{2x-4}{5}}\right\}^{\frac{5x}{2x-4}}$$

la expresión entre llaves sabemos que tiende a e; entonces todo tiende a:

$e^{\frac{5x}{2x-4}}$ y nos faltaria ver cual es el límite del exponente $\rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{2x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x(2-4/x)} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{5}{2-4/x} = \frac{5}{2}$; podemos ya escribir el resultado final: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-4}\right)^{x} = e^{5/2}$ ..

Veamos ahora algunos ejemplos de límites.

Ejercicio 1

Demostrar que $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x+1} = 3$.

Solución: Para demostrar que 3 es el resultado del límite tenemos que usar la definición, es decir para cualquier $\varepsilon > 0$ debemos encontrar un $N > 0$ de manera que:

$$\left| \frac{3x}{x+1} - 3 \right| < \varepsilon \quad \text{sí} \quad x > N$$

Realizamos la cuenta en el interior del módulo.

$$\left| \frac{3x}{x+1} - 3 \right| = \left| \frac{3x - 3(x+1)}{x+1} \right| = \left| \frac{-3}{x+1} \right|$$

como x tiende a $+\infty$ (supongamos) entonces es positivo:

$$\left| \frac{-3}{x+1} \right| = \frac{3}{x+1}$$

; si quito el 1 del denominador la fracción se hara mas grande:

$$\left| \frac{3x}{x+1} - 3 \right| = \frac{3}{x+1} < \frac{3}{x} < \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{\varepsilon} < x \quad \text{ó}$$

$x > \frac{3}{\varepsilon}$ podemos elejir $\boxed{N = \frac{3}{\varepsilon}}$ y con esto garantizamos que si $x > N \rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$

Por ejemplo si $\epsilon = 0{,}01 \rightarrow N = 300$ y tenemos que $|f(x) - 3| < 0{,}01$ siempre que $x > 300$.-

---

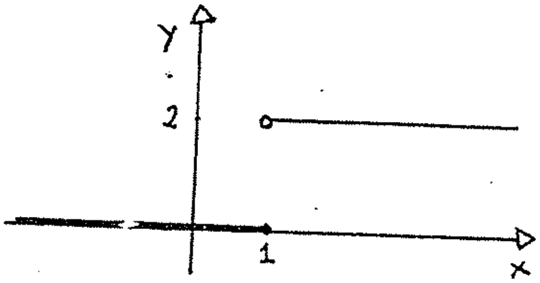
Ejercicio 2.

Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Demostrar que $\lim_{x \to 1} f(x)$ No existe.

Solución:

Podemos ver facilmente en el gráfico de f(x) que no hay límite en x = 1



Pero para demostrar que el límite no existe, empecemos suponiendo que sí: supongamos que

$\lim_{x \to 1} f(x) = L$ entonces según la definición si elegimos un $\epsilon = \frac{1}{2}$ debe existir un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \frac{1}{2}$ siempre que $|x - 1| < \delta$.

Ahora: elegimos $x = 1 + \delta/2$ a la derecha de 1, este valor x cumple que $|x-1| < \delta$ pues $|x-1| = |\delta/2|$ $= \delta/2 < \delta$ entonces para este x se tiene que

$|f(x) - L| < \frac{1}{2} \rightarrow |2 - L| < \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} < 2 - L < \frac{1}{2}$

$-\frac{5}{2} < -L < -\frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2} < L < \frac{5}{2}$

A la izquierda del 1 podemos elegir $x = 1 - \delta/2$ Cumple que $|x-1| = |-\delta/2| = \delta/2 < \delta$, entonces se tiene que cumplir que $|f(x) - L| < \frac{1}{2} \rightarrow |0 - L| < \frac{1}{2}$ $|L| < \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} < L < \frac{1}{2}$. Acá vemos que por un lado $L \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y por otro $L \in (\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$ aparece un absurdo y sacamos la conclusión de que en realidad No existe L.

Ejercicio 3.

hallar $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2}$

Solución

Nos enfrentamos con el límite de un cociente. podriamos pensar en realizar el cociente de los límites, sin embargo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{\lim_{x \to 1} x-1}{\lim_{x \to 1} x^2+x-2} = \frac{0}{0}$$

Aparece un cero en el denominador entonces no podemos usar esta propiedad. Tenemos una indeterminación $0/0$ y para resolverla podemos factorear los polinomios:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+2}$$

Ahora si podemos tomar el límite en el numerador y en el denominador:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} 1}{\lim\limits_{x \to 1} x+2} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 4.

Usar el teorema de intercalación para hallar $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, si $|f(x) - 1| \leq x^2$, $x \neq 0$

Solución:

Comencemos por abrir el módulo:

$$|f(x) - 1| \leq x^2 \quad \rightarrow \quad -x^2 \leq f(x) - 1 \leq x^2$$

Sumemos un 1 en toda la inecuación:

$1 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 1$ y ahora tomemos el límite cuando $x \to 0$ en toda la inecuación:

$$\lim_{x \to 0} 1 - x^2 \leq \lim_{x \to 0} f(x) \leq \lim_{x \to 0} x^2 + 1$$

$1 \leq \lim\limits_{x \to 0} f(x) \leq 1$ y entonces sacamos la conclusión de que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.-

---

Ejercicio 5.

Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - x^3}{3x + 2}$

Solución:

Tanto el numerador como el denominador tienden a infinito si x tiende a infinito, entonces tenemos un cociente de infinitos, una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Podemos dividir toda la expresión por x:

$$\frac{1 - x^3}{3x + 2} = \frac{1/x - x^3/x}{3x/x + 2/x} =$$

$$\frac{\frac{1}{x} - x^2}{3 + \frac{2}{x}}$$ si ahora tomamos $\lim_{x \to \infty}$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} - x^2}{3 + \frac{2}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x^2}{3} = -\infty$$

porque los cocientes $1/x$ y $2/x$ tienden a cero

finalmente:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - x^3}{3x + 2} = -\infty$$

Ejercicio 6

hallar los $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$

Solución:

Comencemos con $x \to +\infty$; como se trata de una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ dividimos todo por x:

$$\frac{5x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{\frac{5x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}}$$ y como x es positivo podemos poner $x = \sqrt{x^2}$

entonces nos queda: $\dfrac{5}{\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2}}} = \dfrac{5}{\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x^2}}} =$

$\dfrac{5}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}$ y ahora tomamos nuevamente el límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = 5$$

porque $\frac{4}{x^2} \to 0$.

Ahora si buscamos el limite a $-\infty$, el valor de x es negativo, entonces ya no es cierto que $x = \sqrt{x^2}$ porque $\sqrt{x^2}$ es positiva, pero si se cumple que $-x = \sqrt{x^2}$ porque ahora $\sqrt{x^2}$ es positiva y $-x$ también. Entonces dividimos numerador y denominador por $-x$:

$$\frac{5x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{\frac{5x}{-x}}{\frac{\sqrt{x^2+4}}{-x}} = \frac{-5}{\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{-5}{\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}}}$$

$= \dfrac{-5}{\sqrt{1+4/x^2}}$ y tomando el límite a $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-5}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = -5 \text{ .-}$$

Ejercicio 7.

Hallar $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{|4x| + |x-1|}{x}$

Solución:

Comenzamos con el $\displaystyle\lim_{x \to +\infty}$, si x tiende a $+\infty$ es un número positivo y grande, entonces los valores $4x$ y $x-1$ son positivos así que podemos retirar las barras de módulo sin cuidado:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|4x| + |x-1|}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x + x-1}{x} =$$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{5x-1}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ y ya vimos que en estas indeterminaciones conviene dividir todo por x; entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x-1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5 - \frac{1}{x}}{1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 5 - \frac{1}{x} = 5 .$$

Ahora vamos a calcular el límite con $x \to -\infty$, entonces es un numero graude y negativo, los valores $4x$ y $x-1$ son negativos y cuando el módulo los convierte de negativos en positivos les coloca un signo menos delante:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{|4x| + |x-1|}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x - (x-1)}{x} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-4x - x + 1}{x} = \lim_{x \to -\infty} - \frac{5x+1}{x}$$ y dividiendo por x numerador y denominador:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-5x/x + 1/x}{x/x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-5 + \frac{1}{x}}{1} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} -5 + \frac{1}{x} = -5$$

Ejercicio 8.

Hallar $\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2+1} \right)$

Solución:

En este limite vemos que ambos terminos tienden a ∞; entonces tenemos una resta de infinitos y esto es una indeterminación.

Para poder resolver la indeterminación multipliquemos por el conjugado de esta expresión:

$$\left(x - \sqrt{x^2+1}\right) \cdot \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

porque el numerador es una diferencia de cuadrados.. $\frac{x^2 - (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}}$ entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2+1} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} = 0$$

porque el denominados es la "suma" de infinitos y esto es infinito, No es indeterminación..

Ejercicio 3.

Hallar $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+4} \right)^x$

Solución:

Si calculamos el límite de la expresión entre parentesis:

$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-3}{2x+4} = 1$ dividiendo numerador y denominador por x. Entonces el interior tiende a 1 y el exponente a $\infty \Rightarrow 1^{\infty}$ y tiene la pinta de una indeterminación con e $\Rightarrow$ buscamos llevar nuestra expresión a la forma $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$:

Sumo y resto un 1:

$$\left(1 + \frac{2x-3}{2x+4} - 1\right) = \left(1 + \frac{2x-3-(2x+4)}{2x+4}\right) = 1 + \frac{-7}{2x+4}$$

$= 1 + \frac{1}{\frac{2x+4}{-7}}$, hasta Ahora tenemos que:

$\left(\frac{2x-3}{2x+4}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{\frac{2x+4}{-7}}\right)^x$; en el exponente tiene que estar lo que esta debajo del 1; entonces lo agragamos en forma directa e invertida para no alterar el verdadero exponente:

$$\left(1+\frac{1}{\frac{2x+4}{-7}}\right)^{x\cdot\frac{2x+4}{-7}\cdot\frac{-7}{2x+4}}$$ y reordenaudo:

$$\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{2x+4}{-7}}\right)^{\frac{2x+4}{-7}}\right\}^{\frac{-7x}{2x+4}}$$

toda la expresión entre llaves tiende a e y solo nos falta saber a cuanto tiende el exponente: por ahora:

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7x}{2x+4}}$$

Entonces $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7x}{2x+4} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{-7x}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{4}{x}} =$

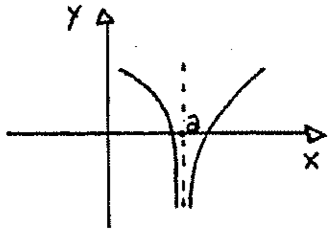
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7}{2+\frac{4}{x}} = -\dfrac{7}{2}$ asi que finalmente:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+4}\right)^{x} = e^{-7/2}.-$$

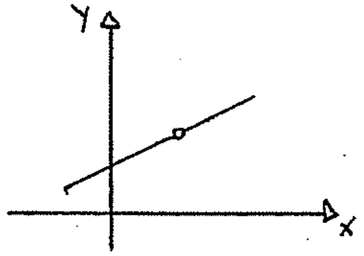
FIN EJEMPLOS DE LÍMITE

Funciones Continuas

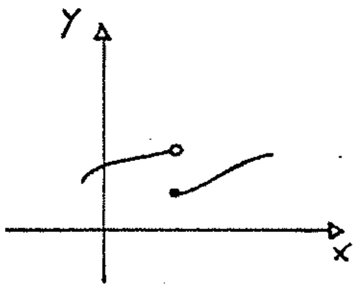
Vamos a estudiar en este capitulo la continuidad de las funciones. La idea de continuidad es sencilla, es algo asi como poder dibujar la gráfica de una función sin levantar el lapiz del papel; una curva sin interrupciones. Veamos algunos ejemplos de gráficos de funciones que NO son continuas en el valor a,



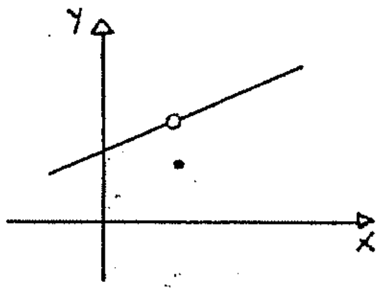
(a) $\lim_{x \to a} f(x)$ NO EXISTE Y $f(a)$ NO ESTA DEFINIDA



(b) $\lim_{x \to a}$ EXISTE PERO $f(a)$ NO ESTA DEFINIDA



(c) $\lim_{x \to a} f(x)$ NO EXISTE PERO $f(a)$ ESTA DEFINIDA



(d) $\lim_{x \to a} f(x)$ EXISTE, $f(a)$ ESTA DEFINIDA, PERO $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

En todos los ejemplos anteriores la gráfica tiene un hueco ó una interrupción. Tenemos que dar ahora una definición precisa de continuidad:

Continuidad en un número a

f(x) es una función continua en un número a si se cumplen las tres condiciones siguientes:

i) f(a) tiene que estar definida en a.

ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ tiene que existir finito.

iii) Deben coincidir los valores: $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Veamos con un ejemplo que quiere decir todo esto:

Supongamos que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

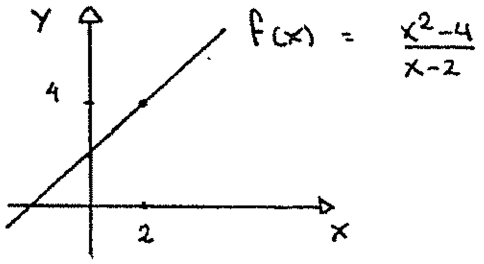
El único valor de x en el cual la función f(x) parece tener inconvenientes es en x=2, entonces estudiemos la continuidad en x=2.

✓ i) f(2) esta definida y vale 4.

✓ ii) $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = 4$

✓ iii) Se cumple que $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$ porque ambos valen 4.

Entonces f(x) es una función continua en $x=2$, su gráfica NO tiene que presentar ninguna interrupción.



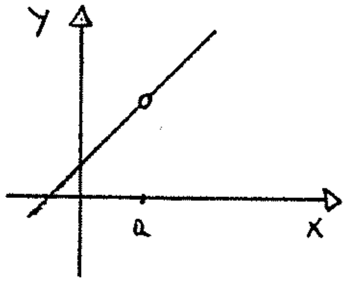
Ya conocemos cuales son las funciones continuas, ahora veamos bien cuales son las discontinuidades:

* Clasificación de las discontinuidades.

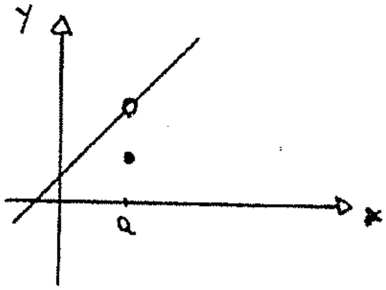
- Discontinuidades evitables:

  Son aquellas en las que el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y f(a) ó no esta definida ó no coincide con el valor del límite.

Dibujemos las 2 situaciones:



f(a) NO ESTA DEFINIDA



F(a) ESTA DEFINIDA PERO NO COINCIDE CON El VALOR DEL LIMITE.

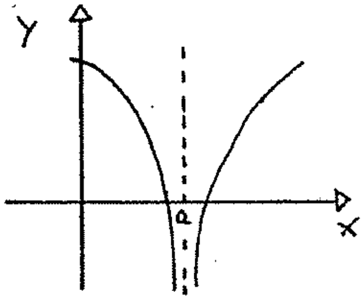
En los dos casos la discontinuidad "puede" ser evitada si definimos el valor f(a) como el resultado del límite.

. Discontinuidades no evitables

Hay dos casos de discontinuidades que no podremos evitar. las discontinuidades infinitas y las discontinuidades de salto.

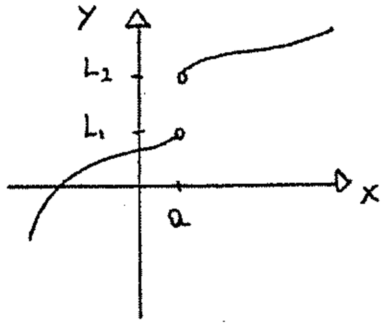
"Discontinuidad infinita":

Si el límite $\lim_{x \to a} f(x)$ No existe finito (es infinito) tendremos una asintota vertical y la discontinuidad sera infinita (ó escencial)



"Discontinuidad de salto":

Es cuando los límites laterales existen pero no son iguales: $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$; $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$; $L_1 \neq L_2$



Vemos que justo en x=a la función parece saltar de L_1 a L_2.

Todo lo que estuvimos hablando fue sobre la continuidad en un punto a, pero que podemos decir sobre la continuidad de una función en un intervalo ?

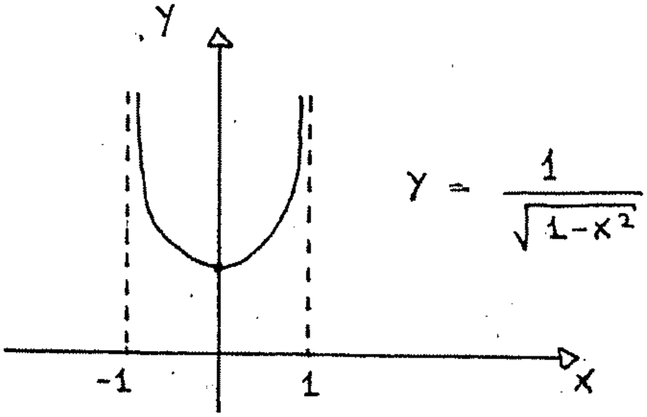
* Continuidad en un intervalo

* Una función f(x) es continua en un "intervalo abierto" (a,b) si lo es en todo número del intervalo.

* Una función f(x) es continua en un "intervalo cerrado" [a,b] si es continua en el abierto (a,b) y además,

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Por ejemplo la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ es continua en el intervalo abierto (-1,1) pero no lo es en el intervalo cerrado [-1,1], porque ni f(-1) ni f(1) estan definidas.



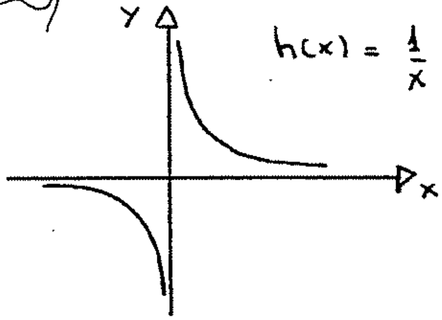
Nos toca ahora estudiar las propiedades y teoremas de las funciones continuas. Comencemos con las propiedades y operaciones que se pueden hacer con las funciones continuas:

* Algebra de funciones continuas

- La suma ó resta de dos ó mas funciones continuas en un punto a es otra función continua en el punto a.
- El producto de dos ó mas funciones continuas en un punto a es otra función continua en un punto a.
- El cociente de dos funciones continuas en un punto a es otra función continua en el punto a si el denominador No es cero en a.

En ésta última operación tenemos que tener cuidado de que el denominador No sea cero, por ejemplo $f(x) = 1$ es una función continua para todo valor de x y $g(x) = x$ también, sin embargo la función $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$ No es continua en

$x=0$, $h(x)=\frac{1}{x}$ tiene una discontinuidad infinita en $x=0$, eso quiere decir que tenemos una (asintota vertical en $x=0$.)

