Resueltos

MATERIA: Análisis Matemático I

TITULO: T.P. Nº 7

"Integral Definida"

Edición 2000

AUTOR: Anibal Kasero

1. Considere $f: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R} \;/\; f(x) = x^2 + 4 \quad en\ [1;4]$

   1.1. Encuentre las sumas superior $\overline{S}$ e inferior $\underline{S}$ de Riemann correspondientes a cada una de las siguientes particiones:

   1.1.1. $P_0[1;2;2.5;3;4]$

   1.1.2. $P_1[1;1.5;2;2.5;3;3.5;4]$

   1.1.3. $P_2 = \{x_i / x_i = 1 + 0.25.i \text{ con } i = 0,1,2,\ldots,12\}$ (puntos equiespaciados)

   1.2. ¿Qué sucede con $\overline{S}$ y $\underline{S}$ a medida que se "refina" la partición?

1.1.1.) Una suma inferior esta definida como:

$\underline{S} = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \cdots + m_n \Delta x_n$; donde $\Delta x_1 = x_1 - x_0$ y $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$; m_1 es el menor valor de $f(x)$ en el segmento Δx_1 y m_n el menor en Δx_n. En este caso:

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= 2 - 1 = 1 & m_1 &= f(1) = 1^2 + 4 = 5 \\
\Delta x_2 &= 2,5 - 2 = 0,5 & m_2 &= f(2) = 2^2 + 4 = 8 \\
\Delta x_3 &= 3 - 2,5 = 0,5 & m_3 &= f(2,5) = (2,5)^2 + 4 = 10,25 \\
\Delta x_4 &= 4 - 3 = 1 & m_4 &= f(3) = 3^2 + 4 = 13
\end{aligned}$$

pues $f(x)$ es creciente en el $[1,4] \Rightarrow$ el menor valor lo toma en el extremo inferior del intervalo.

$\Rightarrow \underline{S} = 5.1 + 8.0,5 + 10,25.0,5 + 13.1 = 27,125$

Una suma superior esta definida por:

$\overline{S} = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots + M_n \Delta x_n$, donde $M_1, \ldots, M_n$ son los valores mas grandes de $f(x)$ en cada intervalo en cuestión:

Los intervalos son los mismos, pero $M_1 = 2^2 + 4 = 8$;

$M_2 = (2,5)^2 + 4 = 10,25$; $M_3 = 3^2 + 4 = 13$; $M_4 = 4^2 + 4 = 20$; pues

ahora f(x) toma su valor mas alto en el extremo superior de cada intervalo ⇒

$\overline{S} = 8.1 + 10{,}25.0{,}5 + 13.0{,}5 + 20.1 = 39{,}625$

1.1.2)
$\Delta x_1 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$ $\quad m_1 = 5$ $\quad M_1 = 6{,}25$
$\Delta x_2 = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$ $\quad m_2 = 6{,}25$ $\quad M_2 = 8$
$\Delta x_3 = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$ $\quad m_3 = 8$ $\quad M_3 = 10{,}25$
$\Delta x_4 = 3 - 2{,}5 = 0{,}5$ $\quad m_4 = 10{,}25$ $\quad M_4 = 13$
$\Delta x_5 = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$ $\quad m_5 = 13$ $\quad M_5 = 16{,}25$
$\Delta x_6 = 4 - 3{,}5 = 0{,}5$ $\quad m_6 = 16{,}25$ $\quad M_6 = 20$

$\underline{S} = 5.0{,}5 + 6{,}25.0{,}5 + 8.0{,}5 + 10{,}25.0{,}5 + 13.0{,}5 + 16{,}25.0{,}5 = 29{,}375$

$\overline{S} = 6{,}25.0{,}5 + 8.0{,}5 + 10{,}25.0{,}5 + 13.0{,}5 + 16{,}25.0{,}5 + 20.0{,}5 = 36{,}87$

1.1.3) Ahora son 12 intervalos, cada uno de longitud: 0,25

$\Delta x_1 = 1{,}25 - 1 = 0{,}25$ $\quad m_i$ y M_i como antes.
$\Delta x_2 = 1{,}5 - 1{,}25 = 0{,}25$ $\quad$ es mas largo pero igual.
etc.

—o—

1.2) A medida que se refina la partición $\underline{S}$ y $\overline{S}$ tienden a ser "iguales".

---

2. Estime el valor de la integral $\int_0^1 \cos(x^2)dx$

2.1. Subdividiendo el intervalo [0;1] en 5 subintervalos de igual amplitud y halle las sumas de las áreas de los rectángulos cuyas alturas están dadas por:

2.1.1. Las imágenes de los puntos medios de cada subintervalo.

2.1.2. Las imágenes de los extremos de la izquierda.

2.1.3. Las imágenes de los extremos de la derecha.

2.2. Realice la gráfica en todos los casos usando el software matemático.

2.3. Calcule la integral utilizando el software matemático y compare el resultado con los obtenidos en los ítems anteriores.

NOTA: Realice los cálculos con aritmética de 4 decimales utilizando redondeo simétrico, esto es: si el quinto dígito decimal (o bien el sexto) es 5 o mayor que 5 se aumenta en 1 el cuarto dígito, y si el quinto dígito es 4 o menor que 4 el último dígito permanece inalterado.

2.1.1)

$\Delta x_1 = 0{,}2 - 0 = 0{,}2$; Imagen del punto medio : $\cos(0{,}1^2) = 1$

$\Delta x_2 = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$; " " " " : $\cos(0{,}3^2) = 0{,}9959$

$\Delta x_3 = 0{,}6 - 0{,}4 = 0{,}2$; " " " " : $\cos(0{,}5^2) = 0{,}9689$

$\Delta x_4 = 0{,}8 - 0{,}6 = 0{,}2$; " " " " : $\cos(0{,}7^2) = 0{,}8823$

$\Delta x_5 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; " " " " : $\cos(0{,}9^2) = 0{,}6895$

El área la formamos con el producto de la base Δx_i por la altura f(punto medio) ⇒

$\text{Area}_1 = 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}2$

$\text{Area}_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}9959 = 0{,}1992$

$\text{Area}_3 = 0{,}9689 \cdot 0{,}2 = 0{,}1938$

$\text{Area}_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}8823 = 0{,}1765$

$\text{Area}_5 = 0{,}2 \cdot 0{,}6895 = 0{,}1379$

$$\text{Area} = \sum_{i=1}^{5} \text{Area}_i = 0{,}2 + 0{,}1992 + 0{,}1938 + 0{,}1765 + 0{,}1379$$
$$= 0{,}9074$$

2.1.2) Ahora hacemos lo mismo pero con la imagen de los

Extremos de la izquierda:

$\Delta X_1 = 0{,}2 - 0 = 0{,}2 \Rightarrow \cos(0^2) = 1$

$\Delta X_2 = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2 \Rightarrow \cos(0{,}2^2) = 0{,}9992$

$\Delta X_3 = 0{,}6 - 0{,}4 = 0{,}2 \Rightarrow \cos(0{,}4^2) = 0{,}9872$

$\Delta X_4 = 0{,}8 - 0{,}6 = 0{,}2 \Rightarrow \cos(0{,}6^2) = 0{,}9359$

$\Delta X_5 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2 \Rightarrow \cos(0{,}8^2) = 0{,}8021$

$\text{Area} = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 0{,}9992 + 0{,}2 \cdot 0{,}9872 + 0{,}2 \cdot 0{,}9359 + 0{,}2 \cdot 0{,}8021 =$

$= 0{,}9449$

2.1.3) Igual al anterior ---

2.2) y 2.3) Si tenes una compu, juga un rato, si no anda al laboratorio de computación y tambien juga un rato.

---

3. Analice la integrabilidad de las funciones siguientes en el intervalo $[0,2]$, saque conclusiones y formalice los resultados obtenidos.

3.1. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 3x^3 - 4 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

3.2. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 3x^3 - 4 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

3.3. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 6 & \text{si } x = 1 \\ 3x^3 - 4 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

Sugerencia: Tome como pista el resultado obtenido a partir del uso de software matemático (y además piense en la definición de integral!)

¿Existe algún teorema que garantice sus conclusiones?. En caso afirmativo, enúncielo.

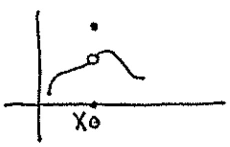
Tenemos el siguiente teorema: Toda función continua en $[a,b]$ es integrable. En virtud de este teorema:

3.1) Es integrable, pues es continua en [0,2].

Entre funciones discontinuas hay funciones integrables y no integrables.

3.2) f(x) es discontinua en x=1, pero esta es una discontinuidad evitable ⇒ El área tiene sentido ⇒ es integrable.

3.3) f(x) es discontínua en x=1; pero esta es una discontinuidad No evitable, la gráfica sería de la forma:



El área carece de sentido en x_0. ⇒ No integrable.

---

4. Determine cuáles de las siguientes funciones son integrables en el intervalo $[0,2]$

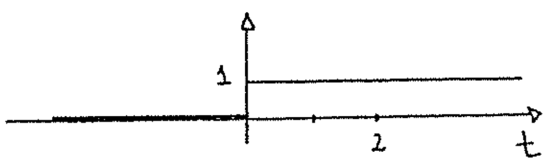
4.1. $f(t) = U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$ *Función de Heaviside o escalón unitario*

4.2. $f(x) = x^2 - 1$

4.3. $f(t) = U(t-1) = \begin{cases} 0 & si\ t < 1 \\ 1 & si\ t > 1 \end{cases}$ *Función de Heaviside desplazada*

4.4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ 3 & si\ x = 1 \end{cases}$

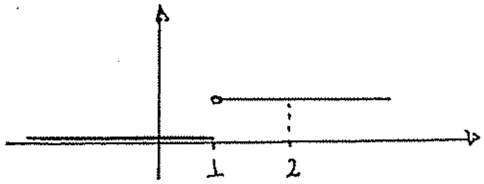
4.1)



Si definimos la función como f(0)=1 ⇒ el área estaría bien definida pero es preciso que f(x) este definida en los extremos del intervalo. Por lo tanto no es integrable.

4.2) Es continua y esta definida en el $[0,2] \Rightarrow$ es integrable.

4.3)



No es continua en $[0,2]$ pues no lo es en $x=1$.

Sin embargo podemos pensar lo siguiente:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \underbrace{\lim_{\epsilon \to 1^-} \int_0^{\epsilon} f(x)\,dx}_{\substack{\text{0 pues} \\ \text{allí vale 0 la} \\ \text{función}}} + \underbrace{\lim_{\epsilon \to 1^+} \int_{\epsilon}^{2} f(x)\,dx}_{\substack{\text{1 pues en el} \\ \text{límite el área da un} \\ \text{valor finito 1.}}}$$

En este sentido el área sería 1 y tendría sentido pensarlo. Lo mismo se pudo haber dicho en el 4.1)

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{2} f(x)\,dx = 2 \quad \text{(El límite del area)}$$

Desde luego, esto permite "salvar" los problemas de estas funciones.

4.4) La función en $x=1$ que pertenece al $[0,2]$ diverge (es decir tiende a $\pm\infty$), entonces ya no podemos arreglar nada. No es integrable.

---

5. Utilizando las propiedades de la integral definida pruebe que:

5.1. $\int_1^3 (2x^4+1)\,dx \geq \int_1^3 (x^4+2)\,dx$

5.2. $\int_0^1 x\, dx \geq \int_0^1 x^2\, dx$

5.3. $(b-a)\, m \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq (b-a)\, M$ siendo m y M los valores mínimo y máximo absolutos de f en $[a;b]$. ¿ Qué hipótesis mínimas debe cumplir f en $[a;b]$?

5.4. $2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}\, dx \leq 2\sqrt{2}$

Primero digamos que: Si en el segmento $[a,b]$ con $a<b$ las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen a la condición $f(x) \geqslant g(x)$ entonces: $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$

5.1) Si mostramos que $2x^4+1 \geqslant x^4+2$ en el $[1,3]$ entonces habremos logrado la prueba:

$2x^4+1 \geqslant x^4+2 \Rightarrow 2x^4-x^4 \geqslant 2-1 \Rightarrow x^4 \geqslant 1$ lo cual es cierto en el $[1,3] \Rightarrow$ probado.

5.2) Idem al anterior.

5.3) Esta demostración esta hecha en casi todos los libros de Análisis matematico 1. Ver por ejemplo Cálculo de Piskunov (Vol. 1, pag. 438).

5.4) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx = 2\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$ por ser el area de una función par (el área desde -1 a 0 es igual al área desde 0, a 1).

Tenemos que mostrar que $2 \leq 2\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx \leq \sqrt{2}$ y esto se verifica por el

teorema mencionado en 5.3) pues: $(b-a) = 1-0 = 1$,
$m = f(a) = f(0) = \sqrt{1+0^2} = 1$ y $M = f(b) = f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

---

6. Pruebe que si f es integrable en $[a;b]$ entonces: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

verifique luego que: $\left|\int_0^\pi x^2 \cos x\,dx\right| \le \int_0^\pi x^2\,dx$

Esta demostración esta muy bien hecha en Análisis Matemático (Vol. 1) Rey Pastor, pag: 670-671. Verifiquemos que $\left|\int_0^\pi x^2 \cos x\,dx\right| \le \int_0^\pi x^2\,dx$. en efecto pues:

$$\left|\int_0^\pi x^2 \cos x\,dx\right| \le \int_0^\pi |x^2 \cos x|\,dx \quad \text{segun dice el teo.}$$

$$\le \int_0^\pi |x^2|\,|\cos x|\,dx$$

$$\le \int_0^\pi x^2\,|\cos x|\,dx \le \int_0^\pi x^2 \cdot 1\,dx$$

pues $|\cos x| \le 1 \quad \forall x$.

---

7. Aplicando el teorema del Valor Medio encuentre el valor x_0 para: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\,dx$

Observe que si fuera posible conocer a priori el valor x_0 Ud. no necesitaría buscar la primitiva para calcular las integrales definidas. Proponga un caso en el que sea posible conocer a priori el valor x_0 y evalúe la integral correspondiente.

Busco primero la primitiva: $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$

ahora: $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{\pi/2}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\cdot\pi/2}{4}\right) - \underbrace{\left(0 - \frac{\operatorname{sen} 0}{4}\right)}_{0}$$

$$= \pi/4$$

ahora usamos el teorema del valor medio:

$$\pi/4 = \operatorname{Sen}^2(x_0)(\pi/2 - 0) \Rightarrow \frac{\pi/4}{\pi/2} = \operatorname{Sen}^2(x_0) \Rightarrow 1/2 = \operatorname{Sen}^2(x_0)$$

$\pm 1/\sqrt{2} = \operatorname{Sen}(x_0)$ Resolviendo la ecuación trigonométrica encontramos pue $x_0 = 45°, 135°, 225°, 315°$ que si los pasamos a radianes y observamos pue tienen pue pertenecer al intervalo $[0, \pi/2] \Rightarrow$ nos quedamos con: $45° \equiv \pi/4$. pue es "exactamente" el valor medio en el intervalo $[0, \pi/2]$.

Los problemas 8) 9) y 10) son demostraciones tecnicas pue las podes hallar en los libros ya citados.

---

11. Demuestre que: $\frac{\pi}{4} \leq \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x \, dx \leq \frac{\pi}{3}$ (sin calcular la integral).

Como la función integranda es par $\Rightarrow \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \operatorname{Cos}^2(x)\,dx =$

$$2\int_0^{\pi/6} \operatorname{Cos}^2(x)\,dx. \Rightarrow \pi/4 \leq 2\int_0^{\pi/6} \operatorname{Cos}^2(x)\,dx \leq \pi/3 \Rightarrow$$

$$\pi/8 \leq \int_0^{\pi/6} \operatorname{Cos}^2(x)\,dx \leq \pi/6$$ y ahora basta utilizar

el teorema mostrado en 5.3) siendo $(b-a) = \pi/6$
M el máximo valor de C^2x en el $[0, \pi/6]$ (que es 1)
y m el minimo (que es $\operatorname{Cos}^2(\pi/6) = 3/4$).

---

12. Mayore las siguientes integrales:

12.1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} \leq \left| \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} \right| \leq$

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{10+3\cos x} \right| dx$; ahora acotemos el integrando: $|10| - |3\cos x| \leq |10 + 3\cos x| \leq |10| + |3\cos x|$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{10+3\cos x} \right| \leq \left| \frac{1}{|10| - |3\cos x|} \right| \leq \frac{1}{10 - |3\cos x|} \leq \frac{1}{10 - 3|\cos x|}$$

un denominador aún más chico se obtiene cuando $|\cos x|$ se acota por 1 $\Rightarrow$

$$\left| \frac{1}{10+3\cos x} \right| \leq \frac{1}{10+(-3).1} = \frac{1}{7}$$; luego:

$$I_1 \leq \int_0^{2\pi} 1/_7 \, dx = 2/_7 \pi \Rightarrow I_1 \leq 2/_7 \pi$$

12.2) $\displaystyle I_2 \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left| \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right| dt \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{|\operatorname{sen} t|}{|t|} dt \leq$

$\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{t} \, dt$; pues $|\operatorname{sen} t| \leq 1$ y $|t| = t$ en el intervalo $[\pi/4 ; \pi/2] \Rightarrow I_2 \leq \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} 1/_t \, dt = \ln t \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} =$

$\ln(\pi/2) - \ln(\pi/4) = \ln\left(\dfrac{\pi/2}{\pi/4}\right) = \ln(2)$. luego:

$I_2 \leq \ln(2)$.

13. Pruebe que:

13.1. $\int_0^4 \frac{x}{x^3+2}\,dx < \int_0^4 x\,dx$

13.2. $\int_0^\pi x\,\text{sen}^2 x\,dx \le \int_0^\pi x\,dx$

13) 1). Ambos integrandos son positivos en el intervalo $[0,4]$, basta con ver que: $\frac{x}{x^3+2} < x \Rightarrow$

$\frac{x}{x^3+2} - x < 0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{x^3+2} - 1\right) < 0$; x es positiva $\Rightarrow$ debe ser negativo el paréntesis:

$\frac{1}{x^3+2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3+2} < 1 \Rightarrow 1 < x^3+2$

(pues $x^3+2 > 0$) $\Rightarrow 1-2 < x^3 \Rightarrow -1 < x^3$ lo cual es cierto en el intervalo $[0,4]$, finalmente:

$$\int_0^4 \frac{x}{x^3+2}\,dx < \int_0^4 x\,dx \quad .-$$

13.2) igual que antes basta mostrar que

$x\,\text{Sen}^2 x \leq x$: partimos de $|\text{Sen}\,x| \leq 1 \Rightarrow$

$\text{Sen}^2 x \leq 1 \Rightarrow x\,\text{Sen}^2 x \leq x$ (multiplico ambos miembros por x pues es $\geq 0 \Rightarrow$ conserva la inecuación). Luego:

$$\int_0^\pi x\,\text{Sen}^2 x\,dx \leq \int_0^\pi x\,dx$$

---

14) La condición que pide este problema es que $f(x)$

Sea acotada sobre el $[a,b]$ y no pide continuidad sobre el $[a,b]$ como lo exige el teorema, para estas discusiones ver por ejemplo "Calculo" Vol. 1 de Tom Apostol o la bibliografia ya citada.

15. Calcule la/s derivada/s de las funciones dadas en los puntos indicados:

15.1. $G(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2}\, dt$ — $G'\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $G''(0)$.

15.2. $f(x) = \int_{2x}^0 \frac{1}{1+t^2}\, dt$ — $f''(-1)$

15.3. $g(x) = \int_x^{x^2} \cos(\pi t)\, dt$ — $g'(-1)$

15.4. $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ y $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u} du$ — $F''\left(\frac{3}{2}\right)$

15.1) $G'(x) = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow G'(-1/2) = \sqrt{1+(-1/2)^2}$

$G''(x)$ se obtiene como siempre.

15.2) Usaremos que: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \Rightarrow$

$$f(x) = \int_{2x}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\int_0^{2x} \frac{1}{1+t^2}\,dt \Rightarrow$$

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{1+(2x)^2}\right) \cdot (2x)' = \frac{-2}{1+4x^2}$$ ahora

obtener $f''(x)$ y terminar.

15.3) Usaremos que $F(x) = \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)\,dt \Rightarrow$

$F'(x) = f(V(x)) . V'(x) - f(U(x)) . U'(x)$; Con esto entonces:

$$f'(x) = \cos(\pi x^3) \cdot 3x^2 - \cos(\pi x) \cdot 1 \Rightarrow$$
$$f'(-1) = \cos(-\pi) \cdot 3 - \cos(-\pi) = -3 + 1 = -2 .-$$

15.4) $F'(x) = f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u}\, du$ ahora:

$$F''(x) = \frac{\sqrt{1+(x^2)^4}}{x^2} \cdot 2x = \frac{2\sqrt{1+x^8}}{x} \Rightarrow$$

$$F''(3/2) = 2 \cdot \frac{\sqrt{1+(3/2)^8}}{(3/2)} .-$$

---

16. Pruebe que $\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x f(t^2)\,dt}{\int_0^x f(\cos t)\,dt} = 6$ si $f'(0) = f(1) = 0$; $\frac{f'(0)}{f'(1)} = -3$ y f 'diferenciable en $\Re^+$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t^2)\,dt}{\int_0^x f(\cos t)\,dt} = \frac{\int_0^0 f(t^2)\,dt}{\int_0^0 f(\cos t)\,dt} = \frac{0}{0} \Rightarrow$$

aplico la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2)}{f(\cos x)} = \frac{f(0^2)}{f(\cos 0)} = \frac{f(0)}{f(1)} = \frac{0}{0} \text{ por datos}$$

(El dato es $f(0) = f(1) = 0$). Aplico nuevamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x^2) \cdot 2x}{f'(\cos x) \cdot -\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} -2 \cdot \underbrace{\frac{x}{\operatorname{sen} x}}_{1} \cdot \frac{f'(x^2)}{f'(\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} -2 \cdot \underbrace{\frac{f'(0)}{f'(1)}}_{-3 \text{ por dato}} \Rightarrow -2 \cdot -3 = 6$$

---

17. Analice la continuidad de la función $G(x)=\begin{cases} \dfrac{\int_1^{x^2} \frac{t}{t^2+1}\,dt}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{si} \quad x>1 \\ 0 & \text{si} \quad x=1 \\ \dfrac{\int_0^{\operatorname{sen}(x-1)} t^2\,dt}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} & \text{si} \quad x<1 \end{cases}$

Analicemos la continuidad en $X=1$:

$G(1) = 0$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\int_1^{x^2} \frac{t}{t^2+1}\,dt}{\operatorname{Sen}(x-1)} \sim \frac{0}{0} \quad \text{aplicamos L'H.}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x^2}{x^4+1}\cdot 2x}{\cos(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \underbrace{\frac{2x^3}{x^4+1}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(x-1)}}_{\downarrow 1} = 1$$

es continua en $x=1$ por la derecha.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\int_0^{\operatorname{Sen}(x-1)} t^2\,dt}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{L'H}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{Sen}^2(x-1)\cdot \cos(x-1)}{-\operatorname{Sen}(x\,\pi/2)\cdot \pi/2} = \frac{0\cdot 1}{-\pi/2} = 0$$ No es continua en $x=1$ por la izquierda. Ademas tampoco será continua

donde se anulen los denominadores de ambas ramas, por ejemplo: $\cos(\frac{\pi}{2}x) = 0$ si $x<1$.

