Resueltos

MATERIA: Análisis Matemático I

TITULO: T.P. Nº 8
"Series"
Edición 2000

AUTOR: Anibal Kasero

AR1AP9

Series numericas

En esta guía estudiamos la suma de infinitos términos de una sucesión. Esta suma puede ser finita (Convergente) ó infinita (divergente). Estudiaremos distintos métodos para garantizar su convergencia ó divergencia. Generalmente No se puede hallar el resultado de la suma ⇒ nos conformaremos con saber si es finita ó No.

Condición necesaria de convergencia de series .

19. Pruebe que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ la suma n-esima parcial de a_n ⇒

si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, es porque $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ con $S \in \mathbb{R}$.

Sea $S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$ y es tal que $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ ⇒

$a_n = S_n - S_{n-1}$ ⇒ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

---

20. Determine la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ (serie geométrica) para los distintos valores de $r \in \Re$.

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots$ Entonces consideremos

$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$ la n-esima suma parcial. Multiplicando por r ambos miembros:

$rS_n = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n+1}$, restemos ahora las 2 ultimas expresiones:

$S_n - rS_n = 1 - r^{n+1} \Rightarrow S_n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$ tomemos el

limite ahora: $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$; ahora bien

este último limite es: $\dfrac{1 - \lim_{n\to\infty} r^{n+1}}{1 - r}$ y sabemos que

$\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ si $|r| < 1$ y ∞ en otro caso $\Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1 - r}$ si $|r| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{1}{1 - r}$ si $|r| < 1$

y la serie converge para $|r| < 1$ y diverge en otro caso.

---

21. Demuestre que si $(a_n)_{n\in N}$ es una sucesión real no negativa, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente sí y sólo sí la sucesión $(S_n)_{n\in N}$ de sumas parciales está acotada.

La serie será convergente sii $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ con $S \in \mathbb{R}$

Como la sucesión es no negativa $\Rightarrow S_n = a_1 + \dots + a_n \geq 0$

que la sucesión de sumas parciales este acotada significa que $|S_n| < M$, con $M \in \mathbb{R}^+$ $\forall n \in \mathbb{N}$, en este caso

$$|S_n| = S_n \Rightarrow S_n < M \ \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n < \lim_{n\to\infty} M = M$$

Luego: $\lim_{n\to\infty} S_n < M \Rightarrow$ Concluimos que el límite existe y que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente..

---

22. Demuestre que si: $a_n > 0$ y $b_n > 0$ $\forall n$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter (ambas convergen o ambas divergen).

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0 \Rightarrow$ es posible elegir n suficientemente grande, por ejemplo $n \geq N$ para cierto entero positivo N, de manera que:

$\frac{1}{2} l \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2} l$, esta desigualdad implica que:

$a_n \leq \frac{3}{2} l b_n$ para $n \geq N$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge se deduce que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Además, puesto que $\frac{1}{2} l b_n \leq a_n$ para $n \geq N$ se ve que si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ también diverge.

---

23. Analice la convergencia de las series:

23.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Serie Armónica)

23.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (Serie Armónica generalizada)

Utilizaremos el criterio de la integral:
Sea $f(x)$ continua, no negativa y decreciente para $x \geqslant 1$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geqslant 1$. Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ también.

Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.

23.1) Consideremos la siguiente integral:

$$\int_1^\infty 1/x \, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M 1/x \, dx = \lim_{M\to\infty} \ln x \Big|_1^M =$$

$$\lim_{M\to\infty} \left(\ln M - \ln 1 \right) = \lim_{M\to\infty} \ln M = \infty \Rightarrow$$ Como la integral diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es divergente.

23.2) Consideremos la siguiente integral:

$$\int_1^\infty 1/x^p \, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M x^{-p}\,dx = \lim_{M\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^M \quad \forall p \neq 1$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^M = \frac{1}{1-p} \lim_{M\to\infty} \left(M^{1-p} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{1-p} \left(\lim_{M\to\infty} M^{1-p} - 1 \right) \Rightarrow$$ sabemos que $\lim_{M\to\infty} M^{1-p} = 0$ si $1-p<0$ $(p>1)$ y ∞ en otro caso. Luego la integral es convergente solo si $p>1$ $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$ es convergente solo si $p>1$ y diverge si $p \leqslant 1$.

---

24. Determinar la convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, de términos positivos, empleando criterios de convergencia apropiados:

24.1. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^7}}$ 24.2. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ 24.3. $a_n = \dfrac{5}{2^n}$ 24.4. $a_n = \dfrac{12}{n.(n+1)}$

24.5. $a_n = \dfrac{10}{2^n + 10}$ 24.6. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ 24.7. $a_n = \dfrac{5n-1}{n!}$ 24.8. $a_n = \dfrac{2n-1}{n^2+2}$

24.9. $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$ 24.10. $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^n}$ 24.11. $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$ 24.12. $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

24.13. $a_n = \dfrac{(n!)^2}{2n^2}$ 24.14. $a_n = \dfrac{2^n.n!}{n^n}$ 24.15. $a_n = \dfrac{n!}{3^n}$ 24.16. $a_n = \dfrac{3n-1}{(5n-1).n^2}$

24.17. $a_n = \dfrac{n!.(2n-1)}{n^2+1}$ 24.18. $a_n = \dfrac{(n+3)!}{3!.n!.3^n}$ 24.19. $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ 24.20. $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

24.1) $a_n = 1/n^{7/2}$ $\Rightarrow$ es una serie armónica generalizada con $p = 7/2 > 1$ $\Rightarrow$ converge.

24.2) $a_n = 1/n^{2/3}$ $\Rightarrow$ armónica generalizada con $p = 2/3 < 1$ $\Rightarrow$ diverge.

24.3) $a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\Rightarrow$ serie geométrica, de razón $r = 1/2 < 1$ $\Rightarrow$ converge, además sabemos su suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 5 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 5 \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 10$$

24.4) $a_n = 12 b_n$, con $b_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ usaremos para b_n el criterio de comparación:

$n(n+1) > n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{1}{n^2} > \dfrac{1}{n(n+1)} \Rightarrow$

$b_n < 1/n^2 = c_n \rightarrow b_n < c_n$; c_n es una serie armónica generalizada con $p=2 \Rightarrow c_n$ converge, por lo tanto b_n tambien $\Rightarrow a_n = 12 b_n$ es convergente.-

24.5) $a_n = 10 b_n$; $b_n = \dfrac{1}{2^n+10}$, nuevamente usaremos el criterio de comparación: $2^n+10 > 2^n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{1}{2^n} > \dfrac{1}{2^n+10} \Rightarrow b_n < \dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = c_n$;

ahora: c_n es geométrica de razón $1/2 < 1 \Rightarrow c_n$ converge $\Rightarrow b_n$ converge $\Rightarrow a_n =$ converge.

24.6) Criterio de comparación: $n+1 < n+n = 2n \; \forall n>1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{n}}{2n} < \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{n^{1/2}}{n} < a_n \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2} n^{-1/2} < a_n \Rightarrow \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{n^{1/2}} < a_n$

armónica generalizada con $p = 1/2 < 1 \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{n^{1/2}}$ diverge $\Rightarrow a_n$ tambien es divergente.-

24.7) Usaremos el criterio de D'alembert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5(n+1)-1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(5n-1)} = \frac{5n+4}{5n-1} \cdot \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{5n+4}{(5n-1)(n+1)}$$

$$= \frac{5n+4}{5n^2+4n-1} = \frac{n(5+4/n)}{n(5n+4-1/n)} = \frac{5+4/n}{5n+4-1/n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\overset{\to 0}{4/n}}{5n+4-\underset{\to 0}{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{5n+4} = 0$$

puesto que $0<1 \Rightarrow$ la serie es convergente.-

24.8) $a_n = \dfrac{2n-1}{n^2+2}$, si $n\to\infty$ parece aproximarse

a: $\dfrac{2n}{n^2}$ (el 1 y el 2 pierden peso contra $2n$ y n^2

respectivamente). Ahora bien, esta última se simplifica a: $2/n$ que es divergente $\Rightarrow$ sospechamos que la nuestra también. Sea $a_n = \dfrac{2n-1}{n^2+2}$, $b_n = \dfrac{2}{n}$ y usemos el criterio de comparación del problema 22.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2+2} \cdot \frac{n}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{2n^2+4} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2-1/n)}{n^2(2+4/n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\overset{\to 0}{1/n}}{2+\underset{\to 0}{4/n^2}} = 2/2 = 1$$

puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \Rightarrow \sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo caracter $\Rightarrow a_n$ es divergente (b_n lo es por ser armónica).

24.9) Probemos el criterio de D'alambert:

$a_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+1)}$; $a_n = \frac{1}{\ln(n)}$ $\Rightarrow$ su cociente es:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\ln(n+1)} \cdot \frac{\ln(n)}{1} = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$ $\Rightarrow$ tenemos ahora q' tomar el límite $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \equiv \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln x+1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$

Usamos L'Hopital: $\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \Rightarrow$ el Criterio NO sirve, tenemos que aplicar otro:

$\ln(n) < n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1/n < 1/\ln(n) \Rightarrow a_n > 1/n$; pero $1/n$ diverge (armónica) $\Rightarrow a_n$ también. Use una comparación con una serie conocida.

24.10) El denominador ahora es una potencia muy alta $\Rightarrow$ suponemos que converge. Conviene aqui el criterio de Cauchy (o de la raiz) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(n))^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 \Rightarrow 0 < 1 \Rightarrow$ converge.

24.11) Podemos utilizar el criterio de la integral:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx \Rightarrow \ln x = u \;;\; 1/x\,dx = du \rightarrow \int u\,du = u^2/2$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 x \Big|_1^\infty = \frac{1}{2}\lim_{M\to\infty}\left(\ln^2 M - \ln^2 1\right) = \frac{1}{2}\lim_{M\to\infty}\ln^2 M =$$

$+\infty \Rightarrow$ la serie es divergente.

24.12) Examinemos algunos términos de la sucesión:

$a_n = \left\{ 1/2 \;;\; 4/24 \;;\; 36/720 \;\cdots \right\}$ Vemos que el término general tiende rapidamente a cero. Probamos el criterio de D'alembert: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!}$

$$= \left(\frac{(n+1)\,n!}{n!}\right)^2 \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}$$

$$= \frac{n^2\left(1+2/n+1/n^2\right)}{n^2\left(4+6/n+2/n^2\right)} = \frac{1+2/n+1/n^2}{4+6/n+2/n^2} \Rightarrow$$

Si tomamos el límite de esta última expresión nos da $1/4 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/4 < 1 \Rightarrow$ Convergente. -

24.13) $a_n = \left\{ 1/2 \; ; \; 4/8 \; ; \; 36/18 \; ; \; 576/32 \; ; \cdots \right\}$

Vemos facilmente que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow$ No cumple la condición necesaria de convergencia, por lo tanto, la serie es divergente.-

24.14) Utilicemos el criterio de D'Alambert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{2^n \, n!} = \frac{2^n \cdot 2 \, (n+1) n! \, n^n}{(n+1)^n (n+1) \, 2^n \, n!} =$$

$$= \frac{2 \, n^n}{(n+1)^n} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^n =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{\frac{(n+1)}{(-1)}}\right)^n$$ si tomamos ahora el límite

esta expresión tiene que ver con $e \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 + \frac{1}{\frac{(n+1)}{(-1)}}\right)^{\frac{n+1}{(-1)} \cdot \frac{(-1)}{n+1} \cdot n} =$$

$$= 2 \, e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n}{n+1}} = 2 \, e^{-1} = 2/e < 1$$

por lo tanto la serie es convergente.-

24.15) D'Alambert: $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}}$; $a_n = \dfrac{n!}{3^n} \Rightarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{(n+1)\,n!\,3^n}{3^n.3.n!} = \frac{n+1}{3} \Rightarrow$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} = \infty > 1 \Rightarrow$ la serie es divergente.

