GENERACIÓN 2014

MATEMÁTICAS CINVESTAV

Índice general

Parte I

Algebra abstracta

1
Grupos

Definiciòn de grupo

Definiciò Un conjunto no vacio G en el que esta definida una operacion $*$ tal que va a mapear el producto cartesiano y los va amandar.

$$*: G \times G \to G$$

.

$$(a, b) \to (a * b)$$

Propiedad

1. $a * b \in G \forall a, b \in G$
2. $a * b(b * c) = (a * b) * c \forall a, b, c \in G$
3. $\exists e \in G \therefore a * e = e * a = a \forall e \in G$ "e" se le llama identidad o identidad de a

Ejemplo

1. $\mathbb{Z}$
2. Los racionales $\mathbb{Q}$ con la suma
3. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\{0\}$ con la multiplicacion
4. $G = \{e\}$ con la opercaion $e * e = e \in G$
5.
6. El conjunto de Matrices $G(n, \mathbb{R})$ es un grupo NO CONMUTATIVO $A, b \in G(n, \mathbb{R})$
7. Son las matrices

Grupos Abelianos

Definicion Se dice que un grupo G es <u>Abeliano</u> si solo si $a * b = b * a$

Ejemplo El conjunto $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$ (clase de equivalencia)

Ejercicios

1. Considere a $\mathbb{Z}$ con el producto usual Es $\mathbb{Z}$ un grupo?
2. Considere a $\mathbb{Z}^*(incluye 0)$ con el producto usual es $\mathbb{Z}^*$?
3. Sea $G = \mathbb{R}\diagdown\{0\}$ si definimos $a \times b = a^2b$ G es un Grupo?

Definiciones Orden de un grupo es el numero de elementos que tiene dicho Grupo y se denota $|G|$ Un Grupo G sera finito si tiene elementos finitos de elementos sea infinito

Ejemplos

Proposicion Si G es un grupo entonces

1. El elemento identidad es uinico
2. $\forall a \in G a^{-1}$ es unico
3. $\forall a, b \in G (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
4. En general $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n)^{-1} = (a_n^{-1} \cdot a_{n-1}^{-1} \cdot \ldots a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}) \forall a \in G$

Proposicion Sea G un grupo $\forall a, b, c \in G$

1. $ab = ac \Rightarrow b = c$
2. $ba = ca \Rightarrow b = c$

Verificacion

1. $b = eb = (aa^{-1})b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = (a^{-1}a)c = ec = c$
2. $b = be = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = (ca)a^{-1} = c(aa^{-1}) = ce = c$

Subgrupo

Definiciòn Conjunto no vacìo H de un grupo G, se llama Subgrupo si H mismo forma un grupo respecto a la operaciò de G. Cuando H es subgrupo de G se denota $H < G$ ò $G > H$.

Observaciòn Todo grupo tiene autòmaticamente dos subgrupos tribiales $G\&\{e\}$

Propociòn Un subconjunto no vaio $H \subset G$ es un subgrupo de G ssi H es cerrado respecto a la operaciòn G & $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in a^{-1} \in H$

$\Rightarrow$

Necesidad Como H es un subgrupo de G, H es un grupo y tiene inversa

$\Leftarrow$

Suficiencia H es cerrado, no vacio & y el inverso esta en $H \forall a \in H = aa^{-1}(Hescerrado) \Rightarrow aa^{-1} = e \in H$

Ademas para $a, b, c \in H$ $a(bc) = (ab)c$ $H \in G$

Ejercicio Sea $G = \mathbb{Z}$ con la suma usual & sea H el conjunto de enteros pares.

$$H = \{2n/n \in \mathbb{Z}\}$$

H es un subgrupo?

Sean a,b∈H $a = 2q$, $q \in \mathbb{Z}$ $b = 2\acute{q}$ $\acute{q} \in \mathbb{Z}$

$a + b = 2q + 2q = 2(q + q') = 2q''$

Subgrupo Normal

Definición 1.1. *Un grupo N de G se dice que es un Subgrupo Normal de G denotado por:*

$$N \triangle G$$

si $\forall g \in G$ y $\forall n \in N$, se tiene que:

$$gng^{-1} \in N \tag{1.1}$$

Lema 1.1. *N es un subgrupo de G, si y solo si:*

$$gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G \tag{1.2}$$

Demostración. I) Si $gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$, entonces en particular:

$$gNg^{-1} \subseteq N$$

por lo que $gNg^{-1} \in N \quad \forall n \in N$, por lo tanto:

$$N \triangle G$$

II) Si N es un subgrupo normal de G, entonces:

$$gNg^{-1} \in N$$

Si $g \in G \quad \forall n \in N$, entonces $gNg^{-1} \subseteq N$.

