UNIDAD 1

Puntos y vectores en R^3

Decano: Ing. Guillermo Oliveto
Secretario Académico: Ing. Marcelo Giura
DIECV: Lic. Karina Cuzzani, Lic. Rosa Cicala
Autores: Prof. Isabel Pustilnik y Federico Gómez

Íconos

Ejemplo

Ejercicio para el Lector

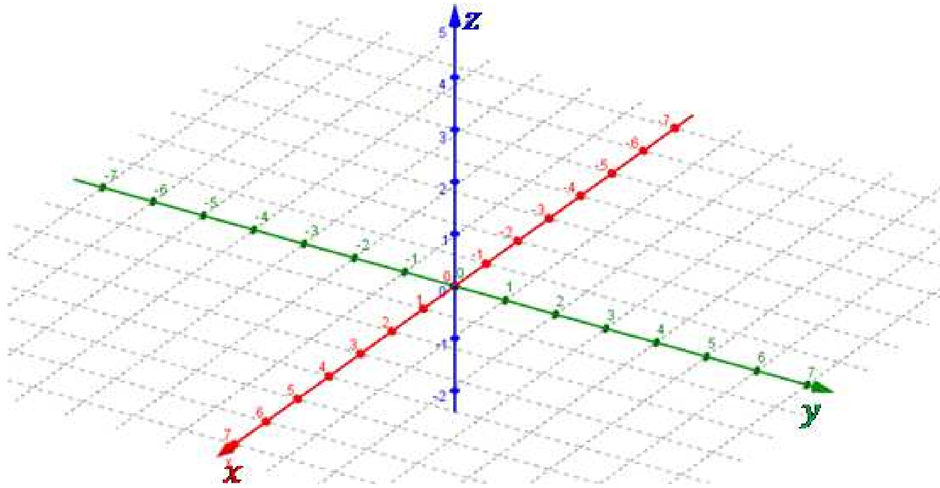
Puntos y vectores en $\mathbb{R}^3$

Puntos en $\mathbb{R}^3$

Para ubicar un punto en $\mathbb{R}^3$ usaremos como sistema de referencia una terna de ejes perpendiculares entre sí:

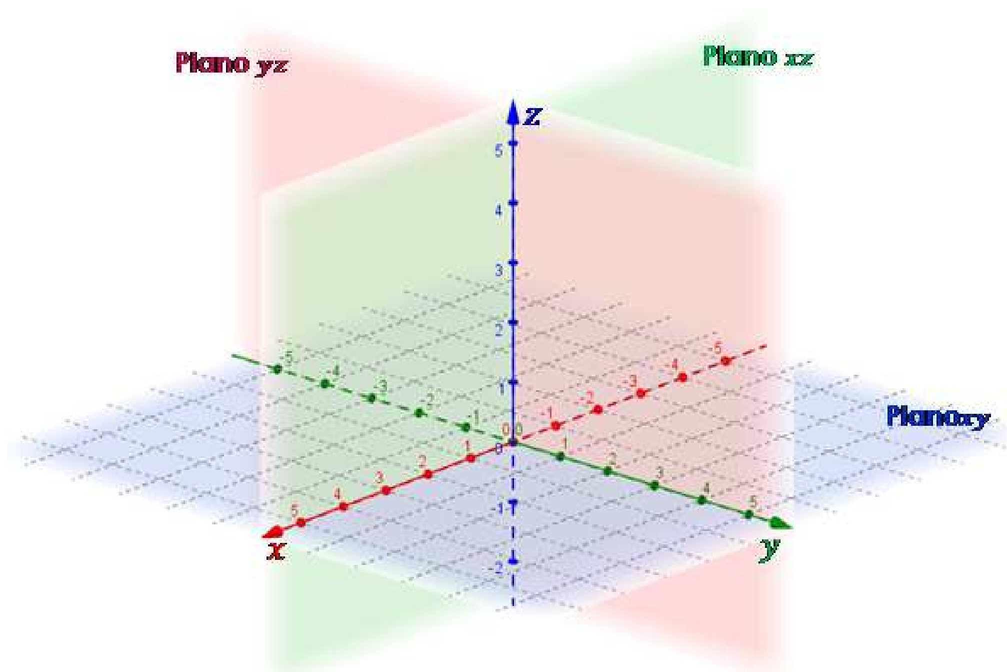
- eje x (eje de abscisas, en rojo)
- eje y (eje de ordenadas, en verde)
- eje z (eje de cotas, en azul)

los cuales se cortan en el punto O (origen de coordenadas).

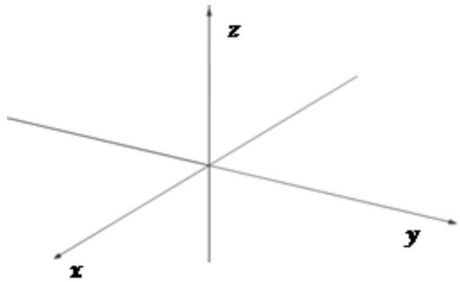


En el siguiente esquema se ven los tres planos que quedan determinados:

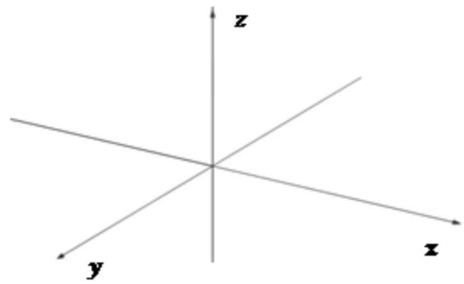
- el plano xy (en azul)
- el plano xz (en verde)
- el plano yz (en rojo)



Estos planos se conocen como planos coordenados. El nombre del plano xy viene de que este plano contiene al eje x y al eje y. En forma análoga se derivan los nombres de los otros dos planos.
Se puede demostrar que hay dos formas diferentes de armar un sistema de referencia con tres ejes perpendiculares. Una de esas formas se conoce con el nombre de terna derecha (que es la que usaremos en esta materia y la que hemos presentado recién) y la otra como terna izquierda:



Terna derecha

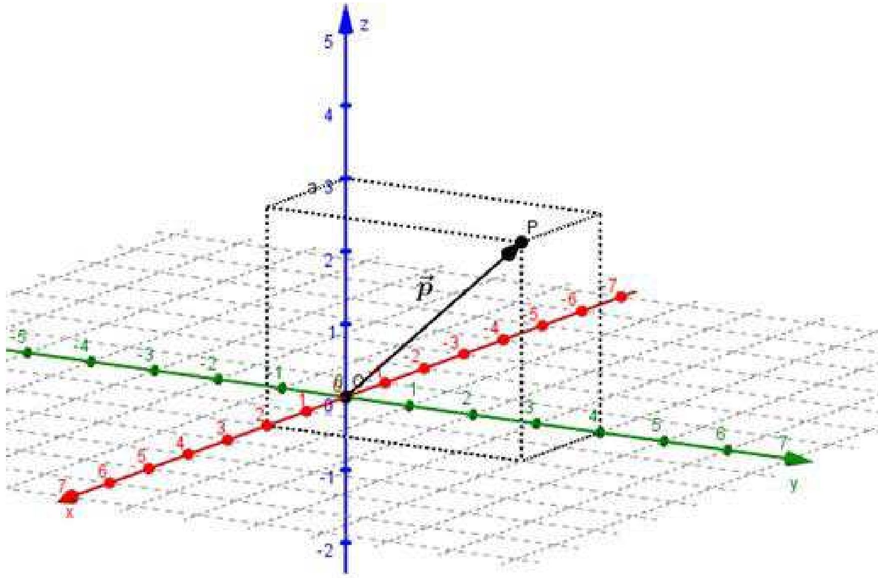


Terna izquierda

Vectores en $\mathbb{R}^3$

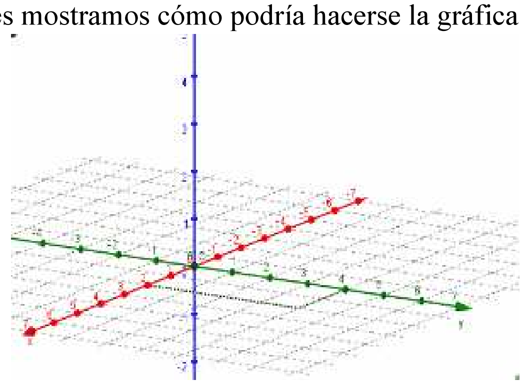
Queda establecido un sistema de coordenadas donde todo punto de $\mathbb{R}^3$ se define mediante una terna ordenada de números reales: $P(x, y, z)$, y tiene asociado un vector posición $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.

Para dar un ejemplo en el siguiente esquema graficamos al punto $P(2,4,3)$, y su vector posición $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$:



Hemos tomado la misma escala sobre cada uno de los ejes. Pero,como en $\mathbb{R}^2$, es posible tomar una escala diferente para cada eje.

En la siguiente imagen animada les mostramos cómo podría hacerse la gráfica del punto paso a paso:



Operaciones y nociones básicas sobre vectores en $\mathbb{R}^3$

Sean $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ y $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ vectores de $\mathbb{R}^3$.
A continuación definimos algunas operaciones y nociones básicas:

- Igualdad: $\vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow v_x = w_x\,,\ v_y = w_y\,,\ v_z = w_z$

- Suma: $\vec{v} + \vec{w} = (v_x + w_x\,,\ v_y + w_y\,,\ v_z + w_z)$

- Vector nulo: $\vec{0} = (0{,}0{,}0)$

- Opuesto de $\vec{v}$: $-\vec{v} = (-v_x, -v_y, -v_z)$

- Resta: $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = (v_x - w_x, v_y - w_y, v_z - w_z)$

El producto de un escalar por un vector se define:

- $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)\ ,\ k \in \mathbb{R}\ \ , k.\vec{v} = (k.v_x, k.v_y, k.v_z)$

$k.\vec{v}$ es un vector tal que:

- Tiene igual dirección que el vector $\vec{v}$
- Sentido: Si $k > 0$ entonces $\vec{v}$ y $k.\vec{v}$ tienen el mismo sentido, si $k < 0$ entonces $\vec{v}$ y $k.\vec{v}$ tienen sentido opuesto. Si $k = 0$, entonces $0.\vec{v} = \vec{0}$.
- $\|k.\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$. El módulo del vector $k.\vec{v}$ es $|k|$ veces el módulo del vector $\vec{v}$.

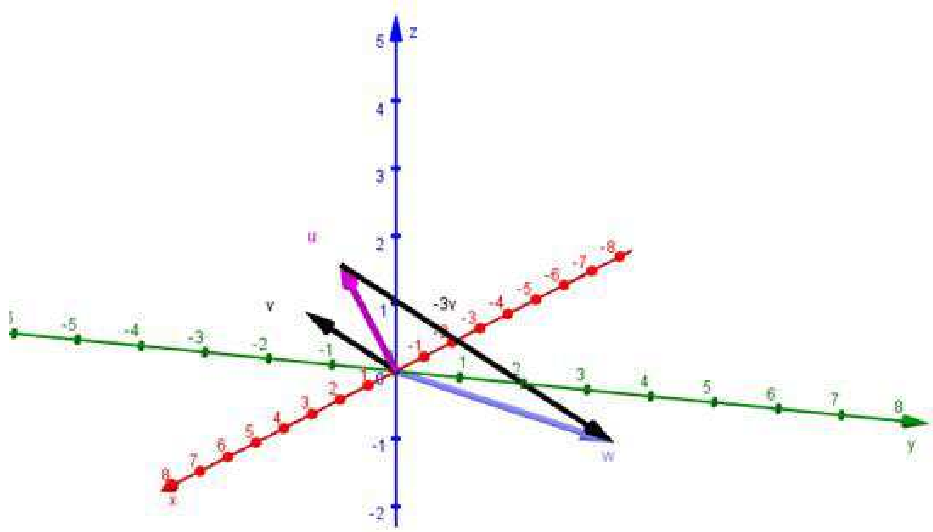
¿Cómo es la longitud del vector $k.\vec{v}$ respecto de la de $\vec{v}$?
Si $|k| > 1$ entonces $\|k.\vec{v}\| > \|\vec{v}\|$
Si $|k| < 1$ entonces $\|k.\vec{v}\| < \|\vec{v}\|$
Si $|k| = 1$ entonces $\|k.\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$
Notación
$\|\vec{v}\|$: módulo o norma de un vector
$|k|$: módulo o valor absoluto de un número real
La definición de producto de un escalar por un vector permite enunciar una condición para que dos vectores (no nulos) sean paralelos:

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} = k.\vec{w}\ \ con\ k \in \mathbb{R}$$

Dados $\vec{u} = (1,-1,1)\,, \vec{v} = (2,0,2)\ y\ \vec{w} = (-1,3,-1)$, ¿Existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{w} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}$?
Para responderlo escribiremos la igualdad y trataremos de calcular α y β:

$$(-1,3,-1) = \alpha.(1,-1,1) + \beta.(2,0,2)$$
$$(-1,3,-1) = (\alpha + 2\beta, -\alpha, \alpha + 2\beta)$$
$$\begin{cases} -1 = \alpha + 2\beta \\ \ \ 3 = -\alpha \\ -1 = \alpha + 2\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = -3 \wedge \beta = 1$$
$$(-1,3,-1) = -3.(1,-1,1) + 1.(2,0,2)$$

Como existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{w} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}$, diremos que $\vec{w}$ es *combinación lineal* de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Más adelante desarrollaremos el concepto de combinación lineal.
Podemos visualizar esto en un gráfico:



Pero esto puede llevarnos a la pregunta:

Dados tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$, ¿es siempre posible encontrar los números reales α y β tales que $\vec{w} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}$?

Veamos otro ejemplo para responderla.

Si los vectores fueran:

$$\vec{u} = (2,-3,4)$$
$$\vec{v} = (-5,1,0)$$
$$\vec{w} = (4,2,1)$$

Veamos si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}$:

$$(4,2,1) = \alpha(2,-3,4) + \beta.(-5,1,0)$$
$$(4,2,1) = (2\alpha, -3\alpha, 4\alpha) + (-5\beta, 1\beta, 0)$$
$$(4,2,1) = (2\alpha - 5\beta, -3\alpha + 1\beta, 4\alpha)$$
$$\begin{cases} 2\alpha - 5\beta = 4 \\ -3\alpha + \beta = 2 \\ 4\alpha = 1 \end{cases}$$

Es un sistema con tres ecuaciones y dos incógnitas. Podemos despejar α y β a partir de dos de las ecuaciones (por ejemplo las dos últimas):

$$\alpha = \frac{1}{4}$$
$$\beta = \frac{11}{4}$$

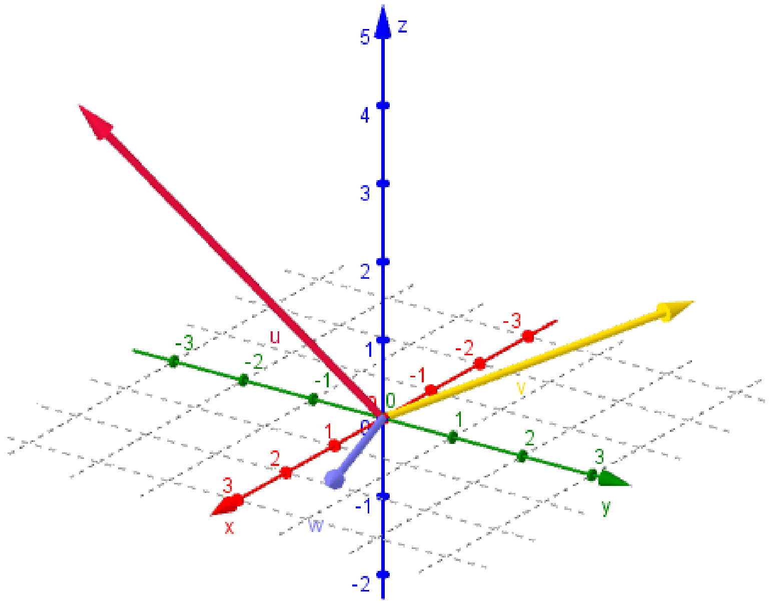
Pero luego debemos verificar si estos valores satisfacen la primera ecuación.

Reemplazamos en: $2\alpha - 5\beta = 4$:

$$\frac{2}{4} - \frac{55}{4} \neq 4$$

No se verifica la ecuación, por lo tanto no existen los escalares α y β que satisfagan la igualdad. En otras palabras, diremos que $\vec{w}$ *no es una combinación lineal* de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

Como puede observarse en la imagen, los tres vectores no están contenidos en un mismo plano (no son coplanares), entonces ninguno de ellos puede obtenerse como combinación lineal de los otros dos:



z
5
4
3
2
1
0
-1
-2
u
v
w
x
y
-3
-2
-1
1
2
3

Propiedades de la suma devectores y del producto por un escalar

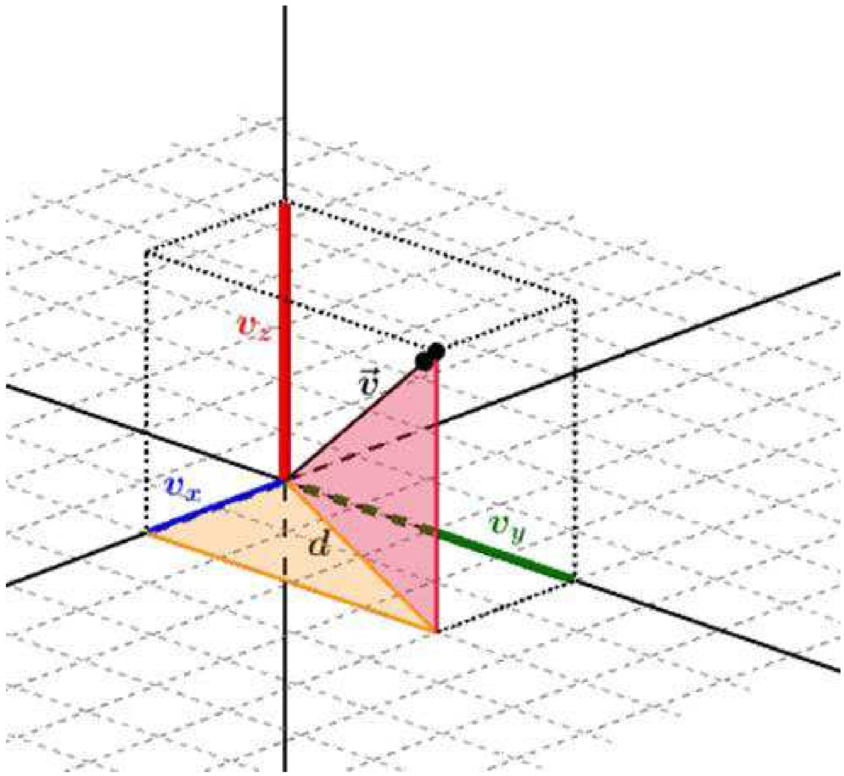
Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Vimos que: $\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. Estas operaciones verifican las siguientes propiedades:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
5. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
6. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
7. $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
8. $1\vec{u} = \vec{u}$

Módulo o norma de un vector en $\mathbb{R}^3$

Nos interesa hallar una fórmula para calcular el módulo o norma de un vector. En $\mathbb{R}^3$ el módulo es la longitud del vector. Para deducirla usaremos los triángulos rectángulos que quedan determinados tal como se muestra en la siguiente figura:



Aplicando el teorema de Pitágoras sobre el triángulo sombreado de naranja:

$$d^2 = v_x^2 + v_y^2 (1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras sobre el triángulo sombreado de rosa:

$$\|\vec{v}\|^2 = d^2 + v_z^2 (2)$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$\|\vec{v}\|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

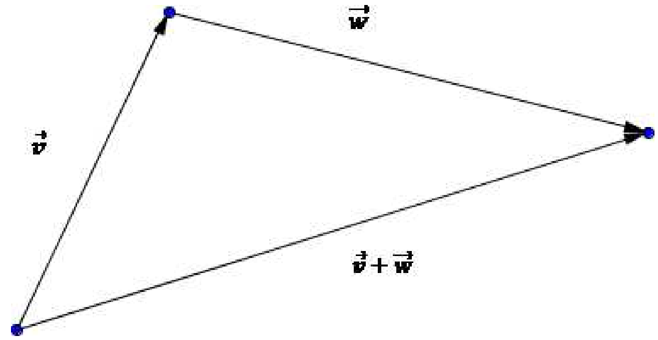
Aplicando raíz cuadrada a ambos miembros:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Propiedades del módulo o norma de un vector

1. $\|\vec{v}\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
2. $\|k.\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|, \ k \in \mathbb{R}$
3. Desigualdad triangular: $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

El nombre de desigualdad triangular se conecta con la propiedad que dice: “La longitud de cada lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos”.



¿Qué condiciones tienen que cumplir los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para que se verifique la igualdad: $\|\vec{v}+\vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$?

Sean $v = (-1,1,2)$ y $w = (3,0,-4)$ calcular:

a. $\|\vec{v}\|$
b. $\|-2\vec{v}\|$
c. $\|\vec{w}\|$
d. $\|\vec{v}+\vec{w}\|$

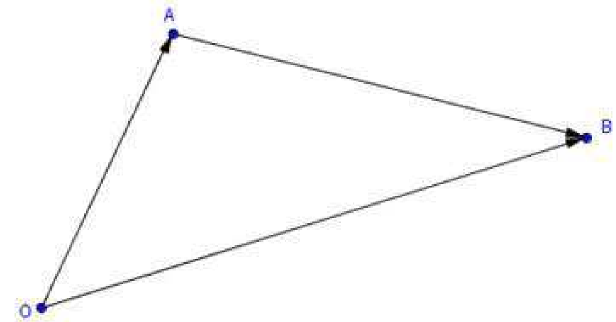
Respuestas:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$$
$$\|-2\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2+2^2+4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$
$$\|\vec{w}\| = \sqrt{3^2+0^2+(-4)^2} = 5$$
$$\|\vec{v}+\vec{w}\| = \|(2,1,-2)\| = \sqrt{2^2+1^2+(-2)^2} = 3$$

Observemos que $\|\vec{v}+\vec{w}\| \neq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

Vector determinado por dos puntos

Dados los puntos $A(X_A, Y_A, Z_A)$ y $B(X_B, Y_B, Z_B)$, el vector $\overrightarrow{AB}$, con origen en A y extremo en B, puede obtenerse como sigue:



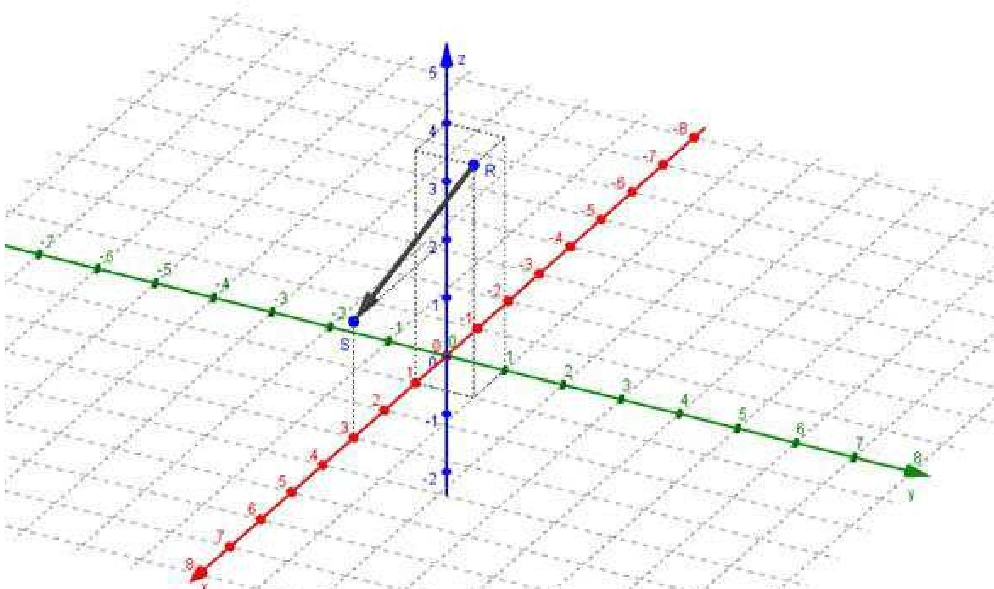
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (X_B, Y_B, Z_{,B}) - (X_A, Y_A, Z_A)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (X_B - X_A, Y_B - Y_A, Z_B - Z_A)$$

Ejemplo

Sean $R(1,1,4)$ y $S(3,0,2)$ dos puntos de $\mathbb{R}^3$, hallar las componentes del vector $\overrightarrow{RS}$.
Según hemos visto:

$$\overrightarrow{RS} = (3-1, 0-1, 2-4) = (2,-1,-2)$$

Veamos esto en un gráfico:



Distancia entre dos puntos

Problema

¿Cómo podríamos calcular la distancia entre $R(1,1,4)$ y $S(3,0,2)$?

