

GENERACIÓN 2014

MATEMATICAS CINVES- TAV

Índice general

I Algebra abstracta 5

1 Grupos 7

2 Homomorfismos de grupo 11

3 Anillos 13

4 Dominios 15

II Algebra Lineal 17

5 Espacios vectoriales, Isomorfismos 19

6 Operadores lineales 21

7 Funciones lineales 23

8 Espacios duales 25

9 Teorema de Caley-Hamilton 27

| | | |
|----|--|----|
| 10 | <i>Diagonalizacion</i> | 29 |
| 11 | <i>Forma canónica de Jordan</i> | 31 |
| 12 | <i>Vectores propios generalizados</i> | 33 |
| | <i>III Ecuaciones difereciales</i> | 35 |
| 13 | <i>Resolución de ecuaciones diferenciales</i> | 37 |
| 14 | <i>Existencia y unicidad de la solución de una ED</i> | 39 |
| 15 | <i>Solución aproximada</i> | 41 |
| 16 | <i>Relación entre soluciones aproximadas y exactas</i> | 43 |

Parte I

Algebra abstracta

1

Grupos

Definición de grupo

Definición Un conjunto no vacío G en el que está definida una operación $*$ tal que va a mapear el producto cartesiano y los va amando.

$$* : G \times G \rightarrow G$$

.

$$(a, b) \rightarrow (a * b)$$

Propiedad

1. $a * b \in G \forall a, b \in G$
2. $a * b(b * c) = (a * b) * c \forall a, b, c \in G$
3. $\exists e \in G \therefore a * e = e * a = a \forall e \in G$ "e" se le llama identidad o identidad de a

Ejemplo

1. \mathbb{Z}
2. Los racionales \mathbb{Q} con la suma
3. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con la multiplicación
4. $G = \{e\}$ con la operación $e * e = e \in G$
- 5.
6. El conjunto de Matrices $G(n, \mathbb{R})$ es un grupo NO CONMUTATIVO
 $A, b \in G(n, \mathbb{R})$
7. Son las matrices

Grupos Abelianos

Definicion Se dice que un grupo G es Abeliano si solo si $a * b = b * a$

Ejemplo El conjunto \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n (clase de equivalencia)

Ejercicios

1. Considere a \mathbb{Z} con el producto usual Es \mathbb{Z} un grupo?
2. Considere a \mathbb{Z}^* (*incluye* 0) con el producto usual es \mathbb{Z}^* ?
3. Sea $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si definimos $a \times b = a^2 b$ G es un Grupo?

Definiciones Orden de un grupo es el numero de elementos que tiene dicho Grupo y se denota $|G|$ Un Grupo G sera finito si tiene elementos finitos de elementos sea infinito

Ejemplos

Proposicion Si G es un grupo entonces

1. El elemento identidad es uinico
2. $\forall a \in G a^{-1}$ es unico
3. $\forall a, b \in G (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$
4. En general $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{-1} = (a_n^{-1} \cdot a_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}) \forall a \in G$

Proposicion Sea G un grupo $\forall a, b, c \in G$

1. $ab = ac \Rightarrow b = c$
2. $ba = ca \Rightarrow b = c$

Verificacion

1. $b = eb = (aa^{-1})b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = (a^{-1}a)c = ec = c$
2. $b = be = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = (ca)a^{-1} = c(aa^{-1}) = ce = c$

Subgrupo

Definición Conjunto no vacío H de un grupo G , se llama Subgrupo si H mismo forma un grupo respecto a la operación de G . Cuando H es subgrupo de G se denota $H < G$ o $G > H$.

Observación Todo grupo tiene automáticamente dos subgrupos triviales G & $\{e\}$

Proposición Un subconjunto no vacío $H \subset G$ es un subgrupo de G ssi H es cerrado respecto a la operación G & $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in a^{-1} \in H$
 \Rightarrow

Necesidad Como H es un subgrupo de G , H es un grupo y tiene inversa
 \Leftarrow

Suficiencia H es cerrado, no vacío & y el inverso esta en $H \forall a \in H = aa^{-1} (H \text{ cerrado}) \Rightarrow aa^{-1} = e \in H$
 Además para $a, b, c \in H$ $a(bc) = (ab)c$ $H \in G$

Ejercicio Sea $G = \mathbb{Z}$ con la suma usual & sea H el conjunto de enteros pares.

$$H = \{2n / n \in \mathbb{Z}\}$$

H es un subgrupo?

Sean $a, b \in H$ $a = 2q, q \in \mathbb{Z}$ $b = 2q', q' \in \mathbb{Z}$
 $a + b = 2q + 2q' = 2(q + q') = 2q''$

Subgrupo Normal

Definición 1. Un grupo N de G se dice que es un Subgrupo Normal de G denotado por:

$$N \triangle G$$

si $\forall g \in G$ y $\forall n \in N$, se tiene que:

$$gng^{-1} \in N \quad (1.1)$$

Lema 1. N es un subgrupo de G , si y solo si:

$$gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G \quad (1.2)$$

Demostración. I Si $gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$, entonces en particular:

$$gNg^{-1} \subseteq N$$

por lo que $gNg^{-1} \in N \quad \forall n \in N$, por lo tanto:

$$N \triangle G$$

II Si N es un subgrupo normal de G , entonces:

$$gNg^{-1} \in N$$

Si $g \in G \quad \forall n \in N$, entonces $gNg^{-1} \subseteq N$.

Por otro lado $g^{-1}Ng = g^{-1}N(g^{-1})^{-1} \subseteq N$, además:

$$N = eNe = g \left(g^{-1}Ng \right) g^{-1} = gNg^{-1}$$

por lo tanto:

$$gNg^{-1} = N$$

□

2

Homomorfismos de grupo

Definición

Un mapeo ϕ de un grupo G en un grupo \bar{G} se dice ser un homomorfismo si para todo $a, b \in G$, $\phi(a, b) = \phi(a)\phi(b)$

Proposición Sea $\varepsilon : G \rightarrow \bar{G}$ homomorfismo. Entonces ε es un monomorfismo ssi $\ker \varepsilon = \{0\}$ ($e = 0 \in G$)

Verificación \Leftarrow

Supongamos que $\ker \varepsilon = \{0\}$ por verificar que ε es monomorfismo

\Rightarrow

Supongamos que $\varepsilon(x_1) = \varepsilon(x_2)$

3

Anillos

4

Dominios

Parte II

Algebra Lineal

5

Espacios vectoriales, Isomorfismos

6

Operadores lineales

7

Funciones lineales

8

Espacios duales

9

Teorema de Caley-Hamilton

10

Diagonalizacion

11

Forma canónica de Jordan

12

Vectores propios generalizados

Parte III

Ecuaciones diferenciales

13

Resolución de ecuaciones diferenciales

14

Existencia y unicidad de la solución de una ED

15

Solución aproximada

16

Relación entre soluciones aproximadas y exactas