Por otro lado $g^{-1}Ng = g^{-1}N(g^{-1})^{-1} \subseteq N$, ademas:

$$N = eNe = g\left(g^{-1}Ng\right)g^{-1} = gNg^{-1}$$

por lo tanto:

$$gNg^{-1} = N$$

□

Lema 1.2. *El subgrupo N de G es un subgrupo normal de G ($N \triangle G$), si y solo si, toda clase lateral izquierda de N en G es una clase lateral derecha de N en G.*

Demostración. Sea $aH = \{ah | h \in H\}$ la clase lateral izquierda.

I) Si N es un subgrupo normal de $G \quad \forall g \in G \quad \forall n \in N$

$$gNg^{-1} = N$$

entonces, podemos hacer lo siguiente:

$$gN = gNe = gN\left(g^{-1}g\right) = \left(gNg^{-1}\right)g = Ng$$

entonces, toda clase lateral izquierda coincide con la clase lateral derecha.

II) Ahora supongamos que las clases laterales coinciden, entonces:

$$gNg^{-1} = (gN)\,g^{-1} = Ngg^{-1} = N$$

por lo que podemos concluir que se trata de un subgrupo normal.

□

Definición 1.2. *Denotaremos G/N al conjunto de las clases laterales derechas de N en G*

$$G/N = \{Na | a \in G\} \tag{1.3}$$

Teorema 1.1. *Si G es un grupo y N es un subgrupo normal de G, entonces G/N es tambien un grupo y se le denomina grupo cociente.*

Demostración. I) Cerradura

Prueba asignada a tarea

II) Asociatividad

Prueba asignada a tarea

III) Identidad

$$N = Ne \tag{1.4}$$

Verificamos para un elemento $x \in G/N \implies x = Na,\ a \in G$

$$xN = NaN = NNa = Na = x$$

$$Nx = NNa = Na = x \tag{1.5}$$

IV) Inverso Sea $x \in G/N$ y sea $Na^{-1} \in G/N$, por verificar que $x^{-1} = Na^{-1}$, es el inverso de $x = Na$

$$xx^{-1} = NaNa^{-1} = NNaa^{-1} = Ne = N \tag{1.6}$$
$$x^{-1}x = Na^{-1}Na = NNa^{-1}a = Ne = N \tag{1.7}$$

por lo tanto $Na^{-1} = x^{-1}$ es el inverso de x, por lo que podemos concluir que G/N es un grupo.

$\square$

2

Homorfismos de grupo

Definicion de Homomorfismos

Definición 2.1. *Una aplicaion $\varepsilon : G \to \bar{G}$ G es un grupo con operacion ($\bullet$) & $\bar{G}$ es un grupo con operacion ($\blacksquare$)*

Se dice que es un homomorfismo si para $a, b \in G$ cuales quiera se tiene que:

$$\varepsilon(a \bullet b) = \varepsilon(a) \blacksquare \varepsilon(b) \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.1. $G = \mathbb{R}^+ \diagdown \{0\}$ *bajo la multiplicacion & sea* $\bar{G} = \mathbb{R}$ *bajo la adicion definimos* $\varepsilon : G \to \bar{G}$ *como* $\varepsilon : \mathbb{R}^{+ \diagdown \{0\}} \Rightarrow \mathbb{R} \to ln(r)$ *sean* $r_1 r_2 \in \mathbb{R}^{+ \diagdown \{0\}}$ *t.q.* $\varepsilon(r_1 \bullet r_2) = ln(r_1 r_2) = ln(r_1) + ln(r_2) = \varepsilon(r_1) + \varepsilon(r_1)$ *por tanto ε es un homomorfismo.*

Lema 2.1. *Supongamos que G es un grupo & que N es un subgrupo de G*

Definamos la siguiente aplicaciòn

$$\varepsilon : G \to G \diagdown N$$

entonces ε es

$$x \to N_x \tag{2.2}$$

un Homomorfismo

Definición 2.2. *Un homomorfismo $\varepsilon : G \to \acute{G}$ se dice que :*

a *Monorfismo si es 1-1 (inyectiva)*

b *Epimorfismo si es suprayectiva*

c *Isomorfismo si es biyectiva*

Definición 2.3. *Si $\varepsilon : G \to \acute{G}$ es un isomorfismo, decimos que G & $\acute{G}$ son isomorfos & escribimos*

$$G \cong \acute{G} \tag{2.3}$$

Proposición 2.1. *Si* $\varepsilon : G \to \acute{G}$ *es un homomorfismo entonces*

$$Im\varepsilon < \acute{G} \tag{2.4}$$

dondela

$$Im\varepsilon = \{y \in \acute{G} | \varepsilon_{(x)} = y, x \in G\} \subset G \tag{2.5}$$