---

18. Investigue para qué valor de x las funciones $F(x)$ y $G(x)$ son infinitésimos simultáneos. Compárelos ¿Son del mismo orden? Justifique la respuesta.

Siendo $F(x) = \int_{x^2}^{9} t\,dt$ y $G(x) = \int_{-3}^{\frac{9}{x}} \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$

Queremos hallar un x_0 / $\lim_{x\to x_0} F(x) = 0 \wedge \lim_{x\to x_0} G(x) = 0$

Si en una integral los extremos son iguales $\Rightarrow$ esta da 0.
Esto ocurre cuando $x\to -3$ pues:

$$F(x) \to \int_{9}^{9} t\,dt \quad y \quad G(x) \to \int_{-3}^{-9/3=-3} \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

Ahora, para compararlos queremos hallar:

$$\lim_{x\to -3} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to -3} \frac{\int_{x^2}^{9} t\,dt}{\int_{-3}^{9/x} \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt} \to \frac{0}{0} \Rightarrow L'H.$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{-x^2 \cdot 2x}{\frac{(9/x)^3}{\sqrt{(9/x)^2+1}} \cdot \left(-\frac{9}{x^2}\right)} = \lim_{x\to -3} \frac{2x^3}{\frac{\frac{9^3}{x^3}\cdot\frac{9}{x^2}}{\sqrt{81/x^2+1}}} =$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{2x^3}{\frac{9^4/x^5}{\sqrt{81/x^2+1}}} = \frac{2.(-3)^3}{\frac{9^4/(-3)^5}{\sqrt{81/(-3)^2+1}}} \cong 6{,}32$$

Como el resultado dio un valor finito, entonces se dice que los infinitésimos son del mismo orden.

---

19. Sea la función $H(x)=\dfrac{\int_1^{\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(t^2-1\right) dt}{\left(\sqrt{x-1}\right)^5}$ $\forall x>1$ La gráfica de esta función ¿admite asíntotas verticales? Determínelas.

Una asíntota vertical se tiene cuando $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, en este caso si $x \to 1^+$ se anula el denominador $\Rightarrow$ $x_0 = 1$ es candidato a asint. vert. Veamos su límite:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\int_1^{\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2-1)\,dt}{(\sqrt{x-1})^5} \to \frac{\int_1^1 \dots dt}{(0)^5} \to \frac{0}{0} \Rightarrow L'H$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\operatorname{sen}\left((\sqrt{x})^2-1\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{5}{2}(x-1)^{3/2}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{5\sqrt{x}\,(x-1)^{3/2}} \to \frac{0}{0}$$

otra vez: $$\lim_{x \to 1^+} \frac{\cos(x-1)}{5\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)^{3/2} + \sqrt{x}\,\frac{3}{2}(x-1)^{1/2}\right)} =$$

$$\frac{\cos(0)}{5\left(\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{3}{2}\, 0\right)} \to \frac{1}{0} \to +\infty$$ Luego $x = 1$ es una asíntota vertical.

---

20) Estas propiedades estan en cualquier libro de Analisis 1.

---

21. Utilizando los resultados del ejercicio anterior calcule e interprete geométricamente:

21.1. $\int_{-5}^{5} \dfrac{x^5}{x^2+4}\, dx$

21.2. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{x}{4}\, dx$

21.3. $\int_{-1}^{1} f(t)dt$ si $f(t)=\begin{cases}1-t & si \quad 0 < t \leq 1 \\ t-1 & si \quad 1 < t \leq 2\end{cases}$ y $f(t)=f(t+2) \quad \forall t$

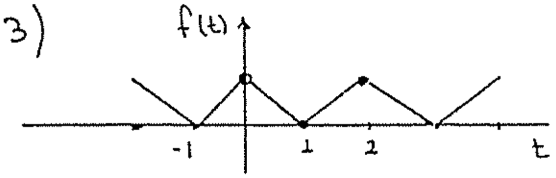
21.1) La función integrande es impar y el intervalo es simétrico ⇒ según 20.2) el resultado es cero. La interpretación es que el área por encima del eje x compensa al área por debajo anulandose.

21.2) El integrando es par ⇒ según 20.1)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/4)\, dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos(x/4)\, dx = +2 \left.\frac{\operatorname{sen}(x/4)}{1/4}\right|_{0}^{\pi} =$$

$$8\left(\operatorname{sen}(\pi/4) - \operatorname{sen}(0)\right) = 8 \cdot \sqrt{2}/2 .$$

21.3)



pues es de periodo 2.

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{0}^{2} f(t)dt$$ por el 20.3). Y el resultado es el

área de "cualquiera" de los triángulos ⇒ $\int_{-1}^{1} f(t)dt = 1$.

---

22. Sea f una función biyectiva con dominio $A \subseteq \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tal que $f(x)=\int_{1}^{x} \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\, dt$.

Halle $\left(f^{-1}\right)'(0)$

tenemos que si $f(x)=y \Rightarrow g(y)=x$ siendo $g=f^{-1}$ y tal que $g'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$; nuestro $y=0$ y se obtiene para un $x=1$

$\Rightarrow g'(0)=\dfrac{1}{f'(1)}$; $f'(x)=\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)) \Rightarrow g'(0)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 1)}$

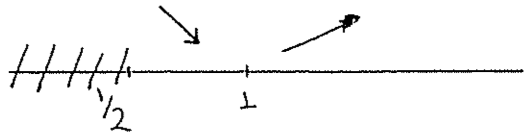
---

23. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

$$F:[\tfrac{1}{2};+\infty)\rightarrow\Re \;/\; F(x)=\int_{1/2}^{x} e^{t}.t^{-2}.(t-1)\,dt$$

$F'(x) = e^{x}\,x^{-2}\,(x-1) = \dfrac{e^{x}(x-1)}{x^{2}} \Rightarrow F'(x)=0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{e^{x}(x-1)}{x^{2}} = 0 \Leftrightarrow x=1$



$F'(3/4) = \dfrac{e^{3/4}\,(3/4-1)}{(3/4)^{2}} < 0 \Rightarrow F(x)$ decrece en $[\tfrac{1}{2}, 1)$

$F'(2) = \dfrac{e^{2}(2-1)}{2^{2}} > 0 \Rightarrow F(x)$ crece en $(1, +\infty)$ y el

$x=1$ resulta ser un mínimo de $F(x)$.

---

24. Halle los intervalos de concavidad y convexidad de la gráfica de:

$$F:\Re\rightarrow\Re \;/\; F(x)=\int_{0}^{x}\frac{3}{2}\,t.e^{-\frac{t}{2}}(4+t)\,dt$$

Buscamos $F''(x)$: $F'(x) = \dfrac{3}{2}\,x\,e^{-x/2}\,(4+x) = \dfrac{3}{2}\,e^{-x/2}\,(4x+x^{2})$

$$F''(x) = \frac{3}{2}\left(e^{-x/2}.(-\tfrac{1}{2})(4x+x^{2}) + e^{-x/2}\,(4+2x)\right)$$

$$= \frac{3}{2}\,e^{-x/2}\left(-2x-\tfrac{1}{2}x^{2}+4+2x\right) = \frac{3}{2}\,e^{-x/2}\left(4-\tfrac{1}{2}x^{2}\right)$$

Ahora solo hay que resolver la ecuación $F''(x)=0$ y proceder como en cualquier estudio de funciones.

---

25. Determine la función continua $g:\Re\rightarrow\Re$ tal que:

$$\int_{0}^{x} g(t)\,dt = \frac{x^{4}}{2}+\frac{x^{6}}{3}+Cx+\int_{x}^{1} t^{2}\,g(t)\,dt \quad \text{si} \quad \lim_{x\to 0} g(x)=1$$

derivemos toda la expresión:

$$g(x) = 4\frac{x^3}{2} + 6\frac{x^5}{3} + C - x^2 g(x) \Rightarrow$$

$$g(x) + x^2 g(x) = 2x^3 + 2x^5 + C \Rightarrow g(x) = \frac{2x^3+2x^5+C}{1+x^2}$$

Para hallar C usamos que $\lim_{x\to 0} g(x) = 1 \Rightarrow \frac{2.0^3+2.0^5+C}{1+0^2} = 1$

$\Rightarrow C = 1$ finalmente $\boxed{g(x) = \frac{2x^3+2x^5+1}{1+x^2}}$

---

26. Sea $f : A \subset \Re \to \Re \ / \int_1^{e^x} f(\ln t)\, dt = \frac{1}{2}x^2$

26.1. Determine f

26.2. Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento y, si existen, máximos y/o mínimos relativos de f

26.1) Derivo toda la expresión: $f(\ln(e^x)).e^x = x \Rightarrow$

$f(x).e^x = x \Rightarrow \boxed{f(x) = xe^{-x}}$

26.2) Hay que derivar f e igualar a cero.

---

27. Sea f derivable en $(-1,1)$ tal que $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 f(x)\,dx$, pruebe que existe $x_0 \in (-1,1)$ tal que $f\,'(x_0) = 0$.

Sugerencia: utilice primero el Teorema del Valor Medio del cálculo integral y luego el Teorema de Rolle.

$\int_0^1 f(x)\,dx = f(x_1)(1-0) = f(x_1)$ con $x_1 \in (0,1)$

$\int_{-1}^0 f(x)\,dx = f(x_2)(0-(-1)) = f(x_2)$ con $x_2 \in (0,-1)$

$\Rightarrow \int_0^1 f\,dx = \int_{-1}^0 f\,dx \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ con $x_1, x_2 \in (-1,1)$

Ahora como f es derivable en $(-1,1) \Rightarrow$ es continua $\Rightarrow$ según Rolle $\exists\, x_0 \in (x_1, x_2)\ /\ f'(x_0)=0$ y el intervalo $(x_1,x_2) \subset (-1,1) \Rightarrow \exists\, x_0 \in (-1,1)\ /\ f'(x_0)=0$.

---

28. Si $G(x) = \int_x^{x+3} t.(5-t)dt$. Halle las coordenadas del único extremo relativo de $G(x)$. Luego determine si es máximo o mínimo.

$G'(x) = (x+3)(5-(x+3)) - x(5-x) = 6(1-x) \Rightarrow G'(x)=0 \Rightarrow$ $\underbrace{x=1}$. $G''(x) = -6 < 0\ \forall x$. Luego $x=1$ es un máximo.

---

29. Sea la función $H(x) = \int_a^{g(x)} \ln t\,dt$ y $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $0<x<a$ y $x \in \Re\ /\ \frac{x^2+1}{x} > a$.

29.1. Halle $H'(1)$ sin calcular la integral.

29.2. Halle los extremos relativos de $f(x)$, siendo $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}.H'(x)$

29.1) $H'(x) = \ln(g(x)).\,g'(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) \cdot \frac{2x^2-x^2-1}{x^2} \Rightarrow$

$H'(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$, $\Rightarrow H'(1) = \ln(2)\cdot 0 = 0$.

29.2) $f(x) = \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right).H'(x) = \frac{x^2}{x^2-1} \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) \cdot \frac{x^2-1}{x^2} \Rightarrow$

$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$. Ahora buscar $f'(x)$ y resolver $f'(x)=0$.

---

30. Sean las funciones $g(x) = x.e^{x^2}$ y $f(x) = \int_1^x g(t).\frac{t+1}{t}dt$. Sin calcular la integral:

30.1. Obtenga $\lim_{x\to\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)}$

30.2. Halle, si existen, extremos relativos de $h(x) = f'(x)$.

30.1) $f'(x) = g(x).\,\frac{x+1}{x} = (1 + 1/x)\,g(x)$, entonces:

$f''(x) = -1/x^2 \cdot g(x) + g'(x)(1 + 1/x)$ Con lo cual:

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{-1/x^2\, g(x) + g'(x)\,(1+1/x)}{g''(x)} \quad ; \quad g(x) = x e^{x^2}$$

$$g'(x) = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} = e^{x^2}(1 + 2x^2)$$
$$g''(x) = 2x\, e^{x^2}(1+2x^2) + e^{x^2}.4x = e^{x^2}(2x + 4x^3 + 4x)$$

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{-1/x^2 \cdot x e^{x^2} + e^{x^2}(1+2x^2)(1+1/x)}{e^{x^2}(6x + 4x^3)}$$

$$= \frac{e^{x^2}\left(-1/x + 1 + 1/x + 2x^2 + 2x\right)}{e^{x^2}\,(6x + 4x^3)}$$

$$= \frac{1 + 2x + 2x^2}{6x + 4x^3}$$; Ahora tomamos el límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f''}{g''} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + 2x + 2x^2}{6x + 4x^3} = 0$$ ✓

30.2) $h(x) = f'(x) = (1 + 1/x)\, g(x) = (1+1/x)\, x e^{x^2} \Rightarrow$
$h(x) = (x + 1)\, e^{x^2}$ $\Rightarrow$ solo basta hallar $h'(x)$ y resolver la ecuación $h'(x) = 0$.

---

31. Determine la función $h: \Re \to \Re$ tal que $\int_a^x t\,.\,h(t)dt = \operatorname{sen} x - x.\cos x - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \Re$.

Derivamos toda la expresión:

$x.h(x) = \cos x - \cos x + x \operatorname{sen} x - x \Rightarrow x h(x) = x(\operatorname{sen} x - 1)$

$\Rightarrow h(x) = \operatorname{sen} x - 1$

---

32. Dada la función $g(x) = x^2 + 3 - x.\int_1^{x|x|} f(t)dt \quad \forall x \geq 0$ y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$ es $y + 4x = 2$. Obtenga el polinomio de Taylor de segundo grado asociado a la función g en potencias de $(x-1)$.

Como $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow g(x) = x^2 + 3 - x.\int_1^{x} f(t)dt$

$g'(x) = 2x - \left(x.\int_1^{x^2} f(t)dt\right)' = 2x - \left(\int_1^{x^2} f(t)dt + f(x^2)\, 2x^2\right)$

$g'(x) = 2x - \int_1^{x^2} f(t)dt - 2x^2 f(x^2)$

$g''(x) = 2 - f(x^2).2x - 4x f(x^2) - f'(x^2).2x.2x^2$

Ahora $P_2(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + g''(1)\frac{(x-1)^2}{2} \Rightarrow$

$g(1) = 1^2 + 3 - 1.\underbrace{\int_1^1 f(t)dt}_{0} = \underbrace{4}$

$g'(1) = 2.1 - \underbrace{\int_1^1 f(t)dt}_{0} - 2.1^2 f(1) = \underbrace{2 - 2f(1)}$

$g''(1) = 2 - f(1).2.1 - 4.1 f(1) - f'(1).2.1.2.1^2$
$= 2 - 2f(1) - 4f(1) - 4f'(1) = 2 - 6f(1) - 4f'(1)$

Nos falta saber $f(1)$ y $f'(1) \Rightarrow$ usamos el dato de la recta tangente: $y_T = f'(1)(x-1) + f(1)$
$= f'(1)x - f'(1) + f(1) = -4x + 2$

Vemos entonces que: $f'(1) = -4$ y $-f'(1) + f(1) = 2$

$\Rightarrow f(1) = 2 - 4 = -2$

Luego:

$$P_2(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ 4}}{g(1)} + \underset{\substack{\downarrow \\ 2-2f(1) \\ \downarrow \\ 6}}{g'(1)}(x-1) + \underset{\substack{\downarrow \\ 2-6f(1)-4f'(1) \\ 2-6(-2)-4(-4)=30}}{g''(1)} \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$\boxed{P_2(x) = 4 + 6(x-1) + 30\frac{(x-1)^2}{2}}$$

---

33. Halle el Polinomio de Taylor de segundo grado en $x_0 = 1$ asociado a la función $F(x) = \int_0^{x^2-1} f(t)dt$ si $f : \Re \to \Re$ es derivable y tiene un mínimo relativo en el punto (0;-1).

$F(x) = \int_0^{x^2-1} f(t)dt \Rightarrow F(1) = \int_0^0 f(t)dt = 0$

$F'(x) = f(x^2-1)2x \Rightarrow F'(1) = f(0) \cdot 2$

$F''(x) = f'(x^2-1) . 2x . 2x + 2 . f(x^2-1) \Rightarrow F''(1) = 4f'(0) + 2f(0)$

Nos falta hallar $f(0)$ y $f'(0)$. f tiene un mínimo en $(0,-1)$

$\Rightarrow f'(0) = 0$ y además $f(0) = -1 \Rightarrow$

$F(1) = 0$; $F'(1) = -2$; $F''(1) = 4.0 + 2.(-1) = -2$

$$\boxed{P_2(x) = -2(x-1) - 2\frac{(x-1)^2}{2}}$$

---

34. Determine los máximos y mínimos relativos, si existen, de las siguientes funciones:

34.1. $H(x) = \int_{-2}^{x} \frac{t^2 - 2t - 3}{t^2 + 4} dt$

34.2. $Q(x) = \int_{-4}^{x} \frac{t^2 - 2t - 3}{t^2 + 3t + 2} dt$ (¿Cuál es su dominio?)

34.1) $H'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+4} = 0 \Rightarrow x^2-2x-3=0$

$\Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -1$, estos son los extremos, ahora obtener H'' y ver cual es máximo y cual un mínimo.

34.2) Igual al anterior, para tener el dominio: excluir las raíces del denominador.

---

35. Obtenga el polinomio de Taylor de segundo grado en $x_0 = 0$ asociado a la función $H(x) = \int_0^{\ln(x^2+1)} f(t)\,dt$, sabiendo que f es una función de clase C^2 en todo el eje real, y que además $P(x) = 5-2x$ es su polinomio de Taylor asociado de primer grado en $x_0 = 0$.

Con el dato del polinomio de f obtenemos que:

$P(x) = f(0) + f'(0)x = 5-2x \Rightarrow f(0) = 5,\ f'(0) = -2 \Rightarrow$

$H(x) = \int_0^{\ln(x^2+1)} f(t)\,dt \Rightarrow H(0) = \int_0^{\ln(1)} f\,dt = \int_0^0 f\,dt = 0$

$H'(x) = f(\ln(x^2+1)) \cdot \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x \Rightarrow H'(0) = f(\ln(1)) \cdot \dfrac{1}{0+1} \cdot 2.0 = 0$

$H''(x) = \left(f(\ln(x^2+1)) \cdot \dfrac{2x}{x^2+1} \right)' = \dfrac{2x}{x^2+1} \left(f(\ln(x^2+1)) \right)' + \dfrac{6x^2+2}{(x^2+1)^2} f(\ln x^2+1)$

$H''(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} f'(\ln(x^2+1)) \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{6x^2+2}{(x^2+1)^2} f(\ln(x^2+1))$

$\Rightarrow H''(0) = 0 + \dfrac{6.0^2+2}{(0^2+1)^2} \cdot f(\ln 1) = 2.f(0) = 2.5 = 10$

Luego: $P_2(x) = 0 + 0x + 10\dfrac{x^2}{2} = 5x^2$.

---

36. Plantee el cálculo del área de cada una de las siguientes gráficas de dos maneras diferentes y luego calcúlela de la forma más conveniente:

Para no extender demasiado el problema vamos a plantear el área de la manera más conveniente.

