# Практическая работа

# Составные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона

**Цель работы.** Изучение и сравнение различных методов численного интегрирования на примере составных формул прямоугольников, трапеций, Симпсона.

**Основные теоретические положения.**

Пусть требуется найти определенный интеграл

,

где функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b]. Для приближенного вычисления интегралов чаще всего подынтегральную функцию заменяют «близкой» ей вспомогательной функцией, интеграл от которой вычисляется аналитически. За приближенное значение интеграла принимают значение интеграла от вспомогательной функции.

Заменим функцию на отрезке [a,b] её значением в середине отрезка. Искомый интеграл, равный площади криволинейной фигуры, заменяется на площадь прямоугольника. Из геометрических соображений нетрудно записать формулу прямоугольников:

Приблизив f(x) линейной функцией и вычислив площадь соответствующей трапеции, получим формулу трапеций:

Если же приблизить подынтегральную функцию параболой, проходящей через точки (𝑎, 𝑓(𝑎)), ( 𝑎+𝑏/ 2 , 𝑓( (𝑎+𝑏) /2 )), (𝑏, 𝑓(𝑏)), то получим формулу Симпсона (парабол):

Для повышения точности интегрирования применяют составные формулы. Для этого разбивают отрезок [𝑎, 𝑏] на четное 𝑛 = 2𝑚 число отрезков длины ℎ = (𝑏−𝑎)/𝑛 и на каждом из отрезков длины 2h применяют соответствующую формулу. Таким образом получают составные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона.

На сетке 𝑥𝑖 = 𝑎 + 𝑖ℎ, 𝑦𝑖= f(𝑥𝑖 ), 𝑖 = 0̅̅,̅2̅̅𝑚̅̅ составные формулы имеют следующий вид:

Формула прямоугольников:

Формула трапеций:

Формула Симпсона:

где 𝑅1, 𝑅2, 𝑅3 – остаточные члены (априорные погрешности). Оценки остаточных членов получены в предположении, что соответствующие производные f(x) непрерывны на [a,b].

Для практической оценки погрешности квадратурной можно использовать правило Рунге. Для этого проводят вычисления на сетках с шагом h и h/2, получают приближенные значения интеграла 𝐼ℎ и 𝐼ℎ/2 за окончательные значения интеграла принимают величины:

▪ – для формулы прямоугольников;

▪ – для формулы трапеций;

▪ – для формулы Симпсона.

При этом за погрешность приближённого значения интеграла принимается величина | | (апостериорные формулы), причём для формул прямоугольников и трапеций k = 2, для формулы Симпсона k = 4.

Такую оценку погрешностей применяют обычно для построения адаптивных алгоритмов, т.е. таких алгоритмов, которые автоматически так определяют величину шага h, что результат удовлетворяет требуемой точности.

**Задание:** вычислить определенный интеграл с границами интегрирования от *а* = 0 до *в* = 1, разбив интервал интегрирования на 10 частей, с точностью до .

**Порядок выполнения работы.**

1. Найти область определения функции и сместить границы интегрирования при необходимости.

2. Составить подпрограмму-функцию *f* для вычисления подынтегральной функции.

3. Составить подпрограммы-функции RECT, TRAP, SIMPS для вычисления интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона соответственно на языке программирования Java.

4. Вычислить априорную погрешность и определить по ней верхнее значение шага *h* для достижения заданной точности.

5. Составить головную программу, содержащую оценку по Рунге погрешности каждой из перечисленных ранее квадратурных формул, удваивающих n до тех пор, пока погрешность не станет меньше *ε*, и осуществляющих печать результатов значения интеграла и значения *h* для каждой формулы.

6. Составить таблицу

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Метод прямоугольников | Метод трапеций | Метод Симпсона |
| eps |  |  |  |
| I |  |  |  |
| Априорная погрешность |  |  |  |
| Апостериорная погрешность |  |  |  |
| Верхняя оценка *h* |  |  |  |
| Значение *h*, полученное по методу Рунге |  |  |  |

7. Сделать выводы по полученным результатам.

**Варианты** соответствуют номеру в списке группы.

1.

2.

3. dx

4. dx

5. dx

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13. dx

14.

15. dx

16.

17.

18.

19.

20. dx

21.

22.

23.

24. dx