Introducción

Lugar geométrico

Dada una ecuación $F(x, y) = 0$ se denomina lugar geométrico al conjunto de los puntos $P(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ que verifican la ecuación.

Ejemplo 1

Consideremos que la ecuación $F(x, y) = 0$ es:

$$x^2 - 4xy = 0$$

¿Qué tipo de lugar geométrico representa? Dicho de otro modo, ¿qué curva determinan los puntos que verifican esta ecuación?

Si sacamos factor común x queda:

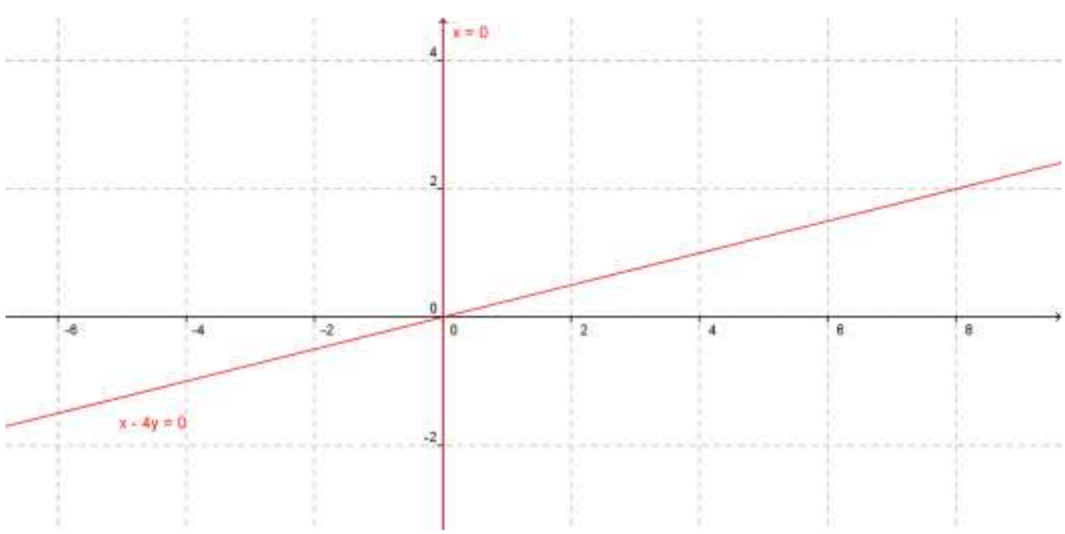
$$x.(x - 4y) = 0$$

¿Cuándo un producto de dos factores es igual a cero? Cuando alguno de los dos es igual a cero:

$$x = 0 \vee x = 4y$$

¿Qué representa geométricamente cada una de estas ecuaciones?

- $x = 0$ es la ecuación del el eje y
- $x = 4y$ es una recta de pendiente $\frac{1}{4}$.



Es decir que el lugar geométrico es un par de rectas no paralelas.

Ejemplo 2

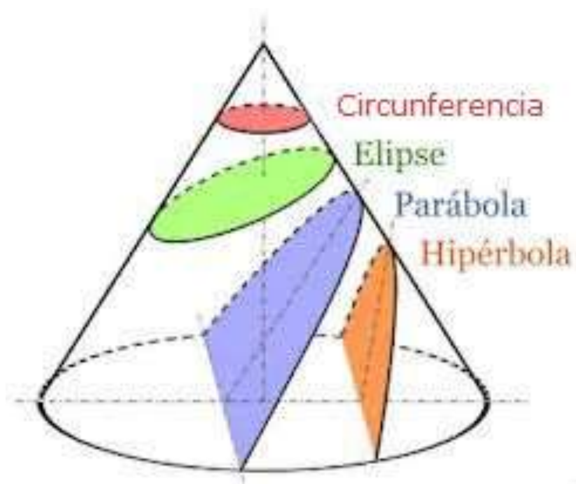
Veamos este otro ejemplo:

$$x^2 + y^2 = -4$$

No existe lugar geométrico, porque no hay ningún punto que satisfaga la ecuación (es imposible que la suma de dos cuadrados dé por resultado un número negativo).

¿Qué son las cónicas?

Apolonio, contemporáneo de Arquímedes, en el siglo III antes de Cristo, estudió con mucha profundidad las curvas cónicas. El nombre de “cónicas” les viene de que son curvas que se obtienen de cortar un cono con diferentes planos, como muestra el siguiente esquema:



Las cónicas son curvas determinadas por la intersección de un cono circular recto con planos de distintas inclinaciones.

Circunferencia

Todos conocen las circunferencias, saben que pueden trazarse con un compás. Les resultará natural la siguiente:

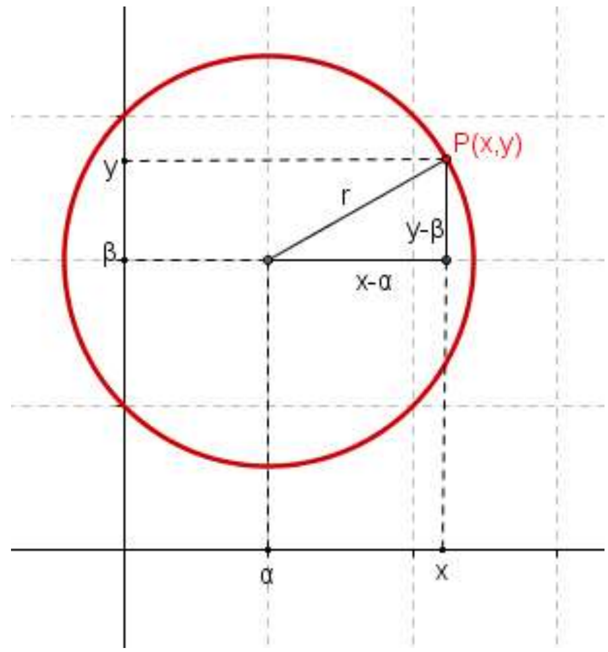
La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

$$Centro: C(\alpha, \beta)$$

$$\mathcal{C} = \{P(x, y) | d(P, C) = r\ ;\ r > 0\}$$

Ahora vamos a deducir partiendo de esta definición, cuál es la expresión de una circunferencia.

Consideremos el siguiente esquema:



Por teorema de Pitágoras sabemos que los puntos $P(x, y)$ deben cumplir esta ecuación:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

Que se llama ***ecuación ordinaria de la circunferencia con centro $C(\alpha, \beta)$ y radio r***.

Si $r=0$, ¿qué objeto geométrico representa la ecuación?

Ecuación canónica de la circunferencia

Hay un caso particular de circunferencia, que tiene su centro en el origen. La ecuación que la define se llama ***ecuación canónica*** de la circunferencia:

$$x^2+y^2=r^2$$

Si la circunferencia no está centrada en el $(0,0)$, es posible armar un nuevo sistema de modo tal que el centro de la circunferencia coincida con el nuevo origen de coordenadas. Por ejemplo consideremos:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

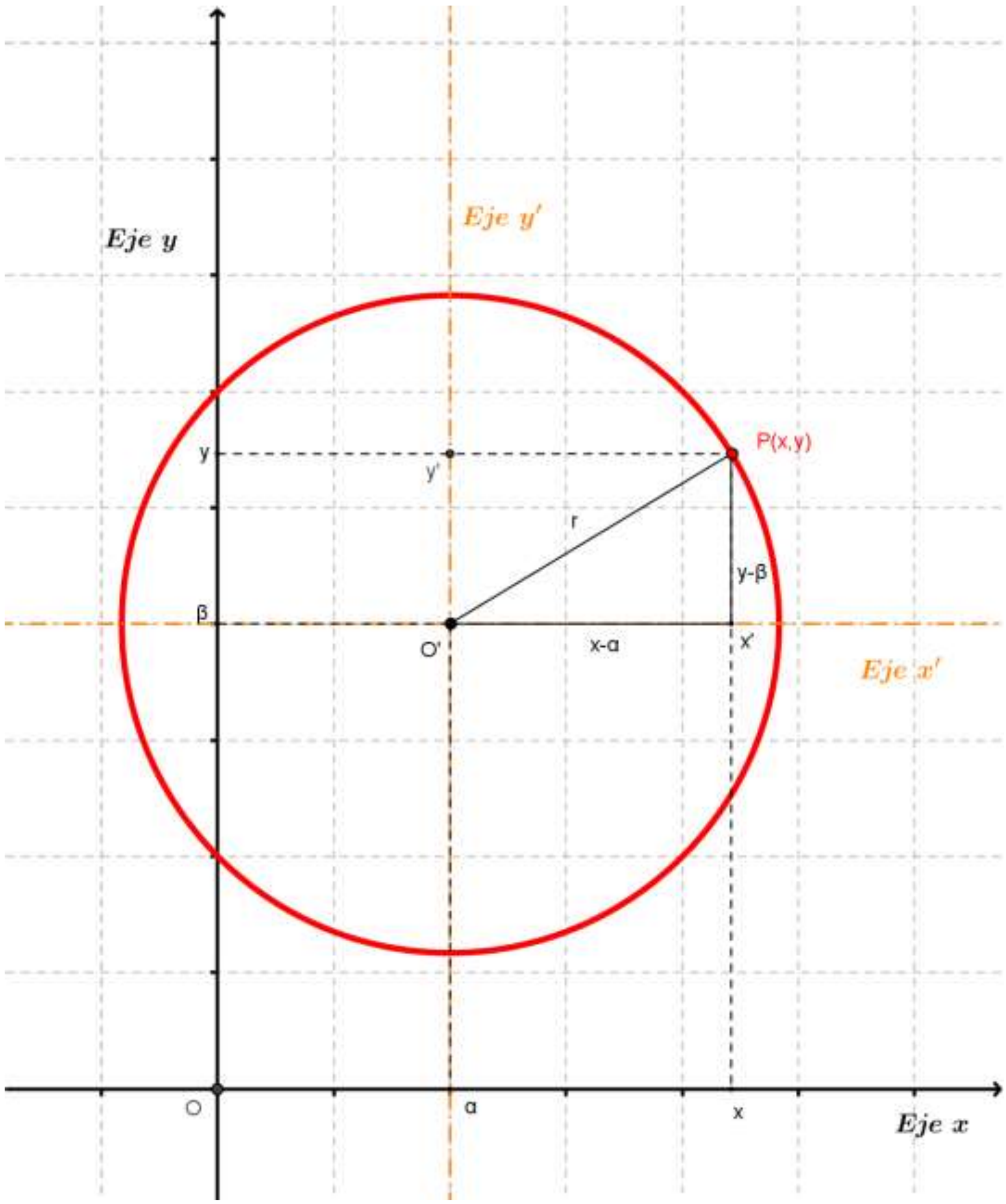
Si hacemos un cambio de variables:

$$\begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$$

En las nuevas variables la ecuación queda expresada en forma canónica:

$$x'^2 + y'^2 = r^2$$

Para obtener la ecuación canónica, hicimos una traslación de ejes, de modo que el centro del nuevo sistema coincidiera con el centro de la circunferencia:



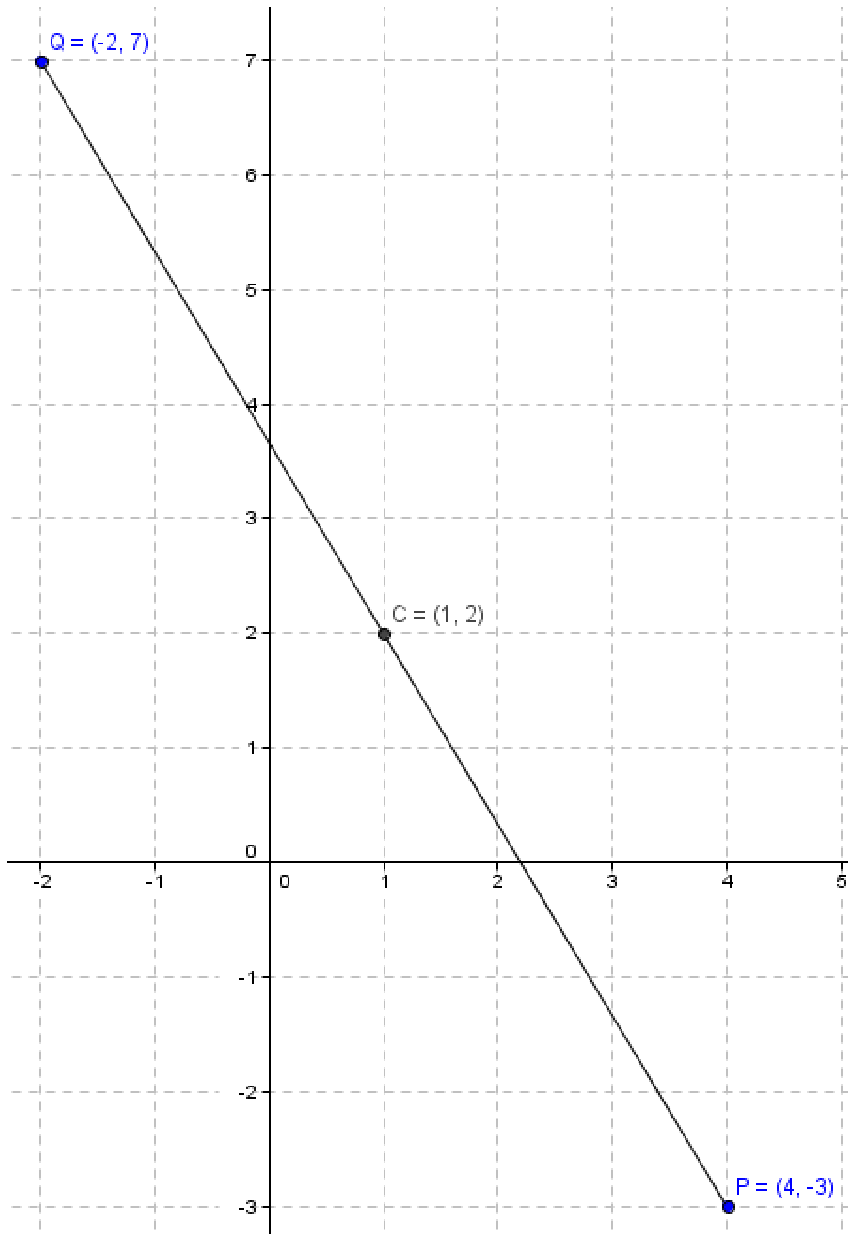
Ejemplo

Encuentre la ecuación de una circunferencia si los extremos de uno de sus diámetros son $P(4,-3)$ y $Q(-2,7)$.

Conociendo los extremos de un diámetro, ¿cómo obtendrían el centro? ¿Y el radio?

Resolución

Como el segmento PQ es un diámetro, el centro es el punto medio de este segmento. Y el radio es la mitad de la distancia entre P y Q:



$$C = \left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{-3+7}{2}\right) = (1,2)$$

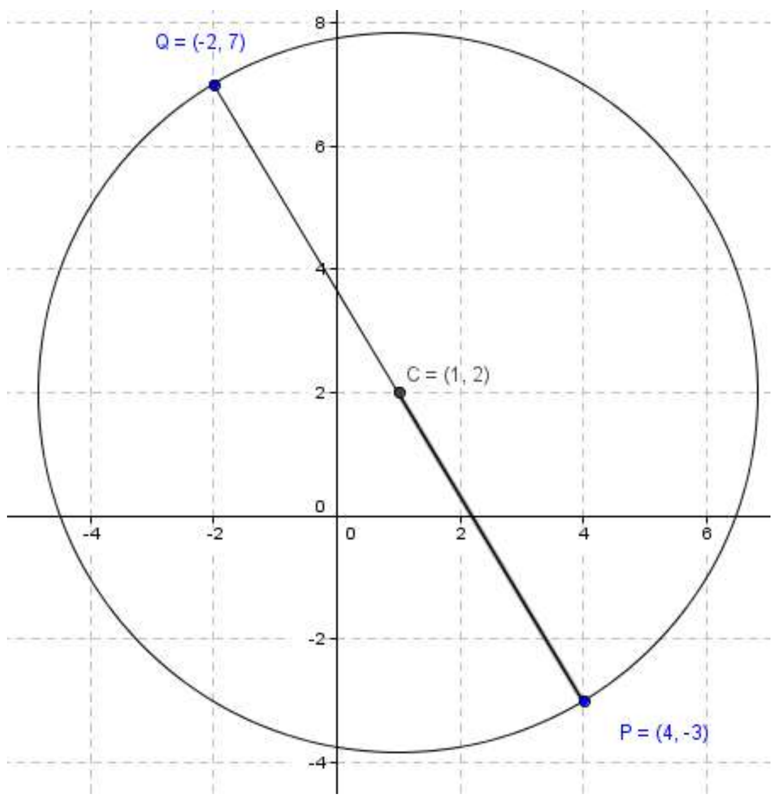
$$\overrightarrow{PQ} = (-6,10) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = 2\sqrt{34}$$

$$radio = \sqrt{34}$$

Entonces ya tenemos las coordenadas del centro, y tenemos el radio. Basta con reemplazar en la ecuación ordinaria para obtener la ecuación de esta circunferencia:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 34$$

La gráfica es:



Desde ecuación ordinaria hacia ecuación general

A partir de la ecuación ordinaria de la circunferencia, desarrollemos los cuadrados de binomio:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = r^2$$

Y ahora reagrupemos los términos:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0$$

Y renombremos las constantes:

$$x^2 + y^2 \underbrace{-2\alpha}_{D} x \underbrace{-2\beta}_{E} y + \underbrace{(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)}_{F} = 0$$

Se obtiene la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

llamada ***ecuación general de la circunferencia***.

Desde ecuación general a ecuación ordinaria

Hemos obtenido a partir de la ecuación ordinaria, la ecuación general de una circunferencia.

Pero dada una ecuación que tiene este aspecto:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si se la pasa a la forma de ecuación ordinaria: ¿siempre se obtendrá una circunferencia?

Para responder esto vamos a recordar cómo se completa cuadrados con un ejemplo.

Ejemplo

Vamos a completar cuadrados en la siguiente expresión:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0 \qquad [\mathbf{1}]$$

La pregunta es: ¿qué lugar geométrico representa esta ecuación? ¿Estamos seguros de que es una circunferencia? Tendremos que llevarla a la forma ordinaria.

La idea es transformar:

$$x^2 - 4x \xrightarrow{en} (x - \alpha\,)^2 + C_1$$

Y además:

$$y^2 + 2y \xrightarrow{en} (y - \beta)^2 + C_2$$

Empecemos con $x^2 - 4x$

¿Qué le falta a esta expresión para ser un trinomio cuadrado perfecto? Falta el término independiente. Sabemos que el término independiente deberá ser la mitad de 4, elevado al cuadrado.

Entonces podemos sumar y restar 2^2:

$$\underbrace{x^2 - 4x + 2^2}_{(x-2)^2} - 2^2 = (x-2)^2 - 4$$

Ahora con la expresión para la variable y:

$$y^2 + 2y = \underbrace{y^2 + 2y + 1^2}_{(y+1)^2} - 1^2 = (y+1)^2 - 1$$

Reemplazamos en la $[\mathbf{1}]$:

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 1 = 0$$

Y ahora reordenamos para obtener la ecuación de la circunferencia:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 6$$

¿Cuáles son el centro y el radio?

$$C = (2, -1)$$

$$r = \sqrt{6}$$

EPL 1

Completando cuadrados, hallen el lugar geométrico correspondiente a cada una de las ecuaciones:

a. $x^2 + y^2 + 3x + 4 = 0$
b. $x^2 + y^2 + 6x + 9 = 0$

Resumen

De la resolución de los puntos anteriores se desprende la conclusión que presentamos a continuación:

Ecuación General:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Completando cuadrados

Ecuación ordinaria

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = k$$

$$Si\ k > 0 \rightarrow Circunferencia$$

$$Si\ k = 0 \rightarrow Punto$$

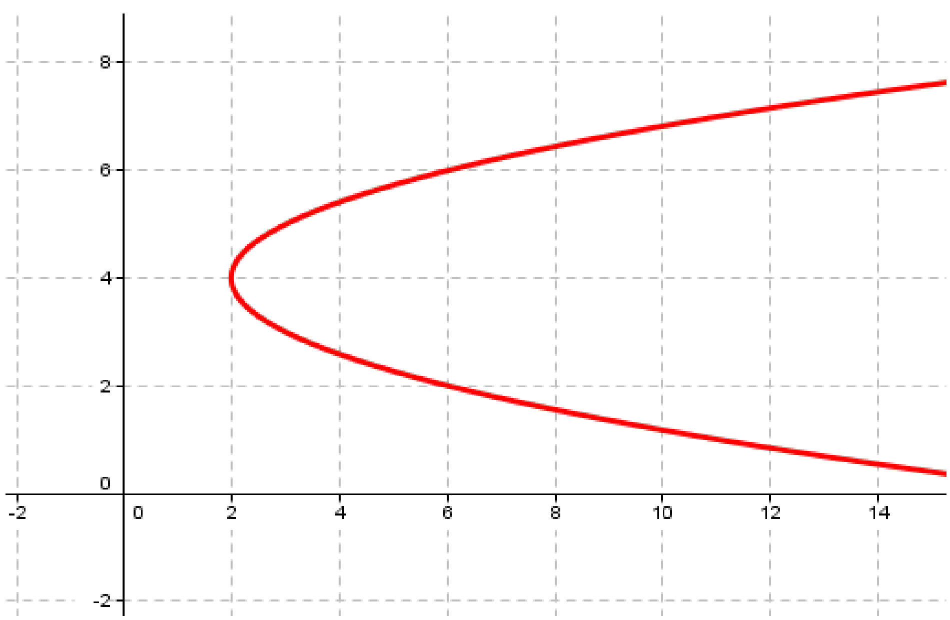
$$Si\ k < 0 \rightarrow Conjunto\ vacío$$

Parábola

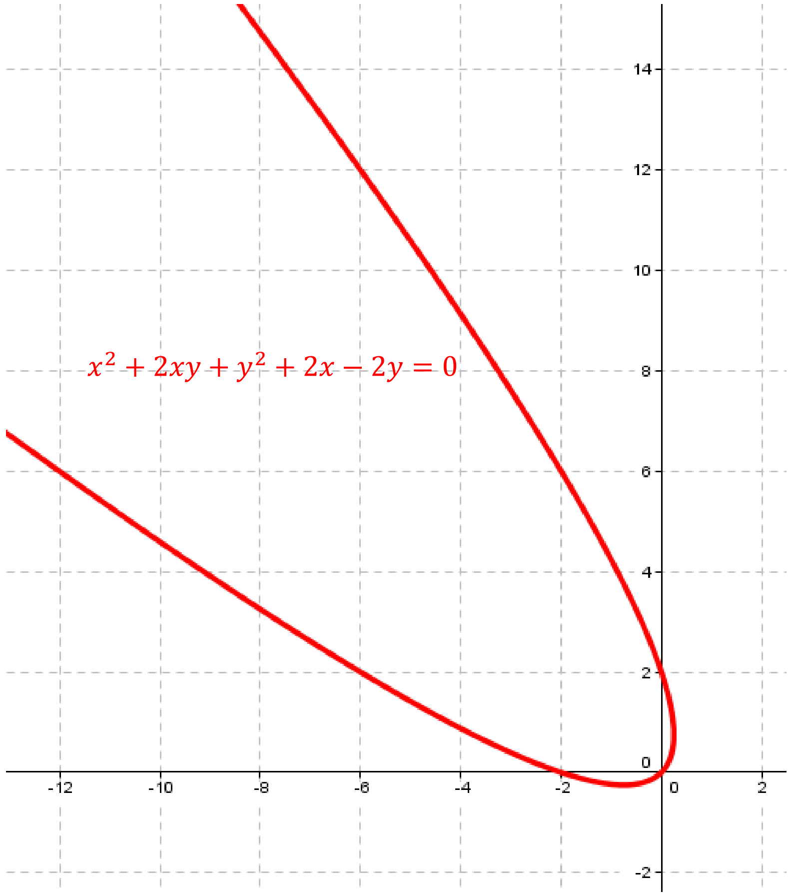
Introducción

La gráfica de una función cuadrática es una parábola. Pero el concepto geométrico de parábola es más amplio, como veremos a continuación.

