SERIES NUMERICAS Y SERIES DE POTENCIAS

Series Numéricas:

Sabemos de que trata el concepto de suma, aplicable a un número finito de sumandos, en este capítulo intentamos resolver el problema de sumar un número infinitos de términos.
Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\in N}$ tal que, $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\ , ...\}$ formamos sus sumas parciales definidas como:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&.. \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \\
&..
\end{aligned}$$

A la sucesión formada por las sumas parciales de $\{a_n\}$ la denominamos "serie numérica" $\{S_n\}$, siendo: $\{S_n\} = \{S_1\ , S_2\ , S_3\ , ...\ , S_n\ , ...\}$, a los números $a_1, a_2, a_3,$ los llamamos términos de la serie, y a $S_1\ , S_2\ , S_3\ ,$ sumas parciales de la serie estando ambos relacionados por las expresiones anteriores.
En general una serie queda definida por las sumas parciales de la sucesión $\{a_n\}$.

Para denotar una serie se suele utilizar la notación $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, en la cual:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Algunos autores denominan serie numérica a la expresión anterior que tiene la ventaja de recordarnos que queremos hacer a través del concepto de serie, esto es, sumar.
Definamos la "serie armónica" asociada a la sucesión armónica $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in N}$ como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

Los términos $1\ , \frac{1}{2}\ , \frac{1}{3}$, son términos de la serie y sus sumas parciales serán:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
S_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

Luego la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es en realidad la sucesión $1\ , \frac{3}{2}\ , \frac{11}{6}\ , ...\ , S_n\ , ...$

Si bien denotaremos siempre a los términos de la serie, no debemos olvidar su verdadera constitución.

Notemos que mientras la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es convergente, pues $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, la serie armónica será divergente (luego lo demostraremos).

La cuestión de la convergencia de series numéricas, objetivo de nuestro estudio, queda resuelta utilizando el criterio de convergencia de sucesiones dado que la serie es una sucesión de sumas; para eso deberemos evaluar el resultado de $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Tomamos límite sobre el término general de la sucesión de sumas parciales y puede ocurrir que el mismo sea finito, infinito o bien no existe.

- Si el límite es finito, la serie numérica $\{S_n\}$ será *convergente*, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, y al resultado del límite -*S* - lo conoceremos como *suma de la serie*.

Esto significa que si una serie numérica converge a *S*, la suma de los infinitos términos de la sucesión $\{a_n\}$ que le da origen es el número real *S*.

Si la serie converge entonces diremos que la sucesión $\{a_n\}$ es sumable y lo podemos indicar como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Hay propiedades de las sumas que no se conservan para las series, otras sí.

<u>Propiedad:</u> Sean $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes, entonces:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} k\, a_n = k\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $k \in \Re$ es convergente.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.

- Si el límite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ es infinito la serie numérica será *divergente* y la sucesión no es sumable.

Por ejemplo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 = 1+4+9+16+........+n^2+.........$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$ es divergente y la sucesión $\{n^2\}$ no es sumable.

- Si el límite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ no existe diremos que la serie es *oscilante*. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ es una serie oscilante cuyas sumas parciales son 1 y 0.

Muchas veces es muy difícil encontrar la forma de S_n por lo tanto la determinación de la convergencia de una serie puede ser un asunto complicado.

Es por esta razón que para resolver lo dicho se utilizarán criterios de convergencia que operan sobre el término general de la sucesión que origina la serie, es decir sobre a_n, que es de fácil localización.

Por ejemplo estudiemos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$ y para ello efectuemos fracciones simples sobre a_n y será: $\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

En consecuencia podemos escribir:

$$S_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

....

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \{S_n\} = 1 - \frac{1}{2} \;,\; 1 - \frac{1}{3} \;,\; 1 - \frac{1}{4} \;, \ldots\ldots\ldots\ldots, \; 1 - \frac{1}{n+1} \;, \ldots\ldots$$

Tomando $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, afirmamos que la serie converge y su suma vale uno.

Si $\{a_n\}$ es convergente esto no garantiza que la serie $\{S_n\}$ también lo sea, recuerde la serie armónica, pero si la serie converge entonces $\{a_n\}$ también.

