

GENERACIÓN 2014

MATEMÁTICAS CINVESTAV

Índice general

	<i>I Algebra abstracta</i>	5
1	<i>Grupos</i>	7
2	<i>Homorfismos de grupo</i>	13
3	<i>Anillos</i>	15
4	<i>Dominios</i>	19
	<i>II Algebra Lineal</i>	21
5	<i>Espacios vectoriales</i>	23
6	<i>Operadores lineales</i>	29
7	<i>Funciones lineales</i>	31
8	<i>Espacios duales</i>	33
9	<i>Teorema de Caley-Hamilton</i>	35

10	<i>Diagonalizacion</i>	37
11	<i>Forma canónica de Jordan</i>	39
12	<i>Vectores propios generalizados</i>	41
	<i>III Ecuaciones difereciales</i>	43
13	<i>Resolución de ecuaciones diferenciales</i>	45
14	<i>Existencia y unicidad de la solución de una ED</i>	47
15	<i>Solución aproximada</i>	49
16	<i>Relación entre soluciones aproximadas y exactas</i>	51

Parte I

Algebra abstracta

1

Grupos

Definición de grupo

Definición Un conjunto no vacío G en el que está definida una operación $*$ tal que va a mapear el producto cartesiano y los va amando.

$$* : G \times G \rightarrow G$$

.

$$(a, b) \rightarrow (a * b)$$

Propiedad

1. $a * b \in G \forall a, b \in G$
2. $a * b(b * c) = (a * b) * c \forall a, b, c \in G$
3. $\exists e \in G \therefore a * e = e * a = a \forall e \in G$ "e" se le llama identidad o identidad de a

Ejemplo

1. \mathbb{Z}
2. Los racionales \mathbb{Q} con la suma
3. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con la multiplicación
4. $G = \{e\}$ con la operación $e * e = e \in G$
- 5.
6. El conjunto de Matrices $G(n, \mathbb{R})$ es un grupo NO CONMUTATIVO
 $A, b \in G(n, \mathbb{R})$
7. Son las matrices

Grupos Abelianos

Definicion Se dice que un grupo G es Abeliano si solo si $a * b = b * a$

Ejemplo El conjunto \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n (clase de equivalencia)

Ejercicios

1. Considere a \mathbb{Z} con el producto usual Es \mathbb{Z} un grupo?
2. Considere a \mathbb{Z}^* (*incluye* 0) con el producto usual es \mathbb{Z}^* ?
3. Sea $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si definimos $a \times b = a^2 b$ G es un Grupo?

Definiciones Orden de un grupo es el numero de elementos que tiene dicho Grupo y se denota $|G|$ Un Grupo G sera finito si tiene elementos finitos de elementos sea infinito

Ejemplos

Proposicion Si G es un grupo entonces

1. El elemento identidad es uinico
2. $\forall a \in G a^{-1}$ es unico
3. $\forall a, b \in G (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$
4. En general $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{-1} = (a_n^{-1} \cdot a_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}) \forall a \in G$

Proposicion Sea G un grupo $\forall a, b, c \in G$

1. $ab = ac \Rightarrow b = c$
2. $ba = ca \Rightarrow b = c$

Verificacion

1. $b = eb = (aa^{-1})b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = (a^{-1}a)c = ec = c$
2. $b = be = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = (ca)a^{-1} = c(aa^{-1}) = ce = c$

Subgrupo

Definición Conjunto no vacío H de un grupo G , se llama Subgrupo si H mismo forma un grupo respecto a la operación de G . Cuando H es subgrupo de G se denota $H < G$ o $G > H$.