El siguiente gráfico muestra una “parábola acostada”:



Existen también las parábolas rotadas. Por ejemplo si nosotros graficáramos en algún programa de computadora el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y = 0$, obtendríamos la siguiente gráfica:



Para reconocer que esa gráfica efectivamente responde a la definición, características y expresión analítica de una parábola, debemos usar autovalores y autovectores. (Esto lo veremos más adelante en la Unidad 8: Aplicaciones de la diagonalización)

Definición de parábola

Dados un punto F (foco) y una recta r (directriz), se denomina parábola al conjunto de puntos del plano que equidistan del foco y de la directriz.

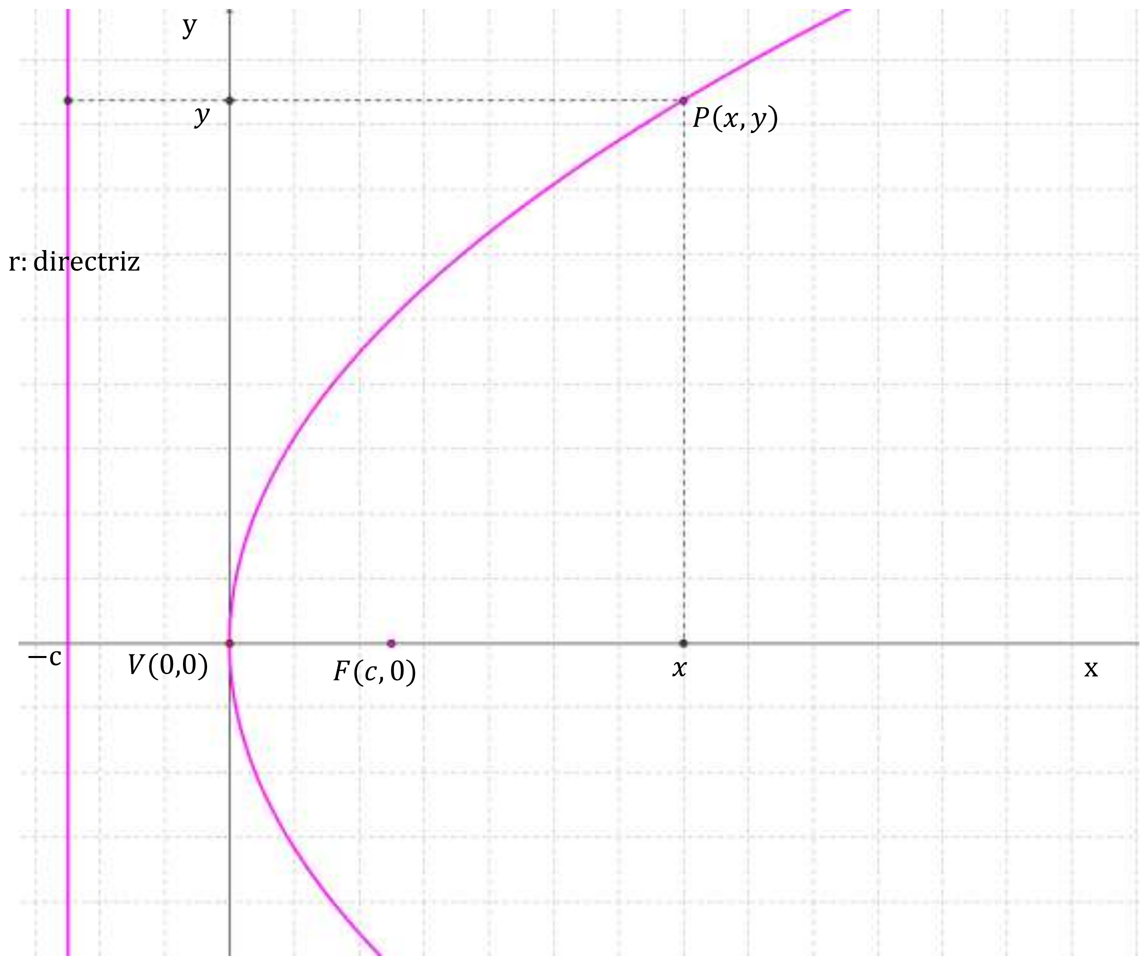
Simbólicamente:

$$\mathcal{P} = \{P(x, y) |\ d(P, r) = d(P, F)\}$$

Observen que estamos definiendo la parábola como un conjunto de puntos que verifican cierta propiedad geométrica, no como la gráfica de una función cuadrática (que es como ustedes la conocían hasta ahora).

El ***eje focal*** es el eje perpendicular a la directriz que pasa por el foco. Es el eje de simetría de la parábola.

El punto de la parábola que pertenece al eje focal se llama ***vértice***.



Para el esquema que realizamos, las coordenadas del vértice son $V(0,0)$, las del foco $F(c,0)$ y la recta directriz está dada por $r: x = -c$. Las coordenadas de un punto genérico Q que pertenece a la directriz son $(-c, y)$.

Ahora con estos datos vamos a deducir la ecuación. Por definición:

$$d(P,r) = d(P,F)$$

Distancia entre un punto P y la directriz: $d(P,r) = \|\overrightarrow{PQ}\|$

Distancia entre un punto P y el foco: $d(P,F) = \|\overrightarrow{PF}\|$

Las igualamos según lo establece la definición:

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PF}\|$$

Donde los vectores y sus módulos son:

$$\overrightarrow{PQ} = (-c - x, 0)$$

$$\overrightarrow{PF} = (c - x, -y)$$

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{c^2 + 2cx + x^2}$$

$$\|\overrightarrow{PF}\| = \sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2}$$

Ahora sustituyendo y operando llegamos a:

$$\sqrt{c^2 + 2cx + x^2} = \sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2}$$

$$c^2 + 2cx + x^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$$

$$\boldsymbol{y^2 = 4cx} \qquad (c \neq 0)$$

Que es la ***ecuación canónica de la parábola con $V(0,0)$ y eje focal $y = 0$ (eje x)***.

Donde si,

$c > 0 \Rightarrow$ Las ramas de la parábola apuntan hacia la derecha

$c < 0 \Rightarrow$ Las ramas de la parábola apuntan hacia la izquierda

Análogamente a lo desarrollado para una parábola con eje focal horizontal, se puede hacer la deducción para las parábolas con eje focal vertical. Si permutamos variables sobre la expresión canónica tenemos la expresión canónica de la parábola vertical:

$$x^2 = 4cy$$

Ecuación canónica de la parábola con $V(0,0)$ y eje focal $x = 0$ (eje y).

Donde si,

$c > 0 \Rightarrow$ Las ramas de la parábola apuntan hacia la arriba

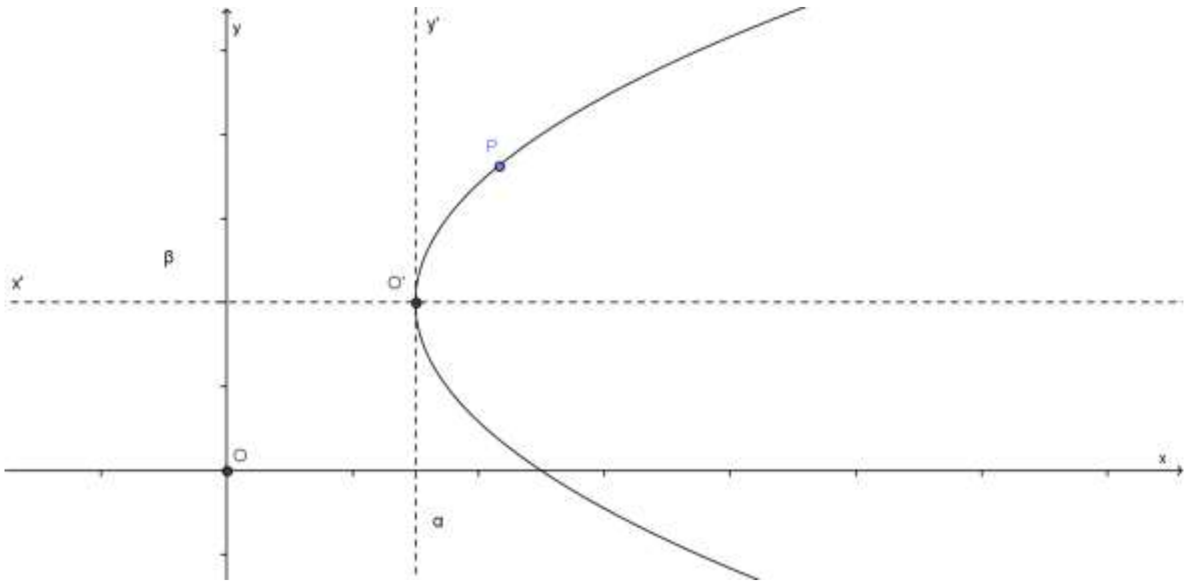
$c < 0 \Rightarrow$ Las ramas de la parábola apuntan hacia la abajo

Coordenadas del foco: $F(0, c)$

Ecuación de la directriz $\;d\colon\; y = -c$

Ecuación ordinaria de la parábola

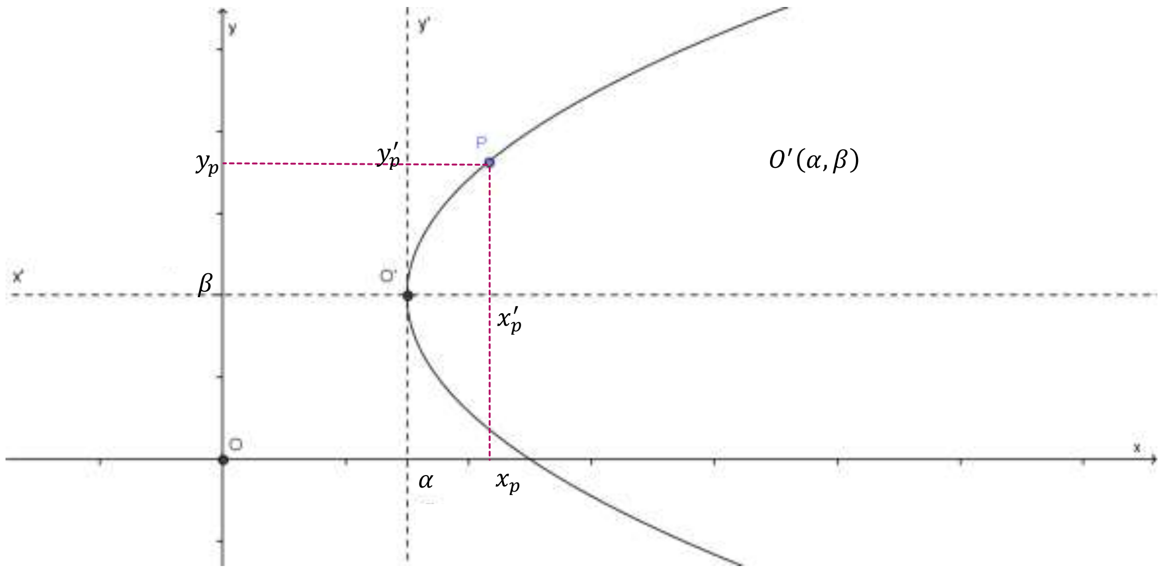
Consideremos una parábola cuyo vértice $V(\alpha, \beta)$ no coincide con el origen del sistema xy :



¿Cómo sería la ecuación de la parábola en el sistema de referencia xy? No sabemos responder esto por el momento. Pero si armamos un nuevo sistema cuyo centro coincida con V, la ecuación canónica en este nuevo sistema sería:

$$y'^2 = 4cx'$$

Debemos realizar una traslación de ejes para poder tener la ecuación escrita en el sistema xy



¿Qué coordenadas tiene el punto P respecto de cada sistema?

El punto es el mismo pero estamos modificando el sistema de referencia:

- Coordenadas de P en sistema $x'y'$: (x'_p, y'_p)
- Coordenadas de P en sistema xy: (x_p, y_p)

La relación entre los dos sistemas de coordenadas es la siguiente:

$$x' + \alpha = x$$

$$y' + \beta = y$$

O reordenando:

$$\begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$$

Éstas son las ***ecuaciones de traslación de ejes***.

Si reemplazamos las ecuaciones de traslación en la expresión $y'^2 = 4cx'$ obtenemos la ecuación en el sistema original:

$$(y - \beta)^2 = 4c(x - \alpha)$$

Ésta es la ***ecuación ordinaria de la parábola con vértice $V(\alpha, \beta)$ y eje focal paralelo al eje x***.

Análogamente:

$$(x-\alpha)^2 = 4c(y-\beta)$$

Es la ***ecuación de la parábola con vértice*** $\boldsymbol{V(\alpha,\beta)}$ ***y eje focal paralelo al eje*** $\boldsymbol{y}$.

¿Cómo nos damos cuenta si el eje focal es vertical u horizontal? Observando cuál de las variables está elevada al cuadrado:

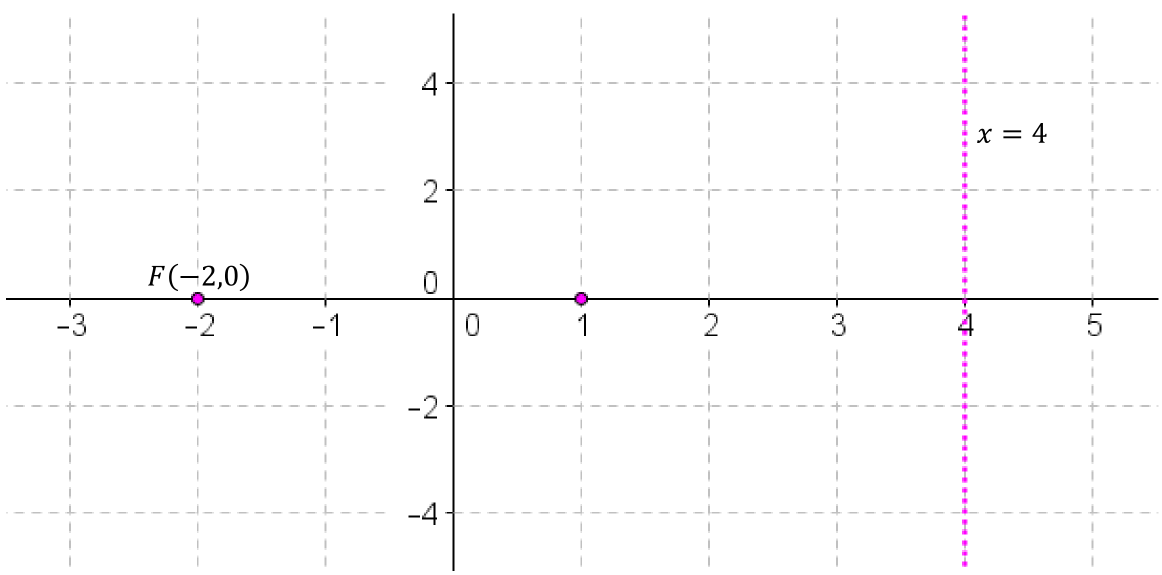
- $Si\ y\ está\ al\ cuadrado \rightarrow Es\ horizontal$
- $Si\ x\ está\ al\ cuadrado \rightarrow Es\ vertical$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la parábola de directriz $x = 4$ y foco $F(-2,0)$.

Resolución

Es conveniente realizar una figura de análisis que represente los datos del enunciado:



El valor absoluto de c es la distancia del vértice al foco.

$$|\boldsymbol{c}| = \boldsymbol{d(V,F)}$$

El vértice está sobre el eje focal y a la misma distancia del foco que de la directriz:

$$V = \left(\frac{-2+4}{2}, 0\right) = (1,0)$$

Eje focal: eje x

Como el eje es horizontal la ecuación tiene la forma:

$$(y-\beta)^2 = 4c(x-\alpha)$$

$$(y-0)^2 = 4c(x-1)$$

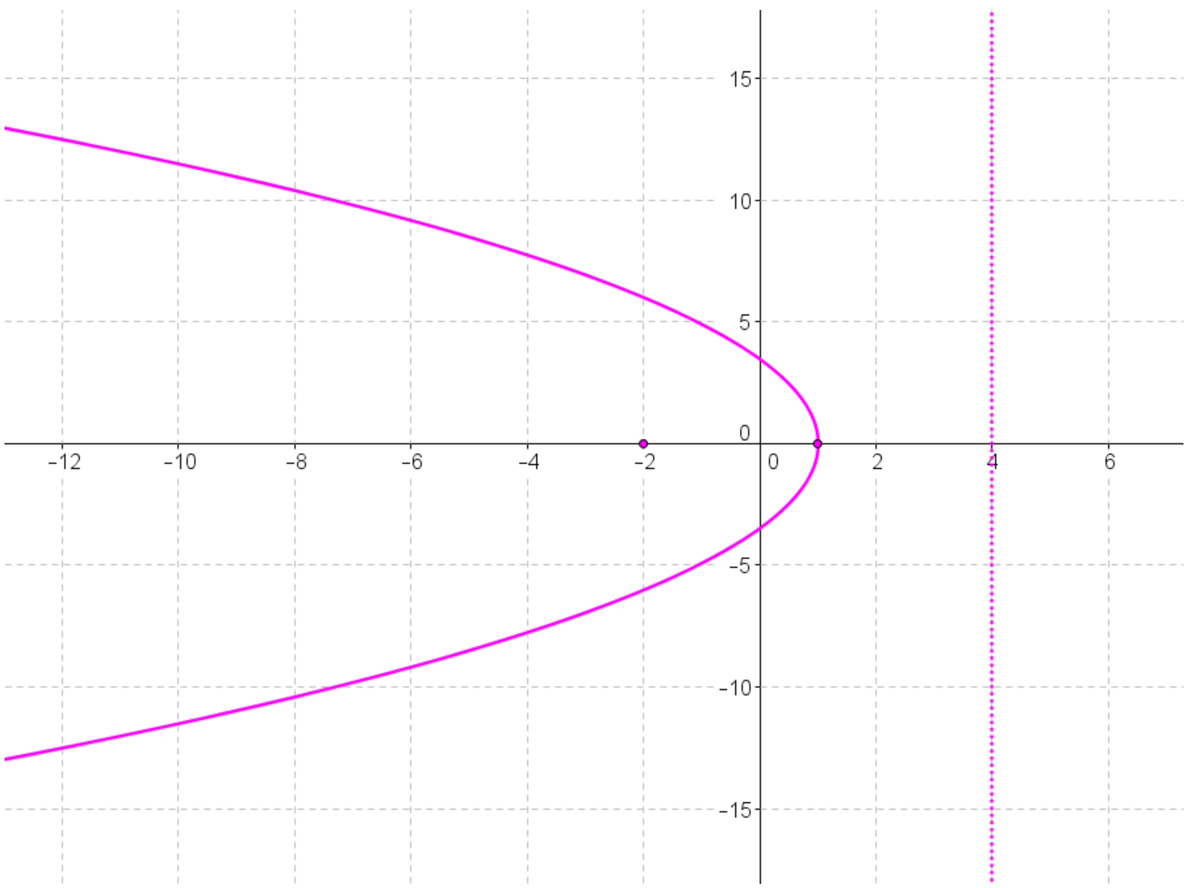
Falta calcular el valor absoluto de c.

$$|c| = d(F,V) = 3$$

Como el foco está a la izquierda del vértice entonces $c = -3$.

Entonces queda:

$$y^2 = -12(x-1)$$



Lado recto

El lado recto es la longitud de la cuerda que es perpendicular al eje focal y pasa por el foco. Se puede demostrar que la longitud del lado recto es $|4c|$

$$|LL'| = |4c|$$

Dejamos la demostración a cargo del lector interesado.

De ecuación ordinaria a ecuación general

Partimos de la ecuación ordinaria:

$$(y-\beta)^2 = 4c(x-\alpha)$$

Desarrollamos cuadrado de binomio:

$$y^2 - 2\beta y + \beta^2 = 4cx - 4c\alpha$$

$$y^2 - 4cx - 2\beta y + \beta^2 + 4c\alpha = 0$$

Renombramos los coeficientes de la ecuación así:

$$y^2 \underbrace{-4c}_{D} x \underbrace{-2\beta}_{E} y + \underbrace{\beta^2 + 4c\alpha}_{F} = 0$$

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ésta es la ***ecuación general***. Observen que hay una única variable que está al cuadrado y la otra es lineal.

Les proponemos las siguientes preguntas:

- Si $E = 0$, ¿dónde está ubicado el vértice?
- ¿Cuál es la ecuación general de una parábola de eje vertical?

Ejemplo

Analizar qué lugar geométrico representa la siguiente ecuación:

$$y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$$

¿Qué curva representan los puntos que verifican esta ecuación? Observando que una sola de las variables está elevada al cuadrado, podemos pensar en una parábola. Deberíamos llegar al siguiente modelo:

$$(y - \beta)^2 = 4c(x - \alpha)$$

Primero hay que completar cuadrados en *y*

$$y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 = (y - 1)^2 - 1$$

Entonces

$$(y - 1)^2 - 1 + 4x + 2 = 0$$

$$(y - 1)^2 = -4x - 1$$

$$(y - 1)^2 = -4\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

Ésta es la ecuación ordinaria de la parábola que tiene $V\left(-\frac{1}{4}, 1\right)$ y eje focal paralelo al eje x.

EPL 2

Hemos visto que toda parábola de eje paralelo al eje x puede expresarse por una ecuación del tipo $y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Pero… si D = 0,

1) ¿la ecuación corresponde a una parábola?

2) ¿Qué lugar geométrico representa cada una de estas ecuaciones?

   a) $y^2 - 2y + 2 = 0$

   b) $y^2 - 2y - 3 = 0$

EPL 3

Dada la ecuación $x^2 + 6x + ky = 0$

¿Para qué valor de k representa una parábola cuyo vértice pertenece a la recta $y = 6$? Para el valor de k hallado, indiquen vértice, foco y directriz. Grafiquen.

Elipse

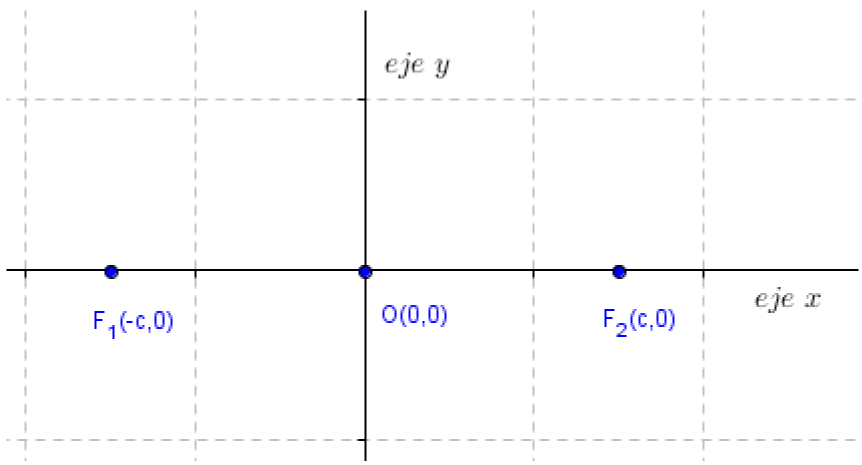
Definición y ecuación canónica de la elipse

Dados dos puntos F_1 y F_2 llamados *focos*, se denomina elipse al conjunto de puntos del plano tales que la suma de sus distancias a ambos focos es constante:

$$\mathcal{E} = \{P(x, y) \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = cte\}$$

A esa constante la llamamos $2a$.

