Resueltos

MATERIA: Análisis Matemático I

TITULO: T.P. Nº 1 -"Funciones"
-Edición 2000-

AUTOR: Anibal Kasero

AR1AP1

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

ACLARACIÓN PREVIA: RESOLVEREMOS LA MAYORÍA DE LOS EJERCICIOS. DEJAREMOS ALGUNOS SIN RESOLVER, A CARGO DEL ALUMNO. LOS EJERCICIOS SIN RESOLVER SERÁN AQUÉLLOS SIMILARES A LOS QUE HAN SIDO RESUELTOS.

Trabajo Práctico N° 1

1. Determinar si son verdaderas o falsas la siguientes proposiciones. Si son verdaderas, probarlo, caso contrario hallar un contraejemplo.

1.1. $ax = a \Rightarrow x = 1$

ESTA PROPOSICIÓN ES VERDADERA $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow$ SI $a \neq 0 \Rightarrow$

$$ax = a \Rightarrow x = \frac{a}{a} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 1} \text{ c.s.q.d}$$

SI $a = 0 \Rightarrow x$ PUEDE SER CUALQUIER NÚMERO REAL. POR LO TANTO SI $a = 0$, LA PROPOSICIÓN ES FALSA.

1.2. $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$

ESTA PROPOSICIÓN ES FALSA PORQUE:

$x^2 = y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \Rightarrow$ PARA PODER CANCELAR

$|x| = |y| \Rightarrow$ BUSCO UN CONTRAEJEMPLO:

CEJ: $x = 2 \wedge y = -2 \Rightarrow$

$|2| = |-2| \wedge 2 \neq -2$, ES DECIR $x \neq y$

1.3. $\forall x, y : x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

ES UN EJEMPLO DEL 6° CASO DE FACTOREO, REALIZANDO LA REGLA DE RUFFINI PODEMOS COMPROBAR QUE ES VERDADERA

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -y^3 \\ y & & y & y^2 & y^3 \\ \hline & 1 & y & y^2 & \underline{0} \end{array}$$

VERIFICAMOS QUE $(x-y) \wedge (x^2+xy+y^2)$ SON DIVISORE DE x^3-y^3 POR LO TANTO ES UNA PROP. V.

1.4. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

SI $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \Rightarrow$ PUEDE SUCEDER:

CEJ: $a = -2 \wedge b = -3 \Rightarrow$

$$\underbrace{\sqrt{(-2)\cdot(-3)}}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{\sqrt{-2}}_{\notin \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\sqrt{-3}}_{\notin \mathbb{R}}$$

POR LO TANTO, SIN LAS BARRAS DE MÓDULO ES FALSA

NO PUEDO DISTRIBUIR LA RADICACIÓN RESPECTO DEL PRODUCTO SIN ACLARAR QUE $a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+$

1.5. $x^3+y^3 = (x+y)(x^2+xy+y^2)$

TENIENDO COMO EJ. EL 1.3. BUSCAR UN CEJ. PARA VER QUE ES FALSO.

1.6. $\forall a \in \Re^+ : |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

POR DEFINICIÓN DE FUNCIÓN MÓDULO O VALOR ABSOLUTO:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 & \text{I} \\ \vee \\ -x \text{ si } x < 0 & \text{II} \end{cases} \Rightarrow$$

APLICO LAS DOS PARTES DE LA DEFINICIÓN DE MÓDULO:

I $|x| = x \Rightarrow |x| < a$ SE ESCRIBE:

$$\boxed{x < a} \ (1) \quad \text{CON } x \geq 0$$

II $|x| = -x \Rightarrow |x| < a$ SE ESCRIBE:

$$-x < a \Rightarrow$$

$$\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}<0} > \underbrace{-a}_{\in \mathbb{R}<0}$$

$x > -a$ ES LO MISMO QUE DECIR: $\boxed{-a < x}$ (2)

DE ① ∧ ② QUEDA: $\boxed{-a < x < a}$ c.s.q.d.

ES DECIR $X \in (-a; a)$, SE LEE: "X PERTENECE AL INTERVALO ABIERTO CUYOS EXTREMOS (COTA INFERIOR Y SUPERIOR RESPECTIVAMENTE) SON $-a \wedge a$" $\Rightarrow X \in$ A UN INTERVALO ACOTADO DE LA RECTA REAL (UN SEGMENTO)

$\Rightarrow$ SE TRATA DE UNA PROP. VERDADERA.

1.7. $\forall a \in \Re^+ : |x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$

HACIENDO EL MISMO DESARROLLO, (POR DEFINICIÓN DE MÓDULO), QUE EN EL EJERCICIO ANTERIOR SE LLEGA A QUE ESTA PROPOSICIÓN ES VERDADERA.

1.8. $\forall a,b \in \Re - \{0\}: a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

BUSCO UN CONTRAEJEMPLO:

CEJ. SI $a = -\frac{1}{3} \wedge b = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Rightarrow$ SEGÚN

PROP: $\frac{1}{-\frac{1}{3}} < \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{-3 < 2}$ Y SEGÚN LA

PROPOSICIÓN TENDRÍA QUE SER $\boxed{-3 > 2} \rightarrow$ QUE ES UN ABSURDO $\Rightarrow$

LA PROP. ES FALSA.

1.9. $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

BUSCO UN CEJ: $a = -\frac{1}{2} \wedge b = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$a < b \wedge \left(-\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{9} \Rightarrow$

SEGÚN LA PROP. SERÍA: $\frac{1}{4} < \frac{1}{9} \rightarrow$ ABSURDO $\Rightarrow$

LA PROP. ES FALSA.

1.10. $\left|\frac{1}{x}\right| < 1 \wedge x \neq 0 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow -1 > x > 1$

BUSCO UN CONTRAEJ: SI $x = 2 \Rightarrow$

$\left|\frac{1}{2}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{2} < 1$ ES VERDADERO $\Rightarrow$

$-1 > 2 > 1$ ES FALSO YA QUE

$-1 > 2$ ES UN <u>ABSURDO</u>, DADO QUE ES:

$\boxed{-1 < 2} \Rightarrow$ LA PROP. ES <u>FALSA</u>.

1.11. $a < b \wedge c > 1 \Rightarrow c^{-a} < c^{-b}$

BUSQUEMOS UN C.EJ:

SI $a = -\frac{1}{3} \wedge b = \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < \frac{1}{3} \wedge$

$c = 4 \Rightarrow$

$c^{-a} = 4^{-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \wedge$

$c^{-b} = 4^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow$

$\sqrt[3]{4} > \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow$ PROP. <u>FALSA</u> PORQUE:

$\sqrt[3]{4} < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ES <u>ABSURDO</u>.

1.12. $0 < a < b \wedge c > 1 \Rightarrow \log_c a < \log_c b$

<u>DEFINICIÓN</u> DE LOGARITMO:

$\boxed{\log_c a = m \Leftrightarrow c^M = a \text{ CON } c > 1 \wedge a > 1} \Rightarrow$

PARA a TENGO: $c^M = a \wedge$ PARA b TENGO $c^m = b \Rightarrow$

$c^M < c^m$ POR HIPÓTESIS $\Rightarrow$

COMO $c > 1$ POR HIPÓTESIS $\Rightarrow$

$n < m \Rightarrow$ COMO $\log_c a = n \wedge \log_c b = m \Rightarrow$

TESIS $\boxed{\log_c a < \log_c b}$ c. s. q. d. $\Rightarrow$

LA PROP. ES <u>VERDADERA</u>.

1.13. $0 < a < b \ \wedge \ 0 < c < 1 \Rightarrow \log_c a < \log_c b$

CON EL EJ. ANTERIOR SE PUEDE ENCONTRAR UN C.EJ. Y VERIFICAR QUE ES UNA PROP. <u>FALSA</u>.

---

2. Si $x < a < 0$, ¿cuáles de las siguientes inecuaciones son verdaderas? Justificar

2.1. $x^2 < a x < 0$

POR ENUNCIADO $x \in \mathbb{R}_{<0} \Rightarrow x^2 < 0$ ES FALSO $\forall x \in \mathbb{R}$ YA QUE:

$\sqrt{x^2} < 0 \Rightarrow$

$|x| < 0 \rightarrow$ ES FALSO YA QUE POR DEFINICIÓN EL MÓDULO ES SIEMPRE MAYOR QUE CERO.

ES UNA INECUACIÓN <u>FALSA</u> $\forall x \in \mathbb{R}$.

2.2. $x^2 > a x > a^2$ ANALIZO: $\underbrace{x^2 > ax}_{\text{I}} > a^2$ (II: $ax > a^2$)

I $x^2 > a x \Rightarrow x^2 - ax > 0 \Rightarrow x(x-a) > 0 \Rightarrow$ POR DOMINIO: $x < a < 0 \Rightarrow$ SÓLO QUEDA LA POSIBILIDAD:

$x \cdot (x-a) > 0 \Rightarrow$

$x < 0 \ \wedge \ x - a < 0 \Rightarrow \boxed{x < 0 \ \wedge \ x < a}$ <u>VERDADERO</u> 1

II $a x > a^2 \Rightarrow a x - a^2 > 0 \Rightarrow a(x-a) > 0 \Rightarrow$ POR

DOMINIO TENGO QUE:

$$a(x-a) > 0 \Rightarrow$$

$$a < 0 \quad \wedge \quad x - a < 0 \Rightarrow$$

$\boxed{a < 0 \wedge x < a}$ VERDADERO (2)

DE (1) $\wedge$ (2) TENEMOS QUE ESTA INECUACIÓN ES VERDADERA.

2.3. $x^2 < a^2 < 0$

TOMEMOS UN CONTRAEJEMPLO:

SI $x = -3 \wedge a = -2 \Rightarrow -3 < -2 < 0 \in$ AL DOM.

$$\Rightarrow (-3)^2 < (-2)^2 < 0 \Rightarrow$$

$\boxed{9 < 4 < 0}$ ES ABSURDO POR LO TANTO LA INECUACIÓN ES FALSA.

2.4. $x^2 < a^2$

CEJ: $x = -3 \wedge a = -2 \Rightarrow -3 < -2 \in$ AL DOMINIO

$\Rightarrow (-3)^2 < (-2)^2 \Rightarrow \boxed{9 < 4}$ ABSURDO $\Rightarrow$ LA INECUACIÓN ES FALSA.

2.5. $x^2 > ax \wedge ax < 0$

HAY QUE HACER LA INTERSECCIÓN DE AMBAS ECUACIONES. COMIENZO CON $ax < 0$ CON $x < a < 0 \Rightarrow$

PARA QUE $ax < 0$ TENGO DOS POSIBILIDADES:

(I) $a < 0 \wedge x > 0$, PERO $x > 0 \notin$ DOMINIO $\vee$

(II) $a > 0 \wedge x < 0$, PERO $a > 0 \notin$ DOMINIO.

POR LO TANTO, CON ESE DOMINIO ax NUNCA PUEDE

SER MENOR QUE CERO. POR LO TANTO ESTA INECUACIÓN NO PUEDE SER VERDADERA $\Rightarrow$ ES FALSA

2.6. $x^2 > a^2 \wedge a^2 < 0$

VEAMOS QUÉ SUCEDE CON $a^2 < 0 \Rightarrow \sqrt{a^2} < \sqrt{0} \Rightarrow$

$\boxed{|a| < 0}$ NO TIENE SOLUCIÓN, YA QUE, EL MÓDULO POR DEFINICIÓN PERTENECE A $\mathbb{R}^+$ $\Rightarrow$ ESTA ECUACIÓN ES FALSA

---

3. Escribir las siguientes expresiones prescindiendo de las barras de módulo.

3.1. $|a| - |a + b|$

TENEMOS QUE CONSIDERAR LOS DOS CASOS DE LA DEFINICIÓN PARA $|a| \wedge |a+b| \Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} \text{Si } a \geq 0 \\ \wedge \; a+b \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |a| - |a+b| = a - (a+b) = a - a - b = \boxed{-b}$$

$$\left.\begin{matrix} \text{Si } a < 0 \\ \wedge \; a+b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |a| - |a+b| = -a - (-(a+b)) = -a + a + b = \boxed{b}$$

$$\left.\begin{matrix} \text{Si } a \geq 0 \\ \wedge \; a+b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |a| - |a+b| = a - (-(a+b)) = a + a + b = \boxed{2a+b}$$

$$\left.\begin{matrix} \text{Si } a < 0 \\ \wedge \; a+b \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |a| - |a+b| = -a - (a+b) = \boxed{-2a-b}$$

3.2. $|4x| - 2|x|^2$ $\rightarrow$ SEGÚN DEFINICIÓN DE MÓDULO:

$$\left.\begin{matrix} 4x \geq 0 \\ \wedge \; x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |4x| - 2|x|^2 = \boxed{4x - 2x^2}$$

$$\left.\begin{matrix} 4x < 0 \\ \wedge \; x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |4x| - 2|x|^2 \rightarrow$$ NO TIENE SOLUCIÓN PORQUE LA INTERSECCIÓN DE ESE DOMINIO ES VACÍA.

Si $\left.\begin{array}{l} 4x < 0 \\ \wedge \quad x < 0 \end{array}\right\}$ $|4x| - 2|x|^2 = -4x - 2(-x)^2 = \boxed{-4x - 2x^2}$

Si $\left.\begin{array}{l} 4x \geq 0 \\ \wedge \quad x < 0 \end{array}\right\}$ $\rightarrow$ NO TIENE EXPRESIÓN POSIBLE PORQUE ESA INTERSECCIÓN ES VACÍA.

3.3. $\left|1-|x|\right|$

Si $x \geq 0 \Rightarrow \left|1-|x|\right| = |1-x| \Rightarrow$ TENGO DOS POSIBILIDADES: I $1-x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$ PORQUE TENÍA $x \geq 0 \Rightarrow$ $\left|1-|x|\right| = \boxed{1-x}$ PARA $0 \leq x \leq 1$

II $1-x < 0 \Rightarrow 1 < x \Rightarrow x > 1 \Rightarrow$

$\left|1-|x|\right| = -(1-x) = \boxed{-1+x}$ PARA $x > 1$

Si $x < 0 \Rightarrow \left|1-|x|\right| = |1-(-x)| = |1+x| \Rightarrow$

I Si $1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow$

$|1+x| = \boxed{1+x}$ PARA $-1 \leq x < 0$

II Si $1+x < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow$

$|1+x| = \boxed{-1-x}$ PARA $x < -1$

3.4. $\left|x-|x|\right|-x$

LO DEJO PARA DESARROLLAR.

---

4. Determinar el conjunto solución y graficar.

4.1. $|2x-5| = 7$

I Si $2x - 5 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 5 \Rightarrow \boxed{x \geq \frac{5}{2}}$ DOMINIO $\Rightarrow$

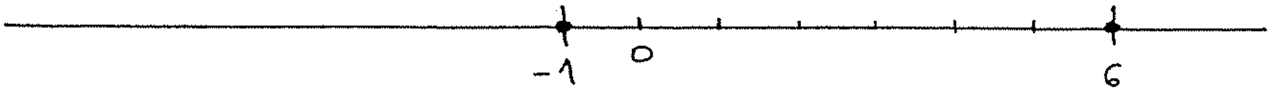
$2x - 5 = 7 \Rightarrow 2x = 7 + 5 \Rightarrow x = \frac{12}{2} \Rightarrow \boxed{x = 6} \in$ DOM.

II Si $2x - 5 < 0 \Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow \boxed{x < \frac{5}{2}}$ DOMINIO

$\Rightarrow -(2x-5) = 7 \Rightarrow -2x+5 = 7 \Rightarrow -2x = 7-5 \Rightarrow$

$-2x = 2 \Rightarrow \boxed{x=-1} \in$ AL DOMINIO

$\Rightarrow$ GRÁFICAMENTE: SON DOS PUNTOS EN LA RECTA REAL

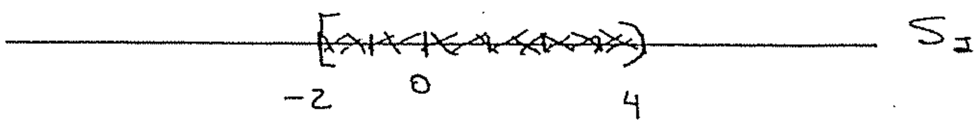


4.2. $|x+2|<6$

(I) Si $x+2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq -2}$ DOMINIO $\Rightarrow$

$x+2 < 6 \Rightarrow \boxed{x<4}$

GRÁFICAMENTE DEBO HACER LA INTERSECCIÓN Y AVERIGUO LA SOLUCIÓN (I) $= S_I$.