La convergencia o divergencia de una serie no se altera si se suprime un número finito de términos.

Exploremos el comportamiento de una serie numérica muy importante como la Serie Geométrica.

Definimos a la serie geométrica a través de la sucesión geométrica $\{a\,q^{n-1}\}_{n\in N}$ pudiendo escribirla como $a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots\ldots + aq^{n-1} + \ldots\ldots\ldots$ en donde cada término de la serie se obtiene multiplicando el anterior por una constante q llamada *razón* de la serie.

Busquemos la forma del término general de la sucesión de sumas S_n y estudiemos la convergencia de la serie.

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + aq^{n-1}$$

$$q\,S_n = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + aq^n$$

$$S_n - q\,S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots\ldots + aq^{n-1} - aq - aq^2 - aq^3 - aq^4 - \ldots\ldots\ldots - aq^n$$

$$S_n - q\,S_n = a - aq^n \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} \quad |q| \neq 1$$

Tenemos entonces la forma del término general buscado y tomamos límite.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \begin{cases} S = \dfrac{a}{1-q} & si \;\; |q| < 1 \\ l = \infty & si \;\; |q| > 1 \end{cases}$$

En donde vemos que la serie converge a $\frac{a}{1-q}$ si la razón en valor absoluto es menor a uno.

Nos falta averiguar que pasa si $|q| = 1$, entonces veamos que forma adopta el término general.

$$S_n = a + a + a + a + a + a + ... + a = n\,a \quad \text{si} \quad q = 1$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\,a = \infty$ y la serie diverge.

$$S_n = a - a + a - a + a - a + ... \text{ si } \; q = -1$$

Entonces no existe el $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ y la serie es oscilante.

Finalmente concluimos que:

$$Serie\ geométrica \begin{cases} Converge\ ,\ S = \dfrac{a}{1-q} & si \;\; |q| < 1 \\ Diverge & si \;\; |q| > 1 \\ Diverge & si \;\; q = 1 \\ Oscilante & si \;\; q = -1 \end{cases}$$

Ejemplos:

Sean las siguientes sumas: a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{3^{n-1}} + ...$

b) $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{n-1} + ...$

En el caso (a) vemos que se trata de una suma que puede considerarse como la serie geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ cuya razón es $q = \frac{1}{3} < 1$ por lo tanto converge a $S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

Es decir que la suma propuesta en (a) converge al número real $\frac{3}{2}$

En el caso (b) también dicha suma la podemos tomar como el desarrollo de los términos de la serie geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}$ que tiene razón $q = 2 > 1$ por lo tanto diverge y la suma (b) no puede ser expresada por un número real, es decir dicha suma es infinita.

c) El número $0,\overset{\frown}{9}$ puede ser expresado como:

$$0,\widehat{9} = 0,9999999.......... = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

O sea que el número $0,\widehat{9}$ es el resultado del desarrollo de la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$ cuya razón es $q = \frac{1}{10} < 1$ siendo esta convergente a $S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$

En virtud del resultado anterior, ¿ podemos afirmar que $0,\widehat{9} = 1$?

<u>Condición necesaria para la convergencia</u>: Si la serie $\sum a_n$ converge entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Para demostrarlo consideramos:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

El recíproco de esta propiedad es FALSO. No es cierto que si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces la serie $\sum a_n$ converge y como contraejemplo proponemos la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente pero se cumple que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

En principio esta condición no es útil para detectar la convergencia de una serie, pues aclara un comportamiento una vez que se conoce si la serie converge. Pero se puede utilizar para determinar que una serie no converge, por ejemplo la serie tratada anteriormente $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}$ vemos que no cumple con la condición necesaria para la convergencia pues $\lim_{n\to\infty} 2^{n-1} = \infty$, por lo tanto la serie no puede ser convergente como hemos visto.