36.1) Dada la simetría par de la figura hallemos el área del 1º cuadrante, el total será el doble.
La recta tiene ecuación: $Y = -x + 2 \Rightarrow$ el área es:

$$\int_0^1 (-x+2) - x^{2n}\, dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Big|_0^1 =$$

$$\left(-\frac{1^2}{2} + 2.1 - \frac{1^{2n+1}}{2n+1}\right) - \left(-\frac{0^2}{2} + 2.0 - \frac{0^{2n+1}}{2n+1}\right) = \left(-\tfrac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2n+1}\right) - 0 =$$

$$3/2 - \frac{1}{2n+1} \Rightarrow \text{el area total es: } A = 2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

36.2) Primero debemos hallar la ecuación de la cuadrática: pasa por los puntos: $(3,-2)$; $(-1,-2)$; $(2,1) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} a.3^2 + b.3 + c = -2 \\ a(-1)^2 + b(-1) + c = -2 \\ a.2^2 + b.2 + c = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 9a + 3b + c = -2 \\ -a - b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = -6/5 \\ b = 3 \\ c = -1/5 \end{array}$$

Ahora hallemos la recta: $Y = ax + b$ y pasa por: $(-1,-2)$; $(2,1)$

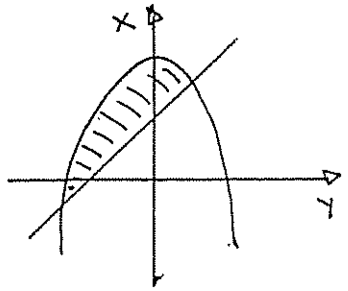
$$\left.\begin{array}{l} a(-1) + b = -2 \\ a.2 + b = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -a + b = -2 \\ 2a + b = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \end{array}$$

El área queda: $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left[\left(-6/5\,x^2 + 3x - 1/5\right) - (x-1)\right] dx =$

$$\int_{-1}^{2} \left(-6/5\,x^2 + 2x + 4/5\right) dx = \left(-6/5 \cdot \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 4/5\,x\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$\left(-2/5 \cdot 2^3 + 2^2 + 4/5 \cdot 2\right) - \left(-2/5(-1)^3 + (-1)^2 + 4/5(-1)\right) = 9/5.$$

36.3) Si rotamos e invertimos los ejes la figura queda:



El valor del área no tiene porque cambiar.
Las funciones ahora son: $x = y + 1$
$x = 3 - y^2$

igualandolas hallamos la intersección:

$y+1 = 3-y^2 \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow$ y sea: 1 y -2 $\Rightarrow$

$$A = \int_{-2}^{1} \left[(3-y^2)-(y+1)\right] dy = \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)\, dy = \left(-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$A = \left(-1/3 - 1/2 + 2\right) - \left(8/3 - 2/4 - 4\right) = 3.\_$$

---

37. Determine el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ y el eje de abscisas. Clasifique la región.

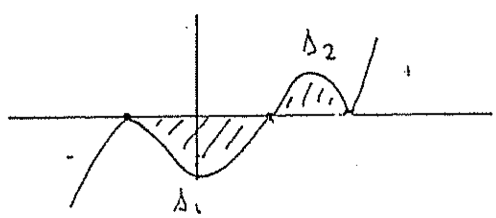
37) Por simple inspección vemos que el $x_1 = 1$ es raíz $\Rightarrow$

Ruffini:

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{matrix}$

Podemos ahora graficar:



$$A_1 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 11\frac{x^2}{2} - 6x\right]\Big|_{-1}^{1} = \left(1/4 - 2 + 11/2 - 6\right) - \left(1/4 + 2 + 11/2 + 6\right)$$

$= -2 - 2 - 6 - 6 = -16$ pero un área es siempre positiva

$\Rightarrow$ tomamos el módulo: $A_1 = 16$

$$A_2 = \int_{1}^{2} \left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 11\frac{x^2}{2} - 6x\right)\Big|_{1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{16}{4} - 16 + 22 - 12\right) - \left(\frac{1}{4} - 2 + \frac{11}{2} - 6\right) = (-2) - \left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

Entonces: $A = A_1 + A_2 = 16 + \frac{1}{4} = \frac{65}{4}$.-

---

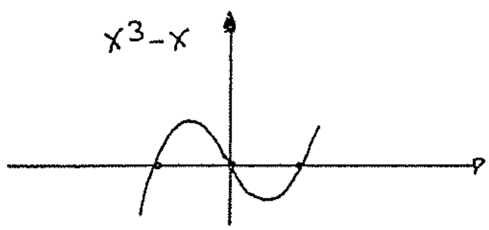
38. Calcule

38.1. $\int_{-1}^{1} \left|x^3 - x\right| dx$

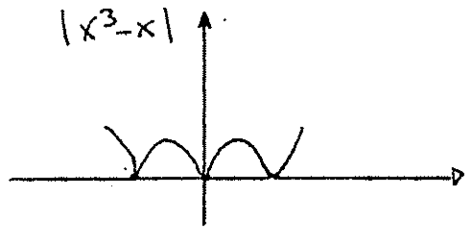
38.2. ¿Cuál es el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $h(x) = x^3$ y $g(x) = x$?

38.3. ¿Cuál es la relación entre los resultados de 38.1. y 38.2.?

38.1)



$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \quad |x^3 - x| = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x - x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

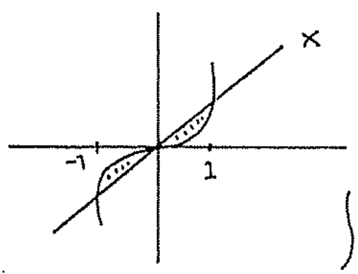
$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} |x^3 - x|\, dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$= (0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - (0)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} + 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

38.2)



por la simetría podemos hallar un área y luego duplicarla:

$$\int_{0}^{1} (x - x^3)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \frac{1}{4}$ pero si duplico $\Rightarrow \boxed{A_{\text{Total}} = \frac{1}{2}}$

38.3) La relación es que la integral 38.1) "Representa" el área propuesta en el 38.2).

39. Calcule el área de las regiones planas limitadas por la gráfica de las funciones dadas:

39.1. $y = x^2 - 4x + 6$; $y = -3x + 6$

39.2. $y = x^2 - 5x + 10$; $y = -x^2 + 9x - 10$

39.3. $y = \frac{1}{2}x + 3$; $y = |x|$

39.4. $y = e^{-2x}$; $x = 0$; $x = 3$

39.5. $y = \cos 4x$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$

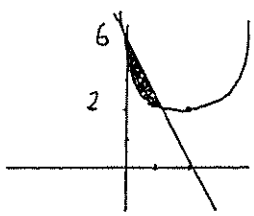
39.6. $y = \ln x$; $x = 0{,}5$; $x = 2$.

En todos los casos se sugiere realice la representación gráfica.

1) $x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \\ x_2 = \end{matrix}\right\}$ no hay, vértice: $x_v = -\frac{b}{2a} = 2$

$y_v = 2$

Dibujamos:



Buscamos la intersección:

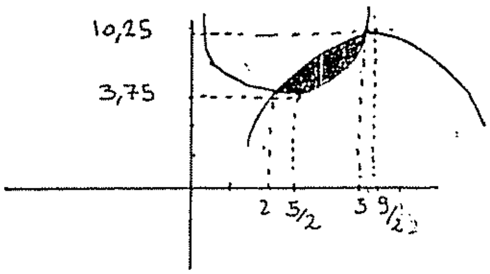
$x^2 - 4x + 6 = -3x + 6 \Rightarrow$

$x^2 - x = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$

$$\Rightarrow A = \int_0^1 \left[(-3x+6) - (x^2 - 4x + 6)\right] dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\, dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \left\{ A = \frac{1}{6} \right\}$$

2)



intersecciones:

$x^2 - 5x + 10 = -x^2 + 9x - 10$

$2x^2 - 14x + 20 = 0$

$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$

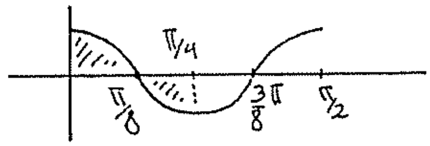
$$\Rightarrow A = \int_2^5 \left[(-x^2 + 9x - 10) - (x^2 - 5x + 10)\right] dx = \int_2^5 (-2x^2 + 14x - 20)\, dx =$$

$$= \left(-2\frac{x^3}{3} + 14\frac{x^2}{2} - 20x\right)\Big|_2^5 = \left(-\tfrac{2}{3}5^3 + 7.5^2 - 20.5\right) - \left(-\tfrac{2}{3}2^3 + 7.2^2 - 20.2\right)$$

$\Rightarrow A = 9$

3) Es similar a los anteriores $\Rightarrow$ te lo dejo.

4) $$\int_0^3 e^{-2x}\,dx = \frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^3 = -\tfrac{1}{2}\left(e^{-6} - e^{0}\right) \approx 0{,}5$$

5) 

La 1º area es:

$$A_1 = \int_0^{\pi/8} \cos 4x\,dx = \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\Big|_0^{\pi/8} = \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(\pi/2) = 1/4.$$

La 2º area es negativa $\Rightarrow$ consideremos su módulo:

$$A_2 = \left|\int_{\pi/8}^{\pi/4} \cos 4x\,dx\right| = \left|\frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\Big|_{\pi/8}^{\pi/4}\right| = \tfrac{1}{4}\left|\operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}(\pi/2)\right| =$$

$= 1/4\,|-1| = 1/4$. El area total es: $A = 1/4 + 1/4 = 1/2$ ..

6) Similar al anterior, guiate con el dibujo.

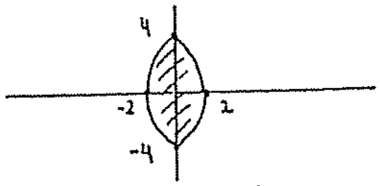
---

40. Calcule de dos formas distintas el área de las regiones limitadas por la gráfica de:

40.1. la elipse $16x^2 + 4y^2 = 64$

40.2. la circunferencia $x^2 - 4x + y^2 = 0$ (sugerencia: lleve la ecuación del circulo a la forma canónica).

1) Primero dibujemos la elipse: $\frac{16}{64}x^2 + \frac{4}{64}y^2 = 1 \Rightarrow$

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow$ 

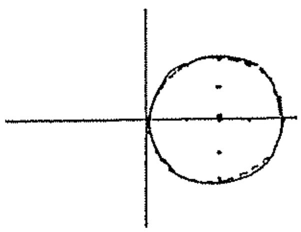
Entonces: el área se puede calcular como π. Semieje mayor . Sem. menor

$A = \pi \cdot 4 \cdot 2 = 8\pi$. Podemos también usar integrales:
Despejo Y: $Y^2 = 16\left(1 - x^2/4\right) \Rightarrow Y = \pm 4\left(1 - x^2/4\right)^{1/2}$.
Si usamos el area del 1º cuadrante:

$A_1 = \int_0^2 \left[4\left(1 - x^2/4\right)^{1/2}\right] dx \Rightarrow$ El área total será el cuartuple:

$A = 4 \int_0^2 \left[4\left(1 - x^2/4\right)^{1/2}\right] dx$. Verifica el resultado. La integral sale con una sustitución trigonometrica: $\frac{x}{2} = \operatorname{sen} t$.

2) Completo cuadrados en x: $x^2 - 4x = (x+a)^2 + b \Rightarrow$
$x^2 - 4x = x^2 + 2ax + a^2 + b \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow \underbrace{\{a = -2\}} \Rightarrow a^2 + b = 0$
$4 + b = 0 \Rightarrow b = -4$.
El circulo queda: $(x-2)^2 - 4 + Y^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + Y^2 = 4$
circulo de radio 2 $\Rightarrow A = \pi\, 2^2 = 4\pi$.



Usando integrales, en el semicirculo superior

$A = \int_0^4 \left[4 - (x-2)^2\right]^{1/2} dx$ la sustitución es como la del item 1. Hagamosla: $\frac{x-2}{2} = \operatorname{sen} t$

si $x = 0 \Rightarrow t = -\pi/2$; si $x = 4 \Rightarrow t = \pi/2$

$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[4 - 4\operatorname{sen}^2 t\right]^{1/2} 2\cos t\, dt = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \operatorname{sen}^2 t\right)^{1/2} \cos t\, dt$

$= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 4\left(t/2 + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$

$$= 4\left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{Sen}\pi\right) - \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\operatorname{Sen}(\pi)\right)\right]$$

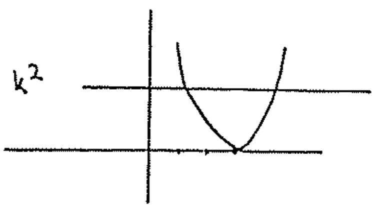
$$= 4\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right] = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$$ ⇒ El área total es el doble: 4π.

---

41. ¿Cuál debe ser el valor de la constante k para que el área encerrada entre la recta $y = k^2$ y la parábola $y = (x-3)^2$ sea igual al área calculada en el ejercicio 83.3.?

El área debe ser igual (supongo) al ejercicio 38.3 no 83.3.

Las intersecciones son:



$$k^2 = (x-3)^2 \Rightarrow k = x-3 \Rightarrow k+3 = x$$
$$-k = x-3 \Rightarrow 3-k = x$$

$$\int_{3-k}^{3+k} \left(k^2 - (x-3)^2\right) dx = 1/2$$ (Es lo q' valía.)

$$\int_{3-k}^{3+k} \left(k^2 - x^2 + 6x - 9\right) dx = 1/2$$

$$\left(k^2 x - \frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 9x\right)\Bigg|_{3-k}^{3+k} = 1/2$$

$$\left[k^2(3+k) - \frac{(3+k)^3}{3} + 3(3+k)^2 - 9(3+k)\right] - \left[k^2(3-k) - \frac{(3-k)^3}{3} + 3(3-k)^2 - 9(3-k)\right] = 1/2$$

$$\left(3k^2 + k^3 - \frac{27}{3} - \frac{27}{3}k - \frac{9}{3}k^2 - \frac{k^3}{3} + 27 + 18k + 3k^2 - 18 - 9k\right) -$$
$$-\left(3k^2 - k^3 - 27/3 + 27/3\,k - 9/3\,k^2 + k^3/3 + 27 + 3k^2 - 18k - 27 + 9k\right) = 1/2$$

$$3k^2 + k^3 - 9 - 9k - 3k^2 - \frac{k^3}{3} + 27 + 18k + 3k^2 - 18 - 9k - 3k^2 + k^3 + 9 -$$
$$- 9k + 3k^2 - k^3/3 - 27 - 3k^2 + 18k + 27 - 9k = 1/2$$

Simplificaciones hay montón, luego obtene k.

42. En cada una de las siguientes regiones en el plano cartesiano se dan los límites por la izquierda, por la derecha, por abajo y por arriba. Exprese en cada caso el área de tal región como una integral definida y calcúlela.

	Límite izquierdo	*Límite derecho*	*Límite inferior*	*Límite superior*
41	$x=1$	$x=4$	$y=0$	$y=\dfrac{3}{4x+5}$
42	$x=2$	$x=3$	$y=0$	$y=x^2-2x+6$
43	$x=-1$	$x=1$	$y=0$	$y=ch\ x$
44	$x=-\pi$	$x=\pi$	$y=-\cos x-2$	$y=\cos^2 x$
45	$y=\dfrac{1}{x^2}\ (x<0)$	$y=\dfrac{1}{x^3}\ (x>0)$	$y=1$	$y=8$
46	$y=\sqrt{3x+5}$	$y=\sqrt{7-5x}$	$y=0$	$y=1$
47	$y=\ln(-x)$	$y=\ln x$	$y=1$	$y=2$
48	$x=\lvert y\rvert-3$	$x=4-\lvert y\rvert$	$y=-1$	$y=1$

1) $$\int_1^4\left(\frac{3}{4x+5}-0\right)dx = 3\int_1^4\frac{dx}{4x+5} = 3\int_1^4\frac{dx}{4(x+5/4)} =$$

$$= 3/4\int_1^4\frac{dx}{x+5/4} = 3/4\ \ln(x+5/4)\Big|_1^4$$

$$= 3/4\left(\ln(4+5/4)-\ln(1+5/4)\right) = 3/4\ \ln\left(\frac{4+5/4}{1+5/4}\right)\approx 0{,}63.$$

2) idem 1).

3) idem 1).

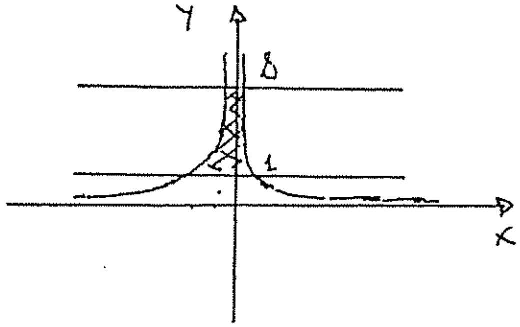
4) $$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos^2 x-(-\cos x-2)\right]dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(c^2x+cx+2\right)dx =$$

$$=\left(x/2+1/4\ \text{sen}\,2x+\text{sen}\,x+2x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

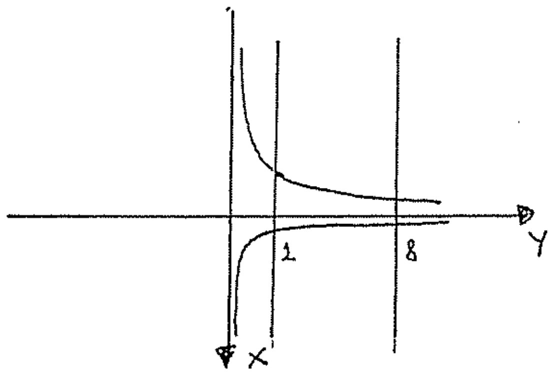
$$=\left(\pi/2+1/4\ \text{sen}\,2\pi+\text{sen}\,\pi+2\pi\right)-\left(-\pi/2-1/4\ \text{sen}\,2\pi-\text{sen}\,\pi-2\pi\right) =$$

$$=\left(\pi/2+0+0+2\pi\right)-\left(-\pi/2-0-0-2\pi\right) = 5\pi.-$$

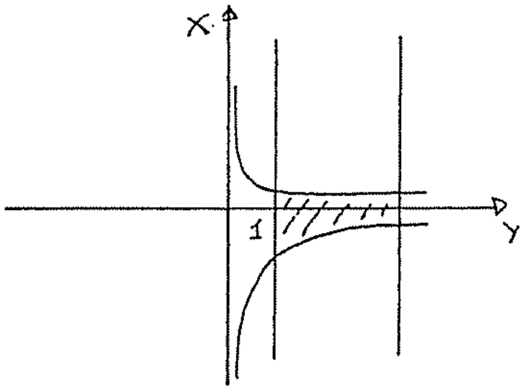
5)



Sera mas fácil si rotamos los ejes:



Y ahora invertimos:



La función superior es ahora $X = \frac{1}{Y^3}$ y la inferior $X = -\frac{1}{Y^2}$ (recordar que $X<0$)

El área la expresamos como: $\int_1^8 \left[\frac{1}{Y^3} - \left(-\frac{1}{Y^2}\right)\right] dY =$

$$\int_1^8 \left[Y^{-3} + Y^{-2}\right] dY = \int_1^8 Y^{-3} dY + \int_1^8 Y^{-2} dY =$$

$$\frac{Y^{-2}}{-2}\Big|_1^8 + \frac{Y^{-1}}{-1}\Big|_1^8 = -\frac{1}{2}\left(8^{-2} - 1^{-2}\right) - 1\cdot\left(8^{-1} - 1^{-1}\right) \cong 1{,}37$$

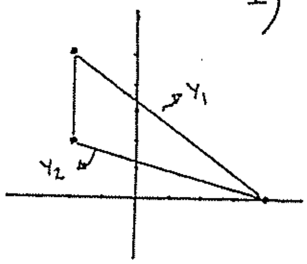
6); 7); 8) son como el 5)

43. Calcule el área de los polígonos de cuyos vértices se dan las coordenadas:

43.1. A(-2 , 2) ; B(4 , 0) ; C(-2 , 5)

43.2. A(-5 , -3) ; B(1 , -3) ; C(-1 , 2) ; D(-7 , 2)

1) Buscamos las rectas Y_1 e Y_2.



Y_1 pasa por los puntos: $(-2,5)$ y $(4,0)$ $\Rightarrow$

$Y_1 = ax+b \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 = a(-2)+b \\ 0 = a.4+b \end{array}\right\} \begin{array}{l} b = 5+2a \\ b = -4a \end{array}$

$5+2a = -4a \Rightarrow 6a = -5 \rightarrow a = -5/6$

$b = 10/3$

$\underline{Y_1 = -5/6\,x + 10/3}$. Y_2 pasa por $(-2,2)$; $(4,0)$ $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} 2 = (-2)a+b \\ 0 = 4a+b \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} b = 2a+2 \\ b = -4a \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2a+2 = -4a \\ 6a = -2 \rightarrow a = -1/3 \end{array}$

y $b = 4/3$

$\underline{Y_2 = -1/3\,x + 4/3}$. El área se expresa por:

$$\int_{-2}^{4} \left[\left(-5/6\,x + 10/3\right) - \left(-1/3\,x + 4/3\right)\right] dx = \int_{-2}^{4} \left(-1/2\,x + 2\right) dx =$$

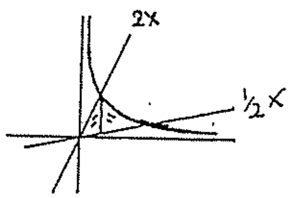
$$\left(-1/2\,x^2/2 + 2x\right)\Big|_{-2}^{4} = \left(-1/4\,4^2 + 2.4\right) - \left(-1/4\,(-2)^2 + 2.(-2)\right) =$$

$$= (-4+8) - (-1-4) = 4+5 = \underline{9}$$

2) Similar al 1) tenes más rectas para hallar

---

44. Calcule el área de la región en el primer cuadrante limitada por la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ y las rectas $y = 2x$ e $y = \frac{1}{2}x$.

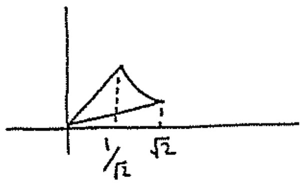


Tenemos 2 áreas para hallar: la formada por las rectas $2x$ y $x/2$ y la formada por

$1/x$ y $1/2\,x$. Las intersecciones con la hipérbola son:

$\frac{1}{x} = 2x \Rightarrow \frac{1}{2} = x^2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \;(x>0)$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x \Rightarrow 2 = x^2 \Rightarrow x_2 = \sqrt{2} \;(x>0)$



$$A_1 = \int_0^{1/\sqrt{2}} (2x - \tfrac{1}{2}x)\,dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \tfrac{3}{2}x\,dx =$$

$$= \tfrac{3}{2}\,\tfrac{x^2}{2}\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3/8.$$

$$A_2 = \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2}x\right)dx = \left(\ln x - \tfrac{1}{2}\tfrac{x^2}{2}\right)\Big|_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} =$$

$$= \left[\ln(\sqrt{2}) - \tfrac{1}{4}(\sqrt{2})^2\right] - \left[\ln\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] \simeq 0{,}32$$

El area total es: $3/8 + 0{,}32 \simeq 0{,}69$.–

---

45. Calcule el área de la región limitada por la parábola $y = -x^2$ y sus dos rectas:

45.1. Tangentes en $(-x_0, -x_0^2)$ y $(2x_0, -4x_0^2); x_0 > 0$.

45.2. Normales que pasan por el punto P (0,-27).

1) La ecuación de la tangente es: $Y_T = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

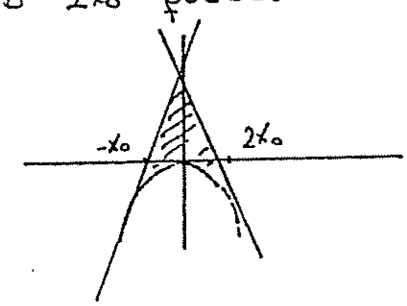
Para la función $Y = -x^2$ en el punto x_1 queda:

$Y_T = -2x_1(x - x_1) - x_1^2$ para el punto $-x_0$ queda:

$Y_1 = +2x_0(x + x_0) - x_0^2$ y para el punto $2x_0$ queda:

$Y_2 = -4x_0(x - 2x_0) - 4x_0^2$.