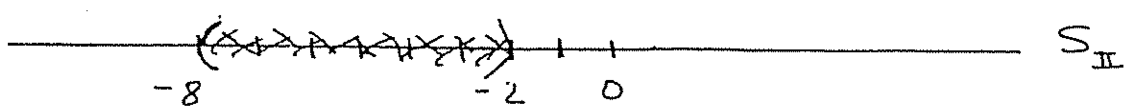


(II) Si $x+2<0 \Rightarrow \boxed{x<-2}$ DOMINIO $\Rightarrow$

$-(x+2) < 6 \Rightarrow -x-2 < 6 \Rightarrow -x < 6+2 \Rightarrow$

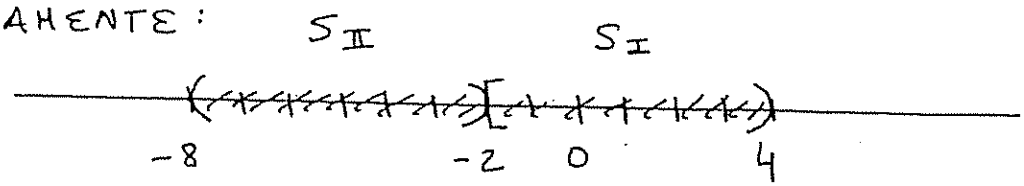
$-x < 8 \Rightarrow \boxed{x > -8} \Rightarrow$

LA INTERSECCIÓN ENTRE EL CONJ. SOLUCIÓN Y EL DOMINIO ES:



LA SOLUCIÓN FINAL ES LA <u>UNIÓN</u> DE S_I y S_{II} $\Rightarrow$

GRÁFICAMENTE:



CONJ. SOLUCIÓN: $S_I \cup S_{II} \Rightarrow \boxed{x \in (-8;4)}$

4.3. $3<|x-5|\leq 7$ 4.4. $1<|x-5|\leq 7$ 4.5. $0<|x-5|\leq 7$

4.3). TENGO LAS 2 OPCIONES PARA EL MÓDULO:

(I) $3 < x-5 \leq 7$ SI $x-5 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq 5}$ DOMINIO

$3+5 < x \leq 7+5 \Rightarrow$

$\boxed{8 < x \leq 12}$ $\in$ AL DOMINIO Y EL INTERVALO ES:

$S_{I} \rightarrow \boxed{x \in (8;12]}$

(II) $3 < -(x-5) \leq 7$ SI $x-5<0 \Rightarrow \boxed{x<5}$ DOMINIO

$3 < -x+5 \leq 7$

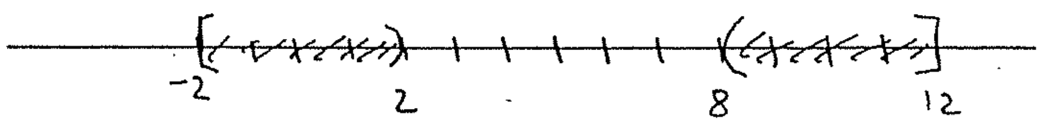
$3-5 < -x \leq 7-5$

$-2 < -x \leq 2 \Rightarrow 2 > x \geq -2 \Rightarrow \boxed{-2 \leq x < 2}$ $\in$ DOM.

$S_{II} \rightarrow \boxed{x \in [-2;2)}$

$S_{TOTAL} = S_{I} \cup S_{II} \Rightarrow S_{T} \rightarrow \boxed{x \in [-2;2) \cup (8;12]}$

GRÁFICAMENTE:



4.4) $1<|x-5|\leq$ TE DOY LA SOLUCIÓN PORQUE LA NECESITAMOS PARA EL EJ. 4.6, PERO DEJO QUE VOS HAGAS EL DESARROLLO: $S \rightarrow \boxed{x \in [-2;4) \cup (6;12]}$

4.5) $0 < |x-5| \le 7$.

(I) $0 < x-5 \le 7$ SI $x-5 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq 5}$ DOMINIO

$0+5 < x \le 7+5 \Rightarrow$

$\boxed{5 < x \le 12}$ $\in$ AL DOMINIO

$S_I \rightarrow x \in (5, 12]$

(II) $0 < -(x-5) \le 7$ SI $x-5 < 0 \Rightarrow \boxed{x < 5}$ DOMINIO

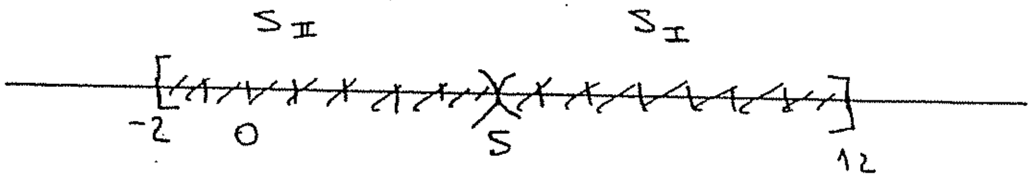
$0 < -x+5 \le 7 \Rightarrow -5 < -x \le 2 \Rightarrow$

$5 > x \geq -2 \Rightarrow \boxed{-2 \le x < 5}$ $\in$ DOMINIO.

$S_{II} \rightarrow x \in [-2; 5) \Rightarrow$

$S_T = S_I \cup S_{II} \rightarrow \boxed{x \in [-2, 5) \cup (5; 12]}$

GRÁFICAMENTE:



4.6. Comparar los resultados 4.3., 4.4. y 4.5. ¿Cuáles serian sus conclusiones?

4.3: $x \in [-2; 2) \cup (8; 12]$

4.4: $x \in [-2; 4) \cup (6; 12]$

4.5: $x \in [-2; 5) \cup (5; 12]$

$|x-5|$ ES LA DISTANCIA ENTRE x Y 5. ESA DISTANCIA ESTÁ ACOTADA POR DIFERENTES $\longrightarrow$ VALORES REALES.

A MEDIDA QUE AUMENTA EL INTERVALO EN EL QUE ESTÁ ACOTADA ESA DISTANCIA, AUMENTA EL INTERVALO SOLUCIÓN.

EN 4.3 AL ESTAR ACOTADA ENTRE CUATRO UNIDADES, TENEMOS LA UNIÓN DE DOS INTERVALOS DE CUATRO UNIDADES (CADA UNO) DE EXTENSIÓN, CON UNA SEPARACIÓN DE SEIS UNIDADES.
EN 4.4 LA DISTANCIA ESTÁ ACOTADA ENTRE 6 UNIDADES $\Rightarrow$ QUEDA LA UNIÓN DE DOS INT. DE 6 UNIDADES C/U, CON UNA DISTANCIA DE DOS UNIDADES ENTRE AMBOS INT.
Y EN EL 4.5, LA DISTANCIA ESTÁ ACOTADA ENTRE 7 UNIDADES, $\Rightarrow$ LA SOLUCIÓN ES DE 14 UNIDADES, SIN EL CENTRO $(x \neq 5)$, YA QUE EL CENTRO ESTÁ EXCLUÍDO DEL INTERVALO, POR SER $0 < |x-5|$

4.7. $|x-1|+|x-2|>1$

TENEMOS DOS MÓDULOS, POR LO TANTO, CUATRO ECUACIONES:

I $\quad |x-1| + |x-2| > 1 \Rightarrow$

$x-1+x-2>1$ SI $x-1 \geq 0 \wedge x-2 \geq 0 \Rightarrow$

$x \geq 1 \wedge \boxed{x \geq 2}$ DOMINIO

$2x-3>1 \Rightarrow$

$2x > 4 \Rightarrow \boxed{x>2}$ $\in$ DOMINIO $\Rightarrow \boxed{x \in (2; +\infty)}$

II $\quad -(x-1)+x-2>1$ SI $x-1<0 \wedge x-2 \geq 0 \Rightarrow$

$\underbrace{x<1 \wedge x \geq 2}_{\text{DOMINIO} = \emptyset} \Rightarrow$ NO HAY SOLUCIÓN

III $\quad x-1+(-(x-2))>1$ SI $x-1 \geq 0 \wedge x-2<0 \Rightarrow$

$x \geq 1 \wedge x<2 \Rightarrow$

$x-1-x+2>1$ $\qquad \boxed{1 \leq x < 2}$ DOMINIO

$-1+2>1 \Rightarrow \boxed{1>1}$ ABSURDO $\Rightarrow$ NO HAY SOLUCIÓN

IV $\quad -(x-1)-(x-2)>1$ SI $x-1<0 \wedge x-2<0 \Rightarrow$

$x<1 \wedge x<2 \Rightarrow$

$-x+1-x+2>1$ $\qquad \boxed{x<1}$ DOMINIO

$-2x+1>1$

$\Rightarrow \quad -2x > 0 \Rightarrow$

$\boxed{x < 0}$ ε DOMINIO $\Rightarrow \boxed{x \in (-\infty ; 0)}$

$S_T = S_I \cup S_{IV} \rightarrow \boxed{x \in (-\infty ; 0) \cup (2 ; +\infty)}$

4.8. $|x-1| + |x+1| < 2$

$\nexists x \,/\, |x-1| + |x+1| < 2 \Rightarrow S_T = \phi$

TE DEJO QUE HAGAS EL DESARROLLO.

---

5. Demostrar: $\forall \varepsilon > 0 \,:\, 0 \leq x \leq \varepsilon \Rightarrow x = 0$

ε ES UN INFINITESIMAL, ES DECIR, UN NÚMERO MUY PEQUEÑO EN UN ENTORNO DE x.

SUPONGAMOS QUE $x \neq 0 \Rightarrow$

I) SI $x < 0 \Rightarrow x - \varepsilon \leq 0$ PERO ES <u>ABSURDO</u> PORQUE PARTIMOS DE $x \geq 0$ (HIPÓTESIS).

II) SI $x > 0 \Rightarrow x - \varepsilon \leq 0$, PERO $x - \varepsilon$ NO PUEDE SER MENOR QUE CERO PORQUE $\varepsilon \rightarrow 0$ ("TIENDE A CERO") POR SER INFINITESIMAL. $\Rightarrow$ x NO PUEDE SER MAYOR QUE CERO $\Rightarrow$ DE I $\wedge$ II $\boxed{x = 0}$

---

6. Probar:

6.1. $|a+b| \leq |a| + |b|$

6.2. $|a-b| \geq |a| - |b|$

6.1) Si $a + b \geq 0 \Rightarrow$

$|a+b| = a + b \Rightarrow$ Si $a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow$

$|a+b| = a + b = |a| + |b|$ (1)

Si $a \geq 0 \wedge b < 0 \Rightarrow$

$|a+b| = a + b < |a| + |b|$ (2)

Si $a<0 \wedge b\geq 0 \Rightarrow$

$|a+b| = a+b < |a|+|b|$ (3)

DE (1) (2) Y (3) $\Rightarrow \boxed{|a+b| \leq |a|+|b|}$ PARA $a+b\geq 0$

Si $a+b<0 \Rightarrow$

$|a+b| = -(a+b) = -a+(-b) \leq |-a|+|-b| =$

$= |-1|\,|a| + |-1|\,|b| \rightarrow$

$\boxed{|a+b| \leq |a|+|b|}$ C.S.Q.D.

6.2) $|a-b| \geq |a|-|b|$

USANDO COMO MODELO LA DEMOSTRACIÓN ANTERIOR TE DEJO PARA HACER ESTA DEMOSTRACIÓN.

---

7. Demostrar: $|x-a|<\varepsilon/2 \;\wedge\; |y-b|<\varepsilon/2 \;\Rightarrow\; |(x+y)-(a+b)|<\varepsilon$

SUMO AMBAS EXPRESIONES DE LA HIPÓTESIS $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rl} & |x-a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ + & |y-b| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \hline & |x-a|+|y-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \end{array}$$

$|x-a|+|y-b| < \varepsilon$. POR EJERCICIO (6.1) SABEMOS QUE $|x-a|+|y-b| \geq |x-a+y-b| \rightarrow$ POR DESIGUALDAD TRIANGULAR $\Rightarrow$

$$|x-a+y-b| \leq |x-a|+|y-b| \Rightarrow$$

SI REEMPLAZAMOS LA EXPRESIÓN $|x-a|+|y-b|$ POR ALGO AÚN MENOR $\Rightarrow$ SIGUE VALIENDO LA DESIGUALDAD.

$\Rightarrow$ REEMPLAZO, Y QUEDA:

$|x - a + y - b| < \varepsilon \Rightarrow$ REAGRUPO $\Rightarrow$

$\boxed{|(x+y) - (a+b)| < \varepsilon}$ c.s.q.d.

---

8. Analizar la validez del siguiente desarrollo, si dada la desigualdad se debe hallar para qué valores de n se cumple:

$$\varepsilon > 0\,;\, n \in N \ \wedge\ \left|\frac{2n+3}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2n+3}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6n+9-6n-4}{3\,(3n+2)}\right| = \left|\frac{5}{3\,(3n+2)}\right| <$$

$$< \left|\frac{9}{3\,(3n+2)}\right| = \left|\frac{3}{(3n+2)}\right| < \left|\frac{3}{3\,n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

luego dado $\left|\frac{2n+3}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$ probamos que $\left|\frac{2n+3}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{n}$ si se cumple $\frac{1}{n} \le \varepsilon \Rightarrow n \ge \frac{1}{\varepsilon}$

8.1. Realizar un desarrollo análogo al anterior, en los siguientes casos:

8.1.1. $\varepsilon > 0; n \in N \ \wedge\ \left|\frac{n-17}{n+5} - 1\right| < \varepsilon$ para obtener $n \ge \frac{22}{\varepsilon}$

SON EJERCICIOS PREVIOS A LA DEFINICIÓN DE LÍMITE QUE NOS VAN PERMITIENDO CONSTRUIR ESE CONCEPTO.

$$\left|\frac{m-17}{m+5} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{m-17}{m+5} - 1\right| =$$

$$= \left|\frac{m-17-m-5}{m+5}\right| = \left|\frac{-22}{m+5}\right| = \left|\frac{22}{m+5}\right| <$$

$$\left|\frac{22}{m}\right| = \frac{22}{m}$$ PORQUE $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m > 0$.

QUEDÓ: $\frac{22}{m} < \varepsilon \Rightarrow \frac{22}{\varepsilon} \le m \Rightarrow \boxed{m \ge \frac{22}{\varepsilon}}$

SE CONSERVA $<$ PORQUE $\varepsilon > 0$.

8.1.2. $\varepsilon>0; n\in N \wedge \left|\frac{|n-8|}{2n+3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ para obtener $n\geq \max\left(8;\frac{5}{\varepsilon}\right)$

PRIMERO ANALICEMOS QUÉ SUCEDE CON $|m-8|$

SI $0<m<8 \Rightarrow m-8<0 \Rightarrow$

$|m-8| = -(m-8) \Rightarrow$

$$\left|\frac{-(m-8)}{2m+3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-m+8}{2m+3}-\frac{1}{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{-2m+16-2m-3}{2(2m+3)}\right| = \left|\frac{-4m+13}{2(2m+3)}\right| = \left|\frac{-1(4m-13)}{2(2m+3)}\right| =$$

$$= \left|\frac{4m-13}{2(2m+3)}\right| < \left|\frac{4m-12}{2(2m+3)}\right| = \left|\frac{4(m-3)}{2(2m+3)}\right| <$$

$$\left|\frac{2m}{2m+3}\right| < \left|\frac{2m}{2m}\right| < 1$$ ALGO OBVIO, YA QUE $\varepsilon << 1$

$\Rightarrow$ TRABAJAMOS SÓLO CON $m-8\geq 0 \Rightarrow |m-8| = m-8 \Rightarrow$

$\boxed{m\geq 8}$ (1)

$$\left|\frac{m-8}{2m-3}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2m-16-2m-3}{2(2m+3)}\right| = \left|\frac{-19}{4m+6}\right| =$$

$$= \left|\frac{19}{4m+6}\right| < \left|\frac{20}{4m+6}\right| < \left|\frac{20}{4m}\right| = \left|\frac{5}{m}\right| = \frac{5}{m} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\varepsilon} \leq m \Rightarrow \boxed{m\geq \frac{5}{\varepsilon}}$$ (2)

DE 1 Y 2 TENEMOS QUE: $m \geq \text{máx}\left(8; \frac{5}{\varepsilon}\right)$

---

9. Determinar el conjunto de números reales, tales que:

9.1. su cuadrado es menor que 2.

$x^2 < 2 \Rightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{2} \Rightarrow$

$|x| < \sqrt{2} \Rightarrow$ SEGÚN DEF. DE MÓDULO:

I $\boxed{x < \sqrt{2}}$ SI $\boxed{x \geq 0} \rightarrow$ DOMINIO $\Rightarrow S_I \rightarrow x \in [0; \sqrt{2})$

II $-x < \sqrt{2}$ SI $\boxed{x < 0} \rightarrow$ DOMINIO $\Rightarrow$

$\boxed{x > -\sqrt{2}} \in$ DOM. $\Rightarrow S_{II} \rightarrow x \in (-\sqrt{2}; 0)$

$-\sqrt{2}$ 0 $\sqrt{2}$ $S_I \cup S_{II}$

$S_T = S_I \cup S_{II} \Rightarrow \boxed{x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})}$ SON LOS REALES QUE CUMPLEN CON 9.1.

9.2. su distancia a -5 es menor que 1.

$|x - (-5)| < 1 \Rightarrow |x + 5| < 1 \Rightarrow$

I $x + 5 < 1$ SI $x + 5 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq -5}$ DOMINIO

$\boxed{x < -4} \in$ AL DOMINIO

II $-(x+5) < 1$ SI $x + 5 < 0 \Rightarrow \boxed{x < -5}$ DOMINIO

$x + 5 > -1 \Rightarrow \boxed{x > -6}$

$S_I \rightarrow x \in [-5; -4)$ $S_{II} \rightarrow x \in (-6; -5) \rightarrow$

$S_T = S_I \cup S_{II} \Rightarrow \boxed{x \in (-6; -4)}$

---

10. Hallar un entorno con centro en el origen que contenga al intervalo (-2 , 1); ídem con centro en ½ y que contenga al intervalo (-1 ; 3].

