GENERACIÓN 2014

MATEMÁTICAS CINVESTAV

Índice general

Parte I

Algebra abstracta

1
Grupos

Definiciòn de grupo

Definiciò Un conjunto no vacio G en el que esta definida una operacion $*$ tal que va a mapear el producto cartesiano y los va amandar.

$$*: G \times G \to G$$

.

$$(a, b) \to (a * b)$$

Propiedad

1. $a * b \in G \forall a, b \in G$
2. $a * b(b * c) = (a * b) * c \forall a, b, c \in G$
3. $\exists e \in G \therefore a * e = e * a = a \forall e \in G$ "e" se le llama identidad o identidad de a

Ejemplo

1. $\mathbb{Z}$
2. Los racionales $\mathbb{Q}$ con la suma
3. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\{0\}$ con la multiplicacion
4. $G = \{e\}$ con la opercaion $e * e = e \in G$
5.
6. El conjunto de Matrices $G(n, \mathbb{R})$ es un grupo NO CONMUTATIVO $A, b \in G(n, \mathbb{R})$
7. Son las matrices

Grupos Abelianos

Definicion Se dice que un grupo G es Abeliano si solo si $a * b = b * a$

Ejemplo El conjunto $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$ (clase de equivalencia)

Ejercicios

1. Considere a $\mathbb{Z}$ con el producto usual Es $\mathbb{Z}$ un grupo?
2. Considere a $\mathbb{Z}^*(incluye 0)$ con el producto usual es $\mathbb{Z}^*$?
3. Sea $G = \mathbb{R} \diagdown \{0\}$ si definimos $a \times b = a^2 b$ G es un Grupo?

Definiciones Orden de un grupo es el numero de elementos que tiene dicho Grupo y se denota $|G|$ Un Grupo G sera finito si tiene elementos finitos de elementos sea infinito

Ejemplos

Proposicion Si G es un grupo entonces

1. El elemento identidad es uinico
2. $\forall a \in G a^{-1}$ es unico
3. $\forall a, b \in G (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$
4. En general $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n)^{-1} = (a_n^{-1} \cdot a_{n-1}^{-1} \cdot \ldots a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}) \forall a \in G$

Proposicion Sea G un grupo $\forall a, b, c \in G$

1. $ab = ac \Rightarrow b = c$
2. $ba = ca \Rightarrow b = c$

Verificacion

1. $b = eb = (aa^{-1})b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = (a^{-1}a)c = ec = c$
2. $b = be = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = (ca)a^{-1} = c(aa^{-1}) = ce = c$

Subgrupo

Definiciòn Conjunto no vacìo H de un grupo G, se llama Subgrupo si H mismo forma un grupo respecto a la operaciò de G. Cuando H es subgrupo de G se denota $H < G$ ò $G > H$.

Observaciòn Todo grupo tiene autòmaticamente dos subgrupos tribiales $G\&\{e\}$

Propociòn Un subconjunto no vaio $H \subset G$ es un subgrupo de G ssi H es cerrado respecto a la operaciòn G & $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in a^{-1} \in H$

$\Rightarrow$

Necesidad Como H es un subgrupo de G, H es un grupo y tiene inversa

$\Leftarrow$

Suficiencia H es cerrado, no vacio & y el inverso esta en $H \forall a \in H = aa^{-1} (Hescerrado) \Rightarrow aa^{-1} = e \in H$

Ademas para $a, b, c \in H$ $a(bc) = (ab)c$ $H \in G$

Ejercicio Sea $G = \mathbb{Z}$ con la suma usual & sea H el conjunto de enteros pares.

$$H = \{2n / n \in \mathbb{Z}\}$$

H es un subgrupo?