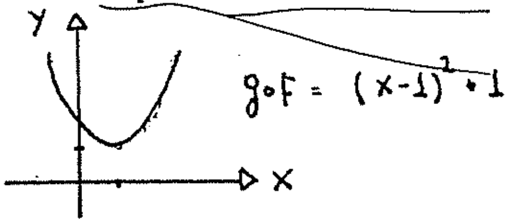


Bueno, vamos a ver ahora cuales son los teoremas de las funciones continuas, comencemos con uno que es bastante intuitivo:

- La composición de dos funciones continuas es otra función continua. Como un ejemplo de este teorema veamos la composición entre las funciones $f(x)=x-1$ y $g(x)=x^2+1$ que son dos funciones continuas para todo valor de x:

$$(g\circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g(x-1) = (x-1)^2+1$$

y ésta es sin duda una función continua para todo x.

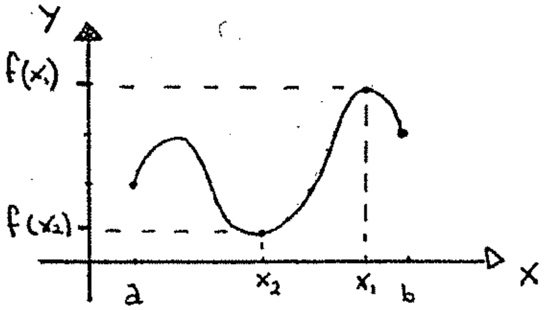


Las funciones continuas en un intervalo cerrado siempre tienen un valor máximo y uno mínimo, o sea que es una función "acotada". Esto lo decimos mejor en el ...

* Teorema de Weierstrass

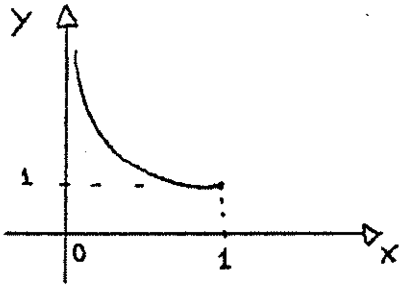
Si f(x) es continua en el cerrado [a,b] entonces existe por lo menos un x_1 tal que $f(x_1) \geq f(x)$ para todos los x del intervalo, éste valor $f(x_1)$ se llama "valor maximo" de f(x) en el segmento [a,b]

También tiene que existir un x_2 tal que $f(x_2) \leq f(x)$. Éste sera el "valor mínimo" de f(x) en el [a,b].



Esta propiedad de las funciones continuas no la tienen todas las funciones, por ejemplo la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no es continua en todo el intervalo [0,1] porque no lo es en el extremo x=0, entonces no

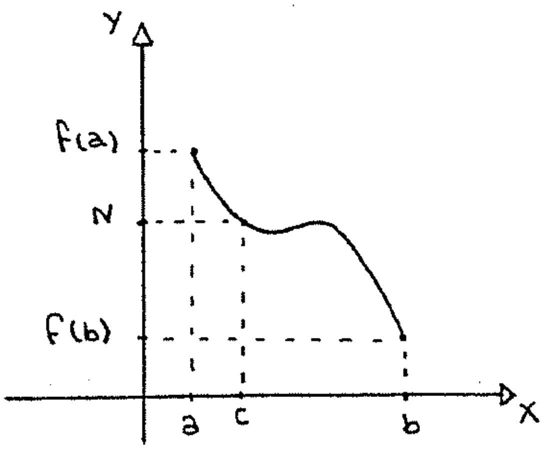
NO podemos garantizar que exista un valor máximo y un valor mínimo.



En este gráfico vemos que existe mínimo pero NO máximo.

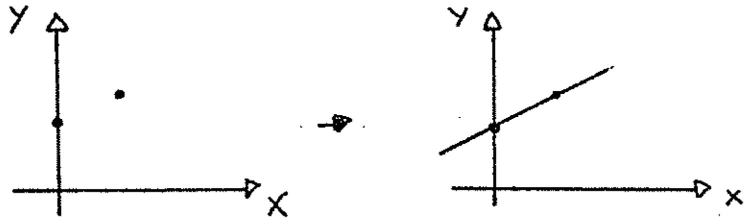
* Teorema del valor intermedio

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ en donde $f(a) \neq f(b)$ y si N es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe al menos un número c entre a,b tal que $f(c) = N$.



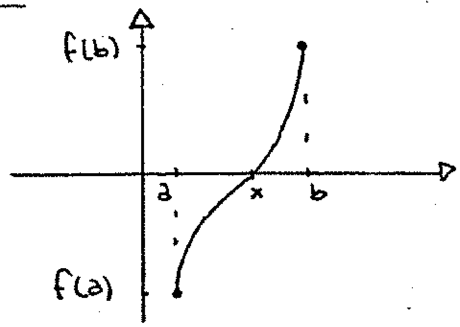
Esto quiere decir que si $f(x)$ es continua en el $[ab]$

tomara todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$, es como que pasa por todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$, es por esto que cuando tenemos una recta; decimos que con dos puntos nos alcanza para trazarla porque como sabemos que es continua pasa por todos los valores intermedios.



* Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a) \neq f(b)$ pero ahora además los signos de $f(b)$ y $f(a)$ son distintos, entonces existe algún valor de x entre a y b en donde $f(x) = 0$.



$f(x) = 0$

Este teorema nos 'garantiza' la existencia de raices para una función $f(x)$ siempre y cuando sea continua en un cerrado $[a,b]$ y en sus extremos tenga distinto signo.

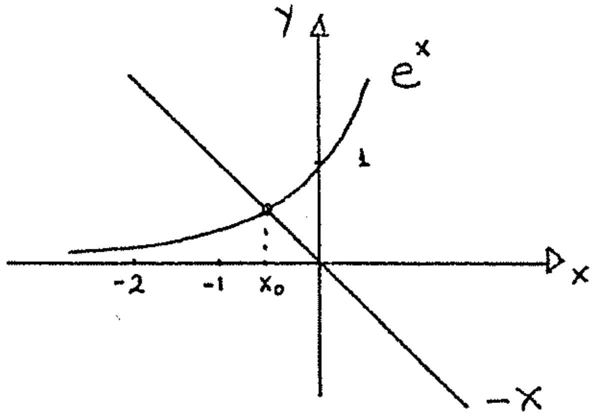
Este teorema es muy importante, por ejemplo la ecuación $e^x = -x$ tiene solución? No podemos despejar la letra x, entonces que hacemos!

Pensemos en la función $f(x) = e^x + x$, resolver la ecuación es como buscar las raices de $f(x)$:

$f(x) = 0 \rightarrow e^x + x = 0 \rightarrow e^x = -x$. Esta función es continua por ejemplo en el intervalo $[-2,0]$ y ademas $f(-2) = e^{-2} + (-2) \approx -1,86$ y $f(0) = 1 \Rightarrow$ cambia de signo!. El teorema de Bolzano garantiza que existe algún $x_0 \in [-2,0]$ tal que:

$f(x_0) = 0 \rightarrow e^{x_0} + x_0 = 0 \rightarrow \boxed{e^{x_0} = -x_0}$ y por lo tanto x_0 es solución de la ecuación. El teorema no nos dice quien es x_0; pero por lo menos nos dice que existe!!

Si graficamos las funciones originales e^x y $-x$ vemos que:



Realmente existe un valor x_0 entre -2 y 0 en donde las funciones e^x y $-x$ tienen el mismo valor. Ésta es solo una de las aplicaciones del teorema de Bolzano, a medida que avancemos en la materia nos encontraremos con otras.-

---

FIN TEORÍA DE CONTINUIDAD.

VEAMOS ALGUNOS EJEMPLOS DE LA APLICACION DE ESTE TEMA.

↓

Ejercicio 1.

Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ -x+6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

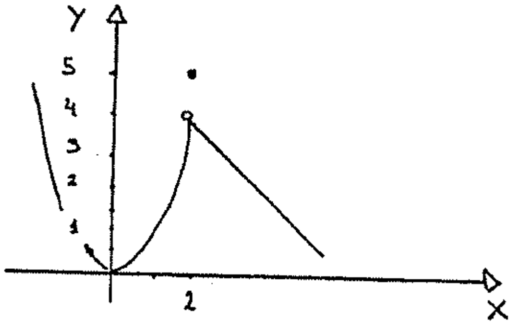
Para todos los valores de x menores a 2 la función es una parabola que siempre es continua, y para valores de x mayores a 2 es lineal asi que tamblen es continua. El punto conflictivo es en $x=2$. Para que $f(x)$ sea continua en $x=2$ tiene que coincidir el valor $f(2)$ con el de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

El valor de $f(2)=5$; para calcular el límite tenemos que hacerlo por derecha y por izquierda:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} (-x+6) = 4$$

Entonces el $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$; pero No coincide con f(2) asi que en $x=2$ f(x) no es continua. Se trata de una discontinuidad evitable.



Ejercicio 2.

Hallar las discontinuidades de $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ y clasificar.

Solución:

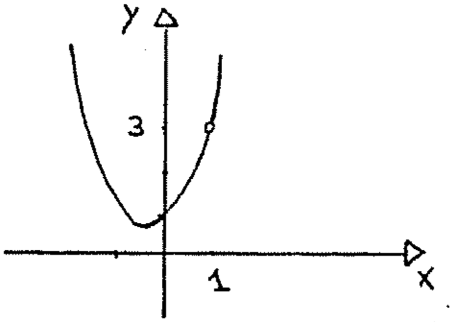
Las discontinuidades estan en los valores que hacen cero el denominador de f(x), es decir en $x=1$

Para saber de que tipo de discontinuidad se trata nos tenemos que fijar que pasa con f(x) cerca de $x=1$:

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{0}{0}$ para resolver la indeterminación factoreamos el polinomio del numerador: $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) \rightarrow$

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1 \quad \text{si } x \neq 1$$

Ahora $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2+x+1 = 3$ nos queda entonces una discontinuidad evitable.



Ejercicio 3.

hallar las constantes m y n de modo que la función

$$f(x) = \begin{cases} mx - n & \text{si } x < 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \\ 2mx + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea continua.

Solución:

El problema de la continuidad es en el valor $x=1$ porque es quien separa zonas. Los valores de los límites tendiendo a $x=1$ tienen que coincidir

Con la definición de $f(1)=5$, entonces tenemos 2 ecuaciones:

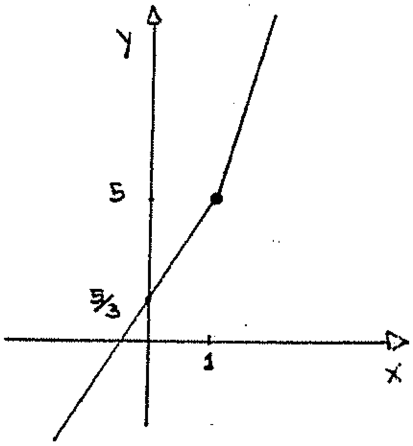
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1} mx-n = m-n = 5\\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1} 2mx+n = 2m+n = 5\end{aligned}\right\}$$

Las ecuaciones son: $\left.\begin{aligned} m-n=5\\ 2m+n=5\end{aligned}\right\}$ $m = n+5$ (lo meto en la segunda)

$2(n+5)+n=5 \rightarrow 3n+10=5 \rightarrow n=-\frac{5}{3} \rightarrow m=\frac{10}{3}$

finalmente la función queda: $f(x) = \begin{cases}\frac{10}{3}x+\frac{5}{3}\\ 5\\ \frac{20}{3}x-\frac{5}{3}\end{cases}$

Y su gráfico nos muestra que es una función continua:



Ejercicio 4.

Estudiar la continuidad de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ en el intervalo $[-5,5]$.

Solución:

Tenemos que empezar buscaudo el dominio de esta función, que son todos los x tales que:

$$x^2 - 9 > 0 \rightarrow x^2 > 9 \rightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$$

Como el intervalo que nos den es el $[-5,5]$; solo podemos considerar las $x \in [-5,-3) \cup (3,5]$

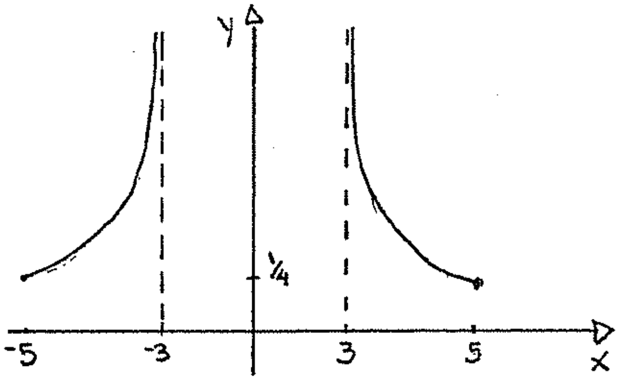
Si calculamos los límites $x \rightarrow \pm 3 \rightarrow \lim_{x \to \pm 3} f(x) = +\infty$

Entonces los valores $x=-3$, y $x=3$ son discontinuidades No evitables y se convierten en asintotas verticales.

Si calculamos los límites $x \rightarrow \pm 5 \rightarrow \lim_{x \to \pm 5} f(x) = 1/4$

de modo que es continua en los bordes $+5$ y -5.

Y por último en cualquier punto interior al intervalo $[-5,-3) \cup (3,5]$ es también una función continua. Las asintotas verticales nos ayudan a trazar el gráfico de $f(x)$:



Ejercicio 5.

Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$

Solución:

Como en problemas anteriores tenemos que examinar la unión de los intervalos, es decir $x=0$.

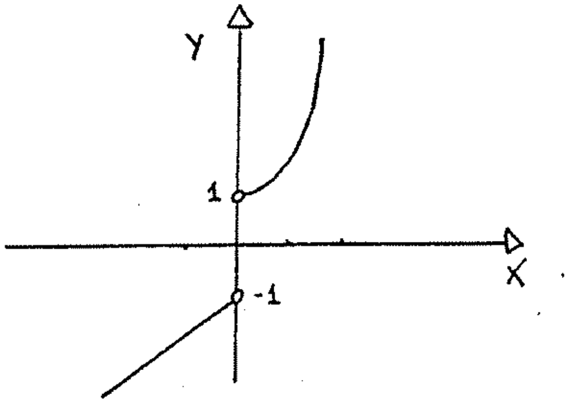
En $x=0$ $f(0)=0$ pero los límites

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2+1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} x-1 = -1$$

No coinciden con el valor de la función en $x=0$.

Entonces tenemos una discontinuidad, pero no la podemos evitar, en el gráfico vemos que se trata del salto de la función en $x=0$:



Ejercicio 6.

Hallar el valor intermedio de la función $f(x) = x^2 - x - 5$ en el intervalo $[-1,4]$ si $N=1$

Solución:

El teorema del valor intermedio nos dice que si $f(x)$ es continua en el $[a,b]$ y $f(a) \neq f(b)$ y N es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe un $c \in [a,b]$ / $f(c) = N$

En este problema $f(-1) = -3$ y $f(4) = 7$ $\rightarrow$ son $\neq$ y ademas $f(x)$ es continua en todo el $[-1,4]$ pues es una función polinomica; entonces el teorema garantiza que existe un $c \in [-1,4]$ donde $f(c) = 1$ (el problema dice que $N = 1$) $\to$

$c^2 - c - 5 = 1$ ó $c^2 - c - 6 = 0$ y factoreando nos queda: $(c-3)(c+2) = 0$ y aparecen 2 valores posibles para c: $c = 3$ y $c = -2$ ∴ de ambas soluciones la que pertenece al intervalo $[-1,4]$ es $c = 3$

FIN EJEMPLOS DE CONTINUIDAD.

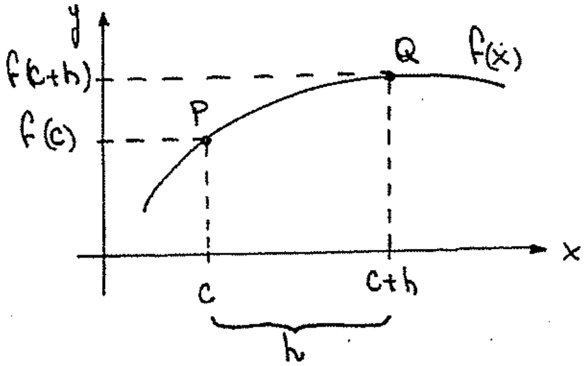
PRÓXIMO TEMA: DERIVADA.

UNIDAD IV

DERIVADA

• INTRODUCCIÓN.

EL OBJETIVO DE ESTA UNIDAD SERÁ DESARROLLAR (Y HABITUARNOS A USAR) UNA HERRAMIENTA QUE NOS PERMITA CUANTIFICAR EL CAMBIO, PUNTO A PUNTO, DE UNA FUNCIÓN. UNA MANERA INMEDIATA DE MEDIRLO ES TOMAR OTRO PUNTO PRÓXIMO Y RESTAR LAS CORRESPONDIENTES ORDENADAS.



$$\text{VARIACIÓN DE } f = f(c+h) - f(c)$$

MEJOR TODAVÍA ES PENSAR EN UNA VARIACIÓN RELATIVA; ES DECIR, MEDIR LA VARIACIÓN EN y COMPARÁNDOLA CON LA VARIACIÓN RESPECTIVA DE LAS x MEDIANTE UN COCIENTE:

$$\text{VARIACIÓN RELATIVA DE } f = \frac{f(c+h) - f(c)}{\cancel{c}+h-\cancel{c}}$$

$$\Rightarrow \text{VARIACIÓN RELATIVA DE } f = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

PERO TODAVÍA ESTAMOS LIGADOS A UN INTERVALO Y NOS GUSTARÍA VER LA VARIACIÓN PUNTO A PUNTO. EL MODO NATURAL ES PENSAR EN UN LÍMITE CUANDO "$Q \to P$", O SEA, CUANDO $h \to 0$.

FUNCIONES DIFERENCIABLES.

• DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

DEFINICIÓN. DADOS UNA FUNCIÓN $f: D_f \to \mathbb{R}$ Y UN ELEMENTO c DE SU DOMINIO ($c \in D_f$), ESCRIBIMOS EL COCIENTE DE INCREMENTOS

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Y CONSIDERAMOS SU LÍMITE CUANDO h TIENDE A CERO. SI TAL LÍMITE EXISTE Y ES FINITO, LO LLAMAMOS DERIVADA DE f EN c Y LO NOTAMOS $f'(c)$. O SEA:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \quad \leftarrow \left(\begin{array}{c}\text{CUANDO EXISTE}\\ \text{Y ES FINITO}\end{array}\right)$$

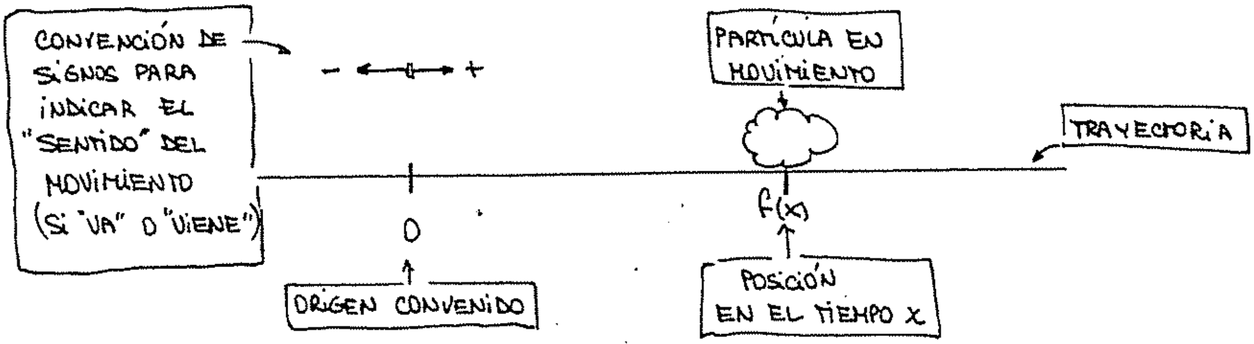
DECIMOS ENTONCES QUE f ES DERIVABLE EN c. Y QUE f ES DERIVABLE (SIN ACLARAR MÁS) SI LO ES EN TODO ELEMENTO c DE SU DOMINIO.

