Determinantes

Se llama función determinante a la aplicación de las matrices cuadradas en los reales.

$D:\Re^{nxn}\rightarrow\Re$

Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$ entonces $D(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$

Si $(A_1, A_2, ..., A_n)$ son las columnas de la matriz $A \Rightarrow D(A)=\det(A)=|A|=D(A_1, A_2, ..., A_n)$

Para que $D:\Re^{nxn}\rightarrow\Re$ sea función determinante debe verificarse las siguientes condiciones:

1. Si una matriz tiene una línea (fila o columna) expresada como la suma de otras dos, entonces su determinante se descompone en la suma de dos determinantes. $D(A_1, A_2, ..., A_i + A_j, ..., A_n) = D(A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n) + D(A_1, A_2, ..., A_j, ..., A_n)$
2. Si una matriz tiene una línea multiplicada por un escalar, entonces su determinante queda multiplicado por escalar.
   $D(A_1, A_2, ..., \alpha A_i, ..., A_n) = \alpha . D(A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n); \alpha \in \Re$
3. Si una matriz tiene dos líneas idénticas su determinante es igual a cero. $D(A_1, A_2, ..., A_i, A_j, ..., A_n) \wedge A_i = A_j \Rightarrow D(A) = 0$
4. El determinante de la matriz identidad siempre vale uno. $D(I)=1$

Propiedad

La función $D:\Re^{2x2}\rightarrow\Re : D(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ es un determinante

Si es un determinante debe verificar las cuatro condiciones.

1. $\begin{vmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{vmatrix} = a(d+f) - c(b+e)$

$= ad + af - cb - ce$

$= (ad - cb) + (af - ce)$

$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha ad - \alpha cb$

$= \alpha(ad - cb)$

$= \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = ac - ac = 0$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 0.0 = 1$

Como verifica las cuatro condiciones, entonces un determinante de $\Re^{2x2} \to \Re$ se resuelve como se ha indicado.

Menor complementario de un elemento

Sea $A \in \Re^{nxn}$, llamamos menor complementario de un elemento a_{ij} de una matriz *A* al determinante que se obtiene al eliminar de la matriz *A* a la fila *i* y a la columna *j*, se lo denota M_{ij}.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Adjunto o cofactor de un elemento

El adjunto o cofactor de un elemento a_{ij} es el número $(-1)^{i+j}.M_{ij}$ y se lo denota A_{ij}.

En el ejemplo anterior $A_{23} = (-1)^{2+3}.M_{23}$. También se lo denota $\mathrm{Adj}(a_{23})$

Desarrollo y cálculo de un determinante-Regla de Laplace

El determinante de una matriz se puede calcular multiplicando los elementos de una línea por sus correspondientes adjuntos y sumando dichos productos.

Ejemplo:

$$A \in \Re^{3x3} : A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Usando R. de Laplace desarrollando por fila 1 $|A| = a.Adj(a) + b.Adj(b) + c.Adj(c)$

$$|A| = a.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$|A| = a.\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b.\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c.\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$|A| = a.(\mathrm{ei - fh}) - b(\mathrm{di - fg}) + c(\mathrm{dh - eg})$$

$$|A| = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

En forma general sea $A \in \Re^{nxn} : A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2j} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nj} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$

Desarrollo por la fila i

$$|A| = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \ldots + a_{in}.A_{in} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}.A_{ik}$$

Desarrollo por la columna j

$$|A| = a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + \ldots + a_{nj}.A_{nj} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{kj}.A_{kj}$$

Propiedades de los determinantes

1. Si se permutan dos líneas paralelas de una matriz, entonces los correspondientes determinantes son opuestos.

   Sea $A = (A_1, \ldots, A_j, A_{j+1}, \ldots, A_n)$

   Por la 3° condición de la función determinante

   $D(A_1, \ldots, A_j + A_{j+1}, A_{j+1} + A_j, \ldots, A_n = 0$

Al verificarse la 1° condición

$D(A_1,...,A_j,A_{j+1},...,A_n)+D(A_1,...,A_j,A_j,...,A_n)+$

$+D(A_1,...,A_{j+1},A_{j+1},...,A_n)+D(A_1,...,A_{j+1},A_j,...,A_n)=0$

Los dos términos centrales son nulos por la condición 3°.

Finalmente:

$D(A_1,...,A_j,A_{j+1},...,A_n)=-D(A_1,...,A_{j+1},A_j,...,A_n)$

2. Si una matriz tiene una línea de ceros, entonces su determinante es cero.

$A \in \Re^{nxn}$ y $A_j = 0\ \forall j$

$D(A)=D(A_1,A_2,...,0,...,A_n)=D(A_1,A_2,...,0.A_j,...,A_n)$

Por la 2° condición de la función determinanate

$D(A)=0.D(A_1,A_2,...,A_j,...,A_n)\Rightarrow D(A)=0$

3. Si una matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales, entonces el determinante de dicha matriz es cero.

$A \in \Re^{nxn} : A=(A_1,A_2,...,A_j,...,\alpha.A_j,...,A_n)$

$|A| = D(A_1,A_2,...,A_j,...,\alpha.A_j,...,A_n)$

$= \alpha D(A_1,A_2,...,A_j,...,A_j,...,A_n)$ por 2° condición de función determinante

$= \alpha.0$ por 3° condición de función determinante $\Rightarrow |A|=0$

4. El determinante de una matriz no varía si a una línea se le suma otra multiplicada por un escalar.

$A_j \neq A_k \wedge A=(A_1,...,A_j,...,A_k,...,A_n)$

$D(A_1,...,A_j,...,A_k+\alpha A_j,...,A_n)=D(A_1,...,A_j,...,A_k,...,A_n)+D(A_1,...,A_j,...,\alpha A_j,...,A_n)$

Este término vale cero por prop. anterior

$D(A_1,...,A_j,...,A_k+\alpha A_j,...,A_n)=D(A_1,...,A_j,...,A_k,...,A_n)$

5. El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} ... a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} ... a_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} ... a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} ... a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} ... a_{n2} \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ a_{1n} & a_{2n} ... a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$D(A)=D(A^t)$$

6. Si A es una matriz triangular, entonces su determinante se obtiene haciendo el producto de los elementos de la diagonal.

   Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a\begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} - b.0 + c.0 \Rightarrow |A| = a.d.f$$

7. El determinante del producto de matrices es igual al producto de sus determinantes.

$$A, B \in \Re^{nxn} \Rightarrow |A.B| = |A|.|B|$$

Matriz Cofactor

Se llama matriz cofactor a la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su cofactor o adjunto.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \; a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad C(A) = \begin{pmatrix} A_{11} \; A_{12} \ldots A_{1n} \\ A_{21} \; A_{22} \ldots A_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1} \; A_{n2} \ldots A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(2) = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{Adj}(0) = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 11 \qquad \text{Adj}(1) = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

$$\text{Adj}(3) = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{Adj}(-5) = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \text{Adj}(4) = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{Adj}(2) = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 5 \qquad \text{Adj}(1) = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5 \qquad \text{Adj}(-1) = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10$$

$$C(A) = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 13 \\ 1 & -4 & -2 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

Matriz Adjunta

La adjunta de una matriz es la traspuesta de la matriz cofactor de dicha matriz.

$$Adj(A) = (C(A))^t$$

En el ejemplo anterior:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 11 & -4 & -2 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ A_{1n} & A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$$

Propiedad

La suma de los productos de los elementos de una matriz cuadrada por los cofactores de otra fila es cero.