24.16) $a_n = \frac{3n-1}{5n^3-n^2}$; el denominador es de grado 3, mientras que el numerador de grado 1 $\Rightarrow$ se comporta como $\frac{n}{n^3} \sim \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow$ podemos comparar con esta última:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n-1}{5n^3-n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{5n^3-n^2} \cdot \frac{n^2}{1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-n^2}{5n^3-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\,(3-1/n)}{n^3\,(5-1/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-1/n}{5-1/n}$$

$= 3/5$ finito no nulo $\Rightarrow$ ambas series tienen el mismo caracter: como $b_n = 1/n^2$ es convergente $\Rightarrow a_n$ también.

24.17) Usemos D'Alembert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\,(2(n+1)-1)}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n!\,(2n-1)} = \frac{(n+1)\,n!\,(2n+1)(n^2+1)}{[(n+1)^2+1](2n-1)\,n!}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)(n^2+1)}{(n^2+2n+2)(2n-1)} = \frac{(2n^2+3n+1)(n^2+1)}{(2n^3-n^2+4n^2-2n+4n-2)} =$$

$$\frac{2n^4+2n^2+3n^3+3n+n^2+1}{2n^3+3n^2+2n-2} = \frac{2n^4+3n^3+3n^2+3n+1}{2n^3+3n^2+2n-2}$$

que tiende a ∞ pues el grado del numerador es mayor al del denominador $\Rightarrow$ la serie diverge.

24.18) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+4)!}{3!\,(n+1)!\,3^{n+1}} \cdot \frac{3!\,n!\,3^n}{(n+3)!}$

$$= \frac{(n+4)(n+3)!\,3!\,n!\,3^n}{(n+1)\,n!\,3^n\cdot 3\,3!\,(n+3)!} = \frac{(n+4)}{(n+1)\,3} = \frac{n+4}{3n+3}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ convergente..

24.19) Conviene el criterio de la raiz:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{-n}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n\cdot(-1)} \Rightarrow \text{en el límite: } e^{-1} = 1/e < 1$$

Luego la serie converge.

24.20) a_n se comporta como $b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow$

Comparación: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{n}{1} \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ finito no nulo $\Rightarrow$ tienen el mismo comportamiento. Sabemos que $b_n = 1/n$ es la serie armónica y diverge $\Rightarrow$ a_n tambien diverge..

24.21) la serie de los a_n la podemos reescribir en otras 2 series: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{m=2}^{\infty} 3/m^2 + \sum_{p=1}^{\infty} 1/p^2$ con

m par y p impar. Para cada serie es aplicable el criterio del cociente, pero diremos simplemente que ambas son armónicas generalizadas con exponente mayor que 1 ⇒ ambas convergen; por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente..

24.22) $a_n = \left\{ 2^{-1-1}, 2^{-2+1}, 2^{-3-1}; 2^{-4+1}; 2^{-5-1}; 2^{-6+1} \ldots \right\}$

$a_n = \left\{ \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^4}; \frac{1}{2^3}; \frac{1}{2^6}; \frac{1}{2^5} \ldots \right\}$ Podemos entonces reordenar los términos logrando la siguiente suma:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$. Por D'Alember nos damos cuenta que esta última es convergente ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente..

---

25. Sabiendo que $a_n > 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} (n^2.a_n) = 2$, *se pide:*

25.1. Probar que $\sum_{1}^{\infty} -3a_n$ es convergente.

25.2. Determinar $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$ si $a_n + 1 \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \le \sqrt[n]{2} \quad \forall n \in N$

25.1) De acuerdo al resultado del límite, vemos que

a_n se comporta como $\frac{2}{n^2}$ (Con esto el límite da 2)

Decimos se comporta pues realmente no sabemos como es a_n; podría ser $\frac{2}{n^2+1}$ que el resultado sería el mismo.

Sin embargo sabiendo que se comporta como $2/n^2$ podemos usar el criterio de comparación:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)a_n}{2/n^2} = \lim_{n\to\infty} (-3)a_n \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{-3}{2} \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot a_n = \frac{-3}{2} \cdot 2 = 1(-3) = -3$$

$\Rightarrow$ Como $2/n^2$ converge $\Rightarrow$ $-3a_n$ también.

25.2) Como $\sum_{n=1}^{\infty} (-3)a_n$ es convergente $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ lo es

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (Condición necesaria) $\Rightarrow$ tomemos el límite en toda la inecuación:

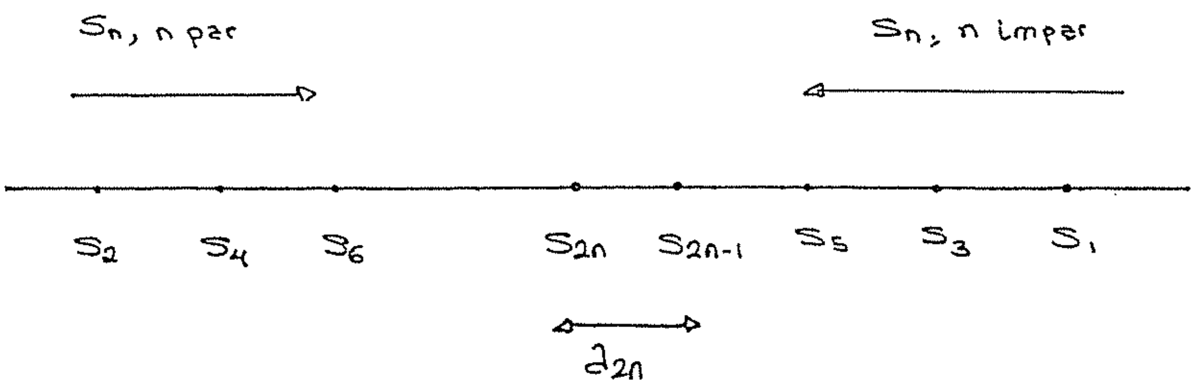
$$\lim_{n\to\infty} a_n + 1 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$$

$$0 + 1 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1$; pues si existe el límite del cociente, el de la raíz será igual (No vale la recíproca)

26. En las condiciones del Teorema de Leibniz, si S es la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ y S_n es la suma parcial enésima, demuestre que $0 < (-1)^n.(S - S_n) < a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$.
Interprete las implicancias del teorema e indique su/s utilidad/es.

Las desigualdades dan una manera de estimar el error que se comete al aproximar la suma S por una suma parcial S_n. La primera desigualdad expresa que el error $S - S_n$ tiene el signo $(-1)^n$, que es el del 1º término despreciado: $(-1)^n a_{n+1}$. La segunda afirma que el valor absoluto de este error es menor que el del 1º término despreciado.



Las sumas parciales S_{2n} (con un número par de términos) forman una sucesión creciente puesto que $S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$. Análogamente las sumas parciales S_{2n-1} forman una sucesión decreciente. Ambas sucesiones están acotadas inferiormente por

S_2 y superiormente por S_1. Por tanto cada sucesión $\{S_{2n}\}$ y $\{S_{2n-1}\}$ siendo monótonas y acotadas converge hacia un límite, es decir $S_{2n} \to S'$ y $S_{2n-1} \to S''$. Pero $S' = S''$ puesto que:

$$S' - S'' = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_{2n-1}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} (-a_{2n}) = 0.$$

Indicando este límite común por S, es claro que la serie converge y tiene por límite S.
puesto que: $S_{2n} \nearrow$ y $S_{2n-1} \searrow \Rightarrow S_{2n} < S_{2n+2} \leq S$ y $S \leq S_{2n+1} < S_{2n-1}$ $\forall n \geq 1$. Por tanto se tienen las desigualdades: $0 < S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$
$0 < S_{2n-1} - S \leq S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n}$, que considerados conjuntamente completan la demostración.-

---

27. Determine la convergencia absoluta o condicional de las siguientes series alternadas.

27.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$ 27.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ 27.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}.n}{n^2+10}$

27.4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\ln n}$ 27.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}$

Primero diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge pero $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Converge $\Rightarrow$ es condicionalmente convergente.

27.1) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ armónica generalizada con

$p > 1 \Rightarrow$ Converge, luego es absolutamente convergente.

27.2) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$; esta última la podemos

comparar con $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = n^{-1/2}$ que sabemos que diverge

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$= 1 \Rightarrow$ Se comportan igual ya que el límite es finito

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es también divergente. Veamos ahora si

es condicionalmente convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ y es monotonamente decreciente $\Rightarrow$ por

Leibniz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ es convergente, luego es condicionalmente convergente.

27.3) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+10}$, comparamos con $b_n = 1/n$

(que es divergente) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+10}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+10} = 1$

Entonces ambas se comportan igual, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente. Ahora $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n^2+10}$ es tal que: es alternada,

$\frac{n}{n^2+10}$ es decreciente (siempre) y $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+10} = 0 \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+10}$ es condicionalmente convergente.

27.4) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ y vimos en el 24.9) que

esta serie es divergente. Ahora: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ es tal q':

1°. es alternada, 2° $\frac{1}{\ln(n)}$ es decreciente (porque

$\ln(n)$ es creciente!) y 3°. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ es condicionalmente convergente.-

27.5) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ y para esta uso comparación con $\frac{1}{n^2}$ que se que es convergente $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \Rightarrow$$

ambas se comportan igual, luego $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1} \text{ es absolutamente convergente..}$$

---

28. Dada la serie $\sum(-1)^n.a_n$ con $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^5} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n^4} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

28.1. ¿Por qué en este caso el criterio de Leibniz no es aplicable?

28.2. ¿Es convergente esta serie?. En caso afirmativo indique el estilo de convergencia.

28.1) Examinemos los términos de la sucesión a_n:

$$a_n = \left\{ 1 ; \frac{1}{2^4} ; \frac{1}{3^5} , \frac{1}{4^4} , \frac{1}{5^5} ; \frac{1}{6^4} \cdots \right\}$$

$$= \{ 1 ; 0{,}0625 ; 0{,}0041 , 0{,}0039 , 0{,}00032 ; 0{,}00077 \ldots \}$$

crece

a_n NO es una sucesión "monotonamente" decreciente, ya con esto no vale Leibniz.

28.2) Consideremos la serie como suma de otras 2, cuando n es par y cuando n es impar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=\text{par}} a_n + \sum_{n=\text{impar}} a_n \Rightarrow \text{Si } n \text{ es par} \Rightarrow n = 2K \text{ con } K \in \mathbb{N}$$

Si n es impar $\Rightarrow n = 2K-1$ con $K \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^5} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4}$$

Con el criterio integral se ve facilmente que cada una de estas series es convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

---

29. Halle todos los valores de $c \in \Re$ para los que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^c}{(3n)!}$ converge.

Usemos el criterio de D'Alembert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^c}{[3(n+1)]!} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^c} = \frac{[(n+1)(n!)]^c}{[(3n+3)!]} \frac{(3n)!}{(n!)^c} =$$

$$= \frac{(n+1)^c (n!)^c (3n)!}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!(n!)^c} = \frac{(n+1)^c}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$$

Ahora vemos que el numerador es como un polinomio de grado c, mientras que el denominador es de grado 3. Si $c > 3 \Rightarrow$ el límite nos dará infinito y entonces la serie diverge. Si $c = 3$ entonces si distribuyo arriba y abajo quedará algo del estilo:

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{27n^3 + \ldots\ldots(\text{potencias menores})}$$ que si tomo el límite da $\frac{1}{27}$

que es menor que $1 \Rightarrow$ converge. Si $c < 3 \Rightarrow$ el grado del denominador supera al del numerador y el límite dará cero con lo cual converge. Luego la serie converge si $c \leq 3$.-

---

30. Halle todos los valores enteros $a \geq 1$ para los que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(a.n)!}$ converge.

Similar al anterior, pero veamoslo de otra forma. Comencemos suponiendo $a = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^2$ que

no cumple la condición necesaria $\Rightarrow$ diverge para $a=1$.
Supongamos $a=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^3}{(2n)!}$ usemos D'Alembert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!^3}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{n!^3} = \frac{(n+1)^3 n!^3 (2n)!}{(2n+2)!\ n!^3} =$$

$$= \frac{(n+1)^3 (2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \frac{(n+1)^3}{(2n+2)(2n+1)}$$ que tiende a

$+\infty$ si tomo el límite $\Rightarrow$ diverge para $a=2$.
Si $a=3$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!^3}{(3(n+1))!} \cdot \frac{(3n)!}{n!^3} = \frac{(n+1)^3 (n!)^3 (3n)!}{(3n+3)!\cdot n!^3} =$$

$$= \frac{(n+1)^3 (3n)!}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!} = \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$$ que

el límite da $1/27$ y entonces converge.
Si $a=4$ el polinomio de abajo queda de grado 4, mientras que el de arriba de grado 3 $\Rightarrow$ el límite da 0 y converge. Cuanto mas grande sea a mayor el grado del denominador y los limites darán 0 $\Rightarrow$
La serie dada converge si $a \geq 3$.