Series de Términos Positivos:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \ a_n > 0 \ \forall n$

Estudiaremos ahora el comportamiento de las series numéricas de términos positivos y comencemos a describir, sin demostración, los criterios de convergencia para dichas series. Cabe aclarar que la utilización de los criterios simplifica notablemente la determinación de la convergencia o no de una serie numérica, pero en su defecto perderemos de vista la suma de la serie (en caso que sea convergente) pues no operaremos con S_n sino con el término general de la sucesión asociada a la serie, a_n .
Sin embargo si queremos un valor aproximado de la suma de la serie podemos sumar un número finito de términos de la misma.

Criterios de convergencia: Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos.

1- Criterio de D'Alambert: Evaluamos el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \begin{cases} L<1 & \textit{la serie converge} \\ L>1 & \textit{la serie diverge} \\ L=1 & \textit{el criterio no decide} \end{cases}$

$1+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n\,!}+\ldots\ldots\ldots$ hacemos $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\,!}}{\frac{1}{n\,!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\,!}{(n+1)\,!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$

la serie dada es convergente.

2- Criterio de la Raíz de Cauchy: Evaluamos el límite

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \begin{cases} L<1 & \textit{la serie converge} \\ L>1 & \textit{la serie diverge} \\ L=1 & \textit{el criterio no decide} \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ hacemos $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$ la serie es convergente.

3- Criterio de la integral de Cauchy: Este es un criterio muy importante, para poder aplicarlo la serie en cuestión debe ser de términos positivos y decreciente término a término.
Sea f una función continua y no negativa, decreciente y definida para $x \geq 1$, tal que se cumple que $f(n) = a_n \ \forall n \geq 1$, entonces si:

Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces la serie $\sum a_n$ converge.

Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

El criterio de la integral no relaciona el valor de la integral impropia con la suma de la serie, solo es útil para conocer el carácter de la serie como ocurre con todos los criterios que aseguran la convergencia o divergencia de la misma.

Ejemplo:

Serie Armónica Generalizada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $p > 0$, donde para $p = 1$ es la serie armónica.

Elegimos $f(x) = \frac{1}{x^p}$ y utilizamos el criterio de la integral pues la serie cumple los requisitos necesarios.

$$\int^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t\to+\infty} \left\{ \frac{1}{1-p} \left[t^{-p+1} - 1 \right] \right\} \quad si \quad p \neq 1 \quad \text{y ocurre que si} \quad \begin{cases} p > 1 & la\ serie\ converge \\ p < 1 & la\ serie\ diverge \end{cases}$$

En el caso de $p = 1$ la aplicación del criterio nos conduce a: $\int^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty} \left[\ln t - \ln 1 \right] = \infty$ lo que muestra la divergencia de la serie armónica.

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ...$ esta suma se puede expresar como $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...$ donde vemos que se trata de una serie armónica generalizada o "serie p", con valor de $p = 2 > 1$ por lo tanto es convergente.

4- Criterio de Comparación: Es un criterio que para aplicarlo se necesita conocer el carácter de una serie, para luego compararla con la serie a la cual le estudiamos la convergencia.

Supongamos que $\sum a_n$ es la serie de convergencia conocida y que $\sum b_n$ es la serie cuyo carácter queremos determinar, el criterio propone que:

Si $\sum a_n$ converge y $a_n \geq b_n$, $\forall n$ entonces $\sum b_n$ es convergente.

Si $\sum a_n$ diverge y $a_n \leq b_n$, $\forall n$ entonces $\sum b_n$ es divergente.

Por ejemplo tomemos como serie a determinar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$ y comparémosla con la serie armónica generalizada, con $p = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ la cual sabemos es convergente.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in N$$
$$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n\,(n+1)} \quad \forall n \in N$$

Por lo tanto como $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n\,(n+1)}$ $\forall n \in N$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$ es también convergente, (pruebe esto último utilizando el criterio de la integral).

5- <u>Criterio de Comparación en el Límite:</u> Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$ y se cumple que $L \neq 0$ y $L \neq \infty$, entonces ambas series convergen o ambas series divergen.
Aplique este criterio al ejemplo anterior y verifique el resultado obtenido.

Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n-1}$ y formemos el límite del criterio comparando con $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{3n-1}} = 3$$ por lo tanto según el criterio anterior $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n-1}$ es divergente

6- <u>Criterio de Raabe:</u> Evaluamos el límite $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L \begin{cases} L<1 & \textit{la serie diverge} \\ L>1 & \textit{la serie converge} \\ L=1 & \textit{el criterio no decide} \end{cases}$

Analicemos según este criterio la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\,(n+1)}$ la cual sabemos es convergente.

Evaluamos $$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{n\,(n+1)}{(n+1)\,(n+2)}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{n}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+2-n}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,n}{n+2} = 2 > 1$$ por lo tanto según el criterio la serie converge.

Series de Términos Negativos:

Todas las consideraciones hechas hasta aquí para series de términos positivos son aplicables de forma idéntica en series de términos todos negativos.
Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n < 0\ \forall n$ y efectivamente al ser $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = -\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} -a_n\right)$ lo dicho anteriormente es válido.
Por ejemplo si analizamos a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)}{n^2}$ concluimos que es una serie convergente, a su vez la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)}{n}$ será divergente.
Si las series contienen tanto términos positivos como negativos la cuestión de la convergencia se resuelve de manera totalmente distinta y ya no podemos usar los criterios vistos hasta el momento.
De este tipo de series nos interesan aquellas que alternadamente contienen un término positivo y otro negativo.

Series Alternadas:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ a_n\ \ ,\ a_n > 0\ \forall n$, o sea definimos a la siguiente suma como serie alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

La convergencia de este tipo de series la resuelve el Teorema de Leibniz, que dice:

Si $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \ldots\ldots\ldots$ o sea se cumple: $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n$ y simultáneamente se cumple $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ converge.

Pero la forma en como convergen estas series es particular, puesto que podremos distinguir entre la *convergencia absoluta* y la *convergencia condicional*.
Para poder clasificar la forma de convergencia de una serie alternada se define:
Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ a_n\ \ ,\ a_n > 0\ \forall n$ convergente, la misma es *absolutamente convergente* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

En caso que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea divergente, la convergencia de la serie alternada se clasifica como *condicional*.
Es decir que la forma de convergencia de una serie alternada depende de la convergencia o no de la serie de términos positivos asociada a la misma.
Se deduce del Teorema de Leibniz que el error cometido al aproximar la suma de una serie alternada por una suma parcial S_n es menor que el primer término despreciado en tal suma, es decir si: $S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n+1} a_n$, entonces $|\,S - S_n| < a_{n+1}$ donde S es la suma de la serie.
Consideremos por ejemplo la serie armónica alternada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots\ldots\ldots$ que la expresamos como $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ \frac{1}{n}$ y determinemos su convergencia.
Como podemos ver se cumplen las condiciones impuestas por el Teorema de Leibniz para la convergencia, pues: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ y $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}\ \ \forall n$, es decir que la serie armónica alternada es convergente.
Estimemos ahora una cota superior de la suma de la serie a través de calcular la S_3 suma parcial.

$$S_1 = a_1 = 1$$
$$S_2 = a_1 - a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

La aproximación será entonces $\left| S - \frac{5}{6} \right| < \frac{1}{4}$ de donde deducimos que $\frac{7}{12} < S < \frac{13}{12}$

Determinemos ahora que tipo de convergencia posee la serie tratada, para eso formamos la serie de términos positivos asociada y esta es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ la serie armónica que sabemos es divergente, por lo tanto la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ es *condicionalmente convergente*.

Ahora tenemos que tratar de aclarar cuál es la diferencia entre la convergencia absoluta y la condicional y hagamos esto con la serie recién vista.
Como la serie converge entonces tiene suma S y esta se calcula como:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ahora asociemos los términos de manera que después de uno positivo aparezcan dos negativos.

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots$$

Sumemos parcialmente.

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

evidentemente encontramos que $S = \frac{1}{2} S$ ecuación que se satisface si $S = 0$, o sea admitimos que la suma de la serie es nula. Sin embargo hemos visto que la suma de la serie está acotada por $\frac{7}{12} < S < \frac{13}{12}$ según la consecuencia del Teorema de Leibniz, entonces ¿Dónde está el error?

Esta contradicción obedece a un paso en el cual se da por supuesto que las operaciones válidas para sumas finitas son también válidas para sumas infinitas.

