

GENERACIÓN 2014

MATEMÁTICAS CINVESTAV

Índice general

	<i>I Algebra abstracta</i>	5
1	<i>Grupos</i>	7
2	<i>Homorfismos de grupo</i>	13
3	<i>Anillos</i>	15
4	<i>Dominios</i>	17
	<i>II Algebra Lineal</i>	19
5	<i>Espacios vectoriales, Isomorfismos</i>	21
6	<i>Operadores lineales</i>	23
7	<i>Funciones lineales</i>	25
8	<i>Espacios duales</i>	27
9	<i>Teorema de Caley-Hamilton</i>	29

10	<i>Diagonalizacion</i>	31
11	<i>Forma canónica de Jordan</i>	33
12	<i>Vectores propios generalizados</i>	35
	<i>III Ecuaciones difereciales</i>	37
13	<i>Resolución de ecuaciones diferenciales</i>	39
14	<i>Existencia y unicidad de la solución de una ED</i>	41
15	<i>Solución aproximada</i>	43
16	<i>Relación entre soluciones aproximadas y exactas</i>	45

Parte I

Algebra abstracta

1

Grupos

Definición de grupo

Definición Un conjunto no vacío G en el que está definida una operación $*$ tal que va a mapear el producto cartesiano y los va amando.

$$* : G \times G \rightarrow G$$

.

$$(a, b) \rightarrow (a * b)$$

Propiedad

1. $a * b \in G \forall a, b \in G$
2. $a * b(b * c) = (a * b) * c \forall a, b, c \in G$
3. $\exists e \in G \therefore a * e = e * a = a \forall e \in G$ "e" se le llama identidad o identidad de a

Ejemplo

1. \mathbb{Z}
2. Los racionales \mathbb{Q} con la suma
3. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con la multiplicación
4. $G = \{e\}$ con la operación $e * e = e \in G$
- 5.
6. El conjunto de Matrices $G(n, \mathbb{R})$ es un grupo NO CONMUTATIVO
 $A, b \in G(n, \mathbb{R})$
7. Son las matrices

Grupos Abelianos

Definicion Se dice que un grupo G es Abeliano si solo si $a * b = b * a$

Ejemplo El conjunto \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n (clase de equivalencia)

Ejercicios

1. Considere a \mathbb{Z} con el producto usual Es \mathbb{Z} un grupo?
2. Considere a \mathbb{Z}^* (*incluye* 0) con el producto usual es \mathbb{Z}^* ?
3. Sea $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si definimos $a \times b = a^2 b$ G es un Grupo?

Definiciones Orden de un grupo es el numero de elementos que tiene dicho Grupo y se denota $|G|$ Un Grupo G sera finito si tiene elementos finitos de elementos sea infinito

Ejemplos

Proposicion Si G es un grupo entonces

1. El elemento identidad es uinico
2. $\forall a \in G a^{-1}$ es unico
3. $\forall a, b \in G (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$
4. En general $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{-1} = (a_n^{-1} \cdot a_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}) \forall a \in G$

Proposicion Sea G un grupo $\forall a, b, c \in G$

1. $ab = ac \Rightarrow b = c$
2. $ba = ca \Rightarrow b = c$

Verificacion

1. $b = eb = (aa^{-1})b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = (a^{-1}a)c = ec = c$
2. $b = be = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = (ca)a^{-1} = c(aa^{-1}) = ce = c$

Subgrupo

Definición Conjunto no vacío H de un grupo G , se llama Subgrupo si H mismo forma un grupo respecto a la operación de G . Cuando H es subgrupo de G se denota $H < G$ o $G > H$.

Observación Todo grupo tiene automáticamente dos subgrupos triviales G & $\{e\}$

Proposición Un subconjunto no vacío $H \subset G$ es un subgrupo de G ssi H es cerrado respecto a la operación G & $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in a^{-1} \in H$
 \Rightarrow

Necesidad Como H es un subgrupo de G , H es un grupo y tiene inversa
 \Leftarrow

Suficiencia H es cerrado, no vacío & y el inverso esta en $H \forall a \in H = aa^{-1} (H \text{ cerrado}) \Rightarrow aa^{-1} = e \in H$
 Además para $a, b, c \in H$ $a(bc) = (ab)c$ $H \in G$

Ejercicio Sea $G = \mathbb{Z}$ con la suma usual & sea H el conjunto de enteros pares.

$$H = \{2n / n \in \mathbb{Z}\}$$

H es un subgrupo?

Sean $a, b \in H$ $a = 2q, q \in \mathbb{Z}$ $b = 2q', q' \in \mathbb{Z}$
 $a + b = 2q + 2q' = 2(q + q') = 2q''$

Subgrupo Normal

Definición 1. Un grupo N de G se dice que es un Subgrupo Normal de G denotado por:

$$N \triangle G$$

si $\forall g \in G$ y $\forall n \in N$, se tiene que:

$$gng^{-1} \in N \quad (1.1)$$

Lema 1. N es un subgrupo de G , si y solo si:

$$gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G \quad (1.2)$$

Demostración. I Si $gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$, entonces en particular:

$$gNg^{-1} \subseteq N$$

por lo que $gNg^{-1} \in N \quad \forall n \in N$, por lo tanto:

$$N \triangle G$$

II Si N es un subgrupo normal de G , entonces:

$$gNg^{-1} \in N$$

Si $g \in G \quad \forall n \in N$, entonces $gNg^{-1} \subseteq N$.