---

31. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente.
¿Es verdadera la proposición recíproca?. Justifique.

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente $\Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$ quiero ver si
criterio de la raíz.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ y para esta última

usemos el criterio de la raíz: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^2$

sabemos que $\sqrt[n]{|a_n|}$ tiende a un numero $< 1 \Rightarrow$ al estar elevada al cuadrado también $(x^2 < x$ si $x<1)$ luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente.

La recíproca no es cierta pues sea $a_n = \pm\frac{1}{n}$ que al cuadrado queda: $a_n^2 = \frac{1}{n^2}$ y converge sin envargo $a_n = \frac{1}{n}$ es divergente. También consideremos $a_n = -\frac{1}{n}$, al cuadrado converge, sin envargo a_n es condicionalmente convergente.—

---

32. Sea $a_n > 0 \quad \forall n$. Dé una demostración, o contraejemplo, para cada una de las siguientes proposiciones:

32.1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ diverge.

32.2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converge.

32.1) La proposición es falsa ya que si $a_n = 1/n \Rightarrow$ La serie $\sum a_n$ es divergente (armónica), sin envargo $a_n^2 = 1/n^2$ y $\sum a_n^2$ es convergente (armónica generalizada con $p>1$)

32.2) La proposición es falsa, supongamos $a_n^2 = n^2$ es tal que $\sum a_n^2$ es divergente; de esto no podemos inferir que $\frac{a_n}{n} = \frac{n}{n} = 1$ sea convergente puesto que no lo es: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1\ldots$ que diverge.

---

33. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge. ¿Es verdadera la proposición recíproca?. Justifique.

No es verdadera la proposición recíproca, por ejemplo si $a_n = -\frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} -1/n$ converge por Leibniz y al cuadrado $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge por armonica generalizada con $p>1$. Si partimos al reves, diciendo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ es convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ No lo se pues si $a_n = 1/n$ (y No $-1/n$) $\Rightarrow$ sera divergente.

---

34. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^4+1}-n^2}$

El denominador es de orden cuadrático en $n \Rightarrow$ comparemos con $b_n = 1/n^2$ (que es convergente):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n^4+1}-n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^4+1}-n^2} \cdot n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{2n^4+1}-n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4\left(2+1/n^4\right)}-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2\sqrt{2+1/n^4}-n^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2\left(\sqrt{2+1/n^4}-1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2+1/n^4}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

Como el límite es finito y no nulo ⇒ la serie a_n se comporta como la de las b_n, es decir Converge.

---

35. Si la suma de los n primeros términos de una serie es: $\frac{4n+1}{n+3}-\frac{1}{3}$, analice la convergencia de dicha serie y halle el término a_{20}.

Nos dicen que $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{4n+1}{n+3} - \frac{1}{3}$; para saber si la serie converge ⇒ $\lim_{n\to\infty} S_n =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{n+3} - \frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(4+1/n)}{n(1+3/n)} - \frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+1/n}{1+3/n} - \frac{1}{3}$$

$= 4 - 1/3 = 11/3$; luego como el límite es finito, este representa la suma de la serie ⇒ es convergente

Para hallar a_{20} podemos hacer:

$$S_{20} - S_{19} = (a_{20} + a_{19} + a_{18} + \cdots) - (a_{19} + a_{18} + \cdots) = a_{20}$$

$$\Rightarrow a_{20} = \left(\frac{4.20+1}{20+3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{4.19+1}{19+3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{81}{23} - \frac{78}{22}$$

$a_{20} = -6/253$.

---

36. Halle todos los valores de $\alpha \in \Re^+$ para los cuales es convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n . \frac{n^2+1}{3^n}$.

Utilicemos el criterio de D'Alembert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha^{n+1} \cdot \frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{\alpha^n (n^2+1)} = \frac{\alpha^n \cdot \alpha (n^2+2n+2) 3^n}{\alpha^n (n^2+1) 3 \cdot 3^n}$$

$$= \frac{\alpha (n^2+2n+2)}{3 (n^2+1)}$$; queremos ahora tomar el

limite $n \to \infty \Rightarrow$ tomo factor común n^2:

$$\frac{\alpha . n^2 (1 + 2/n + 2/n^2)}{3 . n^2 (1 + 1/n^2)} = \frac{\alpha (1 + 2/n + 2/n^2)}{3 (1 + 1/n^2)}$$ que

tiende a $\alpha/3$. Ahora, para que la serie converja

$\frac{\alpha}{3} < 1 \Rightarrow \alpha < 3$.

---

37. Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^a}$ se pide:

37.1. Analice el carácter de dicha serie para $a = 1$ y $a = 2$,

37.2. Obtenga para $a = 3$ el valor de la suma con error menor que 0.008.

Primero trabajemos con $\operatorname{Sen}(n\pi/2)$: vemos que:

Si $n=1 \Rightarrow \operatorname{Sen}(\pi/2) = 1$

Si $n=2 \Rightarrow \operatorname{Sen}(2\pi/2) = 0$

Si $n=3 \Rightarrow \operatorname{Sen}(3/2\,\pi) = -1$

Si $n=4 \Rightarrow \operatorname{Sen}(4/2\,\pi) = 0$

Siempre que n sea par dará 0.
Para n impar se alterna entre -1 y 1 comenzando con 1.

$\Rightarrow$ la serie contiene solo los $n = 2p-1$ $\Rightarrow$ la puedo reescribir como sigue: $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p-1)^a}$.

37.1) si $a=1 \Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1}$; la serie es alternada.

el $a_p = \frac{1}{2p-1}$ es siempre decreciente y además

$a_p \to 0$ si $p \to \infty \Rightarrow$ por Leibniz Converge. Para $a=2$ hay que realizar lo mismo.

37.2) Si $a=3 \Rightarrow a_p = \frac{1}{(2p-1)^3}$ y también es convergente

al ser alternada sabemos que $|S - S_p| < a_{p+1}$. tengo que hallar p / $a_{p+1} \leq 0{,}008$. $\Rightarrow$

$a_1 = 1$, $a_2 = 0{,}037$; $a_3 = 0{,}008 \Rightarrow |S - S_2| < a_3 = 0{,}008$

$\Rightarrow$ aproximamos S con S_2: $a_1 + a_2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$.

---

38. Halle el mayor número natural a para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{(n+1).(n+2).(n+3).(n+4)}$ sea convergente.

El problema se plantea como un cociente de polinomios. Sabemos que $a_n = \frac{1}{n^p}$ si p es natural, converge para $p \geq 2$. Podemos generalizar esto diciendo que si:

$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ con $P(n)$ y $Q(n)$ polinomios $\Rightarrow a_n$ converge

si Gr Q es al menos 2 mas que el de P $\Rightarrow$
Gr Q - Gr P ≥ 2. En nuestro problema Gr P = a y
grado

Gr $a=4 \Rightarrow 4-a \geq 2 \rightarrow 4-2 \geq a \rightarrow a \leq 2$.

---

39. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos convergente. Determine para qué valores de a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{\sqrt[3]{a_n}}{n^a}$ es absolutamente convergente.

Es dificil conjeturar algo sin conocer a_n. Pero si la serie debe converger absolutamente $\Rightarrow$ la serie de sus módulos debe ser convergente:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{1/3}}{n^{\alpha}}$; sabemos que debe cumplir la condición necesaria, es decir: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{1/3}}{n^{\alpha}} = 0$; el numerador tiende a cero puesto que $\sum a_n$ es convergente.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{1/3} . n^{-\alpha}$. Si $\alpha = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{1/3} = 0$

Si $\alpha > 0$ $\lim_{n\to\infty} \underset{\downarrow \atop 0}{a_n^{1/3}} . \underset{\downarrow \atop 0}{n^{-\alpha}}$ $\Rightarrow$ para $\alpha \geq 0$ se cumple la condición necesaria. Si $\alpha < 0 \Rightarrow a_n^{1/3} . n^{-\alpha} \rightarrow 0.\infty$ y se indetermina $\Rightarrow$ Como no conozco a_n No puedo garantizar que de cero. Por Ahora garantizamos que si $\alpha \geq 0$ se cumple la condición necesaria. Para la suficiencia sabemos que el criterio de la raiz debe ser aplicable $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n^{1/3}}{n^{\alpha}}} < 1$ aqui resulta complicado establecer un α adecuado por lo cual me

Conformo con la condición necesaria.

---

40. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con

40.1. $a_n = (-1)^{n-1}.\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \frac{2n+1}{n}\right)^{-n}$.

40.2. $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n.(n+1)}}$

40.1) Examinemos si converge absolutamente $\Rightarrow$ tomo la serie de los módulos:

$|a_n| = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \frac{2n+1}{n}\right)^{-n}$ y aplico el criterio de la

raiz: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{2n+1}{n}\right)^{-n/n} =$

$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1+1/n\right)^n + \frac{n(2+1/n)}{n}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{(1+1/n)^n}_{\downarrow\, e} + 2 + \underbrace{1/n}_{\downarrow\, 0}\Big)^{-1}$

$= (e+2)^{-1} = \frac{1}{e+2} < 1$

Entonces la serie es absolutamente convergente.

40.2) Sea $a_n = b_n + c_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ si ambas convergen:

Examinemos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ y usamos comparación

con $\frac{1}{n^{3/2}}$ (que es convergente) $\Rightarrow$ tomemos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{(n+1)\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{n^{3/2}+n^{1/2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{n^{3/2}(1+n^{-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = 1 \Rightarrow b_n \text{ converge}$$

tratemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$. que es alternada; el coeficiente $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ es siempre decreciente y tiende a cero $\Rightarrow$ por Leibniz converge. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

---

41. Demuestre que las series $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ y $\ln(1+a_1) + \ln(1+a_2) + \ln(1+a_3) + \ldots \ln(1+a_n) + \ldots$ tienen el mismo carácter si $a_n > 0 \quad \forall n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Si las series tienen el mismo caracter $\Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n}$ dara finito y no nulo. Calculemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \ln(1+a_n) = \lim_{n\to\infty} \ln(1+a_n)^{1/a_n} = \ln\left(\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{1/a_n}\right)$$

puesto que $a_n \to 0 \Rightarrow (1+a_n)^{1/a_n} \to e$; luego $\ln e = 1$

El límite dió finito y no nulo $\Rightarrow$ tienen el mismo caracter

---

42. Sabiendo que la suma de los n primeros términos de una serie es: $S_n = \frac{5n^2 - 3n + 2}{n^2 - 1}$, halle el término general a_n y luego analice la convergencia de dicha serie. Justificar los pasos seguidos.

Cambiemos la forma de S_n:

$$\begin{array}{rl} 5n^2 - 3n + 2 & \underline{|\, n^2 - 1} \\ \underline{-5n^2 \quad\;\; + 5} & 5 \\ -3n + 7 & \end{array}$$

$\Rightarrow 5n^2 - 3n + 2 = 5(n^2 - 1) - 3n + 7 \Rightarrow \frac{5n^2 - 3n + 2}{n^2 - 1} = 5 + \frac{-3n + 7}{n^2 - 1}$

$\Rightarrow S_n = \frac{-3n + 7}{n^2 - 1} + 5$, con esto: $S_{n+1} = \frac{-3(n+1) + 7}{(n+1)^2 - 1} + 5$

$$\Rightarrow S_{n+1} - S_n = \left(\frac{-3n - 3 + 7}{n^2 + 2n + 1 - 1} + 5 \right) - \left(\frac{-3n + 7}{n^2 - 1} + 5 \right)$$

$$= \frac{-3n + 4}{n^2 + 2n} + 5 + \frac{3n - 7}{n^2 - 1} - 5 = \frac{-3n + 4}{n^2 + 2n} + \frac{3n - 7}{n^2 - 1}$$

$$= \frac{(n^2 - 1)(-3n + 4) + (n^2 + 2n)(3n - 7)}{(n^2 + 2n)(n^2 - 1)} = \frac{-3n^3 + 4n^2 + 3n - 4 + 3n^3 - 7n^2 + 6n^2 - 14n}{(n^2 + 2n)(n^2 - 1)}$$

$$= \frac{3n^2 - 11n - 4}{(n^2 + 2n)(n^2 - 1)} = a_{n+1} \quad (\text{pues } S_{n+1} - S_n = a_{n+1})$$

finalmente $a_n = \frac{3(n-1)^2 - 11(n-1) - 4}{((n-1)^2 + 2(n-1))((n-1)^2 - 1)}$. la convergencia se logra facilmente si $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{-3n + 7}{n^2 - 1} + 5 \right)$

$= 5$; luego $S = 5$ y es su suma $\Rightarrow$ Converge.

---

43. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\beta^n}$ respecto a los distintos valores de $\beta \in \Re^+$.

Comencemos con la condición necesaria: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\beta^n} = 0$

para que este límite de cero β tiene que ser >1 pues $\beta^n \to \infty$; si $\beta < 1 \Rightarrow \beta^n \to 0$ y el límite da 1. por el momento sabemos que $\beta > 1$.
Utilicemos ahora el criterio de D'Alembert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+\beta^{n+1}} \cdot \frac{1+\beta^n}{1} = \frac{1+\beta^n}{1+\beta^{n+1}} = \frac{1+\beta^n}{1+\beta\beta^n}$$

$$= \frac{\beta^n\left(1/\beta^n + 1\right)}{\beta^n\left(1/\beta^n + \beta\right)} = \frac{1 + 1/\beta^n}{\beta + 1/\beta^n}$$ y queremos

ahora este límite $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/\beta^n \to 0}{\beta + 1/\beta^n \to 0} = \frac{1}{\beta}$;

para la convergencia necesitamos que el límite sea menor a 1 $\Rightarrow \frac{1}{\beta} < 1 \Rightarrow 1 < \beta \Rightarrow \beta > 1$. Entonces con $\beta > 1$ logramos la convergencia de la serie.-

---

44. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.6^n$ con $a_n > 0$ $\forall n$ es convergente ¿Qué puede usted decir sobre la convergencia de:

44.1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.(-6)^n$ 44.2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.5^n$ 44.3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.(-5)^n$.

Justifique adecuadamente.

44.1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-6)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n 6^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n 6^n$, la serie de los módulos es: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 6^n$ que sabemos que converge $\Rightarrow$ la serie dada es absolutamente convergente.

44.2) sabemos que $5^n < 6^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, como $a_n > 0$

$\Rightarrow a_n 5^n < a_n 6^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n 5^n < \sum_{n=1}^{\infty} a_n 6^n$ puesto que la última serie es convergente y la nuestra es menor que ella $\Rightarrow$ también es convergente.

44.3) la serie formada por los módulos es:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n . 5^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n 5^n$ y sabemos que esta converge $\Rightarrow$ la serie dada es absolutamente convergente.

---

45. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;/\; a_n = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)}{n}$

Sabemos que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{Sen} x}{x} = 1 \Rightarrow$ si $n > N$ suficientemente grande $\Rightarrow$

$$\frac{\operatorname{Sen}\left(\pi/\sqrt{n}\right)}{\pi/\sqrt{n}} = 1 .$$

Consideremos

la serie: $b_n = \dfrac{\pi/\sqrt{n}}{n} = \dfrac{\pi}{n^{3/2}}$ que es convergente $\Rightarrow$

usemos comparación: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{\text{sen}(\pi/\sqrt{n})}{n}}{\dfrac{\pi/\sqrt{n}}{n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\text{Sen}(\pi/\sqrt{n})}{\pi/\sqrt{n}} = 1$. En consecuencia

ambas series se comportan igual $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

---

46. Demuestre que si $f(n)$ es una función positiva de n tal que: $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$, entonces las dos series de términos generales $b_n = \ln(1+f(n))$ y $c_n = f(n)$ respectivamente tienen el mismo carácter.

Idem 41. Basta definir $f(n) = a_n$ y se tiene el mismo enunciado.

---

47. Analice la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n.(\sqrt{n^2-1}-n)$ y halle una cota del error de truncamiento cometido al tomar como aproximación de la suma a S_4.

Primero vemos que $a_n = \sqrt{n^2-1} - n < 0$ pues

$\sqrt{n^2-1} < n \Rightarrow n^2-1 < n^2$ lo cual es cierto. Para

tener una sucesión con $a_n > 0 \Rightarrow$

$(-1)^n\left(\sqrt{n^2-1} - n\right) = (-1)^{n+1}\underbrace{\left(n - \sqrt{n^2-1}\right)}_{a_n} \Rightarrow$ la serie

será: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(n - \sqrt{n^2-1}\right)$; veamos ahora si este

a_n es decreciente: $a_{n+1} \overset{?}{<} a_n \Rightarrow$

$$(n+1) - \sqrt{(n+1)^2 - 1} < n - \sqrt{n^2-1} \Rightarrow$$

$$1 - \sqrt{n^2+2n} < -\sqrt{n^2-1} \Rightarrow 1 + \sqrt{n^2-1} < \sqrt{n^2+2n}$$

$$\frac{1+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+2n}} < 1 \Rightarrow \frac{\left(1+\sqrt{n^2-1}\right)^2}{n^2+2n} < 1 \Rightarrow$$

$$1 + 2\sqrt{n^2-1} + n^2 - 1 < n^2+2n \Rightarrow 2\sqrt{n^2-1} < 2n$$

$\sqrt{n^2-1} < n \rightarrow n^2 - 1 < n^2$ lo cual es cierto $\Rightarrow a_n$ es decreciente. Finalmente veamos si $a_n \to 0$:

$$\lim_{n\to\infty} n - \sqrt{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-\sqrt{n^2-1})(n+\sqrt{n^2-1})}{(n+\sqrt{n^2-1})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-(n^2-1)}{n+\sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} = 0$$

Luego: se cumplen las hipótesis de Leibniz $\Rightarrow$ la serie converge.

Para tener una cota de error sabemos que:

$$|S - S_4| < a_5 \Rightarrow |S - S_4| < 5 - \sqrt{5^2-1} \cong 0{,}1 .$$

---

48. Si $a_n > 0 \quad \forall n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ es también convergente.

Sea $b_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$; usemos comparación con a_n:

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n} = \frac{a_n}{1+a_n} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1+a_n} \Rightarrow$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = 1$ (puesto que $a_n \to 0$ porque $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente) Concluimos que ambas series se comportan igual $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.

---

49. Si $0 < a_n < 1 \quad \forall n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, pruebe que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge.

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow a_n \to 0$. Sea $b_n = \frac{1}{a_n} \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{0} \sim \infty$. Luego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ No cumple la condición necesaria de convergencia $\Rightarrow$ diverge.

---

50. Demuestre que si las series de términos positivos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes, también lo es la serie de término general $c_n \ / \ c_n = \sqrt{a_n.b_n}$.

Sugerencia: Utilice el hecho que $(\alpha+\beta)^2 > \alpha.\beta$ con $\alpha.\beta > 0$.

Sabemos que $(a_n+b_n)^2 > a_n b_n$ con a_n y b_n positivos por hipótesis $\Rightarrow a_n + b_n > \sqrt{a_n b_n} \Rightarrow$ sea $c_n = \sqrt{a_n b_n} \Rightarrow c_n < a_n + b_n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n < \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n < \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$; como las series de

a_n y b_n son convergentes, designemos por A y B a sus respectivas sumas. $\Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n < A + B$ con lo cual vemos que $\sum c_n$ es convergente.

---

51. Si a_n y b_n son reales, y si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ son convergentes, pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es absolutamente convergente.

Quiero ver que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ es convergente, entonces partamos de: $(|a_n| - |b_n|)^2 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$|a_n|^2 + |b_n|^2 - 2|a_n||b_n| > 0 \Rightarrow |a_n|^2 + |b_n|^2 > 2|a_n||b_n|$

pero $|a_n|^2 = a_n^2$ y $|b_n|^2 = b_n^2$, $|a_n| . |b_n| = |a_n . b_n| \Rightarrow$

$a_n^2 + b_n^2 > 2|a_n b_n| \Rightarrow |a_n b_n| < \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$

Si ahora sumamos $\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} |a_n b_n| < \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| < \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b^n \right)$ que sale tomando límite en ambos miembros, como las 2 últimas convergen $\Rightarrow$ forman una cota superior para nuestra serie: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = B \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| < \frac{A+B}{2}$, por lo tanto converge.-

---

52. Determine en cada caso el radio de convergencia de las series de potencias dadas. Analice el comportamiento de las mismas en los extremos del intervalo de convergencia obtenido:

52.1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ 52.2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1).2^n}$ 52.3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n.(n+2)}$

52.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 52.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}.x^n}{n^2}$ 52.6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

52.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{3^n}(x-2)^n$ 52.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}.(x-1)^n}{n}$ 52.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{n}}$

52.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n.n^5.(x-5)^n}{n^5+1}$ 52.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(2n-1)}.(x-1)^n$ 52.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n.(x-1)^n}{2^n.(3^n-1)}$

52.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos 2n\pi}{3^n}.x^n$ 52.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n!}.(2-2x)^n$

.1) Criterio de la raiz:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}$$

$\Rightarrow$ debe ocurrir que $\frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow x \in (-2,2)$

Examinemos si los bordes del intervalo pertenecen:

Si $x = -2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

cuyo término general $a_n = (-1)^n$ y $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq 0 \Rightarrow$ diverge. Si $x = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}1$ y nuevamente diverge. Luego $x \in (-2,2)$.

.2) D'Alembert: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1+1)\,2^{n+1}}\right|\left|\frac{(n+1)\,2^n}{x^n}\right| =$

$$= \frac{|x|^{n+1}\,(n+1)\,2^n}{(n+2)\,2^n \cdot 2\,|x|^n} = \frac{|x|^n\,|x|\,(n+1)}{(n+2)\,2\,|x|^n} = \frac{(n+1)}{(n+2)}\,\frac{|x|}{2} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}_{1} =$$

$= \frac{|x|}{2}$ y debe ocurrir que: $\frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow$

$x \in (-2,2)$. Si $x = -2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,2^n}{(n+1)\,2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$

que por el criterio de Leibniz converge. Si $x = 2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)\,2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ que usando el criterio

de comparación en el límite con $1/n$ veremos que

diverge. finalmente $x \in [-2;2)$.

3) D'Alembert: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x+3|^{n+1}}{4^{n+1}\,(n+1+2)} \cdot \frac{4^n\,(n+2)}{|x+3|^n} =$

$$= \frac{|x+3|^n\,|x+3|\,4^n\,(n+2)}{4^n \cdot 4 \cdot (n+3)\,|x+3|^n} = \frac{|x+3|}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right);$$ Ahora:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+3|}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right) = \frac{|x+3|}{4}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)}_{1}$$

$= \frac{|x+3|}{4}$; luego $\frac{|x+3|}{4} < 1 \Rightarrow |x+3| < 4 \Rightarrow$

$-4 < x+3 < 4$. Si $x+3 = -4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{4^n (n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$

que converge según Leibniz. Si $x+3 = 4 \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n (n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ que diverge comparando

con $1/n$. $\Rightarrow$ $x+3 \in (-4,4) \Rightarrow x \in (-7,1)$.

.4) Dalambert: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{|x|^{2n}} =$

$\frac{|x|^{2n} \cdot |x|^2 \cdot (2n)!}{(2n+2)!\, |x|^{2n}} = \frac{|x|^2 (2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)} = |x|^2 \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}}_{0}$

$= |x|^2 . 0 = 0$ pero $0 < 1 \Rightarrow \forall x$ la serie converge:

$x \in (-\infty, \infty)$.

.5)

Analicemos la convergencia absoluta, es decir la Convergencia de: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{|x|^n} =$

$\frac{|x|^n |x| n^2}{|x|^n (n+1)^2} = |x| . \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$

$$\lim_{n\to\infty} |x|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |x| \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |x| \Rightarrow |x|<1$$

Si $x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ que converge. Si $x=1 \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que también converge $\Rightarrow \forall x \in [-1,1]$ la serie es absolutamente convergente.

.6)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|^n |x|\, n!}{(n+1)n!\, |x|^n} =$$

$$\frac{|x|}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = |x| . 0 = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ Converge para todo $x \in \mathbb{R}$.-

.7)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+2)}{3^{n+1}} . |x-2|^{n+1} . \frac{3^n}{(n+1) . |x-2|^n} =$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \frac{|x-2|}{3} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-2|}{3} \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}_{1}$$

$$= \frac{|x-2|}{3} \Rightarrow \frac{|x-2|}{3} < 1 \Rightarrow |x-2| < 3 .$$

Si $x-2=-3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{3^n}(-1)^n 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)$

pero esta serie es alternada y No decrece $\Rightarrow$ diverge.

Si $x-2=3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{3^n} . 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)$ y diverge.

$\Rightarrow \quad |x-2| < 3 \quad \Rightarrow \quad -3 < x-2 < 3 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1, 5).$

8 $\quad \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \dfrac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)} \cdot \dfrac{n}{|x-1|^n}$, el $(-1)^{n-1}$ desaparece al tomar el módulo. $\Rightarrow$ estamos en:

$\dfrac{|x-1|^n \cdot |x-1| \cdot n}{(n+1)|x-1|^n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)|x-1|$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)|x-1| = |x-1| \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = |x-1| < 1$

Si $(x-1) = -1 \Rightarrow$ la serie queda: (la original):

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(-1)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{2n-1}}{n}$; pero $2n-1$

es siempre impar $\Rightarrow (-1)^{2n-1} = -1 \ \forall n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-1}{n} =$

$(-1) \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ y diverge. Si $(x-1) = 1 \Rightarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(1)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ y converge por

Leibniz. $\Rightarrow \quad -1 < x-1 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (0, 2]$

9 $\quad \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{|x-3|^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \dfrac{\sqrt{n}}{|x-3|^n} = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\ |x-3|$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\ |x-3| = |x-3| \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$

$= |x-3| \cdot 1 = |x-3| \Rightarrow |x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1$

Si $x-3 = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ que Converge (Leibniz)

Si $x-3 = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$, diverge (serie p con $p<1$) $\Rightarrow -1 \leq x-3 < 1 \Rightarrow x \in [2,4)$

.10 Similar, para no engrosar tanto el cuadernillo dejaremos algunos sin hacer.

.11 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)|(x-1)|^{n+1}}{2^{n+1}(2(n+1)-1)} \cdot \frac{2^n(2n-1)}{n|(x-1)|^n}$

$$= \frac{(n+1)|x-1|^n |x-1| \, 2^n (2n-1)}{2^n \cdot 2 \, (2n+1) n \, |x-1|^n} = \frac{(n+1)(2n-1)|x-1|}{2(2n+1)n}$$

$$= \frac{|x-1|}{2}\left(\frac{2n^2+n-1}{2n^2+n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-1}{2n^2+n}\right)\frac{|x-1|}{2} = \frac{|x-1|}{2} \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-1}{2n^2+n}\right)}_{1}$$

$= \frac{|x-1|}{2} < 1 \Rightarrow |x-1| < 2$. Entonces:

$-2 < x-1 < 2$. Si $x-1 = -2$ la serie queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(2n-1)} \cdot (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot 2^n}{(2n-1)\,2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{2n-1}$$

es alternada pero $\frac{n}{2n-1} \not\to 0 \Rightarrow$ diverge.

Si $x-1 = 2$ sucede lo mismo. Luego $x \in (-1, 3)$.

13 No es fácil trabajar con el coseno, pero observemos que: $2n\pi$ es siempre un múltiplo par de π: $\{2\pi, 4\pi, 6\pi \ldots\} \Rightarrow$ el coseno dará siempre $1 \Rightarrow \cos(2n\pi) = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos 2n\pi}{3^n}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+1}{3^n}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}\, x^n \Rightarrow$$

para esta última: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2\,|x|^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2\,|x|^n} =$

$$\frac{|x|}{3} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{3} < 1 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$$

Si $x = -3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}(-1)^n \cdot 3^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ y diverge.

Si $x = 3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}\, 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2$ y diverge.

Luego: $x \in (-3, 3)$

---

53. Halle el radio e intervalo de convergencia de la serie de potencias:

$$1 + 3x + x^2 + 3x^3 + x^4 + 3x^5 + \ldots + x^{n-1} + 3x^n + x^{n+1} + \ldots$$

Podemos reordenar los términos en la forma:

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n}_{\dots} + 3x + 3x^3 + 3x^5 + \dots + 3x^{2n-1} + \dots$$

tenemos por tanto 2 series: $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} 3x^{2n-1}$

hallemos el intervalo de convergencia de c/u:

La 1ª: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{2(n+1)}}{x^{2n}}\right| = \frac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n}} = \frac{|x|^{2n}}{|x|^{2n}} \cdot |x|^2 = |x|^2$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x|^2 = |x|^2 < 1 \Rightarrow \{\underbrace{\overbrace{|x|<1}}\}$$

La 2ª: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3|x|^{2(n+1)-1}}{3|x|^{2n-1}} = \frac{|x|^{2n+1}}{|x|^{2n-1}} = \frac{|x|^{2n}|x|}{|x|^{2n}|x|^{-1}}$

$$= \frac{|x|}{|x|^{-1}} = |x| \cdot |x| = |x|^2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x|^2 = |x|^2$$

y obtenemos lo mismo. $\Rightarrow$ ambas convergen si $|x|<1$

Si $x=-1 \Rightarrow \sum x^{2n} \equiv \sum (-1)^{2n} = \sum 1$ diverge

$\sum 3x^{2n-1} \equiv \sum 3(-1)^{2n-1} = \sum 3.(-1)$ diverge.

lo mismo pasa en $x=1$. Por lo tanto el radio de convergencia es 1 ($|x|<1$) y el intervalo $x \in (-1,1)$.

---

54. Halle la Serie de Taylor en $x_0 = 0$ para cada una de las siguientes funciones, y, luego indique el intervalo de convergencia de las series obtenidas, estudiando la convergencia en los extremos de dicho intervalo:

54.1. $f(x) = \frac{1}{x-a}$; $a \neq 0$

54.2. $f(x) = \ln(x-a)$; $a \neq 0$

54.3. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ $\forall \alpha \in \Re$. Se obtiene una serie denominada ***serie binomial*** y coeficientes binomiales (con $\alpha \in \Re$ y $n \in N$) a: $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha.(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ ¿Qué ocurre si $\alpha \in N$?. Justifique y proponga un ejemplo.

54.4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

54.5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

54.6. $f(x) = \operatorname{arctg} x$

54.7. $f(x) = \operatorname{arcsen} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

54.8. $f(x) = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

.1

$f(x) = \frac{1}{(x-a)} = (x-a)^{-1} \rightarrow f(0) = -1/a$

$f'(x) = (-1)(x-a)^{-2} \rightarrow f'(0) = -1/a^2$

$f''(x) = (-1)(-2)(x-a)^{-3} \rightarrow f''(0) = -2/a^3$

Podemos intuir que $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{a^{n+1}}$; por ejemplo: $f'''(x) = (-1)(-2)(-3)(x-a)^{-4} \Rightarrow f'''(0) = -\frac{6}{a^4} = \frac{(-1)3!}{a^4}$

La serie de Taylor es: $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)n!}{a^{n+1}} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)x^n}{a^{n+1}}$; para hallar el intervalo de convergencia: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{|a|^{n+2}} \cdot \frac{|a|^{n+1}}{|x|^n} =$

$= \frac{|x|^n |x| |a|^{n+1}}{|a|^{n+1}.|a|.|x|^n} = \frac{|x|}{|a|} = \left|\frac{x}{a}\right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{a}\right| = \left|\frac{x}{a}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x}{a} < 1$ Supongamos $a > 0 \Rightarrow -a < x < a$. Si $x = -a$ la serie queda:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)\,a^n(-1)^n}{a^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{a}$ y es divergente pues oscila entre $1/a$ y $-1/a$. Si $x = a \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)\frac{a^n}{a^{n+1}} =$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)\frac{1}{a}$, diverge $\Rightarrow x \in (-a, a)$ y el Radio es $R = a$.

.2) $f(0) = \ln(0-a) = \ln(-a) \Rightarrow a$ tiene que ser < 0

podemos convenir en $a = -k$ con $k > 0 \Rightarrow$

$f(x) = \ln(x+k) \Rightarrow f(0) = \ln(k)$

$f'(x) = \frac{1}{x+k} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{k}$

$f''(x) = \left[(x+k)^{-1}\right]' = (-1)(x+k)^{-2} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{k^2}$

$f'''(x) = (-1)(-2)(x+k)^{-3} \Rightarrow f'''(0) = \frac{2}{k^3}$

$f^{iv}(x) = (-1)(-2)(-3)(x+k)^{-4} \Rightarrow f^{iv}(0) = -\frac{6}{k^4}$

Entonces vemos que: $f^n(0) = \frac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{k^n}$

La serie es: $\ln(k) + \frac{1}{k}\cdot x + \left(\frac{-1}{k^2}\right)\frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{k^n}\cdot\frac{x^n}{n!} + \cdots$

$$= \ln(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{k^n} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} = \ln(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{k^n} \frac{x^n}{n}$$

(simplificando los factoriales). Salvo el término $\ln(k)$ tenemos una serie de potencias común $\Rightarrow$ para hallar el interv. de convergencia: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)k^{n+1}} \cdot \frac{n k^n}{|x|^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{|x|}{k}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{|x|}{k} = \frac{|x|}{k} \lim_{n\to\infty} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{|x|}{k}$$

ahora: $\frac{|x|}{k} < 1 \Rightarrow |x| < k \Rightarrow -k < x < k$

Si $x = -k \Rightarrow \sum \frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1)^n k^n}{k^n \cdot n} = \sum \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = \sum \frac{(-1)}{n}$

pues $2n-1$ es impar, la última serie diverge.

Si $x = k \Rightarrow \sum \frac{(-1)^{n-1} k^n}{k^n \cdot n} = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} \rightarrow$ Converge por Leibniz. $\Rightarrow x \in (-k, k]$

. 3

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$
$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \Rightarrow f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$$

En general $f^n(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1) = n!\binom{\alpha}{n}$

(Utilizando el dato) $\Rightarrow$ la serie será:

$$1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots$$

La serie queda: $1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ $\Rightarrow$ prescindiendo del primer término (No altera la convergencia)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right||x|^{n+1}}{\left|\binom{\alpha}{n}\right||x|^n} = \frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}|x| = \left|\frac{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n+1)!}}{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}\right||x|$$

$$= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}\right|\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\ |x|$$

$$= |(\alpha-n+2)|\frac{n!}{(n+1)(n)!}\ |x| = \left|\frac{(\alpha-n+2)}{n+1}\right||x|$$

tomando el límite cuando $n\to\infty$: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha-n+2)}{n+1}\right||x| = |(-1)||x|$

pero $|(-1)||x| = |x| \Rightarrow |x|<1 \Rightarrow$ la serie converge $\forall x\in(-1,1)$

Si α es un natural $\Rightarrow$ la serie resulta ser un polinomio.

Ejemplo $\alpha=2 \Rightarrow (1+x)^2 = 1+2x+x^2$, a partir de la derivada tercera en adelante son todas nulas.

4

$f(x) = (1-x)^{-1/2} \rightarrow f(0)=1$

$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}(-1) \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1-x)^{-5/2} \rightarrow f''(0) = \frac{3}{2^2}$

$f'''(x) = (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(1-x)^{-7/2}\cdot(-1) \rightarrow f'''(0) = +\frac{1.3.5}{2^3}$

intuimos que: $f^n(0) = \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}$ $\Rightarrow$ La serie queda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} \cdot \frac{x^n}{n!}$$; para hallar el radio de convergencia:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{2^n n!}{1.3.5\ldots(2n-1)} |x|$$

$= \dfrac{(2n+1)}{2(n+1)} |x|$, ahora el límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)}_{1} |x| = |x|$

Luego, converge si $|x| < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1)$.

.5 Si reemplazamos x por x^2 en la funcion del item anterior, obtenemos: $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow$ reemplazo x por x^2 en el desarrollo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n\, n!} x^{2n}$$

Se obtienen solo potencias pares de x. El intervalo de convergencia es el mismo.

.6 $f(x) = \operatorname{arctg} x \to f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \to f'(0) = 1$

$f''(x) = (-1)((1+x^2)^{-2} \cdot 2x \quad \rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(0) = -2$ (compróbalo) busca unas derivadas más y vas a obtener la siguiente serie (Siguiendo la fórmula $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots$$

Por D'Alembert sale que converge si $|x| < 1$.

7 Este problema es más complicado. Comencemos con:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n\, n!} x^{2n} \; ; \; |x|<1$$

Si integro $f(x)$ obtengo $F(x) = \text{arcsen}\, x \Rightarrow$

El desarrollo de esta función corresponde a integrar el de la $f(x)$ (dentro del radio de convergencia):

$$\text{arcsen}\, x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n . n!} \int x^{2n} dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n . n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$ y el radio de convergencia es el mismo: $x \in (-1,1)$.

55. Cada una de las siguientes funciones tiene una representación en serie de potencias de x. Compruebe que los coeficientes tienen la forma dada y demuestre que la serie converge para valores de x indicados. Cuando converja pueden utilizarse los desarrollos ya vistos:

55.1. $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n . x^n}{n!} \quad a > 0 \quad \forall x$

55.2. $chx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x$

55.3. $\frac{1}{4-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n+1}} \quad |x| < 4$

55.4. $\ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x| < 1$

.1 Desarrollo $f(x) = a^x \rightarrow f(0) = 1$.

$f'(x) = a^x . \ln a \rightarrow f'(0) = \ln a$

$f''(x) = a^x \ln^2 a \rightarrow f''(0) = \ln^2 a$

$\vdots$

$f^n(x) = a^x . \ln^n a \rightarrow f^n(0) = \ln^n a$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n$$; Para ver el radio de convergencia:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(\ln a)^{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1} . \frac{n!}{(\ln a)^n |x|^n}$$

$$= \frac{\ln a . |x|}{(n+1)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a . |x|}{(n+1)} = \ln a . |x| . \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}}_{0}$$

$= 0 < 1 \ \forall x$. Luego converge si $x \in (-\infty, \infty)$.

.2 Usaremos que: $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$(\text{senh}\, x)' = \text{Cosh}\, x$ y que $\text{senh}(0) = 0$

$(\text{Cosh}\, x)' = \text{Senh}\, x$ $\quad\text{Cosh}(0) = 1$

$\Rightarrow f(x) = \text{ch}\, x \to f(0) = 1$

$f'(x) = \text{sh}\, x \to f'(0) = 0$

$f''(x) = \text{ch}\, x \to f''(0) = 1$

$f'''(x) = \text{sh}\, x \to f'''(0) = 0$

Solo quedan las potencias pares de x.

la serie es: $1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

$\text{Ch}\, x \sim \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; Examinemos su radio de convergencia:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}}{\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}}\right| = \frac{(2n)!}{(2n+2)!}\frac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n}}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}|x|^2 = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}|x|^2 .$$

Tomando el limite: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}|x|^2 = 0 < 1 \;\forall x$.

3 Usaremos el siguiente desarrollo sumamente importante.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

que converge si $|x|<1$ (Verificalo).

Sea $f(x) = \dfrac{1}{4-x} = \dfrac{1}{4(1-x/4)} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{1-x/4}$

La expresión $\dfrac{1}{1-x/4}$ se desarrolla facilmente

si en el anterior reemplazamos x por $x/4 \Rightarrow$

$\dfrac{1}{1-x/4} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (x/4)^n$, falta multiplicar

por $1/4 \Rightarrow \dfrac{1}{4-x} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{1-x/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{x^n}{4^n} = \sum \dfrac{x^n}{4^{n+1}}$

y converge si $|x/4| < 1 \Rightarrow |x| < 4$

-4 Verifiquemos directamente:

$f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \quad \rightarrow \quad f(0) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \dfrac{2}{1-x^2} \quad \rightarrow \quad f'(0) = 2$

$f''(x) = 4x\,(1-x^2)^{-2} \quad \rightarrow \quad f''(0) = 0$

$f^3(x) = 4(1-x^2)^{-2} + 8x^2(1-x^2)^{-3} \quad \rightarrow \quad f^3(0) = 4$

El polinomio de taylor de grado 3 queda:

$f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\dfrac{x^2}{2} + f'''(0)\,\dfrac{x^3}{3!} \Rightarrow$

$0 + 2x + 0 + 4\frac{x^3}{6} = 2x + 4\frac{x^3}{6}$ si tomo

un factor común 2: $2\left(x + 2\frac{x^3}{6}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$;

Podemos intuir como continua la serie:

$$2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. En la guia falta el 2.

Radio de convergencia: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{|x|^{2n+1}} =$

$\frac{2n+1}{2n+3} \cdot |x|^2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2n+1}{2n+3}}_{1} \cdot |x|^2 = |x|^2 < 1$

Solo cuando $|x| < 1$.

---

56. Por integración del desarrollo en serie de potencias de x de $\frac{1}{1+x}$, halle el desarrollo en serie de potencias de $\ln(1+x)$ indicando el intervalo de validez del mismo.

En el ejercicio anterior utilizamos que:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{si } x \in (-1, 1)$$

cambiemos x por $-x$ $\Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n =$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ si $|-x| < 1 \Rightarrow |x| < 1$. Podemos ahora

integrar ambos miembros (dentro del intervalo de

Convergencia): $\int \frac{1}{1+x}\,dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right) dx \Rightarrow$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int x^n\,dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

siempre que $x \in (-1,1)$.

Podemos condensar la escritura si:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}}$$

---

57. Emplee el resultado recién obtenido para hallar la suma de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.

Sabemos que si $x \in (-1,1) \Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Dicha fórmula es valida para $x = \frac{1}{2}$ pues $\frac{1}{2} \in (-1,1)$

$$\Rightarrow \ln(1+\tfrac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1}$$

$$= (-1)^0 \frac{(\frac{1}{2})^{0+1}}{0+1} + (-1)^1 \frac{(\frac{1}{2})^{1+1}}{1+1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1}$$

finalmente:

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1} = \ln(\tfrac{3}{2}) - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}}$$

---

58. Compare los intervalos de crecimiento de las series derivadas y/o integradas de los ejercicios 54. Y 57. ¿Qué ocurre en los extremos?

Tomemos por ejemplo el 54.1. Sea $a = 1 \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \cdot x^n \quad \text{si} \quad |x| < 1$$

Dentro del intervalo de convergencia puedo integrar

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x-1} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1) x^n \, dx$$

$$\ln(x-1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{x^{n+1}}{n+1}$$ esta es entonces la serie integrada.

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ella, basta hallar los de $\ln(x-1)$.

Son Todos iguales, solo interesa que sepas integrar y derivar series. Te lo dejo para terminar.

---

59. Utilizando una serie adecuada, complete los 3 valores de $f(x)$ faltantes de la siguiente tabla con 4 decimales, siendo $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
$f(x)$	0.0000	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400			

Justifique el procedimiento adoptado.

Para la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$ tenemos el siguiente desarrollo: (Verificalo)

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \cdots$$

Consideremos la siguiente aproximación:

$\operatorname{arctg} x \approx x - \frac{x^3}{3}$; si $x=0 \Rightarrow \operatorname{arctg} 0 \approx 0 - \frac{0^3}{3} = 0$.

si $x = 0{,}01 \Rightarrow \operatorname{arctg}(0{,}01) \approx 0{,}01 - \frac{0{,}01^3}{3} = 0{,}0099\ldots$ que aproximado a 4 decimales da $0{,}0100$.

Si $x = 0{,}02 \Rightarrow$ tenemos: $0{,}019973$ que redondeado puede $0{,}0200$. Asi si $x = 0{,}04 \Rightarrow 0{,}0399786 \Rightarrow 0{,}0400$.

Si $x = 0{,}05 \Rightarrow 0{,}0499583 \Rightarrow \boxed{0{,}0500}$.

Si $x = 0{,}06 \Rightarrow 0{,}059928 \Rightarrow \boxed{0{,}0599}$

Si $x = 0{,}07 \Rightarrow 0{,}0698856 \Rightarrow \boxed{0{,}0699}$.

No tiene sentido tomar un orden mas en el desarrollo.

---

60. Si $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u}\,du$, encuentre una serie de potencias para $f(x)$ indicando el radio de convergencia y calcule el valor aproximado de $f\left(\frac{1}{10}\right)$.

Comencemos usando el desarrollo de $\ln(1+u)$.

$$\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n} \qquad \text{si } |u| < 1.$$

Supongamos ahora $u \neq 0$ y dividamos la expresión por u:

$$\frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n}}{u} = \frac{1}{u} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n}$$

$$\frac{\ln(1+u)}{u} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{nu} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^{n-1}}{n}$$; desarrollo

valido siempre que $|u|<1$, $u \neq 0$. Dentro del intervalo de convergencia consideremos la integral:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^{n-1}}{n} \right) du = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^x u^{n-1} du$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{u^{n-1+1}}{n-1+1} \Big|_0^x \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{u^n}{n} \Big|_0^x \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{n} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2} \quad |x|<1$$

Si $x = 1/10$ y tomamos algunos términos de la serie $\Rightarrow$

$$f(1/10) \approx 1/10 - \frac{(1/10)^2}{4} = 0{,}0975$$ (Con solo 2 términos).

---

61. Calcule $\int_0^{0.1} e^{-x^2} dx$ con tres cifras significativas.

Sabemos que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \Rightarrow$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$; ahora cambiemos x por $-x^2 \Rightarrow$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$ basta solo

integrar: $$\int_0^{0,1} e^{-x^2} dx = \int_0^{0,1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{0,1} x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^{0,1} \right) =$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(0,1)^{2n+1}}{2n+1}}$$

Este resultado es exacto, para aproximarnos basta considerar algunos términos de la serie, por ejemplo:

$$(0,1) - \frac{(0,1)^3}{3} + \frac{(0,1)^5}{5 \cdot 2!} \approx 0,0997 \approx 0,10$$

---

62. Pruebe, empleando series, que:

62.1 $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \quad \forall x \in \Re$,

62.2 $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \forall x \in \Re$ (recuerde que i es la unidad imaginaria y que $i^2 = -1$)

De las 2 identidades demostraremos la segunda (por estar en el campo complejo).

.2 Sabemos que: (Verifícalo)

$$\operatorname{Sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow i \operatorname{Sen} x = ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sen} x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + \left(ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

por otro lado: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

$$\Rightarrow e^{xi} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

$$= 1 + ix + i^2\frac{x^2}{2} + i^3\frac{x^3}{3!} + i^4\frac{x^4}{4!} + i^5\frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$= 1 + ix + i^2\frac{x^2}{2} + i\,i^2\frac{x^3}{3!} + i^2 i^2\frac{x^4}{4!} + i\,i^2 i^2\frac{x^5}{5!} + \dots$$

Usemos que $i^2 = -1 \Rightarrow$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots$$

Si $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \Rightarrow$

$$1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots = \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + \left(ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots\right)}_{\text{reordenando términos}}$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots$$

(lo tomaron en un final del 99)

---

63. Calcule los siguientes límites usando desarrollos en serie:

63.1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

63.2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots \Rightarrow -\cos x = -1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \dots \Rightarrow$$

$$1 - \cos x = 1 - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \dots = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{x^2/2 - x^4/4! + \cdots}{x^2} = 1/2 - x^2/4! + \cdots$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}.$$ (verifícalo por L'Hopital)

· 2

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\Rightarrow e^x - e^{-x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= 2x + 2\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\operatorname{Sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Entonces: $$\frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{Sen} x} = \frac{2x + 2\frac{x^3}{3!} + \cdots}{x - \frac{x^3}{3!} + \cdots} =$$

$$= \frac{x\left(2 + 2\frac{x^2}{3!} + \cdots\right)}{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)} = \frac{2 + 2\frac{x^2}{3!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots}$$

finalmente tomamos el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 + 2\frac{x^2}{3!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots} = \frac{2}{1} = 2.-$$ (No es calculable por L'Hopital)

64. Sea $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ calcule $f^{(83)}(0)$ y $f^{(124)}(0)$. Justifique los resultados.

Vemos que $f(x)$ es continua en $x=0$, pues: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

y $f(0)=1$. De modo que f está definida $\forall x\in\mathbb{R}$.

Examinemos la serie de f:

$$\operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{3!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Divido todo por $x \Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x} \Rightarrow$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Sabemos que por el desarrollo de Taylor:

$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\dfrac{x^n}{n!}$ comparando los 2 desarrollos

(que deben ser iguales):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$$

Solo hay potencias pares de x

$\Rightarrow$ estamos seguros que $f^{(83)}(0)=0$ (pues no hay términos impares)

En el desarrollo de Taylor, la derivada 124 aparece en el término: $\dfrac{f^{(124)}(0)}{124!}\,x^{124}$, este mismo término aparece en la otra serie para $n=62 \Rightarrow$

$$\frac{(-1)^{62}}{(2.62+1)!}\,x^{2.62} = \frac{1}{125!}\,x^{124} \Rightarrow \frac{f^{(124)}(0)}{124!} \equiv \frac{1}{125!}$$

$$f^{(124)}(0) = \frac{124!}{125!} = \frac{124!}{125.\,124!} = \frac{1}{125} \leftarrow$$

---

65. Se deja caer una pelota desde una altura de 100 cm. Cada vez que golpea el piso rebota a $\frac{2}{3}$ de su altura anterior. Encuentre la distancia total que recorre.

Altura inicial 1m. Luego del 1º rebote llega a una altura de $\frac{2}{3}$m $\Rightarrow$ Antes del 2º rebote recorrió:

$1\text{m} + \frac{2}{3}\text{m} + \frac{2}{3}\text{m} \Rightarrow$ 1º caída + 1º subida + 2º caída

En el 2º rebote logra una altura de $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\text{m}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\Rightarrow$ habrá recorrido:

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 + 2.\left(\frac{2}{3}\right) + 2.\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

En la n-ésima vez, habrá recorrido:

$$1 + 2.\left(\tfrac{2}{3}\right) + 2\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \dots + 2.\left(\tfrac{2}{3}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2.\left(\tfrac{2}{3}\right)^n$$

$= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n$, la serie en cuestión es geométrica $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ si $|r|<1$ $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n = \frac{1}{1-2/3}$ como la nuestra comienza en $n=1$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n = (2/3)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n$$

$$\frac{1}{1-2/3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n = 2$$

finalmente la distancia total recorrida es:

$$\boxed{1 + 2.2 = 5m} .-$$

---

66. Un paciente toma A gramos de cierta medicina cada 6 horas. La cantidad activa de cada dosis en el organismo t horas después es $A\ e^{-kt}$ gramos, donde $k \in \Re^+$.

66.1. Demuestre que, inmediatamente después de tomar la medicina por n-ésima vez, la cantidad activa en el cuerpo es: $S_n = A + A\ e^{-6k} + A\ e^{-12k} + \ldots + A\ e^{-6(n-1)k}$

66.2. Si, a medida que $n \to \infty$, $S_n \to \infty$, el paciente estaría en peligro. ¿Es cierto que $S_n \to \infty$?. Si no es así, ¿cuál es el $\lim_{n\to\infty} S_n$?.

Supongamos que tenemos un cronometro que a $t=0$ se ingieren A gr. de substancia. Según dice la fórmula a $t=6$ quedaran aun en el organismo: $A \cdot e^{-6k}$ y en este momento vuelve a ingerir A gr. $\Rightarrow$ a $t=6$ tiene $A + A.e^{-6k}$ gramos en el organismo.

Cuando el reloj marca $12 = t$, de la 1º ingesta de Δ gramos queda $\Delta . e^{-12k}$ y de la 2º ingesta de Δ gramos (efectuada a las 6) quedan $\Delta . e^{-6k}$, además en este momento ($t = 12$) vuelve a ingerir Δ gramos $\Rightarrow$ a $t = 12$ tiene en total en el organismo

$$\Delta + \Delta e^{-6k} + \Delta . e^{-k12} = \Delta . e^{-6k(1-1)} + \Delta . e^{-6k(2-1)} + \Delta . e^{-6k(3-1)}$$

Notamos que repetido el proceso n veces $\Rightarrow$

$$S_N = \Delta + \Delta e^{-6k} + \Delta e^{-12k} + \dots + \Delta e^{-6(N-1)k}$$

$$= \Delta \left(1 + e^{-6k} + e^{-12k} + \dots + e^{-6(N-1)k} \right)$$

$$= \Delta . \sum_{n=1}^{N} e^{-6(n-1)k}$$

2) Si $N \to \infty \Rightarrow S_N \to \Delta . \sum_{n=1}^{\infty} e^{-6(n-1)k} =$

$$\Delta . \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-6k})^{n-1} \equiv \Delta . \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-6k})^{n} =$$

$$= \Delta . \sum_{n=0}^{\infty} \left(1/e^{6k} \right)^{n}$$ $\to$ serie geométrica de razón

$r = 1/e^{6k}$ (si $k > 0$) y resulta menor que $1 \Rightarrow$ conocemos su suma:

$$= \Delta . \frac{1}{1 - 1/e^{6k}}$$ $\Rightarrow$ la serie No tiende a

$\Rightarrow$ el paciente No corre riesgo.

---

67. Si en un banco se hace un depósito de A pesos, éste puede prestar la mayor parte de esta cantidad. Sin embargo, no la puede prestar toda, pues debe tener una reserva para cubrir las demandas de los depositantes que quieran retirar dinero de sus cuentas. El gobierno estipula cuál es esta reserva. Suponga que a un banco se le permite prestar el 80% de la cantidad depositada. Si una persona deposita \$1.000, entonces el banco puede prestar a otra persona \$800. Suponga que esta última, a su vez, deposita toda la cantidad: entonces la entidad bancaria puede prestar a una tercera personal \$ 640 de ese depósito. El proceso puede continuar a través de una cuarta, quinta persona y así sucesivamente. Si este proceso continúa indefinidamente, cuál será el total de los depósitos, a largo plazo?.

Observe que el resultado que va a obtener es una cifra mucho mayor que la cantidad inicial. De esta forma, con la ayuda del público, los bancos *producen* dinero.

Con el 1º deposito, el banco tiene 1000 \$

Con el 2º " , el banco tiene $1000 + 800 =$

$$1000 + \frac{80}{100}(1000)$$

Con el 3º deposito: $1000 + 800 + 640 =$

$$1000 + \frac{80}{100}(1000) + \frac{80}{100}\left(\frac{80}{100}(1000)\right) =$$

$$1000 + \frac{8}{10}\cdot 1000 + \frac{8}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot 1000 = 1000\left(1 + \frac{8}{10} + \left(\frac{8}{10}\right)^2\right)$$

De esta última formula inferimos que con n depositantes el banco tendra:

$$1000\cdot\left(1 + 8/10 + (8/10)^2 + \cdots + (8/10)^n\right) = 1000\sum_{m=0}^{n}(8/10)^m$$

la última serie es geométrica de razón menor que 1, entonces su suma es: $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(8/10)^m = \frac{1}{1-8/10}$

o sea que si los depositantes tienden a $\infty \Rightarrow$ el total será: $1000 \left(\frac{1}{1 - 8/10} \right) = 5000\,\$$

---

(68) Es tan solo una aclaración para el 69.

---

69. Supóngase que el gobierno gasta mil millones de pesos y que los receptores de ese gasto gastan a su vez el 80%, mientras retienen el 20%. Sea S_n el gasto total generado después de n transacciones en la cadena, el 80% de lo recibido gastado en cada paso.

69.1. Demuestre que $S_n = 1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^{n-1}$ (miles de millones de pesos)

69.2. Demuestre que a medida que n crece, el gasto total tiene a 5 mil millones de pesos (el número 5 se llama multiplicador).

69.3. ¿Cuál sería el gasto total si se gastara el 90% de lo recibido en lugar del 80%?

El gobierno gasta 1. Los receptores gastan el 80%, es decir 0,8. Hasta aquí hay un gasto total de 1+0,8. Los receptores de los antes receptores gastan el 80% de lo que les entró, es decir el 80% de 0,8 $\Rightarrow$ gastan $\frac{8}{10} \cdot 0{,}8 = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}8^2$. El gasto hasta aquí asciende a: $1 + 0{,}8 + 0{,}8^2$, es fácil de inferir que luego de n transacciones $\Rightarrow 1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^{n-1}$

·2 Si n se acerca a infinito $\Rightarrow$ tenemos una serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (0{,}8)^n = \frac{1}{1-0{,}8} = 5 \quad \text{(por ser una serie geométrica)}$$

·3 Si fuera 90% $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (0{,}9)^n = \frac{1}{1-0{,}9} = 10$.

---

70. Demuestre que la ***Serie de Fourier***: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)t]}{(2n+1)^2}$, converge cualquiera sea el valor que tome el parámetro t.

Es una serie de funciones, función de t.
Examinemos su convergencia absoluta: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\cos((2n+1)t)|}{(2n+1)^2}$

puesto que $|\cos(\alpha)| < 1 \ \forall \alpha \Rightarrow$ nuestra serie esta acotada superiormente por esta otra: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$; de modo que si esta converge $\Rightarrow$ la dada tambien. Para la convergencia de esta última usemos comparación en el limite con $1/n^2$ (que sabemos que converge) $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(2n+1)^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$, como el límite es finito y no nulo $\Rightarrow$ ambas se comportan igual $\Rightarrow$ las 2 series convergen. Luego la serie de Fourier converge absolutamente $\forall t$.

---

71. En la teoría de las series de Fourier se demuestra que, para $0 \le t < \pi$, la suma de la serie dada en el problema anterior es $\frac{(\pi^2 - 2\pi t)}{8}$. Deduzca que

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

Nos dan ya el resultado de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)t]}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2 - 2\pi t}{8}.$$

Si en ambas expresiones elejimos $t=0$ (puesto que es valida para todo t), entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1).0)}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2 - 2\pi.0}{8}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(0)}{(2n+1)^2} = \pi^2/8.$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

---

72. Determine el intervalo de convergencia de la función de Bessel de orden 0, definida por:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

Nota: las funciones de Bessel, de las cuales $J_0(x)$ es un ejemplo, se originaron al resolver la ecuación de Kepler que describe el movimiento planetario. Desde entonces se han aplicado en diversos problemas, como ser la distribución de temperaturas en una placa circular, la propagación de señales electromagnéticas en medios con geometría cilíndrica, modulación de señales, etc.

Podemos usar D'Alembert:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}(n+1)!^2} \cdot \frac{2^{2n}.(n!)^2}{x^{2n}}\right|$$

$$= \left|\frac{x^{2n}.x^2.2^{2n}.(n!)^2}{2^{2n}.2^2.(n+1)^2(n!)^2 x^{2n}}\right| = \left|\frac{x^2}{4(n+1)^2}\right| =$$

$$= \frac{|x|^2}{4(n+1)^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{4(n+1)^2} =$$

$$\frac{|x|^2}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{|x|^2}{4} \cdot 0 = 0 < 1 \ \forall x.$$ El radio de convergencia es infinito.