Observación Todo grupo tiene automáticamente dos subgrupos triviales G & $\{e\}$

Proposición Un subconjunto no vacío $H \subset G$ es un subgrupo de G ssi H es cerrado respecto a la operación G & $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in a^{-1} \in H$
 \Rightarrow

Necesidad Como H es un subgrupo de G , H es un grupo y tiene inversa
 \Leftarrow

Suficiencia H es cerrado, no vacío & y el inverso esta en $H \forall a \in H = aa^{-1} (H \text{ cerrado}) \Rightarrow aa^{-1} = e \in H$
 Además para $a, b, c \in H$ $a(bc) = (ab)c$ $H \in G$

Ejercicio Sea $G = \mathbb{Z}$ con la suma usual & sea H el conjunto de enteros pares.

$$H = \{2n / n \in \mathbb{Z}\}$$

H es un subgrupo?

Sean $a, b \in H$ $a = 2q, q \in \mathbb{Z}$ $b = 2q', q' \in \mathbb{Z}$
 $a + b = 2q + 2q' = 2(q + q') = 2q''$

Subgrupo Normal

Definición 1. Un grupo N de G se dice que es un Subgrupo Normal de G denotado por:

$$N \triangle G$$

si $\forall g \in G$ y $\forall n \in N$, se tiene que:

$$gng^{-1} \in N \quad (1.1)$$

Lema 1. N es un subgrupo de G , si y solo si:

$$gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G \quad (1.2)$$

Demostración. i) Si $gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$, entonces en particular:

$$gNg^{-1} \subseteq N$$

por lo que $gNg^{-1} \in N \quad \forall n \in N$, por lo tanto:

$$N \triangle G$$

ii) Si N es un subgrupo normal de G , entonces:

$$gNg^{-1} \in N$$

Si $g \in G \quad \forall n \in N$, entonces $gNg^{-1} \subseteq N$.

Por otro lado $g^{-1}Ng = g^{-1}N(g^{-1})^{-1} \subseteq N$, además:

$$N = eNe = g \left(g^{-1}Ng \right) g^{-1} = gNg^{-1}$$

por lo tanto:

$$gNg^{-1} = N$$

□

Lema 2. El subgrupo N de G es un subgrupo normal de G ($N \triangle G$), si y solo si, toda clase lateral izquierda de N en G es una clase lateral derecha de N en G .

Demostración. Sea $aH = \{ah | h \in H\}$ la clase lateral izquierda.

i) Si N es un subgrupo normal de $G \quad \forall g \in G \quad \forall n \in N$

$$gNg^{-1} = N$$

entonces, podemos hacer lo siguiente:

$$gN = gNe = gN(g^{-1}g) = (gNg^{-1})g = Ng$$

entonces, toda clase lateral izquierda coincide con la clase lateral derecha.

ii) Ahora supongamos que las clases laterales coinciden, entonces:

$$gNg^{-1} = (gN)g^{-1} = Ngg^{-1} = N$$

por lo que podemos concluir que se trata de un subgrupo normal.

□

Definición 2. Denotaremos G/N al conjunto de las clases laterales derechas de N en G

$$G/N = \{Na | a \in G\} \quad (1.3)$$

Teorema 1. Si G es un grupo y N es un subgrupo normal de G , entonces G/N es también un grupo y se le denomina grupo cociente.

Demostración. i) Cerradura

Prueba asignada a tarea

ii) Asociatividad

Prueba asignada a tarea

iii) Identidad

$$N = Ne \quad (1.4)$$

Verificamos para un elemento $x \in G/N \implies x = Na, a \in G$

$$xN = NaN = NNa = Na = x$$

$$Nx = NNa = Na = x \quad (1.5)$$

iv) Inverso Sea $x \in G/N$ y sea $Na^{-1} \in G/N$, por verificar que $x^{-1} = Na^{-1}$, es el inverso de $x = Na$

$$xx^{-1} = NaNa^{-1} = NNa^{-1} = Ne = N \quad (1.6)$$

$$x^{-1}x = Na^{-1}Na = NNa^{-1}a = Ne = N \quad (1.7)$$

por lo tanto $Na^{-1} = x^{-1}$ es el inverso de x , por lo que podemos concluir que G/N es un grupo.