OBSERVACIONES:

1) LA DERIVADA DEPENDE, CLARAMENTE, DE LA FUNCIÓN; PERO TAMBIÉN DEL c CONSIDERADO. ASÍ, PODREMOS DEFINIR MÁS ADELANTE LA FUNCIÓN DERIVADA f' (CUYO DOMINIO ES EL CONJUNTO DE LOS VALORES $c \in D_f$ PARA LOS CUALES f ES DERIVABLE; Y QUE A CADA UNO DE ELLOS ASIGNA EL RESULTADO DEL LÍMITE ANTERIOR).

2) INTERPRETACIÓN FÍSICA: VELOCIDAD INSTANTÁNEA.

CONSIDERAMOS UNA PARTÍCULA QUE SE MUEVE EN LÍNEA RECTA Y PARA ELLA DEFINIMOS UN ORIGEN Y UN "SENTIDO DE CIRCULACIÓN"; Y LLAMAMOS $f(x)$ A LA DISTANCIA A LA QUE SE ENCUENTRA LA PARTÍCULA RESPECTO DEL ORIGEN CONVENIDO EN CADA INSTANTE x.



EN ESTAS CONDICIONES, SE CUMPLE QUE:

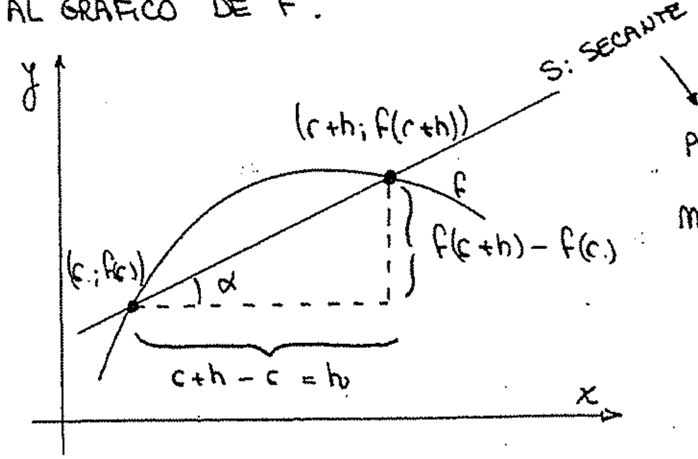
$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \text{VELOCIDAD MEDIA EN EL INTERVALO } [c\,;\,c+h]$$

SI QUEREMOS UNA IDEA MÁS AJUSTADA DE LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA EN EL TIEMPO c, PODEMOS HACER QUE h SEA CADA VEZ MÁS PEQUEÑO (O SEA, $h\to 0$) Y CONSIDERAR EL LÍMITE DEL COCIENTE ANTERIOR (O SEA, $f'(c)$). ASÍ OBTENEMOS LA "VELOCIDAD INSTANTÁNEA" DE LA PARTÍCULA EN EL TIEMPO c:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) = \text{VELOCIDAD INSTANTÁNEA EN EL TIEMPO } c.$$

3) INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE.

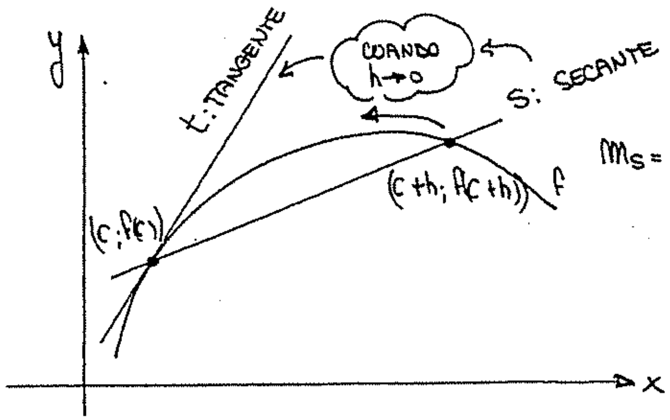
OBSERVÁ EL SIGUIENTE ESQUEMA EN EL CUAL, SOBRE EL GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN f CONSIDERAMOS LOS PUNTOS $(a; f(a))$ y $(a+h; f(a+h))$ Y LA RECTA QUE LOS UNE, SECANTE AL GRÁFICO DE f.



PENDIENTE $= m_s$

$$m_s = \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

SI AHORA HACEMOS TENDER h A CERO (COMO SUCEDE EN EL LÍMITE QUE DEFINE A f') PODEMOS IMAGINAR QUE EL PUNTO $(c+h; f(c+h))$ SE "ACERCA" CADA VEZ MÁS (SIEMPRE SOBRE EL GRÁFICO DE f) AL PUNTO $(c; f(c))$; Y QUE LAS SECANTES CORRESPONDIENTES VAN A TERMINAR POR "CONFUNDIRSE" CON UNA "RECTA ESPECIAL", LA <u>RECTA TANGENTE</u> A f EN EL PUNTO $(c; f(c))$:



$$m_s = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

SUCEDERÁ ENTONCES QUE LA PENDIENTE m_t DE ESTA RECTA TANGENTE PODRÁ OBTENERSE COMO EL LÍMITE (CUANDO $h \to 0$) DE LAS PENDIENTES m_s:

$$m_t = \lim_{h\to 0} m_s = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c)$$

ES DECIR:

$f'(c) = m_t =$ PENDIENTE DE RECTA TANGENTE A f
EN EL PUNTO $(c\,;f(c))$.

INTERNALICEMOS ESTAS IDEAS A PARTIR DE ALGUNOS:

EJEMPLOS: 1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2$ $\quad$ CALCULEMOS $f'(\underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{c}}}{7})$

A PARTIR DE LA DEFINICIÓN, TENEMOS:

$$f'(7) = \lim_{h\to 0}\frac{f(7+h)-f(7)}{h} \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{f(7+h)=f(7)=2}}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{2-2}{h} = 0$$

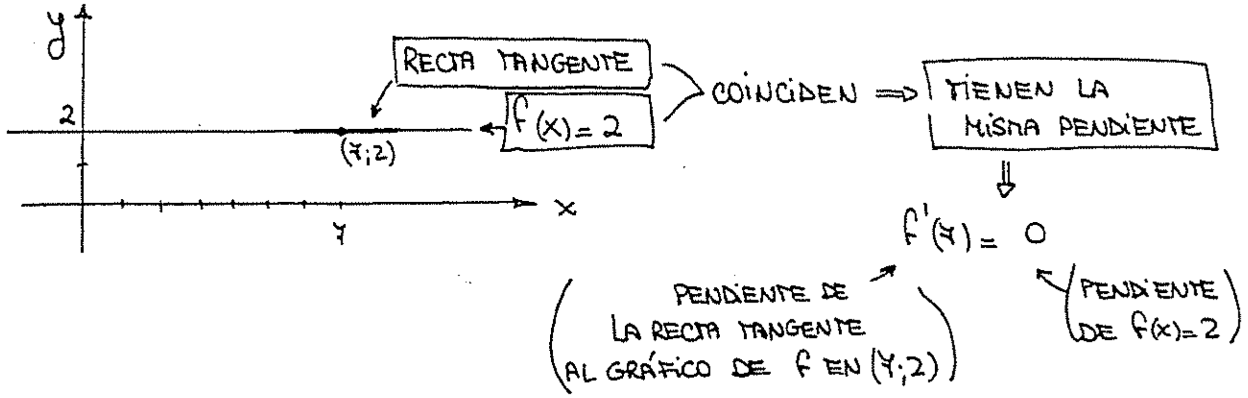
ENTONCES: $f'(7)=0$

OBSERVÁ QUE CON CUALQUIER OTRO VALOR CONSIDERADO PARA C VOLVERÍA A SER $f'(c)=0$.

FISICAMENTE, $f(x)=2$ PUEDE PENSARSE COMO LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA QUE, EN REALIDAD, ESTÁ QUIETA: EN TODO INSTANTE x SE ENCUENTRA A 2 UNIDADES DEL ORIGEN CONVENIDO. ENTONCES, EL RESULTADO QUE OBTUVIMOS ES RAZONABLE:

$$f'(\underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{CUALQUIERA}}}}{c}) = 0 \leftarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{VELOCIDAD}\\ \text{INSTANTÁNEA}\end{array}}$$

ADEMÁS, SI GRAFICAMOS:



EN GENERAL: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = k$ ← CONSTANTE

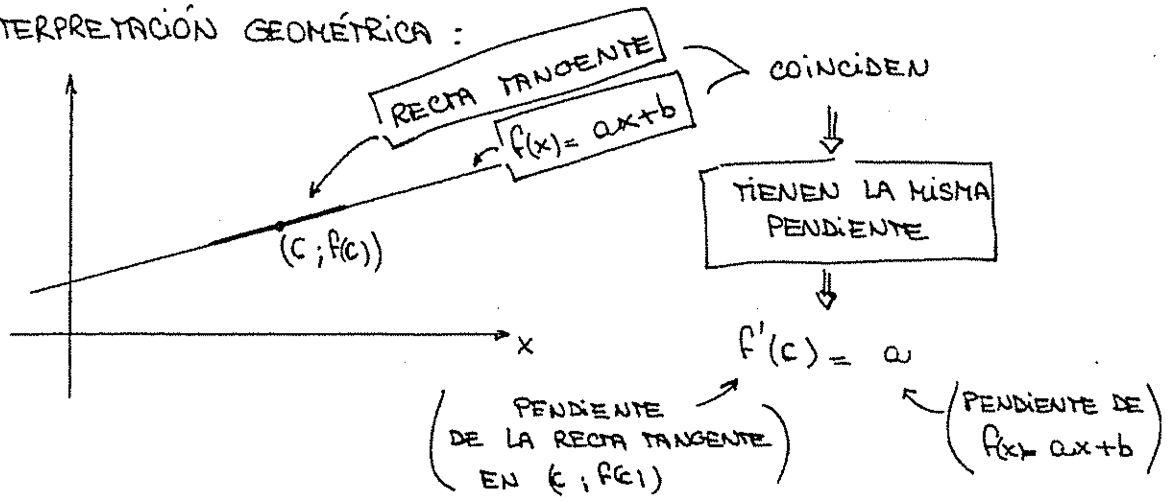
CUMPLE $f'(c) = 0$ PARA CUALQUIER $c \in \mathbb{R} = D_f$.

2) PODEMOS GENERALIZAR AÚN MÁS EL EJEMPLO ANTERIOR:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = ax + b$ CUMPLE $f'(c) = a$

PARA CUALQUIER $c \in \mathbb{R} = D_f$.

EL CÁLCULO DEL LÍMITE CORRESPONDIENTE QUEDA PARA EL LECTOR; ACÁ NOS CONVENCEREMOS DEL RESULTADO A PARTIR DE LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA:



3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(x) = x^2$, CALCULAMOS $f'(3)$ y $f'(-4)$:

- $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 3^2}{h} =$

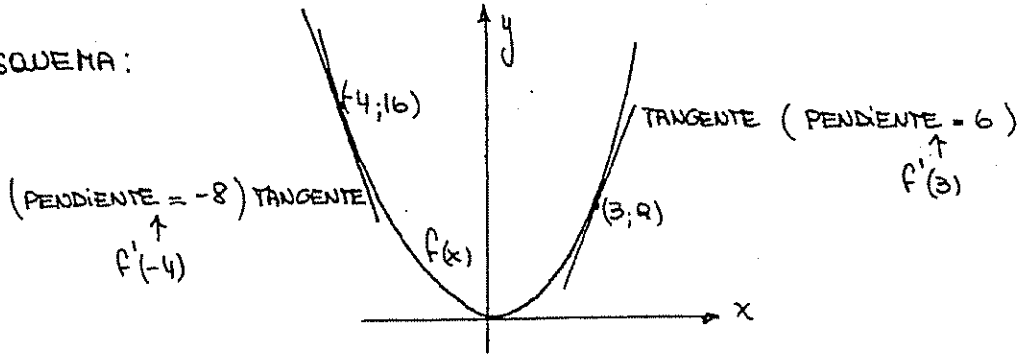
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{9} + 6h + h^2 - \cancel{9}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}.(6+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (6+h) = 6$$

- $$f'(-4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-4+h) - f(-4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-4+h)^2 - (-4)^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{16} - 8h + h^2 - \cancel{16}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(-8+h)}{\cancel{h}} = -8$$

ENTONCES: $f(3) = 6$ y $f(-4) = -8$

EN UN ESQUEMA:



VEMOS ESTA VEZ, Y ASÍ SERÁ EN LA MAYORÍA DE LOS CASOS, QUE $f'(c)$ CAMBIA AL CAMBIAR EL c CONSIDERADO. ESTO NOS LLEVA A PENSAR EN LA:

• FUNCIÓN DERIVADA.

DEFINICIÓN. DADA $f: D_f \to \mathbb{R}$ UNA FUNCIÓN DERIVABLE EN TODO ELEMENTO DEL CONJUNTO $A \subset D_f$, LLAMAMOS FUNCIÓN DERIVADA A f' QUE CUMPLE:

$$f': A \to \mathbb{R} \qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{PARA CADA } x \in A$$

OBSERVÁ QUE, PARA LOS ELEMENTOS DE A, EL LÍMITE DEL QUE

HABLAMOS EXISTE Y ES FINITO. ENTONCES, f' ESTÁ BIEN DEFINIDA.

EJEMPLO: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + \underset{\searrow 0}{h}) = 2x \longrightarrow f'(x) = 2x$$

OBSERVÁ QUE EL LÍMITE PLANTEADO PUEDE CALCULARSE PARA CUALQUIER $x \in \mathbb{R}$, PUES f ES DERIVABLE. ENTONCES:

$$f': \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DONDE } f \\ \text{ES DERIVABLE}}}{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f'(x) = 2x$$

EN PARTICULAR, VOLVEMOS A OBTENER:

- $f'(3) = 2.3 = 6$
- $f'(-4) = 2.(-4) = -8$

• DERIVADAS LATERALES

DEFINICIÓN. DADOS $f: D_f \to \mathbb{R}$ UNA FUNCIÓN Y $c \in D_f$, UN ELEMENTO DE SU DOMINIO; SI EXISTE Y ES FINITO EL

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

LO LLAMAMOS **DERIVADA LATERAL POR DERECHA** Y ESCRIBIMOS $f'(c^+)$

DE IDÉNTICO MODO DEFINIMOS **DERIVADA LATERAL POR IZQUIERDA** AL

$$f'(c^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

OBSERVÁ QUE $f'(c)$ EXISTE SI Y SÓLO SI AMBAS DERIVADAS LATERALES EXISTEN Y COINCIDEN.

VEREMOS EJEMPLOS DE ESTO AL ANALIZAR LA:

- <u>CONDICIÓN NECESARIA DE DERIVABILIDAD EN UN PUNTO.</u>

HASTA AHORA TODAS LAS FUNCIONES ANALIZADAS HAN SIDO DERIVABLES EN EL ω CONSIDERADO. VEAMOS QUÉ PASA EN LOS SIGUIENTES:

<u>EJEMPLOS</u>: 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DEFINIDA $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

BUSCAMOS $f'(0)$.

COMO LA FUNCIÓN SE DEFINE DE DIFERENTE MANERA A UNO Y OTRO LADO DE $x = 0$, NECESITAMOS CALCULAR EL LÍMITE POR SEPARADO PARA $h \to 0^+$ Y $h \to 0^-$; ES DECIR, BUSCAMOS LAS DERIVADAS LATERALES:

$$\circ\ f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \underset{\uparrow}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} h > 0 \Rightarrow f(h) = |h| = h \\ y \ f(0) = |0| = 0 \end{array}}$$

$$\circ\ f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} \underset{\uparrow}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$h < 0 \Rightarrow f(h) = -h$$

<u>RESULTÓ</u>: $f'(0^+) = 1 \neq -1 = f'(0^-)$

COMO LAS DERIVADAS LATERALES SON DISTINTAS, ENTONCES NO HAY DERIVADA PARA f EN $x=0$: $\nexists\, f'(0)$.

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ DEFINIDA $f(x)=\begin{cases} 2x & x\geq 1 \\ -x & x<1 \end{cases}$

Y BUSCAMOS $f'(1)$, TAMBIÉN CALCULANDO DERIVADAS LATERALES PORQUE LA FUNCIÓN VIENE PARTIDA (JUSTO EN $x=1$):

$$\bullet\ f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \underset{\uparrow}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{2.(1+h)-2}{h} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1+h>1 \Rightarrow f(1+h)=2.(1+h) \\ f(1)=2 \end{array}}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{2}+2h-\cancel{2}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = 2$$

$$\circ\ f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \underset{\uparrow}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{-(1+h)-2}{h} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1+h<1 \\ \Rightarrow f(1+h)=-(1+h) \end{array}}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-1-h-2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\overset{-3}{\overbrace{-h-3}}}{\underset{0^-}{\underbrace{h}}} = +\infty$$

OTRA VEZ, NO HAY DERIVADA DE f EN $x=1$ (NI SIQUIERA HAY DERIVADA POR IZQUIERDA, PUES NO ES FINITA $f(1^-)$).

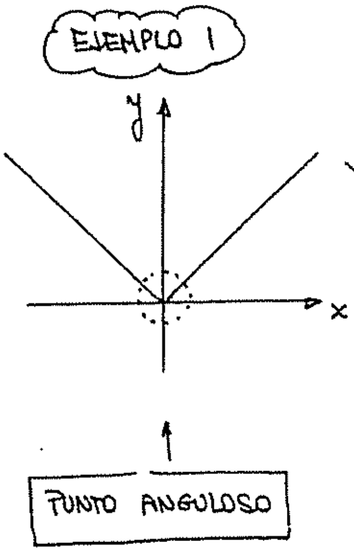
3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ DEFINIDA $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

BUSCAMOS $f'(0)$, Y EN ESTE CASO NO HAY NECESIDAD DE RECURRIR A LAS DERIVADAS LATERALES. PLANTEAMOS DIRECTAMENTE:

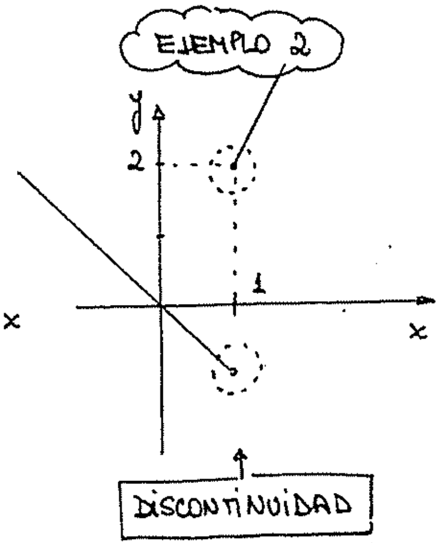
$$\circ\ \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

COMO EL LÍMITE HALLADO NO ES NUMÉRICO, TAMPOCO EXISTE $f'(0)$.