El área posee una gráfica del tipo:

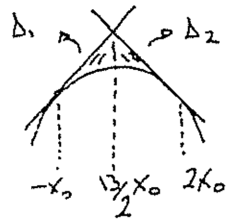


Busco la intersección de las rectas:

$$2x_0(x+x_0)-x_0^2 = 4x_0(x-2x_0)-4x_0^2$$

$$2x_0x+2x_0^2-x_0^2 = 4x_0x-8x_0^2-4x_0^2$$

$$13x_0^2 = 2x_0x \Rightarrow \tfrac{13}{2}x_0 = x$$



$$\Delta = \Delta_1+\Delta_2$$

$$= \int_{-x_0}^{\frac{13}{2}x_0}\left(2x_0(x+x_0)-x_0^2+x^2\right)dx \;+$$

$$+\int_{\frac{13}{2}x_0}^{2x_0}\left(-4x_0(x-2x_0)-4x_0^2+x^2\right)dx =$$

$$\left(2x_0\frac{x^2}{2}+2x_0^2x-x_0^2x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-x_0}^{\frac{13}{2}x_0}+\left(-4x_0\frac{x^2}{2}+8x_0^2x-4x_0^2+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-x_0}^{\frac{13}{2}x_0}$$

$$\left(x_0x^2+x_0^2x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-x_0}^{\frac{13}{2}x_0}+\left(-2x_0x^2+4x_0^2x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-x_0}^{\frac{13}{2}x_0} =$$

$$\left(x_0\left(\tfrac{13}{2}x_0\right)^2+x_0^2\left(\tfrac{13}{2}x_0\right)+\frac{\left(\frac{13}{2}x_0\right)^3}{3}\right)-\left(x_0^3-x_0^3-\frac{x_0^3}{3}\right)+$$

$$+\left(-2x_0\left(\tfrac{13}{2}x_0\right)^2+4x_0^2\left(\tfrac{13}{2}x_0\right)+\frac{\left(\frac{13}{2}x_0\right)^3}{3}\right)-\left(-2x_0^3-4x_0^3-\frac{x_0^3}{3}\right)=$$

$$= x_0^3\left(\frac{1125}{8}\right)+x_0^3\left(\frac{315}{8}\right) = 180x_0^3$$

$$\Delta = 180\,x_0^3$$

2) Busca las rectas normales, graficé y es muy similar (mas fácil) que el anterior.

46. Por el punto (2 , 0) se han trazado rectas tangentes a la parábola $y = x^2$. Calcule el área de la región limitada por la parábola y estas dos rectas.

Una de las rectas tangentes es el propio eje x como lo muestra un gráfico. Buscamos la otra:

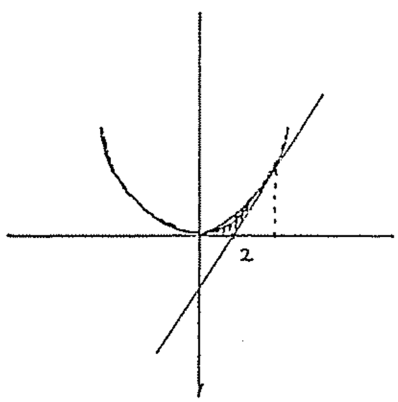
$y_T = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$; esta recta tg.

pasa por $(2,0) \Rightarrow \quad 0 = 2x_0(2 - x_0) + x_0^2$

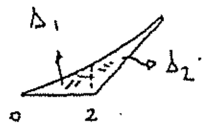
$$0 = 4x_0 - 2x_0^2 + x_0^2 = 4x_0 - x_0^2$$

$x_{01} = 0$ (Ya la habiamos previsto)

$x_{02} = 4 \quad \to \quad y_T = 8(x-4) + 16 = 8x - 16$



$\Rightarrow$



Intersección entre recta y parabola:

$x^2 = 8x - 16 \quad \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x-4)^2 = 0 \quad \to \quad x = 4$

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^4 [x^2 - (8x - 16)]\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 8\frac{x^2}{2} + 16x\right)\Big|_2^4$$

$$= 8/3 + \left(64/3 - 64 + 64\right) - \left(8/3 - 16 + 32\right) =$$

$$A = 16/3$$

---

47. Halle el área de la región bajo $y = 10^x$ y sobre $y = \log_{10} x$ para $x \in [1, 10]$

$$A = \int_1^{10} \left(10^x - \log_{10} x\right) dx = \frac{10^x}{\ln 10}\Big|_1^{10} - \int_1^{10} \log_{10} x \, dx$$

$$A = \frac{10^{10}}{\ln 10} - \frac{10}{\ln 10} - \int_1^{10} \frac{\ln x}{\ln 10}\,dx = \frac{1}{\ln 10}\left(10^{10} - 10\right) - \frac{1}{\ln 10}\int_1^{10} \ln x\,dx$$

$$= \frac{1}{\ln 10}\left(10^{10} - 10\right) - \frac{1}{\ln 10}(x\ln x - x)\Big|_1^{10} =$$

$$= \frac{1}{\ln(10)}\left(10^{10} - 10\right) - \frac{1}{\ln(10)}\left(10\ln 10 - 10 + 1\right)$$

---

48. Halle el área bajo la curva $y = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$ y sobre el intervalo $[1,2]$.

$$A = \int_1^2 \frac{x}{x^2 + 5x + 6}\,dx = \int_1^2 \frac{x}{(x+2)(x+3)}\,dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{-2}{x+2} + \frac{3}{x+3}\right)dx = -2\ln(x+2)\Big|_1^2 + 3\ln(x+3)\Big|_1^2 =$$

$$= -2\ln(4/3) + 3\ln(5/4) \approx 0{,}094$$

---

49. Dada $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ para $x > 0$

49.1. Halle asíntotas y puntos críticos.

49.2. Encuentre t tal que el área bajo $f(x)$ en el intervalo $[t\,,\,t+1]$ sea mínima.

1) Este item no presenta nada nuevo, te lo dejo.

2) El área quedará en función de t:

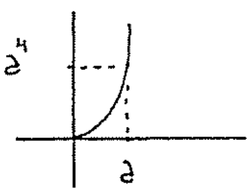
$$A(t) = \int_t^{t+1} \frac{e^x}{x}\,dx \quad ; \text{ si quiero el mínimo} \Rightarrow A'(t) = 0$$

$$A'(t) = \frac{e^{t+1}}{t+1} - \frac{e^t}{t} = 0 \Rightarrow e^t\left(\frac{e}{t+1} - \frac{1}{t}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e}{t+1} = \frac{1}{t} \Rightarrow et = t + 1 \rightarrow (e-1)t = 1 \rightarrow t = \frac{1}{e-1}.$$

---

50. ¿Qué fracción del rectángulo cuyos vértices son $(0,0)$; $(a,0)$; (a,a^4) ; $(0,a^4)$ con $a>0$, ocupa la región bajo la curva $y=x^4$ y sobre $[0,\ a]$?



Area del rectángulo: $A = a.a^4 = a^5$

Area bajo la curva: $A = \int_0^a x^{+4}\,dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^a = \frac{a^5}{5}$

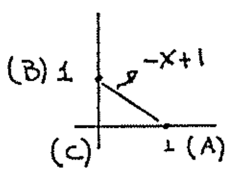
Fracción: $\frac{a^5/5}{a^5} = 1/5$

---

51. Sea el triángulo rectángulo de vértices A(1 , 0) , B(0 , 1) , C(0 , 0) .

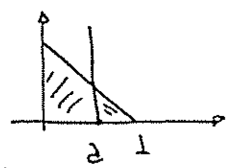
51.1. Halle las ecuaciones para las rectas paralelas a cada lado AC , BC , AB, que cortan el triángulo en dos partes de igual área.

51.2. Estas tres rectas, ¿se cortan en un único punto?



Hallemos la recta paralela al lado $\overline{BC}$ tal q' se corte en 2 áreas iguales: dicha recta será

$x = a \Rightarrow$



$$\int_0^a (-x+1)\,dx = \int_a^1 (-x+1)\,dx \Rightarrow \left(-\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^a = \left(-\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_a^1$$

$$-\frac{a^2}{2}+a = \left(-\tfrac{1}{2}+1\right) - \left(-\tfrac{a^2}{2}+a\right) = -\tfrac{1}{2}+1+\tfrac{a^2}{2}-a$$

$$0 = a^2 - 2a + \tfrac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$a_1 = 1 + \sqrt{2}/2$ (se descarta)

$a_2 = 1 - \sqrt{2}/2$

La recta es $x = 1 - \sqrt{2}/2$.

En forma similar se hallan las demás.

---

52. Dada la integral $\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\,dx$

52.1. Calcule por medio de dos sustituciones diferentes:

52.1.1. $u = x+1$

52.1.2. $u = \sqrt{x+1}$

(¡No olvide modificar los límites de integración según corresponda!)

52.2. Indique si el número obtenido puede corresponder al área de una región plana y dibuje esa región.

1).1) $U = x+1$, si $x=0 \Rightarrow U=1$; si $x=3 \Rightarrow U=4$

$dU = dx$

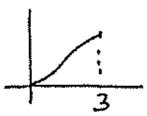
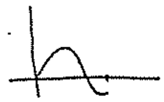
$$\int_1^4 \frac{(U-1)^3}{\sqrt{U}}\,dU = \int_1^4 \frac{U^3-3U^2+3U-1}{U^{1/2}}\,dx =$$

$$= \int_1^4 \left(U^{5/2} - 3U^{3/2} + 3U^{1/2} - U^{-1/2}\right)dx = \left(4^{5/2} - 3\,4^{3/2} + 3.2 - 4^{-1/2}\right) -$$

$$- \left(1^{5/2} - 3.1^{3/2} + 3\,1^{1/2} - 1^{-1/2}\right) = 13{,}5$$

1).2) Idem 1.1).

2.) Sólo hay que dibujar la función, si el dibujo fuese

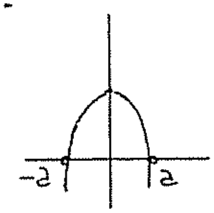
 $\Rightarrow$ sí , si el dibujo fuese  $\Rightarrow$ NO.

---

53. Dada la región comprendida por: $y=0$ e $y=a^2-x^2$ $(a \neq 0)$

53.1. Calcule el área de la misma.

53.2. Determine la ecuación de la recta horizontal que divida a la región en dos partes de igual área.

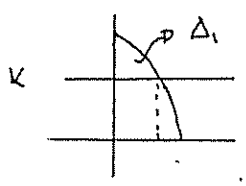


1) $$\int_{-a}^{a} (a^2-x^2)\,dx = \left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-a}^{a} = \left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3}\right)$$

$$\Rightarrow A = 2a^3 - \tfrac{2}{3}a^3 = \tfrac{4}{3}a^3$$

2) El área en el 1º cuadrante es: $\frac{4}{6}a^3$.

sea $Y=K$



; queremos que A_1 sea $\frac{4}{12}a^3$. Intersección:

$a^2 - x^2 = K \Rightarrow a^2 - K = x^2 \Rightarrow x = (a^2-K)^{1/2}$

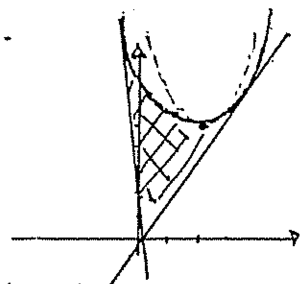
$$A_1 = \int_0^{(a^2-K)^{1/2}} (a^2 - x^2 - K)\,dx = \left(a^2x - \frac{x^3}{3} - Kx\right)\Big|_0^{(a^2-K)^{1/2}} =$$

$$A_1 = a^2(a^2-k)^{1/2} - \frac{(a^2-k)^{3/2}}{3} - k(a^2-k)^{1/2} = 4/_{12}\, a^3 \text{. Despejar } k.$$

54. Dada la ecuación de la curva $P:\ (x-2)^2 = y-5$,

54.1. Halle las ecuaciones de las rectas tangentes a P que pasan por el origen.

54.2. Determine el área de la región limitada por la curva P y las rectas tangentes recién halladas.



$$y = 5 + (x-2)^2$$

$y' = 2(x-2)$, la recta tangente es

$$y_T = y'(x_0)(x-x_0) + y(x_0)$$

$y_T = 2(x_0-2)(x-x_0) + 5 + (x_0-2)^2$ y pasa por

$(0,0) \Rightarrow \quad 0 = 2(x_0-2)(0-x_0) + 5 + (x_0-2)^2$

$$= -2(x_0-2)x_0 + 5 + (x_0-2)^2 = -2x_0^2 + 4x_0 + 5 + x_0^2 - 4x_0 + 4$$

$0 = -x_0^2 + 9 \Rightarrow x_0^2 = 9 \Rightarrow x_{01} = 3$

$x_{02} = -3$

Las rectas tangentes son:

$y_{T1} = 2(x-3) + 5 + 1 = 2x$

$y_{T2} = -10(x+3) + 5 + 25 = -10x$

Intersecciónes: $2x = 5 + (x-2)^2 \Rightarrow 2x = 5 + x^2 - 4x + 4$

$0 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \Rightarrow x = +3$ ya lo teníamos,

Análogamente con la recta $-10x$ será $x = -3 \Rightarrow$ el área:

$$\int_{-3}^{0}\left(5+(x-2)^2+10x\right)dx + \int_{0}^{3}\left(5+(x-2)^2-2x\right)dx =$$

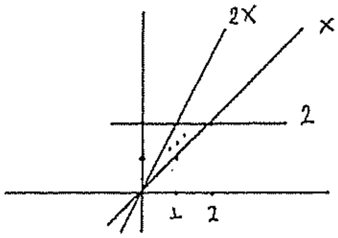
$$\int_{-3}^{0}\left(5+x^2-4x+4+10x\right)dx + \int_{0}^{3}\left(5+x^2-4x+4-2x\right)dx =$$

$$\left(9x+\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{0} + \left(9x+\frac{x^3}{3}-6\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{3} =$$

$$-(-27-9+27) + (27+9-27) = 18.–$$

55. Calcule el área de la región limitada por $y=2x$; $y=2$ y la asíntota oblicua de $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2}$.

La asíntota oblicua es $y=x$ (verifícalo) $\Rightarrow$



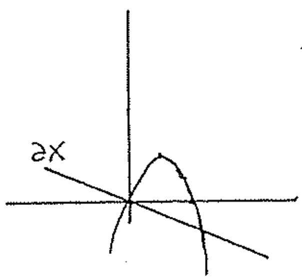
$$A=\int_0^1 (2x-x)\,dx+\int_1^2 (2-x)\,dx=$$

$$=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2=\frac{1}{2}+(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+2-2+\frac{1}{2}=1.$$

---

56. Determine $a\in\Re^-$ tal que el área de la región limitada por $y=-x^2+x$ e $y=ax$ sea igual a $\frac{9}{2}$.



Intersecciones: $ax=-x^2+x \Rightarrow x^2+x(a-1)=0$

$x\left[x+a-1\right]=0 \Rightarrow x_1=0$
$\qquad x_2=1-a$

$$A=\int_0^{1-a}\left(-x^2+x-ax\right)dx=$$

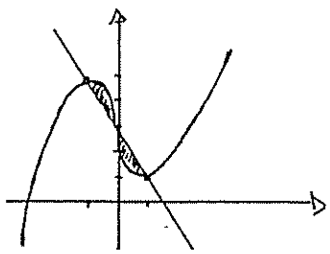
$$=\left.\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-a\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^{1-a}=-\frac{(1-a)^3}{3}+\frac{(1-a)^2}{2}-a\frac{(1-a)^2}{2}=\frac{9}{2}$$

Ecuación que permite obtener a.-

---

57. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-3x+3$ y la recta que pasa por los puntos donde las ordenadas son los extremos relativos de f.

Extremos de f: $f'=3x^2-3=0 \Rightarrow x_1=1 \rightarrow y_1=1$
$\qquad x_2=-1 \rightarrow y_2=5$



La recta que pasa por los extremos pasa por $(-1,5);(1,1) \Rightarrow Y = ax+b \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = a(-1)+b \\ 1 = a.1+b \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 5 = -a+b \\ 1 = a+b \end{array}\right\} \begin{array}{l} b=3 \\ a=-2 \end{array}$$

$Y = -2x+3 \Rightarrow$ el área es:

$$A = \int_{-1}^{0} \left[(x^3-3x+3)-(-2x+3)\right] dx + \int_{0}^{1} \left[(-2x+3)-(x^3-3x+3)\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3-x)\,dx + \int_{0}^{1} (-x^3+x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1} =$$

$$= -\left(1/4 - 1/2\right) + \left(-1/4+1/2\right) = 1/2 ..$$

---

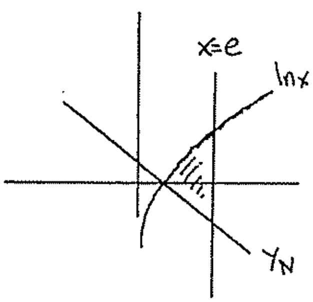
58) Idem 57..

---

59. Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = \ln x$; $x = e$ y la recta normal a f en (1;0). Grafique.

Recta normal: $Y_N = -(f'(x_0))^{-1}(x-x_0) + f(x_0) \Rightarrow f'(x) = 1/x \Rightarrow$

$Y_N = -(x-1)+0 = -x+1$



$$A = \int_{1}^{e} (\ln x + x - 1)\,dx = \left(x\ln x - x + \frac{x^2}{2} - x\right)_1^e$$

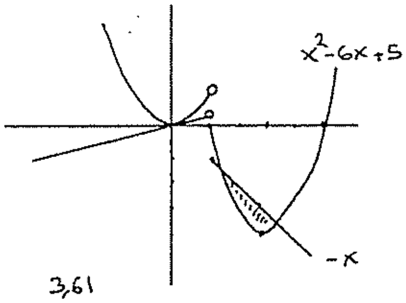
$$= \left(e - 2e + e^2/2\right) - \left(-2+1/2\right)$$

$$= e^2/2 - e + 2 - 1/2$$

$$\cong 2,47 .-$$

60. Calcule de la forma más conveniente el área de la región limitada por las gráficas de las funciones:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ -x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{si} \quad x<1 \\ x^2-6x+5 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$



El área encerrada es la sombreada. Intersecciones:

$$x^2-6x+5=-x$$

$$x^2-5x+5=0 \qquad x_2=3{,}61$$

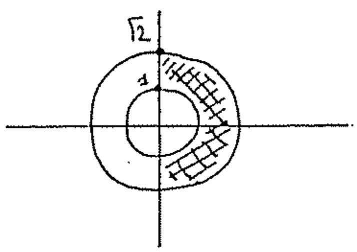
$$x_1=1{,}4$$

$$A=\int_{1,4}^{3,61}\left(-x-x^2+6x-5\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-5x\right)\Big|_{1,4}^{3,61}$$

$$=\left(-\frac{(3{,}61)^3}{3}+5\frac{(3{,}61)^2}{2}-18\right)-\left(-\frac{(1{,}4)^3}{3}+5.\frac{1{,}4^2}{2}-7\right)=1{,}91$$

---

61. Calcule el área de la región $D=\{(x,y)\in\Re^2 \ / \ x\geq 0 \ ; \ x^2+y^2\leq 2 \ ; \ x^2+y^2\geq 1\}$



El área pedida (interior al circulo de radio $\sqrt{2}$ y exterior al de radio 1 con $x\geq 0$) la podemos obtener sin uso de integrales. $\dfrac{\text{Area circulo mayor} - \text{Area circulo menor}}{2}$

$$\Rightarrow A=\frac{\pi(\sqrt{2})^2-\pi(1)^2}{2} = \frac{2\pi-\pi}{2} = \pi/2$$

---

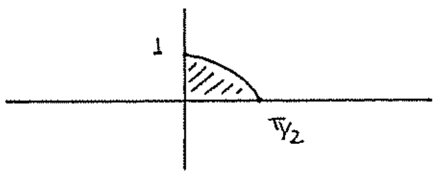
62. Dibuje cada región y calcule su área cambiando el orden de integración:

62.1. $f(x)=\cos x \ ; \quad 0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}$

62.2. $f(y)=1-y \ ; \quad g(y)=-\sqrt{1-y^2} \quad ; \quad 0\leq y\leq 1$

62.3. $-1\leq y\leq 1 \ ; \quad x=1 \ ; \quad x=|y|$

1)



El area sería:

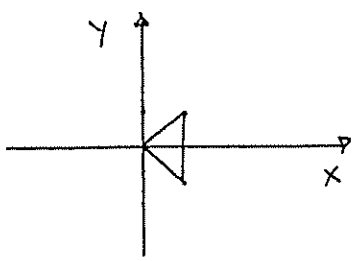
$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

Si expresamos x como función de Y: $X = \arccos Y \Rightarrow$

$$A = \int_0^1 \arccos Y \, dY .$$

2) $$\int_0^1 \left((1-Y) - \left[-\sqrt{1-Y^2} \right] \right) dY = \int_0^1 \left(1 - Y + (1-Y^2)^{1/2} \right) dY .$$

3)



Sumamente fácil si hacemos:

$$A = \frac{\text{base. altura}}{2} = \frac{2.1}{2} = 1 .$$

Para plantearlo con integrales:

función sup. $Y = x$, inferior $Y = -x$, $0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^1 (x+x)dx = \int_0^1 2x\,dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1 .$$

---

63. Halle una constante real $\alpha > 0$ tal que $\int_1^{\alpha} \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = 2$. Este resultado, ¿es el área?.