Para hallar esta distancia armamos el vector $\overrightarrow{RS}$ (o $\overrightarrow{SR}$) y calculamos su módulo:

$$\overrightarrow{RS} = (2, -1, -2)$$
$$\|\overrightarrow{RS}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$
$$\Rightarrow d(R,S) = 3$$

En general

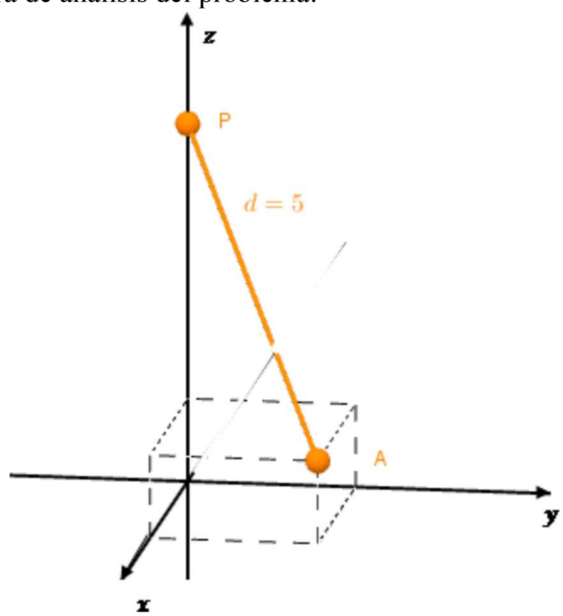
Dados dos puntos $A(x_A, y_A, z_A)$ y $B(x_B, y_B, z_B)$ la distancia entre los mismos se calcula:

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Problema

Encontrar, si es posible, todos los puntos del eje z cuya distancia al punto $A(3,2,1)$ es 5.

Es recomendable hacer una figura de análisis del problema:



Un punto del eje z tiene la forma $P(0,0,z)$. Construyamos el vector desde un punto genérico cualquiera del eje z hasta A.

$$\overrightarrow{PA} = (3, 2, 1 - z)$$

Se pide que el módulo (o norma) de $\overrightarrow{PA}$ sea 5, entonces:

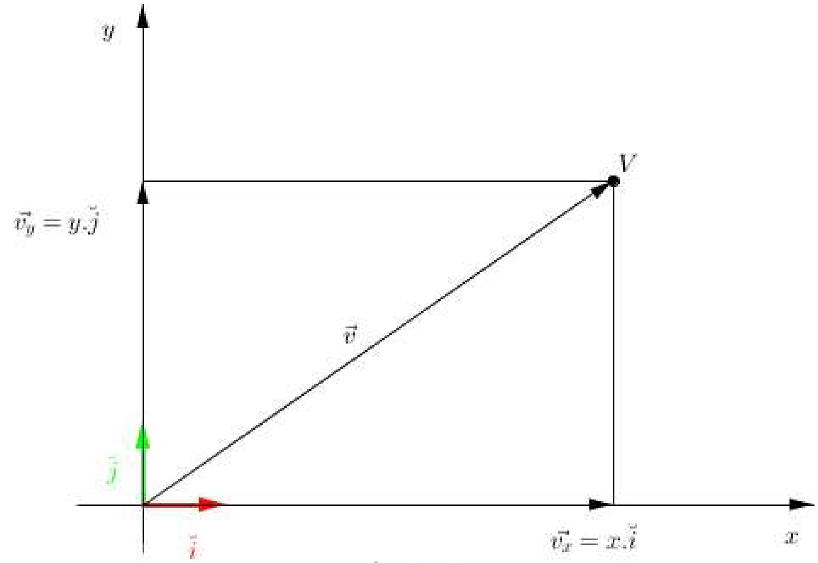
$$\|\overrightarrow{PA}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (1-z)^2} = \sqrt{13 + 1 - 2z + z^2} = \sqrt{14 - 2z + z^2} = 5$$
$$25 = 14 - 2z + z^2 \ \Rightarrow z^2 - 2z - 11 = 0$$
$$z = \frac{2 + \sqrt{4 - 4.1.(-11)}}{2} \quad \vee \quad z = \frac{2 - \sqrt{4 - 4.1.(-11)}}{2}$$
$$z = \frac{2 + \sqrt{48}}{2} \quad \vee \quad z = \frac{2 - \sqrt{48}}{2}$$
$$z = 1 + \sqrt{12} \cong 4{,}46 \quad \vee \quad z = 1 - \sqrt{12} \cong -2{,}46$$

Hemos llegado a que z puede tomar dos valores distintos. Entonces existen dos puntos del eje z cuya distancia al punto $A(3,2,1)$ es 5. Son:

$$P_1(0, 0, 1 + \sqrt{12}) \ \wedge \ P_2(0, 0, 1 - \sqrt{12})$$

Expresión canónica de un vector

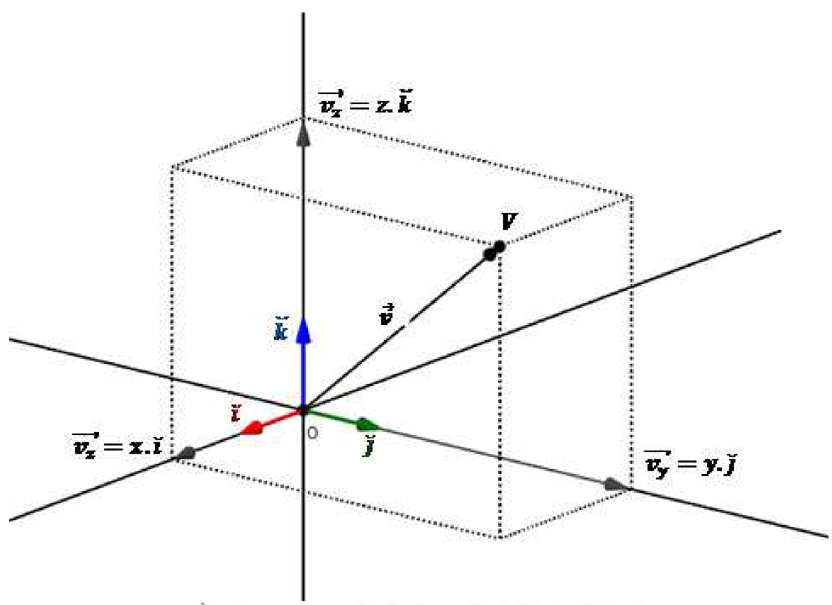
Recordemos que todo vector de $\mathbb{R}^2$ puede expresarse como *combinación lineal* de los versores canónicos $\breve{\imath} = (1,0)$ y $\breve{\jmath} = (0,1)$.



$$\vec{v} = (x, y)$$
$$\vec{v} = x(1,0) + y(0,1)$$
$$\vec{v} = x.\breve{\imath} + y.\breve{\jmath}$$

En forma análoga, todo vector de $\mathbb{R}^3$ puede expresarse como *combinación lineal* de los versores canónicos:

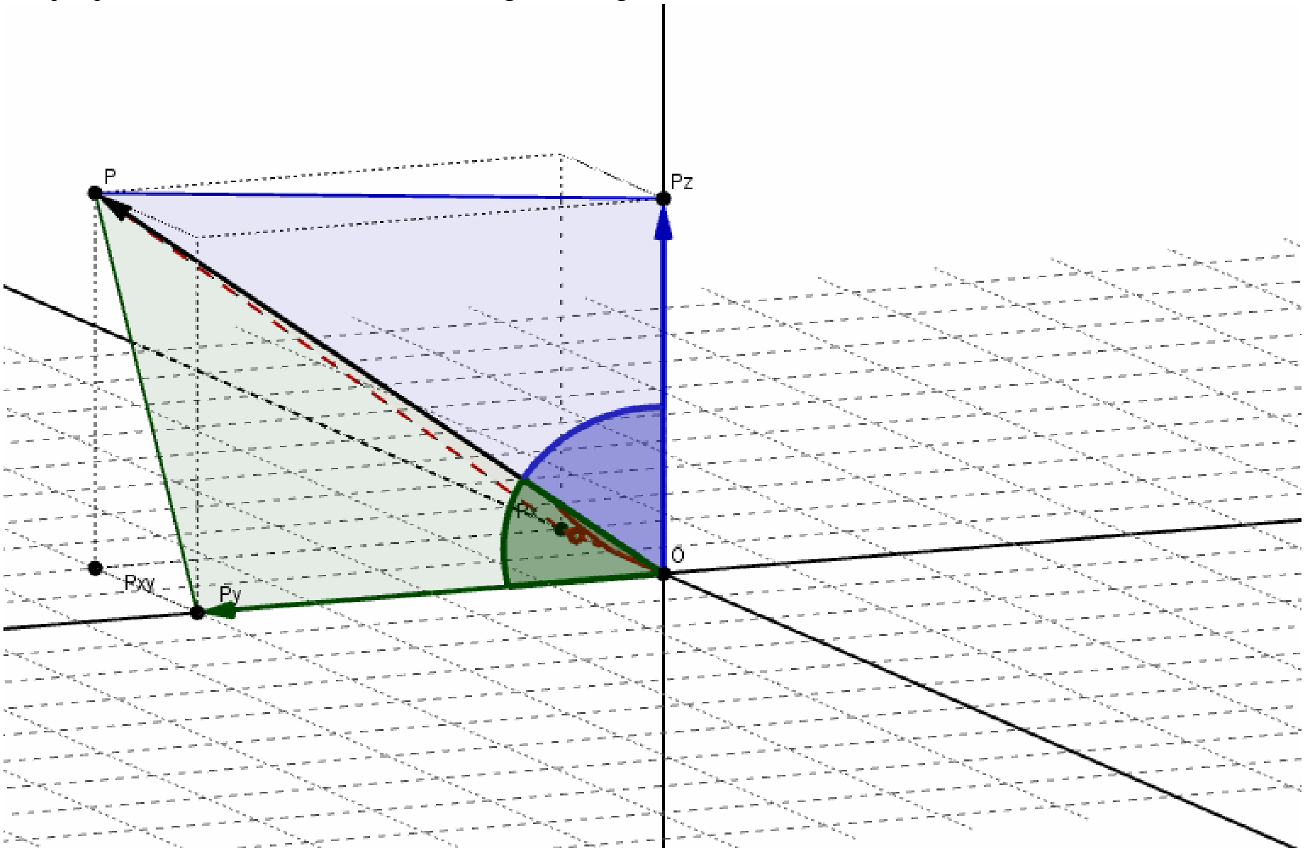
$$\breve{\imath} = (1,0,0)$$
$$\breve{\jmath} = (0,1,0)$$
$$\breve{k} = (0,0,1)$$



$$\vec{v} = (x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$
$$\vec{v} = x.\breve{\imath} + y.\breve{\jmath} + z.\breve{k}(expresión\ canónica)$$

Ángulos directores y cosenos directores de un vector

Se denominan *ángulos directores* de un vector a los ángulos determinados por el vector y cada uno de los semiejes positivos, como se muestra en la siguiente figura:



Los cosenos de dichos ángulos se llaman *cosenos directores* del vector. Aplicando relaciones trigonométricas, podemos obtenerlos cosenos directores:

$$\cos(\alpha) = \frac{v_x}{\|\vec{v}\|} \ , \ \cos(\beta) = \frac{v_y}{\|\vec{v}\|} \ , \qquad \cos(\gamma) = \frac{v_z}{\|\vec{v}\|}$$

Por lo tanto, los ángulos directores son:

$$\alpha = arcos\left(\frac{v_x}{\|\vec{v}\|}\right) \ , \ \beta = arcos\left(\frac{v_y}{\|\vec{v}\|}\right) \ , \qquad \gamma = arcos\left(\frac{v_z}{\|\vec{v}\|}\right)$$

Donde α, β, γ están comprendidos entre 0 y π.

Propiedad

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Demostración

Sustituyamos los cosenos por los cocientes correspondientes:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = \left(\frac{v_x}{\|\vec{v}\|}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{\|\vec{v}\|}\right)^2 + \left(\frac{v_z}{\|\vec{v}\|}\right)^2 = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{\|\vec{v}\|^2} = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{v}\|^2} = 1$$

Ejemplo

Hallar los ángulos directores de $v = (2,0,-2)$

Respuesta

Hallemos el módulo del vector:

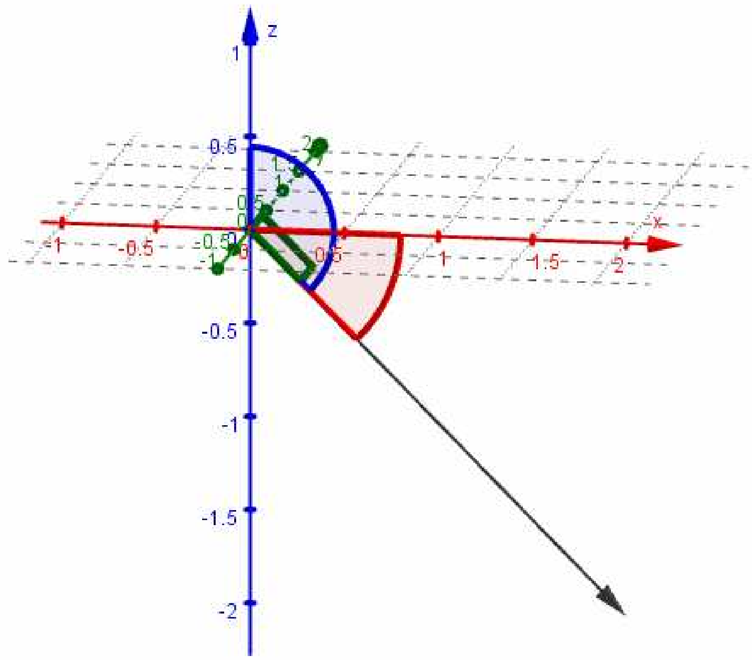
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Ahora calculamos los ángulos con el arco coseno de los cocientes:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = 45°$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{0}{2\sqrt{2}}\right) = 90°$$
$$\gamma = \arccos\left(\frac{-2}{2\sqrt{2}}\right) = 135°$$

Veamos una gráfica del vector y sus ángulos directores:



Versor asociado a un vector

Dado un vector no nulo $\vec{v}$, se denomina *versor asociado* $\breve{v}$ al vector unitario (de módulo 1) que tiene igual dirección y sentido que $\vec{v}$.
Dado $\vec{v}$ distinto de $\vec{0}$, su versor asociado se obtiene así:

$$\breve{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Tomando en cuenta los cosenos directores,

$$\vec{v} = (\|\vec{v}\| \cos\alpha\ ,\ \ \|\vec{v}\| \cos\beta\ ,\ \ \|\vec{v}\| \cos\gamma)$$

Entonces

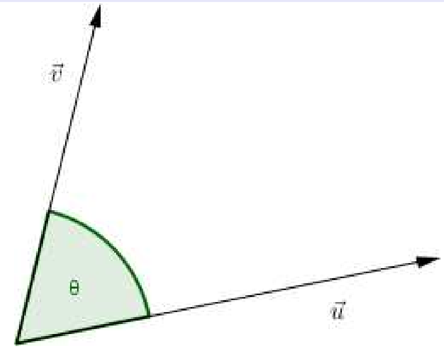
$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \breve{v} = (\cos\alpha\ , \cos\beta\ , \cos\gamma)$$

O sea, las componentes del versor $\breve{v}$ son los cosenos directores de $\vec{v}$.

Producto escalar en $\mathbb{R}^3$

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, y θ el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces el producto escalar entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se define como sigue:

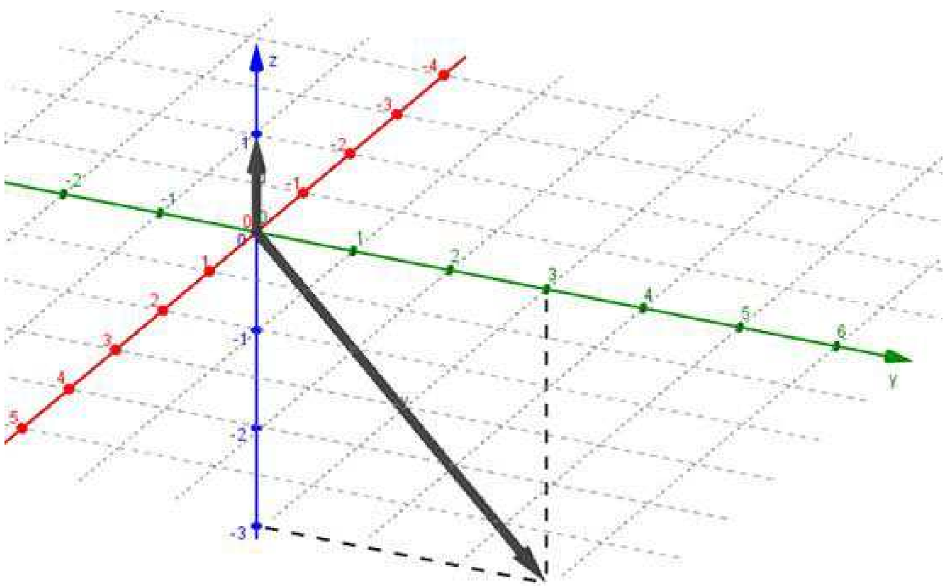
$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\theta) \ \ si \ \vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 \ \ si \ \vec{u} = \vec{0} \ \vee \vec{v} = \vec{0} \end{cases} [1]$$



Hallar $\vec{u}.\vec{v}$ para $\vec{u} = (0,0,1)$, $\vec{v} = (0,3,-3)$

Resolución

Hagamos una gráfica para visualizar el ángulo entre los dos vectores:



Calculemos los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\|\vec{u}\| = 1$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

A partir del gráfico podemos determinar que el ángulo entre los vectores es $\theta = 135°$

O en radianes: $\theta = \frac{3}{4}\pi$

Calculemos el producto escalar:

$$\vec{u}.\vec{v} = 1.\sqrt{18}.\cos(135°) = 3\sqrt{2}.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3$$

Pero no siempre es tan sencillo. Consideremos los vectores:

$$\vec{u} = (-3,5,8) \quad , \quad \vec{v} = (1,1,1)$$

Si quisiéramos calcular el producto escalar entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, deberíamos conocer el ángulo comprendido entre dichos vectores.

Usando el teorema del coseno se puede deducir otra fórmula para calcular el producto escalar en función de las componentes de los vectores.

Sean $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$, entonces:

$$\vec{u}.\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \qquad [2]$$

Para los vectores dados, resulta:

$$\vec{u}.\vec{v} = (-3).1 + 5.1 + 8.1 = 10$$

Propiedades del producto escalar

1. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
2. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
3. $k(\vec{u}.\vec{v}) = (k\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}.(k\vec{v})$, $k \in \mathbb{R}$
4. $\vec{v}.\vec{v} = (v_x, v_y, v_z).(v_x, v_y, v_z) = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \|\vec{v}\|^2 > 0 \; \forall \vec{v} \neq \vec{0}$

De (4) se deduce que: $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}}$

Ángulo entre vectores

Dados $\vec{u}, \vec{v}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, queremos hallar el ángulo entre ellos.
Si θ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de las definiciones [1] y [2] deproducto escalar resulta:

$$\cos(\theta) = \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right), \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Por ejemplo, si

$$\vec{u} = (1{,}1{,}3)$$
$$\vec{v} = (-1{,}0{,}4)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1.(-1) + 1.0 + 3.4}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2}.\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 4^2}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{11}{\sqrt{11}.\sqrt{17}}\right) \cong 36{,}44^{\circ}$$

Condición de perpendicularidad entre vectores

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ no nulos,

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Esto permite enunciar una condición de perpendicularidad:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$$

EPL 1

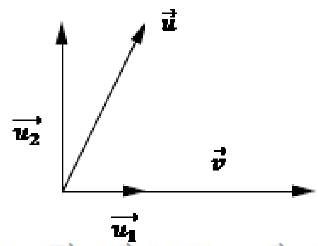
Dados $\vec{u} = (1{,}2{,}3)$ y $\vec{v} = (0{,}2{,}5)$ encontrar todos los vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ de módulo 3.

Proyección de un vector en la dirección de otro

El producto escalar es útil en problemas en los que se tiene interés en descomponer un vector como suma de vectores perpendiculares.

Dados dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, nos proponemos descomponer $\vec{u}$ como suma de un vector paralelo a $\vec{v}$ y otro perpendicular a $\vec{v}$. O sea:

$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1} \parallel \vec{v} \text{ y } \overrightarrow{u_2} \perp \vec{v}$$



$$\overrightarrow{u_1} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1} = k\vec{v}\ , k \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \vec{u} = k\vec{v} + \overrightarrow{u_2}$$

Podemos aplicar a ambos miembros producto escalar por $\vec{v}$. Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{u_2}.\vec{v} = 0$ por ser perpendiculares, resulta:

$$\vec{u}.\vec{v} = (k\vec{v} + \overrightarrow{u_2}).\vec{v} \ \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = k\underbrace{\vec{v}.\vec{v}}_{\|\vec{v}\|^2} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}.\vec{v}}_{0} \ \Rightarrow u.v = k\underbrace{\|\vec{v}\|^2}_{\neq 0} \ \Rightarrow k = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$$

Entonces:

$$\overrightarrow{u_1} = \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|v\|^2}\right)\vec{v}$$

Este vector es la *proyección de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$* :

$$\overrightarrow{proy_{\vec{v}}}(\vec{u}) = \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|v\|^2}\right)\vec{v}$$

El vector $\vec{u}_2$ puede obtenerse por diferencia:

$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} \ \Rightarrow \overrightarrow{u_2} = \vec{u} - \overrightarrow{u_1}$$

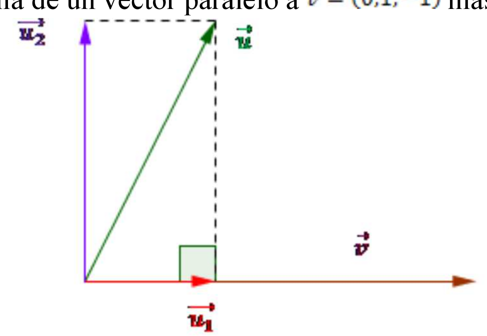
Recordemos que $\overrightarrow{u_2}$ debe ser perpendicular a $\vec{v}$.

