Espacio Vectorial

Sea V un conjunto no vacío, $\Re$ un cuerpo, "+" y "**.**", dos funciones que llamaremos suma y producto respectivamente. El objeto $(V,+,\Re,\,.\,)$ es un espacio vectorial (EV), si y sólo si, se verifican los siguientes axiomas:

A1: La suma es una ley de composición interna en V, es decir $+: VxV \rightarrow V$.

$\forall u, v \in V \Rightarrow u+v \in V$

A2: La suma es asociativa en V.

$\forall u, v, w \in V : u+(v+w)=(u+v)+w$

A3: Existe elemento neutro para la suma en V.

$\forall u \in V, \exists \vec{o} \in V : u+\vec{o}=\vec{o}+u=u$

A4: Todo elemento de V admite opuesto en V.

$\forall u \in V \exists -u \in V : u+(-u)=\vec{o}$

A5: La suma es conmutativa en V.

$\forall u, v \in V : u+v=v+u$

A6: El producto de un escalar por un vector es ley de composición externa en V con operadores en $\Re$, es decir $L.C.E.: \Re x V \rightarrow V$.

$\forall \alpha \in \Re ; \forall u \in V : \alpha . u \in V$

A7 El producto satisface la asociatividad mixta.

$\forall \alpha, \beta \in \Re ; \forall u \in V : \alpha .(\beta . u)=(\alpha . \beta). u$

A8 El producto es distributivo respecto de la suma en $\Re$.

$\forall \alpha, \beta \in \Re ; \forall u \in V :(\alpha+\beta). u=\alpha . u+\beta . u$

A9 El producto es distributivo respecto de la suma en V

$\forall u, v \in V ; \forall \alpha \in \Re : \alpha .(u+v)=\alpha . u+\alpha v$

A10 La unidad de $\Re$ es neutro para el producto.

$\forall u \in \Re ; \exists 1 \in \Re : 1 . u=u$

<u>Nota</u>

- Los axiomas 1 a 4 caracterizan a $(V,+)$ como un grupo.
- Los axiomas 1 a 5 caracterizan a $(V,+)$ como un grupo abeliano.
- Los axiomas 1 a 10 caracterizan a $(V,+,\Re,\,.\,)$ como un espacio vectorial.

Subespacios vectoriales

Dado un espacio vectorial (V,+,$\Re$, **.**) y un conjunto no vacío $S \subset V$, si S es un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo $\Re$ y con las mismas leyes de composición que V, diremos que (S,+,$\Re$, **.**) es un subespacio vectorial de (V,+,$\Re$, **.**) o que simplemente S es un subespacio de V.

S es un subespacio de $(V,+\Re,.) \Leftrightarrow (S,+,\Re,.)$ es un espacio vectorial.

Nota

Cualquiera sea (V,+,$\Re$, **.**) tanto V como $\{\vec{0}\}$ son subespacios de V llamados triviales.

Condición suficiente para que un conjunto sea subespacio

Si el conjunto no vacío $S \subset V$ es cerrado para la suma y el producto por escalares, entonces (S,+,$\Re$, **.**) es un subespacio de (V,+,$\Re$, **.**),

Se trata de probar que:

i) $S \neq \{\ \}$

ii) $S \subset V$

iii) $u \in S \wedge v \in S \Rightarrow u+v \in S$

iv) $\alpha \in \Re \wedge u \in V \Rightarrow \alpha.u \in V$

Ejemplo: Probar que S es subespacio de V

$S = \{(x,y,z) \in \Re^3 : z = x+y\} \subset \Re^3$

$(x,y,x+y) \in S$

$i)(0,0,0) \in S \Rightarrow S \neq \{\ \}$

$ii) S \subset \Re^3$ por definición de S

$iii) u = (a,b,a+b) \in S \wedge v = (c,d,c+d) \in S \;\; u+v = (a+c, b+d, (a+c)+(b+d)) \in S$

$iv) \alpha \in \Re \wedge u = (a,b,a+b) \in S; \alpha.u = \alpha(a,b,a+b) \Rightarrow \alpha.u = (\alpha a, \alpha b, \alpha a + \alpha b) \in S$

Como se verifican $i), ii), iii), iv)$ S es subespacio de $\Re^3$.

Combinaciones lineales (CL)

Sea $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ un conjunto de vectores del espacio (V,+,$\Re$, **.**), combinación lineal del conjunto de vectores de A es toda suma de productos de escalares arbitrarios de $\Re$ por los vectores de A.

Combinación lineal de $A \subset V$ es todo vector del tipo:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i.v_i = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \alpha_3.v_3 + ... + \alpha_n.v_n \,/\, \alpha_i \in \Re \wedge v_i \in A$$

Si todos los escalares son nulos, la combinación lineal se denomina trivial y da por resultado el vector nulo.

El vector $v \in V$ es combinación lineal de los vectores del conjunto $A \subset V$ si y sólo si existen escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \,/\, v = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i.v_i$$

Ejemplo: Determinar si el vector *w*= (-1,1,3) es combinación lineal de los vectores *u*= (-1,0,2) y *v*= (-1,2,4).

$$w = \alpha.u + \beta.v$$
$$(-1,1,3) = \alpha(-1,0,2) + \beta(-1,2,4)$$
$$(-1,1,3) = (-\alpha,0,2\alpha) + (-\beta,2\beta,4\beta)$$
$$(-1,1,3) = (-\alpha - \beta, 2\beta, 2\alpha + 4\beta)$$
$$\begin{cases} -\alpha - \beta = -1 \\ 2\beta = 1 \quad \Rightarrow \beta = \dfrac{1}{2} \\ 2\alpha + 4\beta = 3 \end{cases}$$
$$\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Como α y β satisfacen la tercera ecuación resulta que *w* es combinación lineal de *u* y *v*.

$$(-1,1,3) = \frac{1}{2}(-1,0,2) + \frac{1}{2}(-1,2,4)$$

Conjunto linealmente independiente (LI)

Sea $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ un conjunto de vectores del espacio (*V*,+,$\Re$, **.**), el conjunto *A* es linealmente independiente si y sólo si la única combinación lineal de dicho conjunto que da por resultado el vector nulo es la trivial (los escalares son todos nulos).

$$A \subset V \,/\, A \text{ es LI} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i.v_i = \vec{0} \wedge \alpha_i = 0 \forall i \in \text{IN}$$

Ejemplo: Determinar si el conjunto *A* es LI.

$$A = \{(1,1,0);(0,0,1)\}$$
$$\alpha.(1,1,0) + \beta(0,0,1) = (0,0,0)$$
$$(\alpha,\alpha,0) + (0,0,\beta) = (0,0,0)$$
$$(\alpha,\alpha,\beta) = (0,0,0) \quad \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \quad \therefore A \text{ es LI}$$

Conjunto linealmente dependiente (LD)

Sea $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ un conjunto de vectores del espacio (V,+,$\Re$, **.**), el conjunto A es linealmente dependiente si y sólo si en la combinación lineal de dicho conjunto que da por resultado el vector nulo existe al menos un escalar no nulo.

$$A \subset V \,/\, A \text{ es LD} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i . v_i = \vec{0} \wedge \exists \alpha_j \neq 0$$

Ejemplo: Determinar si el conjunto A es LD.

$$A = \{(1,1,2); (1,-3,2); (0,4,0)\}$$

$$\alpha(1,1,2) + \beta(1,-3,2) + \gamma(0,4,0) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - 3\beta + 4\gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

1	1	0	0
1	-3	4	0
2	2	0	0
1	1	0	0
0	-4	4	0
0	0	0	0
1	1	0	0
0	1	-1	0
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	-1	0
0	0	0	0

$$\begin{cases} \alpha = -\lambda \\ \beta = \lambda \quad \lambda \in \Re \\ \gamma = \lambda \end{cases}$$

En este ejemplo vemos que si bien α, β, γ pueden tomar el valor cero para $\lambda = 0$, también existen valores de λ distintos de cero y por lo tanto los valores de α, β, γ también serán distintos a cero.

Operaciones elementales sobre las líneas de una matriz

1. Permutar dos filas o dos columnas entre sí.
2. Adición de una fila a otra o de una columna a otra.
3. Multiplicación de una fila o columna por un escalar no nulo.

Rango de una matriz

Definimos rango de una matriz a la cantidad de vectores fila o columna linealmente independiente.
En toda matriz la cantidad de vectores fila LI es igual a la cantidad de vectores columna LI.
Entre las formas posibles para calcular el rango de una matriz, se pueden utilizar operaciones elementales tratando de convertir todas las líneas posibles en vectores canónicos; o el método de Gauss-Jordan.

Método de Gauss-Jordan

Este método permite calcular el rango de una matriz mediante un número finito de operaciones elementales sobre las líneas de la matriz. Esencialmente se trata de formar el máximo número de vectores canónicos linealmente independientes que da el rango de la matriz.
Sea *A* una matriz no nula. Se elige cualquier elemento distinto de cero, al cual llamamos "pivote".
A los elementos de la fila en la cual elegimos el pivote lo dividimos por este.
Se reducen a cero los restantes elementos de la columna del pivote, obteniéndose un vector canónico en la columna del pivote y dejando sin modificar a los elementos de la fila del pivote. A los restantes elementos se los transforma por una regla llamada del rectángulo. Dicho rectángulo se forma para cada elemento de la siguiente forma: se establece una diagonal del rectángulo entre el pivote y el elemento a transformar. Los otros dos vértices determinan la contradiagonal. El transformado del elemento elegido se obtiene haciendo el producto de los elementos de la diagonal menos el producto de los elementos de la contradiagonal del mismo.
El proceso se repite para cada elemento y para cada fila. Se toman todos los pivotes posibles siempre en filas y columnas distintas.

Ejemplo: Obtener el rango de la matriz *A*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1	2	1
1	1	0
2	2	-1
1	2	1
0	-1	-1
0	-2	- 3
1	2	1
0	1	1
0	-2	-3
1	1	0
0	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1
0	1	0

Rango de A = 3

Inversión de matrices por el método de Gauss-Jordan

Escribimos $A \in \Re^{nxn}$ y a su derecha $I \in \Re^{nxn}$. Obtenemos de esta forma una matriz de orden *nx2n*.Vamos a aplicar el método de Gauss-Jordan sobre la matriz A hasta que esta se transforme en la matriz I. De esta manera la matriz I (que se encontraba a la derecha) nos queda transformada en A^{-1}.

A	I
I	A^{-1}

Ejemplo: Hallar la inversa de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1	-1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0
1	2	1	0	0	1

1	-1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0
0	3	0	-1	0	1

1	-1	0	1	-1	0
0	0	1	0	1	0
0	3	0	-1	0	1

1	-1	0	1	-1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	-1/3	0	1/3

1	0	0	2/3	-1	1/3
0	0	1	0	1	0
0	1	0	-1/3	0	1/3

1	0	0	2/3	-1	1/3
0	1	0	-1/3	0	1/3
0	0	1	0	1	0

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposiciones equivalentes

i) $A \in \Re^{nxn}$ y tiene "n" filas y "n" columnas LI

ii) rango$(A) = \mathrm{n}$

iii) $\det(A) \neq 0$

iv) A es inversible

Propiedades de la dependencia e independencia lineal

Sea $A=\{v_1,v_2,.......,v_n\}\subset V$ un conjunto de vectores del espacio (V,+,$\Re$, **.**).

1. Si un vector es CL de un conjunto de vectores LI, entonces dicha CL es única.

   Demostración

   Sea $v\in V$ que es CL de $\{v_1,v_2,.......,v_n\}$ y esta CL es LI, entonces existen escalares $\alpha_i / v=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i.v_i$

   Supongamos que existen escalares $\beta_i / v=\sum_{i=1}^{i=n}\beta_i.v_i$.

   Entonces $\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i.v_i = \sum_{i=1}^{i=n}\beta_i.v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i.v_i - \sum_{i=1}^{i=n}\beta_i.v_i = \vec{0}$

   Luego $\sum_{i=1}^{i=n}(\alpha_i-\beta_i).v_i=\vec{0}$ como $\{v_1,v_2,.......,v_n\}$es LI entonces debe ocurrir que $\alpha_i-\beta_i=0$ y por lo tanto $\alpha_i=\beta_i$. Finalmente la CL es única ya que los escalares son iguales.

2. Todo vector no nulo de un espacio vectorial constituye un conjunto linealmente independiente.

   Demostración

   Sea $\vec{v}\neq\vec{0}\in V$. Considerando $\alpha.v=\vec{0}$, como $\vec{v}\neq\vec{0}\Rightarrow\alpha=0$. Por lo tanto $\{v\}$ es LI.

3. El vector nulo de cualquier espacio, constituye un conjunto linealmente dependiente.

   Demostración

   $\alpha.\vec{0}=\vec{0}\Rightarrow\exists\alpha\neq 0$ que verifica. Por lo tanto $\{\vec{0}\}$es LD

4. Todo conjunto de vectores al que pertenezca el vector nulo es linealmente dependiente.

   Demostración

   Sea $A=\{v_1,v_2,......,v_j,.....,v_n\}$con un $v_j=\vec{0}$.

   Se verifica que $0.v_1+0.v_2+........+\alpha_j.v_j+.....+0.v_n=\vec{0}$

   Entonces $\alpha_j.v_j=\alpha_j.\vec{0}=\vec{0}\wedge\exists\alpha_j\neq 0$. Finalmente A es LD.

5. Un conjunto finito y no vacío de vectores es linealmente dependiente si y sólo si algún vector es combinación lineal de los restantes.

Demostración I $A \text{ es LD} \Rightarrow \exists v_j / v_j = \sum_{i \neq j}^{i=n} \beta_i . v_i$

Por definición de dependencia lineal:

$$A \text{ es LD} \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i . v_i = \mathbf{0} \wedge \exists \alpha_j \neq 0$$

$$\Rightarrow \alpha_j . v_j + \sum_{i \neq j}^{i=n} \alpha_i . v_i = \vec{0} \wedge \alpha_j \neq 0$$

$$\Rightarrow \alpha_j . v_j = -\sum_{i \neq j}^{i=n} \alpha_i . v_i \wedge \alpha_j \neq 0$$

$$\text{Si } \alpha_j \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha_j^{-1} / (\alpha_j^{-1}). \alpha_j . v_j = (-\alpha_j^{-1}). \sum_{i \neq j}^{i=n} \alpha_i . v_i$$

$$(\alpha_j^{-1} . \alpha_j). v_j = . \sum_{i \neq j}^{i=n} (-\alpha_j^{-1} \alpha_i). v_i$$

$$1 . v_j = . \sum_{i \neq j}^{i=n} (-\alpha_j^{-1} \alpha_i). v_i$$

$$\text{Si } -\alpha_j^{-1} \alpha_i = \beta_i \Rightarrow v_j = \sum_{i \neq j}^{i=n} \beta_i . v_i$$

Finalmente v_j es combinación lineal de los vectores de *A*.

Demostración II $v_j = \sum_{i \neq j}^{i=n} \beta_i . v_i \Rightarrow A \text{ es LD}$

$$v_j = \sum_{i \neq j}^{i=n} \beta_i . v_i \Rightarrow \sum_{i \neq j}^{i=n} \beta_i . v_i - v_j = \vec{0} \Rightarrow \beta_j = -1 \Rightarrow \beta_j \neq 0 \Rightarrow A \text{ es LD}$$

6. Un conjunto finito y no vacío de vectores es linealmente independiente si y sólo si ningún vector es combinación lineal de los restantes.

Demostración: basta con hacer la negación de la propiedad anterior, luego

$$A \text{ es LI} \Leftrightarrow \forall j : v_j \neq \sum_{i \neq j}^{i=n} \beta_i . v_i$$

Sistema de generadores de un espacio

Sea $A=\{u_1,u_2,.......,u_n\}\subset V$ un conjunto de vectores del espacio (V,+,$\Re$, **.**), el conjunto A es sistema de generadores (SG) de V si y sólo si todo vector de V puede expresarse como combinación lineal de los vectores de A.

$$A \text{ es SG para } V \Leftrightarrow \forall v\in V / v=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i.u_i$$

Ejemplo:

Sea $A=\{(1,0);(0,1)\}$ un SG para $\Re^2$

$\alpha(1,0)+\beta(0,1)=(x,y)$

$\begin{cases}\alpha=x\\ \beta=y\end{cases}\Rightarrow A$ es SG para $\Re^2$ ya que a medida que voy asignando valores a

α y β voy obteniendo todos los pares de $\Re^2$

Sistema de generadores de un subespacio

Sea $A=\{u_1,u_2,.......,u_n\}\subset S$ un conjunto de vectores del subespacio (S,+,$\Re$, **.**) y sea $S\subset V$ siendo (V,+,$\Re$, **.**) espacio vectorial, el conjunto A es sistema de generadores (SG) de S si y sólo si todo vector de S puede expresarse como combinación lineal de los vectores de A.

$$A \text{ es SG para S} \Leftrightarrow \forall v\in S / v=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i.u_i$$

Ejemplo:

Hallar el subespacio generado por $H=\{(1,1,0);(-2,0,1)\}$

Como $H\subset\Re^3\Rightarrow\alpha.(1,1,0)+\beta(-2,0,1)=(x,y,z)$

$$\begin{cases}\alpha-2\beta=x\\ \alpha\qquad\;=y\Rightarrow x=y-2z\\ \qquad\beta=z\end{cases}$$

Finalmente el subespacio S queda definido como

$S=\{(x,y,z)\in\Re^3 / x=y-2z\}$

Base de un espacio vectorial

Sea $A=\{u_1,u_2,.......,u_n\}\subset V$ un conjunto de vectores del espacio (V,+,$\Re$, **.**), el conjunto A es base de V si y sólo es un conjunto linealmente independiente y un sistema de generadores para V. Es importante destacar que una base de un espacio vectorial es un conjunto ordenado de vectores.

$A \subset V$ es base de $V \Leftrightarrow A$ es LI y A es SG

Ejemplo: Determinar si A es base de $\Re^3$.

$A = \{(1,1,1);(1,1,0);(1,0,0)\}$

Verificaremos si A es LI.

$\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta \quad\;\; = 0 \\ \alpha \qquad\quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow A \text{ es LI}$$

Verificamos si A es SG para $\Re^3$.

$\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \alpha + \beta \quad\;\; = \text{y} \\ \alpha \qquad\quad = \text{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = z \\ \beta = y - z \\ \gamma = x - y \end{cases} \Rightarrow A \text{ es SG}$$

Bases Canónicas (BC) de espacios vectoriales

Ejemplos:

BC de $\Re^2 \Rightarrow \{(1,0);(0,1)\}$

BC de $\Re^3 \Rightarrow \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$

BC de $\Re^4 \Rightarrow \{(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,1,0);(0,0,0,1)\}$

BC de $\Re^{2x2} \Rightarrow \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

BC de $\Re^{2x3} \Rightarrow \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

BC de $IP_2 \Rightarrow \{1, x, x^2\}$

BC de $IP_3 \Rightarrow \{1, x, x^2, x^3\}$

BC de $IP_n \Rightarrow \{1, x, x^2, ..., x^{n-1}, x^n\}$

Base de un subespacio

Sea $A = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset S$ un conjunto de vectores del subespacio (S,+,$\Re$, **.**) y sea $S \subset V$ siendo (V,+,$\Re$, **.**) espacio vectorial, el conjunto A es base de S si y sólo si es un conjunto linealmente independiente y un sistema de generadores para S. Es importante destacar que una base de un subespacio vectorial es un conjunto ordenado de vectores.

Ejemplo:

Determinar una base una base para *S*.

$S=\{(x,y,z)\in\Re^3 / z=x+y\}$

Sea (x,y,z) un vector cualquiera de $\Re^3$, $(x,y,x+y)$ es un vector genérico de S.

$(x,y,x+y)=(x,0,x)+(0,y,y)$

$\qquad\qquad = x(1,0,1)+y(0,1,1)$

Entonces $\{(1,0,1);(0,1,1)\}$ es SG para S.

Además $\{(1,0,1);(0,1,1)\}$ debe ser LI. Luego:

$\alpha(1,0,1)+\beta(0,1,1)=(0,0,0)$. Resolviendo $\alpha=\beta=0$ entonces $\{(1,0,1);(0,1,1)\}$ es LI.

Finalmente podemos afirmar que $\{(1,0,1);(0,1,1)\}$ es base para S.

Dimensión de un espacio vectorial o de un subespacio

Un espacio vectorial o un subespacio, puede tener más de una base; pero toda base de un espacio o de un subespacio tiene un mismo número de vectores. A tal número se lo denomina dimensión del espacio o del subespacio.

Ejemplos: En las bases canónicas que vimos anteriormente las dimensiones son

BC de $\Re^2 \Rightarrow \{(1,0);(0,1)\}$ $\dim(\Re^2)=2$

BC de $\Re^3 \Rightarrow \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}\dim(\Re^3)=3$

BC de $\Re^4 \Rightarrow \{(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,1,0);(0,0,0,1)\}\dim(\Re^4)=4$

BC de $\Re^{2x2} \Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ $\dim(\Re^{2x2})=4$

BC de $\Re^{2x3} \Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$ $\dim(\Re^{2x3})=6$

BC de $IP_2 \Rightarrow \{1,x,x^2\}\dim(IP_2)=3$

BC de $IP_3 \Rightarrow \{1,x,x^2,x^3\}\dim(IP_3)=4$

BC de $IP_n \Rightarrow \{1,x,x^2,....,x^{n-1},x^n\}\dim(IP_n)=n+1$

Caso particular: si *V* consiste en el vector nulo, entonces dim (*V*) = 0.

Teorema de extensión a una base

Sea $V \neq \{\vec{0}\}$ un espacio vectorial de dimensión n y $A = \{v_1, v_2, ..., v_r\} \subset V$ un conjunto linealmente independiente de $r < n$ vectores. Entonces existen $\{v_{r+1}, v_{r+2}, ..., v_n\} \subset V$ tales que $\{v_1, v_2, ..., v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, ..., v_n\}$ es base de V.

Ejemplo: Sea $A = \{(1,1,0); (0,1,1)\}$ base del subespacio $S \subset \Re^3$. Extender la base A a una base de $\Re^3$.

Al tratarse de vectores de $\Re^3$ encuentro el tercer vector haciendo.

$$(1,1,0)\text{x}((0,1,1)=\begin{vmatrix} \hat{\text{i}} & \hat{\text{j}} & \hat{\text{k}} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,1)$$

Finalmente $\{(1,1,0); (0,1,1); (1,-1,1)\}$ es base de $\Re^3$

Coordenadas a una base

Si $A = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset V$ es una base del espacio (V,+, $\Re$, **.**).

$$A \text{ es } \begin{cases} \text{SG} \Rightarrow \text{cada vector } w \in V \text{ puede expresarse como combinación lineal de los vectores} \\ \qquad \text{de la base} \\ \wedge \\ \text{LI} \Rightarrow \text{la combinación lineal es única} \end{cases}$$

$$\text{Si } w \in V \Rightarrow \exists \text{ y son únicos } \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \,/\, w = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i . u_i = \alpha_1 . u_1 + \alpha_2 . u_2 + ... + \alpha_n . u_n$$

De esta manera el vector w queda caracterizado por los coeficientes α_{i} que denominamos coordenadas o componentes de w en la base A

$$w_{[A]} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ..... \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Si se elige otra base, por ejemplo $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ del espacio (V,+, , .)

Si $w \in V \Rightarrow \exists$ y son únicos $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \,/\, w = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_i . v_i = \beta_1 . v_1 + \beta_2 . v_2 + ... + \beta_n . v_n$

Entonces

$$w_{[B]} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ .... \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \alpha_i \neq \beta_i$$

Ejemplo: determinar las coordenadas de *w*=(2,-3) en la base $A = \{(1,1);(1,0)\}$.

$\alpha_1.(1,1) + \alpha_2.(1,0) = (2,-3)$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -2 \Rightarrow \alpha_2 = -5 \\ \alpha_1 \qquad = 3 \end{cases} \qquad w_{[A]} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Intersección de subespacios

Sean H_1 y H_2 subespacios de un espacio vectorial *V*. Se llama intersección $H_1 \cap H_2$ de estos subespacios al conjunto de todos los vectores de *V* que pertenecen a la vez a H_1 y a H_2.

$$H_1 \cap H_2 = \{u \in V \,/\, u \in H_1 \wedge u \in H_2\}$$

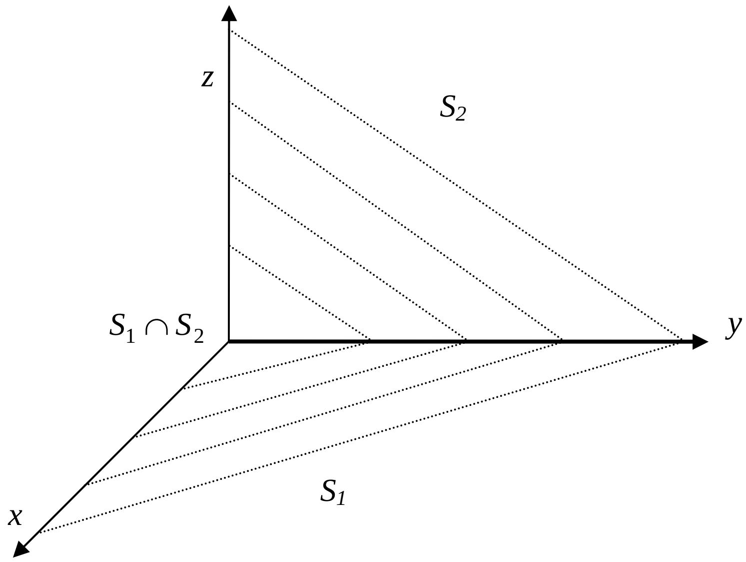
Ejemplo:

En $(\Re^3, +, \Re, .)$ consideramos los subespacios

$S_1 = \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/\, z = 0\} \qquad S_2 = \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/\, x = 0\}$

$S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/\, z = 0 \wedge x = 0\}$

En este caso $S_1 \cap S_2$ estaría formado por vectores del tipo $(0, \alpha, 0), \alpha \in \Re$; es decir $S_1 \cap S_2$ es el eje *y*.



Propiedad: Sean H_1 y H_2 subespacios de un espacio vectorial V, entonces $H_1 \cap H_2$ es un subespacio de V.

i) $H_1 \cap H_2 \subset V$

$H_1 \subset V \wedge H_2 \subset V \Rightarrow H_1 \cap H_2 \subset V$

ii) $H_1 \cap H_2 \neq \{\ \}$

$\vec{0} \in H_1 \wedge \vec{0} \in H_2 \Rightarrow \vec{0} \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow H_1 \cap H_2 \neq \{\ \}$

iii) $H_1 \cap H_2$ es cerrado para la suma

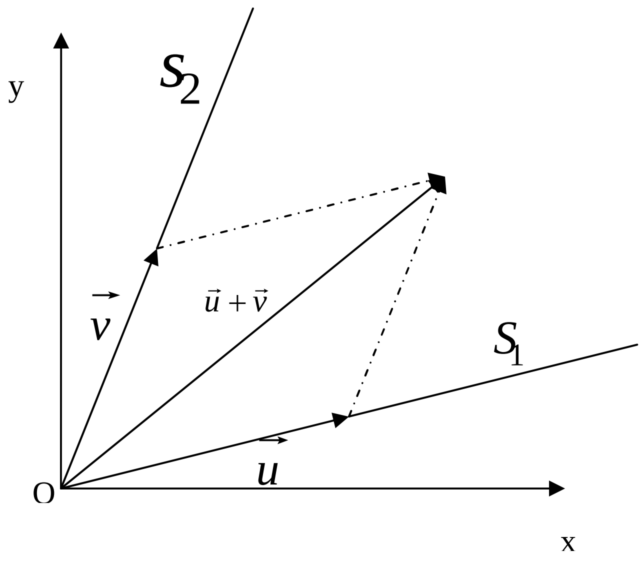
$$\text{Sean } \left.\begin{array}{l} x_1 \in H_1 \cap H_2 \\ x_2 \in H_1 \cap H_2 \end{array}\right\} \text{Como } H_1 \text{ y } H_2 \text{ subespacios} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \in H_1 \\ x_1 + x_2 \in H_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 \in H_1 \cap H_2$$

iv) $H_1 \cap H_2$ es cerrado para el producto por un escalar

$$\text{Sean } \left.\begin{array}{l} \alpha \in \Re \\ x \in H_1 \cap H_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha \in \Re \\ x \in H_1 \wedge x \in H_2 \end{array}\right\} \text{Como } H_1 \text{ y } H_2 \text{ subespacios} \left.\begin{array}{l} \alpha x \in H_1 \\ \alpha x \in H_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha x \in H_1 \cap H_2$$

Unión de subespacios

Si S1 y S2 son subespacios de $(V,+,\Re,\ .\ )$ entonces $S_1 \cup S_2$ <u>NO es necesariamente</u> un subespacio de V, como lo prueba el siguiente ejemplo:



Consideramos en $(\Re^2,+,\Re,.)$ los subespacios S_1 y S_2

$S_1 \cup S_2$ es el par de rectas

$\vec{u} \in S_1 \Rightarrow \vec{u} \in S_1 \cup S_2$

$\vec{v} \in S_2 \Rightarrow \vec{v} \in S_1 \cup S_2$

Pero $\vec{u}+\vec{v} \notin S_1 \cup S_2$

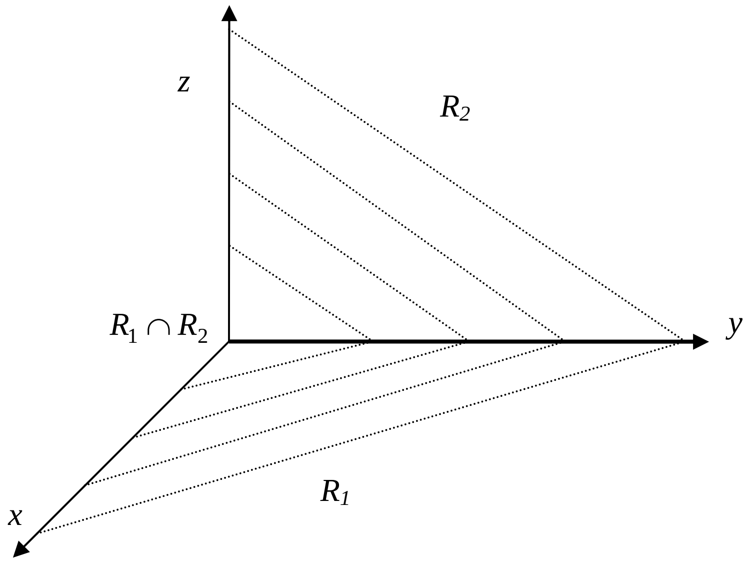
Suma de subespacios

Sean R_1 y R_2 dos subespacios de $(V,+,\Re\,,\,.\,)$, definimos suma R_1+R_2 de estos subespacios al conjunto de todos los vectores del tipo $\vec{u}+\vec{v}$ donde $\vec{u} \in R_1$ y $\vec{v} \in R_2$.

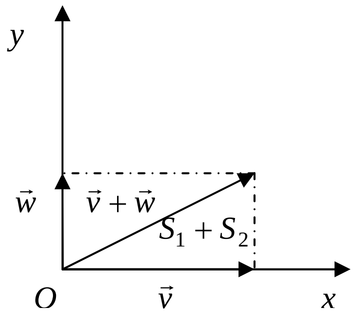
$$R_1 + R_2 = \{\vec{w} \in V \,/\, \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \wedge \vec{u} \in R_1 \wedge \vec{v} \in R_2\}$$
$$R_1 + R_2 = \{\vec{w} \in V \,/\, \exists \vec{u} \in R_1 \wedge \exists \vec{v} \in R_2 \wedge \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}\}$$

Ejemplo: en $(\Re^3,+,\Re,.)$ consideramos los subespacios.

$$R_1 = \{(x,y,z) \in \Re^3 \,/\, z = 0\} \qquad R_2 = \{(x,y,z) \in \Re^3 \,/\, x = 0\}$$
$$R_1 + R_2 = \{(x,y,z) \in \Re^3\} \qquad R_1 + R_2 = \Re^3$$



Propiedad: la suma de dos subespacios de V es un subespacio de V.



i) $S_1 + S_2 \subset V$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} \in S_1 \\ \vec{w} \in S_2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{v} \in V \\ \vec{w} \in V\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in V \Rightarrow S_1 + S_2 \subset V$$

ii) $S_1 + S_2 \neq \{\ \}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{0} \in S_1 \\ \vec{0} \in S_2\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{0} + \vec{0} \in S_1 + S_2 \Rightarrow \vec{0} \in S_1 + S_2 \Rightarrow S_1 + S_2 \neq \{\ \}$$

iii) $S_1 + S_2$ es cerrado para la suma

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \,/\, \overrightarrow{v_1} \in S_1 \wedge \overrightarrow{v_2} \in S_2 \\ \vec{w} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} \,/\, \overrightarrow{w_1} \in S_1 \wedge \overrightarrow{w_2} \in S_2\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v} \in S_1 + S_2 \wedge \vec{w} \in S_1 + S_2$$

$$\vec{v} + \vec{w} = (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) + (\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2})$$
$$\vec{v} + \vec{w} = (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{w_1}) + (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{w_2}) \text{ Por prop. asociativa}$$
$$\text{Luego } (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{w_1}) \in S_1 \wedge (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{w_2}) \in S_2 \Rightarrow (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{w_1}) + (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{w_2}) \in S_1 + S_2$$
$$\text{Finalmente } \vec{v} + \vec{w} \in S_1 + S_2$$

iv) $S_1 + S_2$ es cerrado para el producto por un escalar

$$\alpha \in \Re \wedge \vec{v} \in S_1 + S_2$$
$$\vec{v} \in S_1 + S_2 \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} / \overrightarrow{v_1} \in S_1 \wedge \overrightarrow{v_2} \in S_2$$
$$\alpha\vec{v} = \alpha(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2})$$
$$\alpha\vec{v} = \alpha\overrightarrow{v_1} + \alpha\overrightarrow{v_2}$$
$$\text{Luego } \alpha\overrightarrow{v_1} \in S_1 \wedge \alpha\overrightarrow{v_2} \in S_2 \Rightarrow \alpha\overrightarrow{v_1} + \alpha\overrightarrow{v_2} \in S_1 + S_2$$
$$\text{Finalmente } \alpha\vec{v} \in S_1 + S_2$$

Suma directa de subespacios

Si un subespacio S es la suma de dos subespacios S_1 y S_2 y la intersección de S_1 y S_2 está dada sólo por el vector nulo, se dice que S es la suma directa de los subespacios S_1 y S_2.

$$S = S_1 \oplus S_2 \Leftrightarrow S = S_1 + S_2 \wedge S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$$

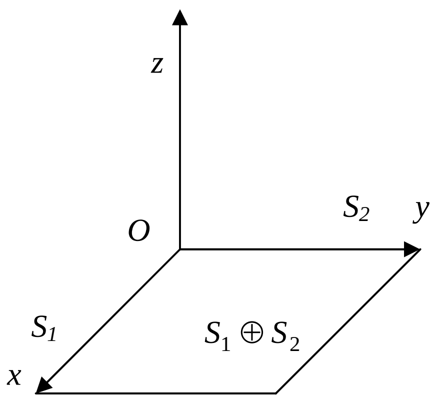
Ejemplo: Consideremos en $(\Re^3, +, \Re, .)$ los subespacios

$S_1 = \{(\alpha, 0, 0) \in \Re^3 / \alpha \in \Re\}$ y $S_2 = \{(0, \beta, 0) \in \Re^3 / \beta \in \Re\}$

$S_1 + S_2 = \{(\alpha, \beta, 0) / \alpha, \beta \in \Re\}$ y $S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\}$

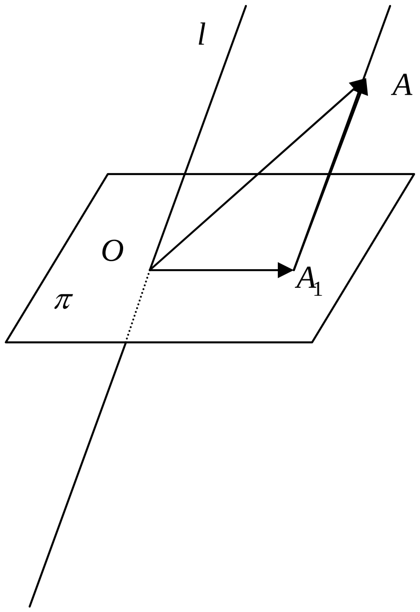
$$S_1 \oplus S_2 = \{(\alpha, \beta, 0) / \alpha, \beta \in \Re\}$$

La suma directa se identifica con el plano horizontal.



Propiedad: Si $R = R_1 \oplus R_2$, todo vector de R se representa de un modo único en la forma $\vec{u} + \vec{v}$ donde $\vec{u} \in R_1$ y $\vec{v} \in R_2$.

Por ejemplo: $\Re^3$ es la suma directa de cualquier plano π (que contiene al origen de coordenadas) y de cualquier recta *l* que no está incluída en π y que contiene al origen de coordenadas. De esta manera todo vector $\overrightarrow{OA}$ de $\Re^3$ se puede representa como la suma de un vector colineal con *l* y de un vector coplanar con π, estando además la intersección entre π y *l* compuesta solamente por el vector nulo.



$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A}$

$\overrightarrow{A_1A} // l$

$\overrightarrow{OA_1} // \pi$

Dimensión de la suma

Si S_1 y S_2 son dos subespacios de (V,+,$\Re$, **.**) y la dimensión de V es finita, entonces se verifica que:

$$\boxed{\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)}$$

Ejemplo: Determinar la dimensión de la suma de los siguientes subespacios de $(\Re^3,+,\Re,.)$.

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/\, x + y - z = 0\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/\, x - z = 0\}$$

S_1 y S_2 son planos al origen y la dimensión de cada uno de ellos es 2.

$$S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x + y - z = 0 \Rightarrow y = z - x \Rightarrow y = 0 \\ x \qquad - z = 0 \Rightarrow x = z \end{cases}$$

$S_1 \cap S_2 = \{(x,y,z) \in \Re^3 / x = z \wedge y = 0\}$
$(a,0,a) \in S_1 \cap S_2$
$(a,0,a) = a(1,0,1); \forall a \in \Re$
Luego $\{(1,0,1)\}$ es base para $S_1 \cap S_2$ siendo $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$
$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$
$\dim(S_1 + S_2) = 2 + 2 - 1$
$\dim(S_1 + S_2) = 3 \Rightarrow S_1 + S_2 = \Re^3$

Dimensión de la suma directa

Si S_1 y S_2 son dos subespacios de $(V,+,\Re,.)$, entonces la dimensión de la suma directa es igual a la suma de las dimensiones de S_1 y S_2.

$$\text{Como } S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim(S_1 \cap S_2) = 0$$

$$\boxed{\dim(S_1 \oplus S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2)}$$

Espacio de productos interiores

Un producto interior sobre un espacio V es una función que asocia un número real $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ con cada pareja de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en V, de tal manera que se satisfacen los siguientes axiomas:

1. Axioma de simetría
   $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
2. Axioma de aditividad
   $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
3. Axioma de homogenidad
   $k \in \Re / k.\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle k.\vec{u}, \vec{v} \rangle$
4. Axioma de positividad
   $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0 \ \ \forall \vec{u} \in V \wedge \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Un espacio vectorial con un producto interior se conoce como espacio de productos interiores.

Ejemplo: Sea $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ vectores de $\Re^2$ y $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 5.u_1.v_1+3.u_2.v_2$. Verificar que es un producto interior.

Verificamos el cumplimiento de los axiomas.

1. Axioma de simetría

$\langle \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ \rangle = \langle \vec{v}\ ,\ \vec{u}\ \rangle$

$\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 5.u_1.v_1+3.u_2.v_2$

$\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 5.v_1.u_1+3.v_2.u_2$ por conmutatividad en $\Re$

$\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \langle \vec{v},\vec{u}\rangle$

2. Axioma de aditividad

$\langle \vec{u}\ +\ \vec{v}\ ,\vec{w}\ \rangle = \langle \vec{u}\ ,\ \vec{w}\ \rangle + \langle \vec{v}\ ,\ \vec{w}\ \rangle$

$\langle \vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle = 5.(u_1+v_1).w_1+3.(u_2+v_2).w_2$

$\langle \vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle = 5.u_1.w_1+5.v_1.w_1+3.u_2.w_2+3.v_2.w_2$

$\langle \vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle = (5.u_1.w_1+3.u_2.w_2)+(5.v_1.w_1+3.v_2.w_2)$

$\langle \vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle = \langle \vec{u},\vec{w}\rangle + \langle \vec{v},\vec{w}\rangle$

3. Axioma de homogenidad

$k\ \in\ \Re\ /\ k\,.\langle \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ \rangle = \langle k\,.\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ \rangle$

$k.\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = k.5.u_1.v_1+k.3.u_2.v_2$

$k.\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 5.(k.u_1).v_1+3.(k.u_2).v_2$ por asociatividad en $\Re$

$k.\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \langle k.\vec{u},\vec{v}\rangle$

4. Axioma de positividad

$\langle \vec{u},\vec{u}\rangle \geq 0\ \ \forall \vec{u}\in V \wedge \langle \vec{u},\vec{u}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$

$\langle \vec{u},\vec{u}\rangle = 5.u_1.u_1+3u_2.u_2$

$\langle \vec{u},\vec{u}\rangle = 5.u_1^{\ 2}+3.u_2^{\ 2} \geq 0$

$\langle \vec{u},\vec{u}\rangle \geq 0$

Caso particular $\vec{u}=(0,0) \Rightarrow \langle \vec{u},\vec{u}\rangle = 5.0+3.0=0$

Espacio vectorial euclídeo

Probaremos que el producto escalar o euclídeo es un producto interior.

