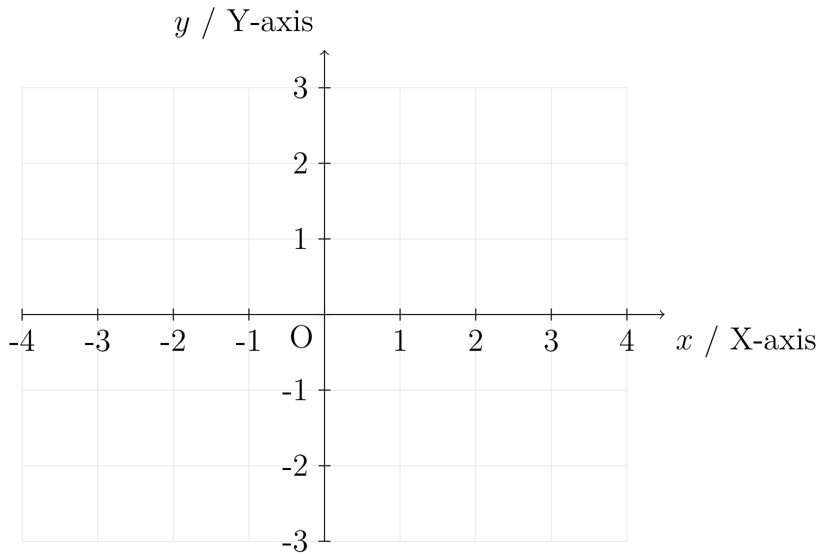
CHAPTER 1

RECTANGULAR COORDINATE SYSTEM

主要讲解平面直角坐标系相关知识。

1 定义

平面直角坐标系在英文里通常翻译为 Cartesian coordinate system 或更具体的 rectangular coordinate system。
Cartesian coordinate system 是最常见、标准的翻译。这来源于法国数学家笛卡尔 (René Descartes)，他在解析几何中引入了这种坐标系。
Rectangular coordinate system 强调坐标轴互相垂直，形成直角。
在初中或高中教材中，常用来对应"平面直角坐标系"。



2 平面直角坐标系组成

以前几何中学过，点运动成线，线运动成面。那么可以说，一个平面就是由无数个点组成的。

前面数轴中，每个点都可以用一个数来表示。数轴把一条直线分成三部分轴是一维的，那么平面就是二维的。数轴把一条直线分成三部分，原点，正半轴和负半轴。
平面直角坐标系则是由两个互相垂直的数轴组成的。
在平面直角坐标系中，每个点都可以用一对有序数 (x, y) 来表示。
这里，x 表示点在水平轴（通常称为 x 轴）上的位置，y 表示点在垂直轴（通常称为 y 轴）上的位置。