Demostración. 1 Sean

$$y_1, y_2 \in Im\varepsilon \Rightarrow y_1 = \varepsilon(x_1)\&y_2 = \varepsilon(x_2) \in \acute{G}$$

$$x_1, x_2 \in G$$

$$y_1, y_2 = \varepsilon x_1 \varepsilon x_2 = \varepsilon(x_1 x_2 \Rightarrow y_1, y_2 \in Im\varepsilon$$

□

3
Anillos

Definiciones

Definición 3.1. *Un conjunto no vacio R es un anillo si tiene definidas dos operaciones* $(+, \cdot)$ *tales que:*

a) $a, b \in R \implies a + b \in R$

b) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in R$

c) $a + b = b + a \quad \forall a, b, \in R$

d) $\exists 0 \in R$ *tal que* $a + 0 = a \quad \forall a \in R$

e) $\exists b \in R$ *tal que* $a + b = 0 \quad \forall a \in R$

De estas propiedades podemos concluir que R es un grupo abeliano con respecto a $(+)$*, pero aun tenemo lo siguiente:*

1) $a, b \in R \implies a \cdot b \in R$

2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in R$

De estas propiedades podemos concluir que R es un semigrupo con respecto a $(\cdot)$*, y ademas:*

I*)* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in R$

II*)* $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \quad \forall a, b, c \in R$

Definición 3.2. *Diremos que un anillo R es un anillo con identidad si existe un* $1 \in R$*, con* $1 \neq 0$*, tal que:*

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a \quad \forall a \in R \tag{3.1}$$

Definición 3.3. *Un anillo R es un anillo conmutativo si:*

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in R \tag{3.2}$$

Definición 3.4. *Sea R un anillo y* $a \in R$ *con* $a \neq 0$*, diremos que a es divisor de cero, si existe* $b \in R$ *con* $b \neq 0$ *tal que:*

$$a \cdot b = 0 \quad \textit{(divisor por la derecha)} \tag{3.3}$$

o bien si existe un $c \in R$ *con* $c \neq 0$*, tal que:*

$$c \cdot a = 0 \quad \textit{(divisor por la izquierda)} \tag{3.4}$$

Definición 3.5. *Sea R un anillo con identidad. Diremos que R es un anillo con división si existe* $b \in R$ *tal que:*

$$a \cdot b = b \cdot a = 1 \quad \forall 0 \neq a \in R \tag{3.5}$$

Definición 3.6. *Un campo es un anillo con división, que ademas es conmutativo, es decir, un campo es un grupo abeliano con respecto a* $(+)$ *y a* $(\cdot)$.

Definición 3.7. *Un anillo conmutativo con identidad es un dominio entero si:*

$$a \cdot b = 0 \implies a = 0ob = 0 \tag{3.6}$$

Esto quiere decir que no existen divisores de cero.

Corolario 3.1. *Si* p *es primo, entonces* $\mathbb{Z}_p$ *es campo.*

Proposición 3.1. *Sea* R *un anillo y sean* $a, b \in R$*, entonces:*

a) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

b) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

c) $(-a)(-b) = (-(-a)) \cdot b = a \cdot b$

d) $1 \in R \implies (-1) \cdot a = -a$

Demostración.

$$a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \implies 0 = a \cdot 0$$

$$a \cdot (-b) + a \cdot b = a \cdot (-b + b) = a \cdot (0) = 0 \implies a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

$$\begin{aligned}(-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot (b) = (-a) \cdot (-b + b) = (-a) \cdot (0) = 0 \\ \implies (-a) \cdot (-b) = -(-a) \cdot (b) = (-(-a)) \cdot (b)\end{aligned}$$

□

Ideales, Homomorfismos y Anillos

Definición 3.8. *Una función $\varphi : R \to R'$ es un homomorfismo si:*

1. $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a + b)$
2. $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(a \cdot b)$