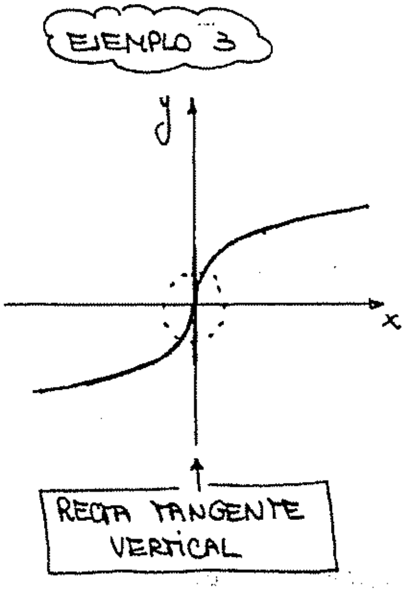
GRAFIQUEMOS PARA "VER" QUÉ PASÓ EN CADA CASO, DE QUÉ RASGO DE LA FUNCIÓN ES LA "CULPA" DE QUE NO EXISTA LA DERIVADA CONSIDERADA:



LAS "TANGENTES" LATERALES NO COINCIDEN



LAS PARTES DE f NO SE "PEGAN" BIEN



NO TIENE PENDIENTE FINITA

OBSERVAMOS ENTONCES QUE:

PARA QUE EXISTA DERIVADA EN UN PUNTO

1) ES ESENCIAL QUE AMBAS DERIVADAS LATERALES SEAN FINITAS Y COINCIDAN.

2) ES CONDICIÓN NECESARIA LA CONTINUIDAD: CUANDO ESTO NO SE CUMPLE EN UN PUNTO DADO, LA DERIVADA ALLÍ NO EXISTE (COMO EN EL EJEMPLO 2).

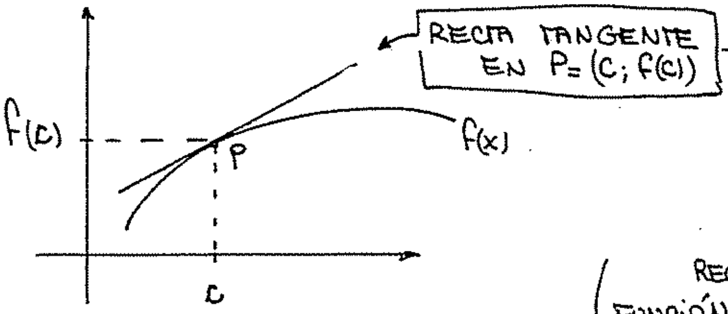
NOTAR QUE: LOS OTROS DOS EJEMPLOS DICEN QUE NO ES CONDICIÓN SUFICIENTE, PUES HABIENDO CONTINUIDAD

PUEDE NO HABER DERIVADA.

VEAMOS UNA PRIMERA APLICACIÓN DE LA DERIVADA:

- ECUACIONES DE LAS RECTAS TANGENTE Y NORMAL.

HEMOS ASOCIADO $f'(c)$ CON LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE AL GRÁFICO DE f EN EL PUNTO $P=(c;f(c))$. BUSCAREMOS AHORA LA ECUACIÓN COMPLETA DE ESA RECTA.



SU ECUACIÓN ES:

$$y=\underset{\boxed{f'(c)}}{\underset{\uparrow}{a}}(x-c)+f(c)$$

(RECORDÁ LO QUE VISTE DE FUNCIÓN LINEAL EN EL CURSO INTRODUCTORIO)

PARA LA RECTA NORMAL, QUE TAMBIÉN PASA POR $P=(c;f(c))$, LO QUE CAMBIA ES LA PENDIENTE:

$$a_{NORMAL}=\frac{-1}{a_{TANGENTE}} \Longrightarrow a_{NORMAL}=\frac{-1}{f'(c)}$$

PODEMOS ENTONCES ORDENAR ESTOS RESULTADOS EN LA SIGUIENTE:

DEFINICIÓN. DADA $f: D_f \to \mathbb{R}$, UNA FUNCIÓN DERIVABLE EN UN ELEMENTO c DE SU DOMINIO; ENTONCES:

1) LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE AL GRÁFICO DE f EN EL PUNTO $P=(c;f(c))$ ES: $y=f'(c).(x-c)+f(c)$

2) LA ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL AL GRÁFICO DE f

EN EL PUNTO $P=(c;f(c))$ ES : $y=\frac{-1}{f'(c)}.(x-c)+f(c)$

VEAMOS UN EJEMPLO:

PARA $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ DEFINIDA $f(x)=x^2$ HABÍAMOS CALCULADO $f'(3)=6$. BUSCAREMOS AHORA LAS RECTAS TANGENTE Y NORMAL A SU GRÁFICO EN EL PUNTO $P=(\underset{\boxed{c}}{\underset{\uparrow}{3}};\underset{\boxed{f(c)=f(3)=3^2}}{\underset{\uparrow}{9}})$

- **RECTA TANGENTE** :

$$y=\underset{6}{\underset{\uparrow}{f'(c)}}.(x-\underset{3}{\underset{\uparrow}{c}})+\underset{9}{\underset{\uparrow}{f(c)}}$$

ENTONCES RESULTA: $y=6.(x-3)+9$

Y AL DISTRIBUIR Y ACOMODAR TÉRMINOS, QUEDA:

$\boxed{y=6x-9}$ ← TANGENTE EN $P=(3;9)$

- **RECTA NORMAL**:

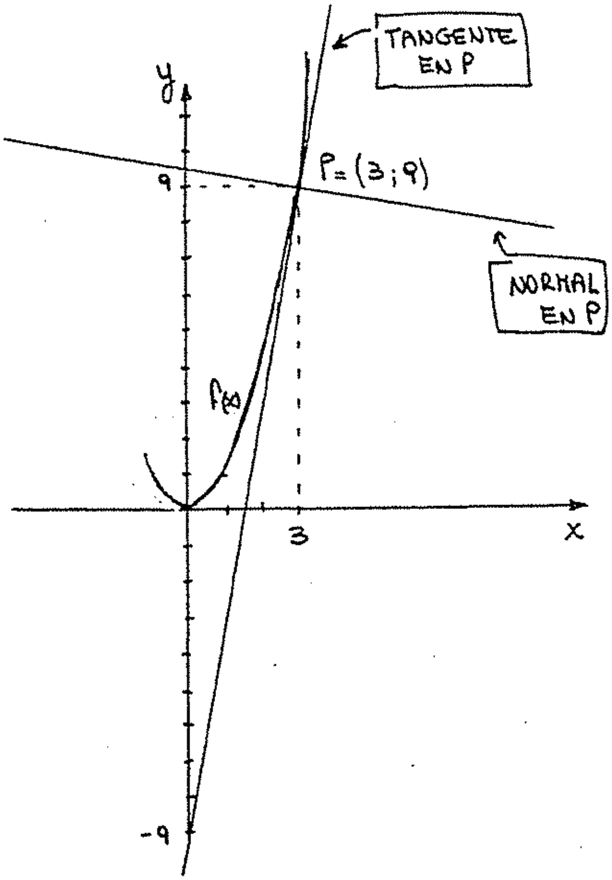
$$y=-\frac{1}{\underset{6}{\underset{\uparrow}{f'(c)}}}.(x-\underset{3}{\underset{\uparrow}{c}})+\underset{9}{\underset{\uparrow}{f(c)}}$$

AL REEMPLAZAR, QUEDA: $y=-\frac{1}{6}.(x-3)+9$

Y ACOMODANDO TERMINOS ES:

$\boxed{y=-\frac{1}{6}.x+\frac{19}{2}}$ ← NORMAL EN $P=(3;9)$

ENTONCES, EL GRÁFICO QUE TRAZAMOS "A OJO" EN PÁGINAS ANTERIORES PUEDE MEJORARSE AHORA:



OBSERVÁ CUÁNTO SE "PARECE" LA RECTA TANGENTE A LA FUNCIÓN EN LAS CERCANÍAS DEL PUNTO P.

(USAREMOS ESTO MÁS ADELANTE)

ANTES DE ANALIZAR OTRAS APLICACIONES DE LA DERIVADA, SERÁ NECESARIO ENTRENARNOS EN CALCULARLAS. A ESO NOS DEDICAREMOS AHORA:

• TABLA DE DERIVADAS Y REGLAS DE DERIVACIÓN.

RESOLVER CADA DERIVADA POR DEFINICIÓN, ES DECIR CALCULANDO UN LÍMITE, PUEDE VOLVERSE FASTIDIOSO. LA MANERA DE HACER MÁS ÁGIL LA BÚSQUEDA DE UNA DERIVADA ES CONOCER QUÉ PASA CON EL LÍMITE CORRESPONDIENTE PARA LAS FUNCIONES MÁS SIMPLES. ASÍ, APARECEN TABLAS QUE REÚNEN ESTOS RESULTADOS. LA QUE PRESENTAMOS AQUÍ ES MUY SENCILLA Y NOS SERVIRÁ PARA MANEJARNOS EN LOS EJEMPLOS QUE SIGAN. ALGUNAS, LAS HEMOS PROBADO Y OTRAS ESTÁN COMO EJERCICIO EN LA PRÁCTICA; FINALMENTE, HAY UNAS POCAS QUE PROBAREMOS MÁS ADELANTE

Y QUE, POR AHORA, QUEDAN SIN COMPLETAR O SE AGREGAN EN PÁG. 26:

	$f(x)$	$f'(x)$
	$ax+b$	a
CASOS ESPECIALES DE $ax+b$	$a=0, b=k$: k ← (CONSTANTE)	0
	$a=1, b=0$: x	1
	x^n $(m \in R)$	$m . x^{m-1}$
CASOS ESPECIALES DE x^n	$n=2$: x^2	$2x$
	$n=\frac{1}{2}$: $\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	$n=-1$: $\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
	$\operatorname{tg} x$	← (VER PÁG. 19)
	e^x	e^x
	a^x	$a^x . \ln a$
	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	$\log_a x$	$\frac{1}{x . \ln a}$
	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
	$\operatorname{tgh} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

DEL MISMO MODO QUE LA TABLA ANTERIOR, ES DECIR, CALCULANDO EL LÍMITE INDICADO EN LA DEFINICIÓN, SURGEN LAS SIGUIENTES

REGLAS DE DERIVACIÓN -

- (1) PARA DERIVAR SUMAS Y RESTAS

Si g y h SON DOS FUNCIONES DERIVABLES EN x, ENTONCES:

$$\circ\ f(x) = g(x) + h(x) \implies f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$\circ\ f(x) = g(x) - h(x) \implies f'(x) = g'(x) - h'(x)$$

EJEMPLO:

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{g(x)} + \underbrace{\cos x}_{h(x)} \implies f'(x) \underset{\overset{\uparrow}{\boxed{\text{TABLA}}}}{=} \underbrace{2x}_{g'(x)} + \underbrace{(-\text{sen}\, x)}_{h'(x)}$$

- (2) PARA DERIVAR PRODUCTOS

Si g y h SON DOS FUNCIONES DERIVABLES EN x, ENTONCES:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \longrightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

EJEMPLO:

$$f(x) = \underbrace{x^5}_{g(x)} \cdot \underbrace{\text{sen}\, x}_{h(x)} \implies f'(x) = (x^5)' \cdot \text{sen}\, x + x^5 \cdot (\text{sen}\, x)'$$

$$f'(x) \underset{\overset{\uparrow}{\boxed{\text{TABLA}}}}{=} 5x^4 \cdot \text{sen}\, x + x^5 \cdot \cos x$$

NOTA: Si EL PRODUCTO A DERIVAR ES ENTRE TRES FUNCIONES, TRABAJAMOS ASÍ

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \cdot p(x) = g(x) \cdot \big(h(x) \cdot p(x)\big) \longleftarrow \boxed{\text{LO ASOCIAMOS Y APLICAMOS LA REGLA}}$$

$$\implies f'(x) = g'(x) \cdot \big(h(x) \cdot p(x)\big) + g(x) \cdot \underbrace{\big(h(x) \cdot p(x)\big)'}_{\longleftarrow \boxed{\text{VOLVEMOS A APLICAR LA REGLA}}}$$

$$\implies f'(x) = g'(x) \cdot \big(h(x) \cdot p(x)\big) + g(x) \cdot \big(h'(x) \cdot p(x) + h(x) \cdot p'(x)\big)$$

DISTRIBUIMOS Y SACAMOS PARÉNTESIS:

$$\Rightarrow f'(x) = g'(x).\, h(x).\, p(x) + g(x).\, h'(x).\, p(x) + g(x).\, h(x).\, p'(x)$$

(OBSERVÁ QUE EN CADA TÉRMINO, UN FACTOR ESTÁ DERIVADO Y LOS OTROS DOS NO)

<u>EJEMPLO</u>: $f(x) = \underbrace{x^2}_{g(x)} . \underbrace{\cos x}_{h(x)} . \underbrace{\operatorname{sen} x}_{p(x)}$

$$\Rightarrow f'(x) = (x^2)' . \cos x . \operatorname{sen} x + x^2 . (\cos x)' . \operatorname{sen} x + x^2 . \cos x . (\operatorname{sen} x)'$$

$$\underset{\text{TABLA}}{\Rightarrow} f'(x) = 2x . \cos x . \operatorname{sen} x + x^2 . (-\operatorname{sen} x) . \operatorname{sen} x + x^2 . \cos x . \cos x$$

$$\underset{\text{MULTIPLICAR}}{\Rightarrow} f'(x) = 2x . \cos x . \operatorname{sen} x - x^2 . \operatorname{sen}^2 x + x^2 . \cos^2 x$$

- (3) <u>PARA DERIVAR EL PRODUCTO DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN</u>

Si h ES UNA FUNCIÓN DERIVABLE EN x, ENTONCES:

$$f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{NÚMERO FIJO}}}}{k} . h(x) \Longrightarrow f'(x) = k . h'(x)$$

(<u>NOTA</u>: ES MUY FÁCIL PROBAR ESTA REGLA USANDO LA ANTERIOR Y EL HECHO DE QUE $g'(x) = (k)' = 0$)

<u>EJEMPLO</u>:

$$f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{5}\, \underbrace{\cos x}_{h(x)} \longrightarrow f'(x) = 5 . (\cos x)' \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{TABLA}}}}{=} 5 . (-\cos x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -5 \cos x$$

- (4) <u>PARA DERIVAR COCIENTES</u>

Si g y h SON DERIVABLES EN x y $h(x) \neq 0$, ENTONCES:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x) . h(x) - g(x) . h'(x)}{[g(x)]^2}$$

EJEMPLO:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)' . \cos x - \operatorname{sen} x . (\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{TABLA}}}}{\Longrightarrow} f'(x) = \frac{\cos x . \cos x - \operatorname{sen} x . (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{MULTIPLICAR}}}}{=} \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

Y RECORDANDO QUE $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, RESULTA QUE:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Si MIRÁS OTRA VEZ f, VERÁS QUE: $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$

ASÍ QUE LO QUE ACABAMOS DE ENCONTRAR ES LA DERIVADA DE LA TANGENTE, Y YA PODÉS COMPLETAR CON ESTE RESULTADO LA TABLA:

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

- (5) PARA DERIVAR FUNCIONES COMPUESTAS: REGLA DE LA CADENA.

Si h ES DERIVABLE EN x y g ES DERIVABLE EN $h(x)$, ENTONCES:

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) \Longrightarrow f'(x) = g'(h(x)) . h'(x)$$

EJEMPLOS: 1)

$$f(x) = \underset{\substack{\nearrow \\ g}}{\operatorname{sen}} \, (\underset{\substack{\nwarrow \\ h}}{x^6}) \Longrightarrow f'(x) = (\operatorname{sen} \text{☁})' . (\text{☁})' \quad \boxed{h}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \cos \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{h}}}{\text{☁}} . \underbrace{(x^6)'}_{6x^5} \Longrightarrow f'(x) = \cos(x^6) . 6x^5$$

$$2)\quad f(x) = (\underbrace{e^{x} + tg\,x}_{h})^{5} \nwarrow g: \text{"ELEVAR A LA QUINTA"}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = (\underset{\nwarrow}{\bigcirc}^{5})' \cdot \underset{\nearrow}{\bigcirc}' \quad \boxed{h} \quad = 5 \cdot \underset{\overset{\uparrow}{\boxed{h}}}{\bigcirc}^{4} \cdot h'(x)$$

$$\Longrightarrow f'(x) = 5\,(\underbrace{e^{x} + tg\,x}_{h(x)})^{4} \cdot \underbrace{\left(e^{x} + \frac{1}{\cos^{2} x}\right)}_{h'(x)}$$

$$3)\quad f(x) = \sqrt{\underbrace{x^{2} + \frac{1}{x}}_{h}} \qquad \text{"SACAR RAIZ": } g \nearrow$$

$$\Longrightarrow f'(x) = (\sqrt{\underset{\nwarrow}{\bigcirc}})' \cdot \underset{\nearrow}{\bigcirc}' \quad \boxed{h} \quad = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\bigcirc} \leftarrow \boxed{h}}}_{\text{DERIVAMOS SÓLO LA RAIZ}} \cdot h'(x)$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^{2} + \frac{1}{x}}} \cdot \left(2x - \frac{1}{x^{2}}\right)$$

$$4)\quad f(x) = \underset{\nwarrow g: \text{ LA EXPONENCIAL}}{e}^{\sqrt{x}} \leftarrow h$$

$$\longrightarrow f'(x) = \underbrace{(e^{\overset{\boxed{h}}{\downarrow}\bigcirc})'}_{\nwarrow \text{DERIVAMOS SÓLO LA EXPONENCIAL}} \cdot h'(x) \qquad \Longrightarrow \quad f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

USANDO ESTA REGLA TAMBIÉN PODEMOS DERIVAR FUNCIONES CON POTENCIAS EN LAS QUE LA VARIABLE FIGURA TANTO EN LA BASE COMO EN EL EXPONENTE; DEL TIPO: x^{x}, $x^{\cos x}$, $(\cos x)^{x}$, ...

VEREMOS CÓMO HACERLO EN LOS EJEMPLOS QUE SIGUEN; PERO ANTES RECORDEMOS UN RESULTADO QUE SERÁ EN TODOS LOS CASOS EL "TRUCO" INICIAL.

COMO e^x Y $\ln x$ SON UNA LA INVERSA DE LA OTRA (COMO FUNCIONES) VALE LA SIGUIENTE RELACIÓN:

$$A = e^{\ln A} \qquad \text{(CUALQUIERA SEA } A>0\text{)}$$

ENTONCES, EN EL CASO DE x^x, POR EJEMPLO, PODREMOS ESCRIBIR:

$$\underset{A}{\underbrace{x^x}} = e^{\ln(x^x)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(PROPIEDAD} \\ \text{DEL LOGARITMO)}}}{=} e^{x.\ln x}$$

FIJATE QUE LO QUE OBTUVIMOS ES UNA FUNCIÓN COMPUESTA (PARECIDA A LA DEL EJEMPLO 4) QUE PODREMOS DERIVAR CON LA REGLA DE LA CADENA.

FIJATE TAMBIEN QUE SE DEBE PEDIR $x>0$ PARA QUE EL PLANTEO, Y LA ESCRITURA ORIGINAL DE x^x, TENGAN SENTIDO.