Para resolver algunos problemas geométricos, es útil calcular el módulo del vector de proyección:

$$\|\overrightarrow{proy_{\vec{v}}}(\vec{u})\| = \left|\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|v\|^2}\right| \|\vec{v}\| = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|v\|^2}\|\vec{v}\| = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$$

Ejemplo

Descomponer $\vec{u} = (1,2,1)$ como suma de un vector paralelo a $\vec{v} = (0,1,-1)$ más otro perpendicular a $\vec{v}$.



Primero buscamos $\overrightarrow{u_1}$:

$$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{proy_{\vec{v}}}(\vec{u}) = \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \left(\frac{(1,2,1).(0,1,-1)}{0^2 + 1^2 + (-1)^2}\right)(0,1,-1)$$
$$= \frac{0+2-1}{2}(0,1,-1) = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{u_2} = \vec{u} - \overrightarrow{u_1} = (1,2,1) - \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Comprobación: $\overrightarrow{u_2} \perp \vec{v}$

$$\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) . (0,1,-1) = 0$$

Producto vectorial

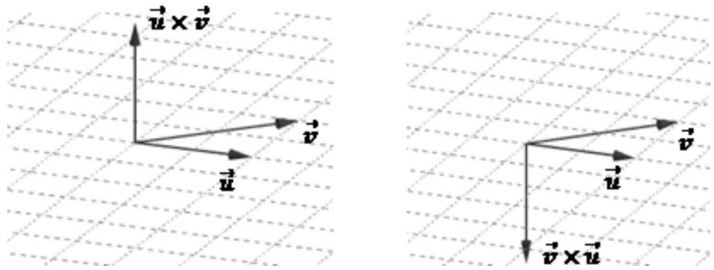
Definición

Para resolver numerosos problemas de Geometría, Física e Ingeniería, interesa construir un vector en $\mathbb{R}^3$ que sea perpendicular a dos vectores dados.
O sea: dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, nos proponemos hallar un vector $\vec{w}$ tal que $\vec{w} \perp \vec{u}$ y $\vec{w} \perp \vec{v}$.
El producto vectorial es una operación entre vectores que facilita la obtención de $\vec{w}$.
Definición: El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que indicaremos $\vec{u} \times \vec{v}$, es un vector

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$$

Que tiene:

- Dirección perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$: $\vec{w} \perp \vec{u} \ \wedge \ \vec{w} \perp \vec{v}$
- Sentido: regla de la mano derecha: si con la mano derecha se recorre el menor ángulo posible entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el pulgar indica el sentido de $\vec{w}$



- Módulo:

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \ sen(\theta)$$

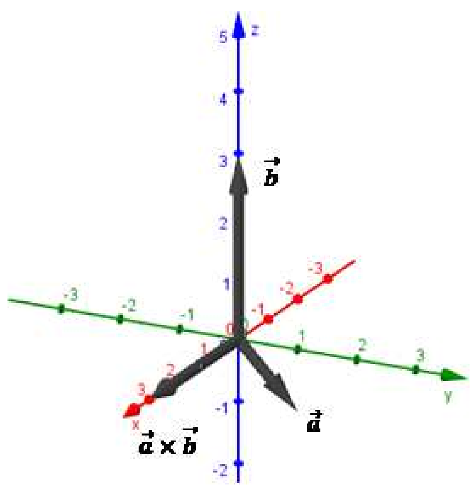
siendo θ el ángulo comprendido entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
Se puede ver que <u>no</u> es una operación conmutativa porque si cambiamos el orden de los vectores, se conservan la dirección y el módulo del producto vectorial pero se invierte su sentido:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

Ejemplo

$$\vec{a} = (0,1,-1)$$
$$\vec{b} = (0,0,3)$$

Hallar el vector $\vec{a} \times \vec{b}$.



Dirección: eje x
Sentido: semieje positivo de x
Módulo: $\sqrt{2}.3.sen(135°) = \sqrt{2}.3.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3$
Entonces:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3,0,0)$$

Propiedades del producto vectorial

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
2. $(u+v) \times w = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
3. $(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (k\vec{v})$
4. $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}\,,\ pues\ \ \|\vec{v} \times \vec{v}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{v}\|\ sen(0) = 0$
5. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}\,,\ pues\ \ sen(0°) = sen(180°) = 0$
6. $\vec{0}\, x\, \vec{v} = \vec{v}\, x\, \vec{0} = \vec{0}$

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos, podemos enunciar una *condición necesaria y suficiente de paralelismo*:

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \ \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v} \ \ con\ \ k\ \in R$$

EPL 2

A partir de las características del producto vectorial podemos calcular los productos vectoriales de los versores canónicos. Por ejemplo:

$$\breve{\imath} \times \breve{\imath} = \vec{0}$$
$$\breve{\imath} \times \breve{\jmath} = \breve{k}$$

Le proponemos al lector que calcule los restantes productos vectoriales de los versores canónicos:

$$\breve{\imath} \times \breve{k} =$$
$$\breve{\jmath} \times \breve{\imath} =$$
$$\breve{\jmath} \times \breve{\jmath} =$$
$$\breve{k} \times \breve{\imath} =$$
$$\breve{k} \times \breve{\jmath} =$$
$$\breve{k} \times \breve{k} =$$

Fórmula para calcular el producto vectorial

Dados $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y $v = (v_x, v_y, v_z)$ podemos hallar una fórmula para el producto vectorial expresando los vectores en forma canónica:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_x\breve{\imath} + u_y\breve{\jmath} + u_z\breve{k}) \times (v_x\breve{\imath} + v_y\breve{\jmath} + v_z\breve{k})$$

Aplicando propiedades del producto vectorial y considerando los productos entre los versores canónicos, se obtiene la siguiente fórmula:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y\,, -(u_x v_z - u_z v_x)\,, u_x v_y - u_y v_x)\mathbf{[1]}$$

Esta fórmula puede expresarse en forma más sencilla utilizando determinantes, tema que presentaremos brevemente y luego desarrollaremos en la próxima unidad.

Una *matriz* es un ordenamiento rectangular de números,como caso particular nos interesan las matrices cuadradas (igual número de filas y de columnas).

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matriz 2x2 (2 filas y 2 columnas)

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ matriz 3x3 (3 filas y 3 columnas)

A cada matriz cuadrada puede asignársele un número real que llamaremos su *determinante* y designaremos como $det(A)$o $|A|$. Para matrices $2x2$ y $3x3$ el determinante se calcula como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Podemos expresar la fórmula [1] utilizando determinantes como sigue:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}\breve{\imath} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}\breve{\jmath} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\breve{k}$$

Con la notación habitual de ternas, resulta:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\right)$$

Veamos cómo utilizar esta regla práctica para calcular un producto vectorial:

$$\vec{u}=(1,2,3)$$
$$\vec{v}=(0,2,5)$$
$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right)=(4,-5,2)$$

Comprobemos que el vector obtenido es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$:

$$(4,-5,2).(1,2,3)=0$$
$$(4,-5,2).(0,2,5)=0$$

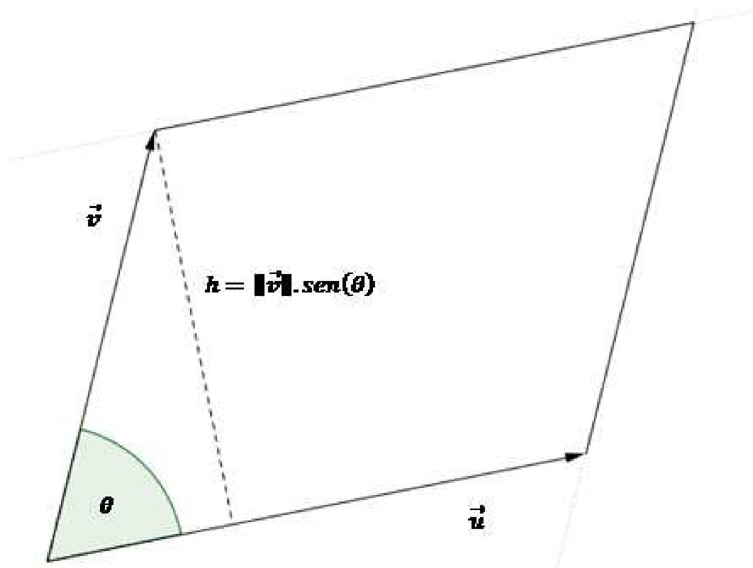
Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial

Consideremos los siguientes vectores y calculemos el módulo del producto vectorial.

$$\vec{u}=(1,2,3)\ ,\ \ \vec{v}=(0,2,5)$$
$$\vec{u}\times\vec{v}=(4,-5,2)$$
$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{45}=3.\sqrt{5}$$

¿Qué representa este número $3\sqrt{5}$?

Dibujemos cualquier par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y hagamos el paralelogramo determinado entre ellos:



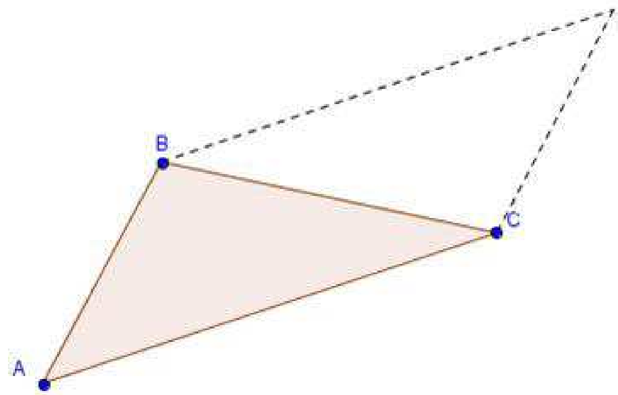
$$\text{Área del paralelogramo}=\|\vec{u}\|.h$$
$$sen(\theta)=\frac{h}{\|\vec{v}\|}\Rightarrow h=\|\vec{v}\|sen(\theta)$$

$$\text{Área del paralelogramo}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\ sen(\theta)=\|\vec{u}\times\vec{v}\|$$

Conclusión: *Dados dos vectores no paralelos, el módulo de su producto vectorial representa el área del paralelogramo determinado por dichos vectores.*

Ejemplo

Dados $A(1,3,1)$, $B(2,-3,5)$ y $C(0,2,1)$ calcular el área del ΔABC.



Podemos pensar al área del triángulo como la mitad del área del paralelogramo:

$$\overrightarrow{AB} = (1,-6,4) \qquad Área\ del\ triángulo = \frac{1}{2}.\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1,-1,0)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4,-4,-7)$$

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$$

$$Área\ del\ triángulo = \frac{1}{2}.9 = 4{,}5$$

Producto mixto

Definición

Dados tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, se denomina *producto mixto* al número real que se obtiene multiplicando $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})$.

Para obtener el producto mixto, se calcula primero el producto vectorial y luego el escalar.

Dejamos como ejercicio para el lector, demostrar que:

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}$$

Veamos un ejemplo:

$$\vec{u} = (1,2,3)$$
$$\vec{v} = (0,2,5)$$
$$\vec{w} = (0,0,2)$$

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})$$

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4,0,0)$$

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = 4$$

Ahora hagamos al revés:

$$(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (4,-5,2)$$

$$(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w} = (4,-5,2).(0,0,2) = 4$$

Existe otro procedimiento para calcular el producto mixto a través de un determinante de 3x3.

Dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, el producto mixto es:

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1.\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2.\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3.\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

Calculemos con este método el producto mixto de:

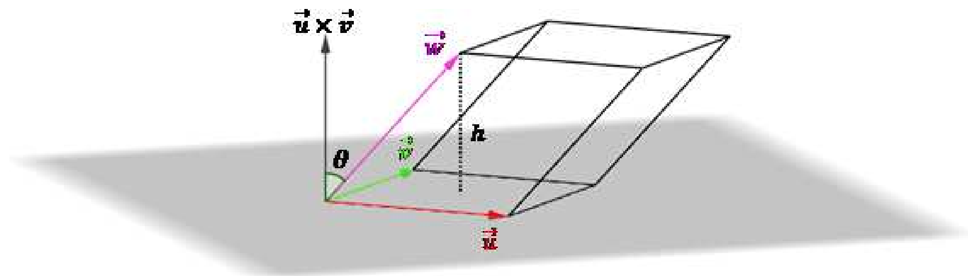
$$\vec{u} = (1,2,3)$$
$$\vec{v} = (0,2,5)$$
$$\vec{w} = (0,0,2)$$

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

¿Qué significado tiene para la Geometría este número que hemos obtenido con el producto mixto?

Interpretación geométrica del producto mixto

Consideremos 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ y construyamos un paralelepípedo (cuerpo cuyas seis caras son paralelogramos):



$$Volumen\ del\ paralelepipedo = Área\ de\ la\ base\ .\ Altura$$
$$A = \|\vec{u}\times\vec{v}\|$$
$$h = |\cos(\theta)|\,\|\vec{w}\|$$

siendo θ el ángulo entre $(\overrightarrow{\vec{u}\times v})\ y\ \vec{w}$.

Observación: $\cos(\theta)$ podría ser negativo, por eso tomamos su valor absoluto para el cálculo de la altura.

Entonces:

$$V = \|\vec{u}\times\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\,|\cos(\theta)| \quad [1]$$

Por otra parte:

$$(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w} = \|\vec{u}\times\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\cos\big(áng(\vec{u}\times\vec{v}, \vec{w})\big) = \|\vec{u}\times\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\cos(\theta) \quad [2]$$

De [1] y [2] resulta:

$$\boxed{Volumen\ del\ paralelepipedo = |(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}|}$$

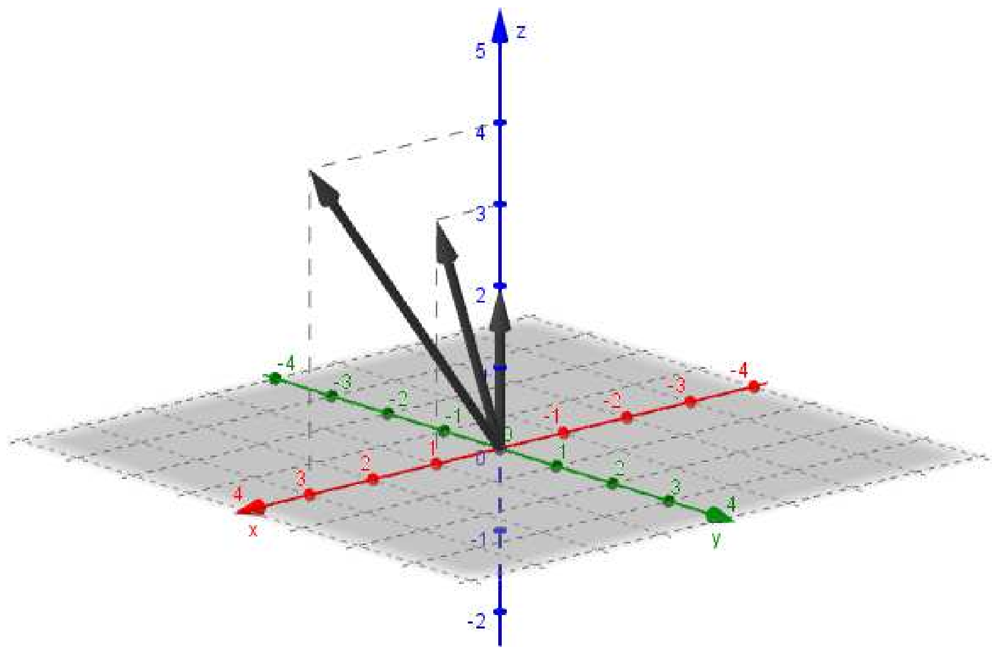
Retomemos el ejemplo con los vectores $\vec{u} = (1,2,3), \vec{v} = (0,2,5), \vec{w} = (0,0,2)$
De acuerdo al valor del producto mixto obtenido, el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores es igual a 4.

Coplanaridad

Consideremos los vectores $\vec{u} = (1,0,3), \vec{v} = (0,0,2), \vec{w} = (3,0,4)$. Les proponemos que verifiquen que el producto mixto da cero.

Si el producto mixto es cero, el volumen es 0, o sea que no se forma el paralelepípedo.

Veamos una gráfica de estos tres vectores:

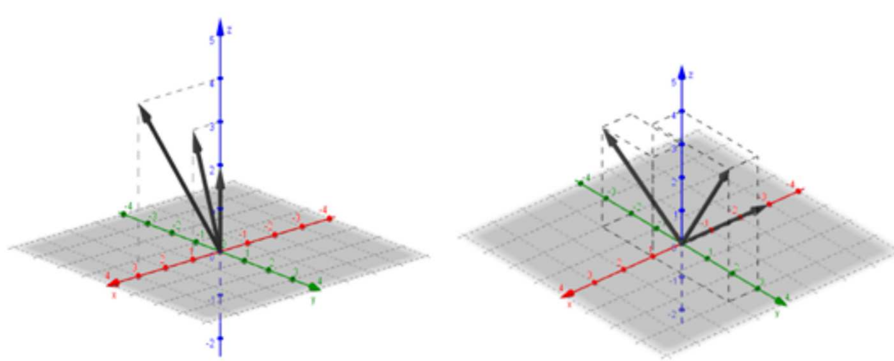


Observamos que los tres vectores están en el plano $y = 0$, es decir que son *coplanares*.

Tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ se denominan coplanares si considerados con un origen común, sus direcciones quedan incluidas en un mismo plano.

El producto mixto nos permite enunciar una condición de coplanaridad:

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son coplanares $\Leftrightarrow$ $(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w} = 0$



Tres vectores coplanares — $(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w} = 0$

Tres vectores no coplanares — $(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w} \neq 0$

Lo que hemos desarrollado hasta aquí sobre vectores resulta una herramienta potente para el estudio de la geometría de rectas y planos en $\mathbb{R}^3$, como veremos a continuación.

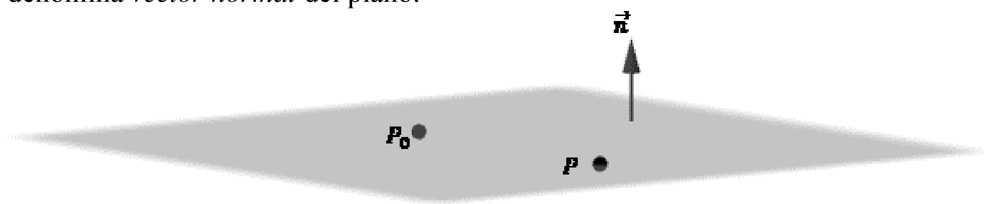
Plano y recta en $\mathbb{R}^3$

Ecuaciones del plano

Deducción de la ecuación general del plano

Dada una dirección en $\mathbb{R}^3$, existen infinitos planos perpendiculares a la misma. Si conocemos además un punto del plano, éste queda determinado de forma única.

Nos proponemos hallar la ecuación del plano π que pasa por $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (a, b, c)$.
El vector $\vec{n}$ se denomina *vector normal* del plano.



¿Qué condición debe cumplir un punto $P(x, y, z)$ para estar en el plano π? Si armamos el vector $\overrightarrow{P_0P}$, éste debe ser paralelo al plano, o sea perpendicular al vector normal del plano:

$$P(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P}.\vec{n} = 0$$
$$(x - x_0\,, y - y_0, z - z_0).(a, b, c) = 0$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$$

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0} \qquad \textit{Ecuación general o implícita del plano}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{n} = (3,2,1)$ que pasa por el punto $P_0\,(1,1,-1)$.
Las componentes de $\vec{n}$ nos indican los coeficientes a, b y c de la ecuación del plano:

$$\pi\colon\; 3x + 2y + z + d = 0$$

¿Cómo hallamos d?
El punto debe verificar la ecuación, entonces reemplazamos P_0 y obtenemos el coeficiente que faltaba:

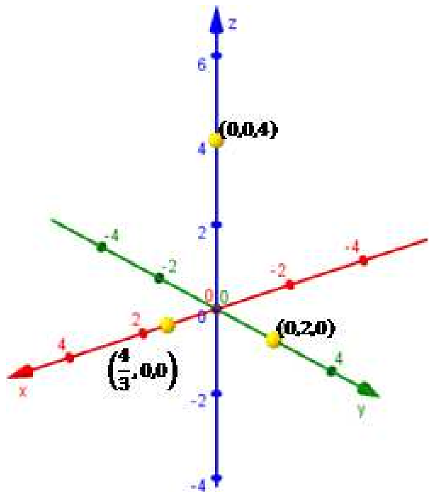
$$3.1 + 2.1 - 1 + d = 0 \;\Rightarrow d = -4$$

Así obtenemos la ecuación del plano:

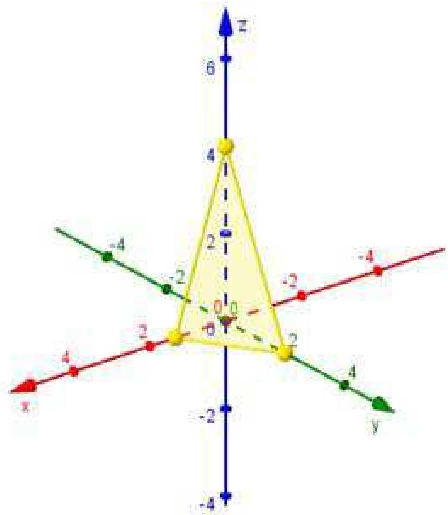
$$\pi\colon\; 3x + 2y + z - 4 = 0$$

Éste es el único plano que pasa por el punto P_0 y es perpendicular al vector $\vec{n}$.
Para efectuar un gráfico aproximado del plano que obtuvimos, podemos buscar sus intersecciones con los ejes coordenados:
Para hallar la intersección con el eje x, debemos plantear $y = z = 0$ y despejar el valor de x.
Análogamente para las otras intersecciones, tal como se muestra en el siguiente cuadro:

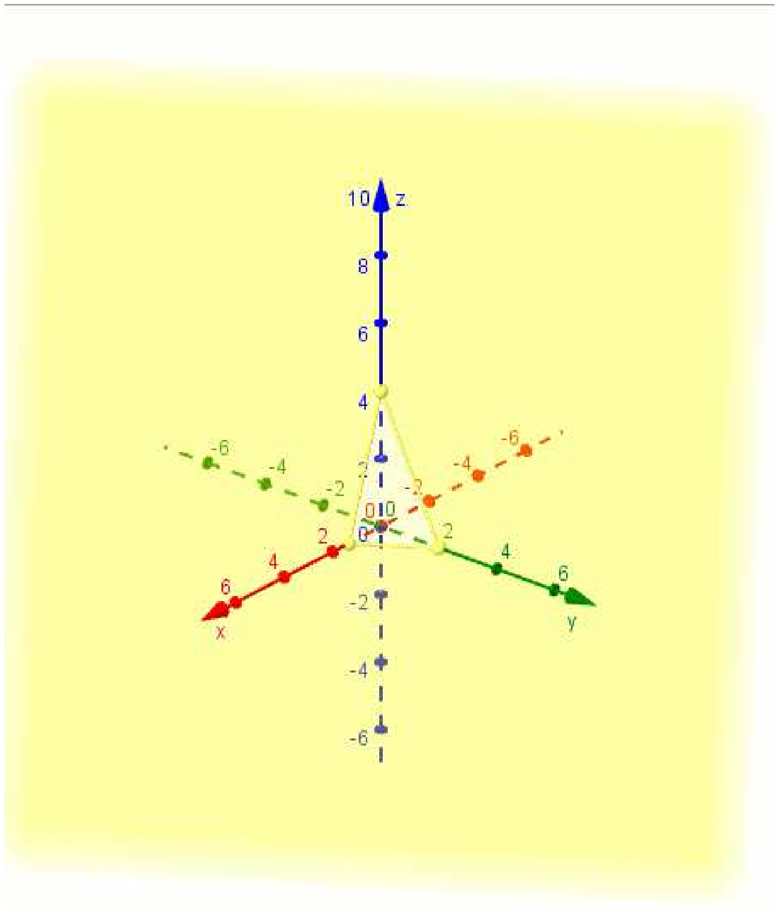
Ejes coordenados	Punto de intersección del plano con el eje
$Eje\ x\colon\; y = z = 0$	$\left(\frac{4}{3}, 0,0\right)$
$Eje\ y\colon\; x = z = 0$	$(0,2,0)$
$Eje\ z\colon\; x = y = 0$	$(0,0,4)$



Tres puntos no alineados determinan un único plano que los contiene. Trazamos los segmentos que unen los puntos hallados y obtenemos la representación gráfica de una porción del plano:



Mostramos una gráfica del plano realizada con GeoGebra:



Ejemplo

Dados los puntos $R(1,2,3)$ y $S(3,-1,2)$, encontrar la ecuación del plano que corta perpendicularmente al segmento RS en su punto medio.