Definición 3.9. *Sea $\varphi : R \to R'$ homomorfismo de anillos, entonces:*

1. *φ es monomorfismo si es inyectivo*
2. *φ es epimorfismo si es suprayectivo*
3. *φ es isomorfismo si es biyectivo*

Definición 3.10. *El nucleo de φ es $\ker\varphi = \{x \in R \mid \varphi(x) = 0\}$*

Proposición 3.2. *Sea $\varphi : R \to R'$, es un homomorfismo de anillos, entonces:*

1. *$\ker\varphi$ es un subgrupo aditivo*
2. $rk, kr \in \ker\varphi \quad \forall k \in \ker\varphi \quad r \in R$

Demostración. Sea $k \in \ker\varphi$ y $r \in R$

$$\begin{aligned} \varphi(rk) &= \varphi(r) \cdot \varphi(k) \\ &= \varphi(r) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(kr) &= \varphi(k) \cdot \varphi(r) \\ &= 0 \cdot \varphi(r) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore kr, rk \in \ker\varphi$$

□

Definición 3.11. *Sea R un anillo e I un subconjunto de R, se dice que es un ideal de R si:*

i) *I es un subgrupo aditivo de R*

ii) *Dados $r \in R$ y $a \in I$, tenemos que $ra \in I$ y $ar \in I$*

a esto se le conoce como propiedad de absorción.

Corolario 3.2. *Si $\varphi : R \to R'$ es un homomorfismo, entonces $k = \ker\varphi$ es un ideal de R.*

Definición 3.12. *Sea R anillo e I un ideal de R, entonces R/I (anillo cociente) es un grupo con la suma de clases de equivalencia.*

$$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I \quad \forall a,b\in R \tag{3.7}$$

Definición 3.13. *Definimos el producto como:*

$$(a+I)(b+I)=ab+I \quad \forall a,b\in R \tag{3.8}$$

Observación 3.1. *Sea R un anillo, tenemos que $\{0\}$ y R son ideales de R y triviales.*

Definición 3.14. *Si I es un ideal de R e $I\neq R$, decimos que I es un ideal propio.*

Observación 3.2. *Sea R un anillo con identidad e I ideal de R tal que $1\in I$, entonces $I=R$.*

Demostración. Por definicion $I\subseteq R$, por lo que solo resta demostrar que $R\subset I$.

Sea $a\in R$, entonces:

$$a=a\cdot I \quad 1\in I \quad a\in R$$

por lo tanto $a\in I$, $\therefore R\subseteq I$. □

Definición 3.15. *Sea R anillo conmutativo con identidad. Un ideal principal, es un ideal de la forma (a), para algun $a\in R$.*

Definición 3.16. *Sea R un dominio enterio, diremos que R es un dominio de ideales principales, si todos los ideales de R son principales.*

Observación 3.3. *Sean I,J ideales del anillo R, si definimos:*

$$I+J=\{a+b \mid a\in I, b\in J\} \tag{3.9}$$

Verificar que:

1. *$I+J$ es un ideal*
2. *$I\cap J$ es un ideal*
3. *$IJ := \{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \mid n\in\mathbb{N}, a\in I, b\in J\}$ es un ideal.*

Verificación asignada a tarea.

Observación 3.4. *Tenemos que R/I es un anillo con la suma y el producto correspondientes:*

$$(a+I)+(b+I) := (a+b)+I \tag{3.10}$$
$$(a+I)\cdot(b+I) := (a\cdot b)+I \tag{3.11}$$

entonces la función:

$$\begin{aligned} \varphi \quad := \quad & R \to R/I \\ & a \to a + I \end{aligned}$$

es un epimorfismo Verificación asignada a tarea.

4
Dominios

Parte II

Algebra Lineal

5
Espacios vectoriales

Espacios Vectoriales

Definición 5.1. *Un conjunto no vaciò V se dice que es un espacio vectorial sobre un campo $\mathcal{F}$ si $\mathcal{V}$ es un grupo abeliano respecto a una operacaiòn que se denota por $+$, y si para todo $\alpha \in F$, $v \in V$ està definido un elemento, escrito como αv, de V con las siguiente propiedades:*

1. $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$
2. $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
3. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
4. $1v = v$

Una opercaiòn denominada multiplicaciòn por escalares que asocia a cada escalar $c \in F$, un vector $c\alpha \in V$ de manera que:

a $(c_1 c_2)\alpha = c1(c2\alpha)$

b $c(\alpha+\beta) = c\alpha + c\beta \forall c \in F\alpha, \beta \in V$

c $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha \forall c_1, c_2 \in F\alpha \in V$

d $1\alpha = \alpha \forall \alpha \in V$

Definición 5.2. *Sea F un campo & sea $n \in N$*

$$F^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in F\} \text{ Si } c\alpha = (x_1, \ldots, x_n)\ ,\ \beta = (y_1, \ldots, y_n) \tag{5.1}$$