Sustitución: $x = u^2$, $dx = 2u\,du$; si $x=1 \Rightarrow u = 1$; si $x = \alpha \Rightarrow u = \sqrt{\alpha}$

$$\int_1^{\sqrt{\alpha}} \frac{2u\,du}{u^2+u} = 2\int_1^{\sqrt{\alpha}} \frac{du}{u+1} = 2\ln(u+1)\Big|_1^{\sqrt{\alpha}} =$$

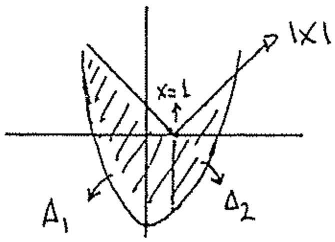
$$= 2\left(\ln(\sqrt{\alpha}+1) - \ln(2) \right) = 2\ln\left(\frac{\sqrt{\alpha}+1}{2} \right)$$ y esto debe

valer $2 \Rightarrow 2\ln\left(\frac{\sqrt{\alpha}+1}{2}\right) = 2 \Rightarrow \ln\left(\frac{\sqrt{\alpha}+1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{\alpha}+1}{2} = e$

$\sqrt{\alpha} = 2e - 1 \Rightarrow \underbrace{\alpha = (2e-1)^2}$. Para saber si representa un área dibuja.

---

64. Calcule el área de la región limitada por las gráficas de las funciones:
$f(x) = |x-1|$ y $g(x) = x^2 - 3$. Dibuje la región determinada.



Intersección por la Izquierda:

$x^2 - 3 = -x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 1{,}56 \rightarrow$ No.

$\underbrace{\{x_2 = -2{,}56\}}$

Intersección por la derecha: $x^2 - 3 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$

$\{x_1 = 2\}$

$x_2 = -1 \rightarrow$ No $\rightarrow$ Planteamos las áreas: $A = A_1 + A_2$:

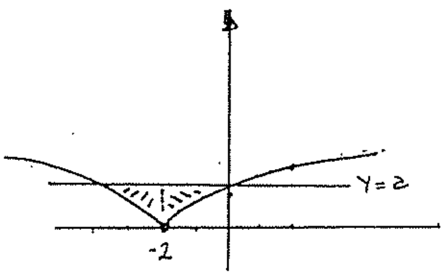
$$A = \int_{-2,56}^{1} (-x - x^2 + 4)\,dx + \int_{1}^{2} (x - 1 - x^2 + 3)\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-2,56}^{1} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1}^{2}$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + 4\right) - \left(-\frac{(-2{,}56)^2}{2} - \frac{(-2{,}56)^3}{3} + 4(-2{,}56)\right) + \left(2 + 2 - \tfrac{8}{3}\right) - \left(\tfrac{1}{2} + 2 - \tfrac{1}{3}\right)$$

---

65. Halle $a > 0$ de manera que el área de la región encerrada por la recta de ecuación $y = a$ y las curvas $y = \sqrt{x+2}$ e $y = \sqrt{-2-x}$ sea igual a $\frac{2}{3}$.



Intersecciones:

derecha: $\sqrt{x+2} = a \Rightarrow x = a^2 - 2$

Izq. $\sqrt{-x-2} = a \Rightarrow x = -a^2 - 2$

$$A = \int_{-a^2-2}^{-2} (a - \sqrt{-x-2})\,dx + \int_{-2}^{a^2-2} (a - \sqrt{x+2})\,dx$$

$$\int_{-a^2-2}^{-2} a\,dx - \int_{-a^2-2}^{-2} \sqrt{-x-2}\,dx + \int_{-2}^{a^2-2} a\,dx - \int_{-2}^{a^2-2} \sqrt{x+2}\,dx =$$

$$ax\Big|_{-a^2+(-2)}^{-2} - \int_{-a^2-2}^{-2} \sqrt{-x-2}\,dx + ax\Big|_{-2}^{a^2-2} - \int_{-2}^{a^2-2} (x+2)^{1/2}\,dx =$$

$$a(-2+a^2+2) - \int_{-2}^{-a^2-2} (-x-2)^{1/2}\,dx + a(a^2-2+2) - \frac{(x+2)^{3/2}}{3/2}\Big|_{-2}^{a^2-2} =$$

$$a^3 - \int_{-2}^{-a^2-2} (-x-2)^{1/2}\,dx + a^3 - 2/3\,(a^3-0)$$; para la última

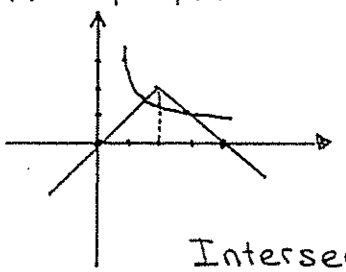
integral: $-x-2=u \Rightarrow -dx=+du \qquad + \int_0^{a^2} u^{1/2}\,du = \frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_0^{a^2} = 2/3\,a^3$

finalmente: $a^3 + 2/3\,a^3 + a^3 - 2/3\,a^3 = 2a^3$. Queremos que

$2a^3 = \frac{2}{3} \Rightarrow a^3 = 1/3 \rightarrow a = \sqrt[3]{1/3}$ ✓

---

66. Calcule el área de la región limitada, en el primer cuadrante, por debajo de la gráfica de $f(x) = 2-|x-2|$ y por encima de la gráfica de $x.y = 3$.



Intersección por la Izq.

$3/x = x \quad$ (pues $2-|x-2| = x$ si $x \le 2$)

$3 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{3}$.

Intersección por la derecha:

$\frac{3}{x} = 4-x \quad$ (pues $2-|x-2| = 4-x$ si $x \geq 2$)

$3 = 4x - x^2 \rightarrow x^2-4x+3=0 \rightarrow$ $x_1 = 3$ ✓, $x_2 = 1$ NO

$$\Rightarrow A = \int_{\sqrt{3}}^{2} (x - 3/x)\,dx + \int_{2}^{3} (4-x-3/x)\,dx =$$

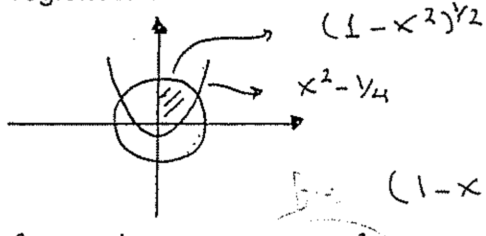
$$\frac{x^2}{2}\Big|_{\sqrt{3}}^{2} - 3\ln x\Big|_{\sqrt{3}}^{2} + \left(4x - \frac{x^2}{2} - 3\ln x\right)\Big|_{2}^{3} =$$

$$\left(2 - \tfrac{3}{2}\right) - 3\left(\ln 2 - \ln\sqrt{3}\right) + \left(12 - \tfrac{9}{2} - 3\ln 3\right) - \left(8 - 2 - 3\ln 2\right) =$$

$$\tfrac{1}{2} - 0{,}43 + 4{,}2 - 3{,}9 = 0{,}37$$

---

67. La parábola de ecuación $y = x^2 - \dfrac{1}{4}$ divide a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en dos regiones. Calcule el área de cada una de ellas.



busco la intersección:

$$(1-x^2)^{1/2} = x^2 - 1/4 \Rightarrow 1 - x^2 = (x^2 - 1/4)^2$$

$$1 - x^2 = x^4 + 1/16 - x^2/2 \Rightarrow 0 = x^4 + \tfrac{1}{2}x^2 - 15/16$$

$x_1^2 = -5/4 \to$ No hay solución

$x_2^2 = 3/4 \to x = \sqrt{3/4}$ (es la que nos interesa)

El área sombreada en el 1º cuadrante es:

$$\int_0^{\sqrt{3/4}} (1-x^2)^{1/2}\,dx - \int_0^{\sqrt{3/4}} (x^2 - 1/4)\,dx .$$

La primer integral se calcula según: $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t\,dt$

$$\int_0^{\pi/3} \cos^2 t\,dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/3} = \pi/6 + \sqrt{3}/8$$

La segunda integral:

$$\int_0^{\sqrt{3/4}} (x^2 - 1/4)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{3/4}} = \frac{\left[(3/4)^{1/2}\right]^3}{3} - \frac{(3/4)^{1/2}}{4} \approx 2.10^{-14}$$

El área es: $\pi/6 + \sqrt{3}/8 - 2.10^{-14} \approx 0{,}74$. Luego el área por encima de la parabola y debajo del circulo es: $0{,}74.2 = 1{,}48$

---

68. Analice el siguiente cálculo:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^4}dx=-\frac{1}{3x^3}\bigg|_{-1}^{1}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}<0 \Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{1}{x^4}dx=-\frac{2}{3}<0.$$

¿Contradice esto el teorema del ejercicio 10? Justifique la respuesta.

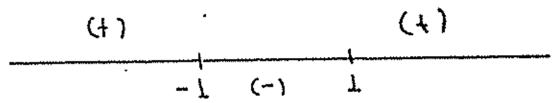
El cálculo esta mal hecho pues la función integranda no es contínua en el intervalo $[-1,1]$ pues en $x=0$ tiene una asíntota vertical $\Rightarrow$ No puede contradecir ningún teorema.–

---

69. Realice el estudio completo de la función $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^3}$ y luego halle el área de la región comprendida entre su gráfica y los ejes.

Dominio: $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$

Raices: $x=1$



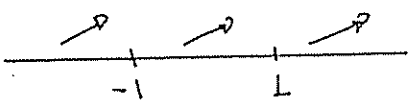
$f(0)<0$, $f(2)>0$, $f(-2)>0$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \dfrac{-8}{0^-} = +\infty$; $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \dfrac{-8}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

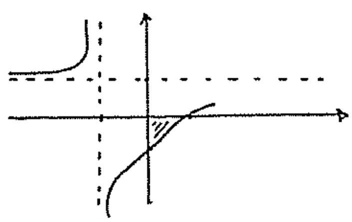
$f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3 \Rightarrow f'(x) = 3\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 \cdot \dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = 3\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 \dfrac{2}{(x+1)^2}$

Punto crítico en $x=1$, Veamos intervalos de Crec. y decrec.



$f'(-2)>0$, $f'(0)>0$; $f'(2)>0$

$f(x)$ siempre crece $\Rightarrow$ $x=1$ es una inflexión. Con todo esto confexionamos el dibujo:



Él área en cuestión es la sombreada ⇒ función sup: $Y=0$

$$\int_0^1 \left(0-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3\right)dx = -\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 dx \rightarrow \text{sustitución:}$$

$x+1=u$
$dx=du$

$$\rightarrow -\int_1^2 \left(\frac{u-2}{u}\right)^3 du = -\int_1^2 \left(1-2/u\right)^3 du =$$

$$= -\int_1^2 \left(1-3.2/u+3.4/u^2-8/u^3\right)du = -\int_1^2 \left(1-6/u+12/u^2-8/u^3\right)du$$

Ahora es facil el calculo de la integral, te lo dejo para terminarlo.

---

70. Una partícula está a una distancia de x cm del origen y actúa sobre ella una fuerza igual a x^2+2x *newton*. Pruebe que para trasladar la partícula desde $x=1$ hasta $x=3$ se debe realizar un trabajo de 16,67 joule. ¿Si se moviera la partícula dos centímetros, pero desde $x=6$, el trabajo sería el mismo?.

Él trabajo para llevarla desde $X=1cm$ (0,01m) hasta $X=3cm$ (0,03m) esta dado por:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_{0,01}^{0,03}(x^2+2x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right)\Big|_{0,01}^{0,03} =$$

$$\left(\frac{(0,03)^3}{3}+(0,03)^2\right)-\left(\frac{(0,01)^3}{3}+(0,01)^2\right) \cong 8.10^{-4}\ J.$$

Él resultado de la guia no está bien, si se colocan los $x_1=1$ y $x_2=3$ en cm ⇒ $\int_1^3 (x^2+2x)\,dx = 18,67$ que no coincide numericamente y tampoco sería J=Joule, pues este es $J=N.m$

Si se moviese desde $X=6cm$ ⇒ $L=\int_{0,06}^{0,08}(x^2+2x)\,dx =$

$\Rightarrow L = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_{0,06}^{0,08} = \left(\frac{0{,}08^3}{3} + 0{,}08^2 \right) - \left(\frac{0{,}06^3}{3} + 0{,}06^2 \right) \cong 2{,}9 . 10^{-3} J.$

---

71. Un resorte para el que es válida la ley de Hooke se estira 3 metros a partir de su posición de reposo, para lo cual es necesario ejercer una fuerza de 24 newton. Halle el trabajo realizado al estirar el resorte 4 m a partir de su posición de reposo.

Con el dato del estiramiento de 3m con una fuerza de 24N obtenemos $K = F/x = 24N/3m = 8 N/m$. Ahora podemos hallar el trabajo mencionado:

$L = \int_0^4 k x \, dx = \int_0^4 8 N/m \, x \, dx = 8 N/m . \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8 \frac{N}{m} . 8 m^2 =$

$L = 64 J.$

---

72. Se tienen dos resortes que no obedecen la ley de Hooke. Para uno de ellos la fuerza es $F_1(x) = 3x^2$ newton y para el otro es $F_2(x) = 2\sqrt{x}$ *newton*. ¿Cuánto habrá que estirar el primer resorte para que el trabajo a realizar sea igual al que se realiza con el segundo resorte cuando se lo estira 0,50 m?.

Sabemos que $L_1 = L_2$; siendo $L_1 = \int_0^a 3x^2 dx$ y siendo

$L_2 = \int_0^{0,5} 2\sqrt{x} \, dx \Rightarrow \int_0^a 3x^2 dx = \int_0^{0,5} 2 x^{1/2} dx \Rightarrow$

$3\frac{x^3}{3} \Big|_0^a = 2 \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_0^{0,5} \Rightarrow a^3 = 4/3 \, (1/2)^{3/2} \Rightarrow a \simeq 0{,}47$

---

73. Entre otras cuestiones, Ud. va a estudiar en Termodinámica que al expandir (o comprimir) un gas en un recipiente la presión es función del volumen que ocupa el gas: $p = p(v)$, y si la expansión es adiabática (sin intercambio de calor con el medio) el modelo matemático conduce a: $p.v^{1,4} = k$, siendo k una constante. Se puede demostrar que el trabajo efectuado por el gas cuando el volumen crece de V_1 a V_2 es $L = \int_{V_1}^{V_2} p(v) \, dv$. Calcule el trabajo efectuado por una máquina de vapor que funciona en forma adiabática si el vapor inicia con una presión de 160 Kgr/km^2, un volumen de 250 cm^3 y se expande a un volumen de 2.000 cm^3.

Con el dato de presión y volumen inicial obtenemos el valor de k: $P_i V_i^{1,4} = k \Rightarrow 160 \frac{kgr}{m^2} \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-4} m^3)^{1,4} = k$

$\Rightarrow k = 1{,}45 \cdot 10^{-3}\ kgr \cdot m^{2,2}$

Ahora podemos hallar el trabajo:

$$\mathcal{L} = -\int_{2 \cdot 10^{-3}}^{2,5 \cdot 10^{-4}} \frac{1{,}45 \cdot 10^{-3}}{V^{1,4}}\, dv = -1{,}45 \cdot 10^{-3} \int_{2,10^{-3}}^{2,5 \cdot 10^{-4}} V^{-1,4}\, dv =$$

$$= -1{,}45 \cdot 10^{-3}\ \frac{V^{0,4}}{0{,}4} \Big|_{2 \cdot 10^{-3}}^{2,5 \cdot 10^{-4}} = -3.625 \left((2{,}5 \cdot 10^{-4})^{0,4} - (2 \cdot 10^{-3})^{0,4} \right) \cdot 10^{-3}$$

$= 1{,}7 \cdot 10^{-4}$.- (El menos en la integral es porque invertí los límites de integración)

---

74. La ley de Newton de la gravitación universal establece que dos cuerpos cuyas masa son m1 y m2 se atraen con una fuerza: $F = G.\frac{m_1\ m_2}{r^2}$, donde r es la distancia entre los cueros y G la constante de la gravitación. Si uno de los cuerpos se mantiene fijo, calcule el trabajo necesario para mover al otro desde $T = a$ hasta $T = b$.

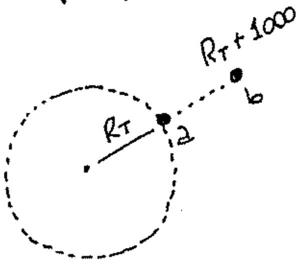
Como aplicación de este resultado calcule el trabajo necesario para lanzar verticalmente un satélite de 1.000 kg. hasta una órbita a 1.000km de altura.

Suponga que la masa de la Tierra es 5.98 $\times 10^{24}$ kg. y que está concentrada en el centro de ella. El radio terrestre es 6.37 $\times 10^6$m y $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{Newton\ m^2}{Kg^2}$.

El trabajo será $\mathcal{L} = \int_a^b F(r)\, dr = \int_a^b \frac{G m_1 m_2}{r^2}\, dr \Rightarrow$

$$\mathcal{L} = G m_1 m_2 \int_a^b r^{-2}\, dr = -G m_1 m_2 \frac{1}{r}\Big|_a^b = G m_1 m_2 (1/a - 1/b)$$

$\boxed{\mathcal{L} = G m_1 m_2 (1/a - 1/b)}$ Veamos ahora la aplicación que se nos propone:



$$\mathcal{L} = G.m_1 m_2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$= 6{,}67.10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1000\,kg \cdot 5{,}98.10^{24}\,kg \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+1000}\right)$$

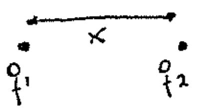
$$= 3{,}99.10^{17}\,Nm^2 \left(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6 m} - \frac{1}{6{,}37.10^6 m + 1.10^6 m}\right)$$

$$\approx 8{,}5.10^9\,J$$

---

75. De acuerdo con la ley de Coulomb, dos cargas eléctricas del mismo signo se repelen entre sí con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Si la fuerza de repulsión es de 20 dinas cuando están separadas 2cm, calcule el trabajo realizado al acercar las cargas desde 5cm a 1cm.

Entonces tenemos que 2 cargas de igual signo, digamos q_1 y q_2 se repelen con una fuerza proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas $\Rightarrow$ sea x esta distancia:



$\Rightarrow F = F(x) = \dfrac{k}{x^2}$; Nos dicen que si $x = 2cm$

$\Rightarrow F = 20$ dinas $\Rightarrow 20din = \dfrac{k}{(2cm)^2} \Rightarrow k = 20\,din.\,4\,cm^2 = 80\,din\,cm^2$

$\Rightarrow F = \dfrac{80\,din.cm^2}{x^2}$, $\mathcal{L} = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{80}{x^2}\,dx$, en este caso

$x_1 = 5cm$, $x_2 = 1cm \Rightarrow$

$$\mathcal{L} = \int_{5cm}^{1cm} \frac{80}{x^2}dx = -\int_1^5 \frac{80}{x^2}\,dx = -80\int_1^5 x^{-2}dx = -80.\frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_1^5$$

$$= +80\,Din.cm^2.\ \frac{1}{x}\Bigg|_{1cm}^{5cm} = 80\,Din.cm^2\left(\frac{1}{5cm} - \frac{1}{1cm}\right) = \underbrace{-64\,Din.cm}$$

76. La energía cinética K de un objeto de masa m y velocidad v es $K = \frac{1}{2} m\ v^2$. Si el objeto se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza que depende de la posición $x, F = F(x)$, demuestre que el trabajo para mover el objeto desde la posición x_0 hasta x_1 es igual a la variación de su energía cinética, es decir:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\, dx = \frac{1}{2}m\ v_1^2 - \frac{1}{2}m\ v_0^2$$

donde $v_1 = v(x_1)$ y $v_0 = v(x_0)$ son las velocidades del objeto en las posiciones x_1 y x_0 respectivamente.

En *Física* a este resultado se lo conoce con el nombre de ***Teorema de las fuerzas vivas***.

Nota: tenga en cuenta la segunda ley de Newton y la regla de la cadena $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$

Partimos de la definición:

$$\mathcal{L} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} m\, a(x)\, dx \quad \text{pues } F = ma \ (2^a \text{ Ley})$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} m v \frac{dv}{dx}\, dx = \int_{v_1}^{v_2} mv\, dv$$ (pues la integral para a ser sobre sus velocidades)

$$= m \int_{v_1}^{v_2} v\, dv = m\frac{v^2}{2}\Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = k_2 - k_1 = \Delta k}$$

77. La cantidad de movimiento p de un objeto de masa m que se desplaza con velocidad v es $p = m\ v$. Si el objeto se mueve en línea recta impulsado por una fuerza variable que depende del tiempo t: $F = F(t)$, demuestre que la integral $\int_{t_0}^{t_1} F(t)\, dt$, denominada impulso de la fuerza en el intervalo $[t_0\ ,\ t_1]$ es igual a la variación de su cantidad de movimiento.

$\int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt = p(t_1) - p(t_0)$

(**Sugerencia**: tenga en cuenta la segunda ley de Newton).

Nuevamente partimos de la definición:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} m\,a(t)dt = m\int_{t_0}^{t_1} \frac{dv}{dt}dt \Rightarrow$$

$$= m\int_{v_1}^{v_2} dv = mv\Big|_{v_1}^{v_2} = mv_2 - mv_1 = P_2 - P_1 \Rightarrow$$

$$I = \Delta P$$

---

78. La densidad $\delta(x)$ de un cable en el punto a x cm de uno de los extremos está dada por $\delta(x) = 3x^2 \frac{g}{cm}$ .Encuentre el centro de masa del tramo de cable entre $x = 0$ y $x = 10$.