1ERO PIDEN UN ENTORNO CON CENTRO EN EL ORIGEN QUE CONTENGA A $\rightarrow x \in (-2; 1) \Rightarrow$ UNO POSIBLE PUEDE SER:

$|x| < 2 \Rightarrow$

I) $x < 2$ si $x \geq 0 \Rightarrow x \in [0;2) \rightarrow S_I$

II) $-x < 2$ si $x < 0 \Rightarrow$

$x > -2$ si $x < 0 \Rightarrow x \in (-2;0) \rightarrow S_{II}$

$S_T = S_I \cup S_{II} \Rightarrow \boxed{x \in (-2;2)}$ CONTIENE AL INTERVALO $(-2;1)$

ÍDEM CON CENTRO EN $\frac{1}{2}$ QUE CONTENGA AL INTERVALO $\rightarrow (-1;3]$. TE LO DEJO PARA PENSAR Y DESARROLLAR

$\rightarrow$ PUEDE SER EL: $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{5}{2}$

---

11. Hallar los pares ordenados (a, b) sabiendo que:

11.1. $(b^2 ; 2a - 3b) = (4, 6)$ 11.2. $\left(\frac{1}{a}; 3\right) = \left(\frac{1}{a-b}; \sqrt{a+b}\right)$ con $a \neq b \wedge a, b \in \Re^+$

11.1) QUEDA UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS:

$$\begin{cases} b^2 = 4 & \text{I} \\ 2a - 3b = 6 & \text{II} \end{cases} \Rightarrow$$

DE I SABEMOS QUE: $b^2 = 4 \Rightarrow |b| = \sqrt{4} \Rightarrow$

$|b| = 2 \Rightarrow \boxed{b_1 = 2}$ y $\boxed{b_2 = -2}$

EN II SUSTITUÍMOS b POR AMBOS RESULTADOS:

$\Rightarrow 2a_1 - 3b_1 = 6 \Rightarrow 2a_1 - 3.2 = 6 \Rightarrow 2a_1 - 6 = 6 \Rightarrow$

$2a_1 = 6 + 6 \Rightarrow 2a_1 = 12 \Rightarrow \boxed{a_1 = 6}$

$2a_2 - 3b_2 = 6 \Rightarrow 2a_2 - 3(-2) = 6 \Rightarrow 2a_2 + 6 = 6 \Rightarrow$

$2a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$

LOS PARES PEDIDOS SON: $\boxed{\begin{array}{l}(a_1 b_1) = (6;2) \\ (a_2 b_2) = (0;-2)\end{array}}$

11.2) $\left(\frac{1}{a}; 3\right) = \left(\frac{1}{a-b}; \sqrt{a+b}\right)$ CON $a \neq b \wedge a, b \in \mathbb{R}^+$.

PLANTEO EL SISTEMA:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{1}{a-b} & \text{I} \\ 3 = \sqrt{a+b} & \text{II} \end{cases} \Rightarrow \text{DE I } \frac{1}{a} = \frac{1}{a-b} \Rightarrow$$

$$a - b = a \Rightarrow$$

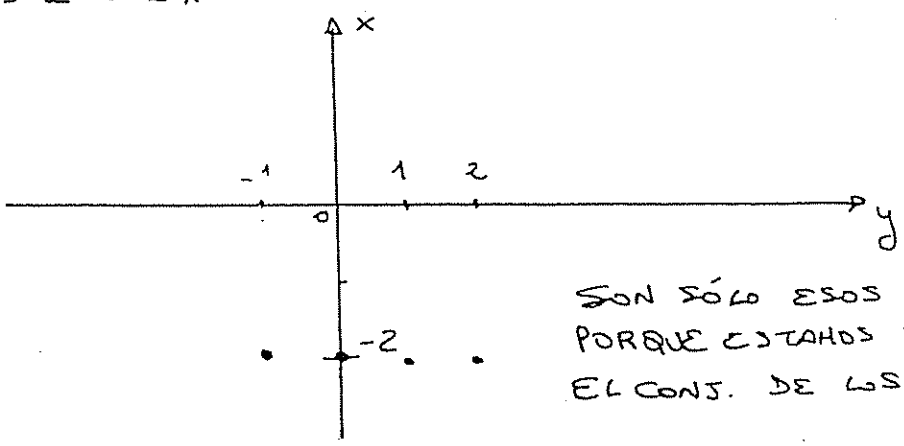
$$b = 0 \notin \mathbb{R}^+$$

$\Rightarrow$ COMO I NO TIENE SOLUCIÓN, EL SISTEMA NO TIENE SOLUCIÓN.

12. Representar en ejes cartesianos los subconjuntos de M:

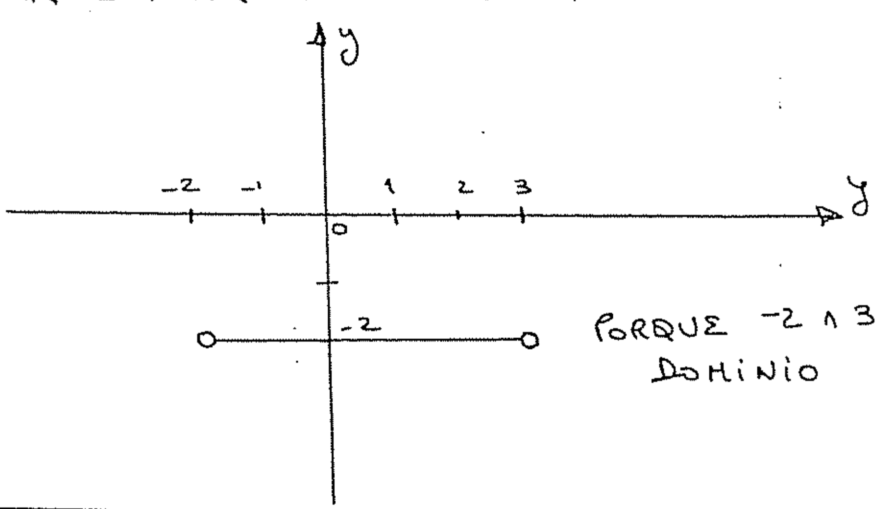
12.1. $A = \{(x, y) / -2 < x < 3 \wedge y = -2\}$ si $a-1)$ $M = Z^2$ $a-2)$ $M = \Re^2$

a-1) $M = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



SON SÓLO ESOS CUATRO PUNTOS PORQUE ESTAMOS TRABAJANDO EN EL CONJ. DE LOS ENTEROS.

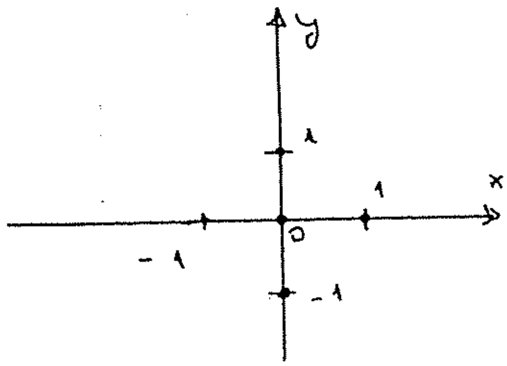
a-2) $M = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow x \in (-2; 3)$



PORQUE $-2 \wedge 3 \notin$ AL DOMINIO

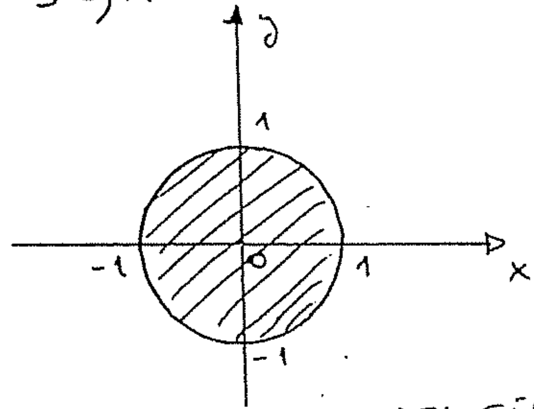
12.2. $B = \{(x, y) / |x| \leq 1\}$ si $b-1)\ M = Z^2 \quad b-2)\ M = \Re^2$

b-1) $M = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Rightarrow$



SON SÓLO ESOS CINCO PUNTOS PORQUE ESTAMOS GRAFICANDO CON DOMINIO Y CODOM. IGUAL A $\mathbb{Z}$ (ENTEROS).

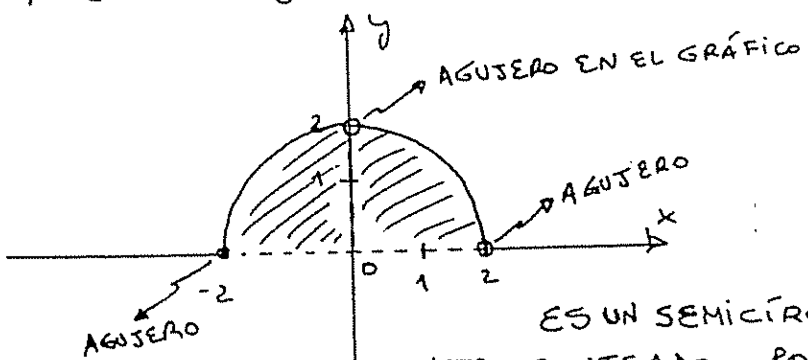
b-2) $M = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow$



TODOS LOS REALES DEL CÍRCULO CUYO RADIO ES $\leq$ A UNO(1) SON LOS QUE CUMPLEN QUE LA DISTANCIA AL ORIGEN ES MENOR O IGUAL A UNO.

12.3. $C = \{(x, y) / |x| \leq 2 \wedge |y-1| < 1\}$ con $M = \Re^2$

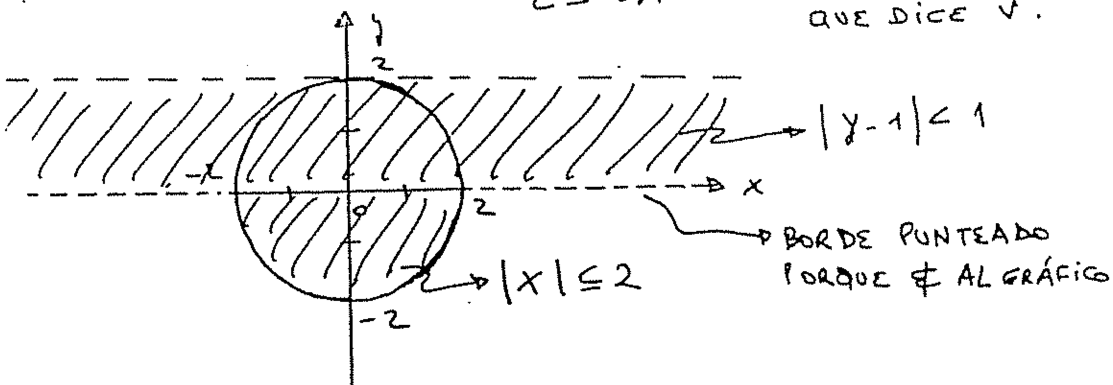
$x \in [-2; 2] \wedge y \in (0; 2) \Rightarrow$ GRAFICO LA INTERSECCIÓN



ES UN SEMICÍRCULO CON EL DIÁMETRO PUNTEADO PORQUE $y > 0 \wedge y < 2$, PERO $y \neq 0 \wedge y \neq 2$.

12.4. $D = \{(x, y) / |x| \leq 2 \vee |y-1| < 1\}$ con $M = \Re^2$

ES LA UNIÓN DE AMBOS, PORQUE DICE $\vee$.



---

13. Determinar si las siguientes relaciones son funciones en $\Re^2$.

13.1. $y = \sqrt{|x|}$ 13.2. $y = \dfrac{1}{|x|}$ 13.3. $(y+1)^2 = (x-3)^2$

UNA FUNCIÓN ES: UNA RELACIÓN ENTRE DOS CONJUNTOS, DONDE A CADA ELEMENTO DEL PRIMER CONJUNTO, O DOMINIO (EN ESTE CASO: $\mathbb{R}$), LE CORRESPONDE UNO Y SÓLO UN ELEMENTO DEL SEGUNDO CONJ. O CODOMINIO (EN ESTE CASO: $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$

SE DEBE CUMPLIR LA EXISTENCIA Y LA UNICIDAD.

13.1) $y = \sqrt{|x|}$

EN ESTE CASO A CADA VALOR DE $x \neq 0$ LE CORRESPONDEN DOS VALORES DE y. EJ. $\sqrt{|9|} = 3 \vee \sqrt{9} = -3 \Rightarrow$

NO SE CUMPLE LA UNICIDAD $\Rightarrow$ $\boxed{\text{NO ES FUNCIÓN}}$

13.2) $y = \dfrac{1}{|x|}$ $\rightarrow$ NO SE CUMPLE LA EXISTENCIA PORQUE $x = 0$ NO TIENE IMAGEN $\Rightarrow$ SI $x = 0 \Rightarrow \nexists\, y / y = \dfrac{1}{|x|}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{NO ES FUNCIÓN}}$

13.3) $(y+1)^2 = (x-3)^2 \Rightarrow$

$\sqrt{(y+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2} \Rightarrow$

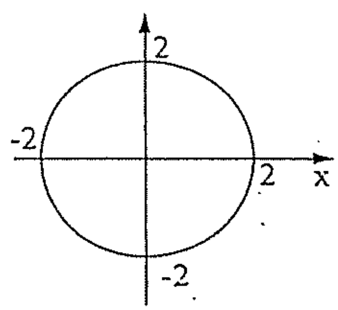
$|y+1| = |x-3| \Rightarrow$

NO SE CUMPLE LA UNICIDAD YA QUE AL MISMO VALOR DE x LE CORRESPONDEN DOS IMÁGENES $\Rightarrow$ $\boxed{\text{NO ES FUNCIÓN}}$

(BUSCÁ UN CONTRAEJEMPLO).

---

14. Dado el siguiente gráfico:



Analizar, en cada caso, si es función y clasificar en inyectiva, suryectiva y/o biyectiva, si es posible.

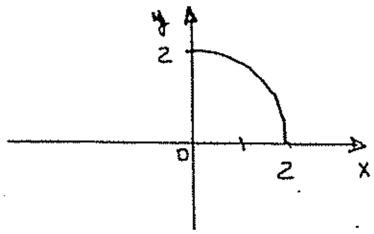
14.1. $f : \Re \rightarrow \Re$

NO ES FUNCIÓN PORQUE NO SE CUMPLE LA EXISTENCIA NI LA UNICIDAD.

Ej: $f(0) = 2 \wedge f(0) = -2 \rightarrow$ NO UNICIDAD.

$\nexists f(3) \rightarrow$ NO EXISTENCIA

14.2. $g : [0, 2] \rightarrow [-2 ; 2]$



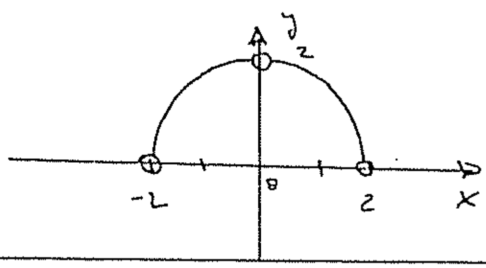
ES FUNCIÓN PORQUE SE CUMPLE LA EXISTENCIA YA QUE TODOS LOS VALORES DEL DOMINIO ($x \in [0, 2]$) LE CORRESPONDE UNA IMAGEN. Y LA UNICIDAD PORQUE CADA IMAGEN ES ÚNICA.

ES INYECTIVA PORQUE SI $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

NO ES SURYECTIVA PORQUE Img ES $\text{Img } g = [0 ; 2] \wedge \text{Cod } g = [-2 ; 2]$

PARA QUE SEA SURYECTIVA TIENE QUE SER $\text{Cod } g = \text{Img } g$.
POR LO TANTO NO ES BIYECTIVA $\rightarrow$ PORQUE PARA SER BIYECTIVA TIENE QUE SER INYECTIVA Y SURYECTIVA.

14.3. $h : [-2, 2] \rightarrow (0, 2)$

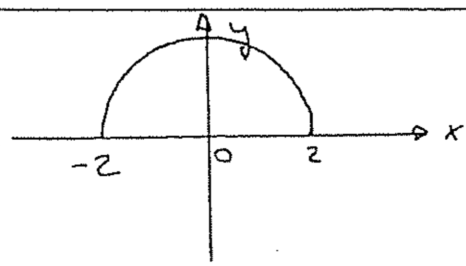


NO ES FUNCIÓN PORQUE NO SE CUMPLE LA EXISTENCIA YA QUE, $\nexists h(2)$; $\nexists h(0)$ Y $\nexists h(-2)$

14.4. $t : [0, 2] \rightarrow \Re_0^+$

GRÁFICO ÍDEM g. (14.2) $\Rightarrow$ ES FUNCIÓN - ES INYECTIVA PERO NO ES SURYECTIVA PORQUE $\text{Im } t \neq \text{Cod } t$.

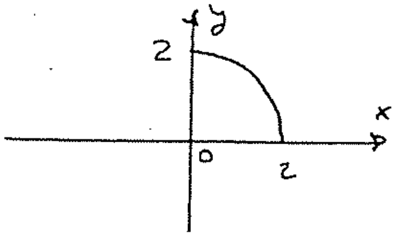
14.5. $r : [-2, 2] \rightarrow [0, 2]$



ES FUNCIÓN.
NO ES INYECTIVA PORQUE $r(2) = r(-2) \wedge 2 \neq -2$

ES SURYECTIVA PORQUE $\text{Im}\, r = \text{Cod}\, r$.

14.6. $Z : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$



ES FUNCIÓN. Y ES BIYECTIVA POR SER INYECTIVA PORQUE SI $Z(x_1) = Z(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Y POR SER SURYECTIVA PORQUE $\text{Im}\, Z = \text{Cod}\, Z$

15. Hallar el dominio:

15.1. $y = \frac{x-1}{|x|} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

DOMINIO: ES EL CONJ. FORMADO POR TODOS LOS VALORES DE X (CON $x \in \mathbb{R}$) QUE LA FUNCIÓN PUEDE TOMAR.

CONDICIONES PARA X $\Rightarrow$

$$\underbrace{|x| \neq 0}_{\text{I}} \wedge \underbrace{4 - x^2 > 0}_{\text{II}} \Rightarrow$$

DE I $|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge$ DE II $4 - x^2 > 0 \Rightarrow 4 > x^2 \Rightarrow$

$x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow$

$-2 < x < 2 \Rightarrow$ HACIENDO

LA INTERSECCIÓN ENTRE I Y II QUEDA:

$\boxed{x \in (-2; 0) \cup (0; 2)}$ → DOMINIO DE LA FUNCIÓN.