Consideremos que los focos son los puntos de coordenadas $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ con $c > 0$, y el punto medio entre los focos, se denomina centro $C(0,0)$. En el siguiente esquema se pueden visualizar estos elementos:



Si la distancia entre los focos es $\boldsymbol{d(F_1, F_2) = 2c}$, la condición para que sea una elipse es:

$$a > c > 0$$

Si elevamos al cuadrado:

$$a^2 > c^2$$

A la diferencia se la llama b^2:

$$a^2 - c^2 = b^2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$$

Haciendo una deducción se llega a:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ ,\quad a>b>0$$

Es la ***ecuación canónica de la elipse con centro*** $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ ***y eje focal*** $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$***(eje*** $\boldsymbol{x}$***)***.

Busquemos las intersecciones con los ejes:

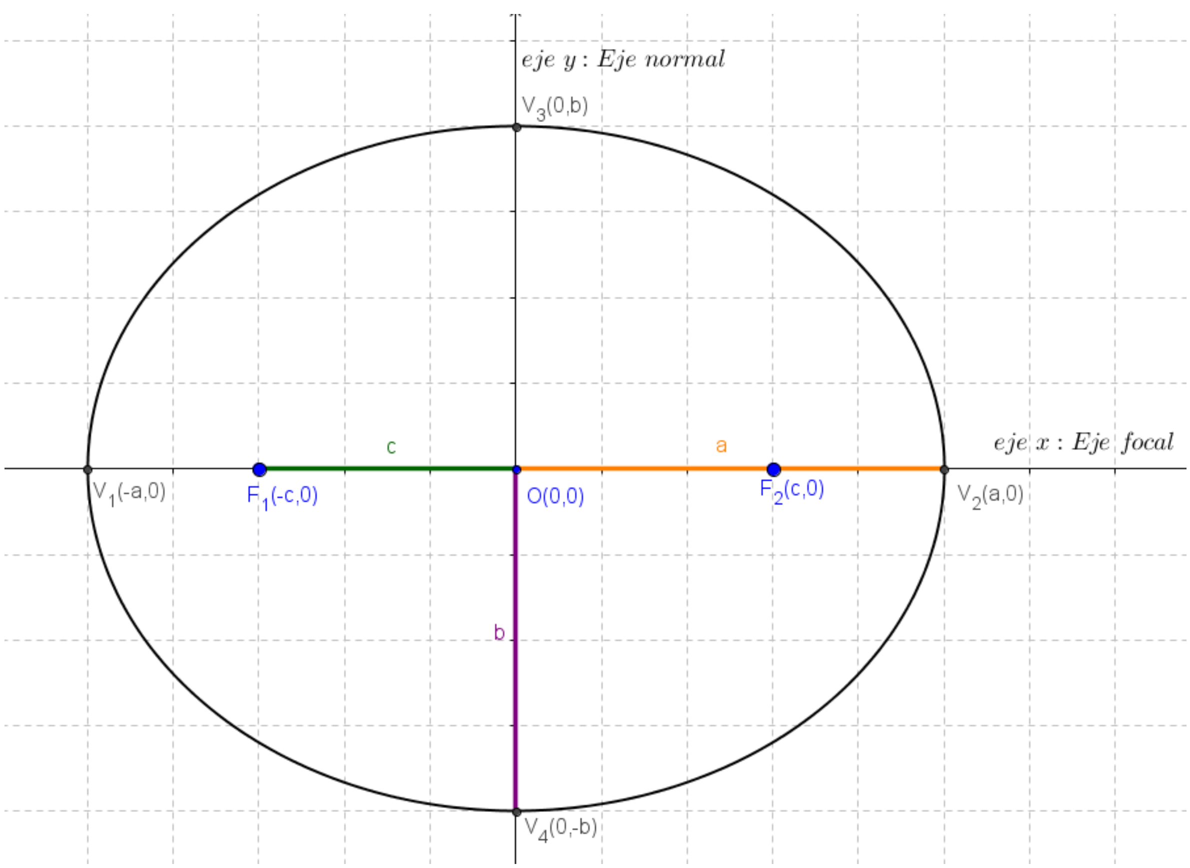
Si $y=0:\quad x^2=a^2\Rightarrow x=\pm a\quad\Rightarrow V_{1,2}=(\pm a,0)$

Si $x=0:\quad y^2=b^2\Rightarrow y=\pm b\quad\Rightarrow V_{3,4}=(0,\pm b)$

Estos cuatro puntos se denominan *vértices* de la elipse.

- a se denomina *semieje mayor*
- b es el *semieje menor*
- c es la *semidistancia focal:* (distancia del centro a un foco)
- 2c es la distancia entre los focos
- Eje focal: es la recta que pasa por los focos, en este caso el eje x

La gráfica representando todos estos elementos es la siguiente:



Observen que el centro es centro de simetría de la elipse.

Si en la ecuación canónica anterior permutamos $x \leftrightarrow y$ queda:

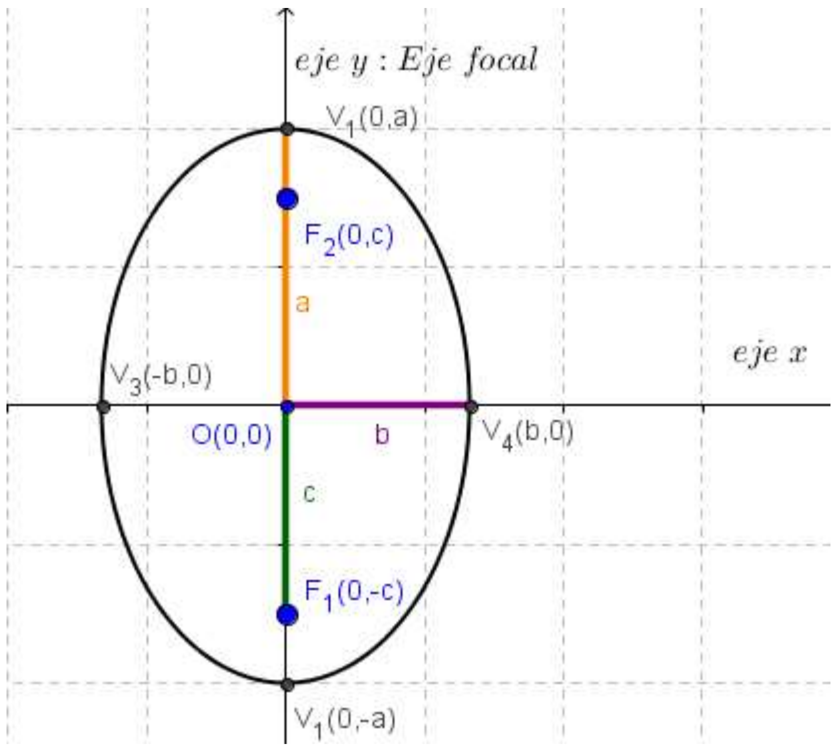
$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad , \quad a > b$$

Es la ***ecuación canónica de la elipse con centro*** $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ ***y eje focal*** $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$***(eje*** $\boldsymbol{y}$***)***.

En este caso las coordenadas de los vértices y focos son:

- Vértices: $V_1(0, a)$, $V_2(0, -a)$, $V_3(-b, 0)$, $V_4(b, 0)$
- Focos: $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$

Su gráfica es:



Excentricidad de una elipse

La excentricidad de una elipse se calcula como el cociente:

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$$

Donde a es el semieje mayor y c es la distancia del centro a uno de los focos.

Cómo $0 < c < a$:

$$\Rightarrow \; 0 < \frac{c}{a} < 1$$

Por lo tanto la exentricidad de una elipse varía entre cero y uno.

En el siguiente archivo de GeoGebra pueden moverse los focos y un punto de la elipse para definirla. Además el programa calcula automáticamente la excentricidad.

Exploren cómo va cambiando la forma de la elipse en relación con la excentricidad.

Ejemplo 1

Hallar vértices, focos, eje focal, graficar y calcular excentricidad de la siguiente elipse:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{10}=1$$

Resolución

Calculemos los valores de a y b:

$$a^2 = 10 \Rightarrow a = \sqrt{10}$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

Entonces podemos dar las coordenadas de los vértices:

$$V_1(0,\sqrt{10}) \;\; ; \;\; V_2(0,-\sqrt{10}) \;\; ; \;\; V_3(2,0) \;\; ; \;\; V_4(-2,0)$$

Eje focal: es el eje y, porque el denominador de y^2 es mayor que el denominador de x^2.

Para hallar las coordenadas de los focos necesitamos calcular c:

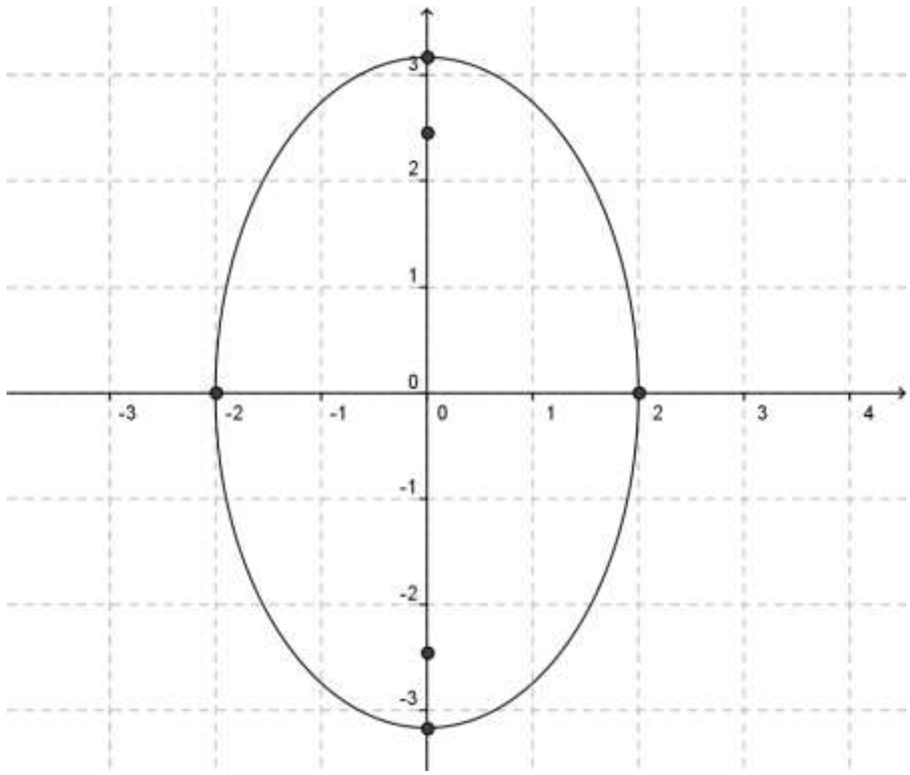
$$c^2 = a^2 - b^2 = 10 - 4 = 6$$

$$F_1(0,-\sqrt{6}) \;\; y \;\; F_2(0,\sqrt{6})$$

Excentricidad de la elipse:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

La gráfica es:

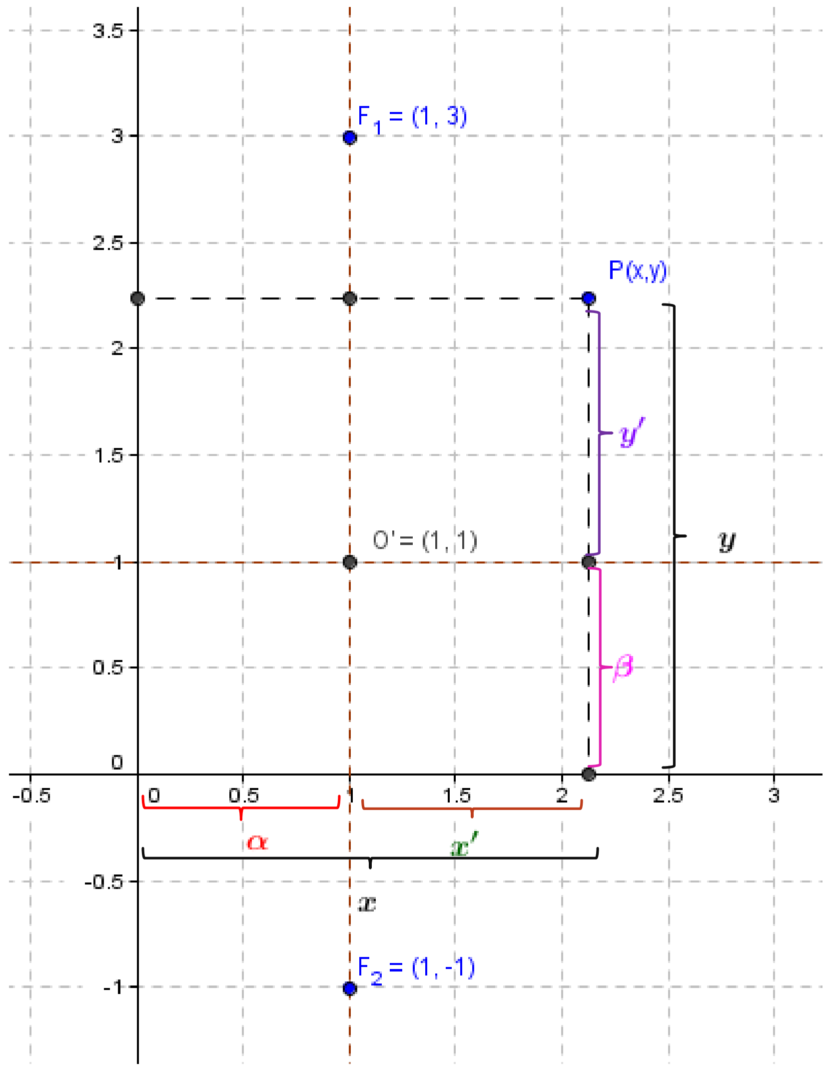


Ejemplo 2

Hallar la ecuación de una elipse con focos $F_1(1,-1)$ y $F_2(1,3)$ y excentricidad $e = 0{,}4$.

Resolución

Empecemos graficando los focos y el centro:



La elipse está corrida; no está centrada en $(0,0)$. ¿Dónde está el centro de la elipse? En el punto medio de los dos focos $C(1,1)$.

Pero podemos construir un sistema de ejes $x'y'$ cuyo origen coincida con el centro de la elipse:

Ecuación del eje x': $y = 1$

Ecuación del eje y': $x = 1$

Hacemos una traslación de ejes:

$$\begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$$

Teniendo en cuenta las coordenadas del centro:

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 1 \end{cases}$$

Entonces en el nuevo sistema de ejes la ecuación quedaría:

$$\frac{y'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

Recordemos que c es la distancia de un foco al centro, así que:

$$c = 2$$

Y conocemos además que la excentricidad es 0,4

$$e = \frac{c}{a}$$

Entonces despejamos de esta expresión a:

$$a = \frac{c}{e} = \frac{2}{0{,}4} = 5 \Rightarrow a^2 = 25$$

Calculamos b:

$$b^2 = 25 - 4 = 21 \Rightarrow b = \sqrt{21}$$

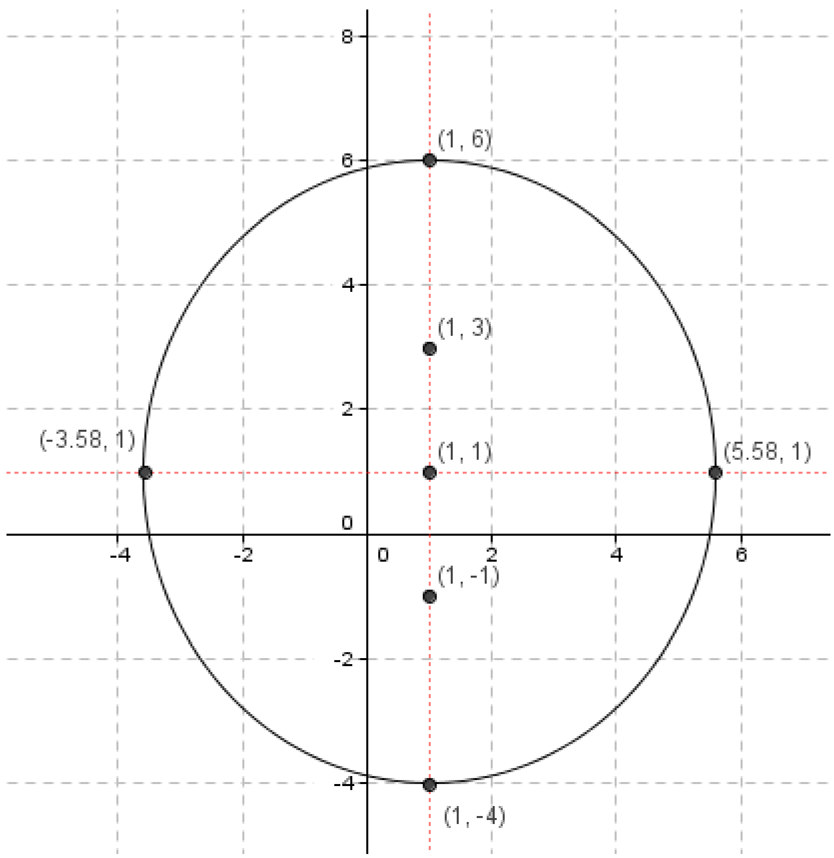
Y ahora volvemos al sistema original

$$\frac{(y-1)^2}{25} + \frac{(x-1)^2}{21} = 1$$

En la siguiente tabla resumimos las coordenadas del centro, focos y vértices en ambos sistemas de referencia:

	Sistema $x'y'$	Sistema xy
Centro	$(0,0)$	$(1,1)$
Focos	$(0,2)$ $(0,-2)$	$(1,3)$ $(1,-1)$
Vértices	$(0,5)$ $(0,-5)$ $(\sqrt{21},0)$ $(-\sqrt{21},0)$	$(1,6)$ $(1,-4)$ $(\sqrt{21}+1\ ,\ 1)$ $(-\sqrt{21}+1\ ,\ 1)$

La gráfica queda:



Ecuación ordinaria de una elipse con $C(\alpha, \beta)$

Si el eje focal es horizontal la ecuación ordinaria es:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal es vertical la ecuación ordinaria es:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} + \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

Noten que como $a > b$, la única diferencia entre las dos ecuaciones consiste en que a^2 está en el denominador de x o de y.

Ejemplo 3

Hallar la ecuación ordinaria de la curva definida por:

$$x^2 + 2y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$$

Graficar.

Resolución

Como el coeficiente de x^2 y de y^2 no son el mismo, no puede tratarse de una circunferencia. Tampoco de una parábola porque ninguno de los dos coeficientes es igual a cero. Tampoco de una hipérbola porque tienen el mismo signo. Así que inicialmente esperamos que sea una elipse.

Completemos cuadrados:

$$x^2 + 2x + 2.(y^2 - 4y) + 7 = 0$$

$$(x+1)^2 - 1^2 + 2.[(y-2)^2 - 4] + 7 = 0$$

$$(x+1)^2 + 2.(y-2)^2 - 1 - 8 + 7 = 0$$

$$(x+1)^2 + 2.(y-2)^2 = 2$$

$$\frac{(x+1)^2}{2} + (y-2)^2 = 1$$

Llegamos a la ecuación ordinaria de una elipse con centro en $(-1,2)$ y eje focal horizontal (porque el semieje mayor es $a = \sqrt{2}$ que está en el denominador de x, y el semieje menor es $b = 1$, está en el denominador de y). Calculemos c:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 2 - 1 = 1$$

Si quisiéramos obtener la ecuación canónica deberíamos establecer las ecuaciones de traslación:

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 2 \end{cases}$$

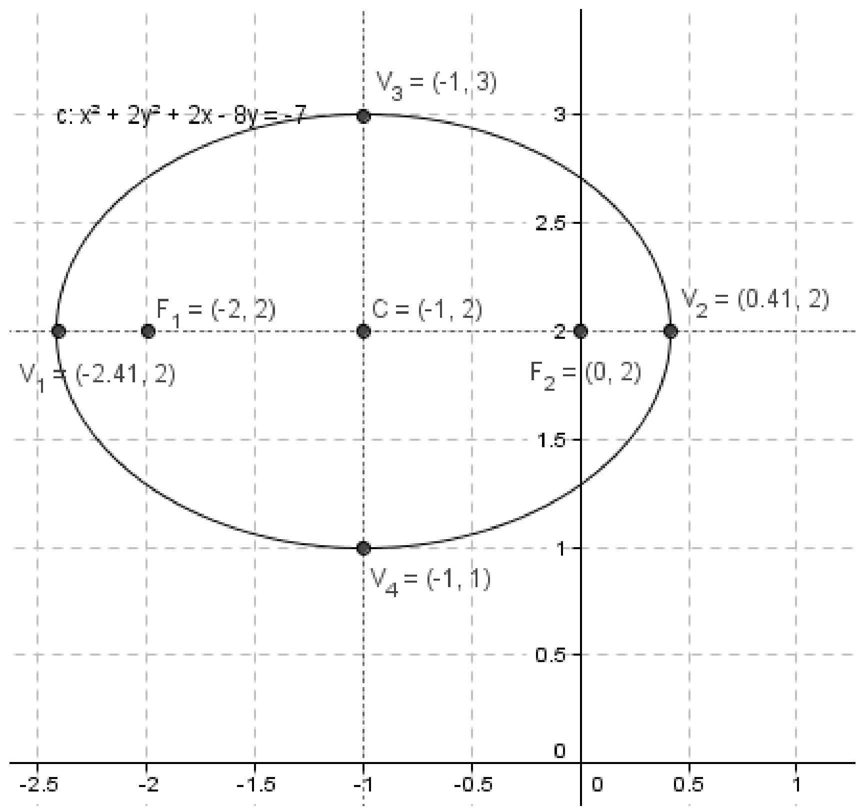
$$\frac{x'^2}{2} + y' = 1$$

Resumamos la información obtenida en los dos sistemas de ejes:

	Sistema $x'y'$	Sistema xy
Centro	$(0,0)$	$(-1,2)$
Focos	$(1,0)$ $(-1,0)$	$(0,2)$ $(-2,2)$

Vértices	$(\sqrt{2},0)$ $(-\sqrt{2},0)$ $(0,1)$ $(0,-1)$	$(\sqrt{2}-1,2)$ $(-\sqrt{2}-1,2)$ $(-1\,,3)$ $(-1,1)$

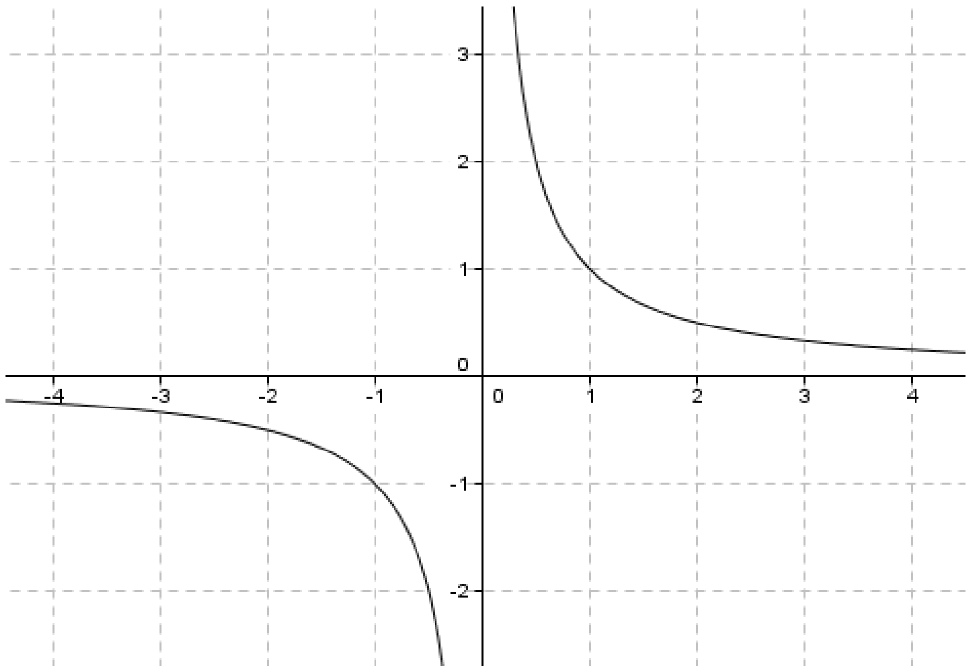
Finalmente podemos hacer la gráfica de la elipse con todos sus elementos:



Hipérbola

Introducción

Ustedes ya conocen a las hipérbolas como la representación gráfica de funciones homográficas. El ejemplo más sencillo es la gráfica de la función $f(x)=\frac{1}{x}$:



A continuación estudiaremos las hipérbolas desde otra perspectiva.

