

GENERACIÓN 2014

MATEMÁTICAS CINVESTAV

Índice general

| | | |
|---|----------------------------------|----|
| | <i>I Algebra abstracta</i> | 5 |
| 1 | <i>Grupos</i> | 7 |
| 2 | <i>Homorfismos de grupo</i> | 13 |
| 3 | <i>Anillos</i> | 15 |
| 4 | <i>Dominios</i> | 17 |
| | <i>II Algebra Lineal</i> | 19 |
| 5 | <i>Espacios vectoriales</i> | 21 |
| 6 | <i>Operadores lineales</i> | 27 |
| 7 | <i>Funciones lineales</i> | 29 |
| 8 | <i>Espacios duales</i> | 31 |
| 9 | <i>Teorema de Caley-Hamilton</i> | 33 |

| | | |
|----|--|----|
| 10 | <i>Diagonalizacion</i> | 35 |
| 11 | <i>Forma canónica de Jordan</i> | 37 |
| 12 | <i>Vectores propios generalizados</i> | 39 |
| | <i>III Ecuaciones difereciales</i> | 41 |
| 13 | <i>Resolución de ecuaciones diferenciales</i> | 43 |
| 14 | <i>Existencia y unicidad de la solución de una ED</i> | 45 |
| 15 | <i>Solución aproximada</i> | 47 |
| 16 | <i>Relación entre soluciones aproximadas y exactas</i> | 49 |

Parte I

Algebra abstracta

1

Grupos

Definición de grupo

Definición Un conjunto no vacío G en el que está definida una operación $*$ tal que va a mapear el producto cartesiano y los va amando.

$$* : G \times G \rightarrow G$$

.

$$(a, b) \rightarrow (a * b)$$

Propiedad

1. $a * b \in G \forall a, b \in G$
2. $a * b(b * c) = (a * b) * c \forall a, b, c \in G$
3. $\exists e \in G \therefore a * e = e * a = a \forall e \in G$ "e" se le llama identidad o identidad de a

Ejemplo

1. \mathbb{Z}
2. Los racionales \mathbb{Q} con la suma
3. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con la multiplicación
4. $G = \{e\}$ con la operación $e * e = e \in G$
- 5.
6. El conjunto de Matrices $G(n, \mathbb{R})$ es un grupo NO CONMUTATIVO
 $A, b \in G(n, \mathbb{R})$
7. Son las matrices

Grupos Abelianos

Definicion Se dice que un grupo G es Abeliano si solo si $a * b = b * a$

Ejemplo El conjunto \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n (clase de equivalencia)

Ejercicios

1. Considere a \mathbb{Z} con el producto usual Es \mathbb{Z} un grupo?
2. Considere a \mathbb{Z}^* (*incluye* 0) con el producto usual es \mathbb{Z}^* ?
3. Sea $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si definimos $a \times b = a^2 b$ G es un Grupo?

Definiciones Orden de un grupo es el numero de elementos que tiene dicho Grupo y se denota $|G|$ Un Grupo G sera finito si tiene elementos finitos de elementos sea infinito

Ejemplos

Proposicion Si G es un grupo entonces

1. El elemento identidad es uinico
2. $\forall a \in G a^{-1}$ es unico
3. $\forall a, b \in G (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$
4. En general $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{-1} = (a_n^{-1} \cdot a_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}) \forall a \in G$

Proposicion Sea G un grupo $\forall a, b, c \in G$

1. $ab = ac \Rightarrow b = c$
2. $ba = ca \Rightarrow b = c$

Verificacion

1. $b = eb = (aa^{-1})b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = (a^{-1}a)c = ec = c$
2. $b = be = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = (ca)a^{-1} = c(aa^{-1}) = ce = c$

Subgrupo

Definición Conjunto no vacío H de un grupo G , se llama Subgrupo si H mismo forma un grupo respecto a la operación de G . Cuando H es subgrupo de G se denota $H < G$ o $G > H$.

Observación Todo grupo tiene automáticamente dos subgrupos triviales G & $\{e\}$

Proposición Un subconjunto no vacío $H \subset G$ es un subgrupo de G ssi H es cerrado respecto a la operación G & $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in a^{-1} \in H$
 \Rightarrow

Necesidad Como H es un subgrupo de G , H es un grupo y tiene inversa
 \Leftarrow

Suficiencia H es cerrado, no vacío & y el inverso esta en $H \forall a \in H = aa^{-1} (H \text{ cerrado}) \Rightarrow aa^{-1} = e \in H$
 Además para $a, b, c \in H$ $a(bc) = (ab)c$ $H \in G$

Ejercicio Sea $G = \mathbb{Z}$ con la suma usual & sea H el conjunto de enteros pares.

$$H = \{2n / n \in \mathbb{Z}\}$$

H es un subgrupo?