15.2. $y = \frac{x^3 + 5x^2 - 6x}{x\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

CONDICIONES PARA X:

$x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 1} \neq 0 \Rightarrow$

$x \neq 0 \wedge \sqrt[3]{x^2 - 1} \neq 0 \Rightarrow$

$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow |x| \neq 1 \Rightarrow$

$x \neq 1 \wedge x \neq -1 \Rightarrow$

$\boxed{\text{DOM} = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1\}}$ $\underbrace{\text{Dom} = \mathbb{R} - \{0; -1; 1\}}_{\text{OTRA FORMA}}$

15.3. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

CONDICIONES : $x-1 \geq 0 \wedge x+1 > 0 \Rightarrow$

$x \geq 1 \quad \wedge \quad x > -1 \Rightarrow$ LA INTERSECCIÓN DE AMBOS INTERVALOS ES: $\boxed{x \geq 1} \Rightarrow$

$\text{DOM} = \mathbb{R} \geq 1$ ó

$$\boxed{\text{DOM} = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 1\}}$$

15.4. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ CONDICIONES : $\frac{x-1}{x+1} \geq 0 \wedge x+1 \neq 0 \Rightarrow$
$x \neq -1 \Rightarrow$

PARA QUE EL COCIENTE SEA POSITIVO TENEMOS DOS POSIBILIDADES: (INCLUYENDO $x \neq -1$)

$x-1 \geq 0 \wedge x+1 > 0 \quad \vee \quad x-1 \leq 0 \wedge x+1 < 0$

$x \geq 1 \wedge x > -1 \qquad x \leq 1 \wedge x < -1$

$\boxed{x \geq 1} \qquad \boxed{x < -1}$

$\text{DOM} \rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty) \Rightarrow$

$$\boxed{\text{DOM} = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x < -1 \vee x \geq 1\}}$$

Comparar lo obtenido en los dos últimos ejercicios.

EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN (15.4) ES MÁS AMPLIO QUE EL DOMINIO DE LA (15.3) PORQUE LA RADICACIÓN ES DISTRIBUTIVA RESPECTO DEL COCIENTE (Y DEL PRODUCTO), PERO SÓLO PONIENDO LAS BARRAS DE MÓDULO $\Rightarrow$ AL NO ESTAR EL MÓDULO, EL DOMINIO QUEDA RESTRINGIDO.

---

16. Determinar el conjunto imagen, los ceros y signos de la función:

16.1. $y = x^2 - 4x + 7$

EMPECEMOS POR LOS CEROS, YA QUE, TENIENDO LOS CEROS Y EL VÉRTICE (EN ESTE CASO, POR SER UNA PARÁBOLA), LUEGO ES MÁS FÁCIL HALLAR LA IMAGEN.

$y = x^2 - 4x + 7 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow$

CEROS:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.7}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-28}}{2} \notin \mathbb{R} \Rightarrow$$

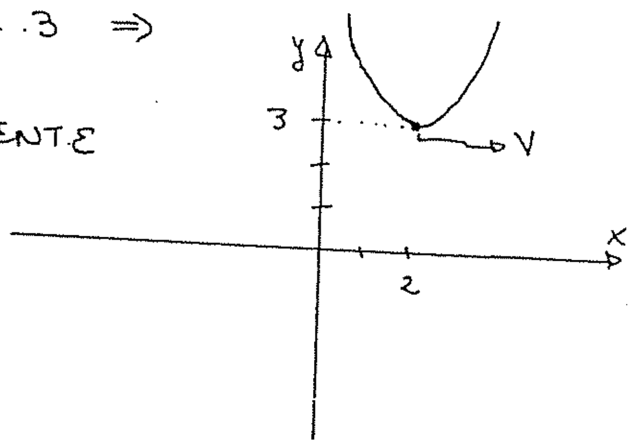
ES UNA PARÁBOLA CON RAÍCES (O CEROS) COMPLEJAS $\Rightarrow$

VÉRTICE:

$$V_x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2} = 2 \Rightarrow$$

$$V_y = 2^2 - 4.2 + 7 = 3 \Rightarrow$$

$\boxed{V = (2;3)} \Rightarrow$ GRÁFICAMENTE



CONJ. IMAGEN:

$$\boxed{Im = \{ y / y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 3 \}}$$

SIGNOS: COMO $a = 1 \Rightarrow a > 0$ ES UNA PARÁBOLA DE CONCAVIDAD POSITIVA $\Rightarrow$ SE TRATA DE UNA FUNCIÓN POSITIVA $\forall x \in \mathbb{R}$.

SI LO QUERÉS HACER ANALÍTICAMENTE $\rightarrow$ HAY QUE COMPLETAR CUADRADOS Y ANALIZAR CUANDO: ES > 0 Y CUANDO < 0.

16.2. $y = -3 - x^2 + 4x \Rightarrow y = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow$

CEROS:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.(-1)(-3)}}{2.(-1)} \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} \begin{cases} \boxed{x_1 = 1} \\ \boxed{x_2 = 3} \end{cases}$$

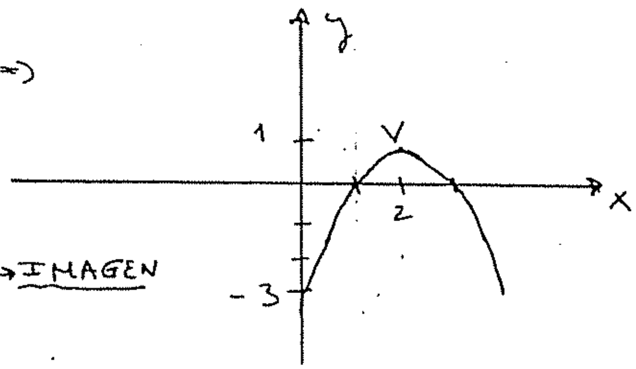
$\Rightarrow$ CEROS EN: $(x_1 y_1) = (1; 0)$
$(x_2 y_2) = (3; 0)$

VÉRTICE:

$$V_x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \Rightarrow$$

$$V_y = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{V = (2;1)} \Rightarrow$$



$f(x) \leq 1 \; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\boxed{Im = \{ y / y \in \mathbb{R} \wedge y \leq 1 \}} \rightarrow$ IMAGEN

SIGNOS

si $1 < x < 3 \Rightarrow f(x)$ ES POSITIVA $\Rightarrow$

$\boxed{x \in (1;3)} \rightarrow$ POSITIVA

Si $\boxed{x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)} \Rightarrow f(x)$ ES NEGATIVA

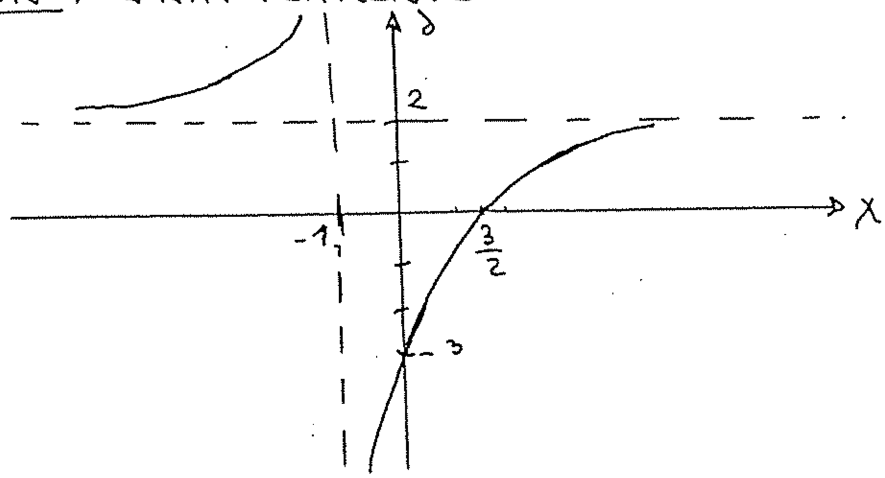
16.3. $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$

CEROS: $y = 0 \Rightarrow \dfrac{2x-3}{x+1} = 0 \Rightarrow$ Si $x \neq -1 \Rightarrow$

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

CERO EN $\boxed{(x, y) = \left(\frac{3}{2}; 0\right)}$

IMAGEN: GRÁFICAMENTE ES UNA HIPÉRBOLA:



VEAMOS QUÉ SUCEDE SI INTENTAMOS HACER

$$y = 2 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} = 2 \Rightarrow$$

$$2x - 3 = 2(x+1) \Rightarrow$$

$$2x - 3 = 2x + 2 \Rightarrow 2x - 2x = 5 \Rightarrow$$

$\boxed{0 = 5}$ ABSURDO $\Rightarrow y \neq 2$

$\Rightarrow$ IMAGEN ES $y \in \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \left\{ y / y \in \mathbb{R} \wedge y \neq 2 \right\}}$$

<u>SIGNOS</u>: ANALÍTICAMENTE:

$$\frac{2x-3}{x+1} > 0 \Rightarrow \text{I } 2x-3>0 \wedge x+1>0 \vee \text{ II } 2x-3<0 \wedge x+1<0 \Rightarrow$$

I $2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2} \wedge x > -1 \Rightarrow \boxed{x > \frac{3}{2}}$ $\Rightarrow$

II $2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \wedge x < -1 \Rightarrow \boxed{x < -1}$

Si $\boxed{x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)}$ $\Rightarrow f(x)$ ES <u>POSITIVA</u>

HACIENDO $\frac{2x-3}{x+1} < 0$ LLEGAMOS A QUE:

Si $\boxed{x \in \left(-1; \frac{3}{2}\right)}$ $\Rightarrow f(x)$ ES <u>NEGATIVA</u>

16.4. $y = \dfrac{sg\,[(x+2)(x-3)]}{x-1}$ (sg: signo)

UNA VEZ ANALIZADO $sg[(x+2)(x-3)]$ LLEGAMOS A LA SIG. FUNCIÓN PARTIDA:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < -2 \vee x > 3 \\ \dfrac{-1}{x-1} & \text{si } -2 < x < 3 \text{ con } x \neq 1 \end{cases}$$

ESTA FUNCIÓN <u>NO</u> TIENE <u>CEROS</u>.

<u>IMAGEN</u>: Si $y = 0 \Rightarrow$

$$y \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} = 0 \Rightarrow \text{Si } x \neq 1 \Rightarrow 1 = (x-1).0 \Rightarrow \boxed{1=0} \text{ ABSURDO} \\ \dfrac{-1}{x-1} = 0 \Rightarrow \boxed{-1=0} \text{ ABSURDO} \end{cases} \Rightarrow y \neq 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{Im = \left\{ y/_{y} \in \mathbb{R} \wedge y \neq 0 \right\}} \qquad Im = \mathbb{R} - \{0\}$$

<u>SIGNOS</u>: TE DEJO PARA HACER EL DESARROLLO. TE DOY LA RESPUESTA:

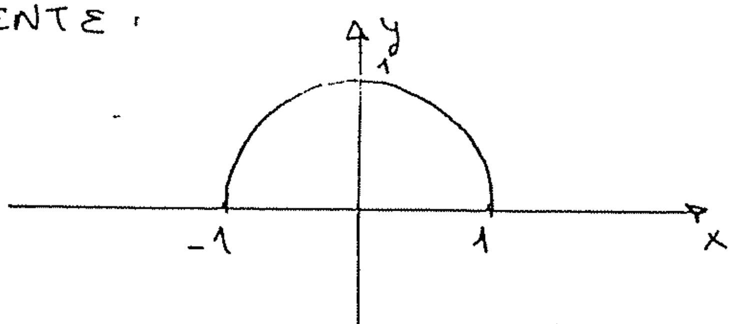
Si $\boxed{x \in (-\infty; -2) \cup (1; 3)} \Rightarrow f(x)$ ES <u>NEGATIVA</u>

Si $\boxed{x \in (-2; 1) \cup (3; +\infty)} \Rightarrow f(x)$ ES <u>POSITIVA</u>.

16.5. $x^2+y^2 \wedge y \geq 0$ EN ESTE EJERCICIO HAY UN ERROR DE TIPEO, YA QUE DEBERÍA DECIR $x^2+y^2 = r^2 \wedge y \geq 0$ DONDE r ES EL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA, QUE EN ESTE CASO ES UNA SEMICIRCUNFERENCIA PORQUE $y \geq 0$

SUPONGAMOS $r = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \wedge y \geq 0 \Rightarrow$

GRÁFICAMENTE:



TE DEJO DE TAREA DESPEJAR 'y' (LA FUNCIÓN) Y HALLAR LOS CEROS, LA IMAGEN Y LOS SIGNOS.

17. Para las funciones del ejercicio anterior, determinar cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximos y mínimos del conjunto imagen, si existen.

COTA SUPERIOR: DADO UN SUBCONJUNTO $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$, SE DICE QUE UN NÚMERO REAL $k \in \mathbb{R}$ ES COTA SUPERIOR DE A SI $k \geq a \ \forall a \in A$

COTA INFERIOR: CON LAS MISMAS CONDICIONES DECIMOS QUE m ES COTA INFERIOR DE A SI $m \leq a \ \forall a \in A$.

SUPREMO: ES LA MENOR DE LAS COTAS SUPERIORES

ÍNFIMO: ES LA MAYOR DE LAS COTAS INFERIORES.

EN EL EJ. 16.1 $y \geq 3 \Rightarrow$ ESTE CONJ. TIENE COTA INFERIOR $= \boxed{3}$ (O CUALQUIER NÚMERO MENOR QUE 3) - Y, COMO 3 ES LA MAYOR DE LAS COTAS INFERIORES $\Rightarrow$ TAMBIÉN ES EL ÍNFIMO $= \boxed{3}$ - NO TIENE COTA SUPERIOR NI SUPREMO. EL MÍNIMO DE ESTE CONJ. ES TAMBIÉN EL $\boxed{3}$ - Y NO TIENE MÁXIMO.

EL EJ. 16.2 TIENE COTA SUPERIOR IGUAL A $\boxed{1}$ (O CUALQUIER NÚMERO MAYOR QUE 1). Y TIENE SUPREMO $= \boxed{1}$, DADO QUE ES LA MENOR DE LAS COTAS SUPERIORES - NO TIENE COTA INFERIOR, NI TIENE ÍNFIMO. EL MÁXIMO ES $\boxed{1}$, Y NO TIENE MÍNIMO.

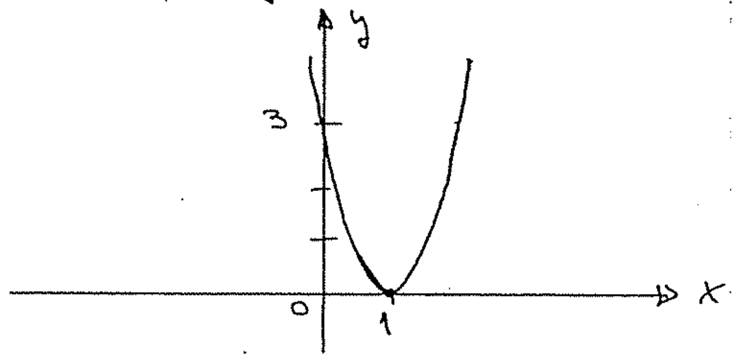
TE DEJO PARA PENSAR Y DESARROLLAR LOS EJS. 16.3 Y 16.4

---

18. Determinar dominio e imagen, tal que exista la función inversa y hallarla.

18.1. $f(x) = 3|x-1|^2$ PARA QUE EXISTA LA INVERSA $\Rightarrow$ LA FUNCIÓN DEBE SER BIYECTIVA $\Rightarrow$ HALLEMOS EL DOMINIO Y LA IMAGEN DE MODO TAL QUE SEA INYECTIVA Y SURYECTIVA. $\Rightarrow$

LA GRÁFICA DE $f(x) = 3(x-1)^2$ ES:



PARA QUE SEA INYECTIVA DEBO ELEGIR $X \leq 1$ Y $X \geq 1 \Rightarrow$
ELIJO $\boxed{X \geq 1} \rightarrow$ DOMINIO $\Rightarrow \boxed{Dom = \mathbb{R} \geq 1}$
PARA QUE SEA SURYECTIVA DEBO HACER $Im f = Cod f \Rightarrow$
$\boxed{Cod = \mathbb{R} \geq 0} \Rightarrow$ DEFINO f:

$f: \mathbb{R} \geq 1 \longrightarrow \mathbb{R}^+_0 \;\big|\; f(x) = 3(x-1)^2 \Rightarrow$ PARA HALLAR
LA INVERSA DEBO DESPEJAR (X) $\Rightarrow$

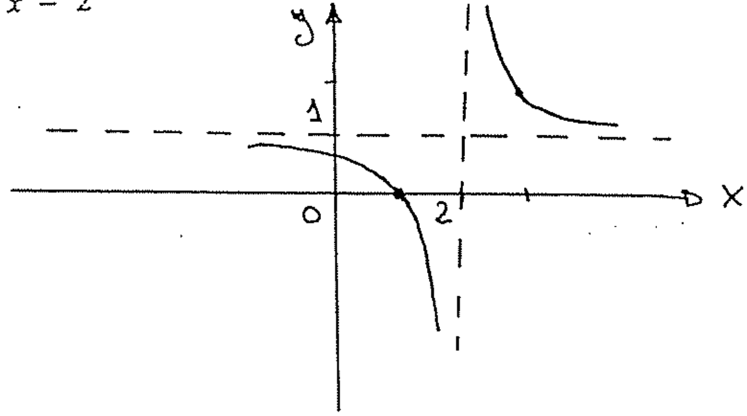
$$y = 3(x-1)^2 \Rightarrow \frac{y}{3} = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{y}{3}} = x - 1 \Rightarrow$$

$X = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{y} + 1 \Rightarrow$ POR CONVENCIÓN DEBO CAMBIARLE EL NOMBRE A LAS VARIABLES.

