AR1AP22

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Trabajo Práctico 2 → **Límite**

Damián Rajmanovich

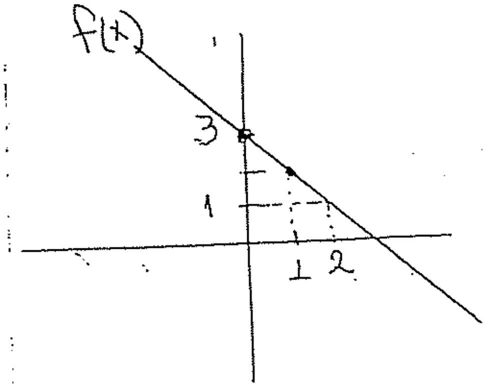
Resueltos

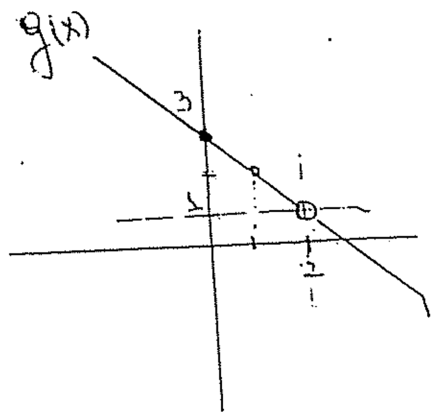
Guia 2: Limite

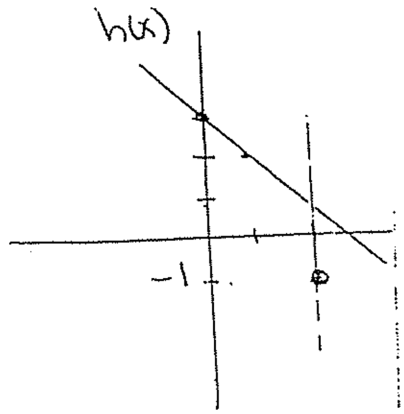
Ejercicio 1

$f(x) = -x+3$ $\qquad g(x) = \dfrac{-x^2+5x-6}{x-2}$ $\qquad h(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x \neq 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	1,1	1,01	1,001	1,0001	1	0,9999	0,999	0,99	0,9
g(x)	1,1	1,01	1,001	1,0001	—	0,9999	0,999	0,99	0,9
h(x)	1,1	1,01	1,001	1,0001	-1	0,9999	0,999	0,99	0,9







1.3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2} \quad = 1$

Listo!

Ejercicio 2

Hay q' probar x definición el lim g(x) $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 / \exists\, \delta > 0 \Rightarrow$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{-x^2+5x-6}{x-2} = 1 \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0 / \exists\, \delta>0 \Rightarrow$$

$$|x-2|<\delta \Rightarrow \left| \frac{-x^2+5x-6}{x-2} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

fijate q' $-x^2+5x-6 = -(x-2)(x-3) \Rightarrow$

$$\left| -\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| -x+3-1 \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\left| -x+2 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| -(x-2) \right| = |-1|.|x-2| < \varepsilon \Rightarrow$$

$|x-2| < \varepsilon \Rightarrow$ Basta tomar $\boxed{\delta = \varepsilon}$

$\Rightarrow$ Si $\varepsilon = 0{,}5 \Rightarrow \delta = 0{,}5$ Listo!

Ejercicio 3 Acá vamos a ver un poquito más lo hecho en el ejercicio anterior. Este ejercicio es importante así que fijate los mecanismos para hallar el $\delta \wedge \varepsilon$

3.1) $\lim_{x\to 1} 2x-3 = -1 \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0 / \delta>0 \Rightarrow$

Si $|x-1|<\delta \Rightarrow |(2x-3)-(-1)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |2x-3+1| < \varepsilon \Rightarrow |2x-2| < \varepsilon \Rightarrow 2|x-1| < \varepsilon$$

$\Rightarrow 2\delta < \varepsilon \Rightarrow \delta < \varepsilon/2 \Rightarrow$ Basta tomar

$\boxed{\delta = \varepsilon/2}$ Listo!

3.2 $\lim\limits_{x \to -2} (-3x+1) = 7 \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 / \delta > 0 \Rightarrow$

si $|x+2| < \delta \Rightarrow |(-3x+1) - 7| < \varepsilon \Rightarrow |-3x-6| < \varepsilon$

$\Rightarrow |-3(x+2)| < \varepsilon \Rightarrow |-3|\underbrace{|x+2|}_{\delta} < \varepsilon \Rightarrow 3\delta < \varepsilon \Rightarrow$

$\boxed{\delta < \varepsilon/3} \longrightarrow$ Basta tomar $\boxed{\delta = \varepsilon/3}$ Listo!

3.3 $\lim\limits_{x \to x_0} k = k \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 / \delta > 0 \Rightarrow |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow |k - k| < \varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon$ va a ser $> 0 \ \forall \delta$

3.4 $\lim\limits_{x \to x_0} (mx+b) \doteq mx_0 + b, \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 / \exists\, \delta > 0$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |mx + b - (mx_0 + b)| < \varepsilon \Rightarrow$

$|m\underbrace{(x - x_0)}_{\delta}| < \varepsilon \Rightarrow \delta < \varepsilon/m \Rightarrow m \neq 0 \Rightarrow$

Basta tomar $\boxed{\delta = \varepsilon/m}$ Listo!

2.5 $\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 / \delta > 0 \Rightarrow$

$|x - 0| < \delta \Rightarrow |x^2 - 0| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x^2| < \varepsilon \Rightarrow |x \cdot x| < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{|x|}_{\downarrow \delta} \cdot \underbrace{|x|}_{\downarrow \delta} < \varepsilon \Rightarrow$

$\delta^2 < \varepsilon \Rightarrow$ Basta tomar $\boxed{\delta = \sqrt{\varepsilon}}$ Listo!

2.6 $\lim_{x \to 1} 5(x-1)^2 + 2 = 2 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 / \exists \delta > 0 /$

$|x - 1| < \delta \Rightarrow |5(x-1)^2 + 2 - 2| < \varepsilon$

$\Rightarrow |5(x-1)^2| < \varepsilon \Rightarrow 5|(x-1)(x-1)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\underbrace{|x-1|}_{\downarrow \delta}\underbrace{|x-1|}_{\downarrow \delta} < \varepsilon/5 \Rightarrow \delta^2 < \varepsilon/5 \Rightarrow$ Basta tomar

$\boxed{\delta = \sqrt{\varepsilon/5}}$

Listo!

2.7 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 / \delta > 0 \Rightarrow$

$|x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left| \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} - 4 \right| < \varepsilon \Rightarrow |x + 2 - 4| < \varepsilon \Rightarrow$

$\underbrace{|x - 2|}_{\downarrow \delta} < \varepsilon \Rightarrow$ Basta tomar $\boxed{\delta = \varepsilon}$ Listo!

Conclusión: Cuando tengo q' probar por definición un límite $\Rightarrow$ tengo q' buscar un δ en función de ε para ello trabajo $|f(x) - L|$ para lograr algo parecido a $|x - x_0| < \delta$ y reemplazarlo por δ.