Resolución

Busquemos las coordenadas del punto medio:

$$M=\left(\frac{1+3}{2},\frac{2+(-1)}{2},\frac{3+2}{2}\right)=\left(2,\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$$

Como el plano corta perpendicularmente al segmento RS, podemos tomar $\overrightarrow{RS}$ como vector normal del plano:

$$\overrightarrow{RS}=(2,-3,-1)$$

Escribimos la ecuación del plano al que llamaremos β:

$$\beta:\ 2x-3y-1z+d=0$$

Para hallar d reemplazamos el punto M:

$$2.2-3.\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+d=0\Rightarrow d=0$$

Y así obtenemos la ecuación buscada:

$$\beta:\ 2x-3y-z=0$$

Este plano pasa por el origen, o sea que intersecta a los tres ejes en $(0,0,0)$. Necesitamos al menos dos puntos más para graficarlo.

Para facilitar el gráfico podemos elegir puntos que estén sobre los planos coordenados. Por ejemplo $y=0$:

$$\Rightarrow 2x-z=0\Rightarrow z=2x$$

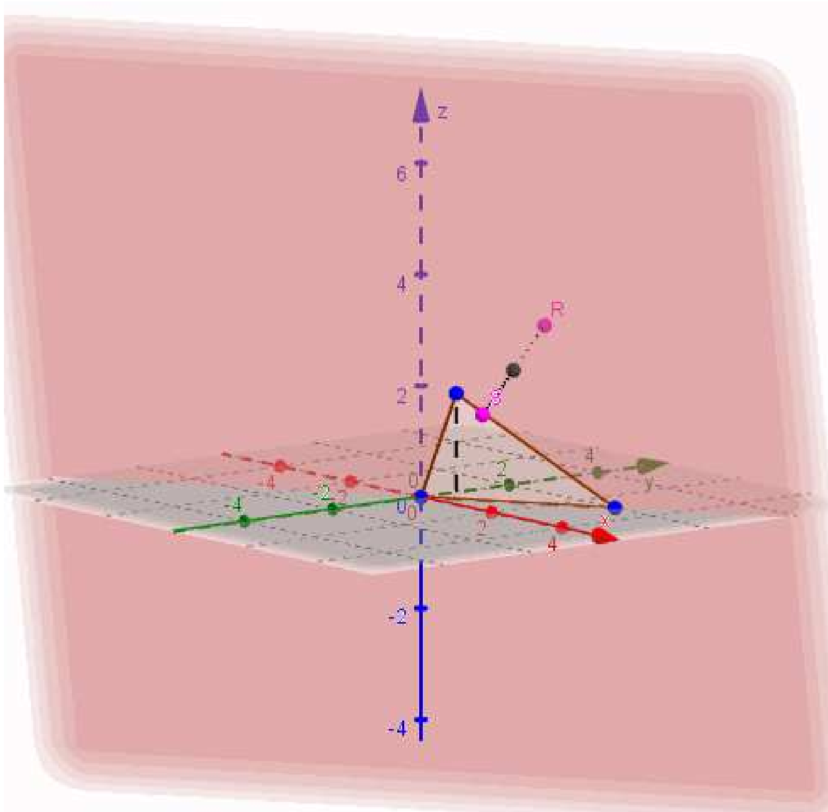
Entonces haciendo que $x=1$ debe ser $z=2$, y obtenemos el punto $P_1(1,0,2)$

Para tomar otro punto del plano podemos hacer que $z=0$

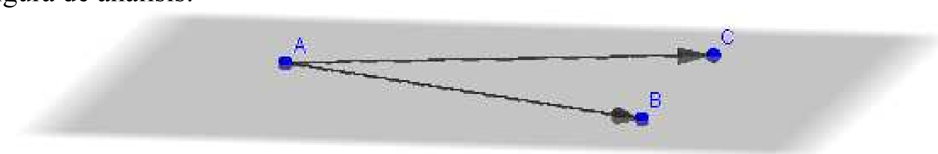
$$\Rightarrow\ 2x-3y=0\Rightarrow y=\frac{2}{3}x$$

Y si $x=3$ entonces $y=2$. Obtenemos el punto $P_2(3,2,0)$

Entonces β contiene a los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,2)$ y $(3,2,0)$:



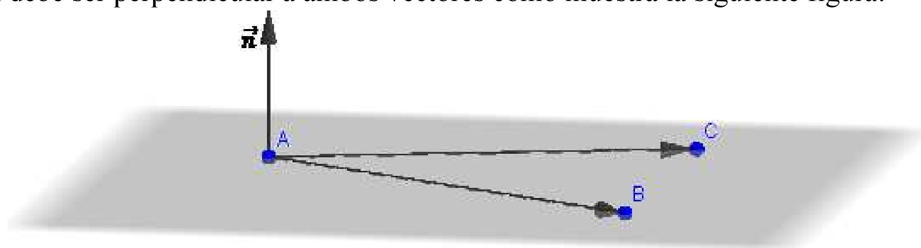
Dados $A(4{,}5{,}2)$, $B(1{,}3{,}4)$, $C(2{,}2{,}5)$ hallar, si es posible, el plano que contiene a los tres puntos.
Habíamos dicho que tres puntos no alineados determinan un único plano que los contiene.
Hagamos una figura de análisis:



Con los tres puntos, podemos armar dos vectores, por ejemplo:

$$\overrightarrow{AB} = (-3,-2{,}2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-2,-3{,}3)$$

El vector normal debe ser perpendicular a ambos vectores como muestra la siguiente figura:



¿Qué operación nos permite hallar un vector perpendicular a otros dos?

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0{,}5{,}5)$$

¿Qué resultado habríamos obtenido si A, B y C estuvieran alineados?
El vector $(0{,}5{,}5)$ es perpendicular al plano que buscamos, entonces podemos tomar $\vec{n} = (0{,}5{,}5)$ y escribir la ecuación del plano:

$$\alpha\colon\ 5y + 5z + d = 0$$

Para hallar d podemos reemplazar cualquiera de los tres puntos. Reemplacemos A:

$$5.5 + 5.2 + d = 0 \Rightarrow d = -35$$

Luego:

$$5y + 5z - 35 = 0$$

Podemos dividir por 5 ambos miembros:

$$\alpha: \ y + z - 7 = 0$$

El lector puede comprobar que los puntos B y C verifican esta ecuación.

Busquemos las intersecciones con los ejes para graficar el plano:

$$y = z = 0 \Rightarrow -7 = 0 \ \ Absurdo$$

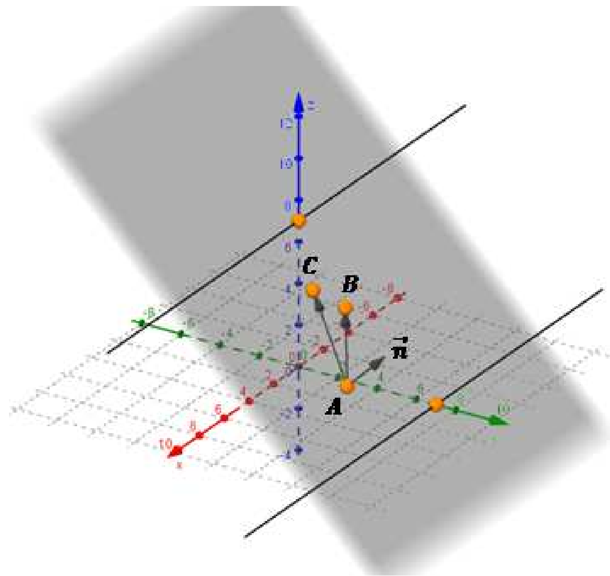
Entonces α no corta al eje x.

¿En qué punto corta al eje y? $(0,7,0)$

¿Y al eje z? $(0,0,7)$

Observemos que el plano contiene a todos los puntos de la forma $(x, 7, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$.

Lo mismo ocurre con los puntos del tipo $(x, 0, 7)$ con $x \in \mathbb{R}$.



Podemos observar entonces que:

$$a = 0 \Rightarrow el\ plano\ es \parallel \ al\ eje\ x$$

Ecuación segmentaria del plano

Dada la ecuación general de un plano:

$$\pi: \ ax + by + cz + d = 0$$

Si a, b, c, d son distintos de cero, es posible obtener otra ecuación del plano como sigue:

$$ax + by + cz = -d$$

$$\frac{a}{-d}x + \frac{b}{-d}y + \frac{c}{-d}z = 1$$

$$\frac{x}{\left(-\frac{d}{a}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{d}{b}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{d}{c}\right)} = 1$$

Si llamamos $p = -\frac{d}{a}, \ q = -\frac{d}{b}, \ \ r = -\frac{d}{c}$

Resulta:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1 \qquad Ecuación\ segmentaria\ del\ plano$$

Veamos qué indican p, q y r:

¿Cuál es la intersección del plano con el eje x?

$$y = 0\ , z = 0 \ \ \Rightarrow x = p \ \ \Rightarrow El\ plano\ corta\ al\ eje\ x\ en\ (p, 0,0)$$

¿Cuál es la intersección con el eje y?

$$(0, q, 0)$$

¿Y con el eje z?

$$(0,0, r)$$

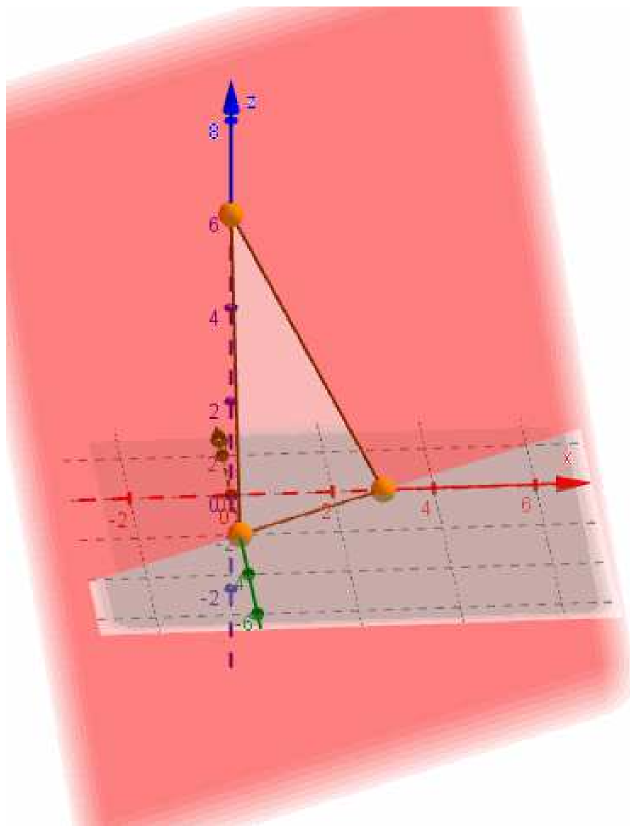
Podemos observar que p, q y r indican las intersecciones con los ejes.

$$2x - 3y + z - 6 = 0$$
$$2x - 3y + z = 6$$
$$\frac{2x}{6} - \frac{3y}{6} + \frac{z}{6} = 1$$
$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$$

Esta ecuación parece segmentaria pero no lo es por el signo negativo. La reescribimos así:

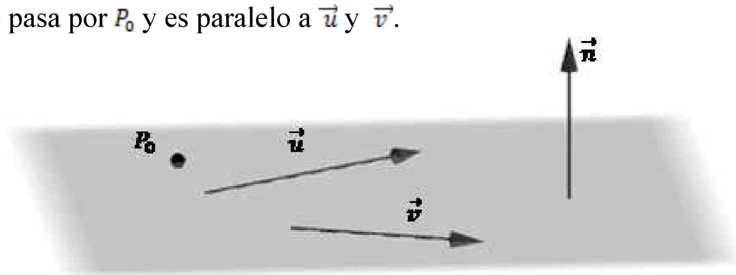
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{6} = 1 \qquad \textit{Ecuación segmentaria}$$

La ecuación segmentaria es práctica para graficar un plano porque muestra los tres puntos de corte con los ejes:



Ecuación vectorial paramétrica del plano

Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ no paralelos y un punto $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$, nos proponemos hallar la ecuación del plano π que pasa por P_0 y es paralelo a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



¿Cómo podemos obtener un vector perpendicular al plano conociendo dos vectores paralelos a dicho plano?

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

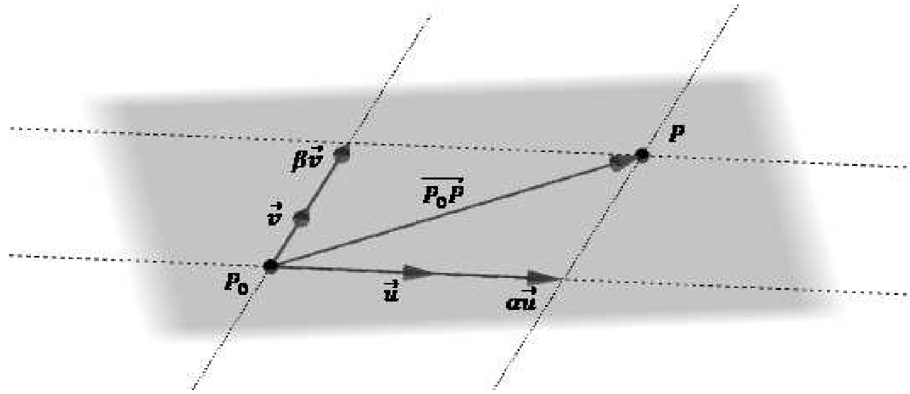
Teniendo $\vec{n}$ y el punto P_0, podemos hallar la ecuación implícita o general del plano π como habíamos visto previamente.

Obtendremos a continuación otro tipo de ecuación del plano,cuya deducción se basa en el concepto de combinación lineal de vectores, tal como vimos en el ejemplo.

Si $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera del plano π, los vectores $\overrightarrow{P_0P}$,$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son coplanares.
Entonces

$$\exists\alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{P_0P} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$$

Esto significa que el vector $\overrightarrow{P_0P}$ puede expresarse como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, como se muestra en la figura:



$$(x - x_0\,, y - y_0, z - z_0) = \alpha.\,(u_1,u_2,u_3)\ + \beta\ (v_1,v_2,v_3)$$

Por lo tanto:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha\ (u_1,u_2,u_3) + \beta\ (v_1,v_2,v_3), con\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

O en notación vectorial:

$$(x, y, z) = \overrightarrow{OP_0} + \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} \quad Ecuación\ vectorial\ paramétrica\ del\ plano$$

Armar la ecuación vectorial paramétrica del plano paralelo a $\vec{u} = (3,-1,5)$ y $\vec{v} = (7,3,2)$ que pasa por el punto $P_0\,(0,-1,8)$.
De acuerdo con lo que hemos visto, tenemos toda la información para escribir la ecuación vectorial paramétrica:

$$(x, y, z) = (0,-1,8) + \alpha(3,-1,5) + \beta(7,3,2)\ ,\ \ con\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Nota: Para cada $\alpha\ y\ \beta \in \mathbb{R}$ se obtiene un punto del plano. Por ejemplo si $\alpha = 1\ y\ \ \beta = -1$ se obtiene el punto $(x, y, z) = (-4, -5, 11)$.

Busquemos ahora la ecuación general de este plano.

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (3,-1,5) \times (7,3,2) = (-17, 29, 16)$$

Luego:

$$-17x + 29y + 16z + d = 0$$

Reemplazamos P_0 para obtener d:

$$-17.0 + 29.(-1) + 16.8 + d = 0 \Rightarrow\ d = -99$$

Luego:

$$-17x + 29y + 16z - 99 = 0$$

que es la ecuación general o implícita del plano.

De la ecuación general a la ecuación vectorial paramétrica

Dada la ecuación general de un plano ¿cómo puede obtenerse una ecuación vectorial paramétrica de dicho plano?
Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\omega:\ \ 2x - y + 3z + 9 = 0$$

Podemos despejar cualquiera de las variables, por ejemplo *y*:

$$y = 2x + 3z + 9$$

Entonces:

$$\omega:\ \ (x, y, z) = (x, 2x + 3z + 9\ , z)$$

Reescribimos como suma de tres vectores, de forma tal que uno de ellos tenga los términos con x, otro los términos con z y otro los términos independientes:

$$(x, y, z) = (x, 2x, 0) + (0,3z, z) + (0,9,0)$$
$$(x, y, z) = x(1,2,0) + z(0,3,1) + (0,9,0)\,, con\ \ x, z \in R$$

Si llamamos $x = \alpha$, $y = \beta$, resulta:

$$\omega: \ (x, y, z) = (0,9,0) + \alpha(1,2,0) + \beta(0,3,1) \ , con \ \ \alpha, \beta \in R$$

Obtuvimos así una ecuación vectorial paramétrica del plano ω.

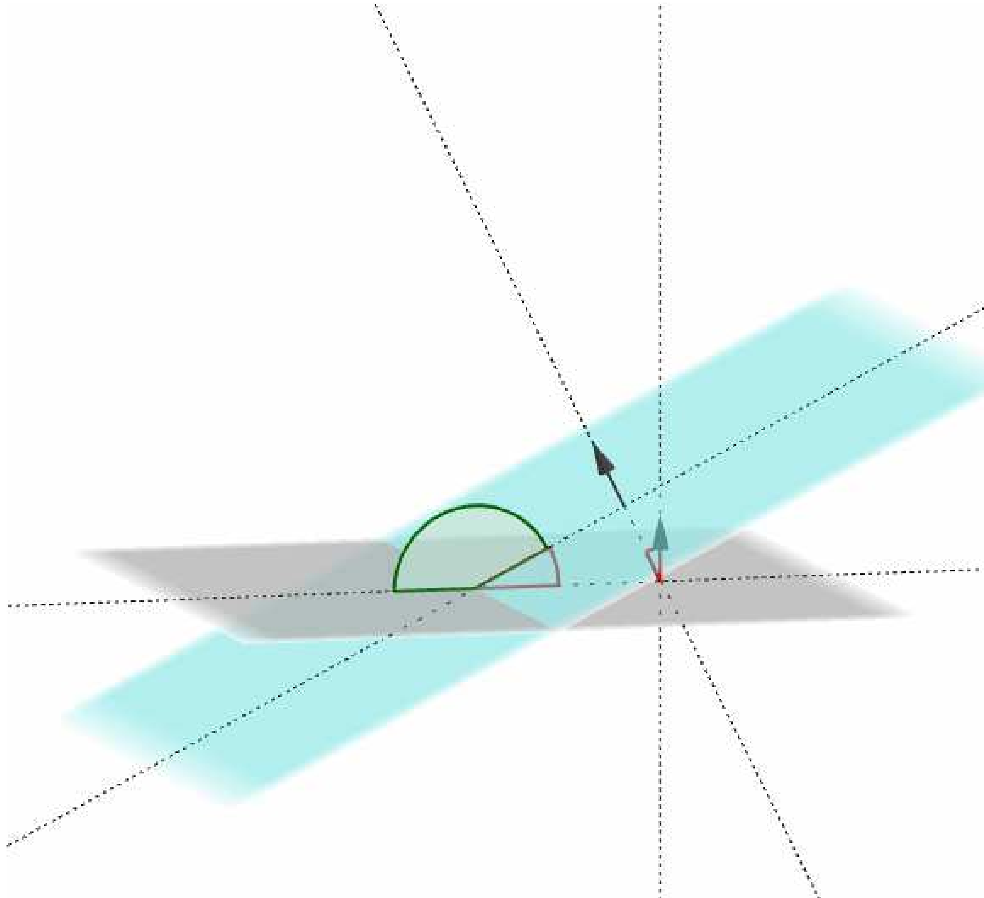
El lector puede comprobar que:

i) los vectores $\vec{u} = (1,2,0)$ y $\vec{v} = (0,3,1)$ son perpendiculares a $\vec{n} = (2,-1,3)$, o sea que son paralelos al plano;

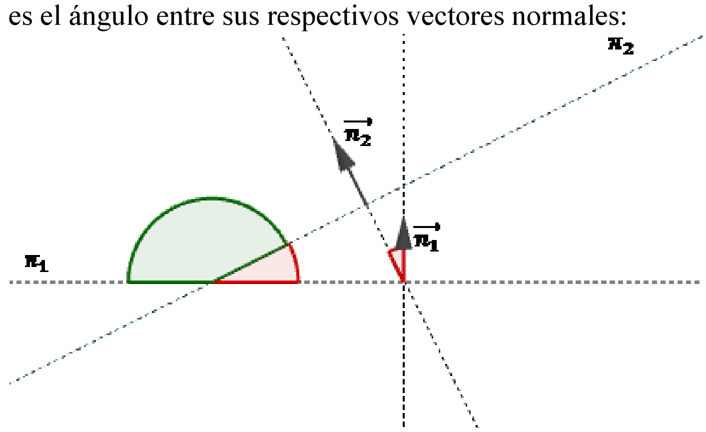
ii) $P_0(0,9,0) \in \omega$.