Definición de hipérbola

Dados dos puntos F_1 y F_2 llamados focos, se denomina hipérbola al conjunto de puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los focos es constante.

$$\mathcal{H} = \{P(x,y) |\ |d(P;F_1) - d(P;F_2)| = 2a = cte\}$$

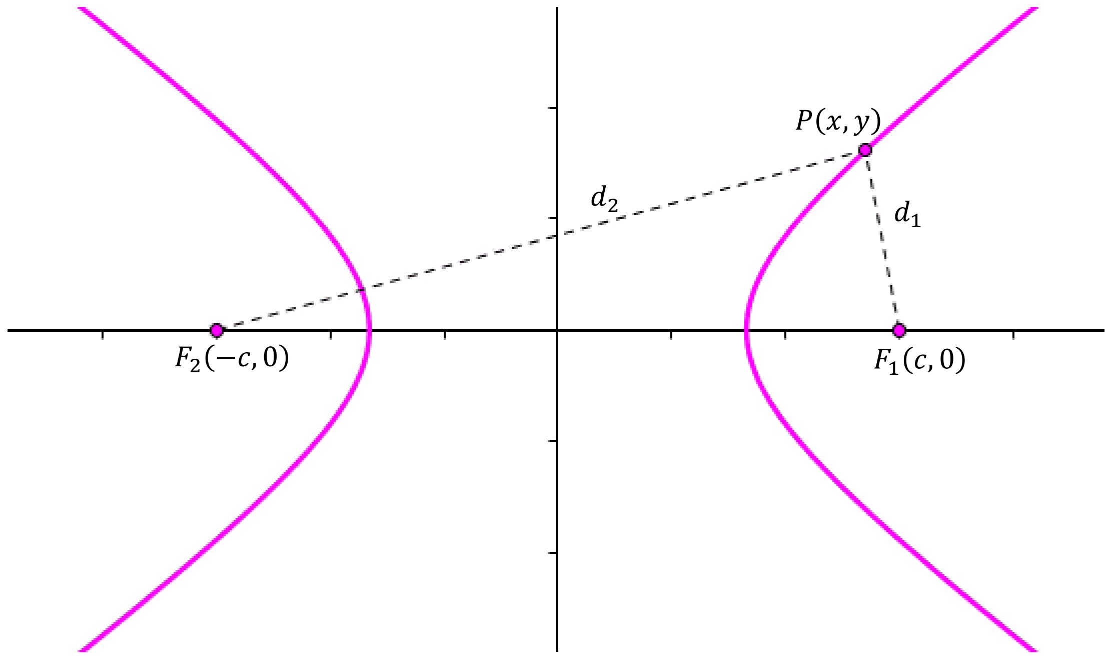
Si la distancia entre los focos es $\boldsymbol{d(F_1, F_2) = 2c}$, la condición para que sea una hipérbola es:

$$\boldsymbol{c} > a > 0$$

$$c^2 > a^2$$

$$c^2 - a^2 = b^2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$



Ecuación canónica de la hipérbola

Con una deducción similar a la de la elipse, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Es la ***ecuación canónica de la hipérbola con centro en*** $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ ***y eje focal*** $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ ***(eje x)***

Busquemos las intersecciones con los ejes:

$$y=0\ \Rightarrow\ |x|=a\Rightarrow\ x=\pm a\ \Rightarrow\ V_{1,2}=(\pm a,0)$$

$$x=0\ \ \Rightarrow y^2=-b^2$$

Entonces no corta al eje y.

Los puntos $V_{1,2}$ se denominan vértices de la hipérbola.

<u>Elementos de la hipérbola</u>

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Focos: $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$

Centro: C $(0,0)$

Vértices: $V_1(a, 0)$ y $V_2(-a, 0)$

Eje focal: recta que contiene a los focos, en este caso es el eje x

a se denomina semieje real o transverso

b se denomina semieje imaginario

2c es la distancia entre los focos

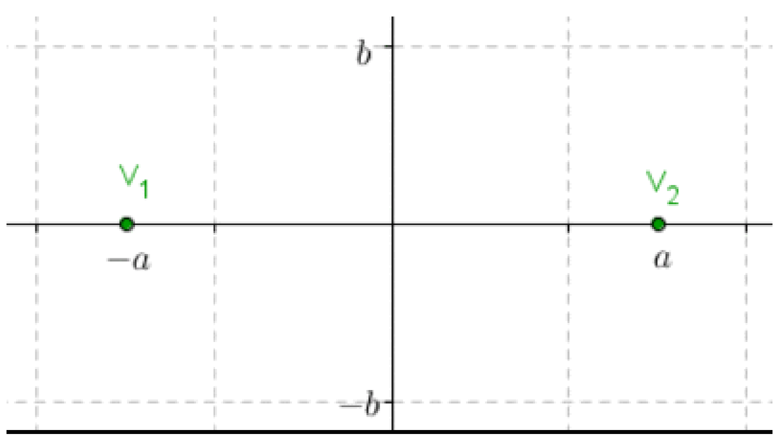
Se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$

En la hipérbola aparece un elemento nuevo que no tiene ninguna de las otras cónicas: las *asíntotas*.

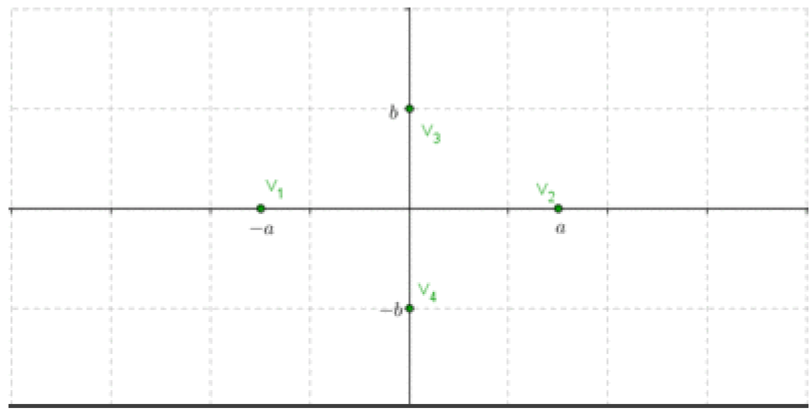
Ecuaciones de las asíntotas: $y = \pm\frac{b}{a}\ x$

Veamos la gráfica:

Ubiquemos los vértices sobre el eje x, simétricos respecto del $(0,0)$, $V_{1,2}(\pm a, 0)$ y los puntos de coordenadas $(0, \pm\ b)$ que llamaremos "vértices imaginarios" (no son puntos de la hipérbola, habíamos visto que ésta no corta al eje *y*):



Para trazar las asíntotas armemos un rectángulo auxiliar que ayudará a graficar la hipérbola, y luego tracemos las rectas que contienen a sus diagonales (esas rectas serán las asíntotas). Una vez trazadas las asíntotas, es sencillo realizar un gráfico aproximado de la hipérbola:



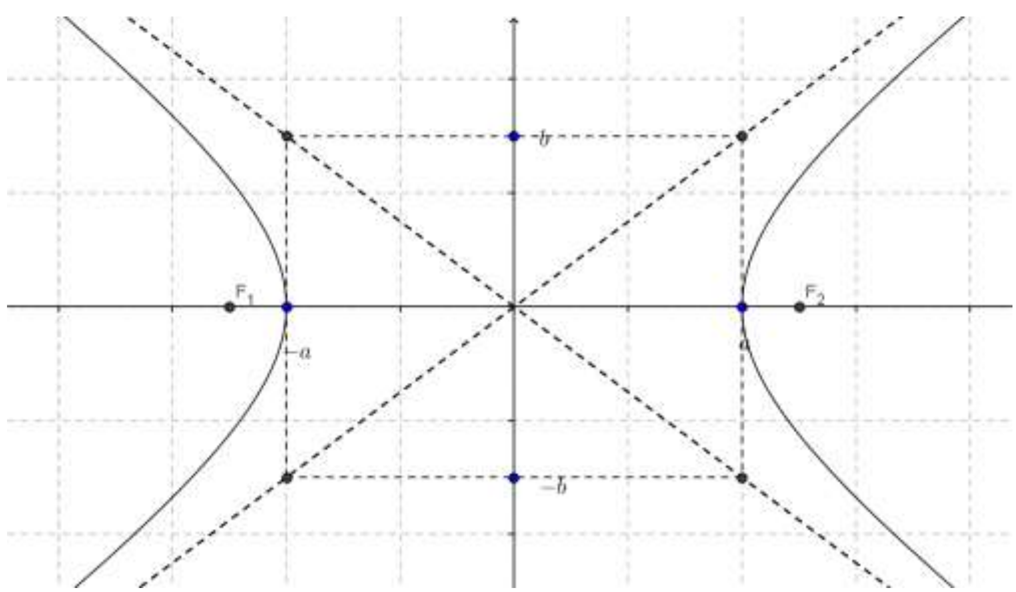
¿Cuáles son las pendientes de las diagonales?

Habíamos visto que las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Esto justifica porqué las asíntotas son las rectas que contienen a las diagonales del rectángulo.

Los focos, como los vértices de la hipérbola, están sobre el eje x. Como $c > a$, los focos están más alejados del origen que los vértices ($c^2 = a^2 + b^2$).



Si en la ecuación canónica anterior permutamos $x \leftrightarrow y$ queda:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Es la **ecuación canónica de la hipérbola con centro en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y eje focal $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ eje $\boldsymbol{y}$.**

¿Cómo reconocer, dada la ecuación canónica de una hipérbola si el eje focal es vertical u horizontal?

- Si el coeficiente de x^2 es positivo, sabemos que el eje focal es el eje x
- Si el coeficiente de y^2 es positivo, sabemos que el eje focal es el eje y

Ejemplo 1

Hallar la gráfica de la curva definida por la ecuación:

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

Resolución

La ecuación responde a la forma canónica de una hipérbola con eje focal x. Luego:

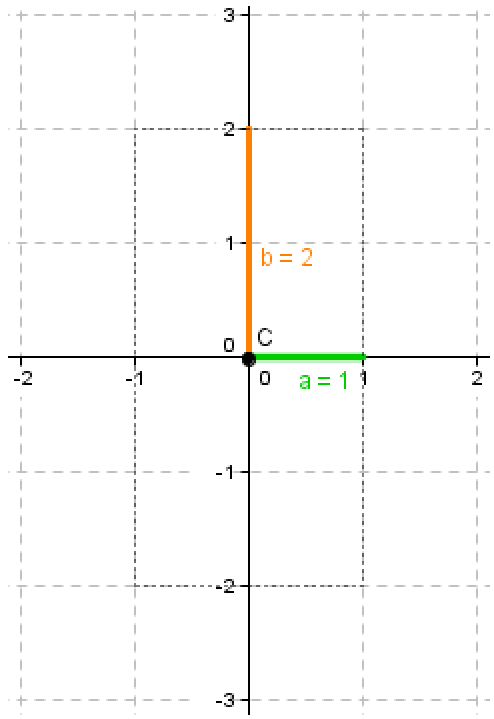
$$C(0,0)$$

$$Semieje\ real: \ a = 1$$

$$Semieje\ imaginario: b = 2$$

$$Semidistancia\ focal: c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Grafiquemos lo obtenido hasta el momento:



Luego podemos dar las coordenadas de los vértices, de los focos y de las asíntotas:

$$V_1(1,0)$$

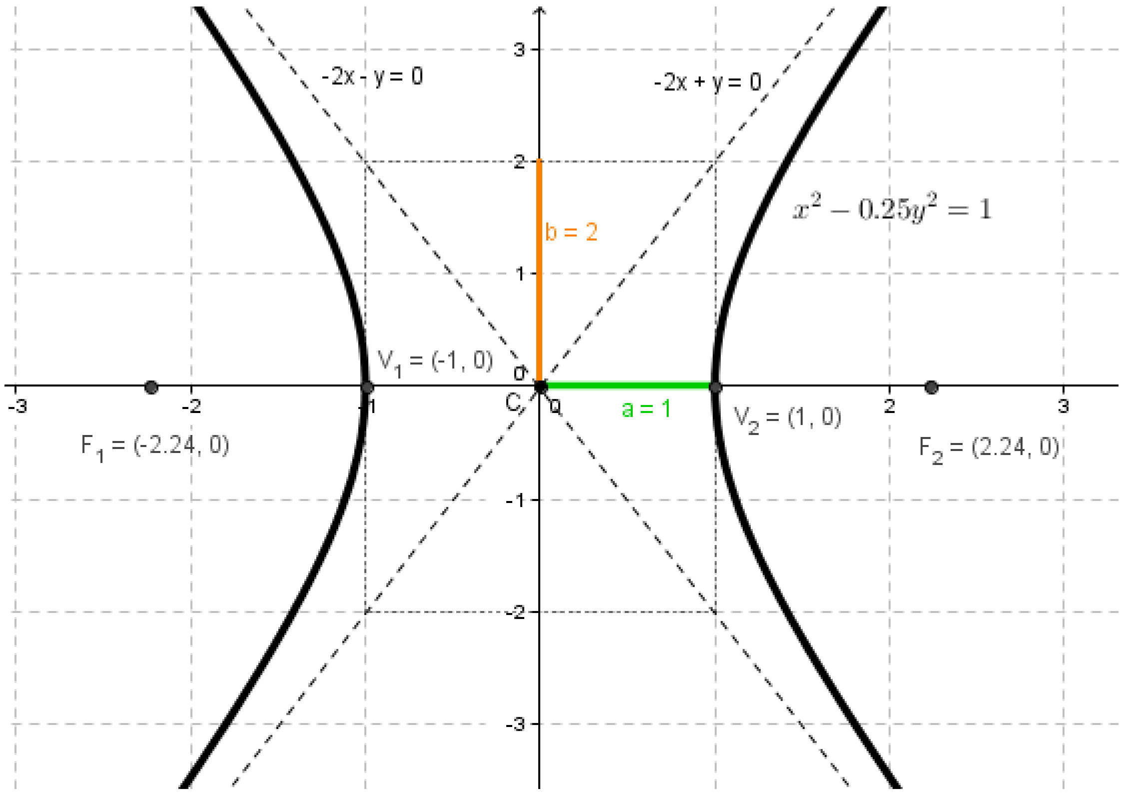
$$V_2(-1,0)$$

$$F_1(-\sqrt{5},0)$$

$$F_2(\sqrt{5},0)$$

$$Asíntotas: y = \pm 2x$$

La gráfica:



Ejemplo 2

Hallar la gráfica de la curva definida por la ecuación:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{6} = 1$$

Resolución

Como el coeficiente de y^2 es positivo, entonces el eje focal es el eje y.

$a^2 = 4 \rightarrow a = 2$ semieje real

$b^2 = 6 \rightarrow \ b = \sqrt{6}$ semieje imaginario

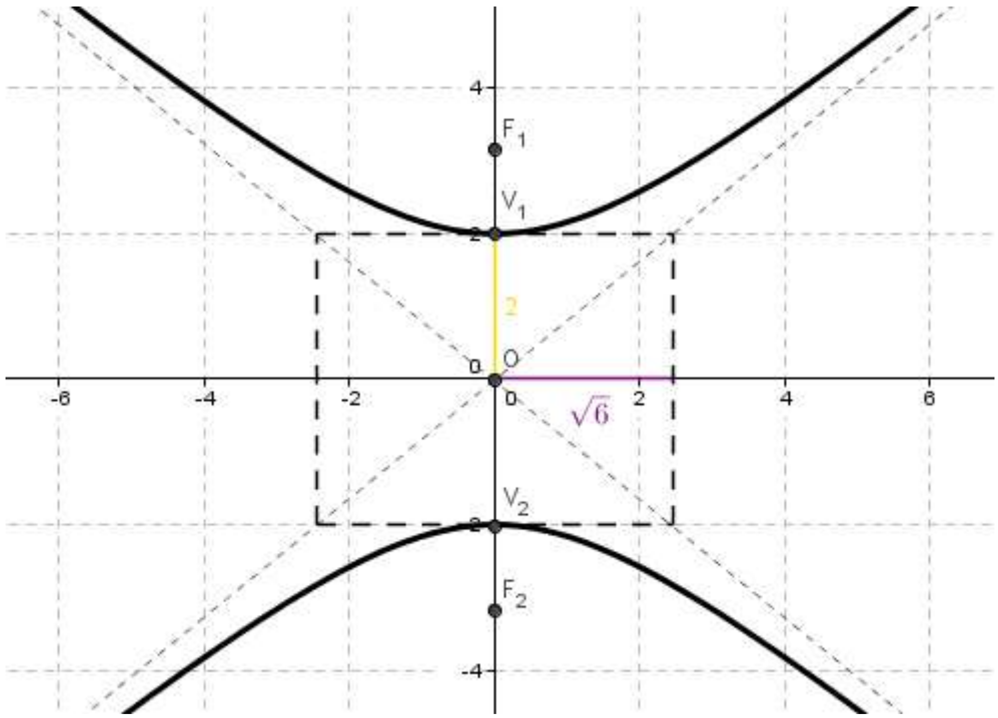
Vértices $(0, \pm 2)$

¿Cómo se obtienen las coordenadas de los focos? Falta calcular el valor de c mediante la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2 \ \Rightarrow c^2 = 10 \rightarrow c = \sqrt{10}$$

Focos $\left(0, \pm\sqrt{10}\right)$

Grafiquemos:



Como se puede deducir de la gráfica, las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \frac{2}{\sqrt{6}}x \quad , \quad y = -\frac{2}{\sqrt{6}}x$$

EPL 4

En el siguiente applet construido utilizando GeoGebra, se puede visualizar una familia de curvas que responden a la ecuación:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = k$$

Moviendo con el cursor el deslizador se puede dar a k diferentes valores y observar cómo se modifica la curva:

Utilizando el applet les proponemos que respondan a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tipo de curvas se obtiene si k es distinto de 0?
b) ¿Qué diferencia observan para valores de $k > 0$ respecto de $k < 0$?
c) ¿Qué objeto geométrico se obtiene para $k = 0$?

De acuerdo con lo que pudimos observar en el applet podemos enunciar un método sencillo para buscar las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola.

Consideremos la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = k \quad , \quad k \neq 0$$

Según hemos visto al reemplazar k por 0 obtenemos las ecuaciones de las asíntotas:

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm \frac{q}{p} x$$

Ecuación ordinaria de una hipérbola

La ***ecuación ordinaria de una hipérbola con eje focal horizontal y centro en*** $\boldsymbol{C(\alpha, \beta)}$ es:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

La ***ecuación ordinaria de una hipérbola con eje focal vertical y centro en*** $\boldsymbol{C(\alpha, \beta)}$ es:

$$-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$$

Observemos que la diferencia esencial reside en que el signo negativo está en el término con la variable x o en el término con la variable y. El motivo por el cual utilizamos a^2 en el denominador del término con coeficiente positivo es para poder denominar siempre al semieje real como "a".

Casos particulares de hipérbolas

Hipérbola equilátera

Una hipérbola equilátera es aquella en la cual el semieje real es de igual longitud que el semieje imaginario. Es decir que su ecuación puede ser de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{o bien} \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

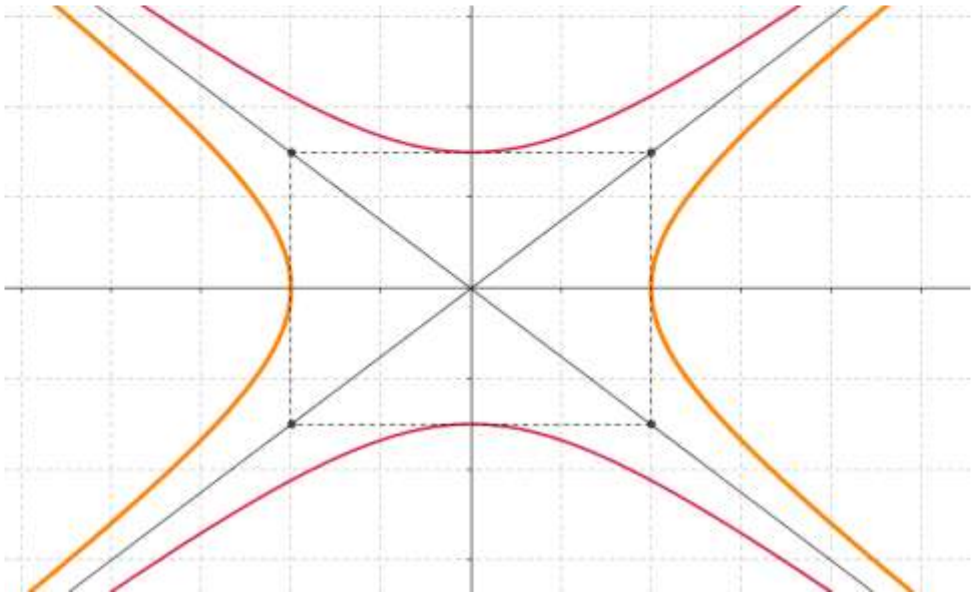
Hipérbolas conjugadas

Dos hipérbolas son conjugadas una de la otra si el eje real de cada una de ellas es igual al eje imaginario de la otra.

En términos analíticos se las reconoce porque los signos están cambiados, y los coeficientes de x y de y siguen siendo los mismos en términos absolutos. Las siguientes hipérbolas son conjugadas:

$$\mathcal{H}_1 : \ \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1 \qquad \mathcal{H}_2 \ \ -\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$$

Gráficamente:



Cómo se aprecia en la gráfica las hipérbolas conjugadas tienen iguales asíntotas.

Ejemplo

Dada la ecuación en $\mathbb{R}^2$:

$$Ax^2 + y^2 + By = 0$$

Hallar en cada caso, si es posible, los valores de A y B para que la ecuación dada represente:

a. Una elipse
b. Una circunferencia de radio 3
c. Una parábola
d. Un par de rectas paralelas
e. Una hipérbola equilátera con centro en $C(0,3)$

Resolución

Ítem a

Empecemos completando cuadrados para darle forma de ecuación ordinaria:

$$Ax^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{B}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; \frac{Ax^2}{\left(\frac{B}{2}\right)^2} + \frac{\left(y + \frac{B}{2}\right)^2}{\left(\frac{B}{2}\right)^2} = 1 \;\; (B \neq 0)$$

Al estar igualada a 1, para que se trate de una elipse es necesario que el coeficiente de x^2 y el de y^2 sean ambos positivos. Una restricción para que la expresión tal como está escrita quede bien definida es que $B \neq 0$. Como el coeficiente de y^2 será positivo siempre que $B \neq 0$, entonces A deberá ser positivo también. Luego:

$$B \neq 0 \wedge A > 0$$

En particular si $A = 1$ vemos que queda el mismo coeficiente para x^2 e y^2, y la curva es una circunferencia.

Ítem b

Ya establecimos que con $A = 1$ será una circunferencia,

$$x^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{B}{2}\right)^2$$

De radio

$$R = \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2} = \left|\frac{B}{2}\right|$$

Si queremos que el radio sea 3:

$$\left|\frac{B}{2}\right| = 3 \;\Rightarrow |B| = 6$$

Luego la respuesta es:

$$A = 1 \wedge |B| = 6$$

Ítem c

Para que sea una parábola es necesario que una de las variables aparezca elevada al cuadrado y la otra no. Luego debe ser $A = 0$. Pero queda:

$$y^2 + By = 0$$

Que no responde a la ecuación de una parábola porque no ha quedado ningún termino lineal con x. ¿Cuál es la curva con la que se corresponde esta ecuación entonces? Sacando factor común y:

$$y.(y+B)=0 \Rightarrow y=0 \ \vee y=-B$$

Es decir dos rectas horizontales y paralelas. En particular si $B=0$ queda una única recta.

