GENERACIÓN 2014

MATEMÁTICAS CINVESTAV

Índice general

Parte I

Algebra abstracta

1
Grupos

Definiciòn de grupo

Definiciò Un conjunto no vacio G en el que esta definida una operacion $*$ tal que va a mapear el producto cartesiano y los va amandar.

$$*: G \times G \to G$$

.

$$(a, b) \to (a * b)$$

Propiedad

1. $a * b \in G \forall a, b \in G$
2. $a * b(b * c) = (a * b) * c \forall a, b, c \in G$
3. $\exists e \in G \therefore a * e = e * a = a \forall e \in G$ "e" se le llama identidad o identidad de a

Ejemplo

1. $\mathbb{Z}$
2. Los racionales $\mathbb{Q}$ con la suma
3. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\{0\}$ con la multiplicacion
4. $G = \{e\}$ con la opercaion $e * e = e \in G$
5.
6. El conjunto de Matrices $G(n, \mathbb{R})$ es un grupo NO CONMUTATIVO $A, b \in G(n, \mathbb{R})$
7. Son las matrices

Grupos Abelianos

Definicion Se dice que un grupo G es Abeliano si solo si $a * b = b * a$

Ejemplo El conjunto $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$ (clase de equivalencia)

Ejercicios

1. Considere a $\mathbb{Z}$ con el producto usual Es $\mathbb{Z}$ un grupo?
2. Considere a $\mathbb{Z}^*(incluye 0)$ con el producto usual es $\mathbb{Z}^*$?
3. Sea $G = \mathbb{R} \diagdown \{0\}$ si definimos $a \times b = a^2 b$ G es un Grupo?

Definiciones Orden de un grupo es el numero de elementos que tiene dicho Grupo y se denota $|G|$ Un Grupo G sera finito si tiene elementos finitos de elementos sea infinito

Ejemplos

Proposicion Si G es un grupo entonces

1. El elemento identidad es uinico
2. $\forall a \in G a^{-1}$ es unico
3. $\forall a, b \in G (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$
4. En general $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n)^{-1} = (a_n^{-1} \cdot a_{n-1}^{-1} \cdot \ldots a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}) \forall a \in G$

Proposicion Sea G un grupo $\forall a, b, c \in G$

1. $ab = ac \Rightarrow b = c$
2. $ba = ca \Rightarrow b = c$

Verificacion

1. $b = eb = (aa^{-1})b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = (a^{-1}a)c = ec = c$
2. $b = be = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = (ca)a^{-1} = c(aa^{-1}) = ce = c$

Subgrupo

Definiciòn Conjunto no vacìo H de un grupo G, se llama Subgrupo si H mismo forma un grupo respecto a la operaciò de G. Cuando H es subgrupo de G se denota $H < G$ ò $G > H$.

Observaciòn Todo grupo tiene autòmaticamente dos subgrupos tribiales $G\&\{e\}$

Propociòn Un subconjunto no vaio $H \subset G$ es un subgrupo de G ssi H es cerrado respecto a la operaciòn G & $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in a^{-1} \in H$
$\Rightarrow$

Necesidad Como H es un subgrupo de G, H es un grupo y tiene inversa
$\Leftarrow$

Suficiencia H es cerrado, no vacio & y el inverso esta en $H \forall a \in H = aa^{-1}(Hescerrado) \Rightarrow aa^{-1} = e \in H$
Ademas para $a, b, c \in H$ $a(bc) = (ab)c$ $H \in G$

Ejercicio Sea $G = \mathbb{Z}$ con la suma usual & sea H el conjunto de enteros pares.

$$H = \{2n/n \in \mathbb{Z}\}$$

H es un subgrupo?

Sean a,b∈H $a = 2q$, $q \in \mathbb{Z}$ $b = 2\acute{q}$ $\acute{q} \in \mathbb{Z}$
$a + b = 2q + 2q = 2(q + q') = 2q''$

Subgrupo Normal

Definición 1. *Un grupo N de G se dice que es un Subgrupo Normal de G denotado por:*

$$N \triangle G$$

si $\forall g \in G$ *y* $\forall n \in N$*, se tiene que:*

$$gng^{-1} \in N \tag{1.1}$$

Lema 1. *N es un subgrupo de G, si y solo si:*

$$gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G \tag{1.2}$$

Demostración. I Si $gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$, entonces en particular:

$$gNg^{-1} \subseteq N$$

por lo que $gNg^{-1} \in N \quad \forall n \in N$, por lo tanto:

$$N \triangle G$$

II Si N es un subgrupo normal de G, entonces:

$$gNg^{-1} \in N$$

Si $g \in G \quad \forall n \in N$, entonces $gNg^{-1} \subseteq N$.