Ángulo entre dos planos

Sean los planos $\pi_1: \; a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $\pi_2: \; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ Dichos planos forman dos ángulos suplementarios, como muestra la figura:



El ángulo entre dos planos es el ángulo entre sus respectivos vectores normales:



$$\acute{a}ng(\pi_1,\pi_2) = \acute{a}ng(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})$$

Si llamamos θ a dicho ángulo, resulta:

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_1}\|\|\overrightarrow{n_2}\|}$$

Según el sentido de $\overrightarrow{n_1} \; y \; \overrightarrow{n_2}$, se obtendrá alguno de los dos ángulos suplementarios. Convenimos en tomar el menor de estos ángulos, por lo cual agregamos módulo en la fórmula anterior:

$$\cos(\theta) = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{\|\overrightarrow{n_1}\|\|\overrightarrow{n_2}\|}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{\|\overrightarrow{n_1}\|\|\overrightarrow{n_2}\|}\right) \;,\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad \textit{ángulo entre dos planos}$$

Ejemplo

Dados los planos:

$$\pi_1:\ \ x - y + 2 = 0$$
$$\pi_2: (x, y, z) = \alpha(1,2,3) + \beta(0,1,1)$$

Calcular $\acute{a}ng(\pi_1, \pi_2)$.

El plano π_2 está dado en forma vectorial paramétrica, para hallar el ángulo pedido necesitamos $\overrightarrow{n_2}$:

$$\overrightarrow{n_2} = (1,2,3) \times (0,1,1) = (-1, -1, 1)$$
$$\overrightarrow{n_1} = (1, -1, 0)$$
$$\overrightarrow{n_1} . \overrightarrow{n_2} = 0$$

Esto quiere decir que $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$, entonces el ángulo es $\theta = 90^{\circ}$.

La definición de ángulo entre planos nos permite enunciar condiciones de perpendicularidad y de paralelismo entre planos.

Planos perpendiculares y planos paralelos

Sean π_1 y π_2 planos de vectores normales $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ respectivamente:

$$\boldsymbol{Planos\ perpendiculares:}\quad \boldsymbol{\pi_1 \perp \pi_2 \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0}$$
$$\boldsymbol{Planos\ paralelos:}\quad \boldsymbol{\pi_1 \parallel \pi_2 \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2}\ \ , k \in R}$$

Consideremos por ejemplo:

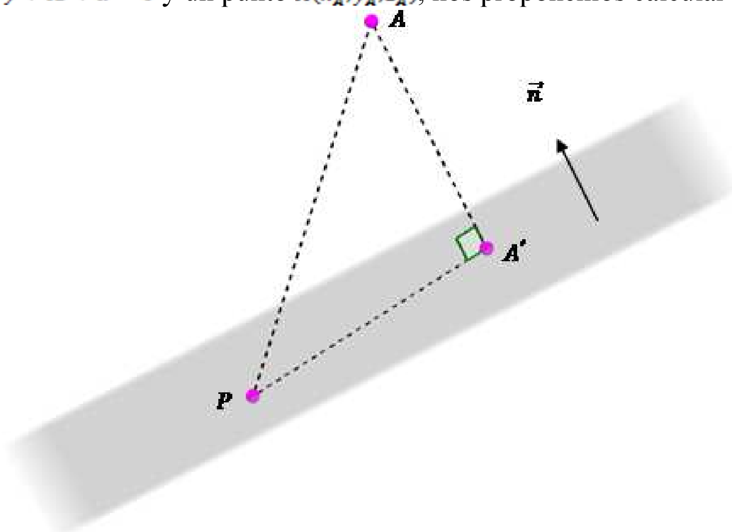
$$\pi_1:\ 2x - 3y + z + 1 = 0 \qquad \overrightarrow{n_1} = (2,-3,1)$$
$$\pi_2:\ 4x - 6y + 2z + 5 = 0 \qquad \overrightarrow{n_2} = (4,-6,2)$$
$$\pi_3:\ 4x - 6y + 2z + 2 = 0 \qquad \overrightarrow{n_3} = (4,-6,2)$$

Como $n_2 = 2\,n_1$, podemos afirmar que π_1 y π_2 son paralelos.

Análogamente, como $n_3 = 2\,n_1$, los planos π_1 y π_3 también son paralelos. Pero además se verifica que $d_3 = 2\,d_1$, por lo cual π_1 y π_3 son coincidentes, o sea $\pi_1 = \pi_3$.

Distancia de un punto a un plano

Dados un plano $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ y un punto $A(x_A,y_A,z_A)$, nos proponemos calcular la distancia de A a π.



La distancia de A a π es la longitud del segmento AA', siendo A' la proyección ortogonal (perpendicular) de A sobre π.

Consideremos un punto cualquiera $P(x,y,z)$ perteneciente a π.

$$\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{proy}_{\vec{n}}(\overrightarrow{PA})$$

Entonces

$$dist(A,\pi) = \|\overrightarrow{proy}_{\vec{n}}(\overrightarrow{PA})\| \quad \text{siendo } P \text{ un punto cualquiera del plano}$$

Veamos un ejemplo, dados:

$$\pi:\ x+2y+3z+1=0$$
$$A(0,2,1)$$

Calcular $dist(A,\pi)$

Recordemos que la norma de la proyección de un vector en la dirección de otro se calcula así:

$$\|\overrightarrow{proy}_{\vec{n}}(\overrightarrow{PA})\| = \frac{|\overrightarrow{PA}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Tomemos un punto cualquiera del plano, por ejemplo $P(-1,0,0)$. Entonces

$$\overrightarrow{PA} = (1,2,1)$$

$$dist(A,\pi) = \|\overrightarrow{proy}_{\vec{n}}(\overrightarrow{PA})\| = \frac{|\overrightarrow{PA}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(1,2,1).(1,2,3)|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

A continuación deduciremos una fórmula que permite calcular en forma muy sencilla la distancia de un punto a un plano. Sean:

$$\pi:\ ax+by+cz+d=0$$
$$A(x_A,y_A,z_A)$$

Habíamos visto que:

$$d(A,\pi) = \|\overrightarrow{proy}_{\vec{n}}(\overrightarrow{PA})\| \quad siendo\ P(x,y,z)\in\pi$$
$$\overrightarrow{PA} = (x_A-x,y_A-y,z_A-z)$$
$$\vec{n} = (a,b,c)$$

Entonces:

$$\|\overrightarrow{proy}_{\vec{n}}(\overrightarrow{PA})\| = \frac{|\overrightarrow{PA}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a(x_A-x)+b(y_A-y)+c(z_A-z)|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\|\overrightarrow{proy}_{\vec{n}}(\overrightarrow{PA})\| = \frac{\left|ax_A+by_A+cz_A-\overbrace{(ax+by+cz)}^{-d}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\|\overrightarrow{proy}_{\vec{n}}(\overrightarrow{PA})\| = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Concluimos que:

$$dist(A,\pi) = \frac{|a\,x_A + b\,y_A + c\,z_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad distancia\ de\ punto\ a\ plano$$

Retomemos el ejemplo que habíamos desarrollado:

$$\pi:\ x + 2y + 3z + 1 = 0$$
$$A(0,2,1)$$

De acuerdo con la fórmula demostrada, la distancia es:

$$dist(A,\pi) = \frac{|\,0+4+3+1|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

Tal como habíamos calculado antes pero ¡más fácil!

Distancia entre planos paralelos

Dados dos planos π_1 y π_2 paralelos ¿cómo podemos hallar la distancia entre ambos?

Consideremos los siguientes planos paralelos:

$$\pi_1:\ 2x-3y+z+1=0 \quad , \quad \pi_2:\ 4x-6y+2z+5=0$$

Todos los puntos de π_1 están a la misma distancia de π_2, por lo tanto podemos elegir un punto cualquiera de π_1 y calcular su distancia a π_2. Por ejemplo: $P_1(0,0,-1)$

Aplicamos la fórmula de distancia de un punto a un plano:

$$d(\pi_1,\pi_2)=d(P_1,\pi_2)=\frac{|4.0-6.0+2.(-1)+5|}{\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{56}}$$

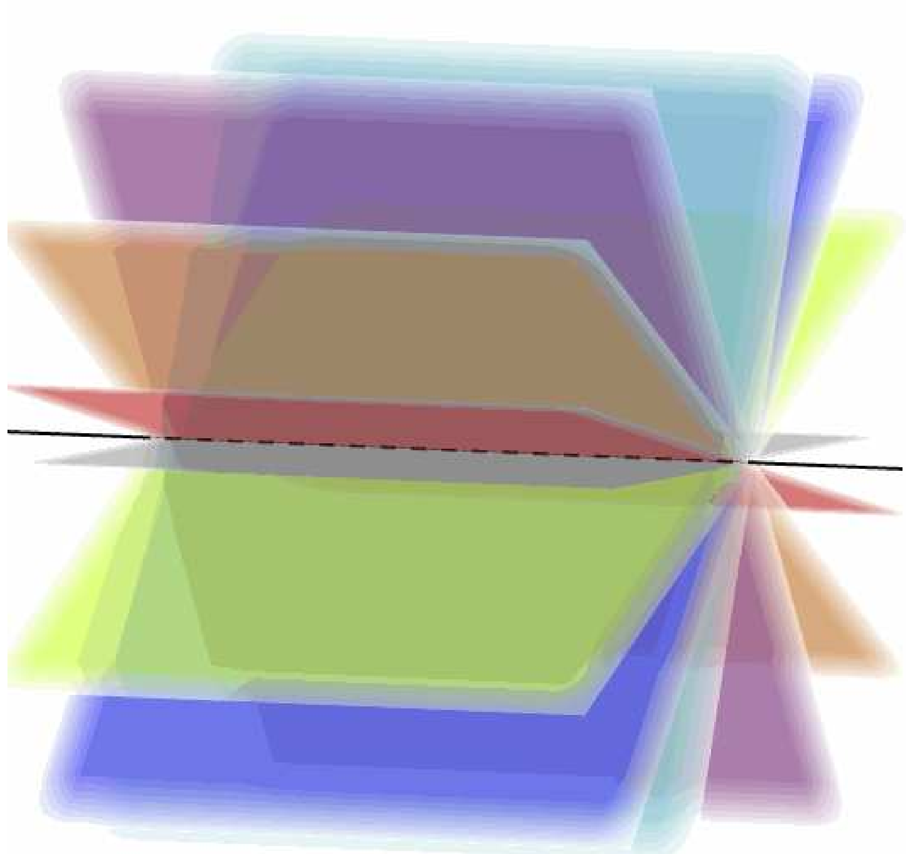
Observación: Si los planos no son paralelos, la distancia entre ambos es 0.

Haz de planos

Sean π_1 y π_2 dos planos no paralelos:

$$\pi_1:\ a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0$$
$$\pi_2:\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0$$

La intersección de dos planos no paralelos es una recta. Se denomina *haz de planos* al conjunto de planos que pasan por dicha recta.Uno podría imaginarse al haz de planos como si fueran las hojas de un libro abierto:



Puede demostrarse que la ecuación del haz de planos que pasan por la recta de intersección entre $\pi_1\ y\ \pi_2$ es la siguiente:

$$k_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + k_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \quad , \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$
$$\textit{Haz de planos que pasan por la recta} \quad r = \pi_1 \cap \pi_2$$

Para cada par de valores de k_1 y k_2 se obtiene un plano que pasa por la recta r.

Si $k_1 = 0$ y $k_2 \neq 0$, se obtiene la ecuación del plano π_2.

Si $k_2 = 0$ y $k_1 \neq 0$, se obtiene la ecuación del plano π_1.

Si suponemos que alguna de las constantes es diferente de cero, por ejemplo $k_1 \neq 0$, podemos dividir la ecuación del haz por k_1:

$$\frac{k_1}{k_1}(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \frac{k_2}{k_1}(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

Y renombrando $\frac{k_2}{k_1} = k$ queda:

$$(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

Esta expresión se llama *haz reducido*. ¿De dónde proviene el nombre de “reducido”?

Falta π_2 porque π_2 se corresponde con $k_1 = 0$. Por lo tanto, en el haz reducido están todos los planos que pasan por $r = \pi_1 \cap \pi_2$ excepto π_2.

Ejemplo

Dados los planos:

$$\pi_1: x + 2y + 3z + 1 = 0$$
$$\pi_2: 3x - 5y + z + 10 = 0$$

Encontrar la ecuación de un plano que pase por la recta de intersección entre π_1 y π_2 y que:

a. Sea paralelo al eje x
b. Sea perpendicular al plano $x + y + z = 0$

Se pide encontrar "un plano que pase por la recta de intersección entre π_1 y π_2", entonces podemos armar el haz de planos que pasa por dicha recta:

$$\alpha(x + 2y + 3z + 1) + \beta(3x - 5y + z + 10) = 0$$

Parte A

Para que el plano sea paralelo al eje x su vector normal debe ser $\vec{n} = (0, b, c)$. O sea, el plano debe ser de la forma $by + cz + d = 0$.

Reescribimos el haz como sigue:

$$\underbrace{(\alpha + 3\beta)}_{a} x + \underbrace{(2\alpha - 5\beta)}_{b} y + \underbrace{(3\alpha + \beta)}_{c} z + \underbrace{(\alpha + 10\beta)}_{d} = 0$$

Para que sea paralelo al eje x, $\alpha + 3\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -3\beta$

Reemplazando:

$$-11\beta y - 8\beta z + 7\beta = 0$$
$$\beta\,(-11y - 8z + 7) = 0$$
$$\pi_3 : \ -11y - 8z + 7 = 0$$

Parte B

Ahora queremos un plano del haz que sea perpendicular al plano $x + y + z = 0$. Dos planos son perpendiculares si sus vectores normales son perpendiculares. Luego:

$$(1,1,1)(\alpha + 3\beta, 2\alpha - 5\beta, 3\alpha + \beta) = 0$$
$$6\alpha - \beta = 0$$
$$\beta = 6\alpha$$

Reemplazando:

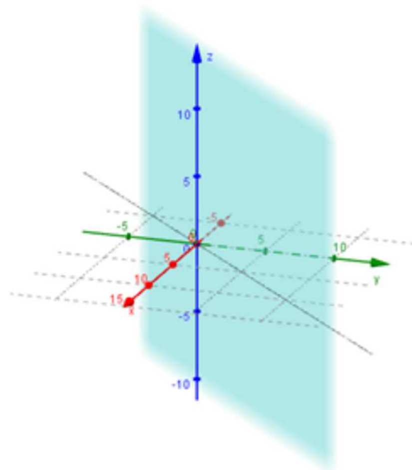
$$19\alpha x - 28\alpha y + 9\alpha z + 61\alpha = 0$$
$$\alpha(19x - 29y + 9z + 61) = 0$$
$$19x - 29y + 9z + 61 = 0$$

Ecuaciones de la recta en $\mathbb{R}^3$

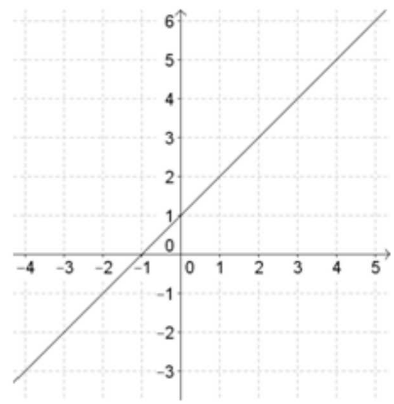
Sabemos que una recta en $\mathbb{R}^2$ puede expresarse por la ecuación:

$$y = ax + b$$

Pero ¿qué representa esta ecuación en $\mathbb{R}^3$? En $\mathbb{R}^3$ es un plano paralelo al eje z, y en $\mathbb{R}^2$ es una recta:



$\boldsymbol{y = x + 1}$ **en** $\boldsymbol{\mathbb{R}^3}$



$\boldsymbol{y = x + 1}$ **en** $\boldsymbol{\mathbb{R}^2}$

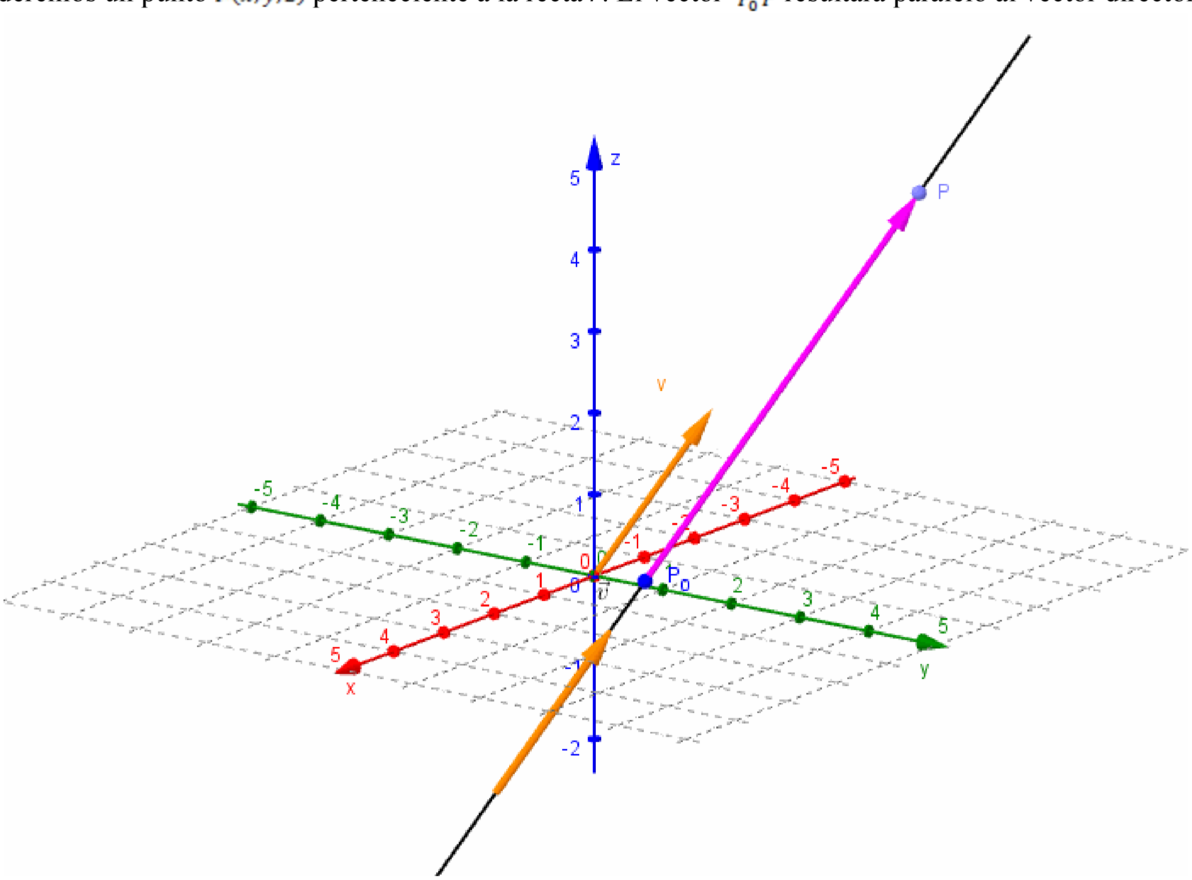
Para definir un plano es suficiente conocer un vector perpendicular al plano y un punto del mismo. ¿Qué datos permiten definir una recta en $\mathbb{R}^3$?

Para definir en forma vectorial una recta en $\mathbb{R}^3$, es suficiente conocer un punto de la recta y un *vector director* que indique la dirección de la misma, o sea un vector paralelo a la recta.

Ecuación vectorial de la recta

Dados un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y un punto $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$, nos proponemos hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto P_0 y es paralela al vector $\vec{v}$.

Consideremos un punto $P(x, y, z)$ perteneciente a la recta r. El vector $\overrightarrow{P_0 P}$ resultará paralelo al vector director $\vec{v}$:



$$\overrightarrow{P_0P} = \alpha\vec{v}$$
$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \alpha(v_1, v_2, v_3)$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(v_1, v_2, v_3) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \textit{Ecuación vectorial de la recta}$$

Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $M(3,2,1)$ y $S(-1,1,0)$.
Tenemos como datos dos puntos de la recta, entonces los vectores $\overrightarrow{MS}$ y $\overrightarrow{SM}$ son paralelos a dicha recta. Elegimos uno de ellos como vector director:

$$\vec{v} = \overrightarrow{MS} = (-4, -1, -1)$$

Podemos tomar cualquiera de los dos puntos dados como punto de paso, por ejemplo M. Entonces la ecuación es:

$$(x, y, z) = (3,2,1) + \alpha(-4, -1, -1) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \textit{ecuación vectorial de la recta MS}$$

Para cada valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, se obtiene un punto de la recta. Por ejemplo, si $\alpha = -1$ se obtiene el punto $P_1(7,3,2) \in r$.
¿$(5, -3,1) \in r$?
Veamos si existe algún valor de α que verifique esta ecuación vectorial:

$$(5, -3,1) = (3,2,1) + \alpha(-4, -1, -1)$$
$$\begin{cases} 3 - 4\alpha = 5 \\ 2 - \alpha = -3 \\ 1 - \alpha = 1 \end{cases}$$

Este sistema es incompatible, así que el punto no pertenece a la recta.
¿Para qué valor de α se obtiene el punto S?

Ecuaciones paramétricas de la recta

Hemos visto que la ecuación vectorial de una recta es:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(v_1, v_2, v_3)$$

Por igualdad de vectores:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha\, v_1 \\ y = y_0 + \alpha\, v_2\, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha\, v_3 \end{cases}$$

Éstas son las *ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta*.