---

73. Calcule $\int \frac{dx}{1+x^7}$ en forma de serie de potencias.

Comencemos con la función a integrar:

$$\frac{1}{1+x^7} = \frac{1}{(1+x)} \cdot \frac{1}{x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}$$ factorizando el denominador por Rufini. La 1º fracción $\frac{1}{1+x}$ se puede desarrollar facilmente.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^7} = \frac{(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + \cdots)}{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6} \Rightarrow$$ podemos:

$$= \frac{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6}{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6} + \frac{-x^7 + x^8 - x^9 + x^{10} - \cdots}{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6}$$

$$= 1 - \frac{x^7 - x^8 + x^9 - x^{10} + x^{11} + \cdots}{x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}$$

$$= 1 - \frac{x^7 - x^8 + x^9 - x^{10} + x^{11} - x^{12} + x^{13}}{x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1} + \frac{x^{14} - x^{15} + x^{16} - \cdots}{x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}$$

$$= 1 - \frac{x^7\left(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6\right)}{\left(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1\right)} + \frac{x^{14}-x^{15}+\cdots}{x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1}$$

$$= 1 - x^7 + \frac{x^{14}-x^{15}+x^{16}-x^{17}+x^{18}-x^{19}+x^{20}}{x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1} + \cdots$$

$$= 1 - x^7 + \frac{x^{14}\left(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6\right)}{\left(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1\right)} + \cdots$$

$= 1 - x^7 + x^{14} + \cdots$ se infiere ya como sigue la serie.

(No creo resulte mas sencilla si directamente vamos a derivar).

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^7} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{7n}(-1)^n$$

Podemos ahora integrar: $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^7}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} x^{7n}(-1)^n\,dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1}$$

---

74. Con el resultado del ejercicio anterior calcule $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^7}$ con precisión de 10^{-7}.

Para el cálculo aproximado basta tomar algunos términos de la serie, por ejemplo: $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^7}\,dx \approx x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15}$

Podemos ahora evaluar la integral:

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^7} \cong 0,5 - \frac{0,5^8}{8} + \frac{0,5^{15}}{15} = 0,49951\ldots$$

---

75. Demuestre que la función. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ es una solución de la ecuación diferencial $f''(x)+f(x)=0$

Basta derivar 2 veces y sumar:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n)(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n)(2n-1)(-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow f''+f = \sum_{n=0}^{\infty} (2n)(2n-1)(-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left((2n)(2n-1)x^{2n-2} + x^{2n} \right)$$

$$= \underbrace{1}_{\text{si } n=0} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(2 + x^2\right)}_{\text{si } n=1} + \underbrace{\frac{1}{24}\left((4)(3)x^2 + x^4\right)}_{\text{si } n=2} - \ldots$$

$= 1 - 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ y como vemos se van anulando todos los términos.

---

76. Demuestre que :

76.1. la función $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es una solución de la ecuación diferencial $f'(x)=f(x)$

76.2. $f(x)=e^x$

·1 Como en el anterior: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow$

$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!}$ (Siempre que estemos dentro del intervalo de convergencia) Para chequear hacemos:

$$f'(x)=f(x) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow$$

$$0.\frac{x^{0-1}}{0!} + 1.\frac{x^{1-1}}{1!} + 2.\frac{x^{2-1}}{2!} + \dots = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$0 + x^0 + x^1 + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$1 + x + \dots = 1 + x + \dots$$

Queda verificado.

·2 Buscamos el desarrollo de e^x.

$$\left.\begin{array}{lll} f(x)=e^x & \rightarrow & f(0)=1 \\ f'(x)=e^x & \rightarrow & f'(0)=1 \\ \vdots & & \vdots \\ f^{(n)}(x)=e^x & \rightarrow & f^{(n)}(0)=1 \end{array}\right\} \quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

y puesto que $f^{(n)}(0)=1$

$\Rightarrow f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, que también verifica la ecuación diferencial.

77. En la teoría especial de la relatividad de Einstein, la masa de un objeto que se mueve a la velocidad v es $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ donde m_0 es la masa del objeto cuando está en reposo y c es la velocidad de la luz. La energía cinética K del objeto es la diferencia entre su energía total y su energía en reposo: $K = mc^2 - m_0c^2$

77.1. Demuestre que si $v << c$, la ecuación para calcular K coincide con la que se obtiene en la física clásica de Newton $K = \frac{1}{2} m v^2$ (1).

77.2. Emplee la fórmula de Taylor para estimar la magnitud del error cometido al usar la ecuación (1) para calcular K cuando $v \leq 100 \ \frac{m}{s}$

Si llamamos a $V/_C = x \Rightarrow m = \dfrac{m_o}{\sqrt{1-x^2}} = m_o \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Podemos entonces desarrollar la función $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots \quad \text{(Verifícalo!)}$$

$$\Rightarrow m = m_o \left(1 + \frac{(V/_C)^2}{2} + \frac{3}{8}(V/_C)^4 + \cdots \right)$$

Ahora: $K = mC^2 - m_oC^2 \Rightarrow$

$$K = \left(1 + \frac{1}{2}\,V^2/_{C^2} + \frac{3}{8}\,V^4/_{C^4} + \cdots \right) m_oC^2 - m_oC^2$$

$$= m_oC^2 \left(1 + 1/2\,V^2/_{C^2} + 3/8\,(V/_C)^4 + \cdots - 1 \right)$$

$$= m_oC^2 \left(1/2\,V^2/_{C^2} + 3/8\,(V/_C)^4 + \cdots \right)$$

Si $V << C \Rightarrow (V/_C)^4 << (V/_C)^2$ y podemos aproximar la serie por el 1º término solamente ⇒

$$k \approx m_o c^2 \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{1}{2} m_o v^2$$ que es la fórmula clásica.

---

78. La fuerza de gravedad sobre un objeto con masa m, a una altura h sobre la superficie de la Tierra , es $F = \dfrac{m\,g\,R^2}{(R+h)^2}$ donde R es el radio terrestre y g es la aceleración de la gravedad.

78.1. Exprese F como una serie de potencias de $\dfrac{h}{R}$

78.2. Obsérvese que si se aproxima F por el primer término de la serie se obtiene $F \simeq m\,g$, que es lo que se emplea cuando h << R . Estime el intervalo de valores de h para el cual la aproximación $F \simeq m\,g$ tiene 1% de precisión.

.1 $$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2} = \frac{mgR^2}{\left(R(1+h/R)\right)^2} = \frac{mg}{(1+h/R)^2}$$

sea $h/R = x$ ⇒ $$F = \frac{mg}{(1+x)^2} = mg\,(1+x)^{-2}$$; para

la función $(1+x)^{-2}$ podemos usar el desarrollo del binomio:

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots$$ Luego:

$$F = mg\,(1-2x+3x^2+\cdots) = mg\left(1 - 2\frac{h}{R} + 3\left(\frac{h}{R}\right)^2 + \cdots\right)$$

.2 Si h/R es chico $(h \ll R)$ ⇒ podemos quedarnos con el 1º término del desarrollo: ⇒ $F \approx mg$. El error cometido es menor al módulo del 1º término despreciado (es una serie alternada) $\Rightarrow$ error $< \frac{h}{R}\cdot 2$. Si quiero que este error no supere el 1% ($\frac{1}{100}$) $\Rightarrow$

$$2\frac{h}{R} < \frac{1}{100} \Rightarrow h < \frac{R}{200} = \frac{1}{100}\left(\frac{R}{2}\right) = 1\% \text{ de la mitad}$$

del radio terrestre.

---

79. La resistividad ρ (recíproca de la conductividad) de un determinado metal depende la temperatura. t con la ecuación $\rho(t) = \rho_{20}\cdot e^{\alpha(t-20)}$ (2),

donde t es la temperatura en °C , α es un coeficiente llamado coeficiente de temperatura y ρ_{20} es la resistividad a 20 °C. Tanto los valores de α como los de ρ_{20} para distintos metales se obtienen de tablas. Obtenga las aproximaciones de Taylor de primero y segundo grado centradas en $t = 20$ para la resistividad $\rho(t)$.

Nota: estas aproximaciones constituyen un modelo matemático adecuado para la resistividad, excepto a temperaturas muy bajas en que se debe trabajar con la (2).

Nos piden el polinomio de Taylor de 1º grado $\Rightarrow$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow \rho(t) \approx \rho(20) + \rho'(20)(t-20)$$

$$\rho(t) = \rho_{20}\, e^{\alpha(t-20)} \Rightarrow \rho(20) = \rho_{20}.$$

$$\rho'(t) = \alpha\rho_{20}\, e^{\alpha(t-20)} \Rightarrow \rho'(20) = \alpha\rho_{20}$$

Luego: $\rho(t) \approx \rho_{20} + \alpha\rho_{20}(t-20)$

Para el polinomio de 2º grado hay que usar:

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 \Rightarrow$$

$$\rho(t) \sim \rho(20) + \rho'(20)(t-20) + \frac{\rho''(20)}{2}(t-20)^2$$

$$\rho(t) \sim \rho_{20} + \alpha\rho_{20}(t-20) + \frac{\alpha^2\rho_{20}}{2}(t-20)^2.$$

---

80. En la Mecánica cuántica aparece la siguiente expresión para el cálculo de la energía media de un oscilador que vibra con frecuencia υ

$$\overline{E} = \frac{h\upsilon\left(0+x+2x^2+3x^3+\ldots\right)}{1+x+x^2+\ldots} \qquad (3)$$

donde h es la constante de Planck (padre de la mecánica cuántica) y $x = e^{-\frac{h\upsilon}{kT}}$, con k la constante de Boltzman y T la temperatura absoluta. No obstante la (3) viene dada en todos los libros en la forma

$$\overline{E} = \frac{h\upsilon}{e^{\frac{h\upsilon}{kT}}-1} \qquad (4)$$

Verifique Ud. que la ecuaciones (3) y (4) son equivalentes.

$x = e^{-\frac{h\nu}{kT}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}} \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{kT}} = \dfrac{1}{x}$ reemplazando

esto la (4) queda: $\overline{E} = \dfrac{h\nu}{\frac{1}{x}-1} = \dfrac{h\nu}{\frac{1-x}{x}} = h\nu\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

queremos verificar que:

$$h\nu\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{h\nu\left(0+x+2x^2+\ldots\right)}{1+x+x^2+\ldots}$$

$$\Rightarrow \quad x\left(1+x+x^2+\ldots\right) = (1-x)\left(x+2x^2+\ldots\right)$$

$$x+x^2+x^3+\ldots = \left(x+2x^2+3x^3+\ldots\right)+\left(-x^2-2x^3-\ldots\right)$$

$$x+x^2+x^3+\ldots = x+2x^2+3x^3+\ldots-x^2-2x^3-\ldots$$

$$x+x^2+x^3+\ldots = x+2x^2-x^2+3x^3-2x^3+\ldots$$

$$x+x^2+x^3+\ldots = x+x^2+x^3+\ldots$$

---

81. Cierta función f satisface $f(0)=3,\ f'(0)=2,\ f''(0)=5,\ f'''(0)=\frac{1}{2},\ f^{(n)}(0)=0\ \ \forall n>3$. Dé una fórmula explícita para $f(x)$.

Por el desarrollo de Taylor sabemos que dada $f(x) \Rightarrow$ se puede expresar como: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}$ que podemos separar como sigue:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

Puesto que $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n > 3 \Rightarrow$ la última serie es nula $\Rightarrow$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

$$f(x) = 3 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3$$

---

82. Considere el desarrollo en serie de Mac Laurin de e^x y reemplace la variable x por ix siendo i la unidad imaginaria. Pruebe que:

82.1. $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ 82.2. $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$

Estas son las denominadas fórmulas de Eüler de uso muy frecuente dentro de la matemática y sus aplicaciones.

Sabemos que: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$$\Rightarrow e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{-ix} = 1 - ix + \frac{(-ix)^2}{2} + \frac{(-ix)^3}{3!} + \cdots = 1 - ix - \frac{x^2}{2} + i\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\Rightarrow e^{ix} + e^{-ix} = \left(1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \cdots\right) + \left(1 - ix - \frac{x^2}{2} + i\frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \cdots + 1 - ix - \frac{x^2}{2} + i\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 - x^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{2 - x^2 + \cdots}{2} = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \cdots}_{\text{éste es el desarrollo}}$$

del $\cos x$ (verifícalo) $\Rightarrow$

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x .$$

El item 2 es igual, te lo dejo para que lo verifiques.