Sean $a, b \in H$ $a = 2q, q \in \mathbb{Z}$ $b = 2q', q' \in \mathbb{Z}$
 $a + b = 2q + 2q' = 2(q + q') = 2q''$

Subgrupo Normal

Definición 1. Un grupo N de G se dice que es un Subgrupo Normal de G denotado por:

$$N \triangle G$$

si $\forall g \in G$ y $\forall n \in N$, se tiene que:

$$gng^{-1} \in N \quad (1.1)$$

Lema 1. N es un subgrupo de G , si y solo si:

$$gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G \quad (1.2)$$

Demostración. I Si $gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$, entonces en particular:

$$gNg^{-1} \subseteq N$$

por lo que $gNg^{-1} \in N \quad \forall n \in N$, por lo tanto:

$$N \triangle G$$

II Si N es un subgrupo normal de G , entonces:

$$gNg^{-1} \in N$$

Si $g \in G \quad \forall n \in N$, entonces $gNg^{-1} \subseteq N$.

Por otro lado $g^{-1}Ng = g^{-1}N(g^{-1})^{-1} \subseteq N$, además:

$$N = eNe = g \left(g^{-1}Ng \right) g^{-1} = gNg^{-1}$$

por lo tanto:

$$gNg^{-1} = N$$

□

Lema 2. El subgrupo N de G es un subgrupo normal de G ($N \triangle G$), si y solo si, toda clase lateral izquierda de N en G es una clase lateral derecha de N en G .

Demostración. Sea $aH = \{ah | h \in H\}$ la clase lateral izquierda.

I Si N es un subgrupo normal de $G \quad \forall g \in G \quad \forall n \in N$

$$gNg^{-1} = N$$

entonces, podemos hacer lo siguiente:

$$gN = gNe = gN(g^{-1}g) = (gNg^{-1})g = Ng$$

entonces, toda clase lateral izquierda coincide con la clase lateral derecha.

II Ahora supongamos que las clases laterales coinciden, entonces:

$$gNg^{-1} = (gN)g^{-1} = Ngg^{-1} = N$$

por lo que podemos concluir que se trata de un subgrupo normal.

□

Definición 2. Denotaremos G/N al conjunto de las clases laterales derechas de N en G

$$G/N = \{Na | a \in G\} \quad (1.3)$$

Teorema 1. Si G es un grupo y N es un subgrupo normal de G , entonces G/N es también un grupo y se le denomina grupo cociente.

Demostración. I Cerradura

Prueba asignada a tarea

II Asociatividad

Prueba asignada a tarea

III Identidad

$$N = Ne \quad (1.4)$$

Verificamos para un elemento $x \in G/N \implies x = Na, a \in G$

$$xN = NaN = NNa = Na = x$$

$$Nx = NNa = Na = x \quad (1.5)$$

IV Inverso Sea $x \in G/N$ y sea $Na^{-1} \in G/N$, por verificar que $x^{-1} = Na^{-1}$, es el inverso de $x = Na$

$$xx^{-1} = NaNa^{-1} = NNa^{-1} = Ne = N \quad (1.6)$$

$$x^{-1}x = Na^{-1}Na = NNa^{-1}a = Ne = N \quad (1.7)$$

por lo tanto $Na^{-1} = x^{-1}$ es el inverso de x , por lo que podemos concluir que G/N es un grupo.

□

2

Homomorfismos de grupo

Definición de Homomorfismos

Definición 3. Una aplicación $\varepsilon : G \rightarrow \bar{G}$ es un homomorfismo si G es un grupo con operación (\bullet) & \bar{G} es un grupo con operación (\blacksquare)

Se dice que es un homomorfismo si para $a, b \in G$ cualesquiera se tiene que:

$$\varepsilon(a \bullet b) = \varepsilon(a) \blacksquare \varepsilon(b) \quad (2.1)$$

Ejemplo 1. $G = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ bajo la multiplicación & sea $\bar{G} = \mathbb{R}$ bajo la adición definimos $\varepsilon : G \rightarrow \bar{G}$ como $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \Rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \ln(r)$ sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ t.q. $\varepsilon(r_1 \bullet r_2) = \ln(r_1 r_2) = \ln(r_1) + \ln(r_2) = \varepsilon(r_1) + \varepsilon(r_2)$ por tanto ε es un homomorfismo.