Por otro lado $g^{-1}Ng = g^{-1}N(g^{-1})^{-1} \subseteq N$, ademas:

$$N = eNe = g\left(g^{-1}Ng\right)g^{-1} = gNg^{-1}$$

por lo tanto:

$$gNg^{-1} = N$$

□

Lema 2. *El subgrupo N de G es un subgrupo normal de G (N△G), si y solo si, toda clase lateral izquierda de N en G es una clase lateral derecha de N en G.*

Demostración. Sea $aH = \{ah | h \in H\}$ la clase lateral izquierda.

I Si N es un subgrupo normal de $G \quad \forall g \in G \quad \forall n \in N$

$$gNg^{-1} = N$$

entonces, podemos hacer lo siguiente:

$$gN = gNe = gN\left(g^{-1}g\right) = \left(gNg^{-1}\right)g = Ng$$

entonces, toda clase lateral izquierda coincide con la clase lateral derecha.

II Ahora supongamos que las clases laterales coinciden, entonces:

$$gNg^{-1} = (gN)\,g^{-1} = Ngg^{-1} = N$$

por lo que podemos concluir que se trata de un subgrupo normal.

□

Definición 2. *Denotaremos G/N al conjunto de las clases laterales derechas de N en G*

$$G/N = \{Na | a \in G\} \tag{1.3}$$

Teorema 1. *Si G es un grupo y N es un subgrupo normal de G, entonces G/N es tambien un grupo y se le denomina grupo cociente.*

Demostración. I Cerradura

Prueba asignada a tarea

II Asociatividad

Prueba asignada a tarea

III Identidad

$$N = Ne \tag{1.4}$$

Verificamos para un elemento $x \in G/N \implies x = Na,\ a \in G$

$$xN = NaN = NNa = Na = x$$

$$Nx = NNa = Na = x \tag{1.5}$$

IV Inverso Sea $x \in G/N$ y sea $Na^{-1} \in G/N$, por verificar que $x^{-1} = Na^{-1}$, es el inverso de $x = Na$

$$xx^{-1} = NaNa^{-1} = NNaa^{-1} = Ne = N \tag{1.6}$$
$$x^{-1}x = Na^{-1}Na = NNa^{-1}a = Ne = N \tag{1.7}$$

por lo tanto $Na^{-1} = x^{-1}$ es el inverso de x, por lo que podemos concluir que G/N es un grupo.

$\square$

2
Homorfismos de grupo

Definicion de Homomorfismos

Definición 3. *Una aplicaion $\varepsilon : G \to \bar{G}$ G es un grupo con operacion ($\bullet$) & $\bar{G}$ es un grupo con operacion ($\blacksquare$)*

Se dice que es un homomorfismo si para $a, b \in G$ cuales quiera se tiene que:

$$\varepsilon(a \bullet b) = \varepsilon(a) \blacksquare \varepsilon(b) \tag{2.1}$$

Ejemplo 1. *$G = \mathbb{R}^{+} \diagdown \{0\}$ bajo la multiplicacion & sea $\bar{G} = \mathbb{R}$ bajo la adicion definimos $\varepsilon : G \to \bar{G}$ como $\varepsilon : \mathbb{R}^{+\diagdown\{0\}} \Rightarrow \mathbb{R} \to ln(r)$ sean $r_1 r_2 \in \mathbb{R}^{+\diagdown\{0\}}$ t.q. $\varepsilon(r_1 \bullet r_2) = ln(r_1 r_2) = ln(r_1) + ln(r_2) = \varepsilon(r_1) + \varepsilon(r_1)$ por tanto ε es un homomorfismo.*

Lema 3. *Supongamos que G es un grupo & que N es un subgrupo de G*

Definamos la siguiente aplicaciòn

$$\varepsilon : G \to G \diagdown N$$

entonces ε es

$$x \to N_x \tag{2.2}$$

un Homomorfismo

Definición 4. *Un homomorfismo $\varepsilon : G \to \acute{G}$ se dice que :*

a *Monorfismo si es 1-1 (inyectiva)*

b *Epimorfismo si es suprayectiva*

c *Isomorfismo si es biyectiva*

Definición 5. *Si $\varepsilon : G \to \acute{G}$ es un isomorfismo, decimos que G & $\acute{G}$ son isomorfos & escribimos*

$$G \cong \acute{G} \tag{2.3}$$

Proposición 1. *Si $\varepsilon : G \to \acute{G}$ es un homomorfismo entonces*

$$Im\varepsilon < \acute{G} \tag{2.4}$$

dondela

$$Im\varepsilon = \{y \in \acute{G} | \varepsilon_{(x)} = y, x \in G\} \subset G \tag{2.5}$$