Decimos

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \ \&\ c\alpha(cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) \ \forall\ c \in F$$

Proposición 5.1. *Sea V un espacio vectorial sobre F entoces $\forall\ \alpha \in V$ se tiene que*

$$0\alpha = \overrightarrow{0}$$

$$0\alpha(0+0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha \ \ -0\alpha + 0\alpha = -0\alpha + 0$$

$$0 = 0\alpha$$

Subespacio

Definición 5.3. *Un subespacio de un espacio vectorial V sobre F es un subconjunto W de V que con las operaciones heredadas de W es el mismo espacio vectorial sobre F.*

Nota : si V es un e.v. , $V = \{\vec{0}\}$ se denomina subespacio triviales de V

Proposición 5.2. *Un subconjuto no vacio W de V es un subespacio vectorial ssi W es cerrado con respectoa los operaciones de V*

$\rightarrow$ Si W es s.e.v. de V por defenicìon es e.v. y sus operaciones son cerradas. $\leftarrow$

Combinacion lineal

Definición 5.4. *Se dice que $\beta \in V$ es una combinaciòn lineal de vetores $\alpha, \ldots, \alpha_n$ exiten $c_1, \ldots, c_n \in F$ tales que*

$$\beta = \sum i = 1nci\ di$$

Definición 5.5. *Sea $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ en V & $\mathcal{L}(\alpha_1 \ldots \alpha_k) = \{\beta | \beta$ es combinaciòn lineal de $\alpha_1\ \ldots\ \alpha_k$ esto es un s.e.v. de V & se llama subespacio generado por $\alpha_i \leq i = k$ o bien se dice que $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ genera a $\mathcal{L}$*

En general
Si $A \neq 0$ & si $A \subset V$ entonces $\mathcal{L}(A) = \{\beta | \beta$ es combinaciòn lineal de los elemntos de A }

Proposición 5.3. *La intersecion de cualquier coleciòn de subespacio de V es un subespacio de V*

Demostración. Sea $\{Wa | \alpha \in I\}$ & sea $W \triangleq \bigcap W\alpha$

I w no es vacio $\in W$ pues $\vec{a} \in W\alpha\ \forall \alpha \in I$

II $\alpha, \beta \in W \rightarrow \alpha, \beta \in W\alpha \forall \alpha \in I \rightarrow \alpha + \beta \in W\alpha \forall \alpha \in I \rightarrow \alpha + \beta \in W$

III Sea $\beta \in W$ & sea $r \in \mathcal{F} \rightarrow r, \beta \in W\alpha\ \forall \alpha \in I \rightarrow r, \beta \in W$

$\square$

Obsevación 5.1. *La uniòn de los subespacios no necesariamente es espacio vectorial*

Ejemplo 5.1. *En $\mathbb{R}^2$ definimos*
$W_1 = \{(x_1, 0) | x_1 \in R\} \subset \mathbb{R}^2$
$W_2 = \{(0, x_2) | x_2 \in R\} \subset \mathbb{R}^2$
$(x_1, 0) + (0, x_2) = (x_1, x_2) \notin W_1 \cup W_2$
$W_1 \cup W_2 = \{(x_1, 0), (0, x_2)\} | x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Suma directa

Definición 5.6. *Sean S, T subespacios de V definimos la suma de S & I como*

$$S + I = \{s + t | s \in S, t \in T\}$$

Proposición 5.4. *Si S & T son subespacios entonces $S + T$ es un subespacio vectorial de V*

Tarea pendiente

Definición 5.7. *Si S & T son subespacios V de V tales que $S + T = V$ & $S \cap T = \{0\}$ decimos que V es la suma directa*

Demostración. Sea s, t , s', t' que estan en S & T respectivamente & sea $\alpha \in V$ $\square$

6
Operadores lineales

7
Funciones lineales

8
Espacios duales

9
Teorema de Caley-Hamilton

10
Diagonalizacion

11
Forma canónica de Jordan

12
Vectores propios generalizados

Parte III

Ecuaciones difereciales

13
Resolución de ecuaciones diferenciales

14
Existencia y unicidad de la solución de una ED

15
Solución aproximada

16
Relación entre soluciones aproximadas y exactas