Respuesta: no es posible.

Ítem d

Lo hemos respondido en el ítem anterior. Para que sean dos rectas paralelas:

$$A=0 \wedge B \neq 0$$

Ítem e

Para analizar este caso utilicemos la expresión:

$$\frac{Ax^2}{\left(\frac{B}{2}\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{B}{2}\right)^2}{\left(\frac{B}{2}\right)^2}=1 \ \ (B \neq 0)$$

Si es una hipérbola los signos de los coeficientes de x^2 e y^2 deben ser distintos. Luego A debe ser negativo. Luego para que sea hipérbola debe ser:

$$A<0 \wedge B \neq 0$$

Para ser equilátera tienen que ser iguales el eje real y el transverso, luego:

$$\frac{1}{A^2}.\frac{B}{2}=\frac{B}{2} \Rightarrow |A|=1 \Rightarrow A=-1$$

Luego para que sea hipérbola equilátera debe ser:

$$A=-1 \wedge B \neq 0$$

Si queremos que el centro esté en (0,3) entonces:

$$\frac{B}{2}=-3 \Rightarrow B=-6$$

Respuesta:

$$A=-1 \wedge B=-6$$

En el siguiente archivo de GeoGebra podemos manipular los valores de los parámetros A y B para chequear si los resultados son correctos y explorar la forma que va tomando la curva para cada par de valores de los parámetros:

Ecuaciones paramétricas de las cónicas

Ecuaciones paramétricas de una recta en $\mathbb{R}^2$

Nosotros ya vimos cómo parametrizar rectas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$:

Un ejemplo de parametrización de una recta sería:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t - 1 \end{cases} \forall t \in \mathbb{R}$$

$$t = \frac{x}{2}$$

$$y = \frac{x}{2} - 1$$

Esto es una recta con pendiente $\frac{1}{2}$ y ordenada al origen igual a -1.

Veamos esta parametrización:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t - 1 \end{cases} \forall t \in [0,1]$$

¿Es la parametrización de una recta? No estamos parametrizando toda la recta, sino un segmento de la recta. ¿Qué segmento estamos parametrizando? Para cada valor de t, corresponde un punto (x, y) que pertenece a la recta, o en este cado al segmento de recta.

Veamos qué puntos corresponden para $t = 0$ y para $t = 1$:

$$t = 0 \Rightarrow (0, -1)$$

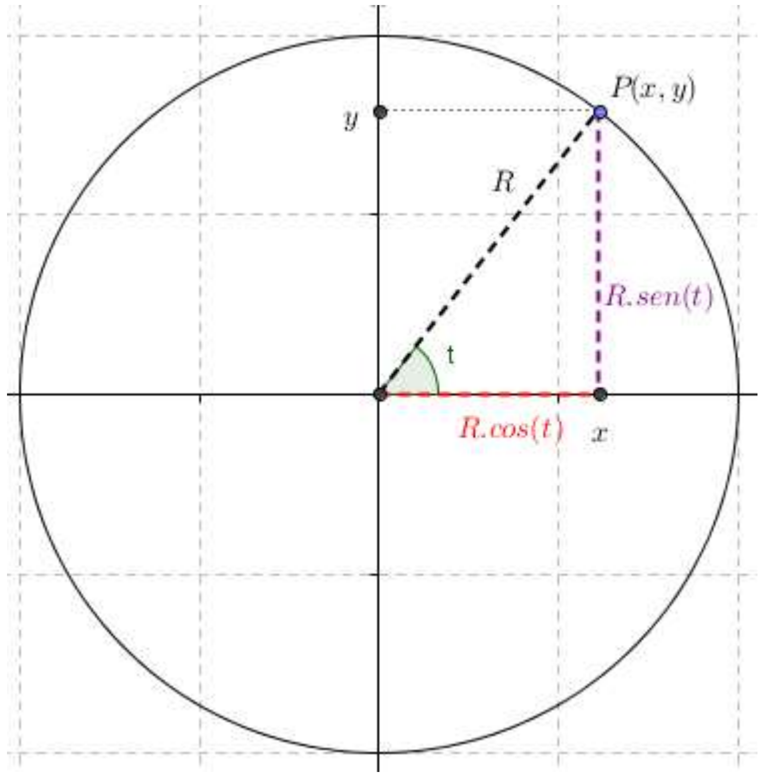
$$t = 1 \Rightarrow (2,0)$$

Esto quiere decir que estamos parametrizando el segmento de recta que comprendido entre los puntos $(0, -1)$ y $(2,0)$. ¿En qué sentido se recorre el segmento? ¿Desde $(0, -1)$ hacia $(2,0)$ o en sentido contrario? El sentido viene dado por el valor inicial y final de t. En el siguiente archivo de GeoGebra se puede visualizar como para cada valor del parámetro se obtiene un punto distinto:

Ahora vamos a ver cómo parametrizar las cónicas.

Parametrización de la circunferencia

Queremos descomponer el movimiento circular en el eje x y en el eje y.



Con la ayuda de la trigonometría expresemos las coordenadas de un punto cualquiera en función de t:

$$\begin{cases} x = R.\cos(t) \\ y = R.sen(t) \end{cases}$$

Si quiero dar toda la vuelta a la circunferencia t deberá estar en el intervalo

$$[0,2\pi]$$

Obtuvimos así una ***parametrización de la circunferencia con $\boldsymbol{C(0,0)}$ y radio $\boldsymbol{R}$***.

Si en esta parametrización se considera el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ¿Qué arco de circunferencia queda descripto?

"Desparametrización" de la circunferencia

Para pasar desde las ecuaciones paramétricas a la cartesiana debemos eliminar el parámetro t. Elevamos al cuadrado ambas igualdades:

$$x^2 = R^2.\cos^2(t)$$

$$y^2 = R^2.sen^2(t)$$

Sumando las ecuaciones miembro a miembro:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Que es la ecuación canónica de la circunferencia.

Otra parametrización de la circunferencia

La ecuación canónica de una circunferencia con centro en $(0,0)$ y de radio r es única:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Ahora consideremos:

$$\text{Parametrización 2: } \begin{cases} x = R.sen(t) \\ y = R.\cos(t) \end{cases} \qquad t \in [0,2\pi]$$

¿Qué curva representa esta parametrización? Es posible que no nos demos cuenta fácilmente. Intentemos obtener la ecuación cartesiana. Vamos a "desparametrizar" la curva. Podemos elevar al cuadrado ambos miembros:

$$x^2 = R^2.sen^2(t)$$
$$y^2 = R^2.\cos^2(t)$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Que es exactamente la misma curva que ya habíamos parametrizado. Entonces las ecuaciones paramétricas para una curva no son únicas. Representan la misma circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio R. ¿Cuál es la diferencia entre ambas parametrizaciones?

Vamos a hacer una tabla para algunos valores para ver la diferencia entre las dos parametrizaciones.

t	Parametrización 1 (x, y)	Parametrización 2 (x, y)
0	$(r, 0)$	$(0, r)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0, r)$	$(r, 0)$
π	$(-r, 0)$	$(0, -r)$

$\frac{3\pi}{2}$	$(0,-r)$	$(-r,0)$
2π	$(r,0)$	$(0,r)$

Es decir que la trayectoria es la misma pero el sentido en que se recorre la trayectoria cambia. En el primer caso es antihorario y en el otro, horario.

EPL 5

Dada la parametrización:

$$\begin{cases} x = 3.sen(2t) \\ y = 3.\cos(2t) \end{cases} \qquad t \in [0,2\pi]$$

a. Eliminando el parámetro, identifiquen que curva representa.
b. Describan la diferencia entre esta parametrización y la parametrización anterior.

Ejemplo

Consideremos la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x = 5.\cos(2t) \\ y = 5.sen(2t) \end{cases} \quad t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Si elevamos al cuadrado y sumamos, obtenemos:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Construyamos la tabla de valores:

$\boldsymbol{t}$	$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	
0	$(5,0)$	Punto inicial
$\frac{\pi}{4}$	$(0,5)$	Punto intermedio
$\frac{\pi}{2}$	$(-5,0)$	Punto final

Es una semicircunferencia recorrida con sentido antihorario.

Ejemplo

Hallar una parametrización de la curva dada por:

$$x^2 + y^2 + x - 4y = 0$$

Indicar punto inicial P_0 y sentido de recorrido de la curva.

Resolución

Veamos cómo se podría resolver esto en forma general. Tratemos de llevar la ecuación a la forma ordinaria.

¿Qué curva podría representar esta ecuación?

Una circunferencia, porque los coeficientes de x^2 y de y^2 son iguales.

Consideremos la ecuación ordinaria:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Dividamos ambos miembros por r^2 :

$$\frac{(x - \alpha)^2}{r^2} + \frac{(y - \beta)^2}{r^2} = 1$$

Lo expresemos como suma de cuadrados:

$$\left(\frac{x - \alpha}{r}\right)^2 + \left(\frac{y - \beta}{r}\right)^2 = 1$$

Aprovechemos la identidad trigonométrica, para realizar el siguiente cambio de variable:

$$cos(t) = \frac{x - \alpha}{r}$$

$$\text{sen}(t) = \frac{y - \beta}{r}$$

Despejemos x e y para obtener una posible parametrización:

$$\begin{cases} x = \alpha + r.cos(t) \\ y = \beta + r.\text{sen}(t) \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$

Estas son las ***ecuaciones paramétricas de la circunferencia con centro en el punto*** $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ ***y radio*** $\boldsymbol{r}$.

Retomemos el ejemplo:

$$x^2 + y^2 + x - 4y = 0$$

Completando cuadrados:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2-2^2=0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{1}{4}+4$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{17}{4}$$

Las coordenadas del centro y el valor del radio son:

$$\alpha=-\frac{1}{2}$$

$$\beta=2$$

$$r=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

Una posible parametrización es:

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\cos(t) \\ y=2+\frac{\sqrt{17}}{2}.sen(t) \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

Parametrización de la elipse

Hallar una parametrización de la siguiente curva:

$$x^2+4y^2-2x+4y+1=0$$

Si los coeficientes de x^2 e y^2 no son iguales, no puede tratarse de una circunferencia. Tampoco puede ser una parábola. Entonces o es una elipse o es una hipérbola. Si fuera una hipérbola los signos de los coeficientes de los términos con x^2 e y^2 deberían ser distintos. Luego pensamos inicialmente que es una elipse.

Deberíamos llegar a una ecuación como ésta:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

Una vez que lo escribimos así, es fácil parametrizar porque podemos expresar esto como la suma de dos cuadrados:

$$\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2=1$$

Y por la identidad pitagórica podemos hacer:

$$\cos(t)=\frac{x-\alpha}{a}$$

$$sen(t)=\frac{y-\beta}{b}$$

Análogamente a lo visto para la circunferencia, el parámetro t debería tomar todos los valores en el intervalo $[0,2\pi]$:

$$\begin{cases} x=\alpha+a.\cos(t) \\ y=\beta+b.sen(t) \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

Obtuvimos así una ***parametrización de la elipse con $C(\alpha,\beta)$ y semiejes a y b.***

Retomemos la ecuación dada:

$$x^2+4y^2-2x+4y+1=0$$

Saquemos factor común:

$$x^2-2x+4(y^2+y)+1=0$$

Completemos cuadrados:

$$(x-1)^2-1^2+4\left[\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+1=0$$

$$(x-1)^2+4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$$(x-1)^2+\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1$$

Esta expresión corresponde a la ecuación canónica de una elipse con centro $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ y semiejes $a=1$, $b=\frac{1}{2}$.

Una posible parametrización es:

$$\begin{cases} x = 1 + \cos(t) \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} sen(t) \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$

EPL 6

Dada la ecuación

$$2x^2 + y^2 - 8x + 2y - 1 = 0$$

a) Hallar la ecuación canónica de la cónica correspondiente, indicando las coordenadas del centro, vértices y focos. Graficar.
b) Obtener una parametrización indicando punto inicial y sentido del recorrido de la curva.

Parametrización de la parábola

La ecuación canónica de una parábola con vértice $V(\alpha, \beta)$, y eje focal horizontal es:

$$(y - \beta)^2 = 4c(x - \alpha)$$

Si llamamos $t = y - \beta$:

$$\begin{cases} x - \alpha = \frac{1}{4c} t^2 \\ y - \beta = t \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4c} t^2 + \alpha \\ y = t + \beta \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ésta es ***una parametrización de la parábola de eje focal horizontal con vértice*** $\boldsymbol{V(\alpha, \beta)}$**.**

En el caso en que la parábola sea de ***eje focal vertical***, resulta:

$$(x - \alpha)^2 = 4c(y - \beta)$$

$$\begin{cases} x - \alpha = t \\ y - \beta = \frac{1}{4c} t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t + \alpha \\ y = \frac{1}{4c} t^2 + \beta \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 1

Parametrizar el arco de la parábola cuya ecuación es $y^2 = -4x$ comprendido entre los puntos $(0,0)$ y $(-9,6)$.

Resolución

Se trata de una parábola con eje focal horizontal. En este caso los valores de α y β son ambos 0. Luego podemos hacer la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4}t^2 \\ y = t \end{cases}$$

Pero debemos definir en qué intervalo real tomará valores el parámetro. El punto $(0,0)$, ¿a qué valor del parámetro se corresponde? Sustituimos $x = y = 0$, y despejamos el valor de t

$$0 = -\frac{1}{4}t^2 \ , \ \ 0 = t$$

¿Y qué valor toma para el punto $(-9,6)$?

$$\begin{cases} -9 = -\dfrac{1}{4}t^2 \Rightarrow |t| = 6 \\ 6 = t \end{cases}$$

Luego el intervalo es:

$$t \in [0,6]$$

La parametrización definida en forma completa quedaría entonces:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4}t^2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,6]$$

En el siguiente archivo de GeoGebra se puede corroborar como para cada valor del parámetro tenemos un punto en el plano correspondiente al arco de parábola:

Ejemplo 2

Parametrizar la curva definida por:

$$y^2 + 4x + 2y - 3 = 0 \ \ , \ \ \boldsymbol{x \geq 0}$$

Resolución

Cómo aparece la variable y elevada al cuadrado y no aparece la variable x elevada al cuadrado, podemos suponer inicialmente que se tratará de una parábola. Completemos cuadrados para llegar a su ecuación ordinaria:

$$y^2 + 2y = -4x + 3$$

$$(y+1)^2 - 1 = -4x + 3$$

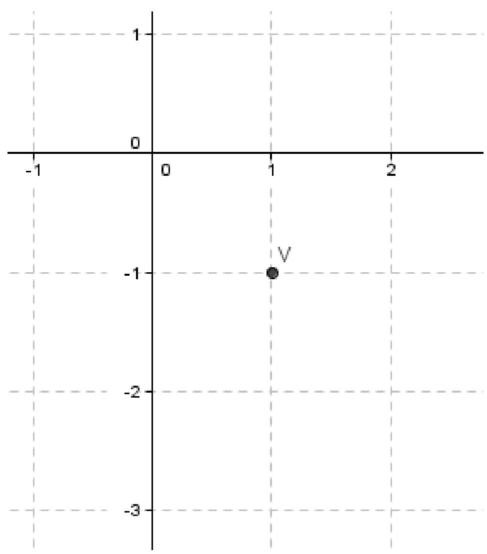
$$(y+1)^2 = -4x + 4$$

$$(y+1)^2 = -4(x-1)$$

Ésta es la ecuación de una parábola de eje focal horizontal (porque es y la variable que aparece elevada al cuadrado) con vértice en $(1,-1)$. ¿Las "ramas" de esta parábola apuntarán hacia derecha o izquierda? Hacia izquierda, esto podemos verlo en que x debe tomar valores que no hagan negativo el segundo miembro. Es decir:

$$-4(x-1) \geq 0 \Rightarrow \; x - 1 \leq 0 \Rightarrow \; x \leq 1$$

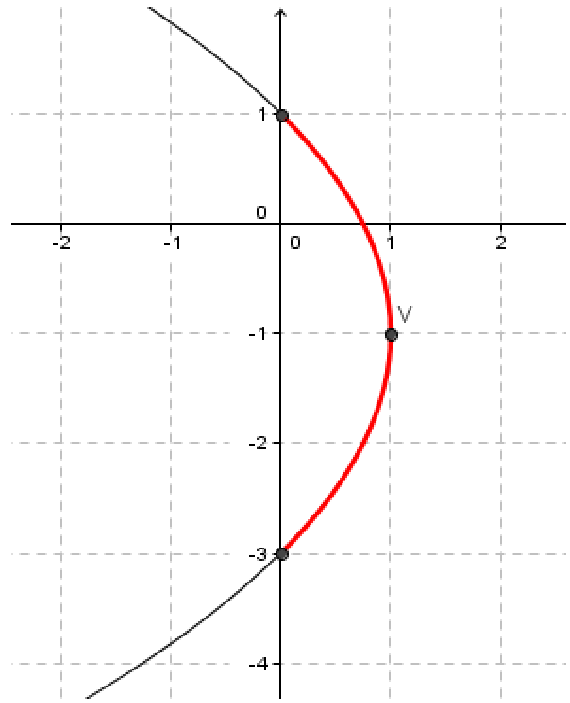
Grafiquemos el vértice e imaginemos a las "ramas" de la parábola hacia la izquierda:



Cortará al eje y en dos puntos, que no sabemos cuáles son. Además como se pide que $x \geq 0$ no tenemos la parábola completa sino sólo un arco de ella. Para saber cuál será ese arco busquemos los valores que toma y cuando $x = 0$

$$(y+1)^2 = -4(0-1) \Rightarrow \; (y+1)^2 = 4 \Rightarrow |y+1| = 2 \Rightarrow y = 1 \;\vee\; y = -3$$

Luego ya podemos graficar la parábola y destacar cual es el arco que queremos parametrizar:



Una parametrización de la parábola podría hacerse igualando al parámetro con $y+1$:

$$\begin{cases} t = y+1 \\ t^2 = -4(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = t-1 \\ x = -\dfrac{t^2}{4}+1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Cómo sólo queremos que los valores de y varíen entre -3 y 1, entonces:

$$-3 \leq y \leq 1 \;\Rightarrow\; -2 \leq \underbrace{y+1}_{t} \leq 2$$

Y finalmente la parametrización del arco de parábola es:

$$\begin{cases} y = t-1 \\ x = -\dfrac{t^2}{4}+1 \end{cases} \quad t \in [-2{,}2]$$

EPL 7

a) Hallar la ecuación de la parábola con directriz $y=-1$ y foco $F(1{,}3)$

b) Parametrizar el arco de parábola que verifica la restricción: $y \leq 9$.

“Desparametrización” de una parábola

En un tiro oblicuo al descomponer el movimiento del proyectil según la dirección horizontal (MRU) y vertical (MRUV) queda establecida la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x = v_{0x} t \\ y = v_{0y}.t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Si t en estas ecuaciones representa al tiempo, ¿cuál sería el intervalo de parametrización?

Para obtener la trayectoria del proyectil, eliminamos el parámetro de las ecuaciones:

$$t = \frac{x}{v_{0x}} \Rightarrow y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right) x - \left(\frac{g}{2{v_{0x}}^2}\right). x^2$$

Se obtiene una función cuadrática, es decir que la trayectoria es parabólica.

Ejemplo

Hallar la ecuación cartesiana y graficar la curva de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t^2 \end{cases} \quad t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

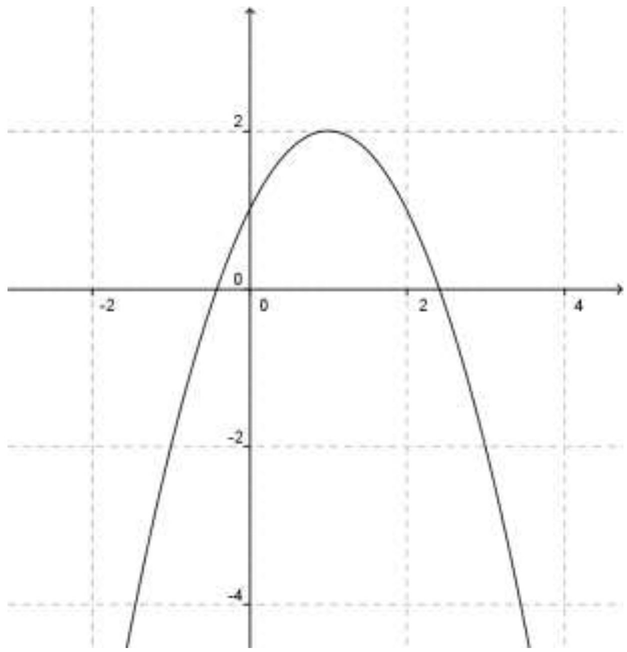
Resolución

Para obtener la ecuación cartesiana despejamos el parámetro t de la primera ecuación y luego lo sustituimos en la segunda:

$$t = x - 1$$

$$y = 2 - (x - 1)^2$$

Es una parábola cuyas ramas apuntan hacia abajo, y vértice en $(1,2)$:



Pero no queremos graficar la parábola entera, sino sólo el arco definido por la parametrización. Consideremos que puntos corresponden a los valores extremos del intervalo:

$$Cuando\ t = -\sqrt{2} \rightarrow P\left(1 - \sqrt{2}, 0\right)$$

$$Cuando\ t = \sqrt{2} \rightarrow P\left(1 + \sqrt{2}, 0\right)$$

Estos dos puntos son las raíces porque la ordenada es 0. Entonces el arco de parábola va desde $\left(1 - \sqrt{2}, 0\right)$ hasta $\left(1 + \sqrt{2}, 0\right)$.

Parametrización de la hipérbola

Cuando parametrizamos la circunferencia y la elipse utilizamos la relación pitagórica: $sen^2(t) + cos^2(t) = 1$. Esta relación no nos sirve en el caso de la hipérbola, pero podemos utilizar otra identidad trigonométrica:

$$\sec^2(t) - tg^2(t) = 1$$

Observación: si consideramos el intervalo $[0,2\pi]$ las funciones $\sec(t)$ y $tg(t)$ no están definidas ni en $t = \frac{\pi}{2}$ ni en $t = \frac{3}{2}\pi$.

Consideremos la ecuación canónica de una hipérbola de eje focal x:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Es posible escribirla como una diferencia de cuadrados y utilizar la identidad trigonométrica recién presentada:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{x}{a}\right)}_{\sec(t)}^2-\underbrace{\left(\frac{y}{b}\right)}_{tg(t)}^2=1$$

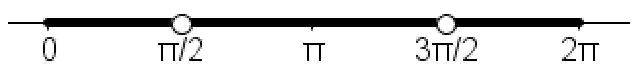
Entonces resulta:

$$\begin{cases} x=a.\sec(t) \\ y=b.tg(t) \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]-\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right\}$$

Que es la **parametrización de la hipérbola con centro $C(0.0)$ y eje focal $y=0$ (eje x).**

Observación: el conjunto de valores del parámetro puede expresarse también así:

$$[0,2\pi]-\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right\}=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$$



En el caso de la ***hipérbola de eje focal $x=0$ (eje y)***, se opera de forma análoga:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{y}{a}\right)}_{\sec(t)}^2-\underbrace{\left(\frac{x}{b}\right)}_{tg(t)}^2=1$$

$$\begin{cases} x=b.tg(t) \\ y=a.\sec(t) \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]-\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right\}$$

Ejemplo

Hallar una parametrización de la hipérbola definida por la siguiente ecuación.

$$\frac{x^2}{4}-y^2=1$$

Resolución

Se trata de una hipérbola de eje focal x. Así que siguiendo la parametrización realizada para el caso general podemos llegar a:

$$\underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)}_{\sec(t)}^{2} - \underbrace{(y)}_{tg(t)}^{2} = 1$$

Entonces:

$$\begin{cases} x = 2.\sec(t) \\ y = tg(t) \end{cases} \quad t \in [0,2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$$

Ésta es una parametrización de la hipérbola dada. A continuación se puede ver en GeoGebra que para cada valor del parámetro se define un punto sobre la curva:

Nótese en el applet que cuando

- $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ se obtienen puntos de la hipérbola en el primer cuadrante
- $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ se obtienen puntos de la hipérbola en el tercer y segundo cuadrante
- $t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ se obtienen puntos de la hipérbola en el cuarto cuadrante

Superficies

Una superficie es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisface la ecuación:

$$F(x, y, z) = 0$$

¿Qué superficies estudiaremos?