Ejercicio 4

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 1 \\ 2x - 0{,}99 & x \leq 1 \end{cases}$$

Para q' existe límite en $x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1^+} 2x - 1 = \boxed{1} \qquad \lim_{x \to 1^-} 2x - 0{,}99 = \boxed{1{,}01}$

$\boxed{\nexists \text{ Lim}}$

Fijate si existiera $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 / \delta > 0 \;/\; |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

y fuera "1" $\Rightarrow |x-1| < \delta \Rightarrow |2x - 0{,}99 - 1| < \varepsilon \Rightarrow$

Sumo y resto 0,01 $\Rightarrow |2x - 0{,}99 - 0{,}01 + 0{,}01 - 1| \leq |2x - 2 + 0{,}01| \leq$

$|2x-2| + 0{,}01 \leq 2\underbrace{|x-1|}_{\delta} + 0{,}01 \leq \varepsilon \Rightarrow$

$\boxed{\delta \leq \frac{\varepsilon - 0{,}01}{2}} \Rightarrow$ Pero como $\delta > 0 \Rightarrow \varepsilon > 0{,}01 \Rightarrow$

no es para "todo ε".

Ejercicio 5

Es logico q' no existe porq' si hago un entorno en 2 va a haber tanto racionales como irracionales

Ejercicio 7 → No tiene mucho sentido

Sea $f(x) = x^2 \quad a=2 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = \boxed{4}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} [f(x)]^3 = 4^3$$

$$\lim_{x\to 2} \operatorname{sen}(f(x)) = \lim_{x\to 2} \operatorname{sen}(x^2) = \lim_{x\to 2} \operatorname{sen}(2^2) = \boxed{\operatorname{sen}(4)}$$

Ejercicio 8

Aca empieza lo lindo. Cuando tenemos

$0^0, \infty \cdot 0, \frac{0}{0}; \infty^{\infty}, \infty - \infty, 1^{\infty}$ son lo q' se llaman indeterminaciones ⇒ lo q' queremos es calcular el limite de las mismas, entonces debemos aplicar un par de trucos para expresarlos de otra manera y poder calcularlo

a) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^3+3x-4} \underset{\text{Reemplazo}}{=} \frac{2^2-2.2}{2^3+3.2-4} = \frac{0}{10} = \boxed{0}$$

SIEMPRE q' TENGO $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ reemplazo "x_0" en la función, y veo q' recede. Si es un número, ese es el valor del límite. también puede quedarme $\frac{1}{\infty} = 0$ ó $\frac{1}{0} = \infty$ y ese también es el límite. Si al reemplazar me queda una indeterminación $\Rightarrow$ deberé de aplicar otros conceptos y trucos

b) $\lim\limits_{x \to \pi/6} tg(2x) = tg(2 \cdot \frac{\pi}{6}) = tg(\pi/3) = \boxed{\sqrt{3}}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{sen(x-3) + e^{x^2}}{\ln(x-2) + x^3 - 8x} = \frac{\overbrace{sen(3-3)}^{0} + e^{3^2}}{\underbrace{\ln(3-2)}_{0} + 3^3 - 8.3} = \boxed{\frac{e^9}{57}}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \left((1-x)\sqrt{3-x}\right)^{\frac{x}{x+3}} = \left((1-1)\sqrt{3-1}\right)^{\frac{1}{1+3}} = 0^{1/4} = \boxed{0}$

Ejercicio 9

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} \underset{\text{Reemplazo}}{=} \frac{1^2 - 2.1 + 1}{1^3 - 1} = \boxed{\frac{0}{0}} \to$ indeterminación

1er TRUCO Si tengo 2 polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ q' tienden a $\frac{0}{0} \Rightarrow$ FACTORIZO AMBOS Y CANCELO

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \frac{(x-1)^2}{(x^2-1)^2 \cdot x} = \frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}(x+1)\,x} = \frac{1-1}{(1+1)\cdot 1} =$$

Reemplazo

$$= \frac{0}{2} = \boxed{0} \Rightarrow \text{El limite vale "0"}$$

b) $$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1} = \frac{(1-1)\sqrt{2-1}}{1^2-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow$$ factorizo

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\sqrt{2-x}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{\sqrt{2-x}}{x+1} = \frac{\sqrt{2-1}}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Reemp.

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3+x}}{x}$$

<u>2do TRUCO</u>: Si tengo 2 Raices Restando ⇒ Multiplico y divido por lo mismo cambiado de signo (o sea, el conjugado)

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3+x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{3+x})}{x} \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{3+x})}{\sqrt{3}+\sqrt{3+x}}$$

⇒ Acordate q' $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ ⇒

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3+x})^2}{x(\sqrt{3}+\sqrt{3+x})} = \frac{3-(3+x)}{x(\sqrt{3}+\sqrt{3+x})} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{3}+\sqrt{3+x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{3}+\sqrt{3+x}} = \boxed{\frac{-1}{2\sqrt{3}}}$$

d) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2+x-6}{x+3} = \frac{(-3)^2-3-6}{-3+3} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ factorizo

$\lim_{x \to -3} \frac{(x-2)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}} = x-2 = \boxed{-5}$

e) $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} = \frac{4-4}{\sqrt{4+5}-3} = \boxed{\frac{0}{0}}$ Uso el truco 2

$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} \cdot \frac{(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}+3)} = \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5})^2-3^2} =$

$\lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x+5-9} = \frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x+5}+3)}{\cancel{x-4}} =$

$\lim_{x \to 4} \sqrt{x+5}+3 = 3+3 = \boxed{6}$

f) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^5+x^3-3x+1} = \frac{1^2-1}{1^5+1^3-3.1+1} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ factorizo

Recordá q' para factorizar $x^5+x^3-3x+1 \rightarrow$ Buscaba una Raíz y la bajaba x Ruffini. Entonces como 1 es raíz $\Rightarrow$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow x^5+x^3-3x+1 = (x-1)(x^4+x^3+2x^2+2x-1)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^4+x^3+2x^2+2x-1)} = \frac{1+1}{1^4+1^3+2\cdot1^2+2\cdot1-1} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{2/5}$$

g)

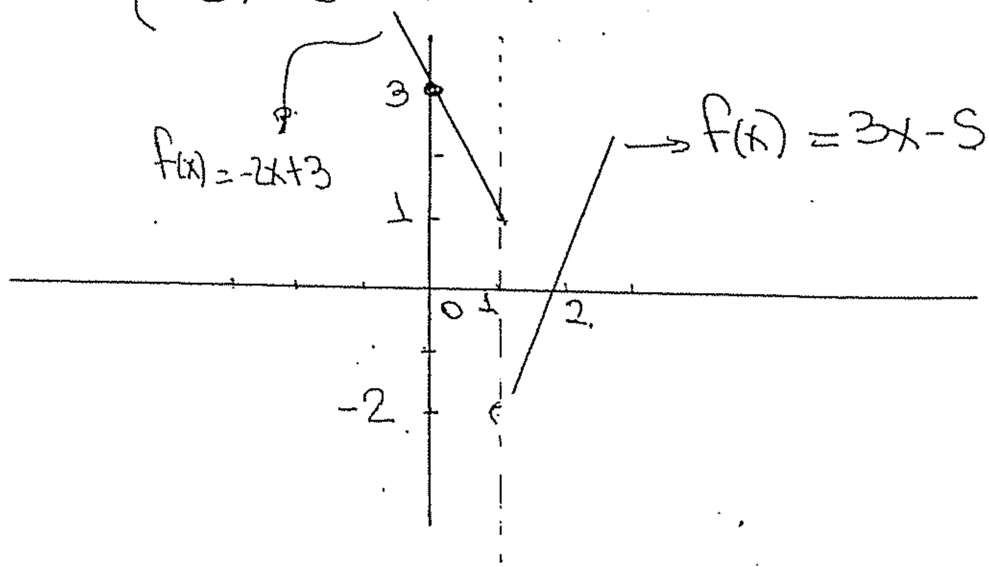
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}\right)^{\frac{-x^2+1}{x-1}} = \left(\frac{0}{0}\right)^{\frac{0}{0}} \longrightarrow \text{Horrible} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\cancel{(x-1)}\sqrt{2-x}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}\right)^{\frac{(1-x)(1+x)}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{2-x}}{x+1}\right)^{\frac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{2-x}}{x+1}\right)^{-(x+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \boxed{4}$$