Ecuaciones simétricas de la recta

Si v_1, v_2, v_3 son distintos de cero, entonces:

$$\alpha = \frac{x - x_o}{v_1} \quad , \quad \alpha = \frac{y - y_o}{v_2} \quad , \quad \alpha = \frac{z - z_o}{v_3}$$

Igualando, resulta:

$$\frac{x - x_o}{v_1} = \frac{y - y_o}{v_2} = \frac{z - z_o}{v_3} \qquad \textit{Ecuaciones simétricas de la recta}$$

Consideremos la ecuación vectorial de la recta MS:

$$(x, y, z) = (3,2,1) + \alpha(-4, -1, -1) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

¿Cómo podemos obtener las ecuaciones paramétricas de la recta? Simplemente por igualdad de vectores escribimos:

$$\begin{cases} x = 3 - 4\alpha \\ y = 2 - \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \quad , \quad \textit{Ecuaciones paramétricas de la recta MS}$$

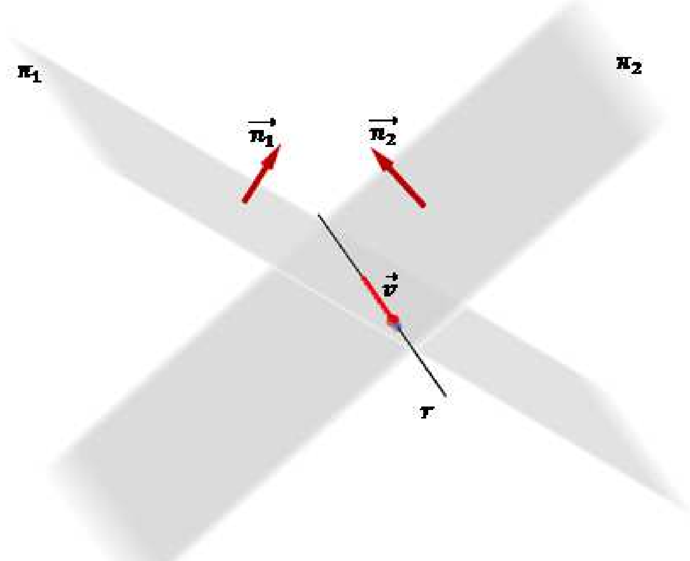
Para obtener las ecuaciones simétricas, despejamos el parámetro e igualamos:

$$\alpha = \frac{x - 3}{-4} \quad , \quad \alpha = \frac{y - 2}{-1} \quad , \qquad \alpha = \frac{z - 1}{-1}$$
$$\frac{x - 3}{4} = y - 2 = z - 1 \qquad , \textit{ Ecuaciones simétricas de la recta MS}$$

Recta definida como intersección de dos planos

Dos planos no paralelos $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ determinan al cortarse una recta en R^3 que queda expresada por el sistema de ecuaciones lineales:

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$



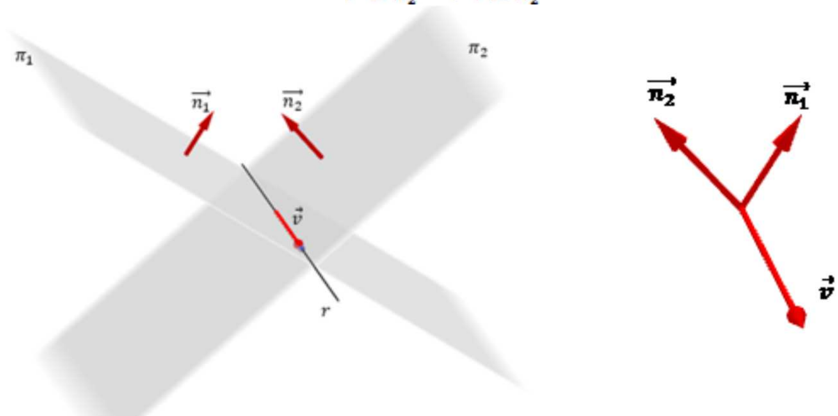
Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$r: \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 & \pi_1 \\ x - y - z + 2 = 0 & \pi_2 \end{cases}$$

Éste es un sistema de $2\ x\ 3$ (de 2 ecuaciones con 3 incógnitas) cuyo conjunto solución es la recta r.
¿Cómo podemos hallar un vector director de la recta y un punto de la misma?
Para obtener $\vec{v}$, debe tenerse en cuenta que:

$$r \subset \pi_1 \ \Rightarrow r \perp \overrightarrow{n_1}$$
$$r \subset \pi_2 \ \Rightarrow r \perp \overrightarrow{n_2}$$



Por lo tanto $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ es un vector paralelo a r. Así encontramos un vector director de r:

$$\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (0,2,-2)$$

Para hallar un punto $P_0 \in r$, podemos fijar el valor de una de las variables en el sistema de ecuaciones que define a la recta, por ejemplo fijemos arbitrariamente $z = 0$.
Reemplazando en el sistema, nos queda:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \qquad sistema\ 2x2$$

Resolviendo este sistema, obtenemos: $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ por lo cual un punto de la recta es $P_0(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \mathbf{0})$.
Con la información obtenida, estamos en condiciones de escribir la ecuación vectorial de la recta:

$$r: (x, y, z) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \lambda(0,2,-2) \ , \ \lambda \in R$$

Observación: Si para buscar un punto de la recta fijáramos $x = 0$ (en lugar de $z = 0$), nos quedaría el siguiente sistema: $\begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ -y - z + 2 = 0 \end{cases}$ que es incompatible.

¿Por qué se produce esta incompatibilidad? Porque no hay ningún punto de la recta en el plano $x = 0$, o sea la recta no interseca al plano $x = 0$.

En resumen:

Dada una recta $r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$
podemos obtener un vector director calculando el producto vectorial $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$.
Para obtener un punto de la recta, fijamos arbitrariamente el valor de una de las variables y resolvemos el sistema 2x2 resultante.

Ejemplo

Retomemos el ejemplo anterior:

$$r: \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 & \pi_1 \\ x - y - z + 2 = 0 & \pi_2 \end{cases}$$

Otra forma de obtener la ecuación vectorial de la recta es resolver el sistema de ecuaciones que la define.
Escribimos la matriz ampliada asociada al sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Matriz de los coeficientes **Términos independientes**

Aplicamos operaciones elementales entre filas para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{-1} \\ 1 & -1 & -1 & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{-1} \\ 0 & -2 & -2 & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 \to -\frac{1}{2}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{-1} \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{0,5} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \to F_1 - F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{-1,5} \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{0,5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{-1,5} \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{0,5} \end{pmatrix}$$

Y ahora escribimos el sistema simplificado:

$$\begin{cases} x = -1{,}5 \\ y + z = 0{,}5 \end{cases}$$

O sea:

$$\begin{cases} x = -1{,}5 \\ y = 0{,}5 - z \end{cases}$$

Entonces el conjunto solución se puede expresar así:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -1{,}5 \ \wedge \ y = 0{,}5 - z\}$$

Y podemos escribir la ecuación vectorial de la recta r:

$$(x, y, z) = (-1{,}5 \ ; \ 0{,}5 - z \ ; \ z)$$

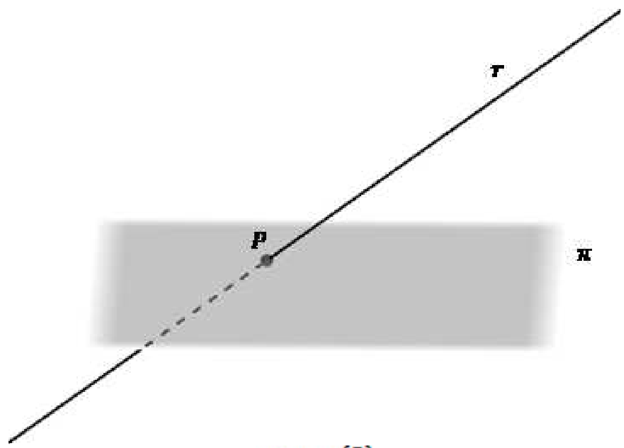
Llamando $z = \lambda$, resulta:

$$r: \ (x, y, z) = (-1{,}5 \ ; \ 0{,}5 \ ; 0) + \lambda\,(0, -1, 1) \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Intersección entre recta y plano

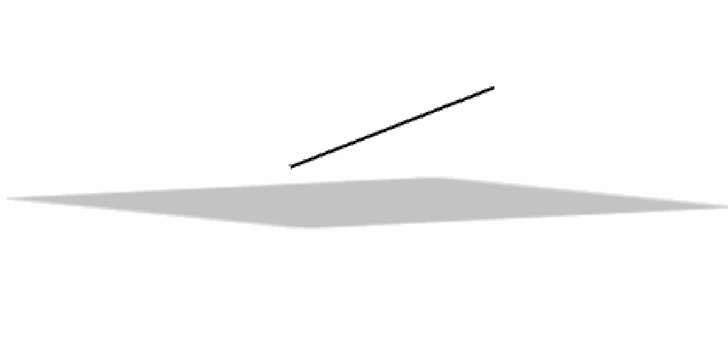
¿Qué casos pueden presentarse en la intersección entre una recta y un plano?

Caso 1



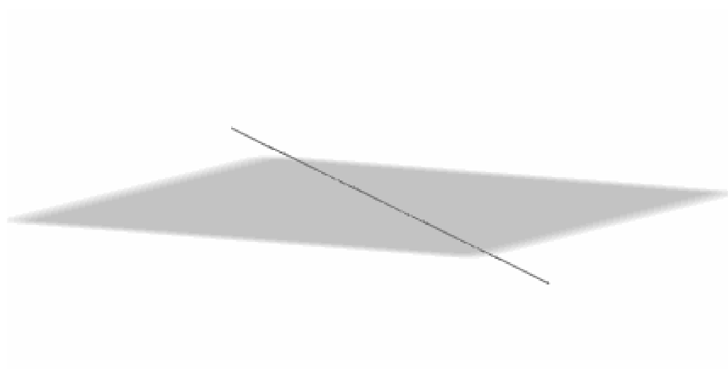
$$r \cap \pi = \{P\}$$

Caso 2



$$r \parallel \pi$$
$$r \cap \pi = \emptyset$$

Caso 3



$$r \subset \pi$$
$$r \cap \pi = r$$

Dados:

$$\pi:\ 2x - 3y + z + 1 = 0$$
$$r_1: (x, y, z) = (0,1,3) + \alpha(1,0,1)$$

¿Cómo se busca la intersección entre la recta y el plano?

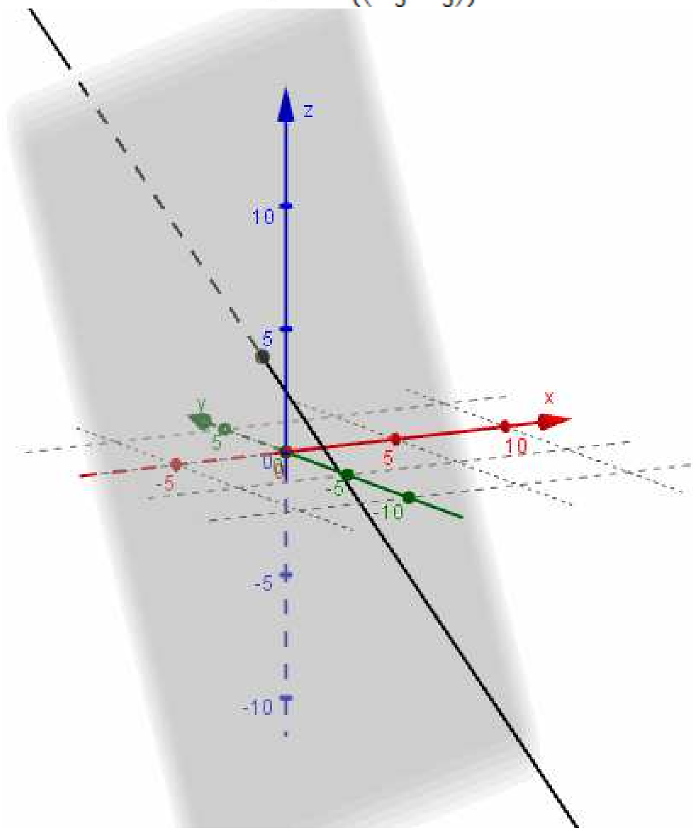
Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta y las reemplazamos en la ecuación del plano:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = 3 + \alpha \end{cases}$$

$$2\alpha - 3.1 + (3+\alpha) + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = -\frac{1}{3}$$

Reemplazando el valor del parámetro α en las ecuaciones de la recta, obtenemos el punto de intersección:

$$r_1 \cap \pi = \left\{\left(-\frac{1}{3}, 1, \frac{8}{3}\right)\right\}$$



Busquemos ahora la intersección del mismo plano π con la recta

$$r_2: (x,y,z) = (0,0,-1) + \lambda(3,2,0)$$

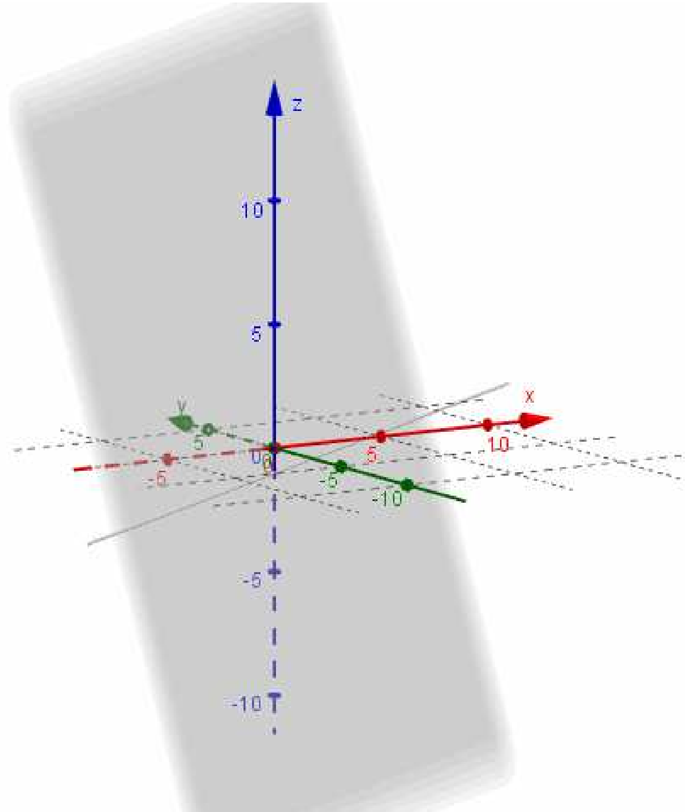
Escribimos las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

Reemplazamos en la ecuación del plano

$$2(3\lambda) - 3(2\lambda) - 1 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0 \;\forall\lambda$$

Queda una expresión que es verdadera para todo λ. Esto significa que todo punto de la recta verifica la ecuación del plano. En este caso podemos afirmar que la recta está incluida en el plano, por lo tanto:



Considerando el mismo plano π, hallemos la intersección con la recta

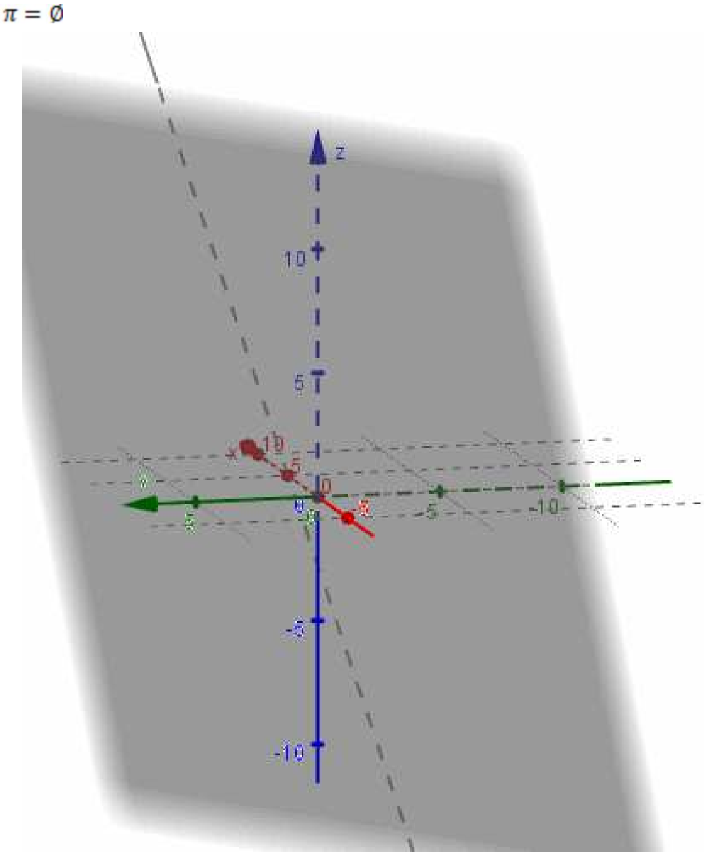
$$r_3: (x, y, z) = (5,0,0) + t(0,1,3)$$

Reiterando el procedimiento, resulta:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = t \\ z = 3t \end{cases}$$

$$10 - 3t + 3t + 1 = 0 \Rightarrow 11 = 0 \quad absurdo$$

Este absurdo nos indica que la recta y el plano no tienen ningún punto en común, o sea que la recta es paralela al plano y por lo tanto: $r \cap \pi = \emptyset$



En resumen:

Para hallar la intersección entre un plano y una recta, se reemplazan las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano. Pueden presentarse tres casos:

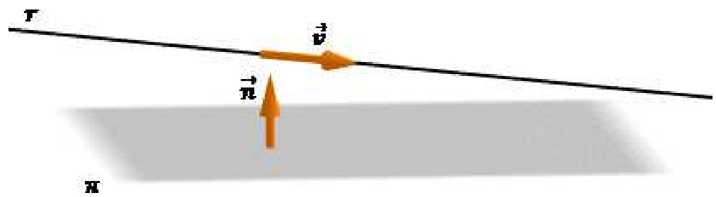
i. Es posible despejar el valor del parámetro, entonces reemplazando este valor en las ecuaciones de la recta se obtiene el punto de intersección. En este caso: $r \cap \pi = \{P\}$

ii. $0 = 0 \;\Rightarrow\; r \subset \pi \;\Rightarrow\; r \cap \pi = r$

iii. $0 = k \; (con \; k \neq 0) \Rightarrow absurdo \Rightarrow r \parallel \pi \;\Rightarrow\; r \cap \pi = \emptyset$

Paralelismo entre recta y plano

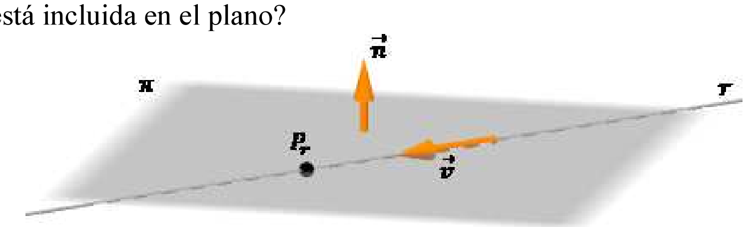
¿Existe una manera de anticipar si una recta es paralela a un plano sin buscar la intersección?
Una vez más, los vectores resultarán una herramienta potente para la geometría de rectas y planos. Observemos la siguiente figura:



¿Cómo deben ser el vector normal del plano y el vector director de la recta para que $r \parallel \pi$?

$$r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v}.\vec{n} = 0$$

¿Qué ocurre si la recta está incluida en el plano?



En este caso también se verifica que el vector director de la recta es perpendicular al normal del plano. Pero a diferencia del caso anterior, todos los puntos de la recta están en el plano. Esto nos permite afirmar que:

$$r \subset \pi \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v} \perp \vec{n} \\ P_r \in \pi \end{cases}$$

Dados el plano $\pi: x + y - z - 3 = 0$ y la recta $r: (x, y, z) = (1,0,0) + t(0,2,2)$, comprobar que la recta es paralela al plano. ¿Está incluida en el plano?
Si la recta es paralela al plano entonces su vector director $\vec{v}$ debe ser perpendicular al vector normal del plano $\vec{n}$.
Luego $\vec{n}.\vec{v}$ debe ser cero:

$$(1,1,-1)(0,2,2) = 2 - 2 = 0$$

Para saber si la recta está incluida en el plano veamos si el punto $(1,0,0)$ satisface la ecuación del plano π:

$$1 + 0 - 0 - 3 = 0 \Rightarrow -2 = 0 \ Abs!$$

Como el punto no satisface la ecuación podemos concluir que r no está incluida en π.

EPL 3

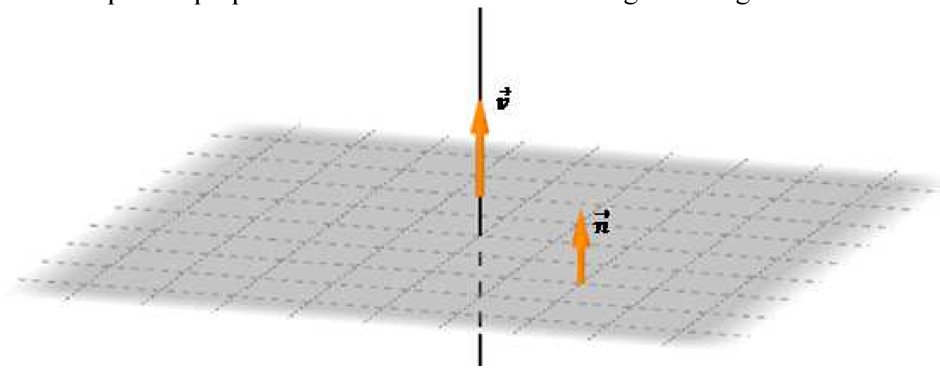
Sea π el plano paralelo al eje y que pasa por $(1,1,1)$ y $(1,2,3)$, y

$$r: \begin{cases} x - y = 0 \\ x + kz = 2 \end{cases}$$

Hallar, si es posible, el valor de k para que la recta r sea paralela a π.
Si existe k, analizar si $r \subset \pi$.

Perpendicularidad entre recta y plano

Así como encontramos una condición vectorial para el paralelismo entre una recta y un plano, nos preguntamos si existirá una condición para la perpendicularidad. Observemos la siguiente figura:



¿Cómo deben ser el vector normal del plano y el vector director de la recta para que $r \perp \pi$?

$$r \perp \pi \iff \vec{v} \parallel \vec{n} \iff \vec{v} = k\vec{n}$$

Dado el plano $\pi\colon\ x - 3y + z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por $A(1{,}0{,}3)$.
Como la recta es perpendicular al plano π entonces su vector director es paralelo al vector normal del plano.
Podemos tomar:

$$\vec{v} = (1, -3{,}1)$$

Ya tenemos el vector director y un punto de paso, luego la ecuación vectorial es:

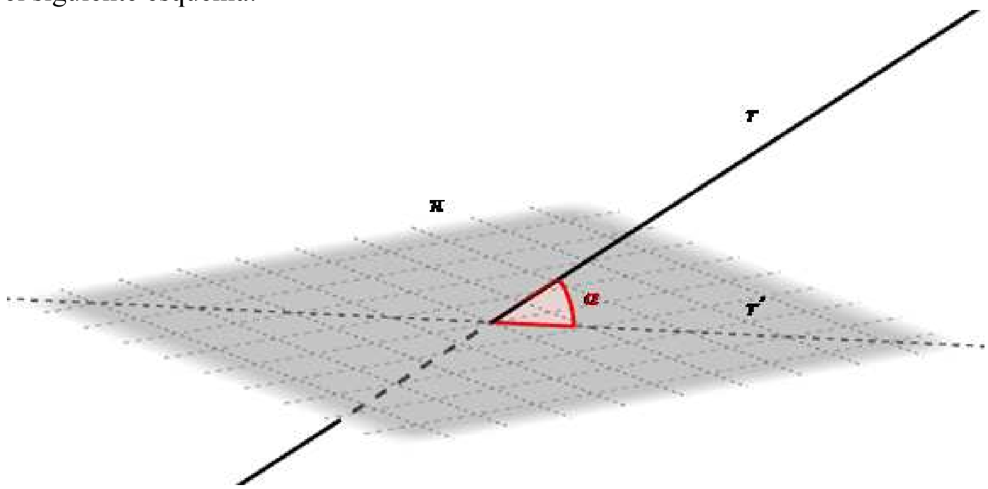
$$r\colon (x, y, z) = (1{,}0{,}3) + \lambda\,(1, -3{,}1)\ ,\ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

EPL 4

Dado el haz de planos $x + y - z + 2 + k\,(x - y + z) = 0$, analizar si existe algún plano del haz que sea perpendicular a la recta $r\colon \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

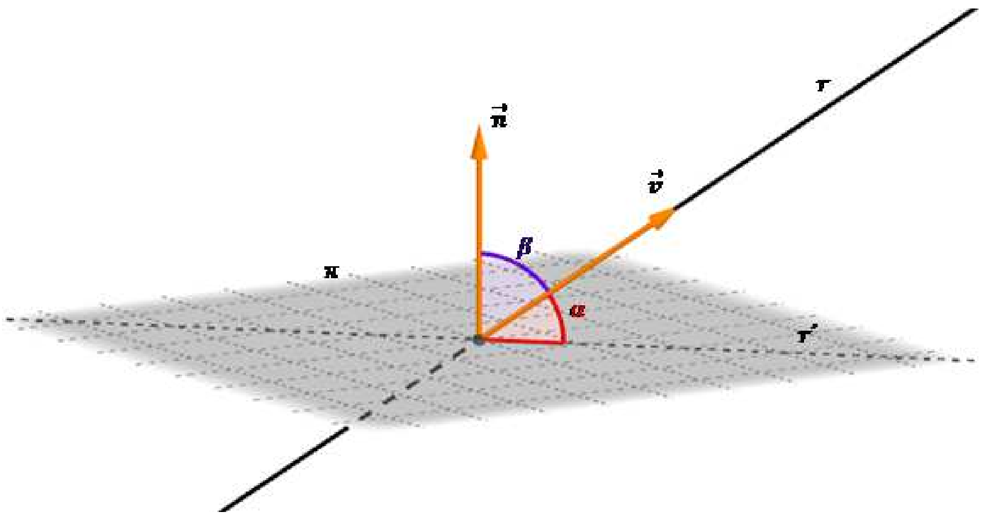
Ángulo entre recta y plano

Consideremos el siguiente esquema:



Sea r una recta no paralela ni perpendicular a un plano π. Sea r' la proyección ortogonal de r sobre π. Se define como ángulo entre r y π al ángulo agudo que forman r y r'.