RESOLVAMOS COMPLETO ESE EJEMPLO Y ALGÚN OTRO:

5) $f(x) = x^x$ CON $x>0 \Longrightarrow$ ESCRIBIMOS: $f(x) = \underset{\text{g: LA EXPONENCIAL}}{e}^{\overset{\boxed{h}}{x.\ln x}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{\left(e^{\overset{\boxed{h}}{\bigcirc}}\right)'}_{\text{DERIVAMOS SÓLO LA EXPONENCIAL}} . \, h'(x) = e^{\overset{\boxed{h}}{\bigcirc}} . \underbrace{(x \ln x)'}_{\text{DERIVAMOS UN PRODUCTO}} = \quad \rightarrow \underbrace{x'}_{1}.\ln x + x\underbrace{(\ln x)'}_{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{x.\ln x} . (\ln x + 1)$$

Y, PARA TERMINAR, VOLVEMOS A USAR QUE $e^{x.\ln x} = x^{x}$:

$$\Rightarrow f'(x) = x^{x} . (\ln x + 1)$$

6) $f(x) = x^{\cos x}$, CON $x>0$

PRIMERO ESCRIBIMOS: $f(x) = x^{\cos x} = e^{\ln(x^{\cos x})} = \underset{g:\text{ LA EXPONENCIAL}}{e}^{\overset{\boxed{h}}{\cos x . \ln x}}$

Y YA PODEMOS DERIVAR:

$$f'(x) = \left(e^{\overset{\boxed{h}}{\bigcirc}}\right)' . h'(x) = \underbrace{e^{\overset{\boxed{h}}{\bigcirc}}}_{\text{DERIVAMOS SÓLO LA EXPONENCIAL}} . \underbrace{(\cos x . \ln x)'}_{\text{DERIVAMOS UN PRODUCTO}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{e^{\cos x . \ln x}}_{x^{\cos x}} . \left(-\operatorname{sen} x . \ln x + \cos x . \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^{\cos x} . \left(-\operatorname{sen} x . \ln x + \cos x . \frac{1}{x}\right)$$

• (6) PARA DERIVAR UNA FUNCIÓN CONOCIENDO LA DERIVADA DE SU INVERSA.

DADAS DOS FUNCIONES, f y g, UNA LA INVERSA DE LA OTRA, SE CUMPLE QUE: $f(x) = y \quad \wedge \quad g(y) = x$

Y, APLICADAS SUCESIVAMENTE, VERIFICAN:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd} \qquad \Rightarrow \quad g(y) = g(f(x)) = x$$

PODEMOS DERIVAR MIEMBRO A MIEMBRO LA RELACIÓN $g(f(x)) = x$,

USANDO LA REGLA DE LA CADENA (POR HABER, A LA IZQUIERDA DE LA IGUALDAD, UNA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES):

$$\underbrace{\left[g(f(x))\right]'}_{\text{REGLA DE LA CADENA}} = \underbrace{(x)'}_{1} \Longrightarrow g'(f(x)).\ f'(x) = 1$$

Y PODEMOS DESPEJAR: $g'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

$y=f(x)$
$x=g(y)$

QUE TAMBIÉN PODRÍAMOS ESCRIBIR COMO: $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$

ESTA RELACIÓN PERMITE CONOCER g' (DERIVADA DE LA INVERSA DE f) SIN NECESIDAD DE CALCULARLA DIRECTAMENTE SINO VALIÉNDONOS DE f', QUE SUELE SER MÁS FÁCIL DE HALLAR.

A CONTINUACIÓN VEREMOS DOS EJEMPLOS DE CÓMO USARLA, UNO NUMÉRICO Y EL OTRO FUNCIONAL:

EJEMPLOS: 1) DADA $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$, $f(x)=5.e^{x^3+2x}$, HALLAR $(f^{-1})'(5)$.

DAMOS POR SENTADO QUE f ES INVERSIBLE (PODREMOS PROBARLO AVANZANDO EN LA UTILIZACIÓN DE DERIVADAS); ES DECIR, TIENE SENTIDO PENSAR EN $f^{-1}=g$ Y EN SU DERIVADA, PARA LA QUE SE CUMPLIRÁ (SEGÚN LO ENUNCIADO ANTES):

$$(f^{-1})'(5) = g'\Big(\underset{\overset{\uparrow}{\boxed{y}}}{5}\Big) = \frac{1}{f'\Big(\underset{\overset{\uparrow}{\boxed{?}}}{\quad}\Big)} \leftarrow \text{DEBE CUMPLIR: } y=5=f(?)$$

ENTONCES, TENEMOS DOS TRABAJOS: CALCULAR f' (QUE HACEMOS CON REGLAS, COMO SIEMPRE) Y DECIDIR EN QUÉ x EVALUARLA. HAREMOS ESTO PRIMERO; SABEMOS QUE:

$$y = f(x) \Longrightarrow 5 = 5 . e^{x^3+2x} \Longrightarrow \text{DESPEJAMOS } x$$

$$\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}} = e^{x^3+2x} \Longrightarrow x^3+2x = \underbrace{\ln 1}_{0} \Longrightarrow x^3+2x=0$$

$$\Longrightarrow x(x^2+2)=0 \Longrightarrow \boxed{x=0} \quad o \quad x^2+2=0 \longleftarrow \text{NO HAY } x\in\mathbb{R} \text{ QUE LO CUMPLA}$$

ASÍ QUE SERÁ: $(f^{-1})'(5) = g'(5) = \frac{1}{f'(0)}$ ← PUES: $f(\underset{\overset{\uparrow}{x}}{0}) = \underset{\overset{\uparrow}{y}}{5}$

SÓLO FALTA DERIVAR Y COMPLETAR LAS CUENTAS:

$$f(x) = 5.e^{x^3+2x} \longrightarrow f'(x) = 5. e^{x^3+2x} . (3x^2+2)$$

$$\Longrightarrow f'(0) = 10$$

DE DONDE, FINALMENTE TENEMOS: $(f^{-1})'(5) = g'(5) = \frac{1}{10}$

(OBSERVÁ QUE EN NINGÚN MOMENTO NECESITAMOS CONOCER LA EXPRESIÓN DE f^{-1}, NO MUY SENCILLA DE CALCULAR, POR LO DEMÁS).

2) $f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1;1] \qquad f(x) = \operatorname{sen} x$

EN ESTE CASO SABEMOS QUE SU INVERSA EXISTE Y ES:

$$g: [-1;1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \qquad g(y) = \operatorname{arcsen} y$$

BUSQUEMOS SU DERIVADA, USANDO LA RELACIÓN DADA:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{array}{l} f'(x)=(\operatorname{sen} x)' \\ f'(x)= \cos x \end{array}}}{\Longrightarrow} g'(y) = \frac{1}{\cos x} \longleftarrow$$

QUEREMOS QUE SE ESCRIBA EN LA MISMA VARIABLE QUE g', EN y.

ENTONCES RECORDAMOS QUE:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{array}{c} \text{DESPEJAMOS} \\ \cos x \end{array}}}{\Longrightarrow} |\cos x| = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$$

Y COMO EN LAS x SE APLICA f, SABEMOS QUE $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ Y QUE EN ESTE INTERVALO $\cos x > 0$ $\left(\Rightarrow |\cos x| = \cos x\right)$ Y TENEMOS:

$$\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$$

ENTONCES, VOLVEMOS A g':

$$g'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} \underset{\uparrow \atop \boxed{\operatorname{sen} x = y}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Y COMO YA NO PUEDE HABER PROBLEMAS CON LAS VARIABLES;

$$g'(x) = (\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longleftarrow$$

CAMBIAMOS y POR LA VARIABLE USUAL, x

DE PARECIDO MODO, SE CALCULAN LAS DERIVADAS DE LOS OTROS ARCOS, TANTO DE FUNCIONES CIRCULARES COMO HIPERBÓLICAS. LAS AGREGO AQUÍ PARA COMPLETAR LA TABLA DE LA PÁGINA 16:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsen x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arg sh\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arg ch\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arg tgh\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Finalmente, antes de ver cómo derivamos funciones que vienen definidas en forma paramétrica, necesitamos hacer un cambio de notación.

Hasta ahora, usamos el símbolo f' para referirnos a la derivada de f, en la inteligencia de que tanto una como otra eran funciones de x y que estábamos derivando respecto de esta variable.

Existe otra forma de indicar la derivada, debida a Leibniz y todavía en uso, que es más útil cuando se necesita hacer evidente respecto de qué variable se está derivando:

$\frac{df}{dx}$: derivada de f respecto de x.

Así, calculamos por ejemplo:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ $\Rightarrow \frac{df}{dx}=2x$

2) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x} - 3\cos x \Rightarrow \frac{df}{dx} = -\frac{1}{x^2} + 3\operatorname{sen} x$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(t) = 5t^2 + 4 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 10t$ ← (AHORA LA VARIABLE ES t)

OBVIAMENTE LA FORMA DE DERIVAR ES LA MISMA QUE YA HEMOS EJERCITADO, APLICADA A LA VARIABLE CORRESPONDIENTE.

AHORA SÍ PODEMOS VER CÓMO HACEMOS:

- (7) PARA DERIVAR UNA FUNCIÓN DEFINIDA PARAMÉTRICAMENTE

SI f ES EL CONJUNTO DE LOS PUNTOS $(x; y)$ QUE CUMPLEN

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

PARA t EN ALGÚN CONJUNTO INDICADO

ENTONCES:

$$f' = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

DERIVAMOS POR SEPARADO x e y (RESPECTO DE t) Y DIVIDIMOS

EJEMPLO:

1) $$\begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$$ PARA $t \in \mathbb{R}$.

$\frac{dy}{dt} = 2t + 6t^2$ y $\frac{dx}{dt} = 2 + 6t$

ENTONCES:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t + 6t^2}{2 + 6t} = \frac{\cancel{2}t.(\cancel{1+3t})}{\cancel{2}.(\cancel{1+3t})} = t$$

2) $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \text{sen}^2 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos t.\,(-\text{sen}\,t) \qquad y \qquad \frac{dy}{dt} = 2\,\text{sen}\,t.\,\cos t$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{2}\,\cancel{\text{sen}\,t}.\,\cancel{\cos t}}{\cancel{2}\,\cancel{\cos t}.\,(-\cancel{\text{sen}\,t})} = -1$$

OBSERVÁ QUE LA DERIVADA OBTENIDA PUEDE SEGUIR DEPENDIENDO DE t O NO.

- DERIVADAS SUCESIVAS

EN TODO LO HECHO HASTA AQUÍ HEMOS CALCULADO $f'(x)$ A PARTIR DE f, OBTENIENDO UNA NUEVA FUNCIÓN A LA QUE PODEMOS VOLVER A APLICAR LA IDEA DE DERIVABILIDAD: DADA LA FUNCIÓN $f'(x)$, CON IDÉNTICAS REGLAS Y DEFINICIÓN A LAS YA USADAS PARA HALLARLA, CALCULAMOS SU PROPIA DERIVADA $(f')'(x)$ QUE POR COMODIDAD LLAMAMOS

$f''(x)$: DERIVADA SEGUNDA DE f EN x

ESTA DERIVADA SEGUNDA TIENE ESPECIAL IMPORTANCIA EN FÍSICA. SI $f(x)$ SEÑALA LA POSICIÓN DE UN MÓVIL QUE SE DESPLAZA EN LÍNEA RECTA, EN EL INSTANTE x, HABÍAMOS VISTO QUE $f'(x)$ REPRESENTA LA VELOCIDAD EN EL INSTANTE x. EN ESTAS CONDICIONES, $f''(x)$ INDICA LA ACELERACIÓN EN CADA INSTANTE x.

EN PRINCIPIO, NO HAY RAZÓN PARA QUE NOS DETENGAMOS EN f'', SINO QUE PODRÍAMOS SEGUIR DERIVANDO Y HALLAR:

- $f''' = (f'')'$: DERIVADA TERCERA
- $(f'''') = (f''')'$: DERIVADA CUARTA

$$\vdots$$

Y, EN GENERAL

- $f^{(n)} = (\overbrace{((f')')' \cdots}^{n \text{ derivaciones}})'$: DERIVADA DE ORDEN n DE f

QUE TAMBIÉN PUEDE ESCRIBIRSE, EN LA NOTACIÓN DE LEIBNIZ, COMO:

$$\frac{d^n f}{dx^n} \longleftarrow \left(\text{DERIVAMOS RESPECTO DE } x \text{ LAS } n \text{ VECES} \right)$$

<u>EJEMPLO</u>: 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = e^x$

$\Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$ PARA CUALQUIER $n \in \mathbb{N}$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 3x^2 + 5x - 1$

$\Rightarrow$
- $f'(x) = 6x + 5$
- $f''(x) = 6$
- $f^{(n)}(x) = 0$ PARA $n \geqslant 3$.

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \operatorname{sen} x$

$\Rightarrow$
- $f'(x) = \cos x$
- $f''(x) = -\operatorname{sen} x$
- $f'''(x) = -\cos x$
- $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$

DERIVAMOS CADA VEZ

Y SE VUELVEN A REPETIR EN EL MISMO ORDEN: TRATÁ DE ENCONTRAR UNA EXPRESIÓN GENERAL PARA $f^{(n)}(x)$.

EN LO QUE SIGUE, VEREMOS DISTINTAS APLICACIONES DE LA DERIVADA.

* • DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN.

DEFINICIONES. DADA $f: D_f \to \mathbb{R}$ UNA FUNCIÓN DERIVABLE EN $x \in D_f$, DEFINIMOS, PARA CUALQUIER $h \in \mathbb{R}$:

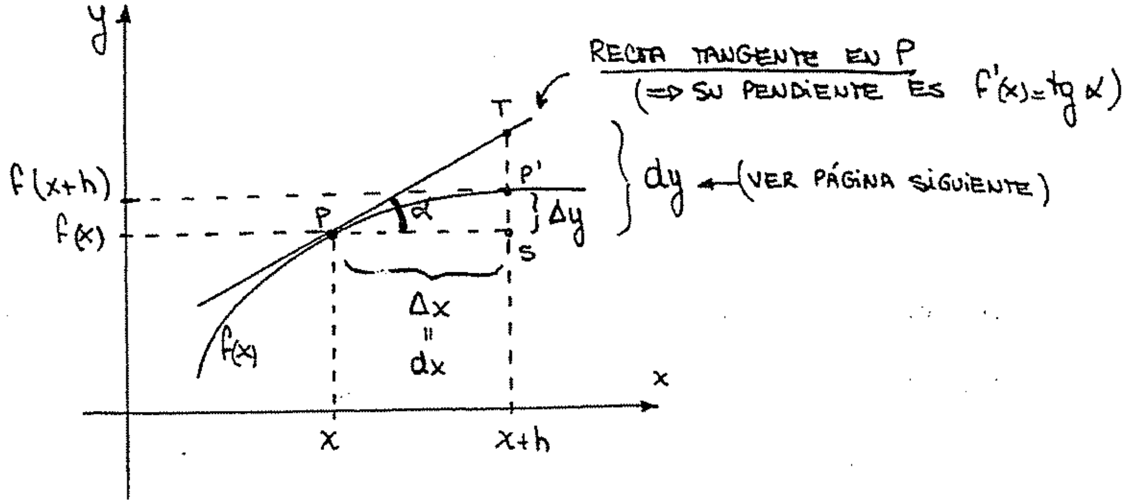
- $\Delta x = (x+h) - x = h$: INCREMENTO DE LAS x (SE LEE: DELTA-x)
- $\Delta y = f(x+h) - f(x)$: INCREMENTO DE LAS y (SE LEE: DELTA-y)
- $dy = f'(x) . \Delta x$ (SE LEE: DIFERENCIAL-y)

OBSERVÁ QUE: PARA EL CASO PARTICULAR EN QUE TOMEMOS $f(x) = x = y$, RESULTA $f'(x) = 1$ y $\underset{\textcircled{=}}{dy = dx} = \Delta x$

DE MODO QUE VALE TAMBIÉN:

$$\boxed{dy = f'(x) . \Delta x = f'(x) . dx}$$ ← (ES EL MODO EN QUE MÁS USAREMOS EL DIFERENCIAL)

VEAMOS EN UN GRÁFICO QUÉ SIGNIFICA LO ANTERIOR:



RECTA TANGENTE EN P (⇒ SU PENDIENTE ES $f'(x) = tg\,\alpha$)

dy ← (VER PÁGINA SIGUIENTE)

SEGÚN LAS DEFINICIONES, TENEMOS:

$\boxed{\circ\ \Delta x = dx = \overline{PS}}$ $\boxed{\circ\ \Delta y = \overline{P'S}}$

ADEMÁS:

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{TS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{TS}}{dx} \Rightarrow \overline{TS} = f'(x).\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\overline{TS} = dy}$$

OBSERVÁ QUE: EN UN CASO GENERAL, CUANDO LA FUNCIÓN NO COINCIDE CON SU TANGENTE, T Y P' NO SON EL MISMO PUNTO.

$$\Rightarrow \boxed{|dy - \Delta y| = \overline{TP'} \neq 0 \Rightarrow dy \neq \Delta y}$$

PERO LA DISTANCIA ENTRE DIFERENCIAL E INCREMENTO DE y SE "ACHICA" CUANDO SE CONSIDERA UN $\Delta x = dx$ CADA VEZ MÁS PEQUEÑO, PUES ESTO SIGNIFICA ACERCARNOS AL PUNTO P "ANDANDO" SOBRE EL GRÁFICO DE f, Y DE ESTE MODO FUNCIÓN Y TANGENTE ESTÁN CADA VEZ MÁS CERCA.

ENTONCES, PARA $dx = \Delta x$ PEQUEÑO, SERÁ:

$$\boxed{\Delta y \cong dy = f'(x).\,dx} \qquad \boxed{\Delta y = f(x+h) - f(x)}$$

ES DECIR:

$$\boxed{f(x+h) - f(x) \cong f'(x).\,dx} \qquad \boxed{h = dx = \Delta x}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x+dx) \cong f'(x).\,dx + f(x)} \longleftarrow$$

APROXIMAMOS LINEALMENTE A f

COMENTARIO (NO INDISPENSABLE): TRATÁ DE DESCUBRIR QUÉ PARENTESCO HAY ENTRE LO QUE ACABAMOS DE ESCRIBIR Y LA RECTA TANGENTE TAL COMO LA BUSCÁBAMOS EN LA PÁGINA 13.

(AYUDA: EL CAMBIO DE NOTACIÓN PUEDE ESTORBAR UN POCO, PERO LA

RESPUESTA ES MUY SENCILLA).

EJEMPLOS: 1) CALCULAR, APROXIMADAMENTE, $\ln(1,12)$

CONSIDERAMOS $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \ln x$; $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Y USAMOS:

- $x = 1 \Rightarrow f(x) = \ln 1 = 0$ ← VALOR SENCILLO DE CALCULAR (PARA ESO ELEGIMOS $x=1$)
- $\Delta x = dx = h = 0,12$

$\Rightarrow$ • $f(x+dx) = f(1+0,12) = f(1,12) = \ln 1,12$ ← LO QUE QUEREMOS APROXIMAR (PARA ESO ELEGIMOS $dx=0,12$)

ENTONCES: $f'(1) = 1$

Y ESCRIBIMOS:

$$f(x+dx) \cong f'(x) . dx + f(x)$$

$$f(1+0,12) \cong f'(1) . 0,12 + f(1)$$

$$\Rightarrow \quad \ln 1,12 \cong 1 . 0,12 + 0$$

$$\boxed{\ln 1,12 \cong 0,12}$$

← COMPARÁ CON EL VALOR DE CALCULADORA

2) CALCULAR, APROXIMADAMENTE, $\sqrt[3]{25}$.