Por otro lado $g^{-1}Ng = g^{-1}N(g^{-1})^{-1} \subseteq N$, además:

$$N = eNe = g \left(g^{-1}Ng \right) g^{-1} = gNg^{-1}$$

por lo tanto:

$$gNg^{-1} = N$$

□

Lema 2. El subgrupo N de G es un subgrupo normal de G ($N \triangle G$), si y solo si, toda clase lateral izquierda de N en G es una clase lateral derecha de N en G .

Demostración. Sea $aH = \{ah | h \in H\}$ la clase lateral izquierda.

I Si N es un subgrupo normal de $G \quad \forall g \in G \quad \forall n \in N$

$$gNg^{-1} = N$$

entonces, podemos hacer lo siguiente:

$$gN = gNe = gN(g^{-1}g) = (gNg^{-1})g = Ng$$

entonces, toda clase lateral izquierda coincide con la clase lateral derecha.

II Ahora supongamos que las clases laterales coinciden, entonces:

$$gNg^{-1} = (gN)g^{-1} = Ngg^{-1} = N$$

por lo que podemos concluir que se trata de un subgrupo normal.

□

Definición 2. Denotaremos G/N al conjunto de las clases laterales derechas de N en G

$$G/N = \{Na | a \in G\} \quad (1.3)$$

Teorema 1. Si G es un grupo y N es un subgrupo normal de G , entonces G/N es también un grupo y se le denomina grupo cociente.

Demostración. I Cerradura

Prueba asignada a tarea

II Asociatividad

Prueba asignada a tarea

III Identidad

$$N = Ne \quad (1.4)$$

Verificamos para un elemento $x \in G/N \implies x = Na, a \in G$

$$xN = NaN = NNa = Na = x$$

$$Nx = NNa = Na = x \quad (1.5)$$

IV Inverso Sea $x \in G/N$ y sea $Na^{-1} \in G/N$, por verificar que $x^{-1} = Na^{-1}$, es el inverso de $x = Na$

$$xx^{-1} = NaNa^{-1} = NNa^{-1} = Ne = N \quad (1.6)$$

$$x^{-1}x = Na^{-1}Na = NNa^{-1}a = Ne = N \quad (1.7)$$

por lo tanto $Na^{-1} = x^{-1}$ es el inverso de x , por lo que podemos concluir que G/N es un grupo.

□

2

Homomorfismos de grupo

Definición de Homomorfismos

Definición 3. Una aplicación $\varepsilon : G \rightarrow \bar{G}$ es un homomorfismo si G es un grupo con operación (\bullet) & \bar{G} es un grupo con operación (\blacksquare)

Se dice que es un homomorfismo si para $a, b \in G$ cualesquiera se tiene que:

$$\varepsilon(a \bullet b) = \varepsilon(a) \blacksquare \varepsilon(b) \quad (2.1)$$

Ejemplo 1. $G = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ bajo la multiplicación & sea $\bar{G} = \mathbb{R}$ bajo la adición definimos $\varepsilon : G \rightarrow \bar{G}$ como $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \Rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \ln(r)$ sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ t.q. $\varepsilon(r_1 \bullet r_2) = \ln(r_1 r_2) = \ln(r_1) + \ln(r_2) = \varepsilon(r_1) + \varepsilon(r_2)$ por tanto ε es un homomorfismo.

Lema 3. Supongamos que G es un grupo & que N es un subgrupo de G
Definamos la siguiente aplicación

$$\varepsilon : G \rightarrow G \setminus N$$

entonces ε es

$$x \rightarrow N_x \quad (2.2)$$

un Homomorfismo

Definición 4. Un homomorfismo $\varepsilon : G \rightarrow \bar{G}$ se dice que :

a Monomorfismo si es 1-1 (inyectiva)

b Epimorfismo si es suprayectiva

c Isomorfismo si es biyectiva

Definición 5. Si $\varepsilon : G \rightarrow \bar{G}$ es un isomorfismo, decimos que G & \bar{G} son isomorfos & escribimos

$$G \cong \bar{G} \quad (2.3)$$

Proposición 1. Si $\varepsilon : G \rightarrow \dot{G}$ es un homomorfismo entonces

$$\text{Im}\varepsilon < \dot{G} \quad (2.4)$$

donde

$$\text{Im}\varepsilon = \{y \in \dot{G} \mid \varepsilon(x) = y, x \in G\} \subset \dot{G} \quad (2.5)$$

Demostración. Sean

$$y_1, y_2 \in \text{Im}\varepsilon \Rightarrow y_1 = \varepsilon(x_1) \text{ y } y_2 = \varepsilon(x_2) \in \dot{G}$$

$$x_1, x_2 \in G$$

$$y_1 y_2 = \varepsilon x_1 \varepsilon x_2 = \varepsilon(x_1 x_2) \Rightarrow y_1, y_2 \in \text{Im}\varepsilon$$

□

3

Anillos

4

Dominios

Parte II

Algebra Lineal

5

Espacios vectoriales, Isomorfismos

6

Operadores lineales

7

Funciones lineales

8

Espacios duales

9

Teorema de Caley-Hamilton

10

Diagonalizacion

11

Forma canónica de Jordan

12

Vectores propios generalizados

Parte III

Ecuaciones diferenciales

13

Resolución de ecuaciones diferenciales

14

Existencia y unicidad de la solución de una ED

15

Solución aproximada

16

Relación entre soluciones aproximadas y exactas