Ejercicio 11

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x \le 1 \\ 3x-5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Fijate q'

0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
1,2	1,02	1,002	$\boxed{1}$	-1,997	-1,97	-1,7

Corresponde la rama de arriba — Corresp. la rama de abajo

Si me acerco a 1 por la izquierda $\longrightarrow 1$

" " " " " " derecha $\longrightarrow -2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$$

Conclusion $\boxed{\text{No Existe } \lim_{x\to 1} f(x)}$

Probamos $\lim_{x\to 1^-} -2x+3 = 1 \Rightarrow \delta>0 / \varepsilon>0 / \text{si } 0<|x-1|<\delta$

$$\Rightarrow |-2x+3-1| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|-2x+3-1| \leq |-2x+2| \Rightarrow |-2||x-1| \leq |2|\underbrace{|x-1|}_{\delta} < \varepsilon \Rightarrow$$

Basta tomar $\boxed{\varepsilon/2 = \delta}$

$$\lim_{x\to 1^+} 3x-5 = -2 \Rightarrow \delta>0 / \varepsilon>0 / |x-1|<\delta \Rightarrow |3x-5-(-2)|$$

$$\Rightarrow |3x-3| \leq 3\underbrace{|x-1|}_{\delta} \leq \varepsilon \Rightarrow 3\delta<\varepsilon \Rightarrow$$ Basta tomar $\boxed{\delta = \varepsilon/3}$

Ejercicio 12

Para q' existe $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

a)

$\nexists \lim_{x \to 3} \operatorname{sg}(x-3) \Rightarrow \lim_{x \to 3^+} \operatorname{sg}(x-3) \underset{\substack{x-3 \text{ es} \\ (+)}}{=} \boxed{+1}$

$\lim_{x \to 3^-} \operatorname{sg}(x-3) \underset{\substack{x-3 \text{ es} \\ \text{neg}}}{=} \boxed{-1}$

$$\boxed{\nexists \lim_{x \to 3} \operatorname{sg}(x-3)}$$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{x+x^3}{|x|} \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{x+x^3}{-x} = \frac{(1+x^2)\cancel{x}}{-\cancel{x}} = \boxed{-1}$

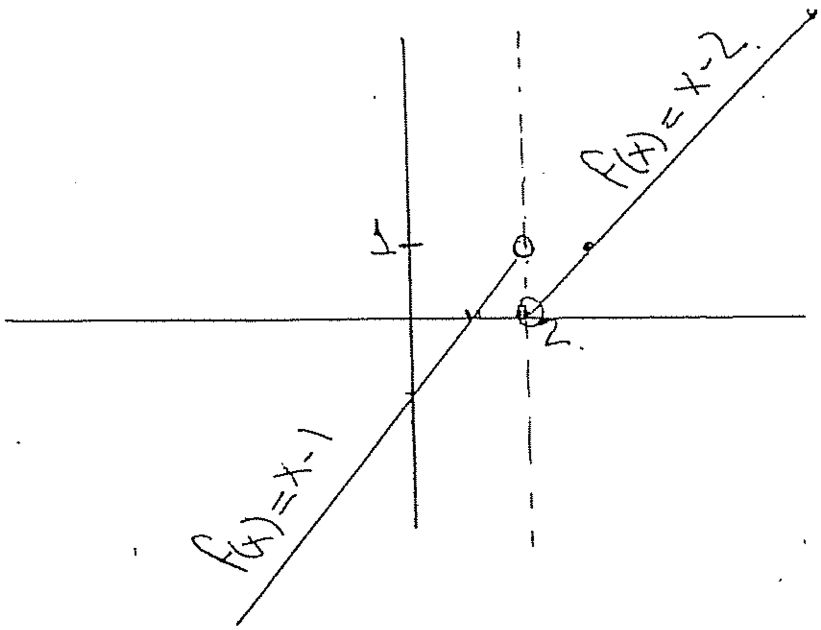
$\lim_{x \to 0^+} \frac{x+x^3}{x} = \frac{\cancel{x}(1+x^2)}{\cancel{x}} = \boxed{1}$

$$\boxed{\nexists \lim_{x \to 0} \frac{x+x^3}{|x|}}$$

Ejercicio 13

$g(x) = \begin{cases} |x-2|+1 & x>2 \\ -|x-2| & x<2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} x-2+1 & x>2 \\ -(-(x-2)) & x<2 \end{cases}$

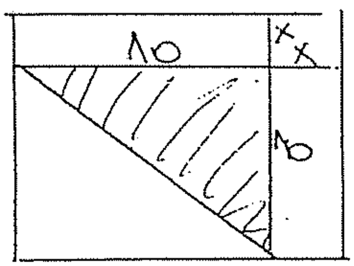
$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} x-1 & x>2 \\ x-2 & x<2 \end{cases}$



$$\lim_{x\to 2^+} x-2 = \boxed{0} \qquad \lim_{x\to 2^-} x-1 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nexists \lim_{x\to 2} g(x)}$$

Ejercicio 14



La verdad yo no tengo nada sombrea do en la guia. Supongamos

Cuando $x \to 0 \Rightarrow$ Me queda solo el triangulo $\Rightarrow A = \frac{10 \cdot 10}{2} = \boxed{50}$

Cuando $x \to 10 \Rightarrow A = \frac{20 \cdot 20}{2} = \boxed{200}$

$$\Rightarrow \text{Area}(x) = \frac{(10+x)(10+x)}{2} = \frac{(100+20x+x^2)}{2}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{100+20x+x^2}{2} = \boxed{50}$ $\lim_{x\to 10} \frac{100+20x+x^2}{2} = \boxed{200}$

Ejercicio 15

$$f(x) = \begin{cases} bx & x \leq -1 \\ x^2+ax & -1 < x \leq 2 \\ bx+a & x > 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Para q' $\exists$ lim en $x=-1$ $\wedge$ $x=2$

$\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} bx = \lim_{x\to -1^+} x^2+ax \wedge \lim_{x\to 2^-} x^2+ax = \lim_{x\to 2^+} bx+a$

$\Rightarrow \boxed{-b = 1+a}$ $\qquad 4+2a = 2b+a$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ a-2b=-4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b=1} \; \boxed{a=-2}$$

Ejercicio 16

El teorema de sandwich dice

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x) \leq \lim_{x\to x_0} h(x)$$

$\downarrow \ell$ $\qquad$ entonces vale $\downarrow \ell$ $\qquad \downarrow \ell$

$\Rightarrow$ Si el $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| \leq K \Rightarrow$

$-K \leq \lim\limits_{x\to a} f(x) \leq K \Rightarrow$

$$\underbrace{\lim_{x\to a} -K\,g(x)}_{0} \leq \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) \leq \underbrace{\lim_{x\to a} K\,g(x)}_{0}$$

entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = 0$$

es la prueba q' $\boxed{0 \cdot \text{acotado} = 0}$

__Ejercicio 17__

$\Rightarrow |f(x)-7| \leq 5(x-2)^2 \Rightarrow -5(x-2)^2 \leq f(x)-7 \leq 5(x-2)^2$

$\Rightarrow -5(x-2)^2+7 \leq f(x) \leq 5(x-2)^2+7 \quad \Rightarrow$ Aplico $\lim\limits_{x\to 2}$

$$\underbrace{\lim_{x\to 2} -5(x-2)^2+7}_{7} \leq \lim_{x\to 2} f(x) \leq \underbrace{\lim_{x\to 2} 5(x-2)^2+7}_{7}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 2} f(x) = 7}$$

Ejercicio 18

$\Rightarrow f^2(x) \leq 9 \Rightarrow -3 \leq f(x) \leq 3 \Rightarrow$

mult. $\times$ sen(x) $\quad -3\,\text{sen}(x) \leq f(x)\,\text{sen}(x) \leq 3\,\text{sen}(x) \Rightarrow$

Aplico lim.