TOMAMOS $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} . x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Y USAMOS:

- $x = 27 \to f(x) = \sqrt[3]{27} = 3$
- $\Delta x = dx = -2$

$\Rightarrow$ • $f(x+dx) = f(27+(-2)) = f(25) = \sqrt[3]{25}$

- $f'(27) = \frac{1}{3 . \sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}$

ENTONCES ESCRIBIMOS:

$$f(x+dx) \cong f'(x) \cdot dx + f(x)$$

$$f(27+(-2)) \cong f'(27) \cdot (-2) + f(27)$$

$$\sqrt[3]{25} \cong \frac{1}{27} \cdot (-2) + 3$$

$$\checkmark \; \boxed{\sqrt[3]{25} \cong \frac{79}{27} = 2{,}9\overline{259}} \leftarrow$$

(OTRA VEZ, PODÉS COMPARAR CON EL VALOR DE CALCULADORA)

NOTAS: * 1) LA APROXIMACIÓN LINEAL QUE ESTAMOS ANALIZANDO ES VÁLIDA CUANDO f ES DERIVABLE EN UN ENTORNO DEL x CONSIDERADO.

* 2) LAS REGLAS DE DIFERENCIACIÓN SON LAS MISMAS QUE VIMOS PARA DERIVADAS:

- $d(f+g) = df + dg$
- $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$
- $d(f.g) = f.dg + g.df$
- $d(f \circ g) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx$
- $d(kf) = \underset{\boxed{\text{CONSTANTE}}}{\overset{\uparrow}{k}} \cdot df$

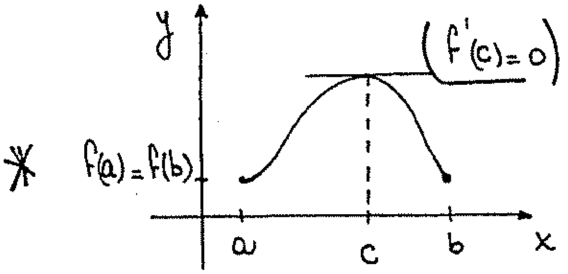
* • ANÁLISIS DE FUNCIONES POR MEDIO DE SUS DERIVADAS

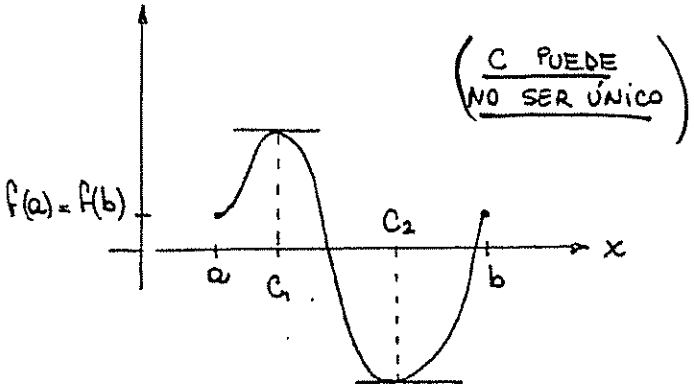
PARA PODER AVANZAR EN ESTA APLICACIÓN DE LA DERIVADA, NECESITAMOS ENUNCIAR UNA SERIE DE TEOREMAS QUE PERMITIRÁN PROBAR LOS RESULTADOS QUE LUEGO USAREMOS. ESTOS TEOREMAS SE CONOCEN, EN CONJUNTO, COMO * [TEOREMAS DEL VALOR MEDIO.] ALGUNOS DE ELLOS TIENEN TAMBIÉN UNA APLICACIÓN "NO TEÓRICA" QUE EJEMPLIFICAREMOS DESPUÉS DE ENUNCIARLOS.

* (1) TEOREMA DE ROLLE. SI f ES CONTINUA SOBRE $[a;b]$ Y DERIVABLE SOBRE $(a;b)$, Y $f(a) = f(b)$, ENTONCES

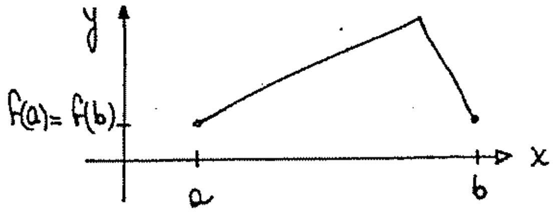
EXISTE UN NÚMERO c ENTRE a y b TAL QUE $f'(c)=0$.

EN UN ESQUEMA:





SI EN ALGÚN PUNTO INTERIOR NO HAY DERIVADA, NADA PUEDE ASEGURARSE:



EJEMPLO: MOSTRAR QUE LA ECUACIÓN $x^5-5x^4+8=0$ NO PUEDE TENER MÁS DE UNA SOLUCIÓN EN EL INTERVALO $[1;3]$

SI LLAMAMOS $f(x)=x^5-5x^4+8$, LO QUE QUEREMOS PROBAR ES QUE NO HABRÁ MÁS DE UNA RAÍZ DE f EN EL INTERVALO DADO. SUPONGAMOS, DE ENTRADA, QUE NO ES ASÍ; ES DECIR, QUE HAY, POR EJEMPLO, DOS RAÍCES DE f EN EL $[1;3]$. LAS LLAMAMOS a y b Y SE CUMPLE QUE:

- $[a;b]\subset[1;3]$ PUES $1\leq a<b\leq 3$
- $f(a)=f(b)=0$: (ESTAMOS SUPONIENDO QUE SON RAÍCES.)
- f ES CONTINUA Y DERIVABLE EN $\mathbb{R}$, ENTONCES TAMBIÉN

[Lo es en $[a;b]$ ← continua y en $(a;b)$ ← derivable]

Así que, si nuestra suposición es cierta (que hay dos raíces distintas, a y b, entre 1 y 3), el teorema de Rolle nos asegura que existirá un valor c entre a y b (es decir, entre 1 y 3, pues $[a;b] \subset [1;3]$) que cumpla $f'(c)=0$. Veamos si podemos encontrar un c con estas características:

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 \longrightarrow \left[5x^4 - 20x^3 = 0\right]$$ ← (Lo que cumple el c buscado)

$$\Rightarrow 5x^3.(x-4)=0$$

$$5x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

← Posibles valores de c

Pero ninguno de los valores hallados está en el intervalo que tenemos:

$$\left[0\ ;\ 4 \notin [a;b] \subset [1;3]\right]$$

Entonces, no pueden ser el que buscábamos y que, según Rolle, debía existir.

Si no es así, será porque alguna de nuestras suposiciones era falsa (y no estábamos, realmente, en las condiciones del teorema); pero lo único que supusimos fue que f pudiera tener más de una raíz en $[1;3]$.

Entonces será que f tiene, a lo sumo, una raíz entre 1 y 3.

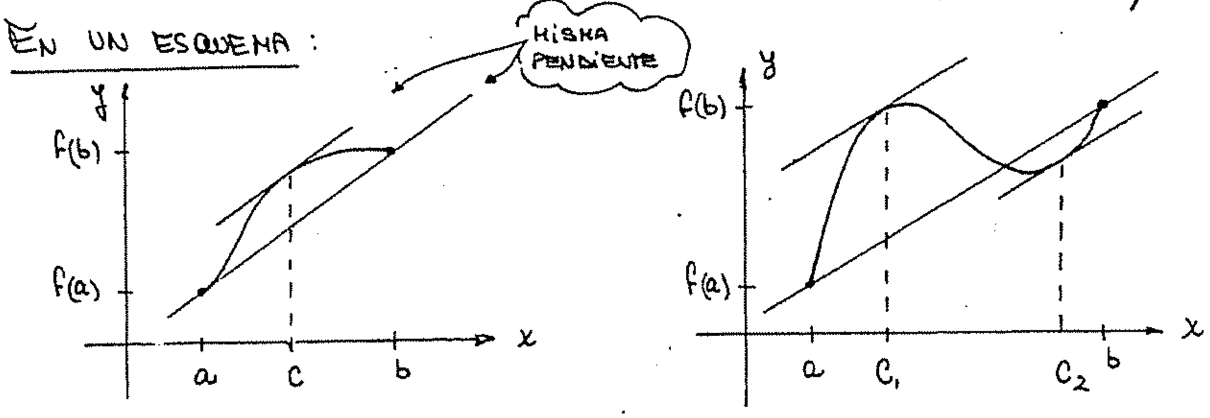
* [(2) Teorema de Lagrange] Si f es continua en $[a;b]$ y

DERIVABLE EN $(a;b)$, ENTONCES EXISTE UN NÚMERO c ENTRE a y b PARA EL QUE VALE:

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

← (PENDIENTE DE LA RECTA QUE UNE LOS PUNTOS $(a;f(a))$ Y $(b;f(b))$)

EN UN ESQUEMA:



[OTRA VEZ, C PUEDE NO SER ÚNICO.]

EJEMPLO: [PROBAR QUE $\ln(1+x) < x$] PARA $x>0$.

LLAMAMOS $f(x) = \ln(1+x)$ Y CONSIDERAMOS EL INTERVALO $[0;b]$ (CON $b>0$, CUALQUIERA); ENTONCES SE CUMPLE QUE:

$$\begin{cases} \cdot\ f \text{ ES CONTINUA EN } [0;b] \\ \cdot\ f \text{ ES DERIVABLE EN } (0;b) \end{cases}$$

[POR SERLO EN TODO SU DOMINIO $(=\mathbb{R}_{>-1})$, EN EL QUE ESTÁN INCLUIDOS LOS INTERVALOS INDICADOS.]

ENTONCES, SABEMOS POR EL TEOREMA QUE ACABAMOS DE ENUNCIAR, QUE EXISTE UN VALOR $c \in (0;b)$ QUE CUMPLE:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(0)}{b-0} = f'(c)} \qquad \boxed{\text{CON } f'(x) = \frac{1}{x+1}}$$

Y SI REEMPLAZAMOS CADA EXPRESIÓN, RESULTA:

$$\checkmark \quad \frac{\ln(1+b) - \overbrace{\ln(1)}^{0}}{b} = \frac{1}{1+c} \qquad \text{CON} \quad c \in (0; b)$$

$$\checkmark \Longrightarrow \frac{\ln(1+b)}{b} = \frac{1}{1+c} < 1$$

← PORQUE $c>0$ (SIN IMPORTAR SU VALOR EXACTO)

$$\checkmark \Longrightarrow \frac{\ln(1+b)}{b} < 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{ERA: } b>0}}}{\Longrightarrow} \ln(1+b) < b$$

Y NO HABÍAMOS PUESTO CONDICIONES SOBRE b, QUE PODÍA SER CUALQUIER VALOR POSITIVO.

ENTONCES, (PROBAMOS LO QUE QUERÍAMOS).

$$\ln(1+b) < b \quad (\text{PARA TODO } b>0)$$

← (LLAMARLO b o x ES IRRELEVANTE)

✱ (3) **TEOREMA DE CAUCHY.** Si f y g SON CONTINUAS EN $[a;b]$ Y DERIVABLES EN $(a;b)$, ENTONCES EXISTE UN NÚMERO c ENTRE a y b PARA EL CUAL VALE:

$$\boxed{[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c)}$$

$\boxed{\text{Si } g(b) \neq g(a)}$ y $\boxed{g'(c) \neq 0}$, LO ANTERIOR PUEDE ESCRIBIRSE:

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

LA PRINCIPAL APLICACIÓN DE ESTE TEOREMA ES EN LA DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE L'HÔPITAL; QUE PERMITE, EN CIERTAS CIRCUNSTANCIAS, CALCULAR LÍMITES INICIALMENTE INDETERMINADOS CON AYUDA DE LAS DERIVADAS. PERO POSTERGAMOS

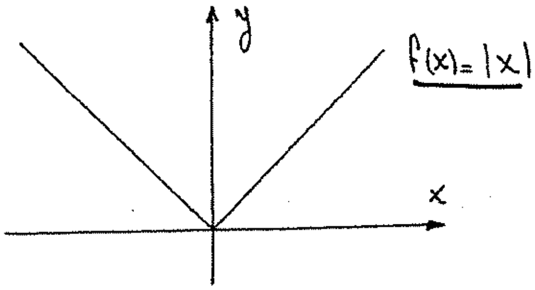
LA PRESENTACIÓN DE ESTA REGLA HASTA QUE HAYAMOS COMPLETADO LO QUE QUERÍAMOS DECIR ACERCA DEL ESTUDIO DE FUNCIONES.

EL OBJETIVO SERÁ CONOCER CARACTERÍSTICAS DESTACADAS DE UNA FUNCIÓN (CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO, EXTREMOS) A PARTIR DE SU DERIVADA. LOS SIGUIENTES RESULTADOS (QUE ENUNCIAREMOS SIN DEMOSTRACIÓN) SE PRUEBAN USANDO LOS TEOREMAS DEL VALOR MEDIO QUE ACABAMOS DE APRENDER; Y AVALAN LA RUTINA QUE LUEGO MOSTRAREMOS PARA EL ANÁLISIS DE UNA FUNCIÓN.

[•TEOREMA 1] (CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS LOCALES) SI f ESTÁ DEFINIDA SOBRE $(a;b)$ Y TIENE UN MÁXIMO (O MÍNIMO) LOCAL EN x, Y f ES DERIVABLE EN x, ENTONCES $f'(x)=0$.

NOTA: LA HIPÓTESIS DE LA DERIVABILIDAD DE f EN x ESTÁ RESALTADA PORQUE ES CENTRAL; YA QUE, SIN ELLA, NO TIENE POR QUÉ CUMPLIRSE LA CONCLUSIÓN.

ESTE ESQUEMA MUESTRA UN EJEMPLO DE ELLO:

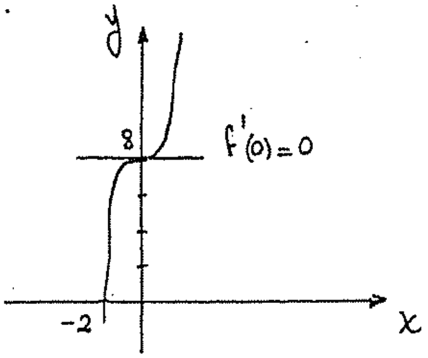


- f TIENE MÍNIMO EN $x=0$
- PERO NO ES CIERTO QUE $f'(0)=0$ (PUES: $f'(0)$ NO EXISTE)

OTRA NOTA: EL RECÍPROCO DEL TEOREMA ENUNCIADO NO ES CIERTO

COMO EJEMPLO, CONSIDERAMOS:

$$f(x) = x^3 + 8$$



PERO f NO TIENE EXTREMOS
(NI EN $x=0$, NI EN OTRO LADO)

• **TEOREMA 2.** DADA $f: A \to \mathbb{R}$, SI TIENE UN EXTREMO LOCAL O RELATIVO EN x ENTONCES SE DA UNA DE ESTAS DOS POSIBILIDADES:

- VALE $f'(x)=0$
- NO EXISTE $f'(x)$

NOTA: DE MODO QUE PARA UNA FUNCIÓN CUALQUIERA, LOS "CANDIDATOS" A EXTREMOS (SE LLAMAN PUNTOS CRÍTICOS) SE ENCUENTRAN BUSCANDO LAS x QUE CUMPLEN QUE:

- $f'(x)=0$
- NO EXISTE $f'(x)$

SI f ESTÁ DEFINIDA EN $[a;b]$, LOS VALORES a y b TAMBIÉN SON "SOSPECHOSOS" DE SER EXTREMOS Y DEBEN ANALIZARSE.

• **TEOREMA 3**

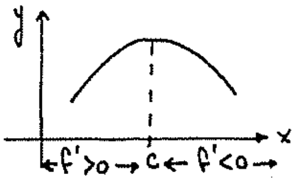
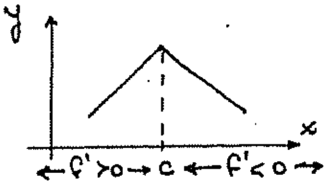
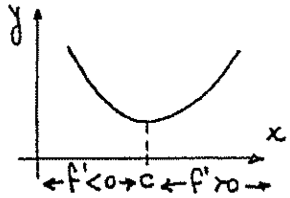
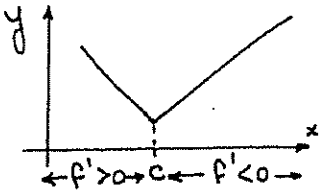
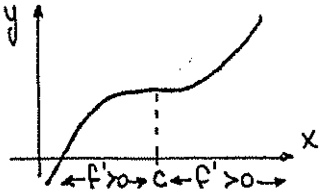
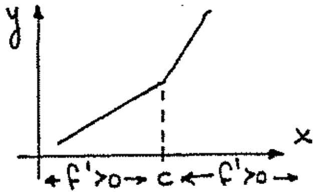
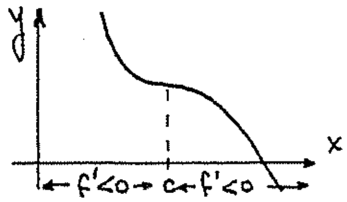
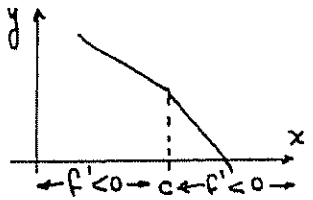
SI $f'(x)>0$ PARA TODO x DE UN INTERVALO, ENTONCES f ES CRECIENTE EN EL INTERVALO

SI $f'(x)<0$ PARA TODO x DE UN INTERVALO, ENTONCES f ES DECRECIENTE EN EL INTERVALO.

COMBINANDO LOS DOS ÚLTIMOS TEOREMAS CON UN POCO DE SENTIDO COMÚN PODEMOS DEDUCIR UN CRITERIO CON EL CUAL ANALIZAR SI UN PUNTO CRÍTICO ES EXTREMO (MÁXIMO O MÍNIMO) O NO. PARA DISTINGUIRLO DE OTRO QUE VEREMOS DESPUÉS, Y PORQUE SÓLO USAMOS f' EN EL ANÁLISIS, LO LLAMAMOS:

* [CRITERIO DE LA DERIVADA PRIMERA.]

f UNA FUNCIÓN Y $x=c$ UN PUNTO CRÍTICO ; ENTONCES PUEDE DARSE :

SITUACIÓN		CONSECUENCIA
$f'(c)=0$	$\nexists f'(c)$	
✓ 		MÁXIMO EN $x=C$
✓ 		MÍNIMO EN $x=C$
		NO HAY EXTREMO EN $x=C$
		

• TEOREMA 4. (CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA).

SUPONGAMOS $f'(c)=0$, ENTONCES:

- SI $f''(c) > 0 \Rightarrow$ f TIENE MÍNIMO RELATIVO EN $x = c$
- SI $f''(c) < 0 \Rightarrow$ f TIENE MÁXIMO RELATIVO EN $x = c$

NOTA: SI RESULTA QUE $f''(c) = 0$ ENTONCES EL TEOREMA NADA NOS DICE Y PARA ANALIZAR EL PUNTO $x = c$ DEBEREMOS USAR LA DERIVADA PRIMERA.

VEAMOS, EN UN EJEMPLO, CÓMO USAR TODO LO ANTERIOR:

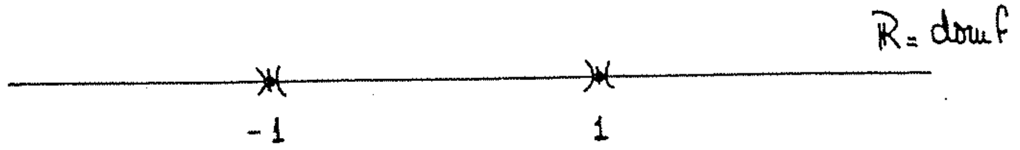
$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^3 - 3x}$

- f ES CONTINUA Y DERIVABLE EN $\mathbb{R}$.
- ENTONCES, LOS ÚNICOS PUNTOS CRÍTICOS CUMPLIRÁN $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Longrightarrow 3x^2 - 3 = 0$ PARA $x = 1$ y $x = -1$

- f' ES A SU VEZ UNA FUNCIÓN CONTINUA DE LA QUE ACABAMOS DE CALCULAR LAS RAÍCES, ENTONCES PODEMOS APLICARLE EL TEOREMA DE BOLZANO PARA VER SU SIGNO EN CADA INTERVALO ENTRE RAÍCES (PUNTOS CRÍTICOS DE f)

UN ESQUEMA AYUDA A ORDENAR LA SITUACIÓN:



f'	>0	0	<0	0	>0
f	CRECE	2	DECRECE	-2	CRECE
		MÁX.		MÍN.	

CON LO CALCULADO, PODEMOS TRAZAR UN GRÁFICO APROXIMADO DE f. PARA ESTO ES ÚTIL, Y POR ESO LO AGREGAMOS AL ESQUEMA, CONOCER

[LOS VALORES DE $f(1)=-2$ Y $f(-1)=2$].

TAMBIÉN ES ÚTIL Y, ESTA VEZ, SENCILLO (NO SIEMPRE SERÁ ASÍ)

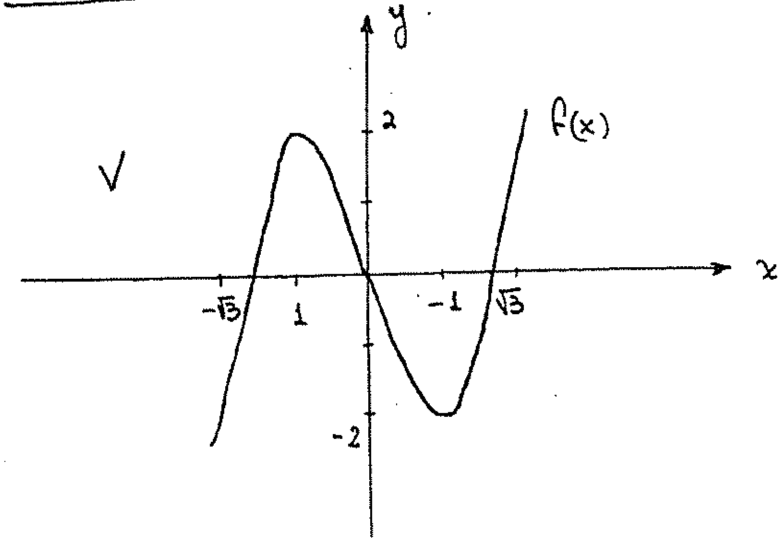
[CALCULAR LOS CEROS DE f:]

$$\boxed{f(x)=0} \Rightarrow \boxed{x^3-3x=0} \Rightarrow \boxed{x.(x^2-3)=0} \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$$

Y TAMBIÉN PODÉS CONTROLAR QUE:

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

ENTONCES, NUESTRO GRÁFICO SERÁ:



EL SIGUIENTE EJEMPLO MUESTRA QUE, EN LA DETERMINACIÓN DEL SIGNO DE f' USAMOS MÁS VALORES QUE LOS PUNTOS CRÍTICOS DE f PARA SEPARAR INTERVALOS:

$$f: \mathbb{R}-\{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$$

- f CONTINUA EN SU DOMINIO, NO EN ℝ. (LO MISMO VALE PARA "DERIVABLE").
- BUSCAMOS PUNTOS CRÍTICOS; OTRA VEZ, SERÁN SÓLO DE LA

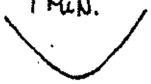
FORMA $f'(x)=0$:

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{x.(x-2)}{(x-1)^2} \Longrightarrow \frac{x.(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow x=0 \\ \searrow x=2 \end{matrix}$$

• ANALIZAMOS EL SIGNO DE f' Y DECIDIMOS SOBRE f:

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}-\{1\}$

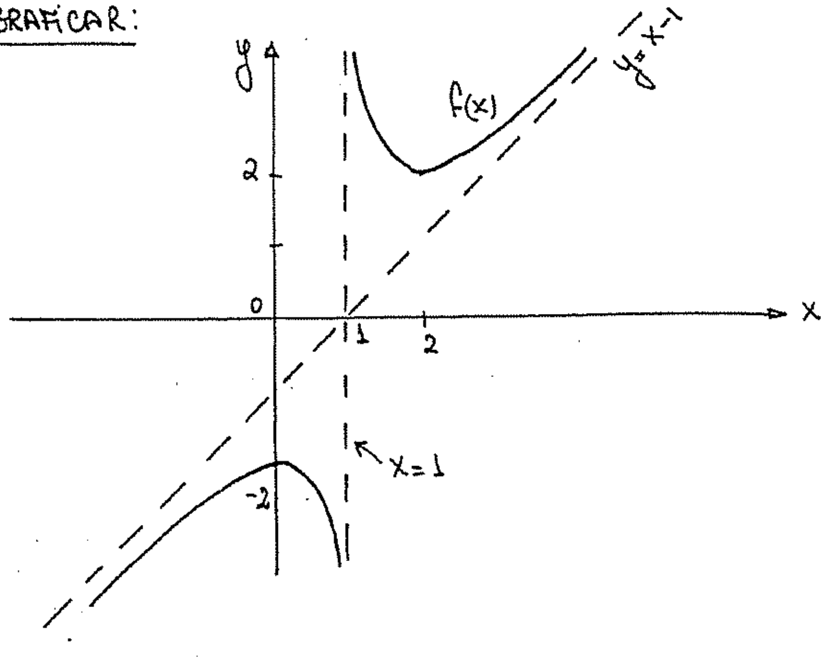
		0		1		2	
f'	>0	0	<0	$\nexists$	<0	0	>0
f	CRECE	-2	DECRECE	$\nexists$	DECRECE	2	CRECE
		MÁX.		$\boxed{\text{AV.}}$		MÍN.	



$\uparrow$ PUES:

- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

Y PODEMOS GRAFICAR:



FINALMENTE, UN ÚLTIMO EJEMPLO EN EL QUE VEREMOS EXTREMOS ANGULOSOS (TODOS LOS QUE SE PRESENTARON HASTA AHORA FUERON "SUAVES")

$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ $\boxed{f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{3}x^2 = x^{2/3} - \frac{1}{3}x^2}$

✓ $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} - \frac{2}{3}x \implies f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{3}x$

✓ VEMOS QUE f' NO PUEDE CALCULARSE EN $x=0$, ASÍ QUE ESTE SERÁ UNO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS DE f.

✓ Y AL PLANTEAR $f'(x)=0$ Y DESPEJAR, SALEN $x=1$ y $x=-1$ TAMBIÉN PUNTOS CRÍTICOS

$\mathbb{R} = \text{dom} f$

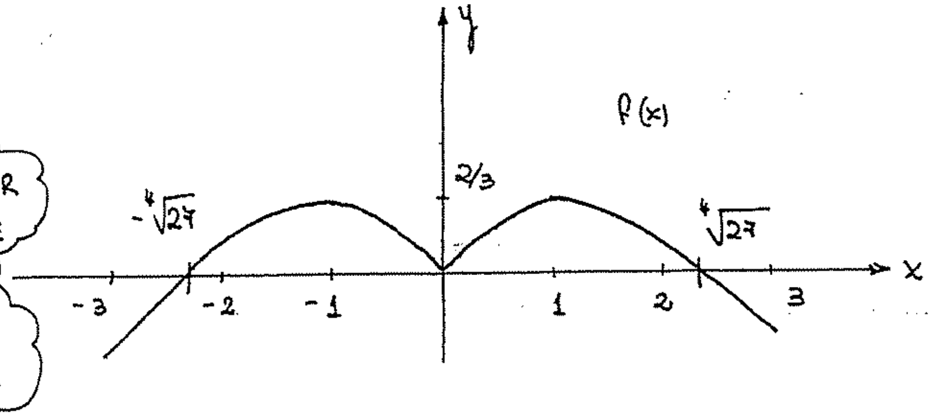
✓

		−1		0		1	
f'	>0	0	<0	$\nexists$	>0	0	<0
f	CRECE	$\frac{2}{3}$	DECRECE	0	CRECE	$\frac{2}{3}$	DECRECE
		MÁX.		MÍN.		MÁX.	

"EN PICO", PUES $\nexists f'(0)$

Y PODEMOS GRAFICAR:

SIRVE BUSCAR LAS RAÍCES DE f, CUANDO SON FÁCILES DE CALCULAR



A MENUDO SERÁ INTERESANTE CONOCER CÓMO SE CURVA EL GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN Y SI EXISTEN PUNTOS EN LOS QUE CAMBIE EL

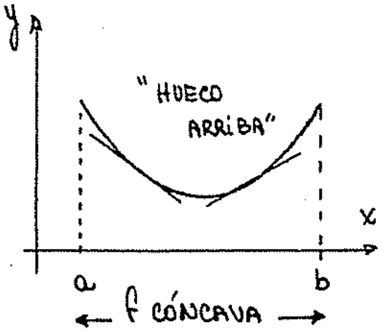
SENTIDO DE CURVATURA. ANTES DE DECIR CÓMO ESTUDIARLOS, DEFINAMOS ESTOS RASGOS:

DEFINICIONES.

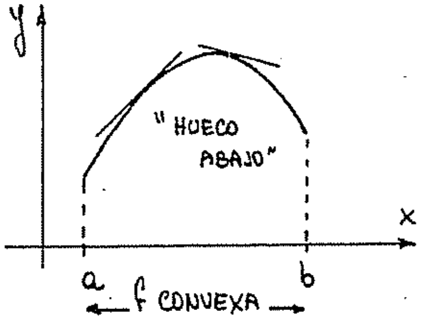
1) LLAMAMOS INTERVALO DE CONCAVIDAD DE UNA FUNCIÓN A AQUEL EN QUE DICHA FUNCIÓN QUEDA POR ENCIMA DE SUS TANGENTES.
(Y DECIMOS QUE LA FUNCIÓN ES CÓNCAVA EN ÉL)

2) LLAMAMOS INTERVALO DE CONVEXIDAD DE UNA FUNCIÓN A AQUEL EN QUE LA FUNCIÓN QUEDA POR DEBAJO DE SUS TANGENTES
(Y DECIMOS QUE LA FUNCIÓN ES CONVEXA EN ÉL)

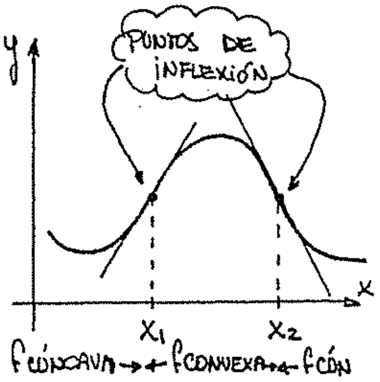
3) LLAMAMOS PUNTO DE INFLEXIÓN A AQUEL EN QUE UNA CURVA PASA DE CÓNCAVA A CONVEXA, O AL REVÉS



(EL GRÁFICO ESTÁ ARRIBA DE LAS TANGENTES)



(EL GRÁFICO ESTÁ ABAJO DE LAS TANGENTES)



(EL GRÁFICO CORTA A SU TANGENTE EN LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN)

Y USAREMOS LA DERIVADA SEGUNDA PARA ESTUDIAR LA CONCAVIDAD DE LA FUNCIÓN, APROVECHANDO EL SIGUIENTE RESULTADO.

TEOREMA.

- SI $f''(x) > 0$ EN TODO UN INTERVALO, ENTONCES f ES CÓNCAVA EN ESE INTERVALO.

[• Si $f''(x) < 0$ EN TODO UN INTERVALO, ENTONCES f ES CONVEXA EN ESE INTERVALO.]

CONOCIENDO LA CONCAVIDAD, PODEMOS DECIDIR SI HAY INFLEXIÓN O NO.

EJEMPLO: $\boxed{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$ $\boxed{f(x) = x^6 - 10x^4}$

- f ES CONTINUA Y DERIVABLE EN $\mathbb{R}$.
- $f'(x) = 6x^5 - 40x^3$ ← CON ELLA PODEMOS HACER EL MISMO ANÁLISIS QUE EN EJEMPLOS ANTERIORES (ESTO TE LO DEJO).
- $f''(x) = 30x^4 - 120x^2$

COMO QUEREMOS ANALIZAR EL SIGNO DE f'', USAREMOS EL TEOREMA DE BOLZANO (CON f'') Y BUSCAMOS, PARA EMPEZAR, SUS CEROS:

$$f'(x) = 30x^4 - 120x^2 \longrightarrow 30x^4 - 120x^2 = 0$$

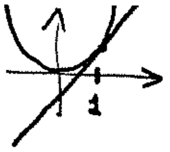
$$\Longrightarrow 30x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

← SEPARAN LOS INTERVALOS EN QUE ANALIZAR EL SIGNO DE f''

		-2		0		2	
f''	>0	0	<0	0	<0	0	>0
f	CÓNCAVA	-96	CONVEXA	0	CONVEXA	-96	CÓNCAVA

QUEDA PARA COMPLETAR, EL TRAZADO DE UN GRÁFICO QUE MUESTRE LO CALCULADO (INCLUIDOS CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO Y EXTREMOS).

$x^m = (m-1)\,x.$ $f(x) = x^2$



ANTICIPAMOS, AL ENUNCIAR LOS TEOREMAS DEL VALOR MEDIO, QUE UNO DE ELLOS, EL DE CAUCHY, PERMITÍA PROBAR LA REGLA DE L'HÔPITAL: DIGAMOS CUÁL ES Y VEAMOS PARA QUÉ SIRVE.

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

√ TEOREMA. (REGLA DE L'HÔPITAL)

DADAS f Y g FUNCIONES CONTINUAS QUE CUMPLEN, PARA UN CIERTO VALOR a DE LOS DOMINIOS DE AMBAS:

- $f(a) = g(a) = 0$
- $g(x) \neq 0$ EN LAS CERCANÍAS DE a (EXCEPTUÁNDOLO)
- $f'(x)$ Y $g'(x)$ EXISTEN Y NO SE ANULAN SIMULTÁNEAMENTE EN UN ENTORNO DE a (CON SU POSIBLE EXCEPCIÓN)
- EXISTE EL $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, QUE PUEDE SER FINITO O INFINITO.

ENTONCES, SE VERIFICA: $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

EJEMPLOS:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ $\longrightarrow$ $a = 0$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = x$

- VERIFICAMOS QUE ESTAMOS EN LAS CONDICIONES DEL TEOREMA:
  - $f(0) = g(0) = 0$
  - $g(x) \neq 0$ SI $x \neq 0 = a$
  - $f'(x) = \cos x$ Y $g'(x) = 1$ EXISTEN Y NO VALEN CERO. CERCA DE $x=0$.
  - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x) = 1$

- ENTONCES, APLICAMOS EL RESULTADO DEL TEOREMA AL AFIRMAR:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

(SI YA CALCULASTE ANTES ESTE LÍMITE, SIN DERIVADAS, RECORDARÁS HABER TRABAJADO BASTANTE MÁS).

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}\longrightarrow a=0,\ f(x)=\operatorname{tg} x-x,\ g(x)=x^3$

- VERIFICAMOS QUE ESTAMOS EN LAS CONDICIONES DEL TEOREMA.
  - $f(0)=\operatorname{tg} 0-0=0$ y $g(0)=0$
  - $g(x)=x^3\neq 0$ PARA $x\neq 0$
  - $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$ y $g'(x)=3x^2$ NO VALEN CERO

    SI NO ES EN $x=0=a$ ($\rightarrow$ NO SE ANULAN EN SU CERCANÍA)
  - $$\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg} x-x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}\underset{\boxed{\text{RESTAR}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{3x^2}=$$

$$\underset{\boxed{\text{DIVIDIR}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cdot\cos^2 x}\underset{\boxed{1-\cos^2 x=\operatorname{sen}^2 x}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{3x^2\cdot\cos^2 x}\underset{\boxed{\text{ACOMODAR}}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}_{\to 1}=\frac{1}{3}$$

- Y YA PODEMOS AFIRMAR QUE:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg} x-x)'}{(x^3)'}=\frac{1}{3}$$

ALGUNAS VECES SE HACE NECESARIO APLICAR REITERADAMENTE LA REGLA :

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen}x}{x^3} \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{1º APLICACIÓN DE LA REGLA}}}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} \leftarrow \begin{cases}\text{TAMBIÉN INDETERMINADO}\\ f(x)=1-\cos x,\ g(x)=3x^2\end{cases}$

- VERIFICAMOS QUE VUELVEN A CUMPLIRSE LAS CONDICIONES:
  - $f(0) = 0 = g(0)$
  - $g(x) = 3x^2 \neq 0$ PARA $x \neq 0 = a$
  - $f'(x) = \operatorname{sen}x$ y $g'(x) = 6x$ EXISTEN Y NO VALEN CERO SI $x \neq 0$.
  - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{6} \cdot \underbrace{\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}}_{\to 1} = \dfrac{1}{6}$

- ENTONCES YA PODEMOS AFIRMAR QUE:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3} \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{1º APLICACIÓN DE LA REGLA}}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{2º APLICACIÓN DE LA REGLA}}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{6x} = \frac{1}{6}$$

OTRAS VECES, NO PODEMOS APLICAR ESTA REGLA PORQUE ALGUNA DE SUS HIPÓTESIS NO SE CUMPLE; POR EJEMPLO, NO EXISTE $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. ESTO NO ASEGURA QUE NO HAYA $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, COMO VEMOS EN EL PRÓXIMO EJEMPLO:

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}x}$

SI QUEREMOS APLICAR LA REGLA, CALCULAREMOS:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)'}{(\operatorname{sen}x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

PERO ESTE LÍMITE NO EXISTE (PUES: $\cos\frac{1}{x}$ NO TIENE LÍMITE PARA $x\to 0$)

Y SIN EMBARGO:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{x}{\operatorname{sen}x}}_{\searrow 1}\cdot\underbrace{x}_{\searrow 0}\cdot\overbrace{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}^{\text{ACOTADO}}=0$$

GENERALIZACIONES DE LA REGLA DE L'HÔPITAL.

LA REGLA TAMBIÉN ES VÁLIDA (ASÍ PUEDE PROBARSE):

1) CUANDO EL LÍMITE SE CALCULA PARA $x\to\infty$.

EJEMPLO:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}\underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{REGLA}}}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}=$$

(VERIFICÁ QUE ES LEGÍTIMO APLICARLA)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overset{\to 1}{\cos\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}}}{\underset{\searrow 1}{1+\underset{\searrow 0}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}}}=1$$

2) CUANDO LA INDETERMINACIÓN NO ES $\frac{0}{0}$ SINO $\frac{\infty}{\infty}$.

EJEMPLO:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} \Rightarrow \quad f(x) = \ln^2 x \;,\; g(x) = x$$

- VERIFICAMOS EL CUMPLIMIENTO DE LAS CONDICIONES:
  - LA PRIMERA CONDICIÓN $\left(f(a) = g(a) = 0 \right)$ NO ES APLICABLE AQUÍ PERO SÍ SE CUMPLE $\ln^2 x \to +\infty$ y $x \to +\infty$ si $x \to +\infty$
  - $g(x) = x \neq 0$ PARA $x \neq 0$
  - $f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$ y $g'(x) = 1$ NO VALEN CERO CUANDO X ES GRANDE.
  - $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln^2 x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x \cdot 1/x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x}$

CAEMOS EN UN LÍMITE QUE VUELVE A PRESENTAR LA INDETERMINACIÓN ∞/∞ Y ADMITE UNA NUEVA APLICACIÓN DE LA REGLA DE L'HÔPITAL.
TE DEJO EL TRABAJO DE PROBAR QUE LAS CONDICIONES PREVIAS (PARA NUEVAS $f(x)$ y $g(x)$) SE CUMPLEN, Y QUE VALE:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

ENTONCES, RESULTA:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{1º USO DE LA REGLA}}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{2º USO DE LA REGLA}}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

PARA TERMINAR, HABLAREMOS DE UNA ÚLTIMA APLICACIÓN DE LA DERIVADA.

SE TRATA DE HALLAR UNA FUNCIÓN POLINÓMICA QUE APROXIME

A LA FUNCIÓN DADA EN UN ENTORNO DE ALGÚN PUNTO.

YA HICIMOS ALGO PARECIDO CUANDO BUSCAMOS UNA APROXIMACIÓN LINEAL VALIÉNDONOS DE LA RECTA TANGENTE. AHORA VAMOS A MEJORAR LA APROXIMACIÓN LOGRADA AL AUMENTAR EL GRADO DE LA FUNCIÓN A UTILIZAR; ES DECIR, USAREMOS CUADRÁTICAS, CÚBICAS, ... : EL GRADO PODRÁ DETERMINARSE DE ANTEMANO Y, CON ESTO, TENDREMOS CONTROLADO EL ERROR COMETIDO.

PRECISEMOS QUÉ TIPO DE APROXIMACIÓN BUSCAMOS.

<u>DEFINICIÓN</u>. DADAS DOS FUNCIONES f y g, CUYOS GRÁFICOS SE CORTAN EN UN PUNTO DE ABSCISA $x=a$, DECIMOS QUE ESTAS CURVAS TIENEN <u>ORDEN DE CONTACTO n</u> EN ESE PUNTO SI SE CUMPLE QUE:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0$$

SI f y g SON DERIVABLES HASTA EL ORDEN $n+1$, LA DEFINICIÓN DADA ES EQUIVALENTE A DECIR:

$$f(a) = g(a) \quad , \quad f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) \quad \text{PARA } k \leq n \quad \text{PERO } f^{(n+1)}(a) \neq g^{(n+1)}(a)$$

ES DECIR, TODAS LAS DERIVADAS DE f y g COINCIDEN, EN $x=a$, HASTA LA DE ORDEN n INCLUSIVE, PERO YA EN EL ORDEN $n+1$ DE DERIVACIÓN SON DIFERENTES.

AHORA YA PODEMOS ENUNCIAR EL TEOREMA QUE JUSTIFICARÁ NUESTRO TRABAJO POSTERIOR.

TEOREMA DE TAYLOR.

SEA f UNA FUNCIÓN CUALQUIERA TAL QUE EXISTEN TODAS LAS DERIVADAS DE f EN $x=a$ HASTA EL ORDEN n INCLUSIVE; ENTONCES, EXISTE UN ÚNICO POLINOMIO DE GRADO $\leq n$ QUE TIENE CON f UN ORDEN DE CONTACTO POR LO MENOS IGUAL A n.

ESE POLINOMIO ES EL LLAMADO POLINOMIO DE TAYLOR ASOCIADO A f EN $x=a$, SE NOTA $P_{n,a}$ Y SE HALLA DEL SIGUIENTE MODO:

$$P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n$$

DONDE LOS COEFICIENTES SON:

$$a_0 = f(a) \quad \text{Y} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad \text{PARA} \quad 1 \leq k \leq n$$

(CUANDO EL DESARROLLO SE REALIZA PARA $x=0$, SE LLAMA POLINOMIO DE Mc. LAURIN).

VEAMOS ALGUNOS EJEMPLOS:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = e^x$ HALLAR SU POLINOMIO DE TAYLOR EN $x=0$ (O DE Mc. LAURIN) DE ORDEN 3.

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad$ Y, EN GENERAL, $f^{(k)}(x) = e^x$ PARA CUALQUIER k

ENTONCES:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 1$$

Y PODEMOS ARMAR YA EL POLINOMIO BUSCADO:

$$P_{3,0}(x) = a_0 + a_1 . x + a_2 . x^2 + a_3 . x^3$$

EL MÁXIMO GRADO ↗ ↖ EL X EN QUE DESARROLLAMOS

$$P_{3,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} . x + \frac{f''(0)}{2!} . x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} . x^3$$

$$\Rightarrow P_{3,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{6} x^3$$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ HALLAR $P_{4,0}(x)$.

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$

Y, EVALUADAS FUNCIÓN Y DERIVADAS EN $x=0$, DAN:

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$

ENTONCES:

$$P_{4,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} . x + \frac{f''(0)}{2!} . x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} . x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} . x^4$$

$\Rightarrow P_{4,0}(x) = x - \frac{x^3}{6}$ ← OBSERVÁ QUE SU GRADO ESTA VEZ ES MENOR QUE $N=4$.

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ HALLAR $P_{2,1}(x)$.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \quad y \quad f''(x) = \frac{2.(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

AL EVALUAR FUNCIÓN Y DERIVADAS EN $x=1$, TENEMOS:

$$f(1) = \frac{1}{2} \qquad f'(1) = -\frac{1}{2} \qquad f''(1) = \frac{1}{2}$$

$$P_{2,1}(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}.(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}.(x-1)^2$$

$$\Longrightarrow P_{2,1}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.(x-1) + \frac{1}{4}.(x-1)^2$$

EN MUCHOS CASOS, ES FÁCIL PREDECIR CÓMO SERÁ LA DERIVADA m-ÉSIMA DE UNA FUNCIÓN Y ENTONCES HALLAR SU POLINOMIO DE TAYLOR DE ORDEN m (GENÉRICO) EN $x=a$ DADO.

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=e^x$ $\quad$ HALLAR $P_{n,0}(x)$.

TODAS LAS DERIVADAS DE f, SIN IMPORTAR EL ORDEN, COINCIDEN CON f. ENTONCES:

$$f^{(k)}(x) = e^x \quad \text{PARA CUALQUIER } k\in\mathbb{N} \quad \left(y \ f^{(k)}(0)=1\right)$$

<u>ENTONCES</u>:

$$P_{n,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}.x + \frac{f''(0)}{2!}.x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.x^n$$

$$\longrightarrow P_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}.x^n$$

5) $f:\mathbb{R}_{>-1}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\ln(1+x)$ $\quad$ HALLAR $P_{n,0}(x)$

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \\ f''(x) &= -1.(1+x)^{-2} \\ f'''(x) &= (-1).(-2).(1+x)^{-3} \\ f^{(4)}(x) &= (-1)(-2)(-3).(1+x)^{-4} \end{aligned}\right\} \to$$

<u>EN GENERAL</u>:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}.(n-1)!\ (1+x)^{-n}$$

$$\Longrightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}.(n-1)!$$

ENTONCES:

$$P_{n,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

$$\Longrightarrow P_{n,0}(x) = 0 + x + \frac{(-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{(-1)^n \cdot (n-1)!}{n!} \cdot x^n$$

$$\Longrightarrow P_{n,0}(x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{n} \cdot x^n$$

EN ALGUNOS CASOS, PODEMOS VALERNOS DE PROPIEDADES, EN LUGAR DEL CÁLCULO DIRECTO, PARA HALLAR EL POLINOMIO DE TAYLOR ASOCIADO A ALGUNA FUNCIÓN. ENUNCIEMOS ESAS PROPIEDADES Y VEAMOS CÓMO USARLAS:

PROPIEDADES.

(I) **DERIVACIÓN**: SI SE CUMPLE QUE $f(x) = g'(x)$

ENTONCES $$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(POLINOMIO} \\ \text{ASOCIADO A } f)}}{P_{n-1,a,f}}(x) = \Big[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(POLINOMIO} \\ \text{ASOCIADO A } g)}}{P_{n,a,g}}(x)\Big]'$$

EJEMPLO: HALLAR EL POLINOMIO DE ORDEN n EN $X=0$ ASOCIADO A $f(x) = \frac{1}{1+x}$ $(x \neq -1)$

SI OBSERVAMOS QUE $f(x) = \frac{1}{1+x} = \Big[\underbrace{\ln(1+x)}_{g(x)}\Big]'$ PODEMOS USAR EL POLINOMIO QUE ACABAMOS DE ENCONTRAR, Y DERIVARLO PARA HALLAR EL QUE NOS INTERESA; PUES VALDRÁ:

$$P_{n-1,0,f}(x) = \Big[P_{n,0,g}(x)\Big]' \qquad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{1+x} \\ g(x) = \ln(1+x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{n-1,0,f}(x) = \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{n}\cdot x^n\right]'$$

(USAMOS EL RESULTADO DEL EJ.5, PÁG. 55)

$$\Rightarrow P_{n-1,0,f}(x) = 1 - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x + \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}x^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}\,x^{n-1}$$

$$P_{n-1,0,f}(x) = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n\cdot x^{n-1}$$

QUEREMOS QUE SEA DE ORDEN n

ACOMODAMOS EL ORDEN PARA QUE QUEDE COMO LO BUSCAMOS, AGREGANDO, CON EL MISMO CRITERIO DE "CONSTRUCCIÓN", EL TÉRMINO QUE FALTA:

$$P_{n,0,f}(x) = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n\cdot x^{n-1} + (-1)^{n+1}\cdot x^n$$

(II) <u>SUSTITUCIÓN</u>: SI SE CUMPLE QUE $f(x) = g(h(x))$ CON $h(x) = \alpha x + \beta$ PARA α y β CONSTANTES, ENTONCES VALE

$$P_{n,\frac{a-\beta}{\alpha},f}(x) = P_{n,a,g}(h(x))$$

<u>EJEMPLO</u>: HALLAR EL POLINOMIO DE TAYLOR DE ORDEN n, EN $x=0$, PARA $f(x) = e^{-x}$

ESTAMOS EN LAS CONDICIONES ANTERIORES, CON $g(x) = e^x$ y $h(x) = -x$ $(\Rightarrow \alpha = -1, \beta = 0)$. Y COMO QUEREMOS QUE EL POLINOMIO ASOCIADO A f NOS QUEDE DESARROLLADO EN $x=0$, VEAMOS QUÉ a USAR EN EL DESARROLLO DEL POLINOMIO

ASOCIADO A g - ERA:

$$P_{n,\underbrace{\frac{a-\beta}{\alpha}}_{\substack{\downarrow\\0}},f}(x) = P_{n,\overset{\boxed{¿?}}{a},g}(h(x))$$

$$0 \Longrightarrow \text{DESPEJAMOS } a \rightarrow \boxed{¿?}$$

$$\frac{a-\beta}{\alpha} \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\begin{array}{l}\alpha=-1\\ \beta=0\end{array}}}}{=} 0 \Longrightarrow \frac{a}{-1}=0 \Longrightarrow \boxed{a=0}$$

PERO EL POLINOMIO EN $x=0$ ASOCIADO A $g(x)=e^x$ LO BUSCAMOS EN EL EJEMPLO 4 (PÁG. 55):

$$P_{n,0,g}(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$\Longrightarrow P_{n,0,g}\Big(\underbrace{h(x)}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\begin{array}{l}\text{CAMBIAR}\\ \text{TODAS LAS } x\\ \text{POR } h(x)=-x\end{array}}}}\Big) = 1 + (-x) + \frac{1}{2!}(-x)^2 + \frac{1}{3!}(-x)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(-x)^n$$

ENTONCES, ACOMODANDO SIGNOS:

$$P_{n,0,f}(x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

(III) <u>LINEALIDAD</u>: SI SE CUMPLE QUE $f(x) = \alpha . g(x) + \beta . h(x)$ PARA α y β CONSTANTES, ENTONCES VALE

$$P_{n,a,f}(x) = \alpha . P_{n,a,g}(x) + \beta . P_{n,a,h}(x)$$

<u>EJEMPLO</u>: HALLAR EL POLINOMIO DE TAYLOR DE ORDEN n EN $x=0$ PARA $f(x) = \mathrm{sh}\, x$

ESTAMOS EN CONDICIONES DE USAR LA PROPIEDAD, SI RECORDAMOS QUE:

$$f(x) = \text{sh}\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \underset{\underset{\alpha}{\uparrow}}{\frac{1}{2}} \cdot \underset{\underset{g(x)}{\uparrow}}{e^{x}} + \underset{\underset{\beta}{\uparrow}}{\left(-\frac{1}{2}\right)} \cdot \underset{\underset{h(x)}{\uparrow}}{e^{-x}}$$

ENTONCES, APROVECHANDO QUE TENEMOS CALCULADOS LOS POLINOMIOS ASOCIADOS A e^{x} y e^{-x}, SERÁ:

$$P_{n,0,f}(x) = \alpha \cdot P_{n,0,}(x) + \beta \cdot P_{n,0,h}(x)$$

$$\Rightarrow P_{n,0,f}(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^{2} + \dots + \frac{1}{n!}x^{n}\right) +$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^{2} + \dots + \frac{(-1)^{n}}{n!} \cdot x^{n}\right) = \swarrow \boxed{\text{FACTOR COMÚN } \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[1 + x + \frac{1}{2!}x^{2} + \dots + \frac{1}{n!}x^{n} - \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^{2} + \dots + \frac{(-1)^{n}}{n!}x^{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[2x + 2 \cdot \frac{1}{3!} \cdot x^{3} + \dots + \frac{1}{n!}x^{n}\left(1 - (-1)^{n}\right)\right]$$

$$\Rightarrow P_{n,0,f}(x) = x + \frac{1}{3!}x^{3} + \dots + \frac{1}{2.(n!)} \cdot x^{n} \left(\underbrace{1 - (-1)^{n}}_{\substack{\text{VALE 0 SI } n \text{ ES PAR} \\ \text{VALE 2 SI } n \text{ ES IMPAR}}}\right)$$

NOTA: HAY UNA PROPIEDAD MÁS, RELACIONADA CON LA INTEGRACIÓN. PERO COMO ESTA OPERACIÓN SERÁ TRATADA RECIÉN EN LA PRÓXIMA UNIDAD, CONSIDERO QUE NO TIENE SENTIDO ENUNCIAR LA PROPIEDAD AHORA.

EL PRÓXIMO TEOREMA JUSTIFICARÁ QUE HAYAMOS PRESENTADO LOS

POLINOMIOS DE TAYLOR CON LA INTENCIÓN DE USARLOS PARA APROXIMAR A LA FUNCIÓN A LA QUE ESTÁN ASOCIADOS.

TEOREMA. SI f ES UNA FUNCIÓN, $P_{n,a}(x)$ ES SU POLINOMIO DE TAYLOR EN $x=a$ Y LLAMAMOS RESTO $R_{n,a}(x)$ A LA EXPRESIÓN QUE VERIFICA:

$$f(x)=P_{n,a}(x)+R_{n,a}(x)$$

ENTONCES SE CUMPLE: $\lim\limits_{x\to a}\left[R_{n,a}(x)\right]=0$

ES DECIR: $f(x)\approx P_{n,a}(x)$ CUANDO $x\approx a$

ASÍ, POR EJEMPLO, SI QUEREMOS ESTIMAR $e=e^1$ PODEMOS USAR EL POLINOMIO DEL EJEMPLO 1 (PÁG. 53):

$$P_{n,0}(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}\cdot x^3 \qquad \text{CON } x=1$$

PUES:

$$e=f(1)\approx P_{n,0}(1)=1+1+\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{1}{6}\cdot 1^3=\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow e\approx\frac{8}{3}$$

AHORA, ¿QUÉ TAN BUENA SERÁ ESTA APROXIMACIÓN?

PARA DECIDIRLO, NECESITAMOS TRABAJAR CON EL RESTO. HAY DISTINTAS ESCRITURAS PARA $R_{n,a}(x)$; LA QUE USAREMOS SE DEBE A LAGRANGE:

$$R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$$ DONDE t ES ALGÚN VALOR ENTRE x Y a.

(OBSERVÁ QUE SI EN LUGAR DE t HUBIÉRAMOS ESCRITO a, TENDRÍAMOS EL ÚLTIMO TÉRMINO EN EL DESARROLLO DE $P_{n+1,a}(x)$)

ENTONCES, SIGUIENDO CON NUESTRA IDEA DE APROXIMAR e (YA ENCONTRAMOS: $e \approx 8/3$), SI QUEREMOS EVALUAR EL ERROR COMETIDO, ESCRIBIMOS:

$$\text{(ORDEN 3)}\rightarrow R_{3,0}(x) = \frac{f^{(4)}(t)}{4!}\cdot x^4 \qquad \text{PARA } x=1 \text{ y } t \in (\underset{\boxed{a}}{0};\underset{\boxed{x}}{1})$$

$$\underset{\boxed{f^{(4)}(t)=e^t}}{\Rightarrow} \quad R_{3,0}(1) = \frac{e^t}{24} \qquad \text{PARA } t \in (0;1)$$

Y AHORA OBSERVAMOS QUE SI t ESTÁ ENTRE 0 Y 1, ENTONCES $e^t < 4$:

$$R_{3,0}(1) = \frac{e^t}{24} < \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \leftarrow \boxed{\text{COTA PARA EL ERROR COMETIDO AL DECIR: } e \approx 8/3}$$

EN GENERAL, EL CAMINO QUE SE SIGUE ES EL CONTRARIO: SE ESTABLECE PRIMERO CUÁL ES EL ERROR MÁXIMO QUE SE VA A TOLERAR Y CON ESTE DATO SE DETERMINA DE QUÉ ORDEN USAR EL POLINOMIO PARA LOGRAR UNA APROXIMACIÓN LO BASTANTE BUENA.

ASÍ, POR EJEMPLO, SI QUEREMOS DETERMINAR e CON TRES CIFRAS DECIMALES EXACTAS, PEDIREMOS:

$$|R_{n,0}(x)| < 10^{-4} \leftarrow \boxed{\text{MÁXIMO ERROR ADMITIDO}}$$

("SI ME EQUIVOCO, ES RECIÉN EN LA 4º CIFRA DECIMAL")

ES DECIR, USANDO LA ESCRITURA DEL RESTO :

$$|R_{n,0}(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(t)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| \underset{\substack{\uparrow \\ f^{(n)}(t)=e^{t}}}{=} \left| \frac{e^{t}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| \qquad \text{PARA} \begin{cases} x=1 \\ t\in(0;1) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow |R_{n,0}(\;)| \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{x^{n+1}=1^{n+1}=1}}}{=} \left| \frac{e^{t}}{(n+1)!} \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{ES POSITIVO}}}}{=} \frac{e^{t}}{(n+1)!} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{e^{t}<e<4} \\ \uparrow \\ \boxed{\text{PARA } t\in(0;1)}}}{<} \frac{4}{(n+1)!}$$

$$\Longrightarrow |R_{n,0}(1)| < \frac{4}{(n+1)!} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{LO QUE EXIGIMOS}}}}{<} 10^{-4} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{TRATAMOS DE CONOCER } n}}}{\Longrightarrow} \frac{4}{10^{-4}} < (n+1)!$$

$$\Longrightarrow 4000 < (n+1)! \longleftarrow 7! = 5040 > 4000 \text{ y } 6! = 720 \not> 4000$$

$$\Downarrow$$

$$n+1 = 7 \qquad (\leftarrow \text{COMO MÍNIMO})$$

$$\Longrightarrow \boxed{n=6} \qquad \text{MÍNIMO ORDEN DEL POLINOMIO}$$

$$\Longrightarrow e \approx P_{6,0}(1) = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}$$

$$\Longrightarrow e \approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}$$

$$\Longrightarrow e \approx \frac{1957}{720} \sim 2{,}718\underset{\substack{\uparrow \\ \text{HASTA ACÁ} \\ \text{EL VALOR ES "EXACTO"}}}{}055$$

$$\Longrightarrow e \approx 2{,}718$$