$y = f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x} + 1 \Rightarrow$ DEFINO $f^{-1}(x) \rightarrow$

$$\boxed{f^{-1}(x): \mathbb{R}^+_0 \longrightarrow \mathbb{R} \geq 1 \;\Big|\; f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x} + 1}$$

18.2. $g(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1$ GRÁFICO:



PARA QUE SEA FUNCIÓN C INYECTIVA TENGO QUE:

$\boxed{DOM = \mathbb{R} - \{2\}}$ $\Rightarrow$

Y PARA QUE SEA SURYECTIVA $\Rightarrow Im = \boxed{Cod = \mathbb{R} - \{1\}}$

DEFINO $\boxed{g: \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\} \;/\; g(x) = \frac{1}{x-2} + 1}$ $\Rightarrow$

HALLO LA INVERSA:

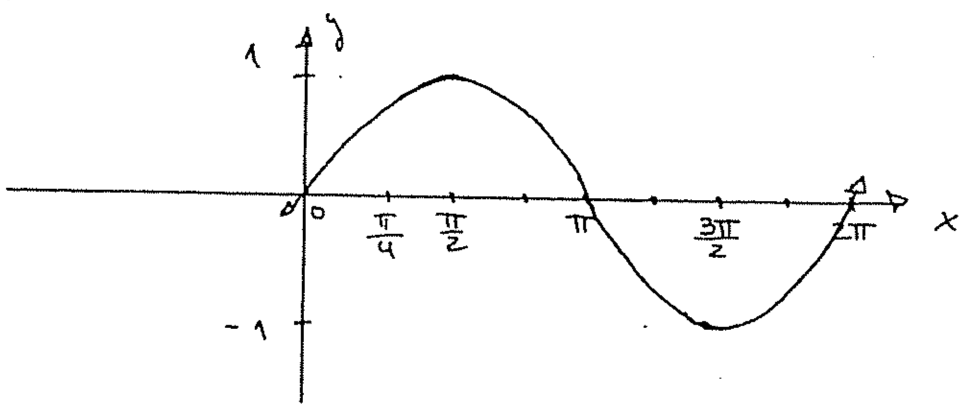
$$y = \frac{1}{x-2} + 1 \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{x-2} \Rightarrow$$

$$x - 2 = \frac{1}{y-1} \Rightarrow x = \frac{1}{y-1} + 2 \Rightarrow \text{DEFINO}$$

$$\boxed{g^{-1}: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\} \;/\; g^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} + 2}$$

18.3. $h(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$ ES MUY SIMILAR A LA ANTERIOR, POR LO TANTO, LO DEJO PARA DESARROLLAR.

18.4. $r(x) = \operatorname{sen} x$



ES UNA FUNCIÓN PERIÓDICA, DE PERIODO $= 2\pi$, QUE OSCILA ENTRE LOS VALORES 1 Y -1 PARA EL CONJ. IMAGEN. $\Rightarrow$
PARA QUE SEA INYECTIVA DEBO ACOTAR A UN SEMIPERÍODO, EL DOMINIO $\Rightarrow$ $x \in [0; \pi)$, YA QUE SI TOMO EL PRIMER PERÍODO COMPLETO EXISTEN VALORES DIF. DE X PARA LOS QUE $r(x_1) = r(x_2) \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow$
ELIJO: $\boxed{DOM = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x < \pi\}}$ $\longrightarrow$ TAMBIÉN SE PUEDE ELEGIR:

$x \in [0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$; EN FIN, EXISTE INFINITOS INTERVALOS QUE SE PUEDEN ELEGIR PARA QUE $f(x)$ SEA INYECTIVA. LUEGO, PARA QUE SEA SURYECTIVA $\rightarrow Im f = Cod f \Rightarrow$ ELIJO:

$\boxed{Cod = \{ y / y \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq y \leq 1 \}} \Rightarrow y \in [0; 1] \Rightarrow$ DEFINO

$\boxed{f: [0; \pi) \rightarrow [0; 1] \;/\; f(x) = \operatorname{sen} x} \Rightarrow$ HALLO LA INVERSA:

$y = \operatorname{sen} x \Rightarrow x = \operatorname{arcsen} y \Rightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow$

$\boxed{f^{-1}: [0; 1] \rightarrow [0; \pi) \;/\; f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x}$

18.5. $f(x) = tg\, x$ TOMANDO COMO EJEMPLO EL EJERCICIO ANTERIOR DEJO ESTE EJ. PARA DESARROLLAR.

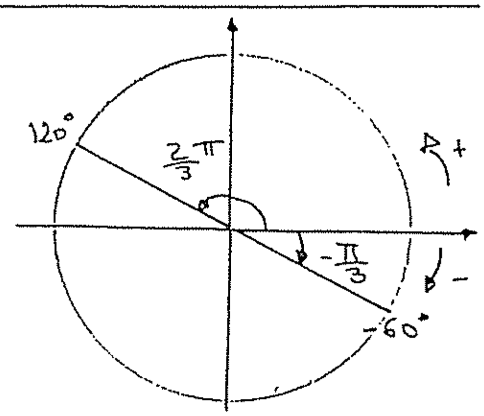
19. Para analizar: tome su calculadora y determine

$tg \frac{2}{3}\pi =$ $\boxed{}$

debió darle: $-\sqrt{3} = -1,7320508 \ldots$; y ahora calcule

$(+ \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) =$ $\boxed{}$

le dio : $\frac{-\pi}{3} = -1,0471976 \ldots$



¿Qué ocurrió? no es cierto que arc tg (tg α) = α, con α en radianes ? ? ? ! ! !

Trate de encontrar una explicación, si no la encuentra, revea el ejercicio 10.

$tg \frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3}$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ EN CALCULADORA.

SUCEDE QUE LA TANGENTE ES UNA FUNCIÓN NEGATIVA EN EL SEGUNDO CUADRANTE, Y EN EL CUARTO CUADR. Y LA CALCULADORA, PARA ARCTGα (ARCSENx, ARCCOSx) TRABAJA EN EL INTERVALO:

$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |x| \leq \frac{\pi}{2}$; MIENTRAS QUE NOSOTROS ESTAMOS TRABAJANDO EN LOS CUATRO CUADRANTES CON $0 \leq x \leq 2\pi$.

POR OTRO LADO, SABEMOS QUE LOS VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, EN VALOR ABSOLUTO, SON LOS MISMOS EN EL

1ª CUADRANTE, QUE EN EL 2º, 3º ó 4º, ES DECIR, QUE LO ÚNICO QUE VARÍA EN EL RESTO DE LOS CUADRANTES (RESPECTO DEL 1º) ES EL SIGNO, PERO NO EL VALOR ABSOLUTO. ASÍ TENEMOS QUE POR EJ: $tg\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -tg\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$

$$\boxed{\left|tg\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right| = \left|-tg\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|}$$

---

20. Determinar analíticamente si las funciones son pares o impares.

20.1. $f(x) = x - 3x^3$

<u>FUNCIÓN PAR</u>: UNA FUNCIÓN ES PAR CUANDO SE CUMPLE:

$$\boxed{f(x) = f(-x)}$$

<u>FUNCIÓN IMPAR</u>: ES IMPAR CUANDO CUMPLE QUE:

$$\boxed{f(x) = -f(-x)}$$

$f(x) = x - 3x^3$ NO ES PAR, PORQUE $x - 3x^3 \neq (-x) - 3(-x)^3$

VEAMOS SI ES IMPAR: $f(x) = -f(-x) \Rightarrow$

$$x - 3x^3 \stackrel{?}{=} -\left((-x) - 3(-x)^3\right) \Rightarrow$$

$$x - 3x^3 = x + 3(-x)^3 \Rightarrow$$

$$\boxed{x - 3x^3 = x - 3x^3} \Rightarrow \underline{\text{ES IMPAR}}.$$

20.2. $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5$

VEAMOS SI ES PAR: $f(x) = f(-x) \Rightarrow$

$$2x^4 + 3x^2 - 5 \stackrel{?}{=} 2(-x)^4 + 3(-x)^2 - 5 \Rightarrow \text{COMO } x^4 = (-x)^4 \wedge x^2 = (-x)^2$$

$$\boxed{2x^4 + 3x^2 - 5 = 2x^4 + 3x^2 - 5} \Rightarrow \underline{\text{ES PAR}}$$

SI ES PAR NO PUEDE SER IMPAR. POR LO TANTO NO SE ANALIZA.

20.3. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ VERIFICAR QUE NO ES PAR NI IMPAR.

20.4. $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$ DONDE $\frac{1-x}{1+x} > 0 \Rightarrow x \in (-1,1)$ PARA QUE SEA FUNCIÓN.

ANALICEMOS SI ES IMPAR:

$$\ln\frac{1-x}{1+x} \overset{?}{=} -\ln\frac{1+x}{1-x}$$ $\Rightarrow$ POR DEF. DE LOGARITMO NATURAL $\Rightarrow$

$$e^{-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow$$ (POR POTENCIA NEGATIVA)

$$\frac{1}{e^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}} = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \boxed{\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow$$

ES IMPAR.

20.5. $f(x) = \begin{cases} 1+x & -1<x<0 \\ 1-x & 0<x<1 \end{cases}$ ESTA FUNCIÓN ES PAR

YA QUE: $1+x = 1-x$ CON $1+x$ SI $-1<x<0$ $\wedge$

$1-x$ SI $-1<-x<0 \Rightarrow$

$1>x>0 \Rightarrow$

$0<x<1$

$\Rightarrow$ QUEDA $1-x$ EN $0<x<1$ (1)

Y $1-x = 1+x$ CON $1-x$ SI $0<x<1 \Rightarrow$

$0<-x<1 \Rightarrow 0>x>-1 \Rightarrow -1<x<0$ (2)

DE (1) $\wedge$ (2) TENEMOS QUE $f(x) = f(-x) \Rightarrow$ ES PAR

20.6. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ TE DEJO PARA DEMOSTRAR QUE ESTA FUNCIÓN ES IMPAR.

21. Si $f(x)=f(-x)\ \forall x$ ¿se mantiene la simetría en los siguientes casos ?

21.1. $g(x)+c$ 21.2. $g(x)=c\,f(x)$ con $c\ \varepsilon\ \Re$

21.1) $g(x)+C$ SABEMOS QUE $C \in \mathbb{R}$, PERO DE $g(x)$ NO SABEMOS NADA, POR LO TANTO NO SE PUEDE AVERIGUAR SI EN ESTE CASO SE MANTIENE (O NO) LA SIMETRÍA.

21.2) $g(x) = C f(x) \Rightarrow g(x) = C f(-x)$ POR DATO $\Rightarrow$

CON $C \neq 0 \Rightarrow C f(x) = C f(-x) \Rightarrow f(x) = f(-x)$ VERDADERO

POR LO TANTO, EN ESTE CASO <u>SÍ</u> SE MANTIENE LA SIMETRÍA. SI $C=0$ NO NECESARIAMENTE SE MANTIENE.

---

22. Idem al ejercicio 21. si $f(x)=-f(-x)\ \forall x$

PARA $g(x) = C f(x) \Rightarrow g(x) = C(-f(-x)) \Rightarrow$

$C f(x) = C(-f(-x)) \Rightarrow$ SI $C \neq 0 \Rightarrow$

$f(x) = -f(-x) \Rightarrow$ SE MANTIENE LA SIMETRÍA - SI $C=0 \Rightarrow$ NO SABEMOS.

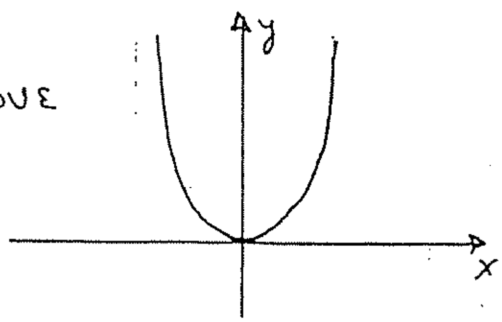
---

23. Si $f(x)=f(-x)$ ¿puede ser inyectiva? Justificar. ¿La recíproca es válida?

SI $f(x) = f(-x)$ ES UNA <u>FUNCIÓN PAR</u>. POR LO TANTO NUNCA PUEDE SER INYECTIVA, DADO QUE UNA FUNCIÓN PAR SIEMPRE ES SIMÉTRICA RESPECTO DE UN EJE (DE SIMETRÍA) COMO POR EJ: $f(x) = x^2$

$\Rightarrow$ <u>NO</u> PUEDE SER <u>INYECTIVA</u> PORQUE SIEMPRE VA A PASAR QUE $\exists x /$

$f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$ COMO POR EJ: $f(1) = f(-1) \wedge 1 \neq -1$.



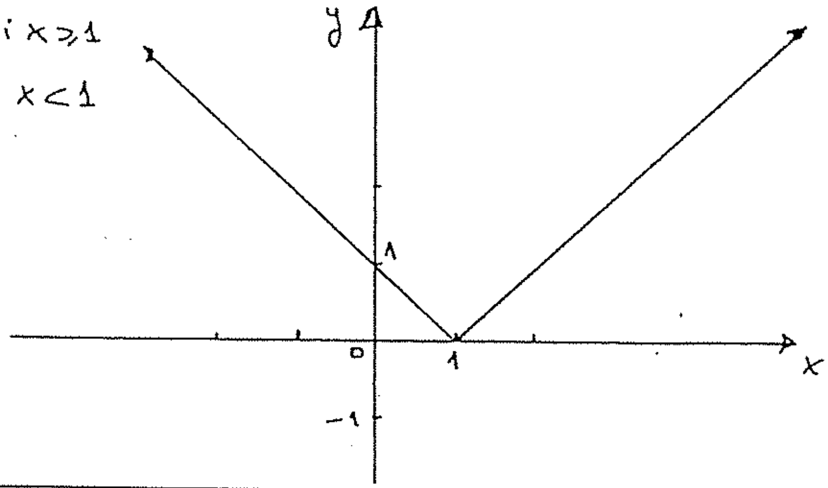
LA <u>RECÍPROCA</u>: SI ES INYECTIVA $\Rightarrow$ PUEDE SER $f(x)=f(-x)$

NO ES VÁLIDA PORQUE $x=-x$ SÓLO SI $x=0$.

---

24. Dada $f(x) = |x-1|$, graficarla.

$f(x) = x - 1 \text{ si } x \geq 1$
$f(x) = -x + 1 \text{ si } x < 1$



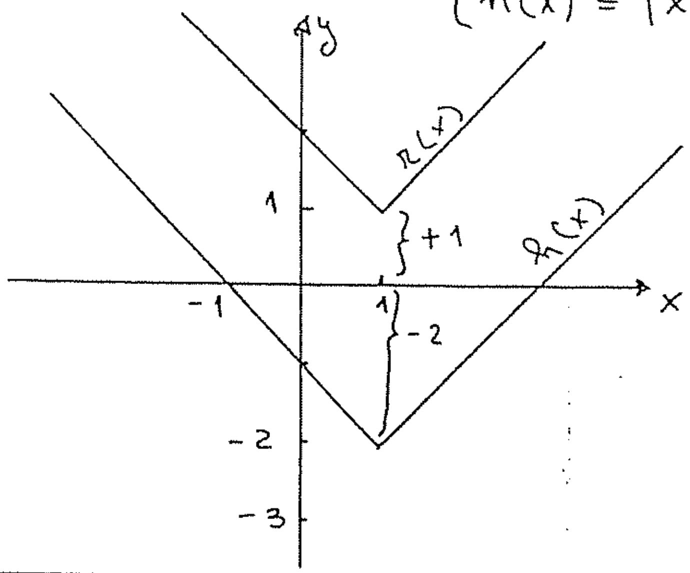
24.1. Usando f, representar en un mismo gráfico las funciones $r(x)$ y $h(x)$, efectuando los desplazamientos o cambios de escala necesàrios.