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{-3\,\text{sen}(x)}_{\downarrow 0} \leq \lim_{x\to 0} f(x)\,\text{sen}(x) \leq \lim_{x\to 0} \underbrace{3\,\text{sen}(x)}_{\downarrow 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} f(x)\,\text{sen}(x) = 0}$$

Ejercicio 19

$|f(x)| \leq K|x-a| \Rightarrow -K|x-a| \leq f(x) \leq K|x-a| \Rightarrow$

$$\lim_{x\to a} \underbrace{-K|x-a|}_{\downarrow 0} \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} \underbrace{K|x-a|}_{\downarrow 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a} f(x) = 0}$$

Ejercicio 20

$x^2(1 - 3/4x^2) \leq f(x) \leq x^2 \Rightarrow$ divido por $x^2 \Rightarrow$ ..

$$\frac{\cancel{x^2}(1-3/4x^2)}{\cancel{x^2}} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \Rightarrow \text{Aplico } \lim_{x \to 0}$$

$$\lim_{x\to 0} (1-3/4x^2) \leq \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} \leq \lim_{x\to 0} 1$$

$$\downarrow 1 \qquad\qquad \downarrow 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1}$$

Ejercicio 21

Este limite es importantísimo $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

Pero hay q saber interpretarlo. Lo q' me dice es q' el $\lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen}(\square)}{\square} = 1$ si $\square \to 0$ en $x \to x_0$

osea q' $\frac{\operatorname{sen}(\text{cualquier cosa})}{\text{esa misma cualquier cosa}} = 1$ si cualq cosa $\to 0$

osea $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x} = 1$ $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = 1$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} = 1$$

inciso b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\text{sen}(x)} = 1$ vale lo mismo q' lo primero

$\lim_{x\to x_0} \dfrac{\square}{\text{sen}(\square)} = 1$ si $\square \to 0$

osea q' $\lim_{x\to 0} \dfrac{-3x}{\text{sen}(-3x)} = 1$ $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{\text{sen}\left((x-1)^2\right)} = 1$

inciso c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^n(x)}{x^n} = 1$ osea $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^4(x)}{x^4} \boxed{1}$

$\lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^3}{\text{sen}^3(x-2)} = 1$

Vamos a los ejercicios

21.1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(4x)}{x}$ a mi me gustaría tener: $\dfrac{\text{sen}(4x)}{4x}$ porq' esto tendería a 1 $\Rightarrow$ Multiplico y divido x 4 $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(4x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(4x)}{x} \cdot \frac{4}{4} = \lim_{x\to 0} \Big(\underbrace{\frac{\text{sen}(4x)}{4x}}_{\to 1}\Big) \cdot 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(4x)}{x} = \boxed{4}$$

21.2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(6x)}{\operatorname{sen}(4x)} \Rightarrow$ Multiplico y divido x "6x"

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(6x)}{6x} \cdot \dfrac{6x}{\operatorname{sen}(4x)}$ Ahora necesito un "4x" abajo por ("incsob") $\Rightarrow$

Multiplico y divido x 4x $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(6x)}{6x} \cdot \dfrac{6x}{\operatorname{sen}(4x)} \cdot \dfrac{4x}{4x} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(6x)}{6x}}_{\to 1} \underbrace{\frac{4x}{\operatorname{sen}(4x)}}_{\to 1} \cdot \frac{6\cancel{x}}{4\cancel{x}} = \boxed{3/2}$$

21.3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{\cos(x)}}_{\to 1} = \boxed{1}$

21.4) Este es un poco (+) complicado

Recordá q $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2(x) = (1-\cos(x))(1+\cos(x))$

$\Rightarrow (1-\cos(x)) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{(1+\cos(x))} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3(1-\cos(x))}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3 \cdot \operatorname{sen}^2(x)}{(1+\cos(x))x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3 \cdot \overset{\to 0}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \operatorname{sen}(x)}{\underset{2}{(1+\cos(x))} x}$, con $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} \to 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{3(1-\cos(x))}{x} = \boxed{0}$$

21.5) $\Rightarrow$ Si $y = \arcsen(4x) \Rightarrow 4x = \sen(y)$

$x \to 0 \Rightarrow y \to 0 \qquad x = \frac{\sen(y)}{4}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\arcsen(4x)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\frac{\sen(y)}{4}} \Rightarrow$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{4y}{\sen(y)} \to 1 = \boxed{4}$$

21.6) Como Recomendación general NUNCA MODIFIQUES el ARGUMENTO → osea

Si $\frac{\sen(x)}{6x} \Rightarrow$ Nunca $\lim_{x\to 0} \frac{\sen(6x)}{6x} = \boxed{1}$ multiplicar $\times 6$

Sino $\lim_{x\to 0} \frac{\sen(x)}{6x} \to 1 = \boxed{1/6}$

Aca no nos queda otra q' modificarlo

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sen(x)}{x-\pi} \Rightarrow \text{Sumo y resto } \pi \Rightarrow \lim_{x\to\pi} \frac{\sen(x-\pi+\pi)}{x-\pi}$$

$\Rightarrow \operatorname{Sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{Sen}(\alpha).\operatorname{Cos}(\beta) + \operatorname{Sen}(\beta).\operatorname{Cos}(\alpha) \Rightarrow$

$$\operatorname{Sen}(\underbrace{x-\pi}_{\alpha}+\underbrace{\pi}_{\beta}) = \operatorname{Sen}(x-\pi).\operatorname{Cos}(\pi) + \operatorname{Sen}(\pi)\operatorname{Cos}(x-\pi)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \underbrace{\frac{\operatorname{Sen}(x-\pi)}{x-\pi}}_{\to 1} \overset{-1}{\operatorname{Cos}(\pi)} + \frac{\overbrace{\operatorname{Sen}(\pi).\operatorname{Cos}(x-\pi)}^{\text{eso}}}{\underbrace{x-\pi}_{\text{tiende a 0}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi} -1+0 = \boxed{-1}$$

No es una Indeter minación porque es $\frac{0}{\text{algo}\to 0} = \boxed{0}$

$$\boxed{\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x-\pi} = -1}$$

Ejercicio 22

$f(x) = \operatorname{Sen}(1/x) \Rightarrow \operatorname{Dom} = \mathbb{R}-\{0\} \Rightarrow$

$f(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{Sen}(1/x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Recordar q' $\operatorname{sen}(x)$ se hace $=0$ si $x = K\pi$ $K = 0, \overset{-1}{1}, 2, \ldots n$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = K\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{K\pi}} \quad \text{Con } K \neq 0 \quad K \in \mathbb{Z}$$

ii) para q' $f(x)=1 \Rightarrow \operatorname{sen}(1/x)=1 \Rightarrow$

$\operatorname{sen}(u)=1$ si $u=\pi/2+2\pi k \Rightarrow$ con $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow \boxed{x=\dfrac{1}{\pi/2+2k\pi}}$

