Idea intuitiva sobre autovalores y autovectores

Un ejemplo introductorio

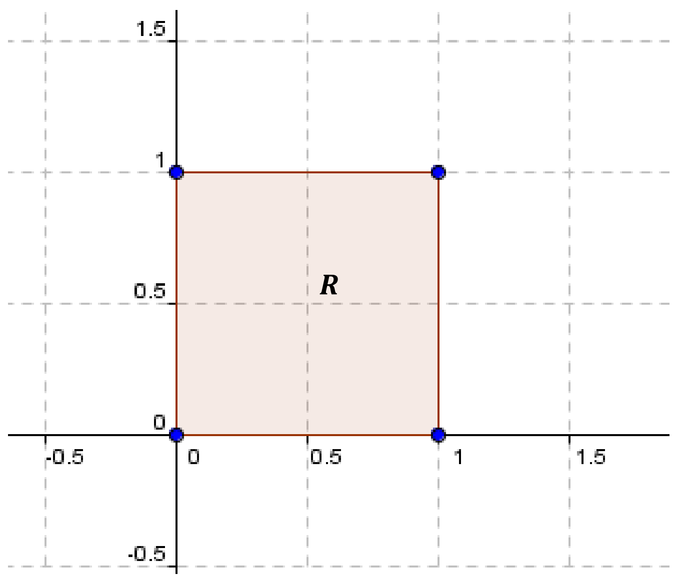
Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Queremos ver cuál es el efecto que provoca esa matriz por los vectores de $\mathbb{R}^2$. ¿Qué pasa cuando uno multiplica esa matriz A por un vector?

$$A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x + 4y \end{pmatrix}$$

Pensemos para que sea sencillo que tomamos el cuadrado con vértice en el origen de lado 1 y que está en el primer cuadrante:

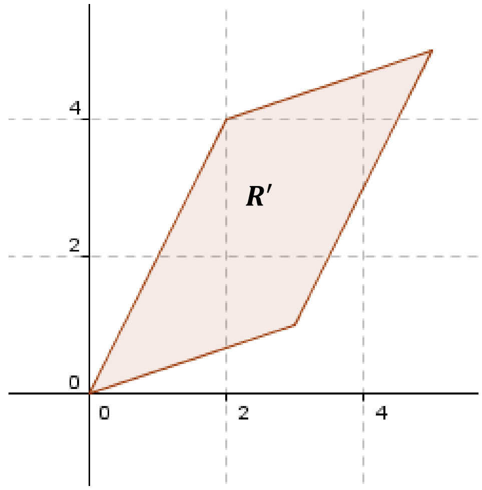


Digamos que llamamos a esta zona el recinto R. ¿En qué se transformaría este recinto bajo el efecto de esa matriz? Para responder esta pregunta podemos ver en que se transforman sus vértices. Sabemos que el vector nulo se va a transformar en el vector nulo. Los demás serán:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$



Uno se podría hacer esta pregunta: ¿Habrá vectores que después de la deformación conservan la dirección?

- El vector (1,0) se transformó en el (3,1). No conserva la dirección.
- El (0,1) se transforma en el (2,4). No conserva la dirección.
- El (1,1) se transformó el (5,5). Entonces se produjo una dilatación de factor 5, y se conservó la dirección.

Ese vector que mantuvo su dirección se denomina autovector, y el factor por el cual se dilató es el autovalor correspondiente.

$$T\big((1,1)\big)=A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\underbrace{5}_{autovalor}\ \overbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}^{autovector}$$

Autovalores, autovectores, autoespacios

Definición de autovalores y autovectores de una matriz

Sea $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$,

$\lambda\in\mathbb{R}$ es autovalor de A si y sólo si existe un vector $v\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ no nulo tal que:

$$A.v=\lambda.v\ ,\qquad v\neq 0_V$$

v se llama autovector asociado a λ.