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\,\delta(x)dx}{\int_a^b \delta(x)dx} = \frac{\int_0^{10} x.\,3x^2dx}{\int_0^{10} 3x^2dx}$$ calculo cada integral por separado:

$$\int_0^{10} x.\,3x^2dx = 3\int_0^{10} x^3dx = 3\frac{x^4}{4}\Big|_0^{10} = 3/4\,(10^4 - 0^4) =$$

7500.

$$\int_0^{10} 3x^2dx = 3\int_0^{10} x^2dx = 3.\frac{x^3}{3}\Big|_0^{10} = 10^3 - 0^3 = 1000 .$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{7500}{1000} = 7{,}5\text{ cm}$$

---

79. Un alambre recto de 9 unidades de longitud tiene densidad variable $\delta(x)$ en el punto situado a x unidades de uno de los extremos. Encuentre la distancia de este extremo al centro de masa si

79.1. $\delta(x)=\sqrt{x}$

79.2. $\delta(x)=1+x^2$

1) $$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\,\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx} = \frac{\int_0^9 x\sqrt{x}\,dx}{\int_0^9 \sqrt{x}\,dx} = \frac{\int_0^9 x^{3/2}\,dx}{\int_0^9 x^{1/2}\,dx}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^9}{\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^9} = \frac{\frac{2}{5}\,9^{5/2}}{\frac{2}{3}\,9^{3/2}} = \frac{3}{5}\cdot 9^1 = \frac{27}{5}$$

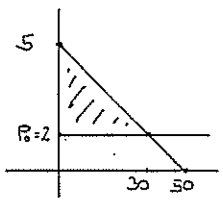
$\Rightarrow \bar{x} = 27/5$ que es la distancia desde el extremo situado en $x=0$ hasta el centro de masa.

2) $$\bar{x} = \frac{\int_0^9 x(1+x^2)\,dx}{\int_0^9 (1+x^2)\,dx} = \frac{\left(x^2/2 + x^4/4\right)\Big|_0^9}{\left(x + x^3/3\right)\Big|_0^9} =$$

$$\bar{x} = \frac{9^2/2 + 9^4/4}{9 + 9^3/3} = 6{,}67$$

---

80. La función demanda para cierto producto es $p=5-\frac{x}{10}$. Calcule el excedente del consumidor cuando el nivel de ventas es 30. Trace la curva de demanda e identifique E_c como un área.



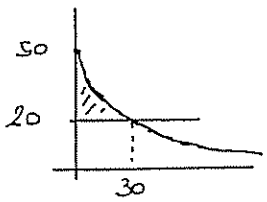
$x_0 = 30 \Rightarrow p_0 = 5 - \frac{30}{10} = 5 - 3 = 2$

$$E_c = \int_0^{30}\left(5 - x/10 - 2\right)dx =$$

$$= \int_0^{30} (3 - x/_{10})\,dx = \left(3x - \frac{x^2}{20}\right)\Big|_0^{30} = \left(3.30 - \frac{30^2}{20}\right) =$$

$E_c = 45$.-

81. Si la curva de demanda es $p = \dfrac{1000}{x+20}$, calcule E_c cuando el precio de venta es \$ 20.



Ahora $P_0 = 20 \Rightarrow$ busco X_0:

$$20 = \frac{1000}{x+20} \rightarrow 20x + 400 = 1000 \Rightarrow$$

$$20x = 600 \rightarrow X_0 = 30$$

$$E_c = \int_0^{30} \left(\frac{1000}{x+20} - 20\right) dx$$

$$= 1000 \int_0^{30} \frac{1}{x+20}\,dx - 20 \int_0^{30} dx$$

$$= 1000 \ln(x+20)\Big|_0^{30} - 20x\Big|_0^{3} = 1000\left(\ln(50) - \ln(20)\right) - 60$$

$$\cong 856.3$$

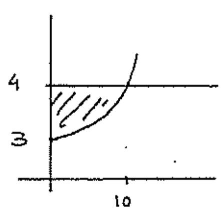
82. Calcule el excedente del productor en caso que la función oferta sea

82.1. $p(x) = 3 + 0{,}01\, x^2$, cuando el nivel de ventas es $x_0 = 10$.

82.2. $p(x) = 5 + \dfrac{\sqrt{x}}{10}$, cuando el precio de ventas es \$ 10.

Trace en ambos casos la curva de oferta e identificar E_p como un área.

1)

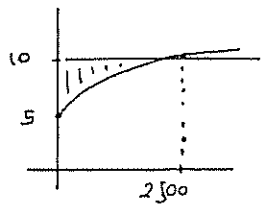


$$E_p = \int_0^{10} (4 - 3 - 0{,}01x^2)\,dx$$

$$= \int_0^{10} (1 - 0{,}01x^2)\,dx$$

$$= \left(x - 0{,}01\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{10} = 10 - 0{,}01\frac{10^3}{3} = 6{,}67$$

2.)



$p_0 = 10 \Rightarrow 5 + \frac{\sqrt{x_0}}{10} = 10 \Rightarrow$

$\frac{\sqrt{x_0}}{10} = 5 \rightarrow x_0 = (50)^2 = 2500$

$$E_p = \int_0^{2500} \left(10 - 5 - \frac{\sqrt{x}}{10}\right) dx = \int_0^{2500} \left(5 - \frac{\sqrt{x}}{10}\right) dx =$$

$$= \left(5x - \frac{1}{10}\,\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_0^{2500} = 5.2500 - \frac{2}{30}(2500)^{3/2} = 4166{,}7$$

---

83. Un fondo de inversión pagará \$ 2.000 anuales durante cinco años, que empiezan a correr de inmediato. La tasa de interés es el 7% anual, compuesto continuamente. Calcule el valor presente de este fondo.

Usamos la definición $\int_a^b f(t)\,e^{-rt}\,dt$, en este caso $a=0$; $b=5$; $f(t)=2000$, $r=0{,}07$, entonces:

$$\int_0^5 2000\,e^{-0{,}07t}\,dt = 2000\int_0^5 e^{-0{,}07t}\,dt = 2000\,\frac{e^{-0{,}07t}}{-0{,}07}\Bigg|_0^5$$

$$= -28571{,}4\left(e^{-0{,}07.5} - 1\right) = 8437{,}5$$

---

84. Cuando se fabrican x unidades de un producto, el costo marginal por unidad, en pesos, es $C'(x) = 0{,}006\,x^2 - 1{,}5\,x + 8$ y el costo fijo $C(0) = \$1.500.000$. Halle el costo de producción de 2.000 unidades.

Tenemos que hallar $C(t) \Rightarrow C(t) = \int C'(t)\,dt \rightarrow$

$$C(t) = \int (0{,}006\,t^2 - 1{,}5t + 8)\,dt = 0{,}006\frac{t^3}{3} - 1{,}5\frac{t^2}{2} + 8t + c$$

para hallar c (Constante de integración) Usamos que

$C(0) = 1500000 \Rightarrow 1500000 = C$; Luego:

$C(t) = 0{,}002\,t^3 - 0{,}75\,t^2 + 8t + 1500000$; ahora hallamos

$C(2000) = 0{,}002.(2000)^3 - 0{,}75(2000)^2 + 8(2000) + 1500000$

$= 14516000$

---

85. El costo marginal de producción de x unidades de un producto es $140-0{,}5x+0{,}012x^2$ pesos por unidad. Calcule el aumento de costo cuando se eleva el nivel de producción de 3.000 hasta 5.000 unidades.

Podemos hallar el aumento mediante una integral definida

$$\int_{3000}^{5000} (140 - 0{,}5x + 0{,}012x^2)\,dx = \left(140x - 0{,}5\frac{x^2}{2} + 0{,}012\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{3000}^{5000} =$$

$$= \left(140(5000) - 0{,}5\frac{(5000)^2}{2} + 0{,}012\frac{(5000)^3}{3}\right) - \left(140(3000) - 0{,}5\frac{(3000)^2}{2} + 0{,}012\frac{(3000)^3}{3}\right)$$

$= 494450000 - 106170000 = 388280000$

---

86. Emplee la Regla del Trapecio con cuatro intervalos para evaluar aproximadamente la integral $\int_{-1}^{1} e^x\,dx$. Evaluar la cota del error absoluto cometido. (Trabajar con cuatro cifras decimales redondeadas por redondeo simétrico).

La fórmula que tenemos que usar es: $\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{1}{2}E + I\right]$

El intervalo de integración va de -1 a 1 $\rightarrow$ longitud 2 y como tienen que ser 4 intervalos $\Rightarrow h = 2/4 = 0{,}5$, E es la suma de las ordenadas extremas: $E = f(-1) + f(1) = e^{-1} + e$,

I es la suma de las restantes ordenadas intermedias:

$I = e^{-0{,}5} + e^{0} + e^{0{,}5}$, con todo esto podemos aproximar la integral: $\int_{-1}^{1} e^x dx \approx \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot(e^{-1}+e)+(e^{-0,5}+e^0+e^{0,5})\right] \Rightarrow$

$\int_{-1}^{1} e^x dx \approx 2,3992$. Para evaluar el error necesitamos

$f''(x)$, $\rightarrow f'(x)=e^x \rightarrow f''(x)=e^x$ y toma su valor máximo en

$x=1$ (e^x es siempre creciente) $\Rightarrow M = e^1 = e \Rightarrow$

$\Delta_t = \frac{h^2}{12} - (b-a).M = \frac{(1/2)^2}{12} - (1-(-1)).e = -5,4157$

la fórmula correcta NO lleva este menos sino un "por"

"ABSURDO" (el error es mayor que el propio valor)

$\Delta_t = \frac{h^2}{12}(b-a)M = \frac{(1/2)^2}{12}(1-(-1))e = 0,1134$

---

87. Determine el número "n" de subintervalos que deben de tomarse para aproximar el valor de la integral $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ con dos cifras decimales significativas, aplicando la Regla del Trapecio.

Si quiero tener 2 cifras decimales exactas, entonces el error Δ debe ser menor que 0,01 $\Rightarrow$ reemplazamos este error en la fórmula y obtenemos h:

$\Delta = \frac{h^2}{12}(b-a)M \Rightarrow 0,01 = \frac{h^2}{12}(2-1)M$, siendo $M = \max|f''(x)|$

$\Rightarrow f'(x) = -1/x^2 \rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$ que es decreciente en $\mathbb{R}^+$

$\Rightarrow M = \max|f''(x)|$ en el $[1,2]$, el máximo lo logra en $x=1$

$\Rightarrow M = 2/1^3 = 2$, luego:

$$0{,}01 = \frac{h^2}{12}(2-1)\cdot 2 \Rightarrow 0{,}01 = \frac{h^2}{6} \rightarrow h \cong 0{,}25$$; Podemos

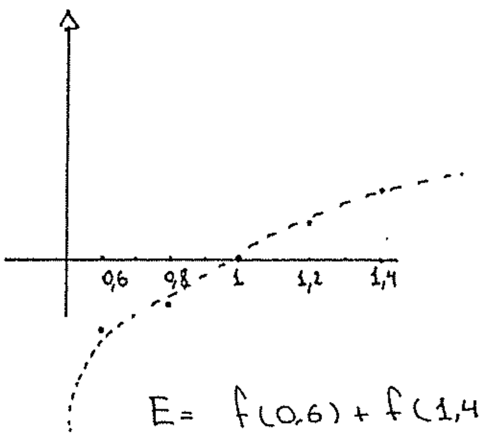
ahora obtener el número de intervalos pues: $h = \frac{(b-a)}{n} \Rightarrow$

$$n = \frac{(b-a)}{h} = \frac{(2-1)}{0{,}25} = 4.$$

---

88. Dada la integral $\int_{0,6}^{1,4} \ln x \; dx$ y trabajando con redondeo a 6 cifras decimales, aplique sucesivamente la Regla del Trapecio para encontrar una aproximación a la integral anterior buscando sus valores para n=2 , 4 y 8 intervalos.

Lo vamos a hacer solo para el caso $n=4$. En este caso: $h = \frac{(b-a)}{4} = \frac{(1{,}4-0{,}6)}{4} = 0{,}2.$



$f(0{,}6) = -0{,}510826$

$f(0{,}8) = -0{,}223144$

$f(1) = 0$

$f(1{,}2) = 0{,}182321$

$f(1{,}4) = 0{,}336472$

$E = f(0{,}6) + f(1{,}4) = -0{,}847298$

$I = f(0{,}8) + f(1) + f(1{,}2) = -0{,}040823$

$$\int_{0,6}^{1,4} \ln x \, dx \approx 0{,}2\left(\frac{1}{2}(-0{,}847298) + (-0{,}040823)\right) \approx -0{,}092894$$

---

89. Para ciertos trabajos sobre recurso hidráulicos se requieren canales con un cierto área transversal. A falta de otros medios para el cálculo de tales áreas, se toman medidas de la profundidad a lo lardo de la sección transversal. La tabla que sigue muestra la longitud transversal y su correspondiente profundidad. Utilizando la Regla de Simpson calcule dicho área transversal, sabiendo que las medidas están expresadas en metros.

Long.	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Prof.	0,0	1,8	2,0	4,0	4,0	6,0	4,0	3,4	3,6	2,8	0,0

La profundidad corresponde a las ordenadas de cada longitud, por ejemplo $f(0)=0$, $f(20)=0$, etc ...
La regla de Simpson nos dice que:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[E + 4 I_i + 2 I_p \right];$$ En este caso: $h = 2$

$E = f(0) + f(20) = 0$; $I_i = f(2) + f(6) + f(10) + f(14) + f(18) = 18$
$I_p = f(4) + f(8) + f(12) + f(16) = 13{,}6$; Con esto:

$$\text{Area} \approx \frac{2}{3}\left[0 + 4.18 + 2.13{,}6\right] \cong 66{,}13$$

---

90) Hay que aproximar la siguiente integral:

$$\int_1^3 \left((3-x)(x-1) - x(x-1)(x-3)\right) dx = \int_1^3 \left[(3-x)(x-1) + x(x-1)(-x+3)\right] dx$$

$$\int_1^3 (3-x)(x-1)(x+1)\,dx$$; podes subdividir el intervalo $[1,3]$

Como sigue: 1 — 1,5 — 2 — 2,5 — 3 $\Rightarrow h = 0{,}5$

$E = f(1) + f(3) = (3-1)(1-1)(1+1) + (3-3)(3-1)(3+1) = 0$
$I_i = f(1{,}5) + f(2{,}5) = (3-1{,}5)(1{,}5-1)(1{,}5+1) + (3-2{,}5)(2{,}5-1)(2{,}5+1) = 4{,}5$
$I_p = f(2) = (3-2)(2-1)(2+1) = 3$
Ahora usamos la formula:

$$\int_1^3 (3-x)(x-1)(x+1)\,dx \approx \frac{0{,}5}{3}\left[0 + 4.4{,}5 + 2.3\right] = 4$$

Una mejor aproximación se tiene con un h más chico.

---

91. Pruebe que

91.1. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^k}$ converge si $k>1$ y diverge si $k\le 1$.

91.2. $\int_0^{1}\frac{dx}{x^k}$ converge si $k<1$ y diverge si $k\ge 1$.

91.3. ¿Qué puede decir acerca de $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^k}$?

1) $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^k} = \lim_{M\to\infty}\int_1^{M}\frac{dx}{x^k} = \lim_{M\to\infty}\int_1^{M} x^{-k}\,dx =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left.\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right|_1^M \quad \text{si } k\neq 1 \Rightarrow \lim_{M\to\infty}\left.\frac{x^{1-k}}{(1-k)}\right|_1^M =$$

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{1-k}\left(M^{1-k}-1\right) = \frac{1}{1-k}\left(\lim_{M\to\infty}M^{1-k}-1\right)$$

$\downarrow$

Converge solo si $1-k<0$

$\Rightarrow k>1$.

Para valores de $k<1$ $\lim_{M\to\infty}M^{1-k}=\infty$. Nos falta examinar el caso $k=1$:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{\infty} = \lim_{M\to\infty}\ln x\Big|_1^M = \lim_{M\to\infty}(\ln M-\ln 1)$$

$$= \lim_{M\to\infty}\ln M = \infty \quad ; \text{ para } k=1 \text{ diverge.}$$

2) $\int_0^1\frac{dx}{x^k}$ No esta definido el integrando en $x=0$ $\Rightarrow$

$$\int_0^1\frac{dx}{x^k} = \lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{-k}\,dx = \lim_{a\to 0}\left.\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right|_a^1 \ (\text{si } k\neq 1)$$

$$= \lim_{a\to 0}\left.\frac{x^{1-k}}{1-k}\right|_a^1 = \frac{1}{1-k}\left(1-\lim_{a\to 0}a^{1-k}\right) \ \text{y este}$$

último límite: $\lim\limits_{a\to 0} a^{1-k}$ converge si $1-k>0 \to 1>k$

$\Rightarrow k<1$; y para $k>1$ diverge. Examinemos el caso $k=1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = \lim_{a\to 0} \ln x \Big|_a^1 = \ln 1 - \lim_{a\to 0} \ln a$$

$\infty \Rightarrow$ diverge.

3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^k}$ converge en el infinito si $k>1$ pero converge en cero si $k<1$. La integral se plantea como:

$$\lim_{\substack{H\to\infty \\ a\to 0}} \int_a^H x^{-k}\,dx = \lim_{\substack{H\to\infty \\ a\to 0}} \frac{x^{1-k}}{1-k}\Big|_a^H$$ y No existe un valor de k / converge en ambas situaciones.

---

92. Calcule las integrales y, cuando corresponda, halle el valor principal.

92.1. $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{e^{x^2}}dx$ 92.2. $\int_{-\infty}^{\infty} x.e^{-|x|}dx$ 92.3. $\int_0^\infty \frac{dx}{4+x^2}$ 92.4. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$

1) $$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{e^{x^2}}dx = \lim_{H\to -\infty} \int_H^0 \frac{x}{e^{x^2}}dx$$ $\Rightarrow$ primero

hallemos la primitiva: $\int x e^{-x^2}dx \Rightarrow x^2=u$, $2x\,dx = du$

$$\frac{1}{2}\int e^{-u}du = -\frac{1}{2}e^{-u} \Rightarrow -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$; ahora

$$\lim_{H\to -\infty} -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_H^0 = -\frac{1}{2}\left(e^0 - \lim_{H\to\infty} e^{-H^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \lim_{H\to -\infty} \frac{1}{e^{H^2}}\right) = -\frac{1}{2}(1-0) = -\frac{1}{2}.$$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} x e^{-|x|}\,dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-|x|}\,dx$

pero $|x| = \begin{cases} -x & \text{Si } x < 0 \\ x & \text{Si } x \geq 0 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} x e^{x}\,dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{M\to-\infty} \int_{M}^{0} x e^{x} dx + \lim_{M\to+\infty} \int_{0}^{M} x e^{-x} dx$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^{x}\Big|_{M}^{0} + \lim_{M\to+\infty} (-x-1)e^{-x}\Big|_{0}^{M}$$

$$= (-1)e^{0} - \lim_{M\to-\infty} (M-1)e^{M} - (-1)\,e^{-0} - \lim_{M\to+\infty} (+M+1)\,e^{-M} =$$

$$\lim_{M\to-\infty} \frac{(M-1)}{e^{-M}} \sim \frac{-\infty}{\infty} \qquad \lim \frac{(M+1)}{e^{M}} - \frac{\infty}{\infty}$$

L'Hopital $\qquad$ L'Hopital

$$\lim_{M\to-\infty} \frac{1}{-e^{-M}} \sim \frac{1}{-\infty} \sim 0 \qquad \lim \frac{1}{e^{M}} \sim 0$$

$$= (-1) - 0 + 1 - 0 = 0$$

3) Primero hallemos la primitiva:

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+x^2/4} = 1/4 \int \frac{dx}{1+(x/2)^2} \Rightarrow \begin{array}{l} x/2 = u \\ \tfrac{1}{2}dx = du \end{array}$$

$$\tfrac{1}{4}\int \frac{2\,du}{1+u^2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(u) \to \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2)$$

Entonces: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{M\to\infty} \int_0^{M} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{M\to\infty} \left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2)\right)\Big|_0^M$

$= \underbrace{\frac{1}{2} \lim_{M\to\infty} \operatorname{arctg}(M/2)}_{\pi/2} - \underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(0)}_{0}$

$= \pi/4$

4) Haces lo mismo con el modulo que lo hecho en 2) y luego tomas el límite cuando $a \to 0$.

---

93. Sobre la base del Teorema de comparación, analice la convergencia de las siguientes integrales:

93.1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4(1+x^4)}$ 93.2. $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$

1) Nuestra $f(x) = \frac{1}{x^4(1+x^4)} \leq g(x) = \frac{1}{x^4 \cdot x^4}$ pues el denominador es mas chico $\Rightarrow$ si $\int_1^{\infty} g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

$\int_1^{\infty} g(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4 \cdot x^4} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^8}$ y esta converge según lo expuesto en 91.1 por lo tanto la integral dada es convergente..

2) $e^{-x^2} = \underbrace{\frac{1}{e^{x^2}}}_{f(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{e^{x}}}_{g(x)} \quad \forall x \geq 1$. Examinemos la conver-

gencia de $\int_1^{\infty} g(x)\,dx = \int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{-x}dx$

$$= \lim_{M\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_1^M = \lim_{M\to\infty}\left[\left(-e^{-M}\right)-\left(-e^{-1}\right)\right] =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{e^M}+\frac{1}{e}\right] = -\underbrace{\lim_{M\to\infty}\frac{1}{e^M}}_{0}+\frac{1}{e} = 1/e$$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} g(x)\,dx$ es convergente; luego $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ también.

---

94. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones justificando las respuestas (demuestre si es verdadera y exhiba un contraejemplo en el caso de ser falsa).

De todos los items desarrollaremos solo algunos, en general son propiedades que las podes hallar en los libros de cálculo.