Lema 3. Supongamos que G es un grupo & que N es un subgrupo de G
Definamos la siguiente aplicación

$$\varepsilon : G \rightarrow G \setminus N$$

entonces ε es

$$x \rightarrow N_x \quad (2.2)$$

un Homomorfismo

Definición 4. Un homomorfismo $\varepsilon : G \rightarrow \bar{G}$ se dice que :

a Monorfismo si es 1-1 (inyectiva)

b Epimorfismo si es suprayectiva

c Isomorfismo si es biyectiva

Definición 5. Si $\varepsilon : G \rightarrow \bar{G}$ es un isomorfismo, decimos que G & \bar{G} son isomorfos & escribimos

$$G \cong \bar{G} \quad (2.3)$$

Proposición 1. Si $\varepsilon : G \rightarrow \dot{G}$ es un homomorfismo entonces

$$\text{Im}\varepsilon < \dot{G} \quad (2.4)$$

donde

$$\text{Im}\varepsilon = \{y \in \dot{G} \mid \varepsilon(x) = y, x \in G\} \subset \dot{G} \quad (2.5)$$

Demostración. Sean

$$y_1, y_2 \in \text{Im}\varepsilon \Rightarrow y_1 = \varepsilon(x_1) \text{ y } y_2 = \varepsilon(x_2) \in \dot{G}$$

$$x_1, x_2 \in G$$

$$y_1 y_2 = \varepsilon x_1 \varepsilon x_2 = \varepsilon(x_1 x_2) \Rightarrow y_1, y_2 \in \text{Im}\varepsilon$$

□

3

Anillos

Definiciones

Definición 6. Un conjunto no vacío R es un anillo si tiene definidas dos operaciones $(+, \cdot)$ tales que:

- a) $a, b \in R \implies a + b \in R$
- b) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in R$
- c) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in R$
- d) $\exists 0 \in R$ tal que $a + 0 = a \quad \forall a \in R$
- e) $\exists b \in R$ tal que $a + b = 0 \quad \forall a \in R$

De estas propiedades podemos concluir que R es un grupo abeliano con respecto a $(+)$, pero aun tenemos lo siguiente:

- 1) $a, b \in R \implies a \cdot b \in R$
- 2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in R$

De estas propiedades podemos concluir que R es un semigrupo con respecto a (\cdot) , y además:

- I) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in R$
- II) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \quad \forall a, b, c \in R$

Definición 7. Diremos que un anillo R es un anillo con identidad si existe un $1 \in R$, con $1 \neq 0$, tal que:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a \quad \forall a \in R \quad (3.1)$$

Definición 8. Un anillo R es un anillo conmutativo si:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in R \quad (3.2)$$

Definición 9. Sea R un anillo y $a \in R$ con $a \neq 0$, diremos que a es divisor de cero, si existe $b \in R$ con $b \neq 0$ tal que:

$$a \cdot b = 0 \quad (\text{divisor por la derecha}) \quad (3.3)$$

o bien si existe un $c \in R$ con $c \neq 0$, tal que:

$$c \cdot a = 0 \quad (\text{divisor por la izquierda}) \quad (3.4)$$

Definición 10. Sea R un anillo con identidad. Diremos que R es un anillo con división si existe $b \in R$ tal que:

$$a \cdot b = b \cdot a = 1 \quad \forall 0 \neq a \in R \quad (3.5)$$

Definición 11. Un campo es un anillo con división, que además es conmutativo, es decir, un campo es un grupo abeliano con respecto a $(+)$ y a (\cdot) .