Las siguientes son ecuaciones $F(x, y, z) = 0$:

1. $x - 2y + 3z - 6 = 0 \;\; Plano$
2. $x^2 + y^2 + 2z = 0$
3. $x^2 - sen(xyz) = 0$
4. $x^2 - y^2 + z^2 = 4$
5. $e^{3y+z} - 2xy + 5 = 0$

En esta materia nosotros vamos a estudiar las *superficies cuádricas*, que tienen la característica de que la función $F(x, y, z)$ es un polinomio de grado 2 en tres variables (aunque puede faltar alguna).

De las cinco ecuaciones presentadas observen que la segunda y la cuarta son cuádricas. La primera es una superficie que ya hemos estudiado que podrán reconocer como un plano.

Ejemplo 1

¿Qué hacíamos para graficar el plano $x - 2y + 3z - 6 = 0$?

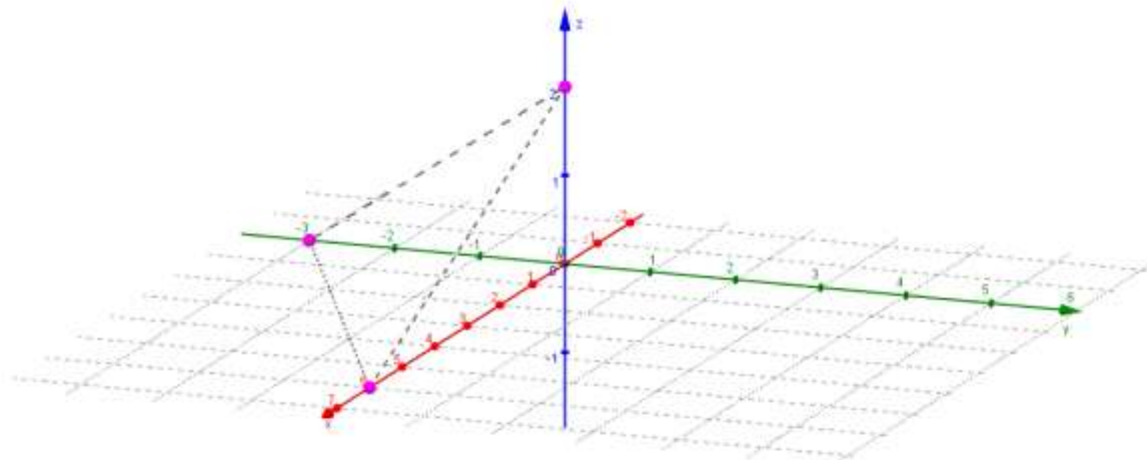
Buscábamos las intersecciones con los ejes:

$\cap$ con eje x: $\quad y = 0\,, z = 0 \ \Rightarrow x = 6 \qquad (6,0,0)$

$\cap$ con eje y: $\quad x = 0\,, z = 0 \ \Rightarrow y = -3 \qquad (0,-3,0)$

$\cap$ con eje z: $\quad x = 0\,, y = 0 \ \Rightarrow z = 2 \qquad (0,0,2)$

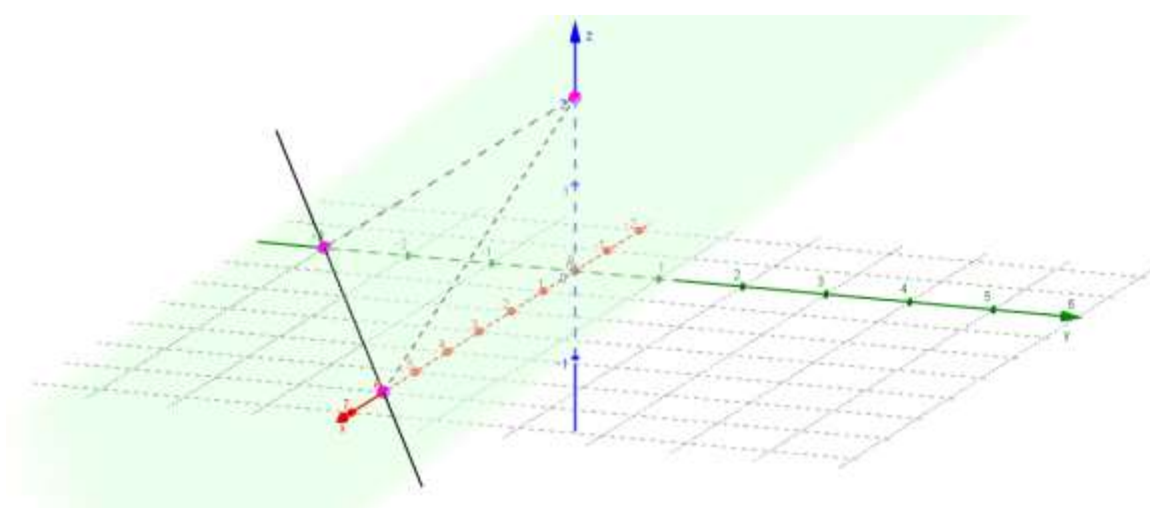
Graficamos estos tres puntos, y ya tenemos el plano.



Busquemos la intersección con los planos coordenados:

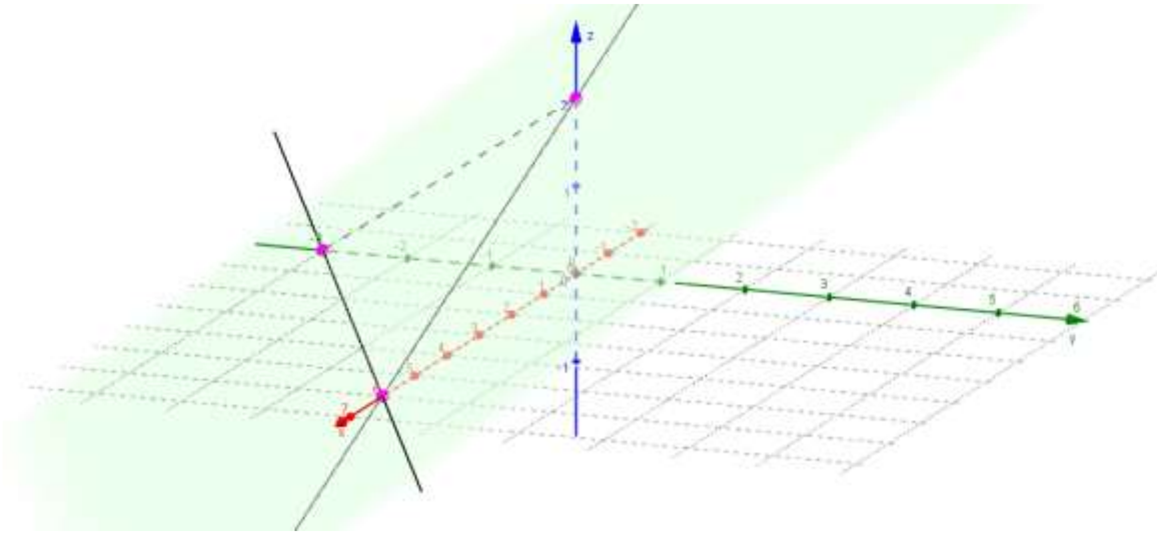
Intersección con plano $xy(z = 0)$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$$



Intersección con plano $xz(y = 0)$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$



Intersección con plano $yz(x = 0)$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -2y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

Para analizar otras superficies, también buscaremos sus intersecciones con los ejes.

Ejemplo 2

Queremos estudiar la superficie definida por la ecuación:

$$x^2 + y^2 + 2z = 0$$

Para estudiar ésta y otras superficies ***analíticamente*** vamos tener en cuenta tres características importantes:

(1) intersecciones con los ejes,

(2) intersecciones con los planos coordenados

(3) intersecciones con planos paralelos a los coordenados

Además de un estudio de tipo analítico utilizaremos software especializado para poder ***graficar*** en tres dimensiones las superficies que estamos estudiando.

Empezamos entonces con el primero de estos puntos.

1) Intersecciones con los ejes

¿En qué puntos corta esta superficie a cada uno de los ejes coordenados?

$$x = 0\,, y = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0$$
$$x = 0\,,\ z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$
$$z = 0\,, y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Entonces corta a los tres ejes en el punto $(0,0,0)$.

La información sobre la intersección con los ejes la resumiremos en éste y futuros ejemplos en una tabla como la siguiente:

Ejes	Intersección
$eje\ x : y = z = 0$	Punto: $(0,0,0)$
$eje\ y : x = z = 0$	Punto: $(0,0,0)$
$eje\ z : x = y = 0$	Punto: $(0,0,0)$

2) Trazas: intersecciones con los planos coordenados

Intersección con plano $\boldsymbol{xy}(\boldsymbol{z = 0})$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0,0)$$

Intersección con plano $\boldsymbol{xz}(\boldsymbol{y = 0})$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 = -2z$$

Entonces es una parábola en el plano xz con eje focal z y concavidad negativa.

Intersección con plano $\boldsymbol{yz}(\boldsymbol{x = 0})$

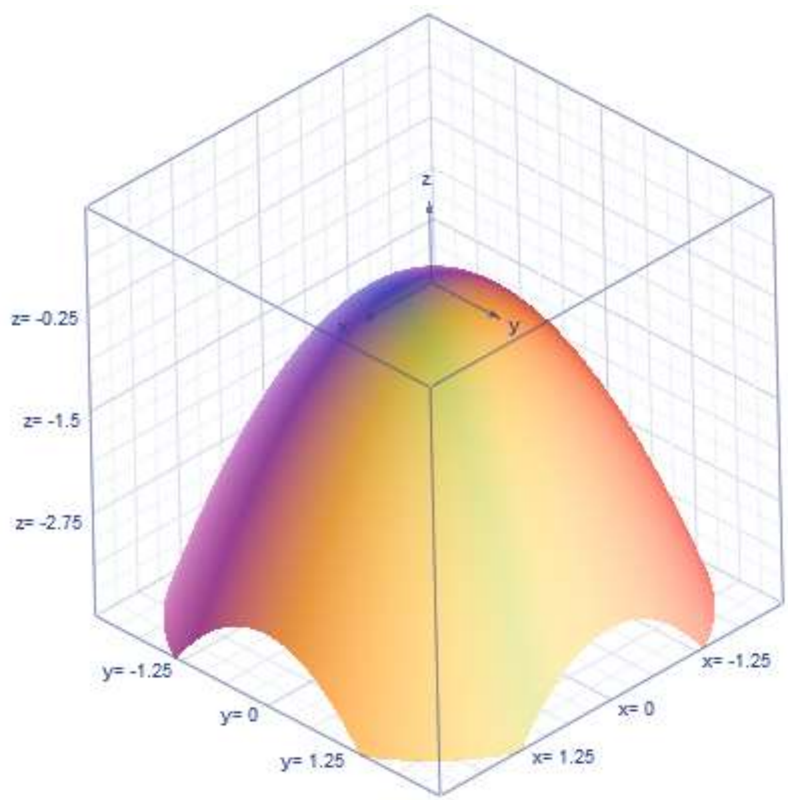
$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 = -2z$$

Entonces es una parábola en el plano yz con eje focal z y concavidad negativa.

La información sobre la traza la resumiremos en éste y futuros ejemplos en una tabla como la siguiente:

Plano coordenado	Traza
$xy(z=0)$	Punto: $(0,0,0)$
$xz(y=0)$	Parábola: $\begin{cases} y=0 \\ x^2=-2z \end{cases}$
$yz(x=0)$	Parábola: $\begin{cases} x=0 \\ y^2=-2z \end{cases}$

Veamos cómo es la gráfica de esta superficie utilizando Microsoft Mathematics:



3) **Cortes con planos paralelos a los coordenados**

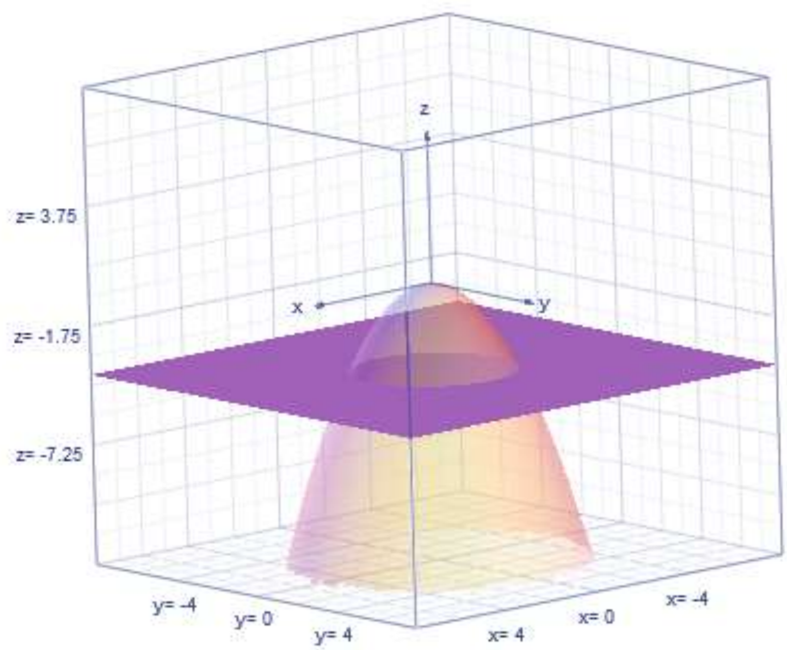
Otro recurso para analizar una superficie es cortarla con planos paralelos a los coordenados:

Planos paralelos al plano $xy(z = k)$

$$\begin{cases} z = k \\ x^2 + y^2 + 2k = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = -2k$$

Si k es negativo, queda la ecuación de una circunferencia.
Si $k = 0$, queda el punto $(0,0,0)$
Si $k > 0$ no existe lugar geométrico

A continuación podemos ver el corte con el plano $z = -4$:



Microsoft Mathematics

Microsoft Mathematics es un software que permite visualizar en forma dinámica las intersecciones de superficies con planos paralelos a los planos coordenados. En la web les ofrecemos un link de descarga del programa, y un tutorial.

EPL 8

Con la ayuda del programa Microsoft Mathematics, les pedimos que respondan las preguntas que siguen.

1) Sea S_2 la superficie de ecuación: $z = 4\,x^2$

a) ¿Qué curvas se obtienen al cortar S_2 con planos del tipo $y = k$?

b) ¿Y si la cortamos con planos del tipo $z = k$? ¿Hay alguna restricción sobre los valores de k?

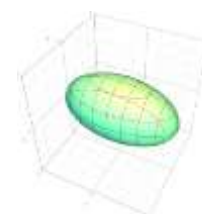
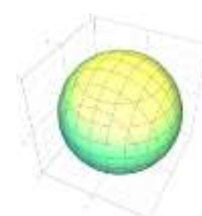
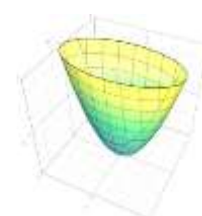
2) Dada S_4: $z = x^2 - y^2$

a) Si se corta la superficie con planos $z = k$, ¿existe algún valor de k para el cual se obtengan rectas?

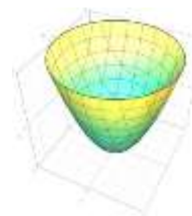
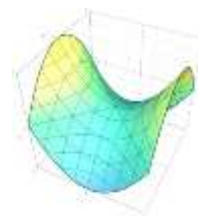
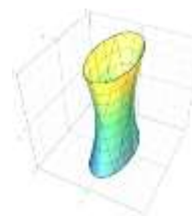
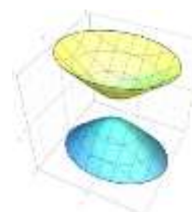
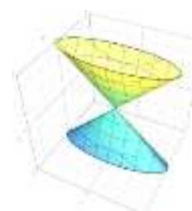
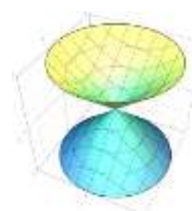
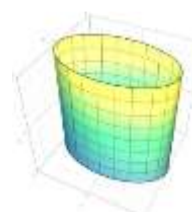
b) ¿Qué diferencia se observa al cortar la superficie con $z = 2$ o con $z = -2$?

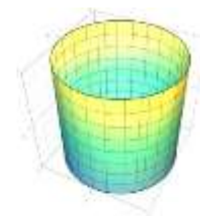
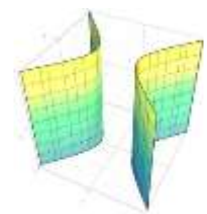
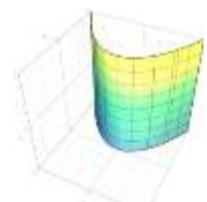
Resumen de superficies cuádricas[1]

A continuación presentamos un resumen de los distintos tipos de superficies cuádricas, y sus nombres. Más adelante desarrollaremos ejemplos de algunas de ellas.

Superficies cuádricas		
Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
Esfera	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$	
Paraboloide elíptico	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	

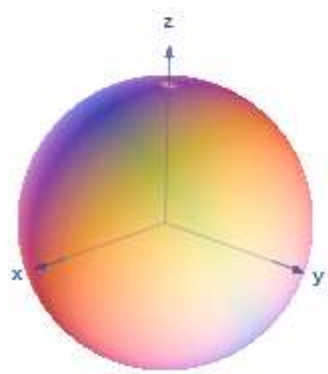
[1] Tomado de Wikipedia en inglés y traducido.

Paraboloide circular	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}$	
Paraboloide hiperbólico	$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	
Hiperboloide de una hoja	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
Hiperboloide de dos hojas	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
Cono	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	
Cono circular	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$	
Cilindro elíptico	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	

Cilindro circular	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	
Cilindro hiperbólico	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
Cilindro parabólico	$x^2+2ay=0$	

Ecuación de la esfera

Se denomina esfera al conjunto de puntos de R^3 que equidistan de un punto fijo $C(\alpha,\beta,\gamma)$ llamado centro. O sea, P(x, y, z) pertenece a la esfera si y sólo si $d(C,P)=r$



Esa distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{CP}$:

$$\|\overrightarrow{CP}\|=r$$

$$\|(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)\|=r$$

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}=r$$

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})^{2}+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\beta})^{2}+(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\gamma})^{2}=\boldsymbol{r}^{2}$$

Ésta es la ***ecuación de la esfera con centro*** $\boldsymbol{C(\alpha,\beta,\gamma)}$ ***y radio*** $\boldsymbol{r}$.

Ejemplo 1

a. Hallar la ecuación de la esfera con $C(1,2,-3)$ y radio 3
b. Determinar si el punto A $(1,1,5)$ pertenece a la esfera, o es interior o es exterior a la misma.

Resolución

Ítem a

Como conocemos el radio y las coordenadas del centro basta con reemplazar en:

$$(x-\alpha)^{2}+(y-\beta)^{2}+(z-\gamma)^{2}=r^{2}$$

Para obtener:

$$(x-1)^{2}+(y-2)^{2}+(z+3)^{2}=9$$

Ítem b

Los puntos que satisfacen esta ecuación constituyen una superficie esférica.

La región interior a la esfera está compuesta por los puntos cuya distancia al centro es menor que el radio. Entonces, para definir esa región interior es necesaria una inecuación:

$$(x-1)^{2}+(y-2)^{2}+(z+3)^{2}<3^{2}$$

Si reemplazamos las coordenadas de A:

$$\underbrace{0^{2}+(-1)^{2}+8^{2}}_{65}<9$$

No pertenece a la esfera. Es exterior porque: $[d(C,A)]^{2}>r^{2}$

Como $65>9$, el punto A es exterior a la esfera.

¿Qué posición tiene el punto Q $(1,0,-3)$ respecto de la esfera?

Ejemplo 2

Dada la ecuación:

$$x^{2}+y^{2}+z^{2}-2x+3y+k=0$$

a. Analizar para qué valores de k corresponde a una esfera.

b. Para $k = 0$, obtener la ecuación de la esfera, indicar centro y radio y analizar la posición de $B(3,-1,-2)$ respecto de la esfera.
c. Para $k = 0$, hallar si es posible, la intersección de la esfera con la recta PQ siendo $P(0,0,1)$ y $Q(0,2,0)$

Ítem a

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + k = 0$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 3y) + z^2 + k = 0$$

$$(x-1)^2 - 1^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + z^2 + k = 0$$

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - k$$

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{13}{4} - k$$

Para que sea la ecuación de una esfera, debe verificarse que:

$$r^2 = \frac{13}{4} - k > 0 \iff k < \frac{13}{4}$$

Si $\frac{13}{4} - k = 0$, es una "esfera de radio cero", o sea un punto. ¿Cuáles son sus coordenadas?

Si $\frac{13}{4} - k < 0$, no existe lugar geométrico.

Ítem b

La ecuación de la esfera cuando $k = 0$ es:

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{13}{4}$$

Para analizar la posición de $B(3,-1,-2)$ sustituimos:

$$(3-1)^2 + \left(-1 + \frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2$$

$$4 + \frac{1}{4} + 4 = \frac{33}{4}$$

Como $\frac{33}{4} > \frac{13}{4}$, B es un punto exterior a la esfera.

Ítem c

Hallemos una ecuación para la recta PQ:

$$\overrightarrow{PQ} = (0,2,-1)$$

$$PQ\colon\ (x, y, z) = (0,0,1) + t\,(0,2,-1) = (0, 2t, 1 - t)$$

Veamos si un punto de la forma $(0, 2t, 1 - t)$ podría pertenecer a la superficie esférica:

$$(0-1)^2 + \left(2t + \frac{3}{2}\right)^2 + (1-t)^2 = \frac{13}{4}$$

Ésta es una ecuación cuadrática que puede tener dos, una o ninguna solución real.

$$1 + 4t^2 + 6t + \frac{9}{4} + 1 - 2t + t^2 = \frac{13}{4}$$

$$5t^2 + 4t + \frac{17}{4} = \frac{13}{4}$$

$$5t^2 + 4t + 1 = 0$$

Esta ecuación no tiene solución real. Esto quiere decir que no existe ningún $t \in \mathbb{R}$ tal que el punto sea a la vez de la recta y de la superficie esférica. Luego no existe intersección, la recta es exterior a la esfera.

Es posible ver que la recta pasa "cerca" de la superficie esférica, pero no la llega a tocar.

EPL 9

Dada $S\colon\ x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$

Consideren los cortes de S con planos del tipo $z = k$. ¿Para qué valores de k, el plano resulta tangente a la esfera?