94.1. Si f es par y $\int_0^{\infty} f(x)dx$ converge, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge.

Sabemos que $\int_0^{\infty} f(x)\,dx < \infty$ (converge) $\Rightarrow$ el límite

$\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)\,dx = \ell$. Sabemos también que $f(x) = f(-x)$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx$ (si ambas convergen)

$$= \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{0} f(x)\,dx + \underbrace{\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)\,dx}_{\ell}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{0} f(x)\,dx + \ell$$

para el cálculo de la 1º integral realicemos la sustitución: $x = -x' \Rightarrow dx = -dx'$; cuando $x = 0 \Rightarrow x' = 0$; si $x = -N \Rightarrow x' = N$; con todo:

$$\lim_{N\to\infty} \int_N^0 -f(-x')\,dx' = \lim_{N\to\infty} \left[-\int_N^0 f(-x')\,dx' \right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^N f(x')\,dx' \equiv \ell$$

Use paridad e invertí los límites de integración ; logrando la misma integral del dato. finalmente: Verdadero.

94.2. Si f es continua $\forall x \geq 1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_1^\infty f(x)dx$ converge.

f continua $\forall x \geq 1$ y tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ son hechos que cumple por ejemplo $f(x) = 1/x$; sin embargo como vimos en 91.1) $\int_1^\infty 1/x \, dx$ diverge $\Rightarrow$ Falso.

---

95. Analice la convergencia de $\int_{-3}^{+\infty} \frac{sg\ x}{x^2 - 2x + 10} dx$

$$\int_{-3}^{+\infty} \frac{sg\,x}{x^2-2x+10}\,dx = \int_{-3}^{0} \frac{sg\,x}{x^2-2x+10}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{sg\,x}{x^2-2x+10}\,dx$$

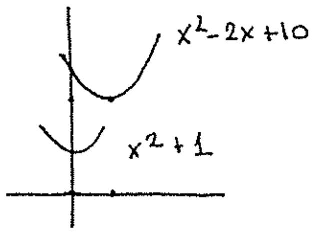
Ahora: $sg\,x = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Entonces: $\underbrace{\int_{-3}^{0} \frac{-1}{x^2-2x+10}\,dx}_{\text{es un cierto número}} + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+10}\,dx$

solo hay que analizar la convergencia de:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+10}\,dx$$

; la cuadrática del denominador no posee raíces y su vértice está en $(1,9)$



Como vemos en el dibujo $x^2-2x+10 > x^2+1$ $\forall x \Rightarrow \dfrac{1}{x^2-2x+10} < \dfrac{1}{x^2+1}$

y sabemos que $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} = \pi/2$$

o sea converge, por lo tanto nuestra integral también.

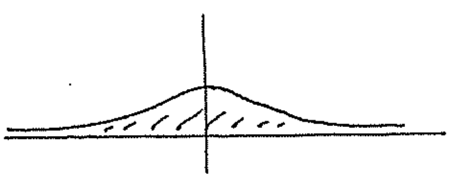
---

96. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+6x+10}$ y su asíntota.

El denominador no tiene raíces $\Rightarrow$ la única asíntota es la horizontal:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+6x+10} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ es A.H.}$$

Queremos hallar un área del estilo de la dibujada:



$$\Rightarrow A = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+6x+10} - 0\right)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(x+3)^2+1\right]^{-1} dx \Rightarrow \begin{array}{l} x+3=u \\ dx=du \end{array}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{1}{1+u^2}\,du =$$

$$\lim_{M\to\infty} \operatorname{arctg} u \Big|_{-M}^{M} = \underbrace{\operatorname{arctg}(\infty)}_{\pi/2} - \underbrace{\operatorname{arctg}(-\infty)}_{(-\pi/2)} = \boxed{\pi}$$

---

97. Determine el área de la región limitada por la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{sech} x$ y su única asíntota.

Dado que e^x y e^{-x} son siempre positivas No hay x / anule el denominador (suma de 2 números positivos) $\Rightarrow$ No posee asintotas verticales, la única asintota es la horizontal:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x+e^{-x}} = \frac{2}{\infty+0} \sim 2/\infty \to 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^x+e^{-x}} = \frac{2}{0+\infty} \sim 2/\infty \to 0$$

$\Big\}$ $y=0$ es asintota horizontal

$f(x) = \operatorname{sech} x$ es siempre positiva (numerador y denominador positivos)

El area pedida es como la anterior:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{e^x+e^{-x}}\,dx \text{ , busquemos una primitiva: } \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \Rightarrow$$

$e^x = u$

$e^x dx = du$

$$\int \frac{du}{e^x(u+u^{-1})} = \int \frac{du}{u(u+u^{-1})} = \int \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \operatorname{arctg} u \Rightarrow \operatorname{arctg}(e^x) \text{ , Luego:}$$

$$\lim_{M\to\infty} \operatorname{arctg}(e^x)\Big|_{-M}^{M} = \operatorname{arctg}(\underset{\downarrow\,\infty}{e^M}) - \operatorname{arctg}(\underset{\downarrow\,0}{e^{-M}}) =$$

$$= \operatorname{arctg}(\infty) - \operatorname{arctg}(0) = \pi/2 - 0 = \pi/2 \ldots$$

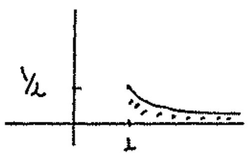
---

98. Encuentre el área de la región bajo la curva $y = \dfrac{1}{x^2+x}$ a la derecha de $x = 1$.

Las raíces del denominador son $x=0$; $x=-1$ $\Rightarrow$ a la derecha de $x=1$ solo tenemos una asíntota horizontal

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+x} = 0$$

El área es la siguiente:



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1/2)^2-1/4}\,dx$$

$x+1/2 = u$
$dx = du$
$$\Rightarrow \int_{1,5}^{+\infty} \frac{1}{u^2-1/4}\,du = \int_{3/2}^{+\infty} \left(\frac{1}{u-1/2} - \frac{1}{u+1/2}\right) du$$

(fracciones simples)

$$\int_{3/2}^{+\infty} \frac{1}{u-1/2}\,du - \int_{3/2}^{+\infty} \frac{1}{u+1/2}\,du =$$

$$\lim_{M\to\infty} \int_{3/2}^{M} (u-1/2)^{-1}\,du - \lim_{M\to\infty} \int_{3/2}^{M} (u+1/2)^{-1}\,du =$$

$$\lim_{M\to\infty} \ln(u-1/2)\Big|_{3/2}^{M} - \lim_{M\to\infty} \ln(u+1/2)\Big|_{3/2}^{M} =$$

$$\lim_{M\to\infty} \left\{ \ln(M-1/2) - \ln(3/2-1/2) - \ln(M+1/2) + \ln(3/2+1/2) \right\} =$$

$$\lim_{M\to\infty} \left\{ \ln\left(\frac{M-1/2}{M+1/2}\right) - \ln(1) + \ln(2) \right\} =$$

$$\lim_{M\to\infty}\left(\ln\left(\frac{M-1/2}{M+1/2}\right)+\ln(2)\right)=\ln\Bigg(\underbrace{\lim_{M\to\infty}\left(\frac{M-1/2}{M+1/2}\right)}_{1}\Bigg)+\ln(2)$$

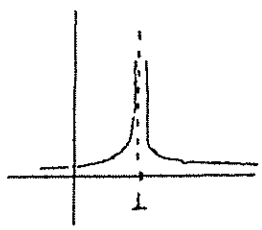
pasamos el límite $= \ln(1)+\ln(2)$

dentro del logaritmo $= \ln(2)$

---

99. Suponga que $f(x)$ es continua en $[0,\infty)$, excepto en $x=1$, en que $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$ ¿Cómo puede definir $\int_0^\infty f(x)\,dx$?

$f(x)$ tiene una asintota vertical en $x=1$, un esquema posible sería:



podemos definir la integral entre $[0,+\infty)$ como:

$$\int_0^{1-\epsilon} f(x)\,dx+\int_{1+\epsilon}^{+\infty} f(x)\,dx$$ en el

límite cuando $\epsilon\to 0 \Rightarrow$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_0^{1-\epsilon} f(x)\,dx+\int_{1+\epsilon}^{+\infty} f(x)\,dx\right\}$$

---

100. Encuentre el área de la región comprendida entre las curvas:

100.1. $y=\dfrac{1}{(x-8)^{\frac{2}{3}}}$, $y=0$, $0\le x\le 8$

100.2. $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{1}{x^3+x}$, $0< x\le 1$

1) La función tiene una divergencia en $x=8 \Rightarrow$ allí

tendremos que tomar un límite, $f(x)$ es positiva en el $[0,8] \Rightarrow$ El área queda expresada por:

$$\int_0^8 (x-8)^{-2/3}\,dx = \lim_{a\to 8} \int_0^a (x-8)^{-2/3}\,dx =$$

$$= \lim_{a\to 8} 3(x-8)^{1/3}\Big|_0^a = 3\lim_{a\to 8}\left\{(a-8)^{1/3} - (0-8)^{1/3}\right\}$$

$$= 3\lim_{a\to 8}\left((a-8)^{1/3}+2\right) = 3\left(\lim_{a\to 8}(a-8)^{1/3} + 2\right)$$

$$= 3\left(\overset{\downarrow}{0} + 2\right) = 6$$

2) Ambas funciones tienen una divergencia en $x=0$.
La función $f(x) = 1/x$ es mayor que $f(x) = \dfrac{1}{x^3+x}$

en el intervalo $0 < x \leq 1$. Entonces el área se expresa por:

$$\int_0^1 \left(1/x - \frac{1}{x^3+x}\right)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \left(\frac{x^3+x-x}{x^4+x^2}\right)dx =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{x^2(x)}{x^2(x^2+1)}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx \Rightarrow$$

buscamos 1º una primitiva: $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx \Rightarrow \begin{array}{l} x^2+1=u \\ 2x\,dx = du\end{array}$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u \Rightarrow \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$$ Entonces:

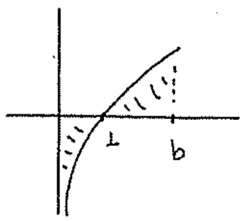
$$\lim_{\epsilon\to 0} \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_\epsilon^1 = \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\ln(2) - \ln(\epsilon^2+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \lim_{\epsilon\to 0} \ln(\epsilon^2+1)\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \ln(1)\right) = \frac{1}{2}\ln 2 \ .-$$

---

101. Encuentre b tal que $\int_0^b \ln x \, dx = 0$.

Nota: piense en otra solución distinta de la trivial.



Buscamos un b / el área por encima del eje x compense al area por debajo:

$$\int_0^b \ln x \, dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^b \ln x \, dx \text{ , entonces:}$$

la primitiva es $x\ln x - x \Rightarrow$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left(x\ln x - x\right)\Big|_\epsilon^b = \lim_{\epsilon\to 0} \left\{ (b\ln b - b) - (\epsilon\ln\epsilon - \epsilon) \right\}$$

$$= b\ln b - b - \lim_{\epsilon\to 0}\left(\epsilon\ln\epsilon - \epsilon\right) = b\ln b - b - \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\ln\epsilon + \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon}_{0}$$

$$= b\ln b - b - \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\ln\epsilon}$$

esta indeterminado $0.\infty \Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon\ln\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\ln\epsilon}{1/\epsilon}$

ahora el límite está indeterminado $\infty/\infty \Rightarrow$ L'Hopital:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1/\epsilon}{-1/\epsilon^2} = \lim_{\epsilon\to 0} -\frac{1}{\epsilon}\cdot\epsilon^2 = \lim_{\epsilon\to 0} -\epsilon = 0 \text{ , luego}$$

la integral queda: $b\ln b - b$ y este valor debe ser $0 \Rightarrow$

$b\ln b - b = 0 \Rightarrow b(\ln b - 1) = 0 \Rightarrow b = 0$ que lo descartamos por ser la solución trivial a la que alude el enunciado

$\Rightarrow \ln b - 1 = 0 \quad \Rightarrow \ln b = 1 \quad \Rightarrow b = e$ ..-

102. ¿Es impropia la integral $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$?. Justifique su respuesta. ¿Puede encontrar la función primitiva por medio de los métodos elementales de integración?

La integral es impropia simplemente porque el integrando no esta definido en $x=0$ (limite inferior) a pesar de $f(x)$ resulte continua allí.

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx .$$

La función primitiva no se puede expresar mediante una conbinación de funciones elementales como lo muestra el libro de Piskunov, Calculo diferencial e integral, Vol. 1 pag. 418.

103. Utilice el criterio de comparación para probar que $\int_1^\infty e^{-x^2}\, dx$ converge.

Esto ya lo hicimos en el ejercicio 93.2):

$f(x) = e^{-x^2} \leq g(x) = e^{-x} \quad \forall x \geq 1 \quad \Rightarrow$

$$\int_1^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{M \to \infty} \int_1^M e^{-x}\, dx = \lim_{M \to \infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_1^M =$$

$$\lim_{M \to \infty} \left[\left(-e^{-M}\right) - \left(-e^{-1}\right)\right] = \lim_{M \to \infty} \left[-\frac{1}{e^M} + \frac{1}{e}\right] =$$

$$\underbrace{\lim_{M \to \infty} \left(-\frac{1}{e^M}\right)}_{0} + \frac{1}{e} = 1/e ,$$

Luego la integral dada es convergente..-

104. La integral $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}.(1+x)}$ tiene dos razones para ser impropia. Calcule empleando la propiedad de partición del intervalo de integración.

La podemos calcular por ejemplo como:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \lim_{M \to \infty} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$; primero hay que

hallar la primitiva: $\int \frac{1\,dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x})$ $\left(\begin{matrix}\text{sustitución}\\ x=u^2\end{matrix}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon \to 0} 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x})\Big|_\epsilon^1 + \lim_{M\to\infty} 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x})\Big|_1^M =$$

$$= 2\operatorname{arctg}(1) - \lim_{\epsilon\to 0} 2\operatorname{arctg}(\sqrt{\epsilon}) + \lim_{M\to\infty} 2\operatorname{arctg}(\sqrt{M}) - 2\operatorname{arctg}(1)$$

$$= -\underbrace{\lim_{\epsilon\to 0} 2\operatorname{arctg}(\sqrt{\epsilon})}_{} + \underbrace{\lim_{M\to\infty} 2\operatorname{arctg}(\sqrt{M})}_{} =$$

$$= 0 + \pi/2 = \pi/2 .$$

---

105. Demuestre que $\int_0^\infty x^2\, e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$

Consideremos la integral $\int_0^M e^{-x^2} dx$ e integremos por partes:

$$e^{-x^2} = u \quad \to \quad -2x\,e^{-x^2} = du$$
$$dx = dv \quad \to \quad x = v$$

$$\int_0^M e^{-x^2} dx = x e^{-x^2}\Big|_0^M + 2\int_0^M x^2 e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^M e^{-x^2} dx = M e^{-M^2} + 2\int_0^M x^2 e^{-x^2} dx$$; Ahora tomemos

el límite cuando $H \to \infty \Rightarrow$

$$\lim_{H\to\infty} \int_0^H e^{-x^2}dx = \lim_{H\to\infty} H e^{-H^2} + 2 \lim_{H\to\infty} \int_0^H x^2 e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \underbrace{\lim_{H\to\infty} \frac{H}{e^{H^2}}}_{0 \text{ (usa Lhopital)}} + 2\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}dx$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = 2\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}dx$$ que es lo que se queria mostrar.-

---

106. Calcule el valor de la constante c para que la integral $\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{c}{x+2}\right) dx$ converja.

¿Cuánto vale la integral en este caso?

Busquemos primero una primitiva:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{c}{x+2}\right)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} - c\int \frac{dx}{x+2}$$

Usando una tabla de integrales:

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right) - c\ln(x+2)$$

$$= \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{(x+2)^c}\right);$$

Ahora: $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{c}{x+2}\right)dx = \lim_{H\to\infty} \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{(x+2)^c}\right)\Bigg|_0^H$$

$$= \lim_{H\to\infty} \ln\left(\frac{H+\sqrt{H^2+4}}{(H+2)^c}\right) - \ln\left(\frac{2}{2^c}\right)$$

Calculemos el límite:

$$\lim_{H\to\infty} \ln\left(\frac{H+\sqrt{H^2(1+4/H^2)}}{(H+2)^c}\right) = \ln\left[\lim_{H\to\infty}\left(\frac{H+H\sqrt{1+4/H^2}}{(H+2)^c}\right)\right]$$

$$= \ln\left[\lim_{H\to\infty}\left(\frac{H+H}{(H(1+2/H))^c}\right)\right] = \ln\left[\lim_{H\to\infty}\left(\frac{2H}{H^c}\right)\right] =$$

$= \ln\left[2\left(\lim_{H\to\infty}\frac{H}{H^c}\right)\right]$; para que este limite exista

finito c debe ser $= 1 \Rightarrow \lim_{H\to\infty}\frac{H}{H} = 1 \Rightarrow \ln(2.1) = \ln(2)$

Si $c<1 \Rightarrow \lim_{H\to\infty}\frac{H}{H^c} = \infty \Rightarrow \ln(\infty) = \infty$; Si $c>1 \Rightarrow$

$\lim_{H\to\infty}\frac{H}{H^c} = 0 \Rightarrow \ln(0) = -\infty$, solo puede ser $c=1$.

En este caso el resultado final es: $\ln(2) - \ln(2/2) = \ln(2)$.-

---

107. Utilice la sustitución $u = \dfrac{1}{x}$ para demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0$

Realicemos la sustitución: $1/x = u \Rightarrow -1/x^2\,dx = du$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_\infty^0 \frac{\ln(1/u)}{1+1/u^2}\left(-\frac{du}{u^2}\right) \qquad \Rightarrow \quad dx = -x^2du = -\frac{du}{u^2}$$

Los límites cambian pues si $x=0 \Rightarrow 1/0 \sim \infty = u$ y al revés.

$$\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{1+x^2} = \int_\infty^0 \frac{-\ln u}{\frac{u^2+1}{u^2}}\left(\frac{-du}{u^2}\right) = \int_\infty^0 \frac{\ln u}{1+u^2}\,du$$; en

Esta última integral mediante la sustitución X=U queda identica a la primera ⇒

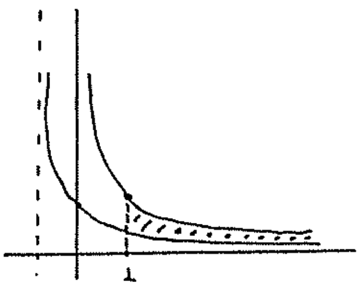
$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_\infty^0 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx \rightarrow \text{invierto los límites:}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{1+x^2} = 0$$

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0 \Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0}$$

---

108. Sea la región R limitada por las curvas $y=\frac{1}{x}$ e $y=\frac{1}{x+1}$ a la derecha de la recta $x=1$.
¿El área de R es finita o infinita? Si es finita calcúlela.



hay que hallar: $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx - \int_1^\infty \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$\lim_{M\to\infty}\left[\int_1^M \frac{1}{x}\,dx - \int_1^M \frac{1}{x+1}\,dx\right] = \lim_{M\to\infty}\left[\ln x\Big|_1^M - \ln(x+1)\Big|_1^M\right]$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left(\ln M - \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\ln 1} - \ln(M+1) + \ln(2)\right) = \lim_{M\to\infty}\left(\ln\left(\frac{M}{M+1}\right) + \ln(2)\right)$$

$$= \lim_{M\to\infty} \ln\left(\frac{2M}{M+1}\right) = \ln\left[\underbrace{\lim_{M\to\infty}\left(\frac{2M}{M+1}\right)}_{2}\right] = \ln 2$$

---

109. Demuestre que:

109.1. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-rx}.\operatorname{sen} ax \; dx = \frac{a}{a^2+r^2}$

109.2. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-rx}.\cos ax \; dx = \frac{r}{a^2+r^2}$

donde $r>0$ y a son constantes.