因此，平面直角坐标系实际上是由两个互相垂直的数轴组成的。
水平轴（x 轴）和垂直轴（y 轴）在原点 $O(0,0)$ 处相交，将平面分成四个象限。

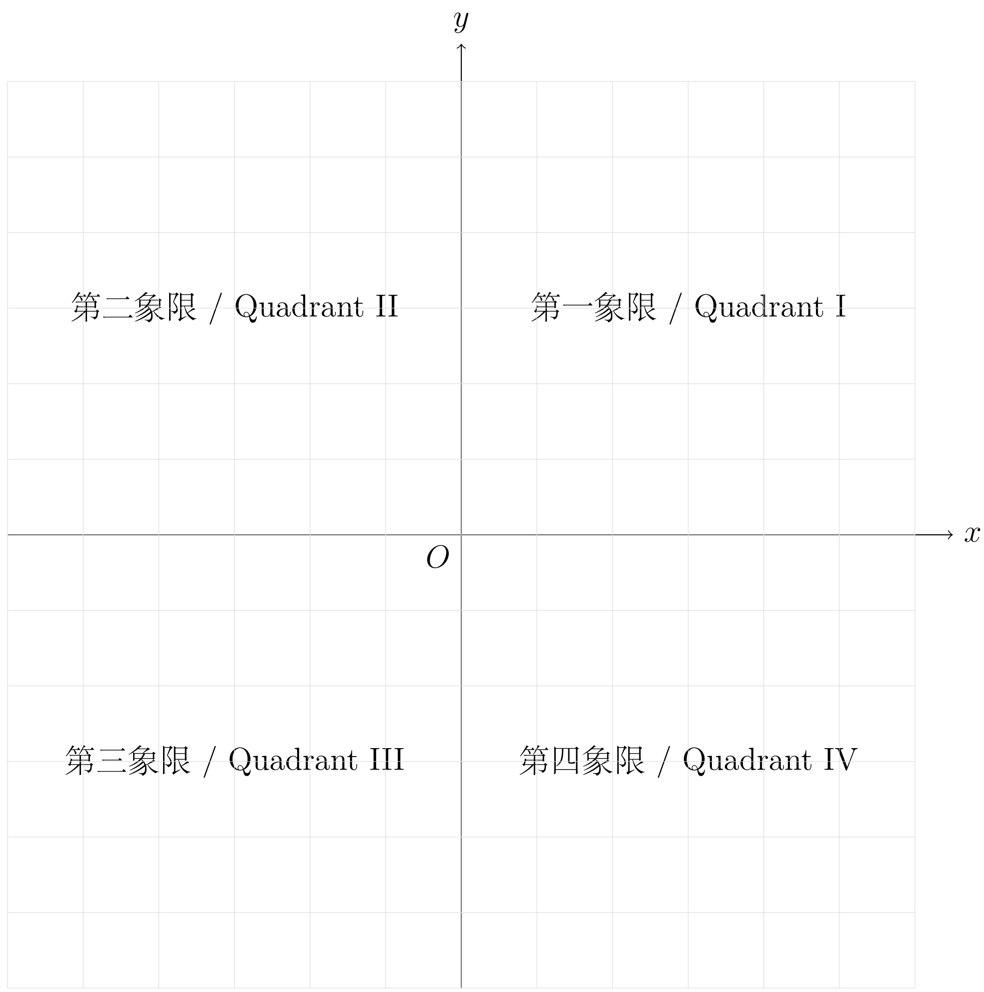
2.1 坐标轴

- 水平的数轴称为 x 轴（横轴）。
- 垂直的数轴称为 y 轴（纵轴）。
- 两个坐标轴在原点 $O(0,0)$ 处相交。

2.2 象限

两个坐标轴将平面分成四个部分，称为象限。

- 第一象限：$x > 0$，$y > 0$
- 第二象限：$x < 0$，$y > 0$
- 第三象限：$x < 0$，$y < 0$
- 第四象限：$x > 0$，$y < 0$