□

2

Homomorfismos de grupo

Definición de Homomorfismos

Definición 3. Una aplicación $\varepsilon : G \rightarrow \bar{G}$ es un homomorfismo si G es un grupo con operación (\bullet) & \bar{G} es un grupo con operación (\blacksquare)

Se dice que es un homomorfismo si para $a, b \in G$ cualesquiera se tiene que:

$$\varepsilon(a \bullet b) = \varepsilon(a) \blacksquare \varepsilon(b) \quad (2.1)$$

Ejemplo 1. $G = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ bajo la multiplicación & sea $\bar{G} = \mathbb{R}$ bajo la adición definimos $\varepsilon : G \rightarrow \bar{G}$ como $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \Rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \ln(r)$ sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ t.q. $\varepsilon(r_1 \bullet r_2) = \ln(r_1 r_2) = \ln(r_1) + \ln(r_2) = \varepsilon(r_1) + \varepsilon(r_2)$ por tanto ε es un homomorfismo.

Lema 3. Supongamos que G es un grupo & que N es un subgrupo de G
Definamos la siguiente aplicación

$$\varepsilon : G \rightarrow G \setminus N$$

entonces ε es

$$x \rightarrow N_x \quad (2.2)$$

un Homomorfismo

Definición 4. Un homomorfismo $\varepsilon : G \rightarrow \bar{G}$ se dice que :

a Monorfismo si es 1-1 (inyectiva)

b Epimorfismo si es suprayectiva

c Isomorfismo si es biyectiva

Definición 5. Si $\varepsilon : G \rightarrow \bar{G}$ es un isomorfismo, decimos que G & \bar{G} son isomorfos & escribimos

$$G \cong \bar{G} \quad (2.3)$$

Proposición 1. Si $\varepsilon : G \rightarrow \dot{G}$ es un homomorfismo entonces

$$\text{Im}\varepsilon < \dot{G} \quad (2.4)$$

donde

$$\text{Im}\varepsilon = \{y \in \dot{G} \mid \varepsilon(x) = y, x \in G\} \subset \dot{G} \quad (2.5)$$

Demostración. Sean

$$y_1, y_2 \in \text{Im}\varepsilon \Rightarrow y_1 = \varepsilon(x_1) \text{ y } y_2 = \varepsilon(x_2) \in \dot{G}$$

$$x_1, x_2 \in G$$

$$y_1 y_2 = \varepsilon x_1 \varepsilon x_2 = \varepsilon(x_1 x_2) \Rightarrow y_1, y_2 \in \text{Im}\varepsilon$$

□

3

Anillos

Definiciones

Definición 6. Un conjunto no vacío R es un anillo si tiene definidas dos operaciones $(+, \cdot)$ tales que:

- a) $a, b \in R \implies a + b \in R$
- b) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in R$
- c) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in R$
- d) $\exists 0 \in R$ tal que $a + 0 = a \quad \forall a \in R$
- e) $\exists b \in R$ tal que $a + b = 0 \quad \forall a \in R$

De estas propiedades podemos concluir que R es un grupo abeliano con respecto a $(+)$, pero aun tenemos lo siguiente:

- 1) $a, b \in R \implies a \cdot b \in R$
- 2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in R$

De estas propiedades podemos concluir que R es un semigrupo con respecto a (\cdot) , y además:

- I) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in R$
- II) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \quad \forall a, b, c \in R$

Definición 7. Diremos que un anillo R es un anillo con identidad si existe un $1 \in R$, con $1 \neq 0$, tal que:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a \quad \forall a \in R \quad (3.1)$$

Definición 8. Un anillo R es un anillo conmutativo si:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in R \quad (3.2)$$

Definición 9. Sea R un anillo y $a \in R$ con $a \neq 0$, diremos que a es divisor de cero, si existe $b \in R$ con $b \neq 0$ tal que:

$$a \cdot b = 0 \quad (\text{divisor por la derecha}) \quad (3.3)$$

o bien si existe un $c \in R$ con $c \neq 0$, tal que:

$$c \cdot a = 0 \quad (\text{divisor por la izquierda}) \quad (3.4)$$

Definición 10. Sea R un anillo con identidad. Diremos que R es un anillo con división si existe $b \in R$ tal que:

$$a \cdot b = b \cdot a = 1 \quad \forall 0 \neq a \in R \quad (3.5)$$

Definición 11. Un campo es un anillo con división, que además es conmutativo, es decir, un campo es un grupo abeliano con respecto a $(+)$ y a (\cdot) .