Sean a,b∈H $a = 2q$, $q \in \mathbb{Z}$ $b = 2\acute{q}$ $\acute{q} \in \mathbb{Z}$

$a + b = 2q + 2q = 2(q + q') = 2q''$

Subgrupo Normal

Definición 1. *Un grupo N de G se dice que es un Subgrupo Normal de G denotado por:*

$$N \triangle G$$

si $\forall g \in G$ y $\forall n \in N$, se tiene que:

$$gng^{-1} \in N \tag{1.1}$$

Lema 1. *N es un subgrupo de G, si y solo si:*

$$gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G \tag{1.2}$$

Demostración. I Si $gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$, entonces en particular:

$$gNg^{-1} \subseteq N$$

por lo que $gNg^{-1} \in N \quad \forall n \in N$, por lo tanto:

$$N \triangle G$$

II Si N es un subgrupo normal de G, entonces:

$$gNg^{-1} \in N$$

Si $g \in G \quad \forall n \in N$, entonces $gNg^{-1} \subseteq N$.

Por otro lado $g^{-1}Ng = g^{-1}N(g^{-1})^{-1} \subseteq N$, ademas:

$$N = eNe = g\left(g^{-1}Ng\right)g^{-1} = gNg^{-1}$$

por lo tanto:

$$gNg^{-1} = N$$

□

Lema 2. *El subgrupo N de G es un subgrupo normal de G ($N \triangle G$), si y solo si, toda clase lateral izquierda de N en G es una clase lateral derecha de N en G.*

Demostración. Sea $aH = \{ah | h \in H\}$ la clase lateral izquierda.

I Si N es un subgrupo normal de $G \quad \forall g \in G \quad \forall n \in N$

$$gNg^{-1} = N$$

entonces, podemos hacer lo siguiente:

$$gN = gNe = gN\left(g^{-1}g\right) = \left(gNg^{-1}\right)g = Ng$$

entonces, toda clase lateral izquierda coincide con la clase lateral derecha.

II Ahora supongamos que las clases laterales coinciden, entonces:

$$gNg^{-1} = (gN)\,g^{-1} = Ngg^{-1} = N$$

por lo que podemos concluir que se trata de un subgrupo normal.

□

Definición 2. *Denotaremos G/N al conjunto de las clases laterales derechas de N en G*

$$G/N = \{Na | a \in G\} \tag{1.3}$$

Teorema 1. *Si G es un grupo y N es un subgrupo normal de G, entonces G/N es tambien un grupo y se le denomina grupo cociente.*

Demostración. I Cerradura

Prueba asignada a tarea

II Asociatividad

Prueba asignada a tarea

III Identidad

$$N = Ne \tag{1.4}$$

Verificamos para un elemento $x \in G/N \implies x = Na, a \in G$

$$xN = NaN = NNa = Na = x$$

$$Nx = NNa = Na = x \tag{1.5}$$

IV Inverso Sea $x \in G/N$ y sea $Na^{-1} \in G/N$, por verificar que $x^{-1} = Na^{-1}$, es el inverso de $x = Na$

$$xx^{-1} = NaNa^{-1} = NNaa^{-1} = Ne = N \tag{1.6}$$
$$x^{-1}x = Na^{-1}Na = NNa^{-1}a = Ne = N \tag{1.7}$$

por lo tanto $Na^{-1} = x^{-1}$ es el inverso de x, por lo que podemos concluir que G/N es un grupo.

$\square$

2
Homorfismos de grupo

Definiciòn

Un mapeo ϕ de un grupo G en un grupo $\bar{G}$ se dice ser un homomorfismo si para todo $a, b \in G, \phi(a, b) = \phi(a)\phi(b)$

Proposiciòn Sea $\varepsilon : G \to \acute{G}$ homomorfismo. Entonces ε es un monomorfismo ssi $ker\varepsilon = \{0\}(e = 0 \in G)$

Verificaciòn $\Leftarrow$

Supongamos que Ker$\varepsilon = \{0\}$ por verificar que ε es monomorfismo

$\Rightarrow$

Supongamos que $\varepsilon(x_1) = \varepsilon(x_2)$

3
Anillos

4
Dominios

Parte II

Algebra Lineal

5
Espacios vectoriales, Isomorfismos

6
Operadores lineales

7
Funciones lineales

8
Espacios duales

9
Teorema de Caley-Hamilton

10
Diagonalizacion

11
Forma canónica de Jordan

12
Vectores propios generalizados

Parte III

Ecuaciones difereciales

13
Resolución de ecuaciones diferenciales

14
Existencia y unicidad de la solución de una ED

15
Solución aproximada

16
Relación entre soluciones aproximadas y exactas