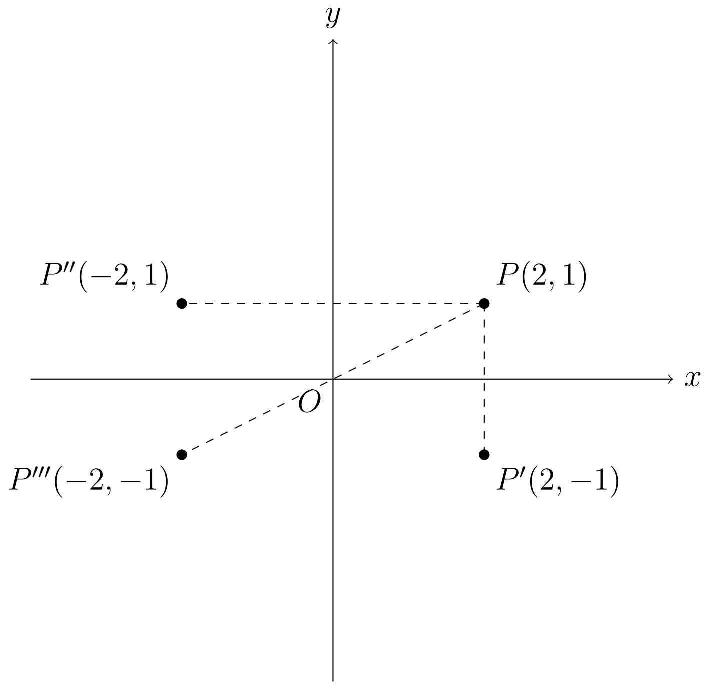


3 性质与应用

3.1 对称性

平面直角坐标系具有对称性。

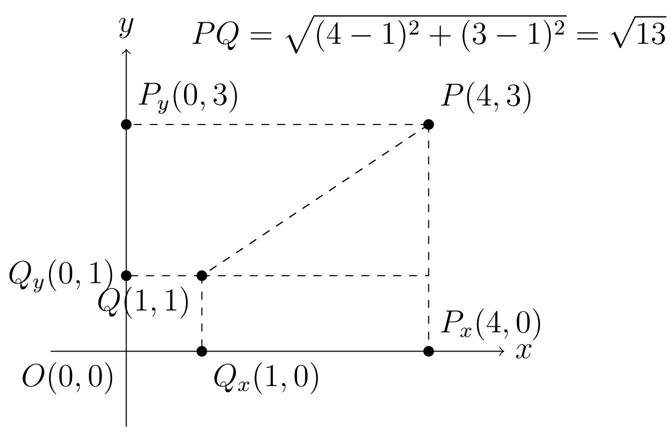
- 关于 x 轴对称：点 (x, y) 的对称点为 $(x, -y)$。
- 关于 y 轴对称：点 (x, y) 的对称点为 $(-x, y)$。
- 关于原点对称：点 (x, y) 的对称点为 $(-x, -y)$。