¿Cómo podemos hallar dicho ángulo? Veamos la siguiente figura:



Podemos calcular el ángulo β entre $\vec{v}$ y $\vec{n}$:

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{v}.\vec{n}}{\|\vec{v}\|\|\vec{n}\|}$$

Como habíamos visto previamente, de acuerdo con las direcciones de $\vec{v}$ y $\vec{n}$ el ángulo β podría ser mayor de 90º.
Agregamos módulo para obtener un ángulo agudo:

$$\cos(\beta) = \frac{|\vec{v}.\vec{n}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{n}\|}$$

Como α y β son complementarios se cumple que $sen(\alpha) = \cos(\beta)$, entonces:

$$sen(\alpha) = \frac{|\vec{v}.\vec{n}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{n}\|}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{|\vec{v}.\vec{n}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{n}\|}\right), \qquad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \qquad \textit{ángulo entre recta y plano}}$$

Casos particulares:

Si $\alpha = 0$, entonces la recta es paralela al plano ($\vec{v}.\vec{n} = 0$).

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, entonces la recta es perpendicular al plano ($\vec{v} = k\,\vec{n}$).

Ejemplo

Hallar el ángulo entre el plano $\pi: x + z - 8 = 0$ y el eje x.

Conocemos el vector normal de π y el vector director de la recta. Luego aplicamos directamente la fórmula:

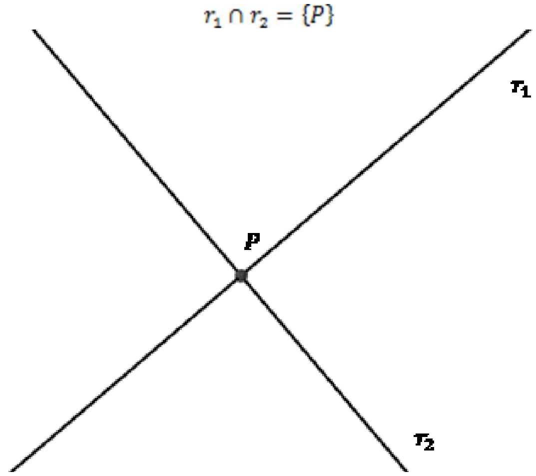
$$\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{|\vec{v}.\vec{n}|}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{n}\|}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{|(1,0,0).(1,0,1)|}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Intersección de rectas en $\mathbb{R}^3$

Sabemos que dos rectas en $\mathbb{R}^2$ o bien se cortan en un único punto o bien son paralelas.
Pero en $\mathbb{R}^3$, además de estos dos casos, existen rectas que ni se cortan ni son paralelas: son las *rectas alabeadas*.
Tenemos entonces tres casos en $\mathbb{R}^3$:

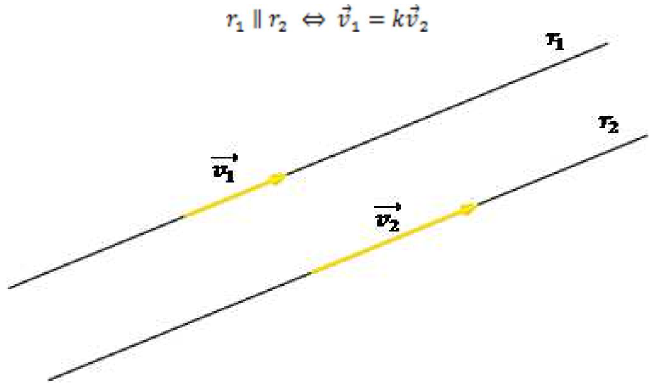
Caso 1: Rectas concurrentes o incidentes:

$$r_1 \cap r_2 = \{P\}$$



Caso 2: Rectas paralelas:

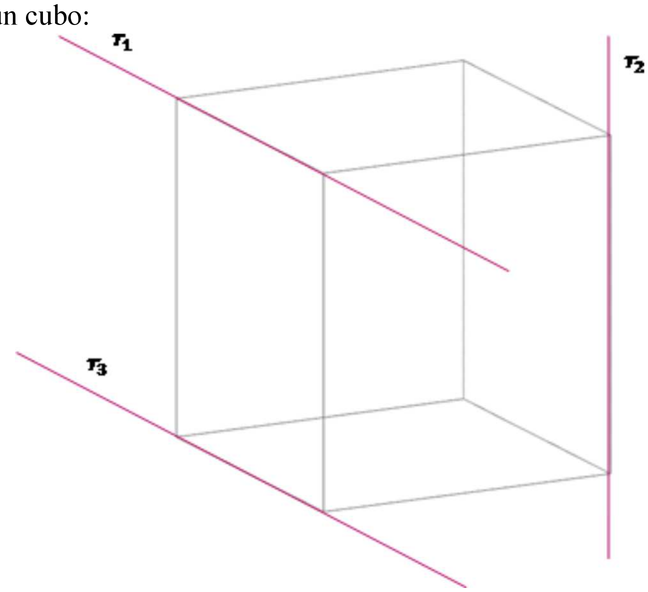
$$r_1 \parallel r_2 \iff \vec{v}_1 = k\vec{v}_2$$



Las rectas paralelas podrían ser coincidentes. Para verificar si dos rectas paralelas son coincidentes basta con ver si un punto de una de ellas pertenece o no a la otra recta.

Caso 3: Rectas alabeadas:

Existe otra posición posible para las rectas en $\mathbb{R}^3$. Consideremos el siguiente esquema en el que las rectas r_1, r_2 y r_3 contienen a las aristas de un cubo:



Las rectas r_1 y r_3 son paralelas. En cambio r_1 y r_2, que no son paralelas ni concurrentes, se denominan alabeadas.

$$r_1\ y\ r_2\ son\ alabeadas \iff r_1 \nparallel r_2 \ \wedge\ r_1 \cap r_2 = \emptyset$$

Hallar la intersección entre las rectas:

$$r_1: (x, y, z) = (-2,1,3) + \alpha(1,4,5)$$
$$r_2: (x, y, z) = (1,0,-2) + \beta(0,3,-1)$$
$$\overrightarrow{v_1} \nparallel \overrightarrow{v_2} \Rightarrow r_1 \nparallel r_2$$

Para buscar la intersección, escribimos las ecuaciones paramétricas de las rectas y luego igualamos:

$$r_1: \begin{cases} x = -2 + \alpha \\ y = 1 + 4\alpha \\ z = 3 + 5\alpha \end{cases} \quad , \quad r_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3\beta \\ z = -2 - \beta \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -2 + \alpha = 1 \\ 1 + 4\alpha = 3\beta \\ 3 + 5\alpha = -2 - \beta \end{cases}$$

Nos queda un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas.

De la primera ecuación se obtiene: $\alpha = 3$

Reemplazando $\alpha = 3$ en la segunda ecuación, resulta: $\beta = \frac{13}{3}$

Pero si sustituimos ambos valores en la tercera ecuación:

$$3 + 5.3 = -2 - \frac{13}{3}$$
$$18 = -\frac{19}{3}$$

Como esto es falso, el sistema es incompatible. Habíamos descartado paralelismo, por lo tanto podemos afirmar que las rectas son alabeadas.

Observación: Los sistemas que tienen más ecuaciones que incógnitas se denominan *sobre determinados* y en general son incompatibles.

Hallar la intersección entre las rectas:

$$r_1: (x, y, z) = \lambda(1,0,1)$$
$$r_2: (x, y, z) = \beta(-1,1,0) + (0,1,1)$$

Observemos que los vectores directores de las rectas no son paralelos, luego las rectas no pueden ser paralelas. Podrían intersecarse o ser alabeadas.

Escribimos las ecuaciones paramétricas de las rectas e igualamos:

$$r_1: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad , \quad r_2: \begin{cases} x = -\beta \\ y = \beta + 1 \\ z = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \lambda = -\beta \\ 0 = \beta + 1 \\ \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1 \wedge \beta = -1$$

Como el sistema tiene solución, podemos afirmar que las rectas se intersecan, o sea son concurrentes. Para averiguar en qué punto se cortan, podemos reemplazar $\lambda = 1$ en las ecuaciones paramétricas de r_1 o $\beta = -1$ en las ecuaciones paramétricas de r_2. Así obtenemos el punto de intersección $P(1,0,1)$.

Observación: En este ejemplo, las rectas se cortan en el punto $P(1,0,1)$. En r_1, el punto P se corresponde con $\lambda = 1$. En cambio en r_2, P se corresponde con $\beta = -1$. Por lo tanto, cuando buscamos la intersección entre dos rectas debemos utilizar letras diferentes para indicar los respectivos parámetros. Noten que si hubiéramos utilizado el parámetro λ para las dos rectas, habríamos obtenido un absurdo: $\lambda = 1 \ y \ \lambda = -1$ y esto nos habría inducido a error.

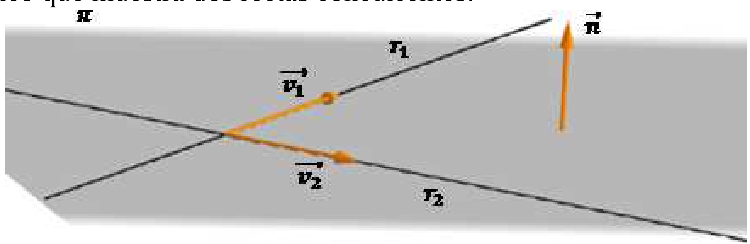
Plano que contiene a dos rectas

Dos rectas en $\mathbb{R}^3$ se denominan *coplanares* si existe un plano que contiene a ambas rectas.

Habíamos visto que dos rectas en $\mathbb{R}^3$ pueden ser concurrentes, paralelas o alabeadas. Veamos en qué casos es posible encontrar un plano que las contenga:

Caso 1: Rectas concurrentes

Veamos el siguiente gráfico que muestra dos rectas concurrentes:



Dadas dos rectas concurrentes r_1 y r_2, ¿cómo podemos encontrar el vector normal del plano?

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{n}$$

Para completar la ecuación del plano, tomamos un punto P de cualquiera de las dos rectas.

Ejemplo

$$r_1: (x, y, z) = (1,1,1) + t(0,1,2)$$

r_2: Recta que pasa por $A(0,1,-1)$ y $B(1,2,z_0)$

Hallar z_0 para que las rectas sean concurrentes y encontrar el plano que las contiene.

Resolución

Construyamos una ecuación vectorial de la recta r_2:

$$r_2: (x, y, z) = (0,1,-1) + \lambda \underbrace{(1,1,z_0+1)}_{\overrightarrow{AB}}$$

Escribimos las ecuaciones paramétricas de cada recta:

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad , \quad r_2: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + (1 + z_0)\lambda \end{cases}$$

Igualamos:

$$\begin{cases} 1 = \lambda \\ 1 + t = 1 + \lambda \\ 1 + 2t = -1 + \lambda(z_0 + 1) \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones, se obtiene $t = \lambda = 1$

Reemplazamos en la tercera ecuación y despejamos z_0:

$$3 = -1 + z_0 + 1 \Rightarrow z_0 = 3$$

Para $z_0 = 3$ las rectas se cortan.

¿Cuál es el punto de intersección? Reemplazamos por $t = 1$ en la ecuación de la primera recta:

$$r_1 \cap r_2 = \{(1,2,3)\}$$

Para obtener la ecuación del plano que contiene a las rectas, buscamos el vector normal:

$$\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (2,2,-1)$$

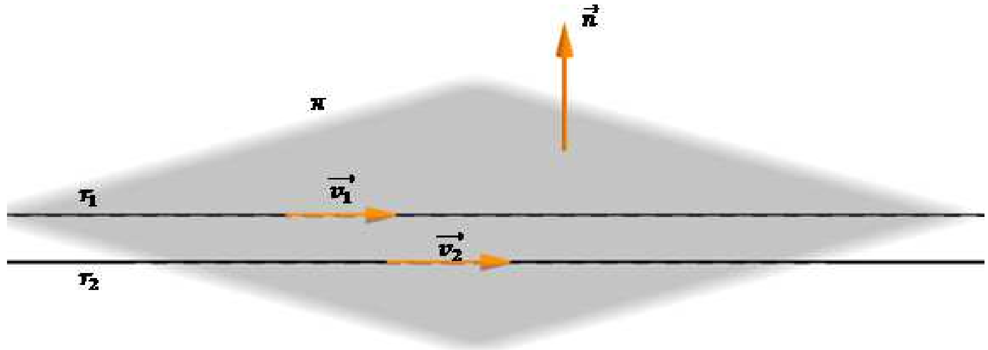
$\pi:\ 2x + 2y - z + d = 0$

Para averiguar d reemplazamos un punto que pertenezca al plano. Puede ser cualquier punto de las rectas, por ejemplo $(1,1,1)$:

$$2.1 + 2.1 - 1.1 + d = 0 \Rightarrow d = -3$$
$$\pi: 2x + 2y - z - 3 = 0$$

Caso 2: Rectas paralelas

Veamos el siguiente gráfico que muestra dos rectas paralelas y el plano que las contiene:



Dadas dos rectas paralelas, existe un plano que las contiene pero no podemos hallar el vector normal como en el caso de las rectas concurrentes. ¿Por qué?

Ejemplo

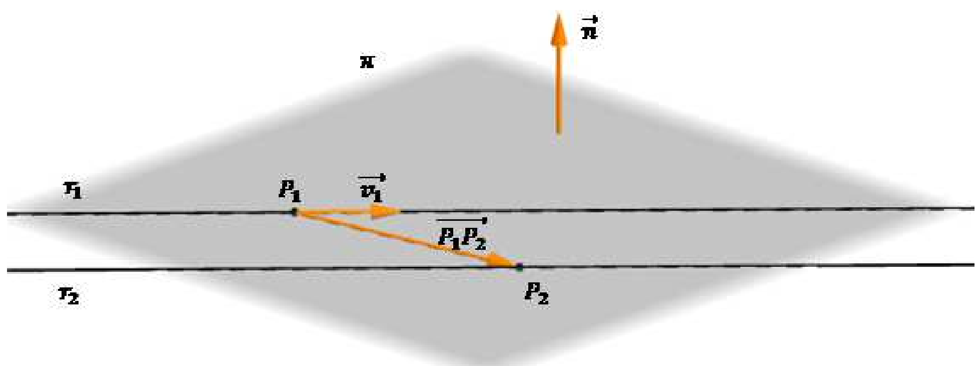
$$r_1: (x, y, z) = (1,2,3) + \lambda(-1,1,4)$$
$$r_2: (x, y, z) = (1,0,0) + t(3,-3,-12)$$

Claramente son paralelas pues sus vectores directores son paralelos:

$$(3,-3,-12) = -3.(-1,1,4).$$

El lector puede comprobar que $(-1,1,4) \times (3,-3,-12) = \vec{0}$, entonces el vector normal del plano no puede hallarse con este producto vectorial.

Para hallar el vector normal, consideramos uno de los vectores directores y un vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ determinado por un punto de cada recta, como muestra la figura:



El producto vectorial de ambos da un vector normal al plano:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_2}$$

Para completar la ecuación del plano, consideramos un punto de cualquiera de las rectas. Así obtenemos la ecuación del plano que contiene a las rectas dadas:

$$\pi: \ 5x - 3y + 2z - 5 = 0$$

Caso 3: Rectas alabeadas

Dos rectas alabeadas no pueden estar contenidas en un mismo plano.

Ejemplo

Hallar, si es posible, el plano que contiene a las rectas:

$$r_1: (x, y, z) = \lambda(1,0,0)$$
$$r_2: (x, y, z) = (0,1,0) + t(0,0,1)$$

Dejamos a cargo del lector la verificación de que son alabeadas. Busquemos un vector perpendicular a ambas rectas:

$$\vec{n} = (1,0,0) \times (0,0,1) = (0,-1,0)$$

Considerando el punto $(0,0,0)$ perteneciente a r_1, obtenemos el siguiente plano:

$$\pi: \ y \ = \ 0$$

Sin embargo, este plano no contiene a r_2, pues el punto $(0,1,0)$ no verifica la ecuación de π.
Sugerimos al lector hacer un gráfico de las rectas y el plano obtenido, para visualizar la situación.
No es posible hallar un plano que contenga a dos rectas alabeadas. Las rectas alabeadas no son coplanares.

Ángulo entre dos rectas

Definición: El ángulo entre dos rectas de $\mathbb{R}^3$ es el ángulo entre sus vectores directores.
Sean las rectas r_1 y r_2 con vectores directores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$. Entonces:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}}{\|\overrightarrow{v_1}\|\|\overrightarrow{v_2}\|}$$

Usamos la misma convención que para ángulo entre planos y para ángulo entre recta y plano, y aplicamos módulo:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}|}{\|\overrightarrow{v_1}\|\|\overrightarrow{v_2}\|}$$

Por lo tanto:

$$\alpha = arcos\left(\frac{|\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}|}{\|\overrightarrow{v_1}\|\|\overrightarrow{v_2}\|}\right) \ , \ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \qquad \textit{ángulo entre dos rectas}$$

Casos particulares:
Si $\alpha = 0$, entonces las rectas son paralelas ($\overrightarrow{v_1} = k\,\overrightarrow{v_2}$).
Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, entonces las rectas son perpendiculares ($\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = 0$).
Observación: La definición de ángulo que hemos adoptado no toma en cuenta si las rectas se cortan o no.

Sean,

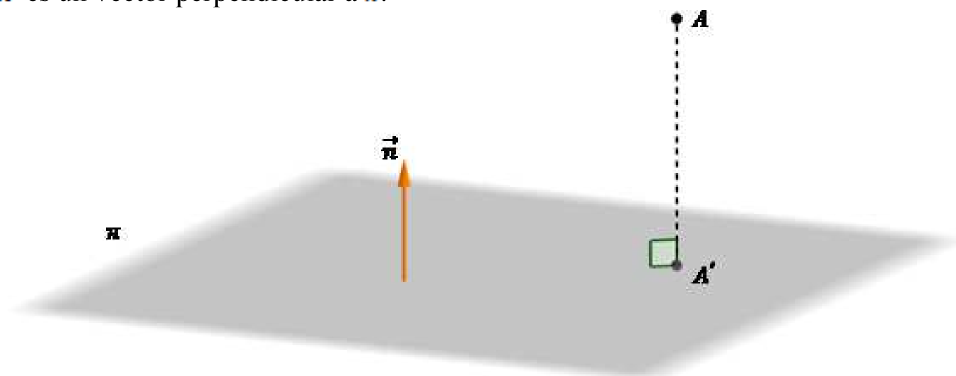
$$r_1: (x, y, z) = \lambda(1,0,0) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$r_2: (x, y, z) = (0,1,0) + t(0,0,1) \quad t \in \mathbb{R}$$

Vimos en un ejemplo anterior que estas rectas son alabeadas.¿Cuál es el ángulo entre ellas?
Como $\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = 0$, las rectas son perpendiculares, o sea que $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Proyecciones ortogonales

Proyección de un punto sobre un plano

Dados un plano π y un punto A no perteneciente a dicho plano, la proyección ortogonal de A sobre π es el punto $A' \in \pi$ tal que $\overrightarrow{AA'}$ es un vector perpendicular a π.



$$A' = proy_{\pi}(A) \quad si\ y\ sólo\ si \quad \begin{cases} A' \in \pi \\ \overrightarrow{AA'} \perp \pi \end{cases}$$

Ejemplo

Dados un plano π y un punto A, obtener la proyección ortogonal del punto sobre el plano:

$$\pi: \ 2x - y + 3z + 1 = 0$$
$$A(4,1,-3)$$

Para obtener A' buscamos la recta perpendicular a π que pasa por A. El vector normal del plano es paralelo a esta recta, por lo tanto podemos tomarlo como vector director:

$$r: (x, y, z) = (4,1,-3) + \lambda(2,-1,3)$$

Ahora buscamos la intersección de la recta con el plano, reemplazando las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano:

$$\begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -3 + 3\lambda \end{cases}$$
$$2(4 + 2\lambda) - (1 - \lambda) + 3.(-3 + 3\lambda) + 1 = 0$$
$$8 + 4\lambda - 1 + \lambda - 9 + 9\lambda + 1 = 0$$
$$14\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{14}$$

Reemplazamos en la ecuación de la recta para obtener las coordenadas del punto A':

$$(x, y, z) = (4,1,-3) + \frac{1}{14}(2,-1,3) = (4,1,-3) + \left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{14}, \frac{3}{14}\right) = \left(\frac{29}{7}, \frac{13}{14}, -\frac{39}{14}\right)$$

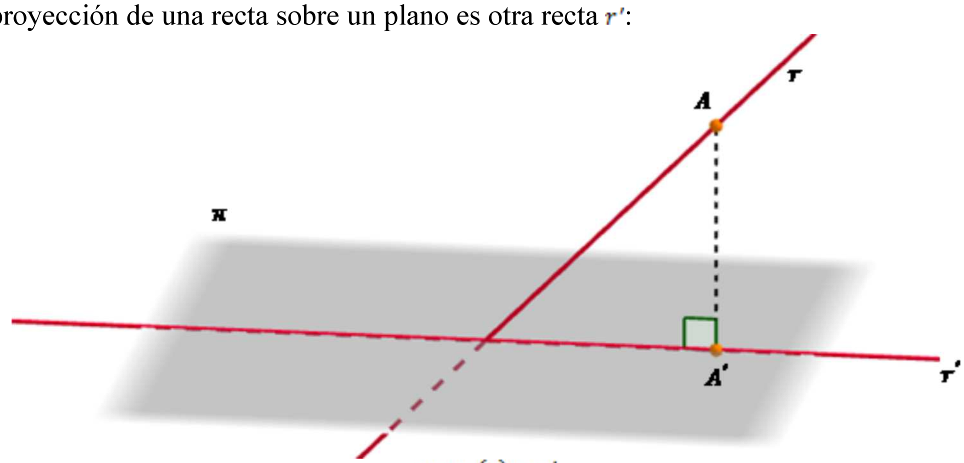
El lector puede verificar que $A'\left(\frac{29}{7}, \frac{13}{14}, -\frac{39}{14}\right) \in \pi \quad y \quad \overrightarrow{AA'} \perp \pi$.