Hiperboloide de una hoja

Consideremos la siguiente ecuación para hacer su análisis:

$$x^2 - y^2 + z^2 = 4$$

1) **Intersecciones con los ejes**

Intersección con eje $\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{y = z = 0})$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$
$$(\pm 2,0,0)$$

Intersección con eje y $(\boldsymbol{x = z = 0})$

$$-y^2 = 4$$
$$y^2 = -4 \;\; Absurdo$$

Entonces no corta al eje y

Intersección con eje z $(\boldsymbol{x = z = 0})$

$$z^2 = 4 \;\Rightarrow z = \pm 2$$
$$(0,0,\pm 2)$$

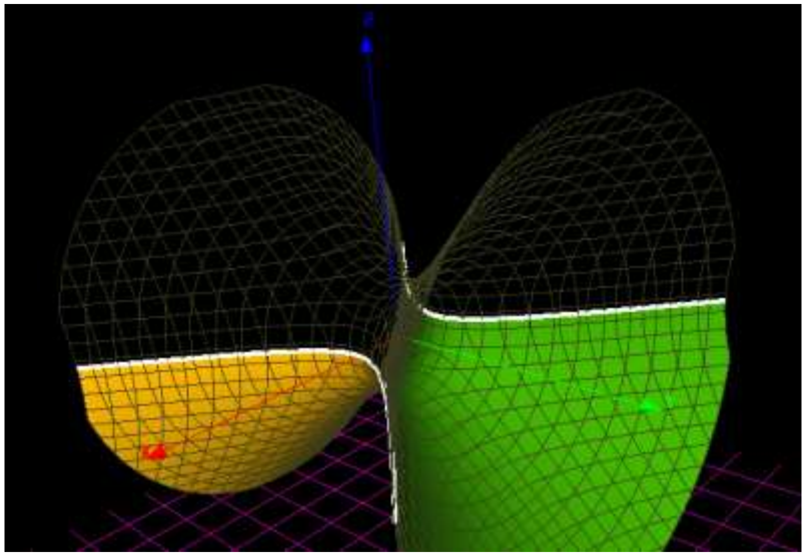
Ejes	Intersección
$eje\ x : y = z = 0$	$(\pm 2,0,0)$
$eje\ y : x = z = 0$	No hay intersección
$eje\ z : x = y = 0$	$(0,0,\pm 2)$

2) **Trazas: intersecciones con los planos coordenados**

Intersección con plano $\boldsymbol{xy}$ $(\boldsymbol{z = 0})$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$$

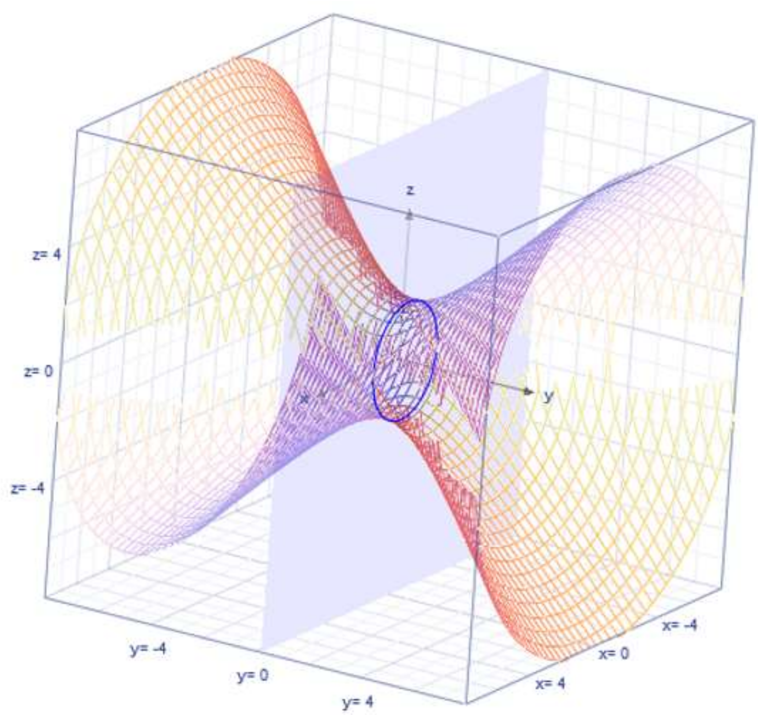
Es una hipérbola de eje focal x:



Intersección con plano $xz(y = 0)$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

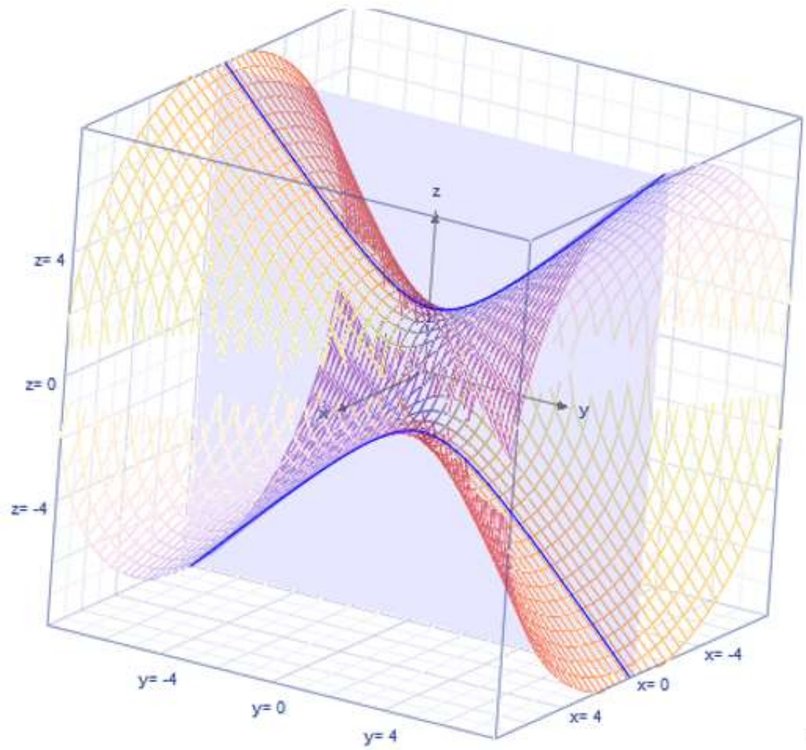
Es una circunferencia con radio 2, y centro en $(0,0,0)$



Intersección con plano yz $(x = 0)$

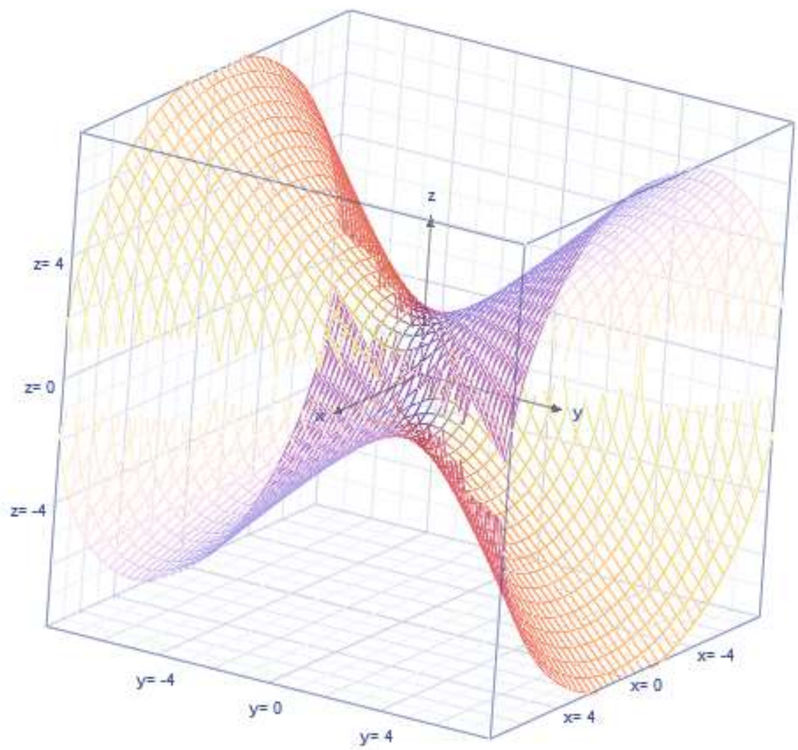
$$\begin{cases} x = 0 \\ -y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Hipérbola, con eje focal z:



Plano coordenado	Traza
$xy(z=0)$	Hipérbola de eje focal x: $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$
$xz(y=0)$	Circunferencia: $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$
$yz(x=0)$	Hipérbola con eje focal z: $\begin{cases} x = 0 \\ -y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$

Esta superficie se denomina hiperboloide de una hoja.



Cortes con planos paralelos al xz:

$$\begin{cases} y = k \\ x^2 + z^2 = 4 + k^2 \end{cases}$$

Para cada valor de k es una circunferencia, que se va agrandando a medida que aumenta el valor absoluto de y. Por ejemplo, si y = 1 o y = -1 se obtienen circunferencia de radio raíz de 5, con centros (0,1,0) y (0, -1, 0) respectivamente.

¿Cuál es el centro y el radio de la circunferencia que se obtiene cortando el hiperboloide con el plano y = 3 ?

Ejemplo 3

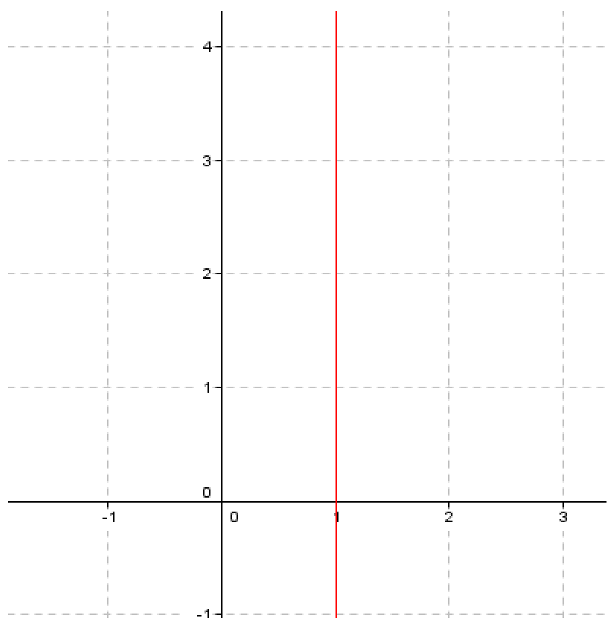
Indicar que representan las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

a. $x = 1$
b. $x + y = 2$
c. $x^2 - xy = 0$
d. $y = x^2$
e. $x^2 + y^2 = 4$
f. $-x^2 + 2y^2 = 1$
g. $x^2 + 4y^2 = 0$
h. $\begin{cases} y = x^2 \\ z = 1 \end{cases}$

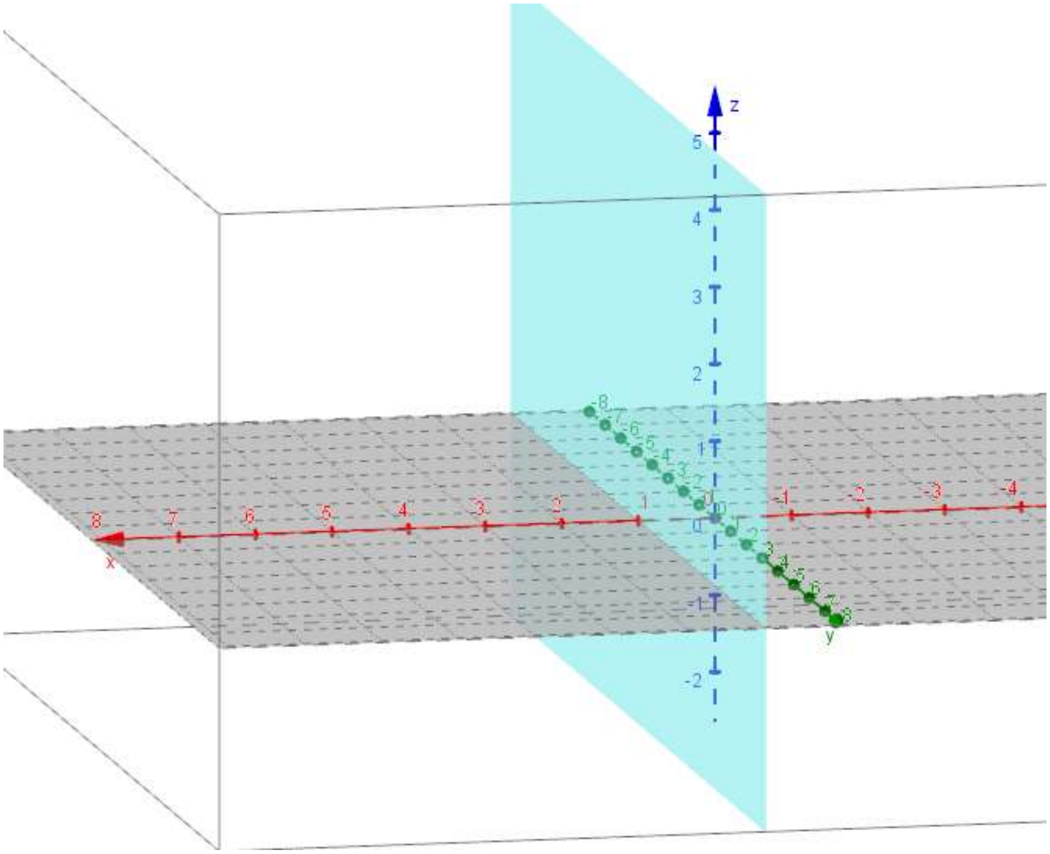
Resolución

Ítem a

En $\mathbb{R}^2$, sabemos que $x = 1$ representa una recta vertical, paralela al eje y, que pasa por $x = 1$ sobre el eje x:

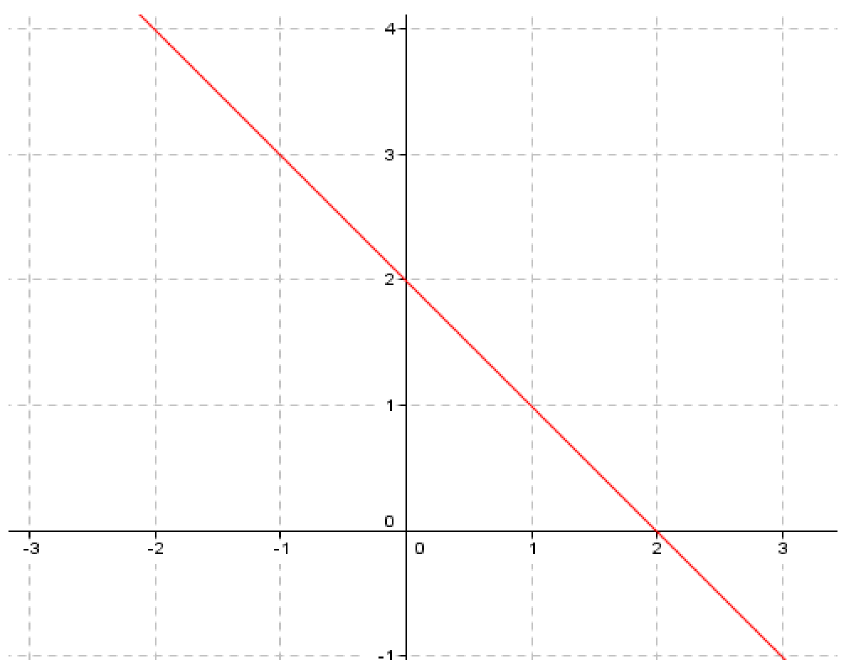


En $\mathbb{R}^3$ además de que y queda sin restricciones, también z queda sin restricciones. Entonces se obtiene un plano en el que y y z pueden tomar cualquier valor, pero siempre $x = 1$:

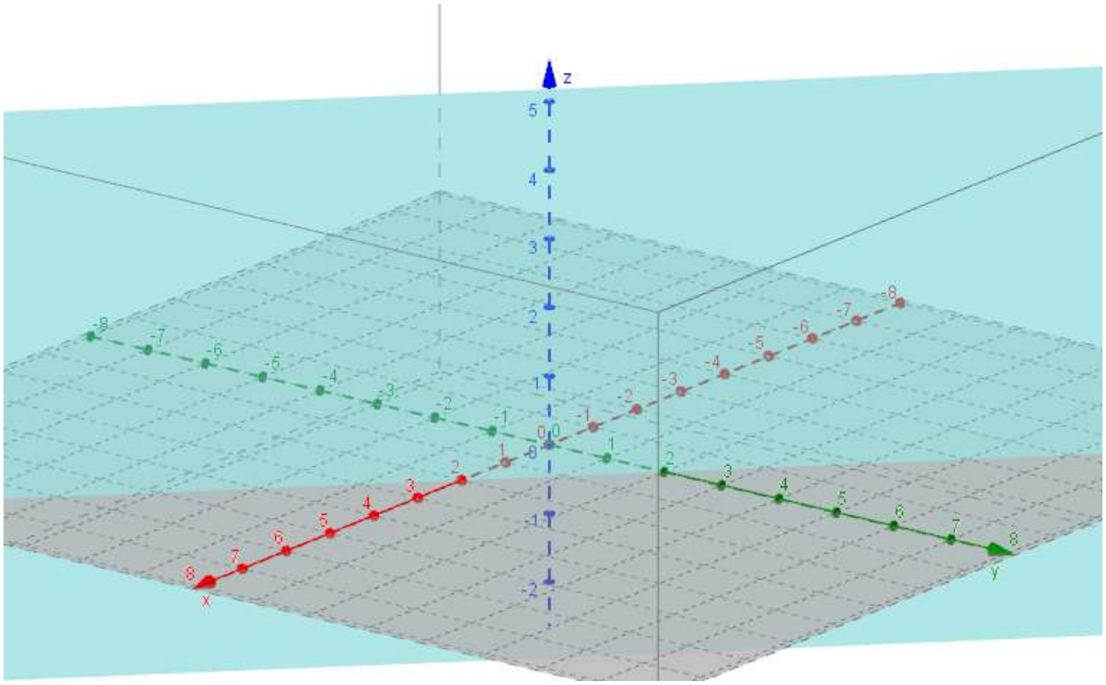


Ítem b

Sabemos que en $\mathbb{R}^2$ $x + y = 2$ es la ecuación de una recta:



En $\mathbb{R}^3$ la misma expresión no representa una recta, sino que responde a la ecuación de un plano paralelo al eje z:



Ítem c

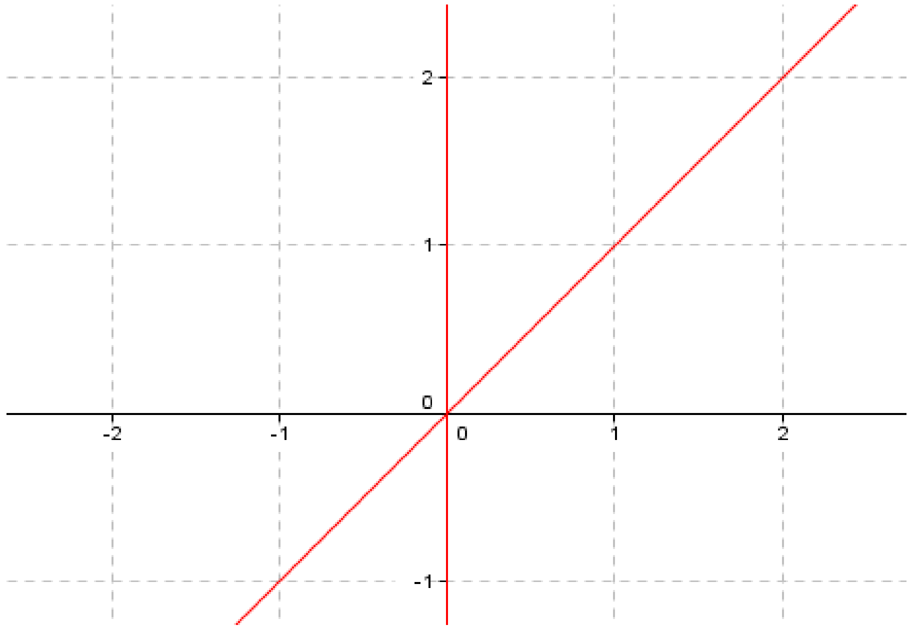
Sacando factor común x llegamos a que:

$$x^2 - xy = 0$$

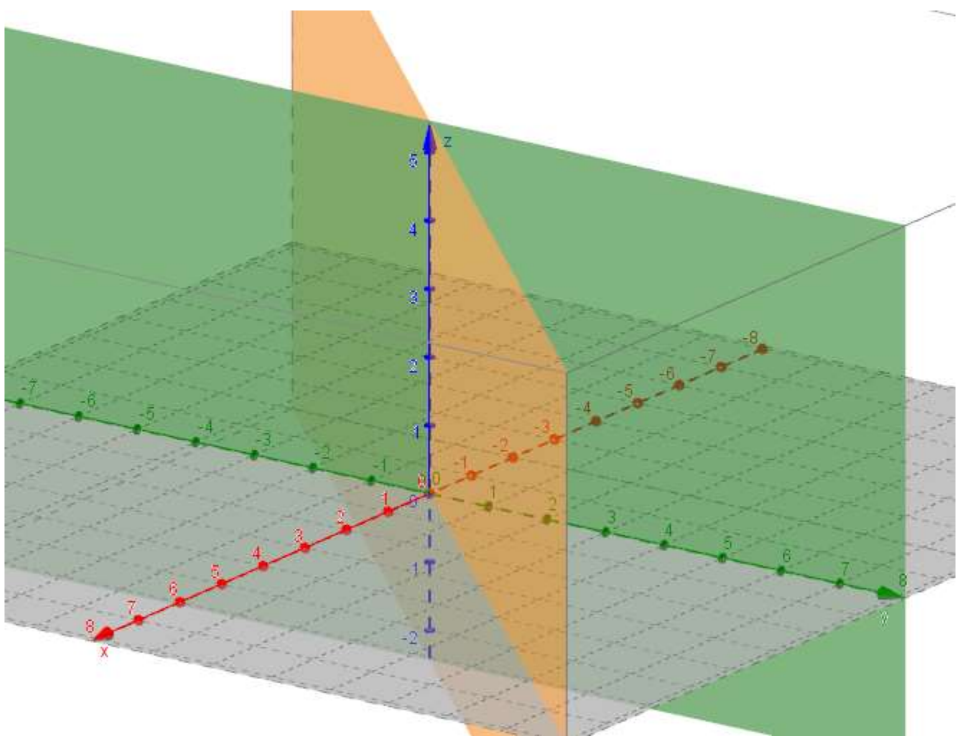
$$x.(x - y) = 0$$

$$x = 0 \vee y = x$$

¿Qué representan estas dos expresiones en $\mathbb{R}^2$? Sabemos que son dos rectas:

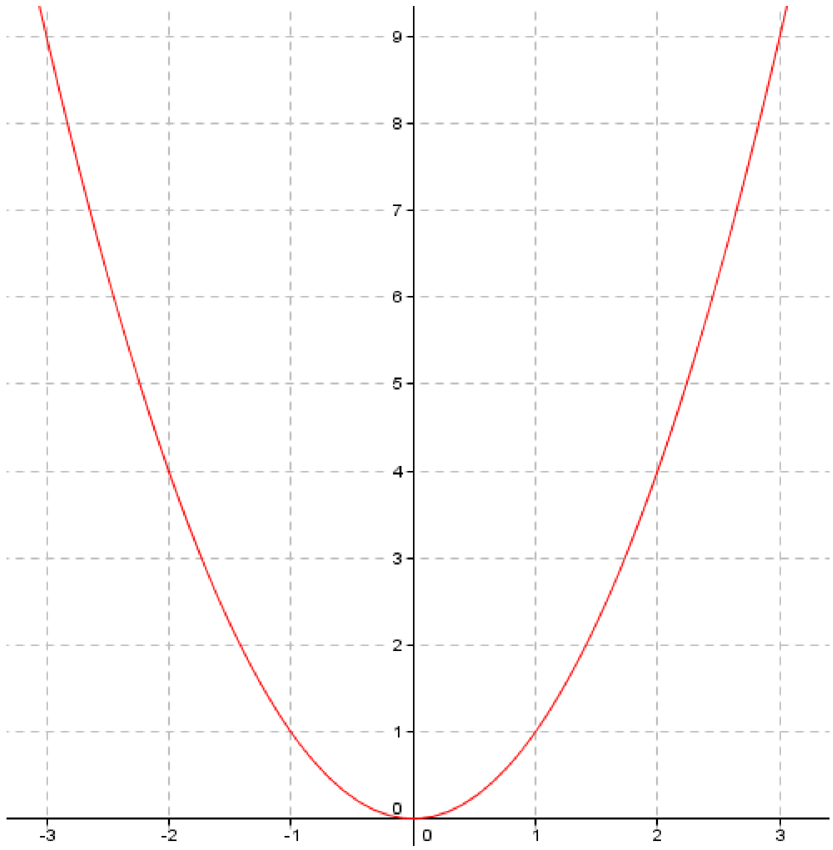


Según vimos en los ejemplos anteriores, en $\mathbb{R}^3$ estas expresiones no son rectas, sino que son planos:

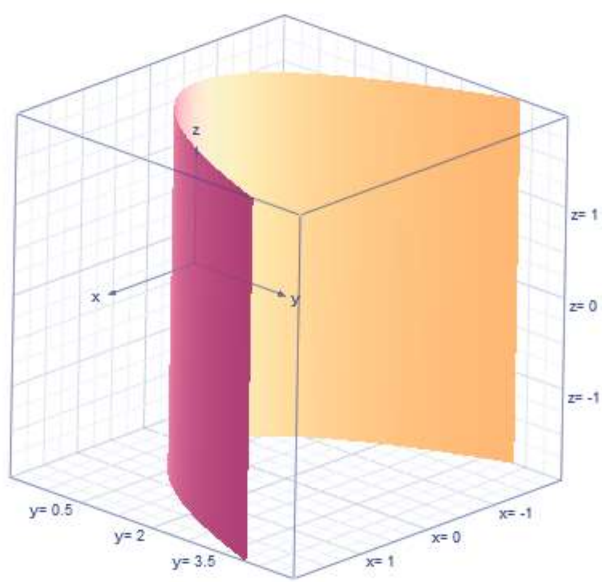


Ítem d

Sabemos que el $\mathbb{R}^2$ la expresión $y = x^2$ es una función cuadrática y su gráfica es una parábola:

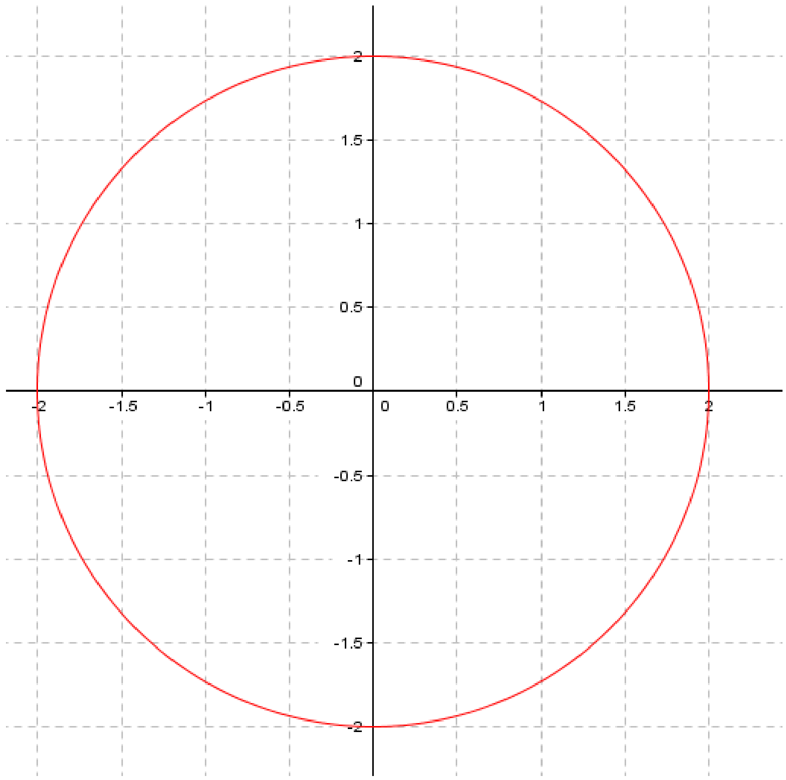


Pero en $\mathbb{R}^3$, al carecer de z la expresión, deja libre a esta variable. Es decir que z puede tomar cualquier valor, mientras que x e y se hallan restringidos a la expresión $y = x^2$. Al graficar en $\mathbb{R}^3$ obtenemos un cilindro parabólico:

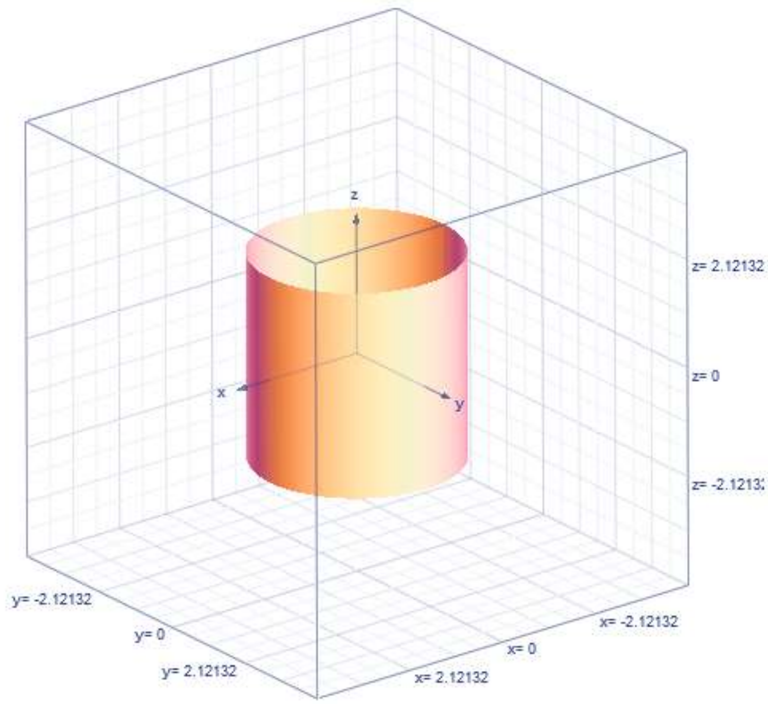


Ítem e

Ya hemos visto que en $\mathbb{R}^2$ la expresión $x^2 + y^2 = 4$ es la ecuación de una circunferencia centrada en el origen de radio 2:



Del mismo modo que sucedió en el ítem anterior, al pasar a $\mathbb{R}^3$ ocurre que z no tiene restricciones, no hay ningún condicionamiento impuesto sobre esta variable. Luego puede tomar cualquier valor. Así que obtenemos un cilindro circular que nunca corta al eje z:



Ítem f

Ya hemos visto que la expresión $-x^2 + 2y^2 = 1$ representa en $\mathbb{R}^2$ una hipérbola con eje focal y. Si la escribimos así:

$$\frac{y^2}{\frac{1}{2}} - x^2 = 1$$

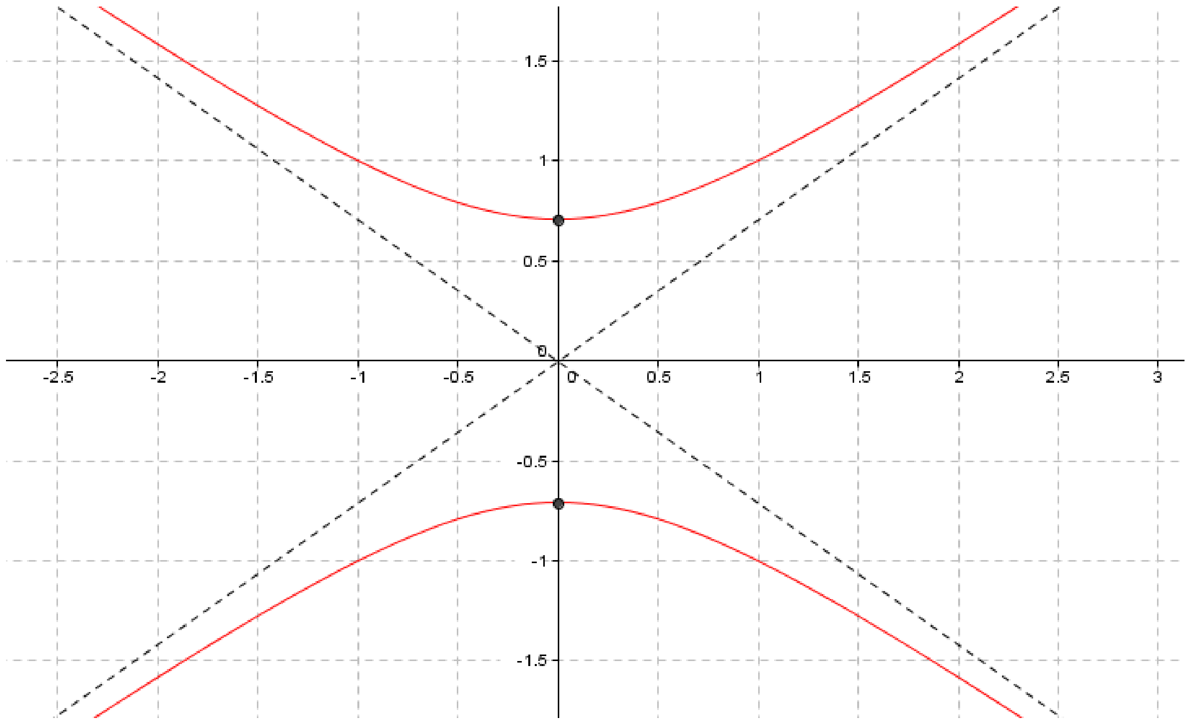
Se puede notar que sus vértices estarán en

$$\left(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

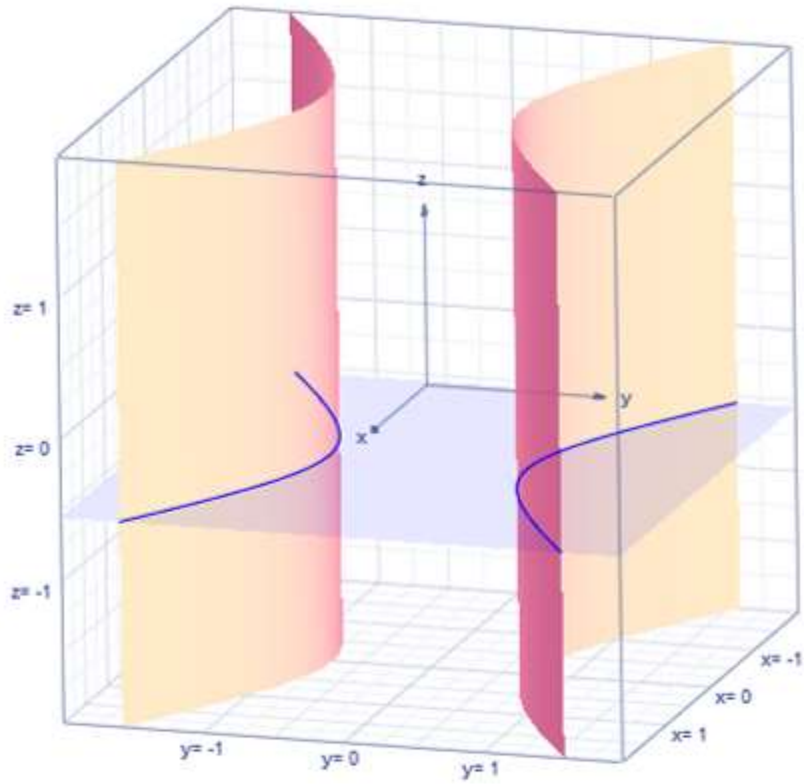
Y las asíntotas son:

$$y = \pm\sqrt{2}x$$

La siguiente es su representación gráfica:



Pero en $\mathbb{R}^3$ la expresión $-x^2 + 2y^2 = 1$ no establece ningún condicionamiento sobre z. Luego tendremos nuevamente un cilindro, pero esta vez se llama cilindro hiperbólico:



Ítem g

Analicemos ésta expresión:

$$x^2 + 4y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -4y^2 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

Vemos que para que sea verdadera la igualdad tanto x como y deben ser cero. Entonces esto representa, en $\mathbb{R}^2$ el punto $(0,0)$.

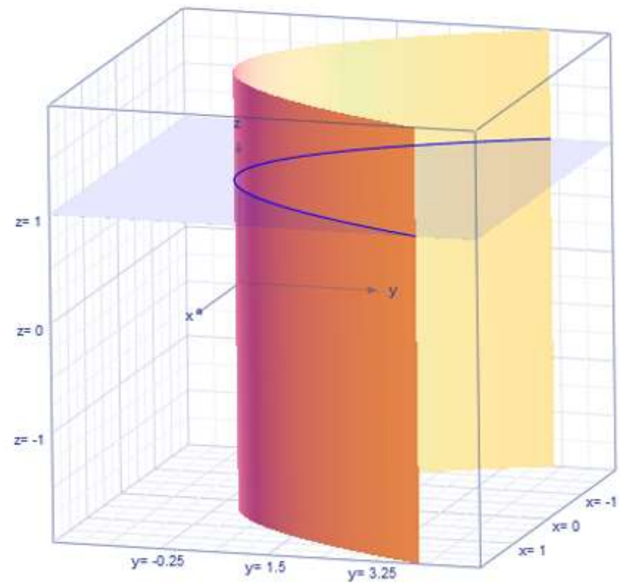
En $\mathbb{R}^3$ nuevamente vemos que no se dan condiciones sobre z, luego esto representa la recta que es el eje z

Ítem h

La expresión:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = 1 \end{cases}$$

No tiene sentido en $\mathbb{R}^2$, no es posible representarla. Pero en $\mathbb{R}^3$ representa la intersección de dos superficies: el cilindro parabólico que ya hemos estudiado, y el plano de ecuación $z = 1$. Veamos gráficamente que es lo que queda determinado por la intersección de estas dos superficies:



Se puede ver que queda determinada una curva, que será una parábola porque es un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que responde la fórmula $y = x^2$ con $z = 1$, es decir:

$$P(x, x^2, 1)$$

A continuación un resumen en forma de tabla de lo analizado en todos los ítems anteriores:

Ecuación	En $\mathbb{R}^2$ representa:	En $\mathbb{R}^3$ representa:
$x = 1$	Una recta	Un plano
$x + y = 2$	Una recta	Un plano
$x^2 - xy = 0$	Dos rectas	Dos planos
$y = x^2$	Parábola	Cilindro parabólico
$x^2 + y^2 = 4$	Circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 2	Cilindro circular
$-x^2 + 2y^2 = 1$	Hipérbola	Cilindro hiperbólico
$x^2 + 4y^2 = 0$	Punto $(0,0)$	Recta (el eje z)
$\begin{cases} y = x^2 \\ z = 1 \end{cases}$	-	Curva en $\mathbb{R}^3$(parábola)

Ejemplo 4

Dadas las siguientes superficies:

a) $y^2 = 4x^2 + z^2$
b) $x^2 - y^2 - z^2 = 4$
c) $y^2 + z^2 = 9$

Identifique cada una de ellas. Analice para qué valores de la constante k , $k \in \mathbb{R}$ existe intersección con los planos $x = k$, $y = k$ y $z = k$.

Resolución

Ítem a

$$4x^2 - y^2 + z^2 = 0$$

Se trata de una superficie cónica. Tiene dos signos iguales y uno distinto. Y está igualado a cero.

Intersecciones con los ejes

Intersección con eje x ($\boldsymbol{y = z = 0}$)

$$(0,0,0)$$

Que es la intersección con los tres ejes.

Trazas: Intersecciones con los planos coordenados

Intersección con plano $\boldsymbol{xy}$ ($\boldsymbol{z = 0}$)

$$\begin{cases} z = 0 \\ 4x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 4x^2 \Rightarrow y = \pm 2x \quad \textit{Par de rectas no paralelas}$$

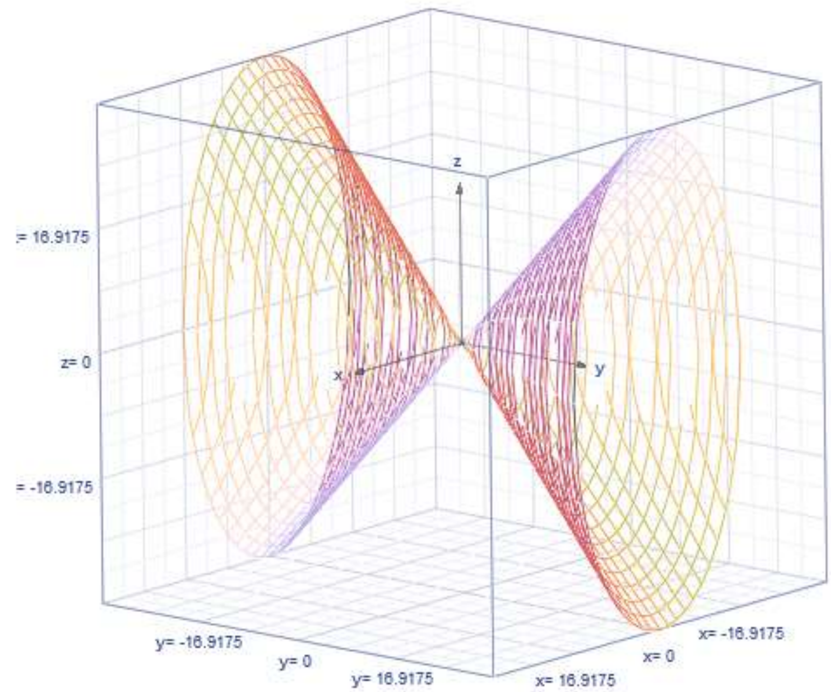
Intersección con plano $\boldsymbol{xz}$ ($\boldsymbol{y = 0}$)

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow z^2 + 4x^2 = 0 \Rightarrow (0,0,0)$$

Intersección con plano $\boldsymbol{zy}$ ($\boldsymbol{x = 0}$)

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \pm y \quad \textit{Par de rectas no paralelas}$$

Entonces hemos verificado que se trata de una superficie cónica elíptica. Veamos cómo sería el gráfico aproximadamente teniendo en cuenta todo lo calculado.

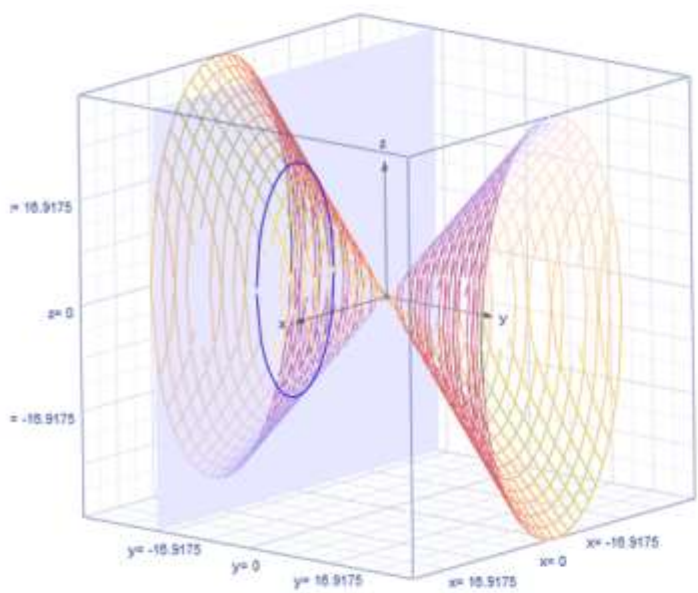


Cortes con planos $y = k$

Si hacemos $y = k$ obtenemos:

$$\begin{cases} y = k \\ 4x^2 + z^2 = k^2 \end{cases}$$

Que responde a la forma que tiene la ecuación de una elipse. Se comprueba gráficamente:



Ítem b

$$x^2 - y^2 - z^2 = 4$$

Intersecciones con los ejes

Intersección con eje $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} = \mathbf{0})$

$$\begin{cases} y = z = 0 \\ x^2 - y^2 - z^2 = 4 \end{cases} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Entonces corta al eje x en $(\pm 2,0,0)$

Intersección con eje $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} = \mathbf{0})$

$$\begin{cases} x = z = 0 \\ x^2 - y^2 - z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \ -y^2 = 4 \ \ \textit{No hay lugar geométrico}$$

Intersección con eje $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \mathbf{0})$

$$\begin{cases} x = y = 0 \\ x^2 - y^2 - z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \ -z^2 = 4 \ \ \textit{No hay lugar geométrico}$$

Intersecciones con los planos coordenados

Intersección con plano $\boldsymbol{xy}(\boldsymbol{z} = \mathbf{0})$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 - y^2 - z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \ \ \text{Hipérbola}$$

Intersección con plano $\boldsymbol{xz}(\boldsymbol{y} = \mathbf{0})$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - y^2 - z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - z^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{2^2} - \frac{z^2}{2^2} = 1 \ \ \text{Hipérbola}$$

Intersección con plano $\boldsymbol{zy}(\boldsymbol{x} = \mathbf{0})$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - y^2 - z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \ -y^2 - z^2 = 4 \ \ \text{No existe lugar geométrico}$$

Plano coordenado	Traza

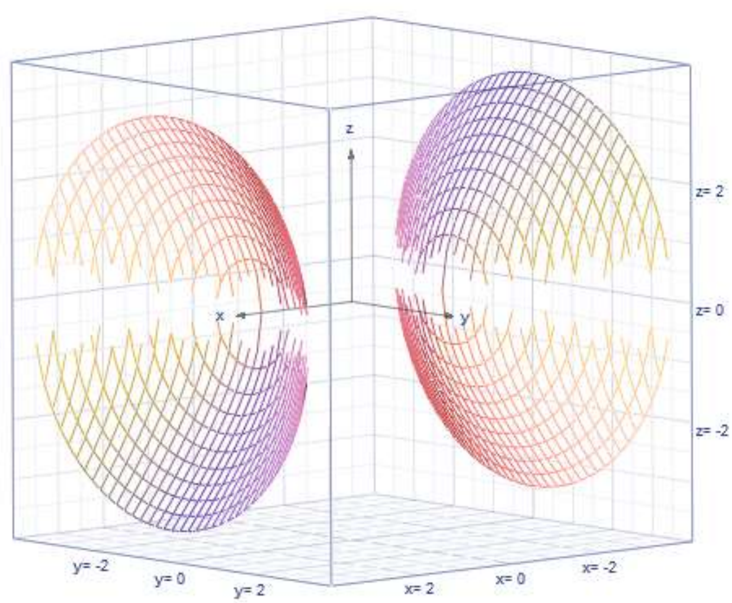
$xy(z=0)$	Hipérbola
$xz(y=0)$	Hipérbola
$yz(x=0)$	No hay lugar geométrico

Cortes con planos paralelos a los coordenados

Podemos cortarla a la superficie con un plano $x = k$

$$\begin{cases} x = k \\ k^2 - y^2 - z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow y^2 + z^2 = k^2 - 4$$

Entonces, ¿para qué valores de k existe intersección entre la superficie y los planos $x = k$? Siempre que $k^2 - 4 > 0$, entonces: $k > 2 \vee k < -2$.



Se trata de un hiperboloide de dos hojas.

Ítem c

$$y^2 + z^2 = 9$$

Intersecciones con los ejes

Intersección con eje $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0})$

$$\begin{cases} y = z = 0 \\ y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 0 = 9 \Rightarrow \text{No existe lugar geométrico}$$

Intersección con eje $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0})$

$$\begin{cases} x = z = 0 \\ y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \ y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$$

Entonces:

$$(0, \pm 3, 0)$$

Intersección con eje $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0})$

$$\begin{cases} x = y = 0 \\ y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \ z^2 = 9 \ \Rightarrow z = \pm 3$$

Entonces:

$$(0, 0, \pm 3)$$

Intersecciones con los planos coordenados

Intersección con plano $\boldsymbol{xy}(\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0})$

$$\begin{cases} z = 0 \\ y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$$

Entonces los puntos del lugar geométrico deben ser:

$$(x, \pm 3, 0)$$

Entonces el lugar geométrico es: dos rectas paralelas al eje x.

Intersección con plano $\boldsymbol{xz}(\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0})$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow z^2 = 9 \Rightarrow z = \pm 3$$

Entonces los puntos del lugar geométrico deben ser:

$$(x, 0, \pm 3)$$

Entonces el lugar geométrico es: dos rectas paralelas al eje x

Intersección con plano $zy(x=0)$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow y^2 + z^2 = 9$$

El lugar geométrico es una circunferencia con centro en $(0,0,0)$ y radio 3.

Finalmente, considerando todo lo calculado se puede realizar la gráfica: