Espacios Vectoriales

Christian

24 de noviembre de 2014

Índice

Definición 1. *Un espacio vectorial consta de lo siguiente*

1. Un campo $\mathbb{F}$ de escalares
2. Un conjunto no vacio de objetos denominados vectores
3. Una operación de nominada suma o adiciòn que asocia a cada par de vectores $\alpha, \beta \in V$ un vector $\alpha + \beta \in V$ llamado suma de α y β que cumple lo siguiente.

Definición 2. *Un espacio vectorial, $\mathcal{B}$, es un conjunto de elementos $x, y, z,$ etc., llamados vectores satisfaciendo los siguientes axiomas.*

a Para cadapar x y y, de vectores en $\mathcal{B}$ corresponde un vector z, llamada la suma de x y y, $z = x + y$, de manera que

   a) La adciòn es conmutativa, $x + y = y + x$;
   b) La adiciòn es asociativa, $x + (y + z) = (x + y) + z$;
   c) Exite en $\mathcal{B}$ un unico vector 0 (llamado el origen) de tal manera que para todo x en $\mathcal{B}, x + 0 = 0$;
   d) Para cada $x \in \mathcal{B}$ corresponde a un unico vector, denotado por $-x$, con la propiedad $x + (-x) = 0$

Definición 3. *Se dice $\beta \in V$ es una combinacion lineal de Vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ si existen $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{F}$ tales que*

$$\beta = \sum_{i=1}^{n}$$

Definición 4. *Un subespacio de V en $\mathbb{F}$ es un subconjunto W de V que con las operaciones heredadas de V, es el mismo un e.v. sobre $\mathbb{F}$*

NOTA Si V es un e.v., V y $\{\vec{0}\}$ se denomina los subespacios triviales de V.

Proposición 1. *Un subconjunto no vacìo W de V es un subespacio vectorial ssi W es cerrado con respecto a las operaciones de V*

Definición 5. *Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en V y $\mathcal{L}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \{B | B$ es la combianciòn lineal de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ esto es un s.e.v. de V y se llama subespacio generado por α_i $1 \leq i \leq k$, o bien se dice que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ generan a $\mathcal{L}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$*

Proposición 2. *La interseciòn de cualquier colecciòn de subescaios de V es un subespacio de V*

OBSERVACIÒN La uniòn de subespacios no necesariamente es s.e.v.

Definición 6. *Sean S,T subespacios de V, definimos la suma de S y T como*

$$S + T = \{s + t | s \in S, t \in T\}$$

Proposición 3. *Si S y T son subesapcios de V, entonces S+T es s.e.v. de V*

Definición 7. *Si S y T son s.e.v. de V tales que S+T son s.e.v. de V tales que $S + T = V$ y $S \cap T = \{0\}$ decimos que Ves la suma directa de S y T y lo denotamos como sigue:*

$$V = S \oplus T$$

Proposición 4. *Si $V = S \oplus T$ entoces $\forall \alpha \in V \exists$n unicos s,t tales que*

$$\alpha = s + t$$

Definición 8. *Los vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ se dicen lienalmente independientes si $\exists$n escalares $a_1, \ldots, a_k$ no todos ceros tales que*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0$$

Definición 9. *Un conjunto A de vectores se dice l.i. si cualquier subconjunto finito de A es l.i.*

Definición 10. *Un conjunto A de vectores de dice l.d. si existe un subconjunto finito de A no vacìo que sea l.d.*