Si $A \in \pi$, ¿cuál es la proyección de A sobre π?

Proyección de una recta sobre un plano

Dados una recta r y un plano π,nos interesa obtener la proyección ortogonal de la recta sobre el plano.

En general, la proyección de una recta sobre un plano es otra recta r':

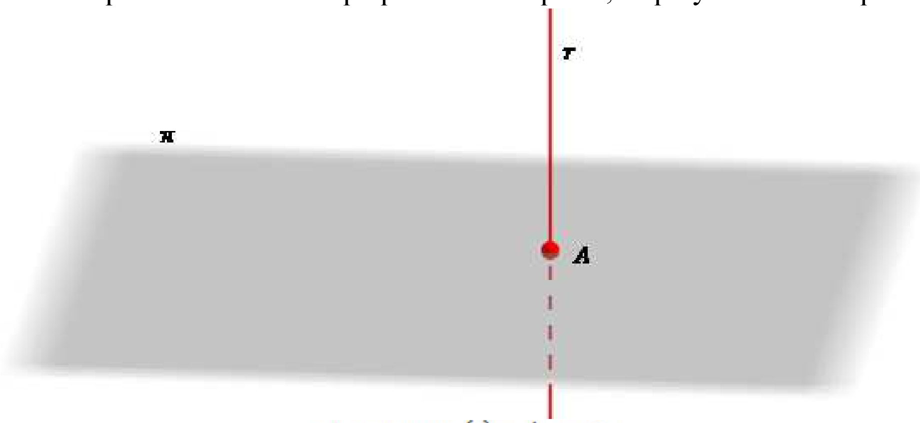


$$proy_{\pi}(r) = r'$$

Para hallar r' podemos proyectar dos puntos de la recta sobre el plano. Si llamamos A y B a dichos puntos, resulta

$$proy_\pi(A) = A' \quad , \quad proy_\pi(B) = B'$$

La recta r' que buscamos es la recta determinada por A' y B'.
Pero teniendo en cuenta que el punto de intersección entre la recta y el plano pertenece a r', es suficiente proyectar un solo punto de r para que r' quede definida.
También existe un caso especial: si la recta es perpendicular al plano, su proyección es un punto.



$$r \perp \pi \Rightarrow proy_\pi(r) = A = r \cap \pi$$

Ejemplo

Dado $\pi: x + y + z - 3 = 0$

a. Hallar la proyección de la recta $r: (x, y, z) = \lambda(0,2,1)$ sobre π
b. Dada la recta $s: (x, y, z) = (1,0,0) + t.(-2, b, c)$, hallar los valores de b y c para que la proyección de s sobre π sea un punto. ¿Cuál es dicho punto?

Resolución

Parte A

Para hallar la recta $r' = proy_\pi(r)$ buscamos dos puntos que pertenezcan a r'.
Uno de los puntos puede ser el de intersección:

$$2\lambda + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (0,2,1)$$

Tomemos el punto $(0,0,0) \in r$. Para proyectarlo sobre el plano buscamos la recta perpendicular al plano que pasa por $(0,0,0)$:

$$(x, y, z) = (0,0,0) + \alpha(1,1,1)$$
$$(x, y, z) = \alpha(1,1,1)$$

Reemplazando en la ecuación del plano:

$$\alpha + \alpha + \alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

Entonces la proyección del punto $(0,0,0)$ sobre π da $(1,1,1)$
La recta r' queda definida por los puntos $(0,2,1)$ y $(1,1,1)$:

$$r': (x, y, z) = (0,2,1) + \gamma(1, -1,0)$$

Parte B

Para que la proyección de s sobre π sea un punto, el vector director de s debe ser paralelo al vector normal del plano. Debe existir un $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(1,1,1) = k(-2, b, c)$$

De aquí deducimos que deben ser $b = c = -2$. La ecuación de la recta queda:

$$s: (x, y, z) = (1,0,0) + t(-2, -2, -2)$$

Para hallar el punto reemplazamos las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano:

$$s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2t \\ z = -2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad \pi: x + y + z - 3 = 0$$

$$1 - 2t - 2t - 2t - 3 = 0 \Rightarrow -2 - 6t = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

El punto es:

$$P\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Por lo tanto:

$$proy_{\pi}(s) = s \cap \pi = P\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

EPL 5

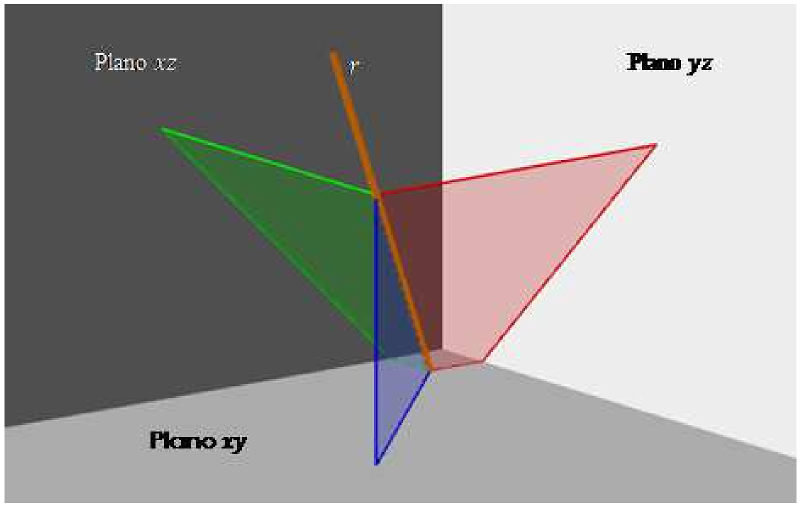
Sean:

$$\pi: (x, y, z) = (0,1,0) + \alpha(1,1,1) + \beta(0,0,1)$$
$$r: (x, y, z) = (1,3,1) + t\,(k, 2, -1)$$

Determinar el valor de k para que r sea paralela a π y obtener la proyección de r sobre π.

Planos proyectantes de una recta

Los planos proyectantes de una recta son aquellos planos que incluyen a la recta y son perpendiculares a los planos coordenados.



Hallar los planos proyectantes de la siguiente recta:

$$r: \begin{cases} x - 2y + z + 7 = 0 \\ -x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Resolución

Teniendo en cuenta que la recta está definida como intersección de dos planos, una forma práctica de hallar los planos proyectantes es construir el haz de planos que pasan por dicha recta:

Construyamos el haz de planos que pasa por r:

$$\mathcal{H}: \alpha(x - 2y + z + 7) + \beta(-x + y + z - 1) = 0$$

Ahora distribuimos y reordenamos:

$$\underbrace{(\alpha - \beta)}_{a} x + \underbrace{(-2\alpha + \beta)}_{b} y + \underbrace{(\alpha + \beta)}_{c} z + \underbrace{7\alpha - \beta}_{d} = 0$$

El plano proyectante perpendicular al plano xy (o sea, paralelo al eje z) es un plano de la forma $ax + by + d = 0$. Por lo tanto:

$$\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$$
$$\Rightarrow \pi_1: -2x + 3y - 8 = 0$$

El plano proyectante perpendicular al plano xz (o sea, paralelo al eje y) es un plano de la forma $ax + cz + d = 0$. Por lo tanto:

$$-2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 2\alpha$$
$$\Rightarrow \pi_2: -x + 3z + 5 = 0$$

¿Cuál es el plano proyectante perpendicular al plano yz?

Hallar los planos proyectantes de la recta que pasa por los puntos $A(1,2,3)$ y $B(3,1,-1)$.

La ecuación vectorial de la recta AB es $r: (x, y, z) = (1,2,3) + t(2,-1,-4)$

Llamemos π_1 al plano proyectante que es perpendicular al plano xy. ¿Qué condiciones debe cumplir $\overrightarrow{n_1}$?

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} = (a, b, \mathbf{0}) \quad para\ que\ \pi_1\ sea\ \perp al\ plano\ xy \\ \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0 \quad para\ que\ r \subset \pi_1 \end{cases}$$

Entonces: $(a, b, 0) \cdot (2, -1, -4) = 0 \Rightarrow 2a - b = 0 \Rightarrow b = 2a$

Con $a = 1$ y $b = 2$, resulta: $\overrightarrow{n_1} = (1,2,0) \Rightarrow \pi_1: x + 2y + d = 0$

Teniendo en cuenta que $r \subset \pi_1$, reemplazamos un punto de la recta (por ejemplo A) para obtener d.

El plano buscado es: $\pi_1: x + 2y - 5 = 0$

Dejamos a cargo del lector comprobar que los otros planos proyectantes son:

$$\pi_2: 2x + z - 5 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_3: -4y + z + 5 = 0$$

Retomemos el ejemplo anterior, siendo $r\colon (x,y,z) = (1,2,3) + t(2,-1,-4)$
Cuando las componentes del vector director de una recta son distintas de cero, podemos expresarla a través de sus ecuaciones simétricas. En este caso:

$$r\colon \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-4}$$

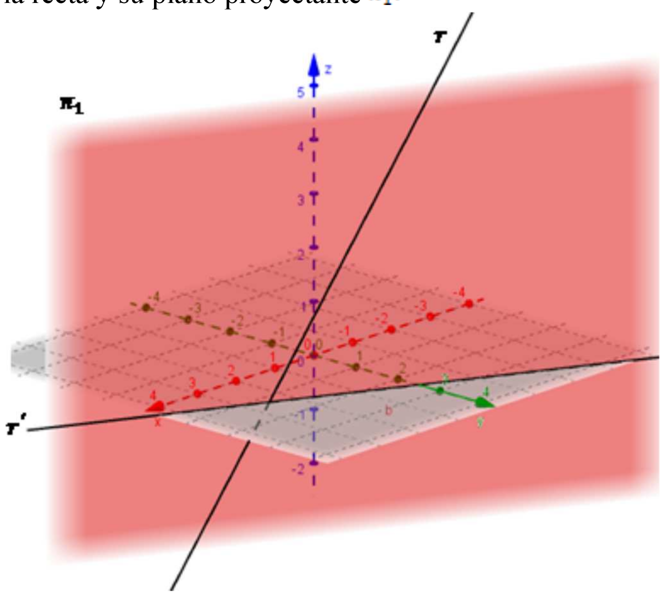
A partir de las ecuaciones simétricas se deducen tres igualdades, cada una de las cuales se corresponde con la ecuación de un plano proyectante de la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \Rightarrow -(x-1) = 2(y-2) \Rightarrow x + 2y - 5 = 0 \quad \textit{Plano proyectante } \pi_1$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{z-3}{-4} \Rightarrow -4(x-1) = 2(z-3) \Rightarrow 2x + z - 5 = 0 \quad \textit{Plano proyectante } \pi_2$$

$$\frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-4} \Rightarrow -4(y-2) = -(z-3) \Rightarrow -4y + z + 5 = 0 \quad \textit{Plano proyectante } \pi_3$$

El siguiente gráfico muestra la recta y su plano proyectante π_1:



En la figura puede observarse que el plano proyectante π_1 es el plano determinado por la recta r y su proyección r' sobre el plano coordenado xy. Lo mismo puede afirmarse de los otros dos planos proyectantes.

EPL 6

Hallar los planos proyectantes de cada una de las siguientes rectas:

$$r\colon (x,y,z) = (1,2,3) + t(1,-2,0)$$
$$s\colon (x,y,z) = (2,2,1) + \lambda(0,0,1)$$

A partir de los resultados obtenidos, ¿podrían establecer qué condición debe cumplirse para que una recta tenga dos de sus planos proyectantes iguales?
¿Existe algún caso en que no esté definido alguno de los planos proyectantes de una recta?

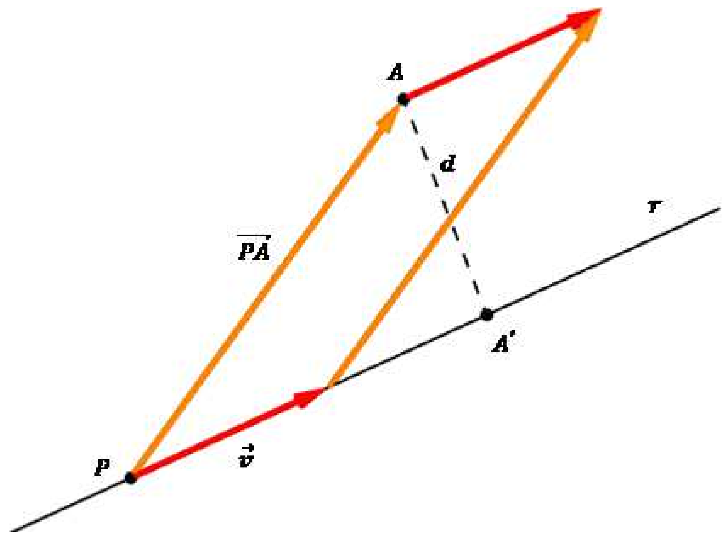
Distancias

Distancia punto-recta en $\mathbb{R}^3$

Dados un punto A y una recta r de vector director $\vec{v}$, queremos hallar la distancia entre A y r (con $A \notin r$). Sea $A' \in r$ tal que $\overrightarrow{AA'}$ es perpendicular a la recta.

$$d(A,r) = \|\overrightarrow{AA'}\|$$

Consideremos un punto $P \in r$ y el vector $\overrightarrow{PA}$, y construyamos el paralelogramo determinado por $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PA}$, tal como lo muestra la figura:



El segmento AA' es la altura del paralelogramo. Si llamamos S al área de dicho paralelogramo, resulta:

$$S = b.h = \|\vec{v}\|.d \qquad [1]$$

Recordemos que el área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial:

$$S = \|\overrightarrow{PA} \times \vec{v}\| [2]$$

Igualando [1] y [2] podemos despejar d:

$$\|v\|.d = \|\overrightarrow{PA} \times \vec{v}\|$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad d(A,r) = \frac{\|\overrightarrow{PA} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}}$$

Calcular la distancia entre la recta $r: (x,y,z) = (1,0,-1) + \lambda(-2,1,1)$ y el punto $A(3,-1,1)$.

Resolución

Aplicamos la fórmula:

$$d(A,r) = \frac{\|\overrightarrow{PA} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Tomamos un punto cualquiera de la recta, por ejemplo $P(1,0,-1)$ y formamos:

$$\overrightarrow{PA} = (2,-1,2)$$

$$d(A,r) = \frac{\|(2,-1,2) \times (-2,1,1)\|}{\|(-2,1,1)\|} = \frac{\|(-3,-6,0)\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{6}} \cong 2{,}74$$

Distancia entre dos rectas paralelas

La fórmula que hemos visto permite calcular la distancia entre dos rectas paralelas. Veamos un ejemplo:

Dados las rectas $r_1: (x,y,z) = (1,0,0) + t(2,-1,1)$ y $r_2: \begin{cases} y + z = 2 \\ x + ky = 0 \end{cases}$

Hallar k tal que $r_1 \parallel r_2$ y calcular $d(r_1, r_2)$.

Recordemos la condición para que dos rectas sean paralelas:

$$r_1 \parallel r_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{v_1} = \alpha\, \overrightarrow{v_2} \qquad [1]$$

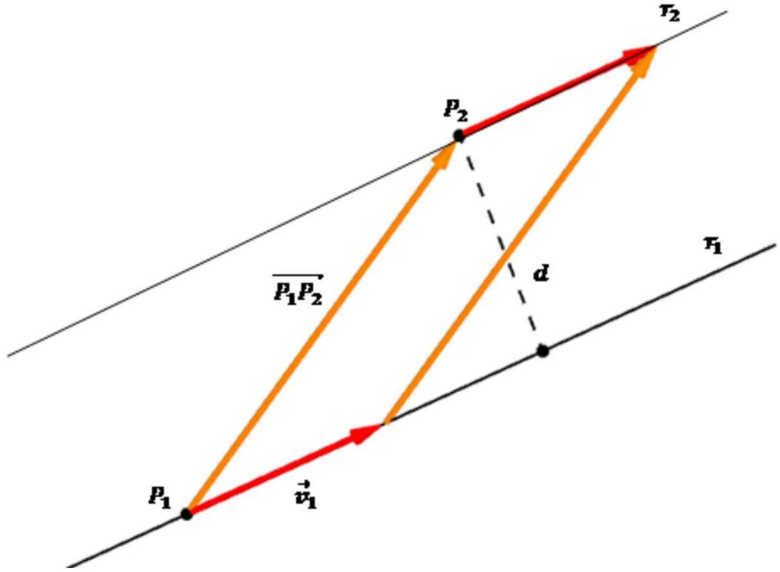
La recta r_2 está definida como intersección de dos planos. Si hacemos el producto vectorial de los vectores normales tendremos un vector director de la recta:

$$(0,1,1) \times (1,k,0) = (-k,1,-1)$$

Por [1]:

$$(-k,1,-1) = \alpha(2,-1,1) \Rightarrow \begin{cases} -k = 2\alpha \\ 1 = -\alpha \\ -1 = \alpha \end{cases}$$
$$\Rightarrow k = 2$$

Para calcular la distancia, tomemos dos puntos cualesquiera de las rectas y construyamos el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$:



$$P_1(1,0,0) \in r_1 \quad , \quad P_2(0,0,2) \in r_2 \quad , \quad \overrightarrow{P_1P_2} = (-1,0,2)$$

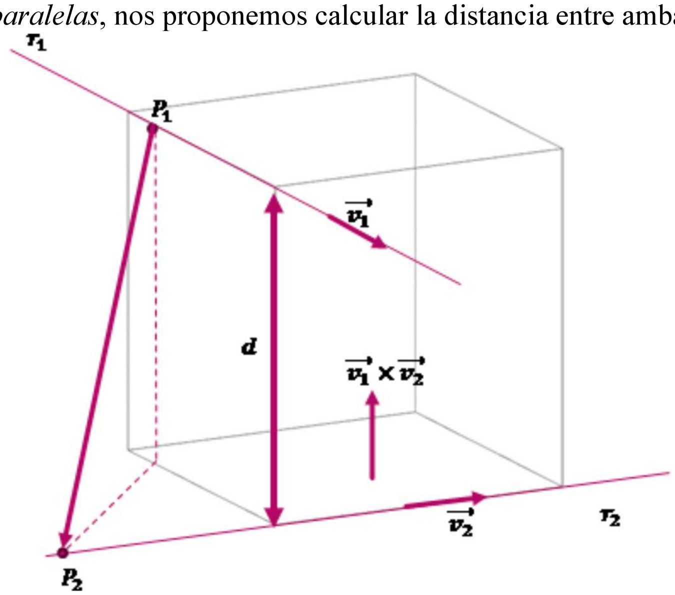
La distancia entre las rectas será la distancia entre P_2 y r_1:

$$d(r_1,r_2) = d(P_2,r_1) = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{v_1}\|}{\|\overrightarrow{v_1}\|}$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{v}_1 = (-1,0,2) \times (2,-1,1) = (2,5,1)$$
$$\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{v}\| = \sqrt{30}$$
$$d(r_1,r_2) = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

Como ven, con las mismas herramientas resolvimos un problema diferente.

Distancia entre rectas alabeadas

Dadas dos rectas r_1 y r_2 *no paralelas*, nos proponemos calcular la distancia entre ambas:



La mínima distancia entre dos rectas alabeadas r_1 y r_2 se obtiene al proyectar el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ sobre la dirección perpendicular a ambas rectas, dada por $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$:

$$d(r_1,r_2) = \|\overrightarrow{proy}_{\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}}(\overrightarrow{P_1P_2})\|$$

Recordemos que:

$$\|\overrightarrow{proy}_{\vec{v}}(\vec{u})\| = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$$

Entonces podemos obtener una fórmula para la distancia entre r_1 y r_2:

$$\boxed{d(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2}.(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2})|}{\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|} \qquad \textit{distancia entre rectas alabeadas}}$$

¿Qué significa que la distancia dé 0?

Condición de coplanaridad

Habíamos visto que tanto las rectas concurrentes como las paralelas son coplanares (existe un plano que las contiene).

- Si las rectas se cortan, la distancia entre ellas es cero y por lo tanto: $(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$.
- Si las rectas son paralelas, $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \vec{0}$ y por lo tanto también se cumple que $(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$.

Entonces estamos en condiciones de enunciar una ***condición de coplanaridad*** entre dos rectas:

$$\boxed{\boldsymbol{r_1 \text{ y } r_2 \text{ son coplanares } \Leftrightarrow (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0}}$$

Ejemplo

Dadas las rectas:

$$r_1: (x,y,z) = (3,2,5) + \lambda(0,-1,2)$$
$$r_2: \begin{cases} 2x + y + 3z + 2 = 0 \\ -x + 2y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

Calcular $d(r_1, r_2)$

Resolución

Debemos verificar que se trata de rectas alabeadas. Busquemos la dirección de la recta r_2:

$$\overrightarrow{v_2} = (2,1,3) \times (-1,2,-4) = (-10,5,5)$$

Vemos que <u>las rectas no son paralelas</u> porque sus vectores directores no son paralelos. Luego podemos utilizar la fórmula para distancia entre rectas alabeadas:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} . (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2})|}{\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|}$$

Para hallar $P_2 \in r_2$ fijamos $z = 0$, por ejemplo, y averiguamos los valores de x e y resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ -x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \ , \ y = -\frac{8}{5}$$

Obtenemos así $P_2 \left(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5}, 0\right) \in r_2$

Calculamos:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(-\frac{16}{5}, -\frac{18}{5}, -5\right)$$
$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = (0,-1,2) \times (-10,5,5) = (-15,-20,-10)$$
$$\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\| = \sqrt{(-15)^2 + (-20)^2 + (-10)^2} = \sqrt{725}$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} . (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) = \left(-\frac{16}{5}, -\frac{18}{5}, -5\right) . (-15,-20,-10) = 48 + 72 + 50 = 170$$
$$d(r_1, r_2) = \frac{170}{\sqrt{725}} \cong 6{,}31$$

Epl

EPL 7

Dadas las rectas del ejemplo anterior:

$$r_1: (x,y,z) = (3,2,5) + \lambda(0,-1,2)$$
$$r_2: \begin{cases} 2x + y + 3z + 2 = 0 \\ -x + 2y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

Hallar la ecuación del plano π que contiene a r_1 y es paralelo a r_2.

Epl

EPL 8

Dadas las rectas $r_1 : (x,y,z) = t(1,1,2)$ y $r_2 : (x,y,z) = (1,k,0) + \lambda\,(2,1,0)$

Hallar el valor de k para que las rectas sean coplanares y encontrar el plano que las contiene.