Definición 12. Un anillo conmutativo con identidad es un dominio entero si:

$$a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ o } b = 0 \quad (3.6)$$

Esto quiere decir que no existen divisores de cero.

Corolario 1. Si p es primo, entonces \mathbb{Z}_p es campo.

Proposición 2. Sea R un anillo y sean $a, b \in R$, entonces:

- a) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- b) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$
- c) $(-a)(-b) = -(-a) \cdot b = a \cdot b$
- d) $1 \in R \implies (-1) \cdot a = -a$

Demostración.

$$a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \implies 0 = a \cdot 0$$

$$a \cdot (-b) + a \cdot b = a \cdot (-b + b) = a \cdot (0) = 0 \implies a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot (b) &= (-a) \cdot (-b + b) = (-a) \cdot (0) = 0 \\ \implies (-a) \cdot (-b) &= -(-a) \cdot (b) = (-(-a)) \cdot (b) \end{aligned}$$

□

Tarea: Sea $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ Verificar que $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ es un anillo con identidad no conmutativo y además no es dominio entero.

Ideales, Homomorfismos y Anillos

Definición 13. Una función $\varphi : R \rightarrow R'$ es un homomorfismo si:

1. $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a + b)$
2. $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(a \cdot b)$

Definición 14. Sea $\varphi : R \rightarrow R'$ homomorfismo de anillos, entonces:

1. φ es monomorfismo si es inyectivo
2. φ es epimorfismo si es suprayectivo
3. φ es isomorfismo si es biyectivo

Definición 15. El nucleo de φ es $\ker \varphi = \{x \in R \mid \varphi(x) = 0\}$

Proposición 3. Sea $\varphi : R \rightarrow R'$, es un homomorfismo de anillos, entonces:

1. $\ker \varphi$ es un subgrupo aditivo
2. $rk, kr \in \ker \varphi \quad \forall k \in \ker \varphi \quad r \in R$

Demostración. Sea $k \in \ker \varphi$ y $r \in R$

$$\begin{aligned}\varphi(rk) &= \varphi(r) \cdot \varphi(k) \\ &= \varphi(r) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(kr) &= \varphi(k) \cdot \varphi(r) \\ &= 0 \cdot \varphi(r) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore kr, rk \in \ker \varphi$$

□

Definición 16. Sea R un anillo e I un subconjunto de R , se dice que es un ideal de R si:

- I) I es un subgrupo aditivo de R
- II) Dados $r \in R$ y $a \in I$, tenemos que $ra \in I$ y $ar \in I$

a esto se le conoce como propiedad de absorción.

4

Dominios

Parte II

Algebra Lineal

5

Espacios vectoriales

Espacios Vectoriales

Definición 17. Un conjunto no vacío V se dice que es un espacio vectorial sobre un campo \mathcal{F} si \mathcal{V} es un grupo abeliano respecto a una operación que se denota por $+$, y si para todo $\alpha \in F, v \in V$ está definido un elemento, escrito como αv , de V con las siguientes propiedades:

1. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
2. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
3. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
4. $1v = v$

Una operación denominada multiplicación por escalares que asocia a cada escalar $c \in F$, un vector $c\alpha \in V$ de manera que:

- a $(c_1 c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$
- b $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta \forall c \in F, \alpha, \beta \in V$
- c $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha \forall c_1, c_2 \in F, \alpha \in V$
- d $1\alpha = \alpha \forall \alpha \in V$