Demostración. 1 Sean

$$y_1, y_2 \in Im\varepsilon \Rightarrow y_1 = \varepsilon(x_1) \& y_2 = \varepsilon(x_2) \in \acute{G}$$

$$x_1, x_2 \in G$$

$$y_1, y_2 = \varepsilon x_1 \varepsilon x_2 = \varepsilon(x_1 x_2 \Rightarrow y_1, y_2 \in Im\varepsilon$$

□

3
Anillos

4
Dominios

Parte II

Algebra Lineal

5
Espacios vectoriales

Espacios Vectoriales

Definición 6. *Un conjunto no vaciò V se dice que es un espacio vectorial sobre un campo F si V es un grupo abeliano respecto a una operacaiòn que se denota por $+$, y si para todo $\alpha \in F$, $v \in V$ està definido un elemento, escrito como αv, de V con las siguiente propiedades:*

1. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
2. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
3. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
4. $1v = v$

Una opercaiòn denominada multiplicaciòn por escalares que asocia a cada escalar $c \in F$, un vector $c\alpha \in V$ de manera que:

a $(c_1c_2)\alpha = c1(c2\alpha)$

b $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta \forall c \in F\alpha, \beta \in V$

c $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha \forall c_1, c_2 \in F\alpha \in V$

d $1\alpha = \alpha \forall \alpha \in V$

Definición 7. *Sea F un campo & sea $n \in N$*

$$F^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|x_1 \in F\} \; Si \; c\alpha = (x_1, \ldots, x_n) \;, \; \beta = (y_1, \ldots, y_n) \tag{5.1}$$

Decimos

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \;\&\; c\alpha(cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) \;\forall\; c \in F$$

Proposición 2. *Sea V un espacio vectorial sobre F entoces $\forall\, \alpha \in V$ se tiene que*

$$0\alpha = \overrightarrow{0}$$

$$0\alpha(0 + 0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha \;\; -0\alpha + 0\alpha = -0\alpha + 0$$

$$0 = 0\alpha$$

Definición 8. *Se dice que $\beta \in V$ es una combinaciòn lineal de vetores $\alpha, \ldots, \alpha_n$ exiten $c_1, \ldots, c_n \in F$ tales que*

$$\beta = \sum i = 1nci\; di$$

Definición 9. *Un subespacio de un espacio vectorial V sobre F es un subconjunto W de V que con las operaciones heredadas de W es el mismo espacio vectorial sobre F.*

Nota : si V es un e.v. , $V = \{\vec{0}\}$ se denomina subespacio triviales de V

Proposición 3. *Un subconjuto no vacio W de V es un subespacio vectorial ssi W es cerrado con respectoa los operaciones de V*

$\rightarrow$ Si W es s.e.v. de V por defenici$\grave{}$on es e.v. y sus operaciones son cerradas. $\leftarrow$

Definición 10. *Sea $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ en V & $\mathcal{L}(\alpha_1 \ldots \alpha_k) = \{\beta|\beta$ es combinaciòn lineal de $\alpha_1\ \ldots\ \alpha_k$ esto es un s.e.v. de V & se llama subespacio generado por $\alpha_i \leq i = k$ o bien se dice que $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ genera a $\mathcal{L}$*

En general
Si $A \neq 0$ & si $A \subset V$ entonces $\mathcal{L}(A) = \{\beta|\beta$ es combinaciòn lineal de los elemntos de A $\}$

Proposición 4. *La intersecion de cualquier coleciòn de subespacio de V es un subespacio de V*

Demostración. Sea $\{Wa||\alpha \in I\}$ & sea $W \triangleq \bigcap W$ $\square$

6
Operadores lineales

7
Funciones lineales

8
Espacios duales

9
Teorema de Caley-Hamilton

10
Diagonalizacion

11
Forma canónica de Jordan

12
Vectores propios generalizados

Parte III

Ecuaciones difereciales

13
Resolución de ecuaciones diferenciales

14
Existencia y unicidad de la solución de una ED

15
Solución aproximada

16

Relación entre soluciones aproximadas y exactas