En el ejemplo que vimos recién el transformado de (1,1) es (5,5), entonces:

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = \underbrace{5}_{\lambda}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{v}$$

Veamos cómo hallar los autovalores y autovectores:

Según la definición, debe cumplirse esta condición:

$$Av = \lambda v \quad \text{con } v \neq 0_V$$

Restamos a ambos miembros λv:

$$Av - \lambda v = 0_V$$

Premultiplicamos a v por I, esto lo podemos hacer porque $Iv = v$:

$$Av - \lambda Iv = 0_V$$

Entonces:

$$\underbrace{(A - \lambda I)}_{n\times n}.v = 0_V$$

Resulta un sistema *homogéneo* con n ecuaciones y n incógnitas, donde $A - \lambda I$ es la matriz de los coeficientes.

¿Cómo puede ser un sistema homogéneo en cuanto a su compatibilidad?

Respuesta: siempre compatible, porque siempre tiene la solución trivial. ¿Cómo queremos que sea en nuestro problema si estamos buscando vectores que no cambien su dirección? ¿Sistema compatible determinado (SCD) o sistema compatible indeterminado (SCI)?. Si es SCD, tiene únicamente la solución trivial y v es el vector nulo. Nuestro objetivo es obtener los autovectores (que son distintos del vector nulo), por eso necesitamos que este sistema sea compatible indeterminado.

Entonces: buscamos un sistema compatible indeterminado.

En un sistema cuadrado y homogéneo, el determinante decide: si es distinto de cero, tiene solución única. Entonces queremos que sea igual a cero:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Esta es la ***ecuación característica de la matriz A.***

Y $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ es un polinomio de grado n dependiente de λ que se llama polinomio característico de la matriz A.

Las raíces del polinomio característico son los autovalores de A.

Una vez hallados los autovalores, ¿cómo obtenemos los autovectores?

Volvemos a la expresión original.

Para cada λ resolvemos el sistema:

$$(A - \lambda I).v = 0_V$$

Y hallamos los autovectores correspondientes.

Si la matriz es de 2 por 2, el polinomio quedará de grado 2.

Si la matriz es de 3 por 3, el polinomio quedará de grado 3.

Otros nombre que se les suele dar a los autovectores y autovalores son:

- *Valores propios* y *vectores propios*
- *Eigenvalores* y *Eigenvectores* (Usando la raíz alemana eigen)

Ejemplo 1

Volvamos al ejemplo inicial.

$$A - \lambda . I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$(3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \wedge \lambda_2 = 5$$

Para $\lambda = 2$ resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$(A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y$$

La solución de un sistema homogéneo es siempre un subespacio. Los subespacios de autovectores se denominan *autoespacios*.

Buscamos una base de este subespacio:

$$S_2 = gen\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Éste es el subespacio donde están los autovectores asociados al autovalor 2.

Para $\lambda = 5$

$$(A - 5I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

$$S_5 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Resultado esperado porque habíamos visto que el $(1,1)$ se transformaba en el $(5,5)$.

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente matriz de 3×3:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Busquemos sus autovalores resolviendo el polinomio característico:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda).((3-\lambda)^2 - 4) = 0$$

Luego los autovalores son:

$$\lambda_1 = 5 \;\vee\; \lambda_2 = 5 \;\vee\; \lambda_3 = 1$$

Donde la *multiplicidad algebraic*a de 5 es 2. Esto significa que 5 es raíz doble del polinomio característico.

Para cada autovalor debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener cuales son los autoespacios correspondientes a cada autovalor.

Autovectores asociados a λ = 5:

Resolvamos el sistema compatible indeterminado:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x + 2y - z = 0$$

El subespacio asociado a este autovalor es:

$$S_5 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Luego dos autovectores son:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \ ; \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Autovectores asociados a λ = 1:

Resolvamos el sistema compatible indeterminado:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0 \wedge y = -x$$

El subespacio asociado a este autovalor es:

$$S_1 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Luego un autovector es:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente hemos obtenido tres autovectores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \ ; \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde v_1 y v_2 son autovectores asociados al autovalor $\lambda = 5$ y v_3 es un autovalor asociado a $\lambda = 1$.

Ejemplo 3

Consideremos la siguiente matriz de 2 × 2:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Busquemos sus autovalores resolviendo el polinomio característico:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0$$

Este polinomio no tiene raíces reales. Con lo cual diremos que C no tiene autovalores reales.

Más adelante estudiaremos los números complejos y podremos hallar las raíces (complejas) del polinomio característico de C.

Ejemplo 4

Demuestre la siguiente propiedad para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\lambda = 0 \text{ es autovalor de } A \Leftrightarrow A \text{ no es inversible}$$

Resolución

¿Cómo se demuestra esto? Primero veamos un ejemplo para convencernos de que se cumple la propiedad.

Consideremos una matriz que no tenga inversa. Por ejemplo escribimos una matriz tal que la fila 2 sea el doble de la fila 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Escribamos la ecuación característica y hallemos los autovalores:

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \ \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 5$$

En este caso particular hemos visto que una matriz no inversible tiene autovalor $\lambda = 0$. Pero quisiéramos demostrar la propiedad.

Para demostrar esto hay que recordar que:

$$\lambda \text{ es autovalor de A} \Leftrightarrow \det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}) = 0$$

Pero si $\lambda = 0$ entonces la afirmación queda:

$$0 \text{ es autovalor de } A \Leftrightarrow \det\left(\underbrace{A - 0.I}_{A}\right) = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathrm{A} \ \underline{\text{no}} \text{ es inversible}$$

EPL 1

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Con autovalores λ_1 y λ_2 (iguales o distintos).

Demostrar que:

a) $\lambda_1 + \lambda_2 = Traza(A)$
b) $\lambda_1 . \lambda_2 = \det(A)$

Esta propiedad se generaliza para matrices de orden n.

Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son autovalores de A (iguales o distintos) entonces:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = Traza(A)$$

$$\lambda_1 . \lambda_2 . \dots . \lambda_n = \det(A)$$

Propiedad de los autovalores y autovectores

Los autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.

Demostración para dos autovalores

Supongamos que tengo dos autovalores distintos: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Como son autovalores, se cumple:

$$A. v_1 = \lambda_1 . v_1$$

$$A. v_2 = \lambda_2 . v_2$$

Queremos probar que v_1 y v_2 son linealmente independientes.

Veamos que la única combinación lineal de los vectores que da por resultado el vector nulo es la trivial (todos los coeficientes iguales a cero):

$$\alpha_1 . v_1 + \alpha_2 . v_2 = 0_V \qquad (1)$$

Multiplicamos por A ambos miembros:

$$A(\alpha_1 . v_1 + \alpha_2 . v_2) = 0_V$$

Distribuimos:

$$\alpha_1 . Av_1 + \alpha_2 . Av_2 = 0_V$$

Como v_1 y v_2 son autovectores es posible escribir:

$$\alpha_1.\lambda_1 v_1 + \alpha_2.\lambda_2 v_2 = 0_V \qquad (2)$$

Ahora multipliquemos los dos miembros de la ecuación (1) por λ_1 :

$$\alpha_1 \lambda_1.v_1 + \alpha_2.\lambda_1 v_2 = 0_V \qquad (3)$$

Y restando (2) – (3) obtenemos:

$$\alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0}.\underbrace{v_2}_{\neq 0} = 0_V$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ por hipótesis entonces su diferencia no puede ser nula. Como v_2 es un autovector, no puede ser el vector nulo. Entonces:

$$\alpha_2 = 0$$

Pero para demostrar que son linealmente independientes, nos falta ver que $\alpha_1 = 0$. Sabiendo que $\alpha_2 = 0$ vamos a (1):

$$\alpha_1.v_1 = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Y si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ demostramos que $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente.

O sea *los autovectores que están en autoespacios diferentes son linealmente independientes*.

Definición de autoespacio

Si λ es un autovalor de A, se denomina autoespacio S_λ al subespacio que contiene todos los autovectores asociados al autovalor λ y además el vector nulo.

$$S_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^{n\times 1} |\ Av = \lambda v\} = \{v \in \mathbb{R}^{n\times 1} |(A - \lambda I)v = 0_V\}$$

EPL 2

Sea $A = (A_1 \quad A_2 \quad A_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar A_3 para que $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sea autovector de A asociado a $\lambda = 2$.

b) Hallar los restantes autovalores y autoespacios de A.

Multiplicidades algebraica y geométrica

Hemos visto que:

$$\lambda \text{ es autovalor de } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

Es decir que los autovalores son las raíces del polinomio característico.

La ***multiplicidad algebraica de un autovalor*** λ es su multiplicidad como raíz del polinomio característico $p(\lambda)$. Denotaremos m_λ a la multiplicidad algebraica del autovalor λ.

Ejemplo

Supongamos $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. $p(\lambda) = -\lambda.(\lambda-1).(\lambda-2)^3$. Tiene grado 5.

En la siguiente tabla resumimos los autovalores de A y sus multiplicidades algebraicas.

Autovalores de A	0	1	2
Multiplicidad algebraica	1	1	3

La ***multiplicidad geométrica de un autovalor*** λ es la dimensión del autoespacio asociado.

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Hemos visto que su polinomio característico es:

$$p_B(\lambda) = -(\lambda-5)^2(\lambda-1)$$

Observación. El coeficiente principal de los polinomios característicos asociados a las matrices $n \times n$ es $(-1)^n$. Así que si la matriz es de 3×3 el coeficiente principal es $(-1)^3 = -1$. Si la matriz es de 2×2 el coeficiente principal será $(-1)^2 = 1$.

Consideremos sus autovalores, la multiplicidad algebraica, y la multiplicidad geométrica:

λ	m_λ	$\dim(S_\lambda)$

5	2	2
1	1	1
		3 autovectores LI

Coinciden m_λ con $\dim(S_\lambda)$. Uno podría llegar a pensar que esto pasa siempre. Pero…

Veamos que no es así. Tomemos la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Pueden verificar que el polinomio característico de M coincide con el de B:

$$p_M(\lambda) = -(\lambda - 5)^2(\lambda - 1)$$

Calculemos el autoespacio asociado al autovalor $\lambda = 5$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es de rango 2. Entonces ahora da como autoespacio una recta, no un plano. La dimensión del autoespacio será 1.

$$\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0 \ \wedge x = y$$

Entonces

$$S_5 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Ahora el autoespacio asociado a $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 0 \wedge x = -y$$

$$S_1 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Entonces si hacemos el cuadro para la matriz M, resulta:

λ	m_λ	$\dim(S_\lambda)$
5	2	1
1	1	1
		2 autovectores LI

Esto marca la diferencia entre *matrices diagonalizables y no diagonalizables*.

Nosotros estamos apuntando a diagonalizar una matriz, por lo cual esta diferencia que encontramos entre B y M será crucial.

Propiedad sobre multiplicidad algebraica y geométrica

Para cada autovalor λ de una matriz A, se verifica que:

$$\mathbf{dim(S_\lambda) \leq m_\lambda}$$

¿Puede ser cero la dimensión del autoespacio? ¿Qué querría decir que sea 0?

Si la dimensión de un autoespacio fuera cero, significaría que contiene sólo al vector nulo, pero sabemos que el vector nulo no es un autovector. Entonces:

$$S_\lambda \neq \{0_V\} \Rightarrow \dim(S_\lambda) \geq 1$$

Por lo tanto, resulta:

$$1 \leq \dim(S_\lambda) \leq m_\lambda$$

Consecuencia: ***si λ es un autovalor simple ($m_\lambda = 1$) entonces $dim(S_\lambda) = 1$.***

Matrices semejantes

Definición de matrices semejantes

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, decimos que:

A y B son matrices semejantes $\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible tal que $B = P^{-1}.A.P$.

Ejemplo

Consideremos las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos afirmar que B es semejante a A pues:

$$B = P^{-1}.A.P$$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Propiedad de las matrices semejantes

Si A y B son semejantes, tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto, los mismos autovalores.

$$A\ y\ B\ semejantes \Rightarrow p_A(\lambda)=p_B(\lambda) \Rightarrow tienen\ los\ mismos\ autovalores$$

Demostración

$$p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)$$

$$p_B(\lambda)=\det(B-\lambda I)$$

Además sabemos que:

$$A=P^{-1}BP$$

Entonces:

$$\boldsymbol{p_A(\lambda)}=\det(A-\lambda I)=\det(P^{-1}BP-\lambda I)=\det(P^{-1}BP-P^{-1}\lambda IP)=\det(P^{-1}.(B-\lambda I).P)$$
$$=\det(P^{-1}).\det(B-\lambda I).\det(P)=\det(B-\lambda I\ )=\boldsymbol{p_B(\lambda)}$$

Donde hemos reemplazado λI por $P^{-1}\lambda IP$ ya que:

$$P^{-1}\lambda IP=\lambda.P^{-1}P=\lambda I$$

Y hemos utilizado la propiedad distributiva del determinante respecto de la multiplicación de matrices.

Diagonalización de una matriz

Definición de matriz diagonalizable

Sea $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, se dice que A es diagonalizable ⇔ A es semejante a una matriz diagonal ⇔ $\exists P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ inversible tal que $P^{-1}AP=D$ diagonal.

Es un caso especial de semejanza. Una matriz es diagonalizable cuando es semejante a una matriz diagonal.

Condiciones que tiene que cumplir una matriz para ser diagonalizable

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable si y sólo si A tiene n autovectores linealmente independientes.

Sean $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ **autovectores LI** de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Podemos construir una matriz P cuyas columnas sean dichos autovectores:

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{v_1} \;\; \boldsymbol{v_2} \; \dots \; \boldsymbol{v_n})$$

P es inversible porque sus columnas son LI y por lo tanto tiene rango n $(det(P) \neq 0)$.

Puede demostrarse que: $\boldsymbol{P^{-1} A\, P = D}$ donde D es una matriz diagonal cuyos elementos son los respectivos autovalores:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

Consideremos la matriz M:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifiquen que los autovalores son: $\lambda = 2\ (doble)$ y $\lambda = 4 (simple)$, y que ambos autoespacios tienen dimensión 1.

No coinciden la multiplicidad algebraica de $\lambda = 2$ y su multiplicidad geométrica. Nos falta un autovector linealmente independiente para armar la matriz P, por lo tanto la matriz M no es diagonalizable.

Ejemplo 2

Veamos si es posible diagonalizar la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifiquen que los siguientes son sus autovalores:

$$\lambda = 4$$

$$\lambda = 1$$

Si la matriz tiene dos autovalores distintos, sin hacer ninguna cuenta más,

¿Podemos asegurar que es diagonalizable?

Sí, porque hay una propiedad que dice que los autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.

Los autovectores son:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Armamos la matriz P poniendo los autovectores como columnas:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La inversa de P la obtenemos haciendo:

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} . adj(P)$$

Ahora hagamos el cálculo para obtener la matriz diagonal.

$$D = P^{-1}.A.P = \underbrace{-\frac{1}{3}.\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3

Diagonalizar la siguiente matriz si es posible:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Buscamos los autovalores:

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4)$$

$$\lambda = 3\ (doble) \lor \lambda = -1$$

Atención: es un error muy común suponer que la existencia de un autovalor doble implica que la matriz no es diagonalizable.

Para $\lambda = -1$ buscamos el autoespacio correspondiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{-1} = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Verifiquen que el otro autoespacio es:

$$S_3 = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Como pudimos obtener tres autovectores linealmente independientes, la matriz P existe y la construimos ubicando a los autovectores como columna:

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Ésta es la matriz que permite diagonalizar a la matriz B.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1\\0 & 0 & 1\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

La matriz diagonal correspondiente es:

$$P^{-1}.A.P = D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

El orden de los autovalores en D es el mismo orden que el de los autovectores en las columnas de P. Por ejemplo si construimos la matriz P así:

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Verifiquen que la matriz D queda:

$$D = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Ejemplo 4

Diagonalizar la siguiente matriz si es posible:

$$C = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

¿Qué problema tiene esta matriz? ¿Cuál sería el polinomio característico?

No tiene autovalores reales. Entonces no es diagonalizable en $\mathbb{R}$. Más adelante veremos que es diagonalizable, pero en el campo de los números complejos.

EPL 3

Sea:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar los valores de a y b de modo que $\lambda = 3$ sea autovalor doble, y M sea diagonalizable.

Matriz con n autovalores distintos

¿Qué puede decirse de las matrices que tienen todos sus autovalores distintos?

Recordemos que autovectores asociados a autovalores distintos, son LI.

Por lo tanto:

Si una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene n autovalores distintos, entonces tiene n autovectores LI y en consecuencia es diagonalizable.

Observación importante:

Si una matriz es diagonalizable ¿puede afirmarse que todos sus autovalores son distintos? Veamos el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Es una matriz diagonalizable porque es diagonal[1]. Sin embargo no tiene todos sus autovalores distintos ya que $\lambda = 1$ es un autovalor doble.

EPL 4

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que su polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2.(1-\lambda)$, y $S = \{x \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ es un autoespacio de A. Analizar si A es diagonalizable.

Diagonalización de matrices simétricas

Matriz ortogonal

¿Qué característica tiene una matriz ortogonal? Que la traspuesta de la matriz es igual a la inversa:

---

[1] Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se dice que A es diagonalizable ⇔ A es semejante a una matriz diagonal ⇔ $\exists P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $P^{-1}AP = D$ diagonal. Si D es diagonal: $I^{-1}.D.I = D$ por lo tanto D es diagonalizable. Probamos que toda matriz diagonal, es diagonalizable.

$$P \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ es ortogonal } \Leftrightarrow P^{-1} = P^T$$

Una matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal si y sólo si:

- Sus columnas son ortogonales entre sí
- El módulo (norma) de cada columna es 1

Otra forma de decirlo:

- Las columnas deben ser versores ortogonales.

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Esta matriz es ortogonal. Verifiquen que efectivamente sus columnas son perpendiculares y de módulo 1.

Otro ejemplo:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Esta matriz también es ortogonal. Verifíquenlo.

Ejemplo

Consideremos la matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vamos a hacer una diagonalización ortogonal de esta matriz. Los autovalores son:

$$\lambda = 0 \vee \lambda = 5$$

El autoespacio asociado a $\lambda = 5$ queda:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_5 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Y el autoespacio asociado a $\lambda = 0$ queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_0 = gen\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Comprobemos que son perpendiculares los autovectores obtenidos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.(-2) + 2.1 = 0$$

No es casual que los autovectores que hemos obtenido sean perpendiculares:

En las matrices simétricas, los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales.

Ya tenemos dos vectores perpendiculares.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Con esta matriz P puedo diagonalizar a la matriz A:

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ésta es una diagonalización de A, similar a otros ejemplos previos. Pero precisamente por ser A simétrica, los autoespacios son rectas ortogonales. Por lo tanto, podríamos diagonalizar la matriz A mediante una Q ortogonal (columnas ortogonales y de módulo 1)

¿Cuál sería la matriz Q? Falta que los vectores columna sean versores. Para lograr esto hay que dividir cada autovector por su módulo. Tienen módulo igual a $\sqrt{5}$:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Esta matriz es ortogonal: $Q^T = Q^{-1}$.

Entonces la diagonalización ortogonal de la matriz A queda:

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalización ortogonal

Definición: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si existe P ortogonal ($P^{-1} = P^T$) tal que $P^T.A.P = D$.

Puede demostrarse que toda matriz simétrica es ortogonalmente diagonalizable. Pero además, las únicas matrices reales que pueden diagonalizarse ortogonalmente son las matrices simétricas.

En resumen:

A es ortogonalmente diagonalizable si y sólo si A es simétrica

Diagonalización de una transformación lineal

Autovalores y autovectores de una transformación lineal

Sea $T: V \to V$ una transformación lineal:

$\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de T si y sólo si $\exists v \in V$ no nulo, tal que $T(v) = \lambda . v$

v es el autovector asociado a λ.

Si V fuera un espacio de polinomios, entonces v sería un polinomio. Si V fuera un espacio de matrices, entonces v sería una matriz. Nosotros vamos a trabajar en $V = \mathbb{R}^n$

Propiedad

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $A = M(T)_{EE}$, entonces:

λ es autovalor de $T \Leftrightarrow \lambda$ es autovalor de A

Demostración

Por ser A la matriz estándar resulta:

$$T(v) = A.v \text{ con } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

λ es autovalor de $T \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n$ no nulo tal que $T(v) = \lambda . v \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^{nx1}$ no nulo tal que $A.v = \lambda . v \Leftrightarrow \lambda$ es autovalor de A.

Probamos que ***en una TL en $\mathbb{R}^n$, los autovalores y autovectores de la transformación son los mismos que los de su matriz asociada en base canónica.***

Definición de transformación lineal diagonalizable

Sea $T: V \to V$ una transformación lineal. Decimos que T es diagonalizable si existe alguna base B tal que la matriz $M_{BB}(T)$ es diagonal.

Ejemplo

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 | \, T\big((x,y)\big) = (x+2y, 3y)$$

Hallar autovectores y autovalores de T, y analizar si es diagonalizable.

Resolución

1. Buscamos la matriz de T en la base canónica.

$$A = M(T)_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Buscamos autovalores y autovectores de A

$$\lambda = 1 \vee \lambda = 3$$
$$S_1 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$S_3 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

3. A es diagonalizable, con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad D = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Veamos que representa D:

$B = \{(1,0),(1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ <u>formada por autovectores</u> de T,

¿Cómo se busca la matriz asociada a una transformación lineal?

$$M(T)_{BB} = \left([T(v_1)]_B \quad [T(v_2)]_B \right)$$

Entonces esas coordenadas son:

$$T\big((1,0)\big) = (1,0) = 1.(1,0) + 0.(1,1) \;\; \Rightarrow [(1,0)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\big((1,1)\big) = (3,3) = 0.(1,0) + 3.(1,1) \;\; \Rightarrow [(3,3)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Así que la matriz queda:

$$M(T)_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

Entonces, si tenemos una base B formada por autovectores de T, ¡la matriz asociada en esa base es diagonal!

Propiedad

Una TL en $\mathbb{R}^n$ es diagonalizable si y sólo si existe una base B de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de T. En tal caso, $M(T)_{BB} = D$.

Desde la perspectiva matricial, T es diagonalizable si y sólo si $A = M(T)_{EE}$ es diagonalizable.

EPL 5

a) Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Probar:

   Si $\boldsymbol{Nu(T) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}}$ entonces $\boldsymbol{\lambda = 0}$ es un autovalor de $\boldsymbol{T}$ y el autoespacio correspondiente es $\boldsymbol{Nu(T)}$

b) Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que verifica las siguientes condiciones:

   i) $T(v) = 2v \ \ \forall v \in S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x - z = 0 \}$

   ii) $Nu(T) = gen\{(1,0,0)\}$

   Analizar si existe una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz asociada a T respecto de dicha base sea diagonal. En caso afirmativo indicar B y $M(T)_{BB}$.