4

Dominios

Parte II

Algebra Lineal

5

Espacios vectoriales

Espacios Vectoriales

Definición 12. Un conjunto no vacío V se dice que es un espacio vectorial sobre un campo F si V es un grupo abeliano respecto a una operación que se denota por $+$, y si para todo $\alpha \in F$, $v \in V$ está definido un elemento, escrito como αv , de V con las siguientes propiedades:

1. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
2. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
3. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
4. $1v = v$

Una operación denominada multiplicación por escalares que asocia a cada escalar $c \in F$, un vector $c\alpha \in V$ de manera que:

- a $(c_1 c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$
- b $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta \forall c \in F, \alpha, \beta \in V$
- c $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha \forall c_1, c_2 \in F, \alpha \in V$
- d $1\alpha = \alpha \forall \alpha \in V$

Definición 13. Sea F un campo & sea $n \in \mathbb{N}$

$$F^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in F\} \text{ Si } c\alpha = (x_1, \dots, x_n), \beta = (y_1, \dots, y_n) \quad (5.1)$$

Decimos

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \text{ \& } c\alpha = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \forall c \in F$$

Proposición 2. Sea V un espacio vectorial sobre F entonces $\forall \alpha \in V$ se tiene que

$$0\alpha = \vec{0}$$

$$0\alpha(0 + 0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha - 0\alpha + 0\alpha = -0\alpha + 0$$

$$0 = 0\alpha$$

Subespacio

Definición 14. Un subespacio de un espacio vectorial V sobre F es un subconjunto W de V que con las operaciones heredadas de W es el mismo espacio vectorial sobre F .

Nota : si V es un e.v. , $V = \{\vec{0}\}$ se denomina subespacio triviales de V

Proposición 3. Un subconjunto no vacío W de V es un subespacio vectorial ssi W es cerrado con respecto a las operaciones de V

→ Si W es s.e.v. de V por definición es e.v. y sus operaciones son cerradas. ←

Combinación lineal

Definición 15. Se dice que $\beta \in V$ es una combinación lineal de vectores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ existen $c_1, \dots, c_n \in F$ tales que

$$\beta = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$$

Definición 16. Sea $\alpha_1 \dots \alpha_k$ en V & $\mathcal{L}(\alpha_1 \dots \alpha_k) = \{\beta \mid \beta \text{ es combinación lineal de } \alpha_1 \dots \alpha_k \}$ esto es un s.e.v. de V & se llama subespacio generado por $\alpha_i \leq i = k$ o bien se dice que $\alpha_1 \dots \alpha_k$ genera a \mathcal{L}

En general

Si $A \neq \emptyset$ & si $A \subset V$ entonces $\mathcal{L}(A) = \{\beta \mid \beta \text{ es combinación lineal de los elementos de } A\}$

Proposición 4. La intersección de cualquier colección de subespacio de V es un subespacio de V

Demostración. Sea $\{W_\alpha \mid \alpha \in I\}$ & sea $W \triangleq \bigcap W_\alpha$

- I w no es vacío $\in W$ pues $\vec{0} \in W_\alpha \forall \alpha \in I$
- II $\alpha, \beta \in W \rightarrow \alpha, \beta \in W_\alpha \forall \alpha \in I \rightarrow \alpha + \beta \in W_\alpha \forall \alpha \in I \rightarrow \alpha + \beta \in W$
- III Sea $\beta \in W$ & sea $r \in \mathcal{F} \rightarrow r, \beta \in W_\alpha \forall \alpha \in I \rightarrow r, \beta \in W$

□

Observación 1. La unión de los subespacios no necesariamente es espacio vectorial

Ejemplo 2. En \mathbb{R}^2 definimos

$$W_1 = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$W_2 = \{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, 0) + (0, x_2) = (x_1, x_2) \notin W_1 \cup W_2$$

$$W_1 \cup W_2 = \{(x_1, 0), (0, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Suma directa

Definición 17. Sean S, T subespacios de V definimos la suma de S & T como

$$S + T = \{s + t | s \in S, t \in T\}$$

Proposición 5. Si S & T son subespacios entonces $S + T$ es un subespacio vectorial de V

Tarea pendiente

Definición 18. Si S & T son subespacios V de V tales que $S + T = V$ & $S \cap T = \{0\}$ decimos que V es la suma directa

Demostración. Sea s, t, s', t' que estan en S & T respectivamente & sea $\alpha \in V$ □

6

Operadores lineales

7

Funciones lineales

8

Espacios duales

9

Teorema de Caley-Hamilton

10

Diagonalizacion

11

Forma canónica de Jordan

12

Vectores propios generalizados

Parte III

Ecuaciones diferenciales

13

Resolución de ecuaciones diferenciales

14

Existencia y unicidad de la solución de una ED

15

Solución aproximada

16

Relación entre soluciones aproximadas y exactas