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} \;\; a_{12} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{i1} \;\; a_{i2} \dots a_{in} \\ \dots\dots\dots \\ a_{h1} \;\; a_{h2} \dots a_{hn} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \;\; a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \text{ con } h \neq i$$

Sumando a la fila h la fila i, el determinante de esta matriz no varía.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} \quad a_{12} \dots\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \quad a_{i2} \dots\dots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{h1} + a_{i1} \;\; a_{h2} + a_{i2} \dots a_{hn} + a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \quad a_{n2} \dots\dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Si desarrollamos el determinante por los elementos de la fila h.

$$|A| = \sum_{j=1}^{j=n} (a_{hj} + a_{ij}).A_{hj}$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{j=n} a_{hj}.A_{hj} + \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}.A_{hj}$$

$$|A| = |A| + \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}.A_{hj} \Rightarrow \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}.A_{hj} = 0$$

Propiedad

Cualquiera que sea $A \in \Re^{nxn}$ se verifica que $A.Adj(A) = Adj(A).A = D(A).I$.

$$A.Adj(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots. a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots. a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots. a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots. A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots. A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ A_{1n} & A_{2n} \ldots. A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A.Adj(A) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{j=n} a_{1j}.A_{1j} & \sum_{j=1}^{j=n} a_{1j}.A_{2j} \ldots\ldots\ldots & \sum_{j=1}^{j=n} a_{1j}.A_{nj} \\ \sum_{j=1}^{j=n} a_{2j}.A_{1j} & \sum_{j=1}^{j=n} a_{2j}.A_{2j} \ldots\ldots\ldots & \sum_{j=1}^{j=n} a_{2j}.A_{nj} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \sum_{j=1}^{j=n} a_{nj}.A_{1j} & \sum_{j=1}^{j=n} a_{nj}.A_{2j} \ldots\ldots\ldots & \sum_{j=1}^{j=n} a_{nj}.A_{nj} \end{pmatrix}$$

Por propiedad anterior

$$A.Adj(A) = \begin{pmatrix} D(A) & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & D(A) \ \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & 0 \ldots\ldots & D(A) \end{pmatrix}$$

$$A.Adj(A) = D(A).\begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 1 \end{pmatrix}$$

$$A.Adj(A) = D(A).I$$

Inversión de matrices no singulares

Sea $A \in \Re^{nxn} : D(A) \neq A \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{D(A)} Adj(A)$

Por propiedad anterior $A.Adj(A) = D(A).I$

Como $D(A) \neq 0 \Rightarrow A.\left[\dfrac{1}{D(A)}.Adj(A)\right] = I \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{Adj(A)}{D(A)}$

<u>Propiedad</u>

Sea $A \in \Re^{nxn} : \exists A^{-1} \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

Por definición de matriz inversa $A.A^{-1} = I$

Si dos matrices son iguales entonces sus determinantes también lo son $\left|A.A^{-1}\right| = |I|$

Como el determinante de un producto de matrices es el producto de sus determinantes $|A|.\left|A^{-1}\right| = 1$

Finalmente $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

<u>Propiedad</u>

Una matriz es inversible si y sólo si su determinante es distinto de cero.

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow D(A) \neq 0$

Determinante de la matriz de Vandermonde

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Para desarrollar conviene hacer ceros en la 1° columna. A cada fila le restamos la anterior multiplicada por "a"

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2 \end{vmatrix}$$

Utilizando R. de Laplace desarrollando por la 1° columna y factoreando.

$$|A| = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} b - a & c - a & d - a \\ b\,(b - a) & c(c - a) & d\,(d - a) \\ b^2\,(b - a) & c^2\,(c - a) & d^2\,(d - a) \end{vmatrix}$$

Por 2° condición de la función determinante aplicada en las tres columnas.

$$|A| = (b - a).(c - a).(d - a).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

A cada fila le resto la anterior multiplicada por “b”.

$$|A| = (b - a).(c - a).(d - a).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c - b & d - b \\ 0 & c^2 - bc & d^2 - bd \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la 1° columna y factoreando.

$$|A| = (b - a).(c - a).(d - a).(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} c - b & d - b \\ c(c - b) & d(d - b) \end{vmatrix}$$

Por 2° condición de la función determinante aplicada en las dos columnas.

$$|A| = (b - a).(c - a).(d - a).(c - b).(d - b).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$|A| = (b - a).(c - a).(d - a).(c - b).(d - b).(d - c)$$