Mestrado em Engenharia Informática

Raquel Sofia Miranda da Costa **PG47600**

Métodos Formais em Engenharia de Software

TPC 1 - SAT solving

Exercício 1:

Primeiro, foi elaborado um conjunto adequado de variáveis proposicionais :

```
(1) B -> sócio com bigode
(2) C -> sócio casado
(3) R -> sócio de Ribeirão
(4) A -> camisola amarela
(5) D -> ir a jogos ao Domingo
```

De seguida, foram definidas as regras do enunciado como fórmulas proposicionais, recorrendo às variáveis anteriormente definidas:

- Todos os sócios que usam bigode são casados.

  $B \rightarrow C$

- Cada sócio do clube que não é de Ribeirão tem que usar camisola amarela.

  $\neg R \rightarrow A$

- Os sócios casados não podem assistir aos jogos ao Domingo.

  $C \rightarrow \neg D$

- Um sócio vai aos jogos ao Domingo se e só se é de Ribeirão.

  $D \leftrightarrow R$

- Cada sócio usa bigode ou não usa camisola amarela.

  $B \lor \neg A$

- Todos os sócios de Ribeirão usam bigode.

  $R \rightarrow B$

Seja $\Gamma = \{ B \rightarrow C , \neg R \rightarrow A , C \rightarrow \neg D , D \leftrightarrow R , B \vee \neg A , R \rightarrow B \}$

Convertendo as fórmulas proposicionais anteriores, que representam as restrições do modelo em estudo, para CNF, foi obtido o seguinte resultado:

$(B \rightarrow C) \wedge (\neg R \rightarrow A) \wedge (C \rightarrow \neg D) \wedge (D \leftrightarrow R) \wedge (B \vee \neg A) \wedge (R \rightarrow B) \equiv$

$(\neg B \vee C) \wedge (R \vee A) \wedge (\neg C \vee \neg D) \wedge (D \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow D) \wedge (B \vee \neg A) \wedge (\neg R \vee B) \equiv$

$\mathbf{(\neg B} \vee \mathbf{C)} \wedge \mathbf{(R} \vee \mathbf{A)} \wedge \mathbf{(\neg C} \vee \mathbf{\neg D)} \wedge \mathbf{(\neg D} \vee \mathbf{R)} \wedge \mathbf{(\neg R} \vee \mathbf{D)} \wedge \mathbf{(B} \vee \mathbf{\neg A)} \wedge \mathbf{(\neg R} \vee \mathbf{B)}$

Exercício 2:

Para codificar o problema num SAT solver, foi criado o ficheiro tpc1.cnf, onde foi escrito em formato DIMACS a fórmula proposicional convertida em CNF anteriormente :

```
#c MINISAT
#c (1) B -> sócio com bigode
#c (2) C -> sócio casado
#c (3) R -> sócio de Ribeirão
#c (4) A -> camisola amarela
#c (5) D -> ir a jogos ao Domingo


p cnf 5 7
-1 2 0
3 4 0
-2 -5 0
-5 3 0
-3 5 0
1 -4 0
-3 1 0
```

Após a invocação do solver **Minisat**, foi obtido o seguinte output:

```
============================[ Problem Statistics ]=============================
|                                                                             |
|  Number of variables:             5                                         |
|  Number of clauses:               7                                         |
|  Parse time:                   0.00 s                                       |
|  Eliminated clauses:           0.00 Mb                                      |
|  Simplification time:          0.00 s                                       |
|                                                                             |
============================[ Search Statistics ]==============================
| Conflicts |          ORIGINAL         |          LEARNT          | Progress |
```

```
|           |    Vars  Clauses Literals |    Limit  Clauses Lit/Cl |          |
===============================================================================
===============================================================================
restarts              : 1
conflicts             : 0              (-nan /sec)
decisions             : 1              (0.00 % random) (inf /sec)
propagations          : 4              (inf /sec)
conflict literals     : 0              (-nan % deleted)
Memory used           : 13.86 MB
CPU time              : 0 s

SATISFIABLE
```

Sendo que a solução calculada, presente no ficheiro OUT, é a seguinte:

```
SAT
1 2 -3 4 -5 0
```

ou seja, **B** = 1 , **C** = 1 , **R** = 0 , **A** = 1 , **D** = 0 .

O problema é então satisfazível, uma vez que foi atribuído um valor a todas as variáveis de forma a que as fórmulas proposicionais do modelo sejam verdadeiras. Sendo assim, é possível concluir que o conjunto de regras é consistente.

Exercício 3 :

Sendo Γ = { ¬B ∨ C , R ∨ A , ¬C ∨ ¬D , ¬D ∨ R , ¬R ∨ D , B ∨ ¬A , ¬R ∨ B }, e sendo L uma fórmula proposicional:

```
Γ ⊨ L   iff   Γ,L ⊨ ⊥
⋀Γ → L valid    iff    ⋀Γ ∧ ¬L unsatisfiable
```

a) "Quem usa bigode não pode ir ao jogo ao Domingo."

- L = B ⟶ ¬D ≡ **¬B** ∨ **¬D**
- Portanto para comprovar Γ ⊨ L, temos de verificar que Γ, ¬L UNSAT. Sendo assim, é necessário negar a fórmula L e em conjunto com as restrições representadas no conjunto Γ, verificar pelo Minisat se o modelo é UNSAT. Caso seja então pode-se dizer que L é consequência do modelo do problema, e que portanto, a afirmação é correta.
- Negando então L, resulta em: (¬B ∨ ¬D) ≡ B ∧ D

```
p cnf 5 9
-1 2 0
3 4 0
-2 -5 0
-5 3 0
-3 5 0
1 -4 0
-3 1 0
1 0
5 0
```

```
UNSAT
```

Tal como foi possível verificar através do Minisat, o modelo é insatisfazível. Logo podemos concluir que a afirmação é **correta**.

---

b) "Pode um membro de camisola amarela ser casado?"

- A anfirmação anterior é representada pela seguinte fórmula proposicional: **A** ∧ **C**
- Para mostrar que a afirmação é verdadeira, é necessário verificar através do Minisat, se o modelo, juntamente com esta fórmula, é satisfazível. Caso seja, é possível comprovar que existe pelo menos um sócio que satisfaça todas as condições do problema e também a afirmação da presente alínea.

```
p cnf 5 9
-1 2 0
3 4 0
-2 -5 0
-5 3 0
-3 5 0
1 -4 0
-3 1 0
4 0
2 0
```

```
SAT
```

Sendo assim, a afirmação é **verdadeira**, isto é, pelo menos um membro pode ser de camisola amarela e casado.

---

c) "Afinal o clube não pode ter sócios Ribeironenses."

- Fórmula proposicional: **¬R**
- Para verificar se a afirmação é verdadeira, é necessário negar a sua fórmula proposicional e verificar se o modelo é UNSAT. Desta forma é possível comprovar que a afirmação anterior é uma consequência do modelo em estudo.
- $\neg(\neg R) \equiv R$

```
p cnf 5 8
-1 2 0
3 4 0
-2 -5 0
-5 3 0
-3 5 0
1 -4 0
-3 1 0
3 0
```

```
UNSAT
```

Portanto, a afirmação é **verdadeira**.

---

d) "Os sócios casados têm todos bigode?"

- Fórmula proposicional: $\mathbf{C \rightarrow B}$
- Convertendo para CNF, é obtida a seguinte fórmula : $\neg C \lor B$
- Tal como foi feito anteriormente, é necessário verificar se a afirmação é consequência do modelo. Para tal, é necessário negar a fórmula:

  $\neg(\neg C \lor B) \equiv C \land \neg B$
- Segue-se, em formato DIMACS, o input dado:

```
p cnf 5 9
-1 2 0
3 4 0
-2 -5 0
-5 3 0
-3 5 0
1 -4 0
-3 1 0
2 0
-1 0
```

```
UNSAT
```

A afirmação é, portanto, **verdadeira**.

---

e) "Ao domingo nunca há sócios a assistir aos jogos."

- Fórmula proposicional: ¬D
- É necessário agora negar a fórmula e apresenta-la em formato CNF : ¬ (¬D) ≡ D
- Em formato DIMACS obtém-se o seguinte:

```
p cnf 5 8
-1 2 0
3 4 0
-2 -5 0
-5 3 0
-3 5 0
1 -4 0
-3 1 0
5 0
```

```
UNSAT
```

Desta forma, foi possível comprovar que a afirmação é consequência do modelo elaborado. Portanto é **verdadeira**.