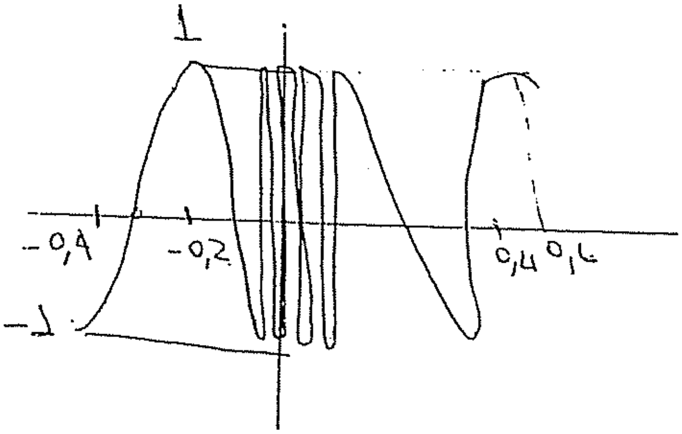
iii) para q' $f(x)=-1 \Rightarrow \operatorname{sen}(1/x)=-1$ recordar

$\operatorname{sen}(u)=-1 \Rightarrow u=3/2\pi+2k\pi \Rightarrow$

$\boxed{x=\dfrac{1}{3/2\pi+2k\pi}}$ $\boxed{\text{Con } \cancel{k} \in \mathbb{Z}}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x) = \boxed{\text{OSCILA}} \longrightarrow \nexists \lim$

v)



fijate si $k=-1 \Rightarrow f(x)=0 = \dfrac{1}{-1\pi} = \boxed{-0{,}31}$

$k=0 \qquad f(x)=1 = \dfrac{1}{\pi/2} = \boxed{0{,}6}$

Parte b

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\overset{\nearrow 0}{x}\, \mathrm{sen}(1/x)}_{\text{acot}} = 0 \cdot \text{acot} = \boxed{0} \qquad \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \mathrm{sen}(1/x) = 0 \cdot \text{acot} = \boxed{0}$$

fijate $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{sen}(1/x)$ si $x = \frac{2}{\frac{?}{?}\pi} = 0{,}11 \Rightarrow$

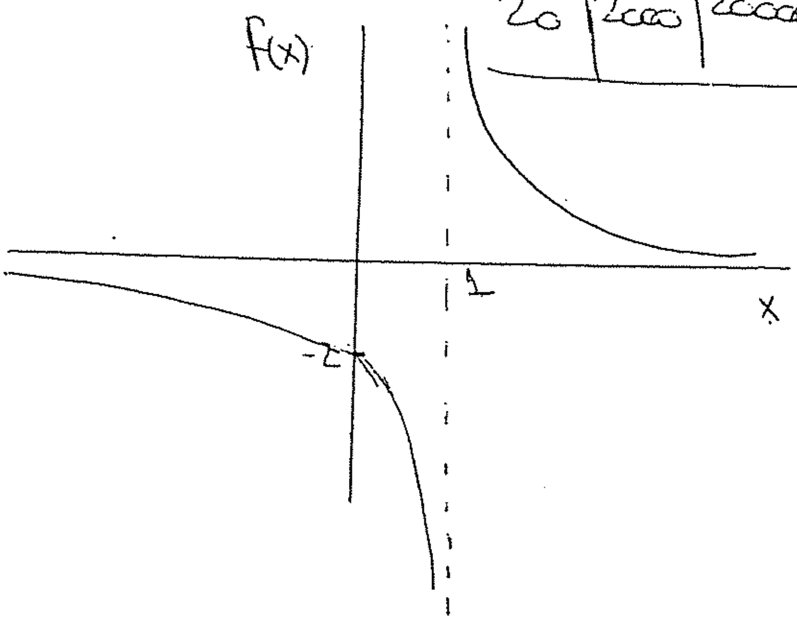
$f(0{,}11) = (0{,}09)^2 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \boxed{-0{,}0081}$

osea el 2do es $x^2\,\mathrm{sen}(1/x)$
1ero " $x\,\mathrm{sen}(1/x)$

Ejercicio 23

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01
f(x)	-20	-2000	-20000	-	20000	2000	20
	20	2000	20000	-	20000	2000	20



$\Rightarrow \lim_{x\to 1} |f(x)| = \boxed{+\infty}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \boxed{+\infty}$

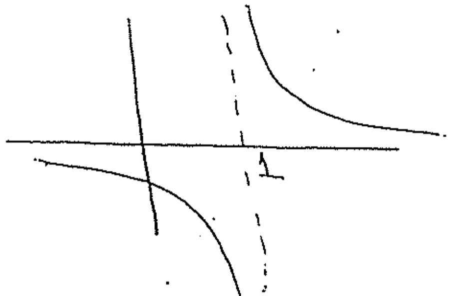
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \boxed{-\infty}$ $\qquad$ $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = \infty}$

$\Rightarrow$ Ejercicio 24

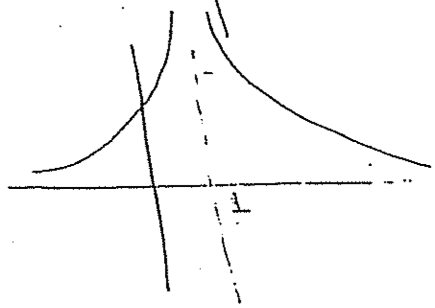
a) $\lim_{x\to 1} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{0} = \boxed{\infty}$

$\to 1^+ \; \infty$

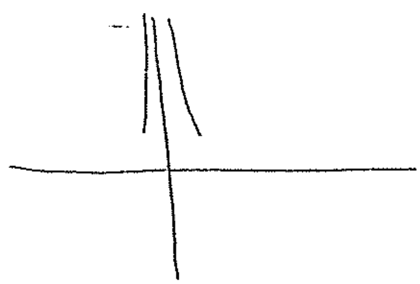
$\to 1^- \; -\infty$



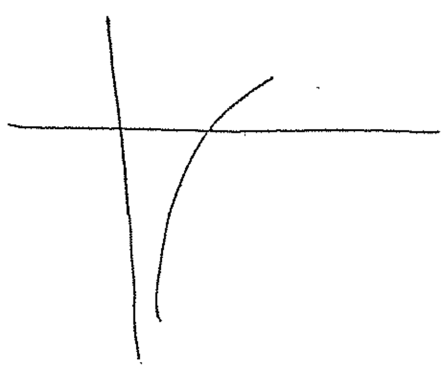
b) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^4} = \boxed{+\infty}$



c) $\lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 1}{\sin(x)}}{x\cdot \underbrace{x\cdot x}_{\text{siempre } (+)}} = \boxed{+\infty}$



d) $\ln(x^2+x) = \ln(0) = \boxed{-\infty}$



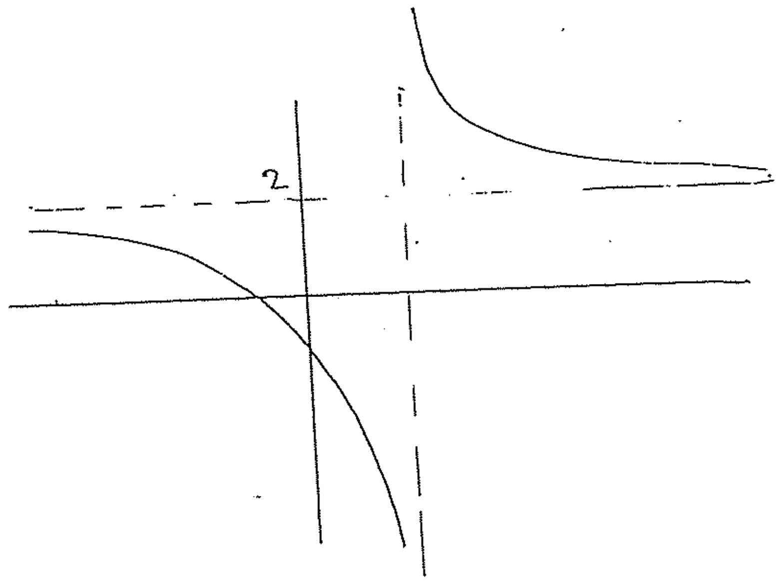
e) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0^+}$

$= \boxed{+\infty}$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x-1} = \boxed{\infty}$ g) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{0} = \boxed{\infty}$

Ejercicio 25

$f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$



La tabla completala vos

25.3.1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ 25.3.2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

Ejercicio 26

Para este ejercicio debes saber q' $\lim_{x\to\infty} |r|^\infty = \begin{cases} \infty & |r|>1 \\ 0 & |r|<1 \\ 1 & |r|=1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 26.1) $\lim_{x\to\infty} (1/2)^x = |r|<1 \to \boxed{0}$

$\Rightarrow$ esto vale q' $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1^x}{2^x} = \frac{1^\infty}{\underbrace{2^\infty}_{\to\infty}} = \frac{1}{\infty} \to \boxed{0}$

26.2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^\infty \to |r|>1 \to \boxed{\infty}$

26.3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{4}^\infty \Rightarrow |r|<1 \longrightarrow \boxed{0}$

26.4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\infty} = (4)^\infty \to |r|>1 \to \boxed{\infty}$

26.5) $\lim\limits_{x \to \infty} 3^x = 3^\infty \longrightarrow |r|>1 \longrightarrow \boxed{\infty}$

26.5) $\lim\limits_{x \to \infty} 3^x = 3^{-\infty} = \left(1/3\right)^\infty \Rightarrow |r|<1 \longrightarrow \boxed{0}$

Ejercicio 27

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 2x = \infty - \infty \to \text{indet} = \lim\limits_{x \to \infty} \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{x}}\,(\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{x^2-1}}) = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - 2x = -\infty + \infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \underset{-\infty}{\underset{\downarrow}{x}}\,(\underset{\infty+}{\underset{\downarrow}{x^2-1}}) = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x \to \infty} x(x^2-1) = \boxed{\infty}$

2) $\lim_{x\to\infty} x^4-2x^2 = \lim_{x\to\infty} x^2(x^2-1) = \boxed{+\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty}\underbrace{(x^2-1)}_{+\infty} = \boxed{+\infty}$

$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty}\underbrace{(x^2-1)}_{+\infty} = \boxed{+\infty}$

3) $\lim_{x\to\infty} 2-\underbrace{e^{-\infty}}_{0} = \boxed{2}$

$\lim_{x\to+\infty} 2-\underbrace{e^{-\infty}}_{0} = \boxed{2}$

$\lim_{x\to-\infty} 2-e^{-x} \Rightarrow$

$2-\underbrace{e^{\infty}}_{+\infty} = \boxed{-\infty}$

Ejercicio 28

28.1) $\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$

28.2) $\lim_{x\to 0^-} e^{-\underbrace{1/x}_{\ominus}} = e^{+\infty} = \boxed{\infty}$

28.3) $\lim_{x\to 1} e^{1/(x-1)} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{\infty} = \boxed{\infty}$

28.4) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{1+\underbrace{e^{-1/x}}_{\infty}} = \boxed{0}$

28.5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{1+\underbrace{e^{-1/x}}_{0}} = \boxed{2}$

Ejercicio 29

a)

$f(x) = \left\{ \dfrac{x+x^2}{|x|} \right. \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+x^2}{x} & \text{si } x>0 \\ \dfrac{x+x^2}{-x} & \text{si } x<0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ en -1 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+x^2}{-x} = \dfrac{\cancel{x}(1+x)}{-\cancel{x}} = \boxed{0}$

Corresp. la rama de abajo

$\boxed{x=0}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+x^2}{x} = \dfrac{\cancel{x}(1+x)}{\cancel{x}} = \boxed{1}$ $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x+x^2}{-x} = \dfrac{\cancel{x}(1+x)}{-\cancel{x}} = -1-\underset{0}{x} = \boxed{-1}$

b)

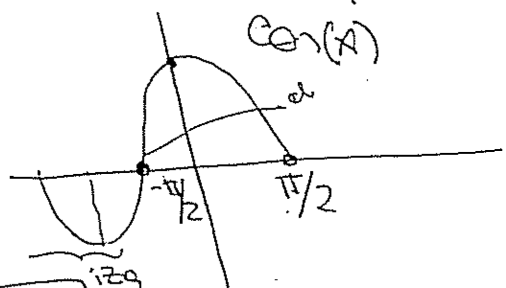
$f(x) = 2^{-x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} 2^{-x} = 2^{-(+0)} = 2^{-0} = \boxed{1}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{-(-0)} = 2^0 = \boxed{1}$ $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} 2^{-x} = \boxed{1}$

c) $\dfrac{1}{3^{1/x}} = f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{3^{1/x}} = \dfrac{1}{3^{+\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = \boxed{0}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{3^{1/-0}} = \frac{1}{\underbrace{3^{-\infty}}_{\to 0}} = \boxed{+\infty} \Rightarrow \boxed{\nexists \lim_{x\to 0} f_3(x)}$$

d) $f_4 x = \frac{tg(x)}{\cancel{}} = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ $\Rightarrow$ Recorda q' el coseno



$$\Rightarrow \lim_{x\to -\pi/2^+} \frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{-1}{0(+)} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to -\pi/2^-} \frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{-1}{0(-)} = \boxed{+\infty}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to -\pi/2} f_4 x = \infty}$$

en -1 no pasa nada asi que $\lim_{x\to -1} \frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{sen(-1)}{cos(-1)}$

e) $$f_5(x) = \begin{cases} \ln(|x|) & x \leq -1 \\ -x^2+1 & |x|<1 \\ -\frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to -1^-} \ln(|x|) = \ln(1) = \boxed{0} \qquad \lim_{x\to (-1)^+} -x^2+1 = -1+1 = \boxed{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to -1} f_5(x) = 0}$$

$$\lim_{x\to 0^+} -x^2+1 = \boxed{1} \qquad \lim_{x\to 0^-} -x^2+1 = \boxed{1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f_5(x) = 1}$$

$$\lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{x} = \boxed{-1} \qquad \lim_{x\to 1^-} -x^2+1 = \boxed{0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\nexists \lim_{x\to 1} f_5(x)}$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{e}^+} -x^2+1 = \lim_{x\to 1/e^-} -x^2+1 = \boxed{-\left(\frac{1}{e}\right)^2+1}$$

Ejercicio 30

Para recordar $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$

- Si gr $P(x) >$ gr $Q(x) \to \infty$
- Si gr $P(x) <$ gr $Q(x) \to 0$
- Si gr $P(x) =$ gr $Q(x) \Rightarrow$ el límite es $\frac{a}{b}$ → coefi. del término de mayor grado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+2}{4x^3-x+3} \Rightarrow \text{Como el } \underbrace{\text{grado de } P}_{2} < \underbrace{\text{grado } Q}_{3}$$

$\to \boxed{0}$ Como se prueba hay q dividir y multiplicar por $x^{\text{grado menor}}$ = en este caso $x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2}}{\dfrac{4x^3-x+3}{x^2}} = \frac{\overset{\to 2}{2} + \overset{\to 0}{\dfrac{3}{x}} - \overset{\to 0}{\dfrac{2}{x^2}}}{\underset{\downarrow \infty}{4x} - \underset{\downarrow 0}{\dfrac{1}{x}} + \underset{\to 0}{\dfrac{3}{x^2}}} = \frac{2}{\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\infty} \to \boxed{0}$$

30.2) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^4+3x^3-x+4}{-x^3-x+10} \Rightarrow$ Como $\overset{4}{\widehat{grP}} > \overset{3}{\widehat{grQ}} \to \boxed{\infty}$

$\Rightarrow$ Multiplico y divido por x^3 $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{5x^4+3x^3-x+4}{x^3}}{\dfrac{-x^3-x+10}{x^3}} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\to\infty}{5x} + \overset{\to 3}{3} - \overset{\to 0}{\dfrac{3}{x^2}} + \overset{\to 0}{\dfrac{4}{x^3}}}{-1 - \underset{\downarrow 0}{\dfrac{1}{x^2}} + \underset{\to 0}{\dfrac{10}{x^3}}} = \frac{\infty}{-1} = \boxed{-\infty}$$

30.3) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-4x^2+x-1}{3x^2-2x+7} \Rightarrow$ Como tienen $=$ gr $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} = \boxed{-\dfrac{4}{3}}$

Multiplico y divide por x^2 y compruebalo

$\boxed{30.\ \text{parte c}}$ $f(x) = \dfrac{-3x^4+2x}{x^3-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}$ Multiplico y divido por x^3 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{-3x^4+2x}{x^3}}{\frac{x^3-x}{x^3}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x + \frac{2}{x^2} \to 0}{1 - 3/x^2 \to 0} = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\overset{\to+\infty}{-3x} + \frac{2}{x^2} \to 0}{1-\underbrace{3/x^2}_{\to 0}} = \boxed{+\infty}$ El grafico es el [illegible]

Ejercicio 31

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} \Rightarrow$ Saco factor común x^2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} \Rightarrow$

Si: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \dfrac{-\cancel{x}}{\cancel{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}\to 0} = \boxed{-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}\sqrt{1+1/x^2}}{\cancel{x}} = \boxed{1}$

$\Rightarrow$ No Existe $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

31.2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}{x}$

Saco factor común x^3

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x}\cdot\left(1+1/x^3\right)}{\cancel{x}} = \boxed{1}$

31.3) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1} = \infty - \infty \Rightarrow$

Multiplico y divido x el conjugado

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{\infty}+\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\infty}} = \dfrac{1}{\infty}$

$= \boxed{0}$

31.4)

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2\left(4+1/x+1/x^2\right)}+\sqrt{x^2\left(1+1/x\right)}}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+3x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{4+1/x+1/x^2}+|x|\sqrt{1+1/x}}{|x|\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{4+1/x+1/x^2}+x\sqrt{1+1/x}}{x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3x} = \frac{3\cancel{x}}{6\cancel{x}} = \boxed{1/2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+1/x+1/x^2}-x\sqrt{1+1/x}}{-x\sqrt{9+1/x+2/x^2}+3x} = \frac{-3\cancel{x}}{0\cancel{x}} = \boxed{-\infty}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)}$$

Ejercicio 32

Se prueba haciendo un cambio de variable

$u = 1/x$ fijate si $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow$

Si $x\to\infty$
$u\to 0$ $\Rightarrow \boxed{\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u} = e}$

Lo importante es q' al igual q' el $\frac{\text{sen}(\square)}{\square}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ significa $\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}$

misma cualquier cosa.

Cualquier cosa q' tienda a ∞

$\Rightarrow$ <u>Ejercicio 33</u>

<u>33.1)</u> $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3 \cdot x} \Rightarrow \to 1^{\infty}$ Hay q' llevarlo a la forma

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{3x}$

Cualquier cosa q' tienda a ∞

$\Rightarrow$ Me gustaría tenerla como potencia para q' eso sea "e" $\Rightarrow$ Lo pongo y lo saco

Pongo

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{\frac{x}{2}}}_{e}\Bigg]^{\frac{2}{\cancel{x}} \cdot 3\cancel{x}} \Rightarrow$

Saco

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = \boxed{e^{6}}$

33.2) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\underbrace{\frac{2}{x-3}}_{\to 0}\right)^{x} \Rightarrow 1^{\infty} \to$ hay q' llevarlo

a la forma $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\underbrace{\frac{x-3}{-2}}_{\text{cualquier cosa q' tiende a } \infty}}\right)$

$\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x-3}{-2}}\right)^{\frac{x-3}{-2}}}_{e}\Bigg]^{\frac{-2}{x-3}\cdot x} \Rightarrow$

Me queda calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{x-3}$ Polinomios de = grado $\Rightarrow \frac{-2}{1}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x-3}\right)^{x} = \boxed{e^{-2}}$

33.3) $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{3/x} \Rightarrow$ Recorda q' debo llevarlo

a la forma $(1+x)^{1/x} \Rightarrow \Big[(1+\underbrace{x^2}_{\text{cualquier cosa q' tiende a 0}})^{\frac{1}{x^2}}\Big]^{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to\infty}\Big[\underbrace{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}}_{e}\Big]^{\cancel{x^2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{x} = \boxed{\infty}$$

33.4) $$\lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{-3/x^3} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\Big[\underbrace{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}}_{e}\Big]^{\cancel{x^2}\cdot\frac{-3}{x^{\cancel{3}}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{3}{x}} = e^{-0} = \boxed{1}$$

33.5) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x}$$ Recordar q' hay q' llevarlo a la forma $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1\overbrace{+1-1}^{\text{sumo y resto 1}}}{x+2}\right)^{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-1}{x+2}\right)^{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+2}-\frac{1}{x+2}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+2}\right)^{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{-1}}\right)^{\frac{x+2}{-1}}}_{e}\Bigg]^{\frac{-1}{x+2}\cdot x}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{-x}{x+2}} = \boxed{e^{-1}}$$ $\longrightarrow$ Polinomios de = grado

33.6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} \Rightarrow$ Sumo y resto 2 $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1+2-2}{x^2-1}\right)^{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1+2}{x^2-1}\right)^{x^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2+1}{2}}}_{e}\Bigg]^{\frac{2}{x^2+1}\cdot x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x^2}{x^2+1}} = \boxed{e^2}$$

33.7) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln(x+a)-\ln(x)\right] \underset{\text{Prop log}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(\dfrac{x+a}{x}\right)$

$$\underset{\text{Prop. Logaritmo}}{=} \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+a}{x}\right)^x \Rightarrow \text{Calculemos}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x}\right)^x \to 1^\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x}+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}}_{e}\Bigg]^{\frac{a}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \ln\left(e^{a}\right) = a \cdot \underbrace{\ln(e)}_{1} = \boxed{a}$$

33.8) $\lim_{x\to 0} \left(1+\operatorname{sen}(x)\right)^{1/x} \Rightarrow$ Recorde $(1+\square)^{1/\square}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \Big[\underbrace{\left(1+\operatorname{sen}(x)\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}}_{e}\Big]^{\operatorname{sen}(x)\cdot\frac{1}{x}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} \quad \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\to 1 \quad = \boxed{e}$$

Ejercicio 34

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{9-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \frac{9-(3)^2}{\sqrt{3}-\sqrt{3}} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{indeterminación}$$

$\Rightarrow$ Como tengo 2 Raices restando Multiplico y divido por el conjugado $\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} \frac{9-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Downarrow$ A su vez $9-x^2 = (3-x)(3+x)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} \frac{(3-x)(3+x)\ (\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{(3-x)(x+3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3}$$

pero yo tengo $(3-x) = -(x-3) \Rightarrow$

$$\lim_{x \to -2} \underbrace{(x+2)^2}_{\to 0} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)}_{\text{acot}} = 0 \cdot \text{acot} = \boxed{0}$$

34.7) $\lim_{x \to 0} \frac{2 \arcsin(x)}{3x} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ llamando $y = \arcsin(x)$

$\Rightarrow \boxed{x = \operatorname{sen}(y)}$

$\Rightarrow$ Si $x \to 0 \Rightarrow y \to \arcsin(0) \to 0 \Rightarrow$

$$\lim_{y \to 0} \frac{2 \cdot y}{3 \cdot \operatorname{sen}(y)} \to 1 \quad = \boxed{2/3}$$

34.8) $\lim_{x \to 0} \frac{2x - \arcsin(x)}{2x + \operatorname{arctg}(x)} = \boxed{\frac{0}{0}} \to$ indetermin

Saco factor común "x" $\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\left(2 - \frac{\arcsin(x)}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2 + \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}\right)}$

Ya vimos q $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = \boxed{1}$

Averiguemos $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} \Rightarrow y = \operatorname{arctg}(x)$

$\Rightarrow x = tg(y) \Rightarrow$ Si $x \to 0 \Rightarrow y \to 0 \Rightarrow$

$$\lim_{y \to 0} \frac{y}{tg(y)} = \lim_{x \to 0} \frac{y}{\frac{sen(y)}{cos(y)}} = \lim_{y \to 0} \frac{\overbrace{cos(y)}^{1} \cdot y}{\underbrace{sen(y)}_{1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{arctg(x)}{x} = \boxed{1} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - \frac{arcsen(x)}{x}}{2 + \frac{arctg(x)}{x}} = \frac{2-1}{2+1} = \boxed{1/3}$$

34.9) $\lim_{x \to \infty} \left(2 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)^x = \boxed{2^\infty} \to \boxed{\infty}$

34.10) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^\infty = \boxed{0}$

34.11) $\lim_{x \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a)$ $\to \frac{0}{0}$ → Se va a probar en la guía 5 con L'Hospital al igual $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$

Ejercicio 37

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\cdot \operatorname{sen}(x)}{x^n}$$ para el único valor es para $\boxed{n=1}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 1}{\cos(x)}\cdot \overset{\to 1}{\operatorname{sen}(x)}}{x} = \boxed{1}$$

para $x=2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{1}{\cos(x)}\cdot \overset{1}{\operatorname{sen}(x)}}{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\infty^+}$

Ejercicio 38

$$\lim_{x\to 0} f(x) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-h)^2(x+1)}{2(1-\cos(h))} & x<0 \\[2ex] \dfrac{\ln(x+1)}{x} & x>0 \end{cases}$$

Para q existe $\lim_{x\to 0} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{(x-h)^2(x+1)}{2(1-\cos(\cancel{x}))} = \frac{h^2\cdot 1}{2\underbrace{(1-\cos(\cancel{x}))}_{\to 0}} = \frac{h^2}{0}$$

Si $h \neq 0 \Rightarrow$ Me queda un número / por "0" y es $\boxed{\infty}$

$\Downarrow$ no $\exists$ lim.

Si $h=0$ me queda $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^2(x+1)}{2(1-\cos(x))} = \dfrac{0}{0}$

Multiplico y divido por $(1+\cos(x))$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^2(x+1)}{2(1-\cos(x))} \cdot \dfrac{(1+\cos(x))}{(1+\cos(x))}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2(x+1)(1+\cos(x))}{2\cdot(\underbrace{1^2-\cos^2(x)}_{\operatorname{sen}^2(x)})} = \frac{x^2 \overset{\to 1}{(x+1)} \cdot \overset{\to 2}{(1+\cos(x))}}{2\operatorname{sen}^2(x)} \to 1 = 1$$

Recordá q' $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^n(ax)}{(ax)^n} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2(x+1)}{2(1-\cos(x))} = \boxed{1} \Rightarrow$$

luego como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ si $h=0$

$$\Rightarrow \boxed{\ell_{x\to 0} = 1 \quad h=0}$$

Ejercicio 39

Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}(x^2+1)}{g(x)} \quad \text{si } \forall x \in \mathbb{R} \;\; x^2+1 \le g(x)$$

fijate q' — 1ero $g(x)$ es positiva siempre porq' es $\geq \underbrace{x^2+1}_{\text{siempre } (+)}$

2do si $x^2+1 \le g(x) \wedge g(x)$ es $(+)$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{x^2+1}{g(x)} \le 1} \longrightarrow \text{Ademas } g(x) \text{ es } (+)$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \le \frac{x^2+1}{g(x)} \le 1} \longrightarrow \text{esta acotada}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \underbrace{e^{-\infty}}_{0} \overbrace{\frac{(x^2+1)}{g(x)}}^{\text{acot}} = 0 \cdot \text{acot} = \boxed{0}$$

Ejercicio 40.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\cdot\frac{\sqrt{x^2-x+1}+(ax+b)}{\sqrt{x^2-x+1}+(ax+b)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+(ax+b)}=\frac{x^2-x+1-a^2x^2-2abx+b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+(ax+b)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(2ab+1)x+1-b^2}{\sqrt{x^2(1-1/x+1/x^2)}+ax+b}$$

Note q' si $a\neq 1$ tengo un polinomio de gr 2 arriba y uno de grado 1 abajo $\Rightarrow$ tendería a ∞ $\Rightarrow$

$$\boxed{a=1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(-2b-1)x+1-b^2}{|x|\sqrt{1-1/x+1/x^2}+x+b}$$ $\Rightarrow$ Como debe existir el lim $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty^+}\frac{-(2b+1)x+1-b^2}{x\sqrt{1-1/x+1/x^2}+x+b}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(2b+1)x+1-b^2}{-x\sqrt{1-1/x+1/x^2}+x+b}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty^+} \frac{\cancel{x}\left[(-2b+1)+\frac{1}{x}-\frac{b^2}{x}\right]}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-1/x+1/x^2}+1+\frac{b}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2b-1+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}\overbrace{-\frac{b^2}{x}}^{\to 0}}{\underbrace{\sqrt{1-1/x+1/x^2}}_{\to 1}+1+\underbrace{\frac{b}{x}}_{\to 0}} = \frac{-2b-1}{2+b} = 0$$

$$\Rightarrow -2b-1=0 \Rightarrow \boxed{b=-1/2}$$

Compruebo q' si $b=-1/2 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{a=1} \quad \boxed{b=-1/2}$$

Ejercicio 41

a) $\lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\operatorname{sen}(1/x)}_{\text{acot}} = \boxed{0}$

$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(x) = \text{No Existe}$

b) $\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\to 1} + \underbrace{x\operatorname{sen}(1/x)}_{\to 0} = \boxed{1}$

$\lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\infty} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{\text{acot}}$

$\text{acot}\cdot\infty = \boxed{\infty}$??