Definición 18. Sea F un campo & sea $n \in \mathbb{N}$

$$F^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in F\} \text{ Si } c\alpha = (x_1, \dots, x_n), \beta = (y_1, \dots, y_n) \quad (5.1)$$

Decimos

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \text{ \& } c\alpha = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \forall c \in F$$

Proposición 4. Sea V un espacio vectorial sobre F entonces $\forall \alpha \in V$ se tiene que

$$0\alpha = \vec{0}$$

$$0\alpha(0 + 0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha - 0\alpha + 0\alpha = -0\alpha + 0$$

$$0 = 0\alpha$$

Subespacio

Definición 19. Un subespacio de un espacio vectorial V sobre F es un subconjunto W de V que con las operaciones heredadas de W es el mismo espacio vectorial sobre F .

Nota : si V es un e.v. , $V = \{\vec{0}\}$ se denomina subespacio triviales de V

Proposición 5. Un subconjunto no vacío W de V es un subespacio vectorial ssi W es cerrado con respecto a las operaciones de V

→ Si W es s.e.v. de V por definición es e.v. y sus operaciones son cerradas. ←

Combinación lineal

Definición 20. Se dice que $\beta \in V$ es una combinación lineal de vectores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ existen $c_1, \dots, c_n \in F$ tales que

$$\beta = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$$

Definición 21. Sea $\alpha_1 \dots \alpha_k$ en V & $\mathcal{L}(\alpha_1 \dots \alpha_k) = \{\beta \mid \beta \text{ es combinación lineal de } \alpha_1 \dots \alpha_k \}$ esto es un s.e.v. de V & se llama subespacio generado por $\alpha_i \leq i = k$ o bien se dice que $\alpha_1 \dots \alpha_k$ genera a \mathcal{L}

En general

Si $A \neq \emptyset$ & si $A \subset V$ entonces $\mathcal{L}(A) = \{\beta \mid \beta \text{ es combinación lineal de los elementos de } A\}$

Proposición 6. La intersección de cualquier colección de subespacios de V es un subespacio de V

Demostración. Sea $\{W_\alpha \mid \alpha \in I\}$ & sea $W \triangleq \bigcap W_\alpha$

- I w no es vacío $\in W$ pues $\vec{0} \in W_\alpha \forall \alpha \in I$
- II $\alpha, \beta \in W \rightarrow \alpha, \beta \in W_\alpha \forall \alpha \in I \rightarrow \alpha + \beta \in W_\alpha \forall \alpha \in I \rightarrow \alpha + \beta \in W$
- III Sea $\beta \in W$ & sea $r \in F \rightarrow r, \beta \in W_\alpha \forall \alpha \in I \rightarrow r, \beta \in W$

□

Observación 1. La unión de los subespacios no necesariamente es espacio vectorial

Ejemplo 2. En \mathbb{R}^2 definimos

$$W_1 = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$W_2 = \{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, 0) + (0, x_2) = (x_1, x_2) \notin W_1 \cup W_2$$

$$W_1 \cup W_2 = \{(x_1, 0), (0, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Suma directa

Definición 22. Sean S, T subespacios de V definimos la suma de S & T como

$$S + T = \{s + t | s \in S, t \in T\}$$

Proposición 7. Si S & T son subespacios entonces $S + T$ es un subespacio vectorial de V

Tarea pendiente

Definición 23. Si S & T son subespacios V de V tales que $S + T = V$ & $S \cap T = \{0\}$ decimos que V es la suma directa

Demostración. Sea s, t, s', t' que estan en S & T respectivamente & sea $\alpha \in V$ □

6

Operadores lineales

7

Funciones lineales

8

Espacios duales

9

Teorema de Caley-Hamilton

10

Diagonalizacion

11

Forma canónica de Jordan

12

Vectores propios generalizados

Parte III

Ecuaciones diferenciales

13

Resolución de ecuaciones diferenciales

14

Existencia y unicidad de la solución de una ED

15

Solución aproximada

16

Relación entre soluciones aproximadas y exactas