一元二次方程

1 什么是一元二次方程

一元二次方程是只含有一个未知数，并且未知数的最高次数为二的方程。其一般形式为：

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

其中，a, b, c 为已知常数，x 为未知数。

2 判别式

为了判断方程是否有实数解，我们使用判别式：

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

根据判别式的值，可以判断方程解的情况：

- 若 $\Delta > 0$，方程有两个不相等的实数根；
- 若 $\Delta = 0$，方程有两个相等的实数根；
- 若 $\Delta < 0$，方程无实数根（有两个共轭复数根）。

3 求根公式

当 $a \neq 0$ 时，一元二次方程的解可由求根公式给出：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4 示例

求解方程：

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

计算判别式：

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$$

代入求根公式：

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$$

5 韦达定理

对于一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0),$$

设方程的两个实根为 x_1, x_2，则有：

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

特别地，当方程为

$$x^2 + bx + c = 0,$$

则有：

$$x_1 + x_2 = -b, \qquad x_1 x_2 = c.$$

例题讲解

例 1 把下列方程化为一元二次方程的一般形式，并指出二次项系数、一次项系数和常数项。

(1) 原式： $x(x-2) = 4x^2 - 3x$

$$\begin{aligned} \text{左边展开：} \quad & x^2 - 2x \\ \text{整理方程：} \quad & x^2 - 2x = 4x^2 - 3x \\ \text{移项：} \quad & x^2 - 2x - 4x^2 + 3x = 0 \\ \text{合并同类项：} \quad & -3x^2 + x = 0 \end{aligned}$$

一般形式： $-3x^2 + x = 0$
二次项系数： -3 **一次项系数：** 1 **常数项：** 0

(2) 原式： $\frac{x^2}{3} + \frac{x+1}{2} = \frac{-x-1}{2}$

$$\begin{aligned}
\text{左边整理：}\quad & \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\
\text{右边：}\quad & -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \\
\text{移项：}\quad & \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0 \\
\text{合并：}\quad & \frac{x^2}{3} + x + 1 = 0 \\
\text{通分：}\quad & \frac{x^2 + 3x + 3}{3} = 0 \\
\text{两边乘以 3：}\quad & x^2 + 3x + 3 = 0
\end{aligned}$$

一般形式： $x^2 + 3x + 3 = 0$
二次项系数： 1 **一次项系数：** 3 **常数项：** 3

例 2 若 $x = 1$ 是关于 x 的一元二次方程

$$x^2 + mx - 6 = 0$$

的一个根，求 m 的值。
解： 将 $x = 1$ 代入方程：

$$1^2 + m \cdot 1 - 6 = 0$$

$$1 + m - 6 = 0$$

$$m - 5 = 0$$

因此，$m = 5$。
例 3 若 m 是关于 x 的一元二次方程

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

的一个根，求

$$m^2 + \frac{1}{m^2}$$

的值。
解： 将 $x = m$ 代入方程：

$$m - 2 - \frac{1}{m} = 0$$

$$m-\frac{1}{m}=2$$

$$\left(m-\frac{1}{m}\right)^2=4$$

$$m^2-2+\frac{1}{m^2}=4$$

$$m^2+\frac{1}{m^2}=6$$

例 4 已知关于 x 的一元二次方程

$$x^2+2mx+m^2-1=0$$

判断方程根的情况。

例 5 若 α,β 是关于一元二次方程

$$3x^2+2x-9=0$$

的两根，则

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=$$