Al realizar el reordenamiento de un término positivo seguido de dos negativos y luego sumar, hemos aplicado la propiedad asociativa y hemos supuesto que la suma no cambia, este es el punto, si reordenamos la serie su suma cambia.
Esta es la característica de las series condicionalmente convergentes, siempre se puede lograr un reordenamiento de la misma tal que la suma S sea un número prefijado α.
Esto no ocurre en las series absolutamente convergentes en las cuales el reordenamiento de sus términos no cambia la suma de la misma.

Demuestre que cada una de las siguientes series es:

a) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+........$ condicionalmente convergente.

b) $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}-\frac{4}{3^3}+\frac{5}{3^4}-........$ absolutamente convergente.

Series de Potencias:

Ahora trasladamos nuestra atención de las sumas infinitas a expresiones tales como:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

O sea sumas de cantidades que dependen de x, en otras palabras estamos interesados en funciones definidas mediante ecuaciones de la forma:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ...$$

En particular si las funciones sumadas son de forma potencial, es decir contienen potencias de exponentes enteros no negativos de una variable x, tales como:

$$a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 + a_3\ x^3 + ... + a_n\ x^n + ...$$

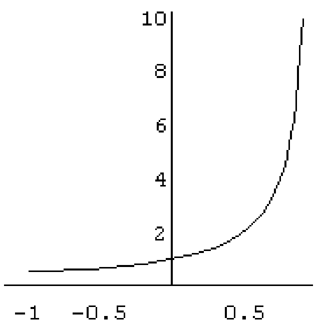
donde los a_n son constantes que dependen de n, a dicha suma la conocemos como *serie de potencias de* x y la denotamos por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n$.

Observemos que si una serie numérica converge a un número real (su suma), entonces podemos aceptar que una serie de funciones converge a una *función* para un determinado conjunto de valores de x. Es de nuestro interés encontrar este conjunto de valores llamado *intervalo de convergencia*.

Si analizamos en particular la serie geométrica de razón x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$$

Entonces según lo visto para series geométricas esta debe ser convergente para $|\ x\ | < 1$ y su suma vale $\frac{1}{1-x}$ por lo tanto se puede escribir que: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad si \quad -1 < x < 1$



La función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ tiene como dominio los valores para los cuales $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge, es decir el intervalo $-1 < x < 1$

Aclaremos que una serie de potencias representa la función, a la cual converge, solo en el intervalo de convergencia y no para otros valores de la variable.
El intervalo de convergencia es el conjunto de valores de x para los cuales la serie de potencias se transforma en una serie numérica convergente.
Así en el ejemplo anterior es claro que si evaluamos a la serie de potencias en $x = 1$ esta se transforma en la serie geométrica 1+1+1+1+1+1+......., que es claramente divergente, observe que la imagen de la función $\dfrac{1}{1-x}$ no está definida en ese punto.
Si en cambio evaluamos la serie de potencias en $x = -1$ la misma se transforma en la serie numérica alternada $1-1+1-1+1-1+.......$ cuyas sumas parciales son 1 y 0, no siendo convergente la misma por no cumplir con el Teorema de Leibniz, o sea la suma no es representada por algún número real. Sin embargo la función $\dfrac{1}{1-x}$ alcanza el valor $\dfrac{1}{2}$ en ese punto, o sea no se cumple la igualdad anterior, evidentemente la serie no representa a la función en $x = -1$ y justamente por eso este valor no puede pertenecer al intervalo de convergencia.