1) Usando una tabla de integrales, hallamos una primitiva:

$$\int e^{-rx} \operatorname{Sen} ax \, dx = \frac{e^{-rx}}{a^2+r^2}\left(-r \operatorname{Sen} ax - a \operatorname{Cos} ax\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} e^{-rx} \operatorname{Sen} ax \, dx = \lim_{H\to\infty} \int_0^H e^{-rx} \operatorname{Sen} ax . dx =$$

$$= \lim_{H\to\infty} \frac{e^{-rx}}{a^2+r^2}\left(-r \operatorname{Sen} ax - a \operatorname{Cos} ax\right)\Big|_0^H =$$

$$= \lim_{H\to\infty} \frac{e^{-rH}}{a^2+r^2}\left(-r \operatorname{sen} aH - a \operatorname{Cos} aH\right) - \frac{e^{-r.0}}{a^2+r^2}\left(-r \operatorname{sen} a.0 - a \operatorname{Cos} a.0\right) =$$

$$= \lim_{H\to\infty} \frac{e^{-rH}}{a^2+r^2}\left(-r \operatorname{sen} aH - a \operatorname{Cos} aH\right) - \frac{1}{a^2+r^2}\left(0 - a.1\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{H\to\infty} \underbrace{\frac{e^{-rH}}{a^2+r^2}}_{0} . \underbrace{\left(-r \operatorname{Sen} aH - a \operatorname{Cos} aH\right)}_{\text{acotado}}}_{0} + \frac{a}{a^2+r^2}$$

Luego: el resultado es: $\dfrac{a}{a^2+r^2}$.–

2) Identico al 1). Buscala primitiva en una tabla.–

110. Sea f una función continua tal que $f(0)=2$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$. Halle

110.1. $\lim\limits_{b\to 0} \frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,dx$

110.2. $\lim\limits_{b\to \infty} \frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,dx$

1) $\lim\limits_{b\to 0} \frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to 0} \frac{\int_0^b f(x)dx}{b}$; vemos q' nos encontramos con una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ $\Rightarrow$ si pensamos numerador y denominador como funciones de b $\Rightarrow$ puedo usar l'hospital (derivo respecto de b) $\Rightarrow$

$$\lim_{b\to 0} \frac{f(b)}{1} = f(0) = 2$$

2) Identico, pero indeterminación es ∞/∞ $\Rightarrow$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{f(b)}{1} = \lim_{b\to\infty} f(b) = 3$$

---

111. Calcule $\int_0^\infty e^{-x}.\text{sen}\,(2x+3)\,dx$

Necesitamos una primitiva: Integramos por partes:

$\int e^{-x}\,\text{sen}(2x+3)\,dx \Rightarrow$ $e^{-x} = u \rightarrow -e^{-x} = u'$

$\text{sen}(2x+3) = v' \rightarrow -\frac{\cos(2x+3)}{2} = v$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}e^{-x}\cos(2x+3) - \frac{1}{2}\underbrace{\int e^{-x}\cos(2x+3)\,dx}_{\text{otra vez por partes:}}$$

$e^{-x} = u \quad \to \quad -e^{-x} = u'$

$\cos(2x+3) = v' \quad \to \quad \dfrac{\operatorname{sen}(2x+3)}{2} = v$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} e^{-x}\cos(2x+3) - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} e^{-x}\operatorname{sen}(2x+3) + \frac{1}{2}\int e^{-x}\operatorname{sen}(2x+3)\,dx\right\}$$

finalmente:

$$\int e^{-x} S(2x+3)\,dx = e^{-x}\left(-\frac{1}{2}C(2x+3) - \frac{1}{4}S(2x+3)\right) - \frac{1}{4}\int e^{-x}S(2x+3)\,dx$$

pasa sumando:

$$\frac{5}{4}\int e^{-x} S(2x+3)\,dx = \frac{e^{-x}}{2}\left(-C(2x+3) - \frac{1}{2}S(2x+3)\right)$$

$$\int e^{-x} S(2x+3)\,dx = -\frac{2}{5}e^{-x}\left(C(2x+3) + \frac{1}{2}S(2x+3)\right)$$

Ahora: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}S(2x+3)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-x}S(2x+3)\,dx =$

$$\lim_{M\to\infty} -\frac{2}{5}e^{-x}\left(C(2x+3) + \frac{1}{2}S(2x+3)\right)\Big|_0^M =$$

$$\lim_{M\to\infty} \underbrace{\underbrace{-\frac{2}{5}e^{-M}}_{0} \cdot \underbrace{\left(C(2M+3) + \frac{1}{2}S(2M+3)\right)}_{\text{acotado}}}_{0} + \frac{2}{5}e^{0}\left(C(3) + \frac{1}{2}S(3)\right)$$

$$0 + \frac{2}{5}\left(C(3) + \frac{1}{2}S(3)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen}(2x+3)\,dx = \frac{2}{5}\left(C(3) + \frac{1}{2}S(3)\right)}$$

112. La integral $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}.e^{-x}dx$ se conoce con el nombre de ***función gamma de Eüler*** o ***factorial generalizado.***

Demuestre que: a) $\Gamma(t+1)=t.\Gamma(t)$ b) $\Gamma(1)=1$

Teniendo en cuenta estos dos resultados, si toma el parámetro $t=n$, $n\in N$, podrá entender la otra denominación de la función Γ, ya que en este caso resulta $\Gamma(n+1)=n!$ En los manuales de tablas matemáticas se pueden encontrar valor de $\Gamma(t)$ para $t\in\Re$.

a) $\Gamma(t+1)=\int_0^\infty x^t\, e^{-x}\,dx \Rightarrow$ Integro por partes:

$$\left.\begin{array}{l} x^t=u \rightarrow t\,x^{t-1}\,dx=du \\ e^{-x}dx=dv \rightarrow -e^{-x}=v \end{array}\right\}$$

$$\Gamma(t+1) = -e^{-x}x^t\Big|_0^\infty + \int_0^\infty t\,x^{t-1}\,dx\,e^{-x}$$

$$= -\frac{x^t}{e^x}\Big|_0^\infty + t\int_0^\infty x^{t-1}\,e^{-x}\,dx$$

$$= -\underbrace{\lim_{M\to\infty}\frac{M^t}{e^M}}_{0} + \underbrace{\frac{0^t}{e^0}}_{0} + t\,.\,\Gamma(t)$$

$$\Gamma(t+1) = t\,.\,\Gamma(t)$$

b) $$\Gamma(1)=\int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^M = \lim_{M\to\infty} e^{-x}\Big|_M^0 = e^{-0}-\lim_{M\to\infty}e^{-M} =$$

$$= 1-\lim_{M\to\infty}\frac{1}{e^M} = 1 \Rightarrow \Gamma(1)=1\,.-$$

---

113. En el año 1865 Julio Verne en su novela "De la Tierra a la luna " imagina una nave espacial disparada por un enorme cañón para poder emprender el viaje hacia nuestro satélite natural. En las aplicaciones de la integral definida hemos propuesto algunos problemas de dinámica en los que aparecieron la ley de la gravitación universal de Newton y el Teorema de las Fuerzas vivas. Recurriendo a esos resultados demuestre que la velocidad a la que debía ser disparada la nave de J. Verne en la denominada velocidad de escape. $v_e=\sqrt{\dfrac{2\,G\,M}{R}}$ donde M es la masa de la Tierra, R el radio terrestre y G la constante de gravitación universal.

La sugerencia nos lleva a evaluar la siguiente integral:

$$\int_R^{\infty} \frac{GMm}{x^2}\,dx = GmM \lim_{r\to\infty} \int_R^r \frac{dx}{x^{+2}} = GmM \lim_{r\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_R^r$$

$$= GmM \lim_{r\to\infty} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) = GmM\left(-\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) = \frac{GmM}{R}.$$

Ahora este trabajo debe ser igual a la variación de energía cinetica:

$$\mathcal{L}_r = \frac{1}{2} m \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{V_f^2} - \frac{1}{2} m V_0^2$$

siendo V_f velocidad final (que podemos suponerla como cero, en el caso limite) y V_0 la velocidad de escape:

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{2} m V_e^2$$

, el $\mathcal{L}$ (trabajo) es también negativo pues, es contra de las fuerzas gravitatorias

$$-\frac{GmM}{R} = -\frac{1}{2} m V_e^2 \Rightarrow \frac{GM}{R} = \frac{V_e^2}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{2GM}{R}} = V_e$$

---

114. Suponga que la ley de Newton de la gravitación universal tuviera como denominador x en lugar de x^2. Demuestre que en este caso sería imposible enviar algo fuera del campo gravitacional de la Tierra.

(Sugerencia: calcule la integral similar a la del problema anterior).

El trabajo que ahora tendríamos que efectuar sería:

$$\mathcal{L} = \lim_{r\to\infty} \int_R^r \frac{GmM\,dx}{x} = GmM \lim_{r\to\infty} \int_R^r \frac{dx}{x} =$$

$$= \lim_{r\to\infty} GmM \ln x\Big|_R^r = GmM \underbrace{\lim_{r\to\infty} \ln(r/R)}_{\infty}$$

Se necesitaria una energia infinita.

---

115. En la teoría electromagnética, el potencial magnético u de un punto sobre el eje de una bobina circular está dado por: $u = A.r\int_a^\infty \frac{dx}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ Donde A, r y a son constantes. Calcule u.

$$Ar\int_a^\infty \frac{dx}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \lim_{M\to\infty} Ar\int_a^M \frac{dx}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$; la primitiva la

obtemos de una tabla:

$$\int \frac{dx}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{r^2\sqrt{r^2+x^2}} \Rightarrow \lim_{M\to\infty} \left.\frac{x}{r^2\sqrt{r^2+x^2}}\right|_a^M =$$

$$\lim_{M\to\infty} \frac{M}{r^2\sqrt{r^2+M^2}} - \frac{a}{r^2\sqrt{r^2+a^2}} = \lim_{M\to\infty} \frac{M}{r^2 M\sqrt{r^2/M^2+1}} - \frac{a}{r^2\sqrt{r^2+a^2}}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{r^2\sqrt{\underbrace{r^2/M^2}_{\to 0}+1}} - \frac{a}{r^2\sqrt{r^2+a^2}} = \frac{1}{r^2} - \frac{a}{r^2\sqrt{r^2+a^2}}$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}\right).-$$

---

116. En la teoría de señales aparece la función $f(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} t}{t} & si\ t \neq 0 \\ 1 & si\ t = 0 \end{cases}$ ($sin\,c\,(t)$) como ya la mencionáramos con anterioridad.

La energía E de una señal $X(t)$ se define por la integral: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^2\,dt$

Demuestre que la energía de la señal $X(t) = f(t)$ es finita.

Queremos mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ es convergente

$f(t)$ es par $\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 2\int_0^\infty |f(t)|^2 dt = 2\left\{\int_0^1 |f(t)|^2 dt + \int_1^\infty |f(t)|^2 dt\right\}$$; $f(t)$ es continua en $t=0$ y está bien

definida $\Rightarrow \int_0^1 |f(t)|^2 dt$ no presenta problema alguno.

Tenemos que examinar: $\int_1^{\infty} \left(\left|\frac{\operatorname{Sen} t}{t}\right|\right)^2 dt$, podemos acotar

el integrando: $\left|\frac{\operatorname{Sen} t}{t}\right| = \frac{|\operatorname{Sen} t|}{t} \leq \frac{1}{t} \Rightarrow \left|\frac{\operatorname{Sen} t}{t}\right|^2 \leq \frac{1}{t^2}$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} \left|\frac{\operatorname{Sen} t}{t}\right|^2 dt \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$ y esta última integral

sabemos que es convergente $\Rightarrow$ la energía de la señal es finita.

---

117. En una empresa $p(t)$ es la utilidad por año, en pesos, en el tiempo t. Halle el valor actual de todas las utilidades futuras de la empresa, a una tasa anual de interés r capitalizada continuamente, en los casos:

117.1. $p(t) = \$24.000$; $r = 0{,}06$

117.2. $p(t) = t^2$ (en \$) ; $r = 0{,}01$

1) Están pidiendo $P_T = \int_0^T s(t) e^{-tr} dt = \int_0^T 24000 e^{-0{,}06t} dt$

$P_T = 24000 \cdot \left.\frac{e^{-0{,}06t}}{(-0{,}06)}\right|_0^T = -400000\left(e^{-0{,}06T} - 1\right)$

$P_T = 400.000\left(1 - e^{-0{,}06T}\right)$

2) Hay que hallar $P_T = \int_0^T t^2 e^{-0{,}01t} dt$

---

118. Si para la empresa del problema anterior se diera en general su valor actual $P(r)$ (o sea, $P(r)$ es la transformada de Laplace de $p(t)$), demuestre que si la utilidad de otra

problema sin mucho sentido, en base al resultado anterior: te lo dejo.

119. Demuestre que si $0 \le f(t) \le M.e^{at}$ (M y a constantes positivas) cuando $t \ge 0$, la transformada de Laplace de $f(t), F(r)$, (o valor actual de $f(t)$) existe si $r > a$

$F(r) = \int_0^\infty f(t) e^{-rt} dt$, como $f(t) \le M e^{at} \Rightarrow$

$$\int_0^b f(t) e^{-rt} dt \le \int_0^b M e^{at} e^{-rt} dt = \int_0^b M e^{(a-r)t} dt$$

tomando el límite con $b \to \infty$

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b f(t) e^{-rt} dt \le \lim_{b \to \infty} M \int_0^b e^{(a-r)t} dt \Rightarrow$$

$\int_0^\infty f(t) e^{-rt} dt \le M \int_0^\infty e^{(a-r)t} dt$ y sabemos que esta última integral existe (converge) si $a - r < 0 \Rightarrow$ $a < r \to r > a$.-

---

120. Sean $f(t)$ y $f'(t)$ tales que $0 \le f(t) \le M e^{at}$ y $0 \le f'(t) \le K e^{at}$, con M, K y a constantes positivas, o sea, existen las transformadas de Laplace de $f(t), f'(t)$. Sean éstas $F(r)$ y $D(r)$ respectivamente. Demuestre que si $r > a$ entonces se cumple: $D(r) = r.F(r) - f(0)$.

$D(r) = \int_0^\infty f'(t) e^{-rt} dt$ vamos a integrar por partes

$f'(t) = dv \to f(t) = v$
$e^{-rt} = u \to -r e^{-rt} = u'$

$$D(r) = f(t) e^{-rt} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -r e^{-rt} f(t) dt =$$

$$= \lim_{H \to \infty} f(H) e^{-rH} - f(0) e^{-r0} + r \int_0^\infty f(t) e^{-rt} dt =$$

$$D(r) = \lim_{H\to\infty} f(H)e^{-Hr} - f(0) + r\,F(r)$$

para calcular el límite usamos que $f(t) \leq N e^{at}$ con $a<r$

$$\Rightarrow \quad f(H)e^{-Hr} \leq N e^{aH} e^{-Hr} = N e^{(a-r)H} \Rightarrow$$

$$\lim_{H\to\infty} f(H)e^{-Hr} \leq \underbrace{\lim_{H\to\infty} N e^{(a-r)H}}_{0} \Rightarrow \text{ nuestro límite también:}$$

$$D(r) = r\,F(r) - f(0)$$.–

---

121. Encuentre la transformada de Laplace de las siguientes funciones

121.1. $f_1(t) = U(t)$ (escalón unitario de Heaviside)

121.2. $f_2(t) = e^t$

1) $U(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ queremos hallar la siguiente

integral: $\int_0^\infty U(t)\,e^{-rt}dt = \lim_{H\to\infty} \int_0^H U(t)\,e^{-rt}dt$; para

valores mayores que 0 $U(t)=1 \Rightarrow$

$$\lim_{H\to\infty} \int_0^H 1.e^{-rt}dt = \lim_{H\to\infty} \int_0^H e^{-rt}dt = \lim_{H\to\infty} -\frac{e^{-rt}}{r}\Big|_0^H$$

$$= -\lim_{H\to\infty} \frac{e^{-rH}}{r} + \frac{e^{-r.0}}{r} = \underbrace{-\lim_{H\to\infty}\frac{e^{-rH}}{r}}_{0} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

la transformada vale: $1/r$.–

2) la integral que buscamos ahora es: $\int_0^\infty e^t e^{-rt}\,dt =$

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^M e^t e^{-rt}\,dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{(1-r)t}\,dt =$$

$$\lim_{M\to\infty} \left.\frac{e^{(1-r)t}}{(1-r)}\right|_0^M = \lim_{M\to\infty} \frac{e^{(1-r)M}}{(1-r)} - \frac{e^{(1-r)0}}{(1-r)} =$$

$$\underbrace{\lim_{M\to\infty} \frac{e^{(1-r)M}}{(1-r)}} - \frac{1}{1-r}$$

este límite existe finito si $1-r<0 \Rightarrow 1<r \Rightarrow r>1$, con lo cual la transformada da: $\frac{-1}{1-r}$ ..

Esto ya nos lo decía el problema 119: si $f(t) \leq Me^{at}$ $\Rightarrow$ la transformada de Laplace existe si $r>a \Rightarrow$ en este caso: $e^t \leq Me^{at}$ con $M=1$; $a=1 \Rightarrow$ la transformada está definida sii $r>1$..

3) 4) son idénticos, buscar la primitiva y evaluar la integral tomando el límite cuando $M\to\infty$..

---

122. Si $F(t)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, encuentre la transformada de Laplace de $g(t)=f(t)e^{at}$. Aplique este resultado para hallar directamente la transformada de Laplace de $f_i(t).e^{at}$. $f_i(t)$ del problema anterior, $i=1,2,3,4$.

Sea $F(r)$ la transformada de $f(t) \Rightarrow F(r) = \int_0^\infty f(t)e^{-rt}\,dt$,

Ahora queremos la transformada de $g(t) = f(t)e^{at} \Rightarrow$

$$G(r) = \int_0^\infty g(t)e^{-rt}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{at}e^{-rt}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\,e^{(a-r)t}\,dt = \int_0^\infty f(t)\,e^{-(r-a)t}\,dt \Rightarrow$$

Esta última integral se parece a la transformada de $f(t)$ si en lugar de r se coloca $r-a \Rightarrow$

$G(r) = F(r-a)$.-

Aplicando esto a la función f_2 del ejercicio anterior:

$f_2 = e^t \Rightarrow g(t) = e^t e^{at} = e^{(a+1)t} \Rightarrow$ directamente daría que:

$$G(r) = F(r-a) = \frac{-1}{1-(r-a)} = \frac{-1}{1-r+a}.$$ Se puede

verificar esto calculando por definición $G(r)$:

$$G(r) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-rt}\,dt = \int_0^{\infty} e^t e^{at} e^{-rt}\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{(1+a-r)t}\,dt = \underbrace{\lim_{M\to\infty} \frac{e^{(1+a-r)M}}{1+a-r}}_{0} - \frac{1}{1+a-r}$$

se supone que $1+a-r<0 \Rightarrow$ con lo cual:

$$G(r) = \frac{-1}{1+a-r}$$ que es lo mismo que antes $\Rightarrow$ Verifícalo

para las demás funciones.-

---

123. Sea la distribución de probabilidad de los *tiempos de espera*:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \le 0 \\ ke^{-kx} & si \;\; x > 0 \end{cases} \quad con \;\; k \in \Re^+$$

123.1. Demuestre que $f(x)$ cumple con la condición para ser una distribución de probabilidad.

123.2. Calcule μ y σ.

1) Queremos mostrar que $f(x)$ cumple con: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} k e^{-kx}\,dx$$ pues para

$x \leq 0$ la función $f(x) \equiv 0$.

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} k e^{-kx}\,dx = k \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} e^{-kx}\,dx =$$

$$= k \left(\underbrace{\lim_{M\to\infty} \frac{e^{-kM}}{-k}} - \frac{e^{-k0}}{-k} \right)$$

$$= k \left(0 + \frac{1}{k} \right) = 1$$

Cumple la condición.-

2) Ahora queremos hallar $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx =$

$$\int_{-\infty}^{0} x.0\,dx + \int_{0}^{\infty} x k e^{-kx}\,dx = \lim_{M\to\infty} k \int_{0}^{M} x e^{-kx}\,dx$$

$$= k \lim_{M\to\infty} \frac{e^{-kx}}{k^2} (-kx-1) \Big|_{0}^{M} = k \left(\underbrace{\lim_{M\to\infty} \frac{e^{-kM}}{k^2} (-kM-1)}_{0} - \frac{1}{k^2}(-1) \right)$$

$$= k \left(0 + \frac{1}{k^2} \right) = 1/k \ .- \quad \Rightarrow \quad \mu = 1/k$$

falta aun hallar $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \Rightarrow$

$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - 1/k)^2 e^{-kx}\,dx$; te dejo esta última para vos, busca en tablas la primitiva y evalua el límite.-

---

124. Sea la denominada ***función de distribución normal o de Gauss*** $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2k^2}}}{\sqrt{2\pi}\,.k}$, siendo

k una constante positiva. Tomando como dato que $\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (¿Puede calcularla?)

124.1. Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$

124.2. Halle μ y σ.

La integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ no se puede calcular pues no tiene primitiva, el valor $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ se logra con tecnicas de Analisis II.

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2k^2}}{\sqrt{2\pi}\,k} dx = 2\int_0^\infty \frac{e^{-x^2/2k^2}}{\sqrt{2\pi}\,k} dx$ pues la función integranda es par $\Rightarrow$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,k}\int_0^\infty e^{-x^2/2k^2} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,k}\int_0^\infty e^{-\left(x/\sqrt{2}k\right)^2} dx =$$

$\Rightarrow$ sustitución: $\frac{x}{\sqrt{2}k} = u \Rightarrow dx = \sqrt{2}k\,du \Rightarrow$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,k}\cdot\sqrt{2}k\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,k}\cdot\sqrt{2}k\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ (usando el dato).-

$$= \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}\,k}\cdot\sqrt{2}k\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} \equiv 1 ..$$ (Se simplifica todo).

2) los calculos de μ y σ^2 son tediosos pero similares a los hechos hasta el momento, usa una tabla de integrales y toma los limites.

125. La función de distribución de probabilidad para la vida en horas, x de un componente electrónico de una calculadora está dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{x^2} & si \quad x \geq 800 \\ 0 & si \quad x < 800\end{cases}$$

125.1. Determine el valor de k.

125.2. La probabilidad de que el componente dure al menos 1200 horas viene dada por $\int_{1200}^{\infty} f(x)\ dx$. Calcule dicha probabilidad

1) Sabemos que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ pues f(x) es una distribución $\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{800} f(x)dx + \int_{800}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{800} 0\ dx + \int_{800}^{+\infty} k/x^2 dx = \int_{800}^{+\infty} kx^{-2}dx$$

$$= k \lim_{M\to\infty} \int_{800}^{M} x^{-2}dx = k \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{800}^{M} =$$

$$= k\left(\lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M}\right) - \left(-\frac{1}{800}\right)\right) = k\left(0+\frac{1}{800}\right) = \frac{k}{800}$$ y

este valor tiene que ser igual a 1 $\Rightarrow \boxed{k = 800}$ ..

2) $$\int_{1200}^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_{1200}^{M} 800x^{-2}dx =$$

$$= 800 \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{1200}^{M} = 800\left(\lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M}\right) - \left(-\frac{1}{1200}\right)\right)$$

$$= \frac{800}{1200} = 2/3$$ ..

3) Hay que realizar exactamente lo mismo que en 1) y 2) pero con otra función $g(x)$..

126. Otra distribución importante en el cálculo de Probabilidades es la de ***Cauchy***: $f(x)=\dfrac{k}{1+x^2}$. Determine la constante k para que $f(x)$ sea efectivamente una función densidad de probabilidad.

Finalizamos con un ejercicio sencillo comparado a los que hemos hecho. Queremos hallar k de modo tal que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{k}{1+x^2}\,dx$$ pues

$f(x)$ es par $\Rightarrow$ $$2k\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2k \lim_{H\to\infty} \int_0^{H} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$2k \lim_{H\to\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^H = 2k\Big(\underbrace{\lim_{H\to\infty} \operatorname{arctg}(H)}_{\pi/2} - \underbrace{\operatorname{arctg}(0)}_{0}\Big)$$

$$= 2k\left(\pi/2 - 0\right) = k\pi \, .$$

Luego, este valor debe ser igual a 1 $\Rightarrow k\pi = 1 \Rightarrow$

$k = 1/\pi$.-