24.1.1. $\begin{cases} r(x) = f(x) + 1 \\ h(x) = f(x) - 2 \end{cases}$

$f(x) = |x-1| \Rightarrow \begin{cases} r(x) = |x-1| + 1 \\ h(x) = |x-1| - 2 \end{cases}$

$r(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$h(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 1 \\ -x-1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$



24.1.2. $\begin{cases} r(x) = f(x+1) \\ h(x) = f(x-2) \end{cases}$

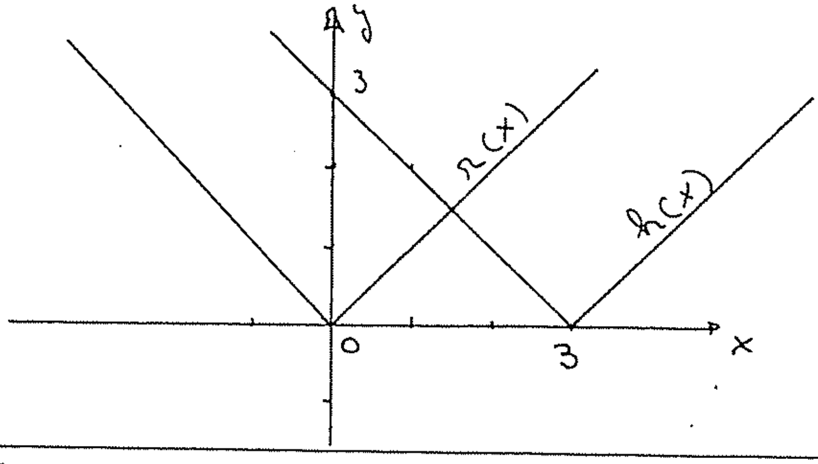
$f(x) = |x-1| \Rightarrow r(x) = |x+1-1| \Rightarrow$

$r(x) = |x| \Rightarrow$

$r(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$h(x) = |x-2-1| \Rightarrow h(x) = |x-3|$

$\Rightarrow h(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ GRAFICO

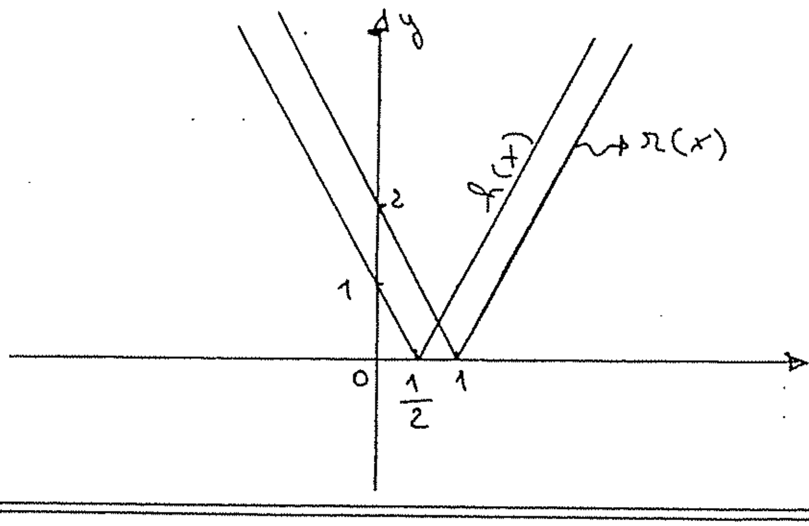


24.1.3. $\begin{cases} r(x)=2f(x) \\ h(x)=f(2x) \end{cases}$ $f(x)=|x-1| \Rightarrow r(x)=2|x-1| \Rightarrow$

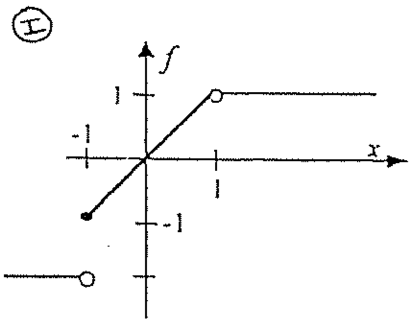
$$r(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{si } x \geq 1 \\ -2x+2 & \text{si } x<1 \end{cases}$$

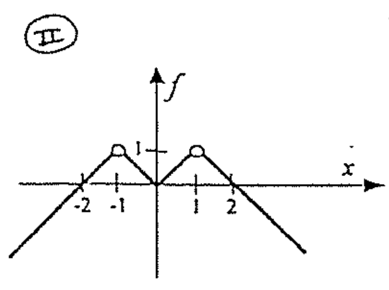
$h(x)=|2x-1| \Rightarrow$

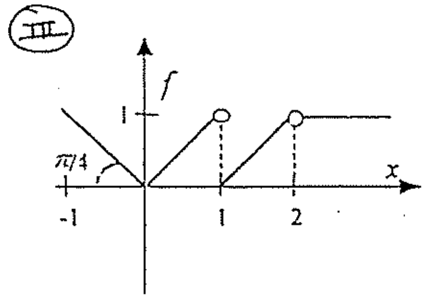
$$h(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{si } x<\frac{1}{2} \end{cases}$$



25. Dados los siguientes gráficos:







Hallar en cada caso: a) dominio e imagen; b) definición analítica de la función; c) ceros y signos; y d) graficar: $f(x-1); f(x)+1; f(-x); -f(x)$

GRÁFICO (I) a) DOMINIO E IMAGEN ⇒

$\boxed{DOM = \mathbb{R} - \{1\}}$ $\boxed{Im = \{y / y \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq y \leq 1 \vee y = 2\}}$

b) DEF. ANALÍTICA DE LA FUNCIÓN:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -2 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

c) CEROS Y SIGNOS:

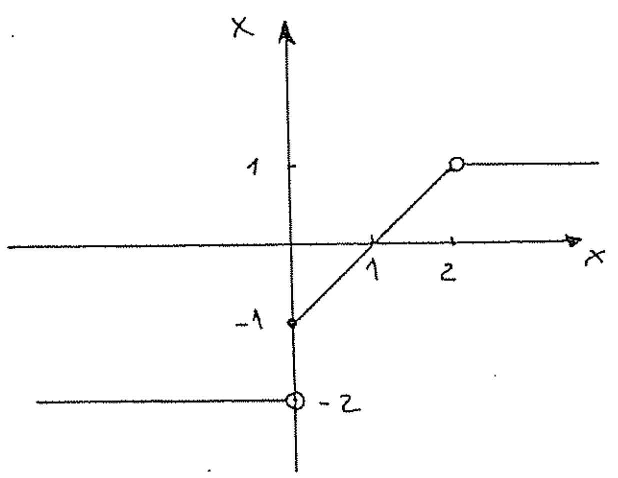
TIENE UN CERO EN $\boxed{(x;y) = (0;0)}$

SIGNOS: $f(x)$ ES POSITIVA SI $\boxed{0 < x < 1 \vee x > 1}$

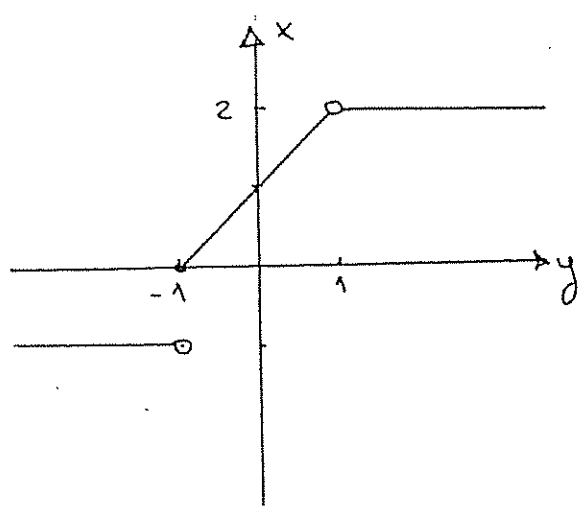
$f(x)$ ES NEGATIVA SI $\boxed{x < 0}$

d) GRAFICAR:

$f(x-1)$



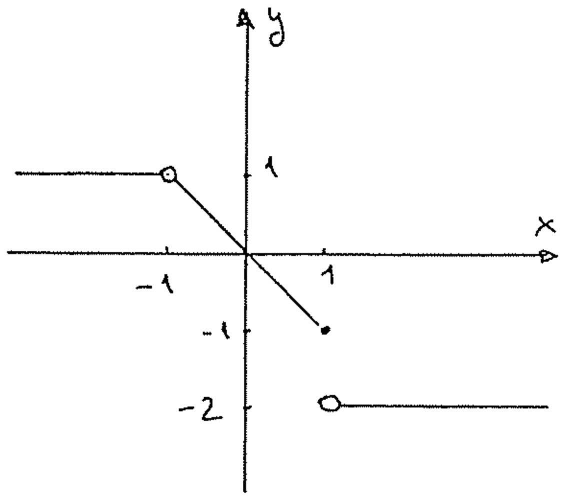
$f(x)+1$

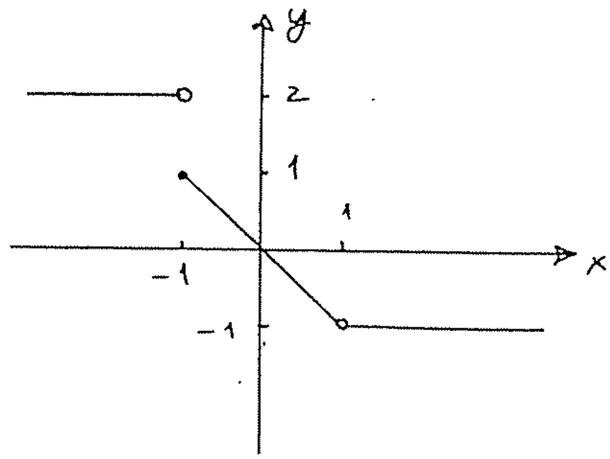


$$f(x-1) \begin{cases} 1 & \text{si } x > 2 \\ x-1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x)+1 \begin{cases} 2 & \text{si } x > 1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

GRAFICAR: $f(-x)$ $\qquad\qquad$ $-f(x)$





$$f(-x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<-1 \\ -x & \text{si } -1<x\leq 1 \\ -2 & \text{si } x>1 \end{cases} \qquad -f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x>1 \\ -x & \text{si } -1\leq x<1 \\ 2 & \text{si } x<-1 \end{cases}$$

GRÁFICO II a) DOMINIO E IMAGEN:

$\boxed{\text{Dom} = \mathbb{R} - \{1;1\}}$ $\qquad$ $\boxed{\text{IM} = \mathbb{R} < 1}$

b) DEFINICIÓN ANALÍTICA DE LA FUNCIÓN:

$$f(x)=\begin{cases} |x| & \text{si } -1<x<1 \\ -|x|+2 & \text{si } x>1 \vee x<-1 \end{cases}$$

c) CEROS Y SIGNOS:

CEROS: $(x,y) = \boxed{(0;0)\ ;\ (2;0)\ ;\ (-2;0)}$

SIGNOS: si $\boxed{x \in (-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2)} \Rightarrow f(x)$ ES POSITIVA

si $\boxed{x \in (-\infty;-2)\cup(2;+\infty)} \Rightarrow f(x)$ ES NEGATIVA

d) TE DEJO LOS GRÁFICOS A TU CARGO, MIRANDO CÓMO HICE LOS GRÁFICOS DEL EJ. ANTERIOR.

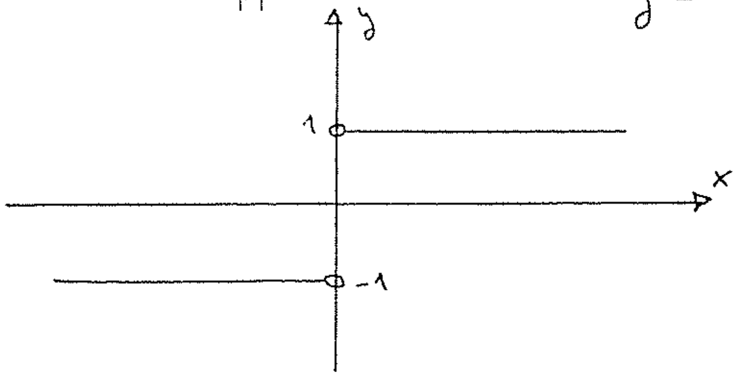
GRÁFICO III $\rightarrow$ LO DEJO PARA ANALIZAR.

26. Representar:

26.1. $y=\frac{x}{|x|}$

CON $x \neq 0 \Rightarrow y = 1$ SI $x > 0$

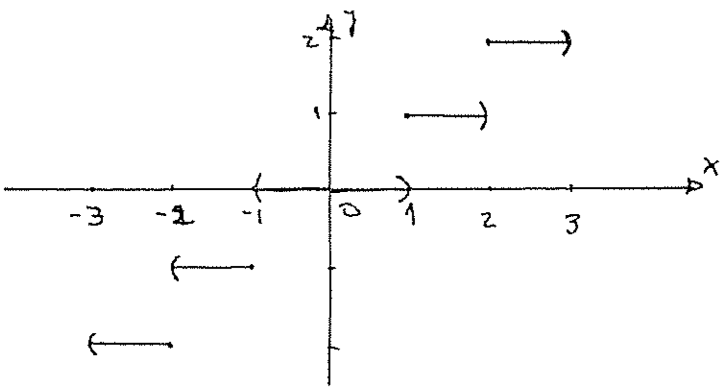
$y = -1$ SI $x < 0$



26.2. $y=[x]$

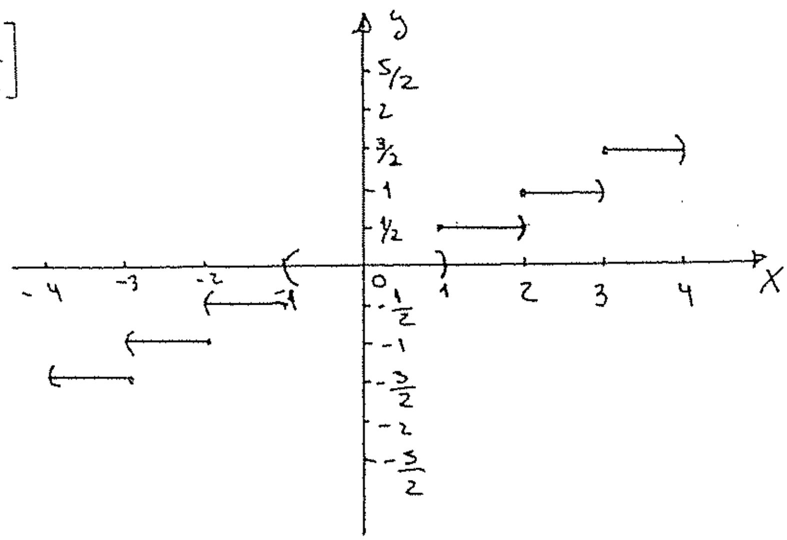
$[x]$ QUIERE DECIR "PARTE ENTERA DE X"

ES DECIR, POR EJ: SI $x \in [1, 2) \Rightarrow [x] = 1$.

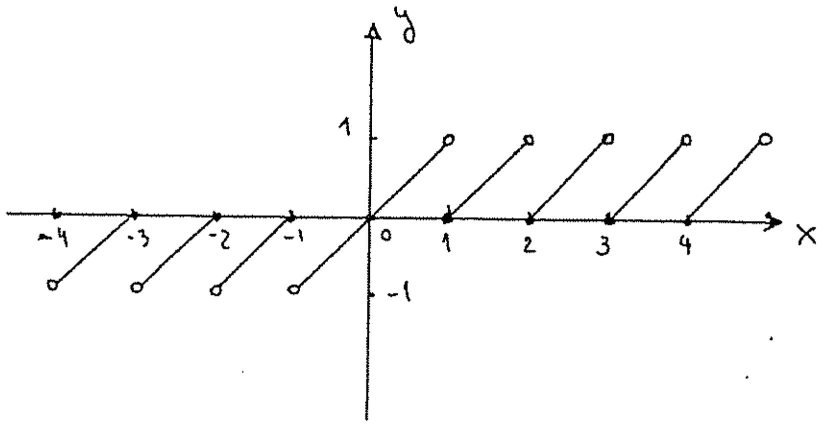


26.3. $y=[2x]$ LA DEJO PARA QUE VOS LA GRAFIQUES, DADO QUE ES MUY SIMILAR AL GRÁFICO ANTERIOR.