$\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \Re^n$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \Re^n$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1.v_1 + u_2.v_2 + ... + u_n.v_n$

1. Axioma de simetría

   $\langle \vec{u} \ , \ \vec{v} \ \rangle = \ \langle \vec{v} \ , \ \vec{u} \ \rangle$

   $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1.v_1 + u_2.v_2 + ... + u_n.v_n$

   $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = v_1.u_1 + v_2.u_2 + ... + v_n.u_n$ por propiedad conmutativa en $\Re$

   $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

2. Axioma de aditividad

   $\langle \vec{u} \ + \ \vec{v} \ , \vec{w} \ \rangle = \ \langle \vec{u} \ , \ \vec{w} \ \rangle + \ \langle \vec{v} \ , \vec{w} \ \rangle$

   $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2) + w_2 + ... + (u_n + v_n) + w_n$

   $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = u_1.w_1 + v_1.w_1 + u_2.w_2 + v_2.w_2 + ... + u_n.w_n + v_n.w_n$

   $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = (u_1.w_1 + u_2.w_2 + ... + u_n.w_n) + (v_1.w_1 + v_2.w_2 + ... + +v_n.w_n)$

   $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

3. Axioma de homogenidad

   $k \ \in \ \Re \ / \ k.\langle \vec{u} \ , \vec{v} \ \rangle = \ \langle k.\vec{u} \ , \vec{v} \ \rangle$

   $k.\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = k.u_1.v_1 + k.u_2.v_2 + ... + k.u_n.v_n$

   $k.\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (k.u_1).v_1 + (k.u_2).v_2 + ... + (k.u_n).v_n$

   $k.\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle k.\vec{u}, \vec{v} \rangle$

4. Axioma de positividad

   $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0 \ \ \forall \vec{u} \in V \wedge \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

   $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = u_1.u_1 + u_2.u_2 + ... + u_n.u_n$

   $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = {u_1}^2 + {u_2}^2 + ... + {u_n}^2 > 0$

   Caso particular $\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0.0 + 0.0 + ... + 0.0 = 0$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$\forall \vec{u}, \vec{v}$ vectores de un espacio de productos interiores

$$\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \leq \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Verificación mediante ejemplo: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2.u_1.v_1 + 3.u_2.v_2 \quad \vec{u} = (1,-1) \quad \vec{v} = (2,3)$

$\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 2.1.2 + 3.(-1).3 = -5$

$\langle \vec{u},\vec{u}\rangle = 2.1 + 3.1 = 5$

$\langle \vec{v},\vec{v}\rangle = 2.2 + 3.3 = 13$

$(-5)^2 < 5^2.13^2$ Verifica

Norma, distancia y ángulos en un espacio de producto interior

Norma: $\|\vec{u}\| = \langle \vec{u},\vec{u}\rangle^{1/2}$

Distancia: $d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\|$

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} \quad 0 < \theta < \pi$$

Conjunto ortogonal en $\Re^n$

El conjunto de vectores $S = \{u_1, u_2, ..., u_k\} \subset \Re^n$ se llama conjunto ortogonal si y sólo si $u_i.u_j = 0 \ \forall i \neq j$ (producto escalar).

Conjunto ortonormal en $\Re^n$

El conjunto de vectores $S = \{u_1, u_2, ..., u_k\} \subset \Re^n$ se llama conjunto ortonormal si y sólo si

i) $u_i.u_j = 0 \ \forall i \neq j$

ii) $u_i.u_i = 1 \ \forall i$

Un conjunto de vectores es ortonormal si un par cualquiera de vectores es ortogonal y si cada uno tiene longitud uno.

Complemento Ortogonal

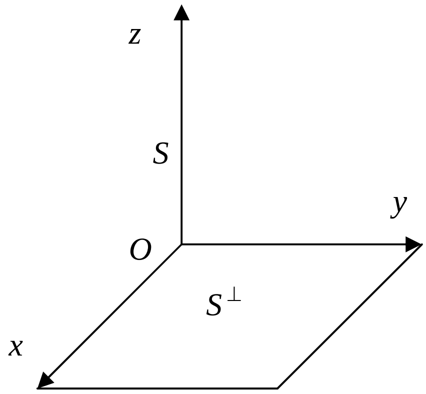
Sea H un subespacio de $\Re^n$. Entonces el complemento ortogonal de H está dado por el subespacio que contiene a todos los vectores ortogonales a *H*.

$$H^{\perp} = \{x / x \in \Re^n : x.h = 0, \forall h \in H\}$$

Ejemplo: hallar el complemento ortogonal de *S*.

$$S = \{(x, y, z) \in \Re^3 / x = y = 0\} \Rightarrow (0,0,z) \in S$$

$$S^\perp = \{(x, y, z) \in \Re^3 / z = 0\} \Rightarrow (x, y, 0) \in S^\perp$$



Propiedades

1. Si *S* es un subespacio de *V*, entonces $S^\perp$ también es subespacio de *V*.

2. Sea S un subespacio de V y $S^\perp$ el complemento ortogonal de S, se verifica que:

$$\boxed{S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}}$$

3. Si *V* es un espacio de dimensión finita *n* y si *S* es un subespacio de dimensión *r*, entonces la dimensión del complemento ortogonal es *n-r*. *V* es la suma directa de *S* y de su complemento ortogonal.

$$\boxed{\dim(S) + \dim(S^\perp) = \dim V}$$

Ortonormalización de bases- Proceso de Gram Schmidt

Sea $A = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ un conjunto linealmente independiente incluído en $\Re^n$**,** entonces existe al menos un conjunto $H = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ de $\Re^n$ siendo H ortonormal tal que los v_j son combinación lineal de los vectores de *A*.

Ejemplo:

$A=\{u_1,u_2,u_3\}$ siendo $u_1=(1,0,1),\ u_2=(0,1,1)$ y $u_3=(1,0,0)$

$$v_1=\frac{u_1}{\|u_1\|} \qquad v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) \qquad v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_2^{'}=u_2-(u_2.v_1).v_1$$

$$v_2^{'}=(0,1,1)-\left[(0,1,1).\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right].\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_2^{'}=(0,1,1)-\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right) \qquad \|v_2^{'}\|=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$v_2=\frac{v_2^{'}}{\|v_2^{'}\|} \qquad v_2=\frac{2}{\sqrt{6}}.\left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right) \qquad v_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$v_3^{'}=u_3-(u_3.v_1).v_1-(u_3.v_2).v_2$$

$$v_3^{'}=(1,0,0)-\left[(1,0,0).\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right].\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left[(1,0,0).\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right].\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$v_3^{'}=(1,0,0)-\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{6},-\frac{2}{6},-\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) \qquad \|v_3^{'}\|=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$v_3=\frac{v_3^{'}}{\|v_3^{'}\|} \qquad v_3=\sqrt{3}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) \qquad v_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Finalmente $H=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right);\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$