<u>Cálculo del Intervalo de Convergencia:</u> Para el cálculo de dicho intervalo recurriremos al criterio de D'Alambert que en este caso propone resolver:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\ x^{n+1}}{a_n\ x^n}\right| < 1$$

Se pide que el límite sea menor a la unidad pues esa es la condición para que la serie sea convergente, luego despejamos de la expresión anterior el conjunto de valores de x que la cumplen.
Generalmente ocurrirá al resolver el límite anterior que obtendremos una expresión tal como:

$$|\ x\ |\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}_{L} < 1 \quad \Rightarrow \quad |\ x\ | < \frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{L} < x < \frac{1}{L} \qquad L \neq 0$$

O sea que el intervalo de convergencia es el intervalo centrado en el origen $\left(-\dfrac{1}{L}, \dfrac{1}{L}\right)$
Sin embargo es necesario tomar en cuenta que el criterio de D'Alambert no proporciona información si $|\ x\ | L = 1$ y en ese caso puede ocurrir que la serie sea convergente o no. Esto lleva a una incerteza respecto si el extremo del intervalo debe pertenecer o no al intervalo de convergencia, razón por la cual deberán estudiarse los extremos por separado y ver si ellos transforman la serie de potencias en una serie numérica convergente para ser finalmente considerados.
Se define como radio de convergencia al número $R = \dfrac{1}{L}$ que coincide con la semiamplitud del intervalo de convergencia, pudiendo calcularse dicho radio como:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Según sea otro el valor del límite L pueden ocurrir los siguientes casos:

Si $L = 0$ entonces el intervalo de convergencia es infinito, la serie converge para todo x, en efecto: $\mid x \mid 0 < 1$ se satisface para todo x . El radio de convergencia R es infinito.

Si L es infinito entonces $\mid x \mid L < 1$ solo se satisface para $x = 0$ y el radio de convergencia es nulo, $R = 0$.

Una serie de potencias define una función *f* con valores $f(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$ que tiene como dominio los valores de x para los cuales la serie converge.

Si la serie de potencias es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x-c)^n$ el intervalo de convergencia será un intervalo centrado en $x = c$, como lo muestran los siguientes ejemplos.

Dadas las siguientes series de potencias hallemos el intervalo de convergencia:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\,!}$

Formemos la expresión $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}}{\dfrac{x^n}{n\,!}} \right| < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!\, x^{n+1}}{(n+1)!\, x^n} \right| < 1$$

$$|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} < 1 \;\Rightarrow\; |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} < 1 \;\Rightarrow\; |x|\, 0 < 1$$

El intervalo de convergencia es $I = (-\infty \,, +\infty)$, la serie converge para todo valor de x.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$

Formemos la expresión $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}} \right| < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \left| (-1) \frac{n\, x^{n+1}}{(n+1)\, x^n} \right| < 1$$

$$|x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)\, n}{n+1} \right| < 1 \;\Rightarrow\; |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} < 1 \;\Rightarrow\; |x|\, 1 < 1$$

$$|x| < 1 \;\Rightarrow\; -1 < x < 1 \;\Rightarrow\; I = (-1 \,, 1)$$

Ahora debemos estudiar los extremos del intervalo para ver si deben ser incluidos en el mismo.

Si $x = -1$ la serie de potencias se transforma en la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$$

Esta es una serie de términos negativos y la trataremos según dijimos, como una serie de términos positivos, observemos que es la serie armónica negativa siendo esta divergente, por lo tanto $x = -1 \notin I$

Si $x = 1$ la serie de potencias se transforma en $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ la serie armónica alternada la cual debemos estudiarla según el criterio de Leibniz, y fue determinado anteriormente que la misma converge, por lo tanto $x = 1 \in I$.
Finalmente el intervalo de convergencia de la serie de potencias dada, es: $I = (-1\,,1]$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\,3^n}$ Esta es una serie de potencias tal que su intervalo de convergencia estará centrado en $x = 2$. Calculemos el mismo.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} \, \frac{n\,3^n}{(x-2)^n} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |\,x-2\,| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)\,3} < 1$$

$$|\,x-2\,| \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{n}{(n+1)\,3}}_{L=\frac{1}{3}\ \therefore\ R=3} < 1 \quad \Rightarrow \quad |\,x-2\,| < 3 \quad \Rightarrow \quad I = (-1\,,5)$$

Estudiamos los extremos y es: Si $x = -1$ tenemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\,3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ armónica alternada, convergente, por lo tanto $x = -1 \in I$.
Si $x = 5$ la serie resultante es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\,3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ la serie armónica, divergente, por lo tanto $x = 5 \notin I$. El intervalo de convergencia de la serie de potencias es: $I = [-1\,,5)$