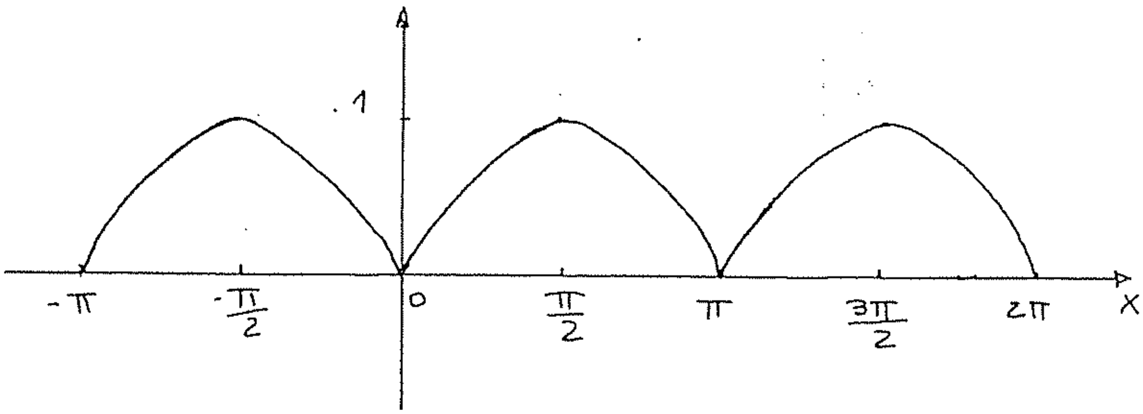
26.4. $y=\left[\frac{x}{2}\right]$



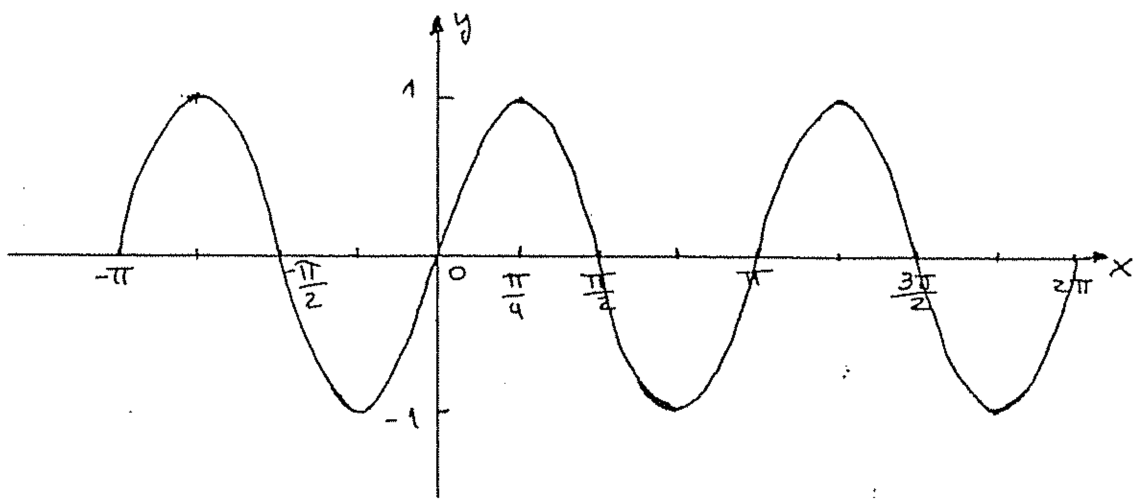
26.5. $y = x - [x]$



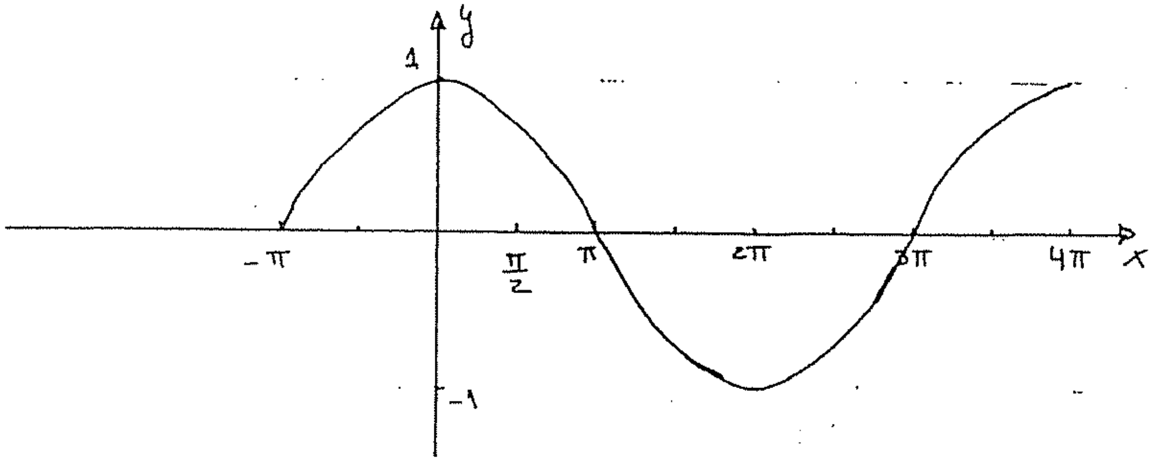
26.6. $y = |\operatorname{sen} x|$



26.7. $y = \operatorname{sen} 2x$

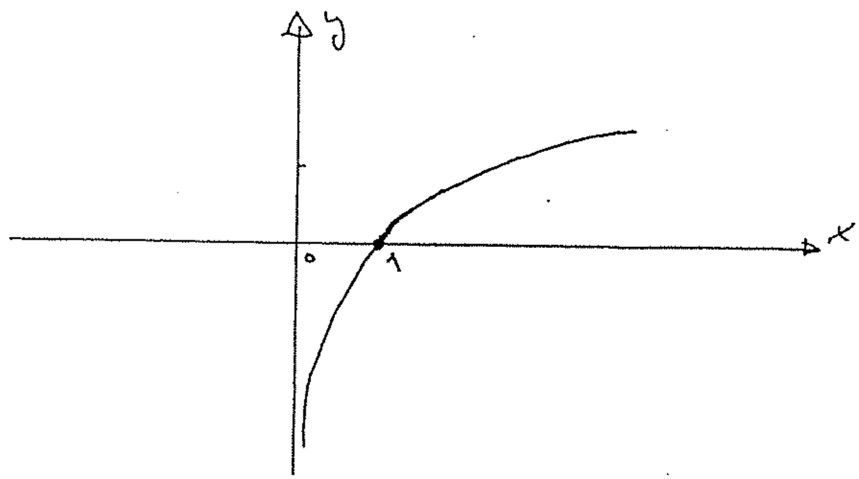


26.8. $y = \cos \frac{x}{2}$

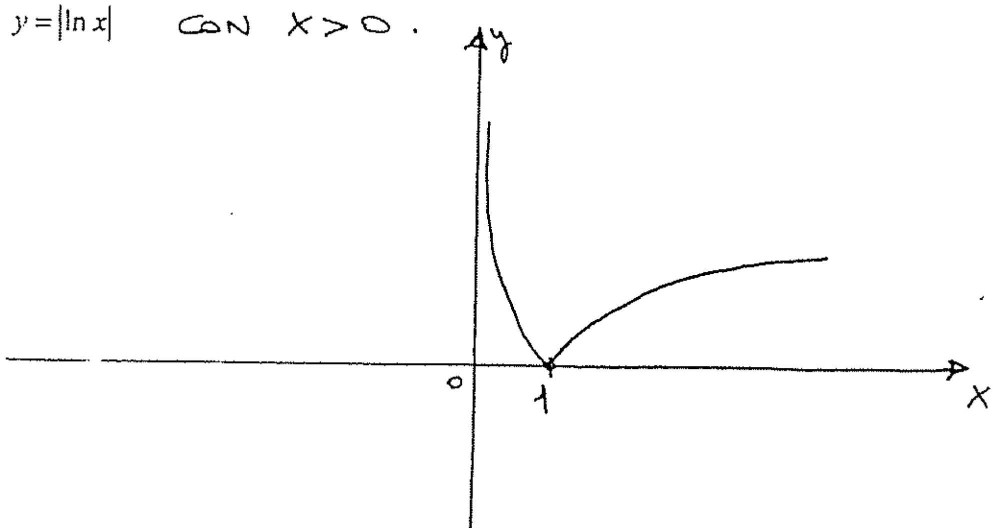


26.9. $y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ TE LA DEJO PARA QUE VOS LA GRAFIQUES!

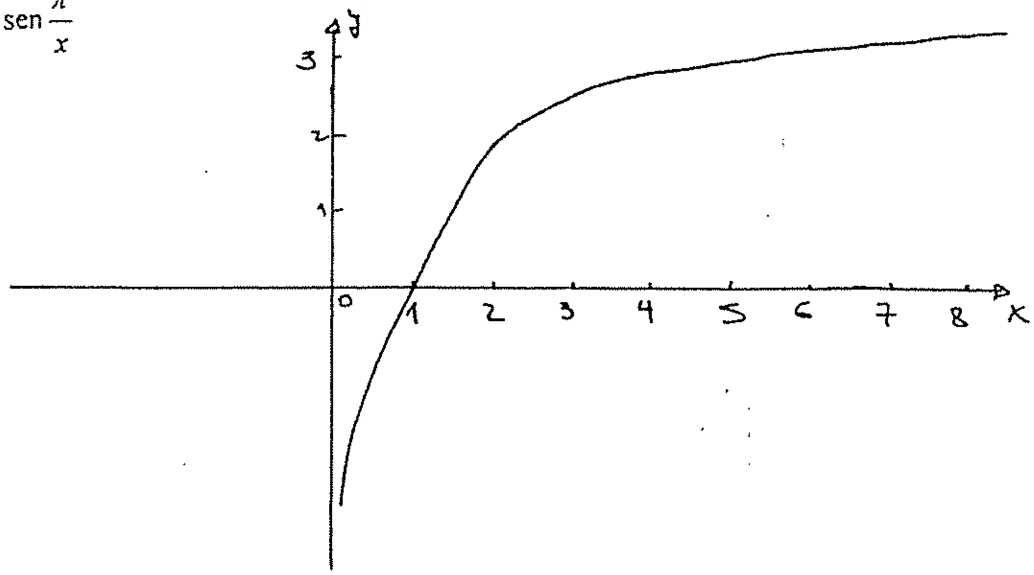
26.10. $y = \ln|x|$ TIENE UNA ASÍNTOTA EN $X = 0$.



26.11. $y = |\ln x|$ CON $X > 0$.

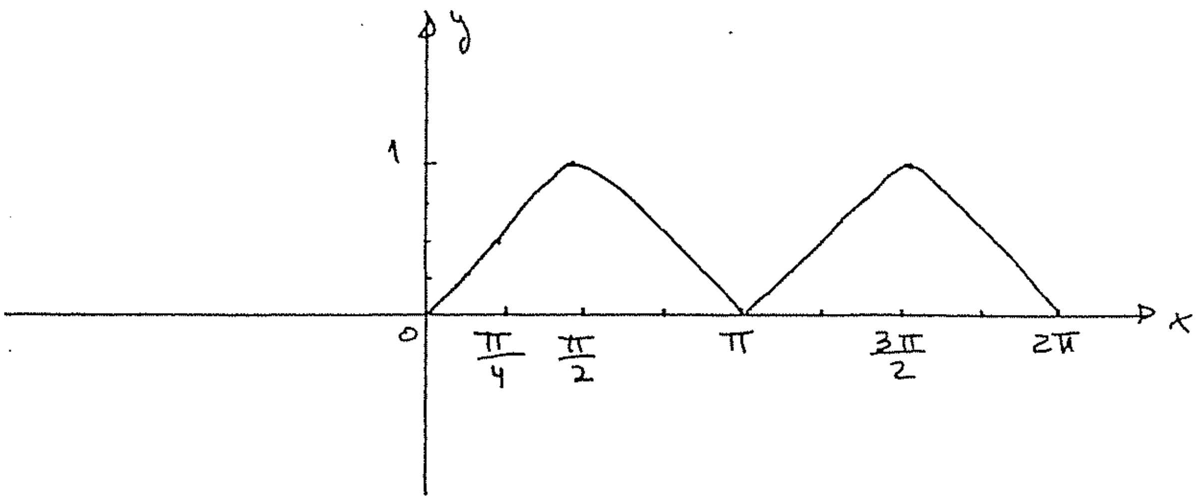


26.12. $y = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ CON $x \neq 0$

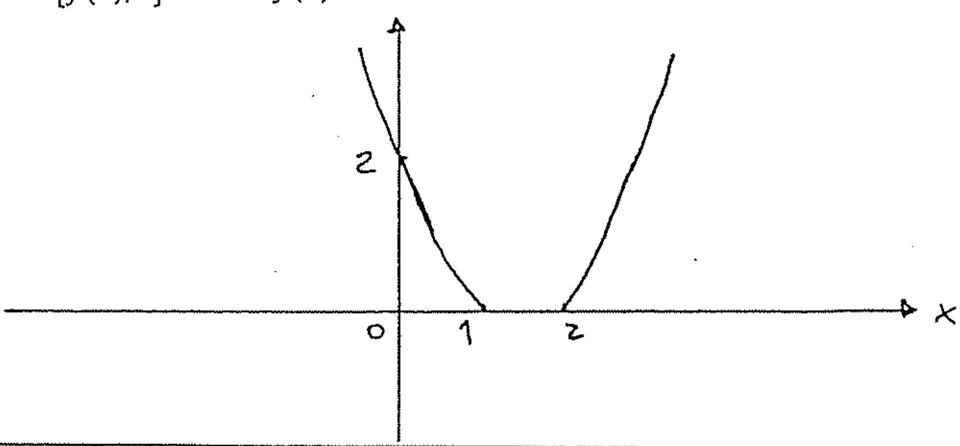


26.13. $y = \operatorname{sen} x^2$ ESTÁ ACOTADA ENTRE 1 Y -1.
LA DEJO PARA GRAFICAR.

26.14. $y = \operatorname{sen}^2 x$



26.15. $y = \max[f(x), 0]$ con $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ACOTADA ENTRE $f(x) \wedge y = 0$



27. En el ejercicio anterior: a)¿cuáles son periódicas? b) ¿cuáles con acotadas? Determinar, si es posible, supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conjunto imagen.

a) SON PERIÓDICAS: $y = x - [x]$ CON UN PERÍODO PARA $x \geq 0$ ∧ OTRO PARA $x < 0$.

$y = |\operatorname{sen} x|$ CON PERÍODO π

$y = \operatorname{sen} 2x$ CON PERÍODO $\frac{\pi}{2}$

$y = \cos \frac{x}{2}$ CON PERÍODO 4π

$y = \operatorname{sen} x^2$ ∧ $y = \operatorname{sen}^2 x$ CON PERÍODO π

b) SON ACOTADAS: $y = \frac{x}{|x|}$ → SUPREMO: $y = 1$. ÍNFIMO: $y = -1$

QUE ADEMÁS SON EL MÁXIMO Y EL MÍNIMO, RESPECTIVAMENTE.

① [$y = x - [x]$ → TAMBIÉN ACOTADA EN $y \in (-1; 1)$. SUPREMO: 1
ÍNFIMO = -1. $y = |\operatorname{sen} x|$ ESTÁ ACOTADA ENTRE 1 Y 0.
SUPREMO Y MÁXIMO: $y = 1$. ÍNFIMO Y MÍNIMO = 0.

$y = \operatorname{sen} 2x$ CON SUPREMO = 1; ÍNFIMO → $y = -1$.

$y = \cos \frac{x}{2}$ → ACOTADA EN → $y \in [1; -1]$ → SUPREMO Y MÁXIMO EN $y = 1$; ÍNFIMO (Y MÍNIMO) EN $y = -1$

$y = |\ln x|$ → TIENE SÓLO ÍNFIMO (Y MÍNIMO) → $y = 0$. NO TIENE SUPREMO. ES DECIR, ESTÁ ACOTADA INFERIORMENTE.

$y = \operatorname{sen} x^2$ → ACOTADA ENTRE -1 Y 1.

$y = \operatorname{sen}^2 x$ → ACOTADA → $y \in [0; 1]$ → SUPREMO Y MÁXIMO $y = 1$. ÍNFIMO Y MÍNIMO → $y = 0$.

$y = \max[f(x); 0]$ → TIENE COTA INFERIOR → CON ÍNFIMO $y = 0$. NO TIENE COTA SUPERIOR.

(DEFINICIÓN DE COTA SUPERIOR E INFERIOR - SUPREMO - ÍNFIMO → VER EJ. 17.) (① NO TIENE NI MÁX, NI MÍNIMO)

28. Para cuestionarse:

28.1. ¿Toda función inyectiva es impar?

NO - POR EJEMPLO, TODAS LAS FUNCIONES LINEALES (CUYA GRÁFICA SON RECTAS), DEFINIDAS DE $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SON INYEXTIVAS, Y NO NECESARIAMENTE SON IMPARES.

POR EJ: $y = 2x + 1$ DEF. DE $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \to$ ES INYECTIVA PORQUE DADO $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, Y NO ES IMPAR, PORQUE $f(x) \neq -f(-x)$, YA QUE $2x+1 \neq 2x-1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

28.2. ¿Toda función impar es inyectiva?

SÍ. PORQUE SI ES IMPAR $\Rightarrow f(x) = -f(-x) \Rightarrow$ TOMANDO $x_1 \wedge x_2 \Rightarrow f(x_1) = -f(-x_2) \Rightarrow -f(x_1) = f(-x_2) \Rightarrow$

$-(x_1) = -x_2 \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \Rightarrow$ ES INYECTIVA

28.3. ¿Una función par puede ser periódica? ¿Y una impar?

NO $\to$ UNA FUNCIÓN IMPAR NO PUEDE SER PERIÓDICA, POR EJERCICIO ANTERIOR, YA QUE, SI ES PERIÓDICA $\Rightarrow$ NO ES INYECTIVA (SI ESTAMOS TOMANDO EL DOMINIO = $\mathbb{R}$, Y NO ACOTÁNDOLO A UN ÚNICO PERÍODO), Y DIJIMOS QUE TODA FUNCIÓN IMPAR ES INYECTIVA -

---

28.4. ¿Una función puede ser par y biyectiva?

NO SI TOMAMOS LA FUNCIÓN DEFINIDA DE $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. PERO SI ACOTAMOS EL DOMINIO A UN ÚNICO PERÍODO, Y EL CODOMINIO AL INTERVALO ACOTADO ENTRE SU MÁXIMO Y SU MÍNIMO $\Rightarrow$ SÍ.

28.5. ¿Una función puede ser periódica e inyectiva?

TE LO DEJO PARA PENSAR Y CONTESTAR - MIRANDO CÓMO HICIMOS LOS CUATRO ANTERIORES.

29. Si $f(x) = x^2 + 3 + 2x$, hallar $f(x-1)$; $f(\frac{1}{x})$ ¿Hay restricciones?

$f(x-1) = (x-1)^2 + 3 + 2(x-1) \Rightarrow$

$f(x-1) = x^2 - 2x + 1 + 3 + 2x - 2 \Rightarrow$

$\boxed{f(x-1) = x^2 + 2}$ EN ESTE CASO NO HAY RESTRICCIONES.

VEAMOS: $f(\frac{1}{x}) \Rightarrow$ SÍ HAY RESTRICCIONES, YA QUE:

$f(\frac{1}{x}) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3 + 2 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$

$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} + 3 + \frac{2}{x} \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = \frac{1 + 3x^2 + 2x}{x^2} \Rightarrow$

$\boxed{f(\frac{1}{x}) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2}}$ $\Rightarrow$ PARA QUE ESTA FUNCIÓN EXISTA TENGO QUE RESTRINGIR EL DOMINIO A: $DOM = \mathbb{R} - \{0\}$; MIENTRAS QUE $DOM\ f(x) = \mathbb{R}$.

29.1. Si $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$, hallar $f(x)$

TENEMOS QUE: $(x+1) - 1 = x \Rightarrow$

$f(x) = f(x+1-1) \Rightarrow$ COMO $f(x+1) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow$

$f(x) = (x-1)^2 - 3(x-1) + 2 \Rightarrow$

$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 3x + 3 + 2 \Rightarrow$

$\boxed{f(x) = x^2 - 5x + 6}$

29.2. Si $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1 + x^2}$, $x > 0$ hallar $f(x)$

SABEMOS QUE: $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x \Rightarrow$
CON $x > 0$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}$$

30. Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, determinar dominio e imagen de cada una para que existan fog y gof y hallarlas.

30.1. $f(x)=\sqrt{x+3}$ $g(x)=(x-4)^2$

DEFINICIÓN: DADAS $f: X \longrightarrow Y$; $g: Y \longrightarrow Z$ DEFINIMOS $g \circ f: X \longrightarrow Z$ DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ si } \boxed{\text{Im} f \subset \text{Dom}\, g}$$

EN ESTE CASO PRIMERO TENGO QUE DEFINIR DOMINIO E IMAGEN DE $f(x)$, DE MODO TAL QUE $f(x)$ SEA FUNCIÓN.

DOM $f(x) \rightarrow$ CONDICIÓN: $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow$

$$\text{Dom} f = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -3\} \vee \boxed{\text{DOM} f = \mathbb{R} \geq 3}$$

IM $f(x) \rightarrow y \geq 0 \vee y \leq 0 \Rightarrow$ ELIJO $y \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{Im} f = \mathbb{R}_0^+}$

VEAMOS QUÉ SUCEDE CON $g(x)$: $\boxed{\text{DOM}\, g(x) = \mathbb{R}}$

$\boxed{\text{IM}\, g(x) = \mathbb{R} \geq 0}$

DEFINO $f: \mathbb{R} \geq 3 \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \;/\; f(x) = \sqrt{x+3}$ $\wedge$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \;|\; g(x) = (x-4)^2$ $\Rightarrow$

COMO: $\text{Im} f \subset \text{Dom}\, g$, QUE ES LO QUE PIDE LA DEFINICIÓN DE $(g \circ f)(x) \Rightarrow$ PUEDO HALLARLA:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+3}) = \boxed{\left(\sqrt{x+3} - 4\right)^2} \text{ DE } \mathbb{R} \geq 3 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

30.2. $f(x)=\ln(x^2-1)$ $g(x)=\sqrt{3-x}$

DOM $f \rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow \boxed{x > 1}$ SI $x \geq 0 \vee$

$-x > 1$ SI $x < 0 \Rightarrow \boxed{x < -1}$

DOM f: $\boxed{x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)}$

$\boxed{\text{IM}f = \mathbb{R}}$ → QUE NO ESTÁ INCLUÍDO EN DOM g.

PORQUE DOM g → $3 - x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq x \Rightarrow \boxed{x \leq 3}$ ⇒ DEBO RESTRINGIR LA IMAGEN DE $f(x)$ A LOS REALES MENORES O IGUALES QUE 3 ⇒ $\boxed{\text{IM}f = \mathbb{R} \leq 3}$.

IM $g(x) \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$ PARA QUE EXISTA $g(x)$. (TAMBIÉN PODRÍA HABER ELEGIDO $\mathbb{R} \leq 0$) ⇒ $\boxed{\text{Im}\, g = \mathbb{R} \geq 0}$

DEFINO AMBAS FUNCIONES PARA QUE EXISTA $(g \circ f)(x)$.

$f: (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \leq 3 \,/\, f(x) = \ln(x^2 - 1)$

$g: \mathbb{R} \leq 3 \longrightarrow \mathbb{R} \geq 0 \,|\, g(x) = \sqrt{3 - x}$ ⇒ HALLO $g \circ f(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln(x^2 - 1)) = \sqrt{3 - \ln(x^2 - 1)} \Rightarrow$$

$$\boxed{g \circ f: (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \geq 0 \,/\, g \circ f(x) = \sqrt{3 - \ln(x^2 - 1)}}$$

30.3. $f(x) = \text{sen}\, x \;\; g(x) = x^2$ TE LO DEJO DE TAREA → UTILIZANDO DE MODELO LOS DOS EJERCICIOS ANTERIORES.

---

31. Dada $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ probar que $\left(\underbrace{f o f o \ldots o f}_{\text{n veces}}\right)(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + nx^2}}$

LO VOY A DESARROLLAR PARA $n = 2$, LUEGO $n = 3$, Y POR ÚLTIMO INDUCIRLO PARA $n = n$.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}\,\sqrt{1 + \underbrace{\frac{x^2}{1 + x^2}}_{①}}} =$$

① NO HACE FALTA PONER LAS BARRAS DE MÓDULO PORQUE $1 + x^2 > 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$ ⇒ SIGAMOS:

$$= \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{1 + x^2}\right)}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}+x^2+\frac{x^4}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{1+x^2+x^2+x^2(1+x^2)+x^4}{1+x^2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^2+x^4+x^4}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{1+3x^2+2x^4}{1+x^2}}} \longrightarrow 1$$

$$= \frac{x}{\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+2x^2)}{1+x^2}}} = \boxed{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}} \Rightarrow \text{DESARROLLO PARA } m = 3$$

$$(f\circ f\circ f)(x) = (f\circ f)(f(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+2\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \Rightarrow$$

SI HACEMOS EL DESARROLLO QUE HICIMOS PARA $(f\circ f)(x)$ LLEGAMOS A:

$$(f\circ f)(f(x)) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1+4x^2+3x^4}{1+x^2}}} \longrightarrow 2$$

SI COMPARAMOS EL POLINOMIO DE 1 CON EL POLINOMIO DE 2 PODEMOS INDUCIR EL POLINOMIO PARA $m \Rightarrow$

$$1+3x^2+2x^4$$
$$1+4x^2+3x^4$$
$$\vdots$$
$$1+(m+1)x^2+mx^4 \Rightarrow \text{TENEMOS QUE}$$

ESTE POLINOMIO SE FACTOREA:

$$1+(m+1)x^2+mx^4=(1+mx^2)(1+x^2) \Rightarrow$$

TENEMOS QUE:

$$\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{m\text{ VECES}}(x)=\frac{x}{\sqrt{\dfrac{(1+mx^2)(1+x^2)}{1+x^2}}}=$$

$$=\boxed{\frac{x}{\sqrt{1+mx^2}}}$$ COMO QUERÍAMOS PROBAR.

---

32. Si $fog(x)=\sqrt{\operatorname{sen}(x^2-4)}$

    32.1. Dar una expresión para $f(x)$ y $g(x)$

    32.2. Hallar dominio e imagen de f y g

    32.3. Determinar $gof(x)$

32.1) UNA EXPRESIÓN POSIBLE PARA $f(x)$ ES:

$\boxed{f(x)=\sqrt{x}}$ Y UNA EXPRESIÓN POSIBLE PARA $g(x)$ ES: $\boxed{g(x)=\operatorname{sen}(x^2-4)} \Rightarrow$

$$fog(x)=\sqrt{\operatorname{sen}(x^2-4)}$$

32.2) DOMINIO E IMAGEN DE $f(x) \wedge g(x) \Rightarrow$

$$\operatorname{DOM} f=\mathbb{R}_0^+ \quad \wedge \quad \operatorname{IM} f=\mathbb{R}_0^+$$

$$\operatorname{DOM} g=\mathbb{R} \quad \wedge \quad \operatorname{IM} g=[-1;1]$$

33.3) PARA DETERMINAR $gof(x)$ TENEMOS QUE ASEGURARNOS DE QUE LA $\operatorname{IM} g$ ESTÉ INCLUÍDA EN EL DOM DE f $\Rightarrow$

COMO EN ESTE CASO $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Dom}\, f$ PORQUE

$[-1;1] \subset \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow$ PUEDO HALLAR $g \circ f(x)$

$$g(f(x)) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x}^{\,2} - 4\right) \Rightarrow$$

COMO EL SEN X ESTÁ DEFINIDO $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ PUEDO SIMPLIFICAR LA RAIZ CON EL CUADRADO SIN PONER LAS BARRAS DE MÓDULO $\Rightarrow$

$$\boxed{g(f(x)) = \operatorname{sen}(x-4)}$$ CON

DOMINIO $= \mathbb{R} \wedge$ CODOMINIO $= \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow$ DEFINO:

$$\boxed{g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \,/\, g \circ f(x) = \operatorname{sen}(x-4)}$$

---

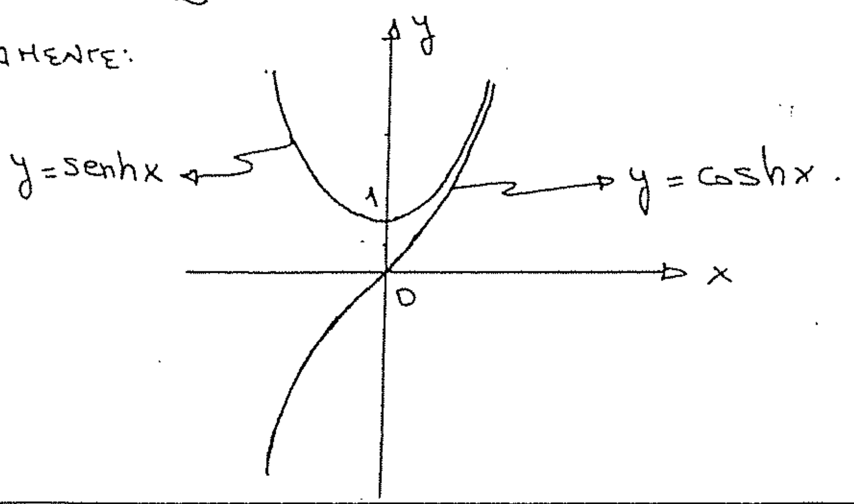
33. Dadas $f(x) = \operatorname{senh} x$, $g(x) = \cosh x$, $h(x) = th x$

33.1. Graficar $f(x)$ y $g(x)$

$f(x) = \operatorname{senh} x \rightarrow$ SE DENOMINA "SENO HIPERBÓLICO DE X" $\wedge$
$g(x) = \cosh x \rightarrow$ SE DENOMINA "COSENO HIPERBÓLICO DE X".

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \wedge \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

GRÁFICAMENTE:



33.2. Probar: $cosh^2 x - senh^2 x = 1$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \frac{e^{2x}+2e^{x}.e^{-x}+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2e^{x}e^{-x}+e^{-2x}}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = \boxed{1} \text{ c.s.q.p.}$$

33.3. Verificar que $h^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ ln\ \frac{1+x}{1-x} = arg\ thx,\quad x \in (-1, 1)$

SABEMOS QUE $h(x) = \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \Rightarrow$

PARA DESPEJAR LA INVERSA DEBEMOS PRIMERO DES-PEJAR X $\Rightarrow$ $$\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = y \Rightarrow$$

$$e^{2x}-1 = y(e^{2x}+1) \Rightarrow$$

$$e^{2x}-1 = ye^{2x}+y \Rightarrow$$

$$e^{2x}-ye^{2x} = 1+y \Rightarrow$$

$$e^{2x}(1-y) = 1+y \Rightarrow$$

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow$$ APLICO ln A AM-

BOS MIEMBROS $\Rightarrow$ $$\ln e^{2x} = \ln\frac{1+y}{1-y} \Rightarrow$$

$$2x \cdot \ln e = \ln \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow \ln e = 1 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow$$ COMO POR CON-

VENCIÓN "y" ES LA VARIABLE DEPENDIENTE, Y "x" ES LA VARIABLE INDEPENDIENTE ⇒ CAMBIO LOS NOMBRES Y QUEDA:

$$\boxed{y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}} \quad \text{CON } y = h^{-1}(x)$$

$$h(x) = \tanh x \Rightarrow h^{-1}(x) = \operatorname{argtanh} x \Rightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}} \quad \text{C.S.Q.P.}$$

CON $x \in (-1; 1)$ PORQUE EL LOGARITMO SÓLO ESTÁ DEFINIDO PARA LOS REALES POSITIVOS ⇒

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \Rightarrow x \in \text{ A ESE INTERVALO.}$$

---

34. Definir paramétricamente, las siguientes curvas:

34.1. $y = x^2$ HAY QUE DEFINIR x e y EN FUNCIÓN DE UN MISMO PARÁMETRO, POR EJEMPLO: t ⇒

PODEMOS DEFINIR LA PARÁBOLA $y = x^2$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad \text{CON } t \in \mathbb{R}$$

TE DEJO A VOS QUE MUESTRES QUE NO ES ÚNICA, ES DECIR QUE SE PUEDE DEFINIR DE OTRAS FORMAS.

34.2. $3x + 2y = 5$ ES UNA RECTA QUE PODEMOS DEFINIR:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{3}{2} t + \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{CON } t \in \mathbb{R}$$

¡BUSCÁ OTROS EJEMPLOS!

34.3. $x^2+y^2=4$ ES UNA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y RADIO $r=2$ $\Rightarrow$

PODEMOS ESCRIBIR SU ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA SIG. MANERA:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad \text{CON } 0 \le t \le 2\pi$$

34.4. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ES UNA ELIPSE, Y PODEMOS ESCRIBIR SU ECUACION PARAMÉTRICA ASÍ:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad \text{CON } t \rightarrow 0 \le t \le 2\pi$$

PORQUE LA EC. GRAL. DE UNA ELIPSE ES:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow a=2 \wedge b=3$$

¿Son únicas? ¿Por qué? ¿Puede sostener sus respuestas con ejemplos? Inténtelo!!!!

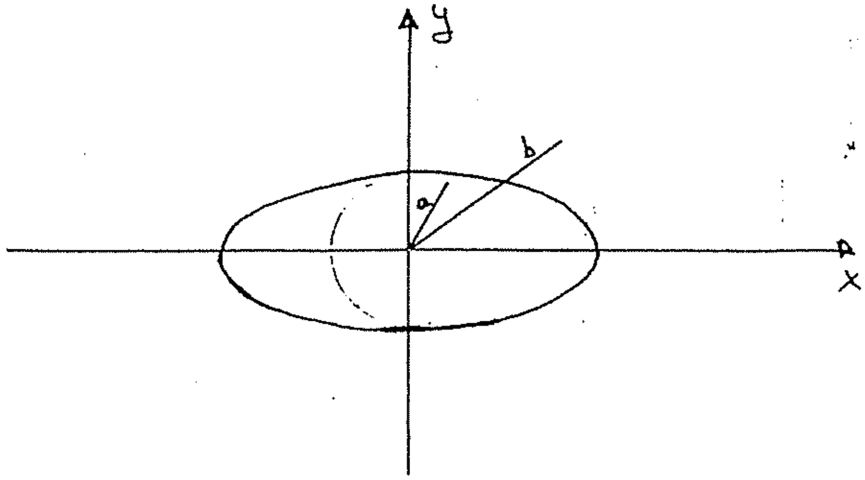
SE REFIERE A LAS EC. PARAMÉTRICAS 34.1 34.2 34.3 Y 34.4. TE LO DEJO PARA QUE VOS LO INTENTES.

---

35. Graficar y obtener una expresión cartesiana en cada caso:

35.1. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $a, b \in \Re^+$ ES UNA ELIPSE CUYA EXPRESIÓN CARTESIANA ES: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

EN ESTE CASO, GRÁFICAMENTE ES UNA ELIPSE QUE PODEMOS GRAFICAR COMPLETA SI SUPONEMOS AL PARÁMETRO $t \rightarrow 0 \le t \le 2\pi$ Y, SABIENDO QUE $a \wedge b$ SON LOS RADIOS DE LAS CIRCUNFERENCIAS QUE COMPRENDEN A LA ELIPSE DE LA SIG. MANERA:



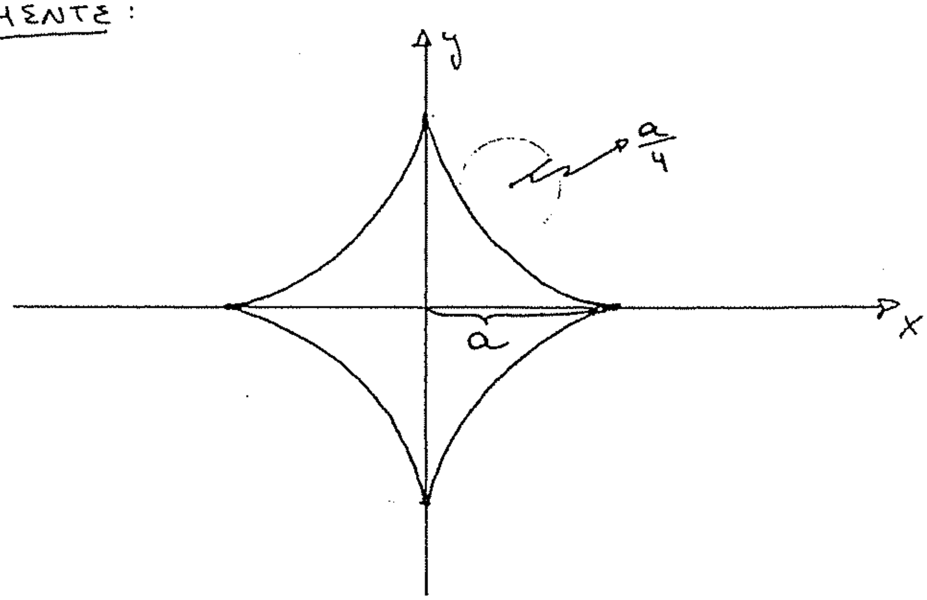
35.2. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\mathrm{sen}^3 t \end{cases}$ $a, b \in \Re^+$

ES UN ASTROIDE COMPLETO SI $0 \le t < 2\pi$ – PARA HALLAR LA EXPRESIÓN CARTESIANA DEBEMOS ELEVAR TODOS LOS TÉRMINOS DE AMBOS MIEMBROS, DE LAS DOS ECUACIONES A LA POTENCIA $2/3$ Y SUMARLAS $\Rightarrow$:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t) \Rightarrow$$

$\boxed{x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}}$ ES LA EXP. CARTESIANA.

GRÁFICAMENTE:



ESTA CURVA PUEDE INTERPRETARSE COMO TRAYECTORIA DE UN PUNTO DE LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO $\frac{a}{4}$, QUE RUEDA, SIN RESBALAR, SOBRE OTRA CIRCUNFERENCIA DE RADIO a, QUEDANDO SIEMPRE DENTRO DE LA MAYOR.

35.3. $\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t^3 + 1 \end{cases}$ LA DEJO PARA QUE VOS LA GRAFIQUES Y ANALICES LOS VALORES DEL PARÁMETRO t.

¿Cómo debe variar el parámetro para lograr el gráfico completo?

PARA EL 35.1 Y 35.2 YA FUE RESPONDIDO. EL 35.3 QUEDA A TU CARGO.