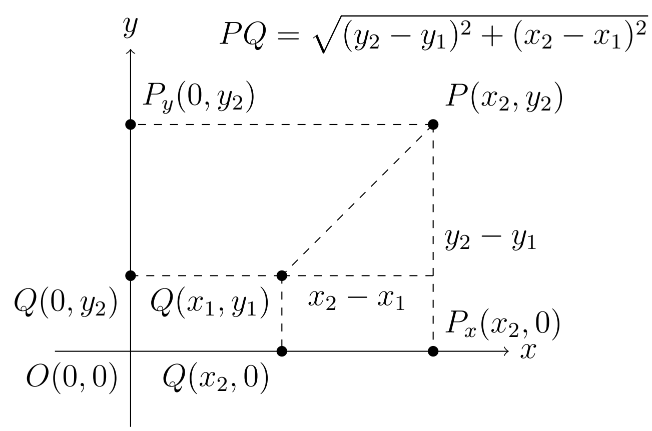


3.2 距离公式

在平面直角坐标系中，点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 之间的距离可以用以下公式计算：

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

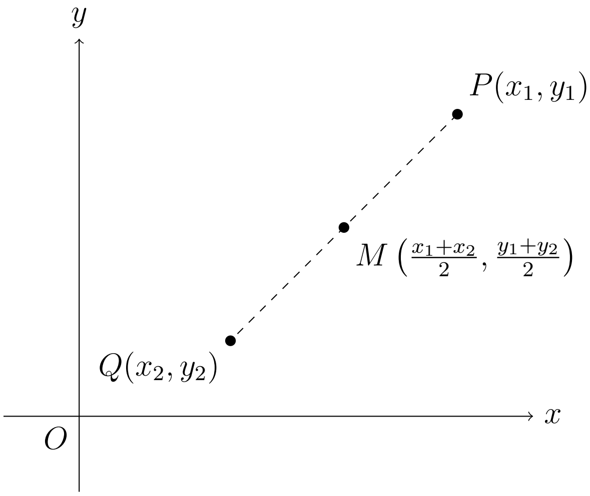




3.3 中点公式

点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 之间的中点 M 的坐标为：

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



4 应用

1. 已知点 $A(3,2)$，写出它关于 x 轴的对称点坐标。
2. 已知点 $A(a+3, a+5)$，在 x 轴上，求这个点坐标。
3. 已知点 $B(-4,5)$，写出它关于 y 轴的对称点坐标。
4. 已知点 $A(5b+15, b-5)$，在 y 轴上，求这个点坐标。
5. 已知点 $C(2,-3)$，写出它关于原点的对称点坐标。
6. 已知点 $C(a+2, b+3)$，关于原点的对称点坐标 $C(-5a+6, -3b+9)$, 求 a、b 的值。
7. 已知点 $D(a,b)$，分别写出它关于 x 轴、y 轴和原点的对称点坐标。
8. 在平面直角坐标系中，点 $E(1,2)$ 关于 x 轴对称后得到点 E'，再将 E' 关于 y 轴对称，写出最终点的坐标。
9. 在平面直角坐标系中，画出函数 $y = 2x + 1$ 的图像，并判断该直线与坐标轴的交点坐标。
10. 已知点 $C(3,-2)$，分别写出它关于 x 轴、y 轴和原点的对称点坐标。
11. 在平面直角坐标系中，若点 $D(a,b)$ 到原点的距离为 5，写出 a 和 b 满足的关系式。

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 5$$

CHAPTER 2

LINEAR FUNCTIONS

主要讲解一次函数以及图像性质。

1 函数介绍

在初中数学里，我们这样描述这个过程:“给定一个数 x，通过某种规则（函数）得到另一个数 y。”
这个过程可以看作是一个“盒子”，你把一个数 x 放进盒子里，盒子根据某个规则处理这个数，然后吐出另一个数 y。这个规则就是我们所说的“函数”。
在数学中，函数通常表示为 $y = f(x)$，其中 f 是函数的名称，表示“规则”，x 是输入值，y 是输出值。
函数的核心概念包括以下几个方面:

1. 两个变量：我们通常用 x 和 y 来表示两个变化的量。

2. x (自变量): 这就是你放进盒子的“输入”。“自”变量的意思是，你通常可以（在一定范围内）自由选择它的值。

3. y (因变量): 这就是盒子吐出来的“输出”。“因”变量的意思是，它的值是因为 x 的值和那个“规则”共同决定的。那个“规则”(f): 这就是函数的核心。它是一个数学表达式，告诉我们 x 和 y 之间的对应关系。

4. 表示方法：函数可以通过公式、图像或表格等方式表示。

2 一次函数定义

一次函数是指形如 $y = kx + b$ 的函数，其中 k 和 b 是常数，且 $k \neq 0$。
在这个表达式中:

- y 是因变量，表示函数的输出值。
- x 是自变量，表示函数的输入值。
- k 是斜率，表示直线的倾斜程度。它决定了当 x 增加一个单位时，y 增加或减少多少。
- b 是截距，表示直线与 y 轴的交点。当 $x = 0$ 时，y 的值就是 b。

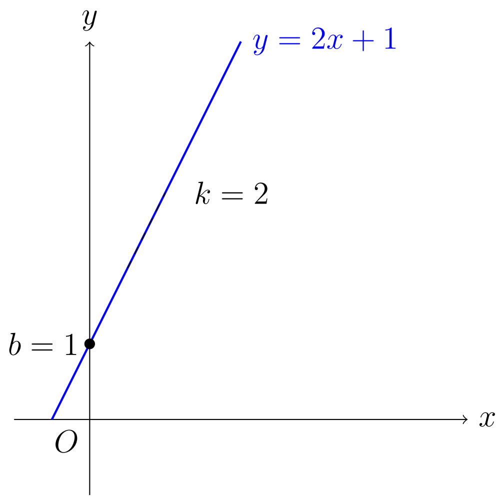
一次函数的图像是一条直线，因此也被称为线性函数。
当 $b = 0$ 时，函数简化为 $y = kx$，这时函数称为正比例函数。
正比例函数的图像通过原点 $O(0, 0)$，且斜率 k 决定了直线的倾斜程度。

3 一次函数的图像

一次函数的图像是一条直线。
直线的斜率 k 决定了直线的倾斜程度:

- 当 $k > 0$ 时，直线向上倾斜，表示随着 x 的增加，y 也增加。
- 当 $k < 0$ 时，直线向下倾斜，表示随着 x 的增加，y 减少。

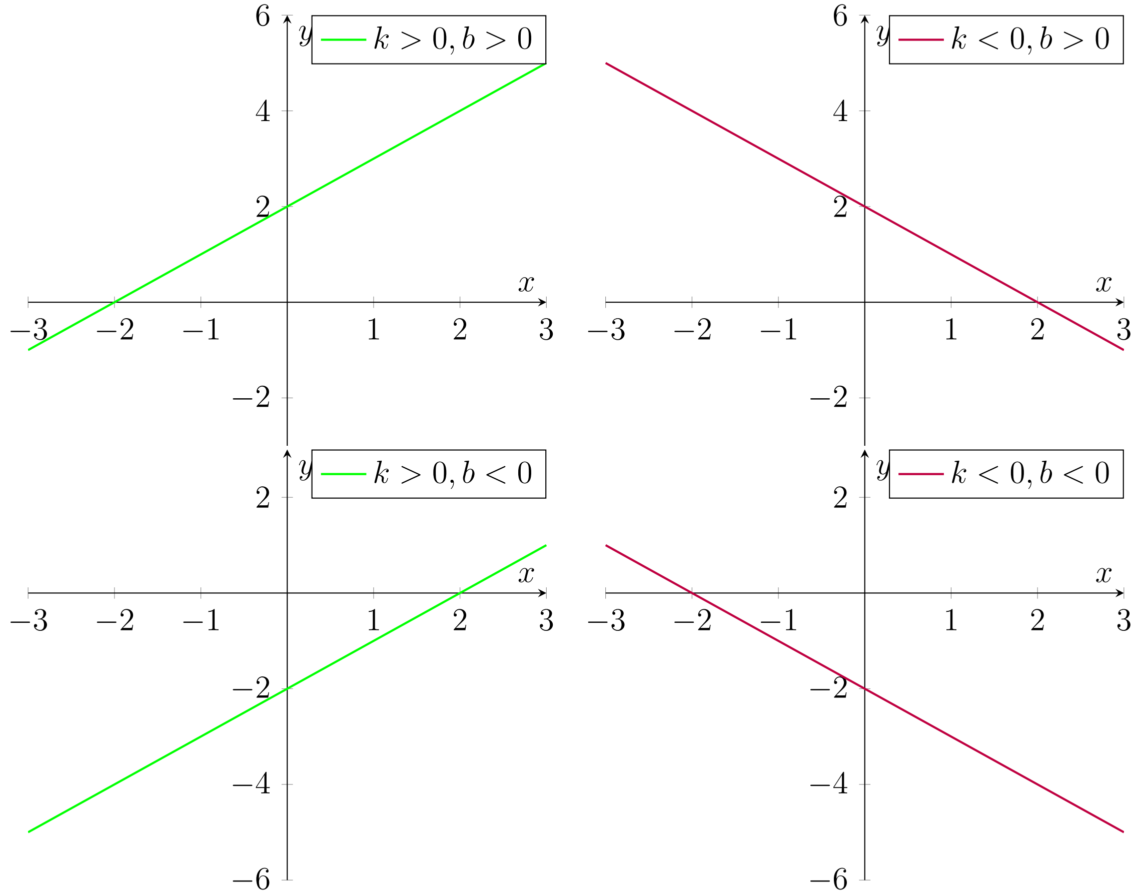
截距 b 决定了直线与 y 轴的交点位置。



4 一次函数的性质

一次函数具有以下几个重要性质:

- 直线性：一次函数的图像是一条直线，表示 x 和 y 之间的线性关系。
- 斜率：斜率 m 决定了直线的倾斜程度，反映了 y 随 x 变化的速率。
- 截距：截距 b 表示直线与 y 轴的交点位置。
- 单调性：当 $m > 0$ 时，函数是增函数；当 $m < 0$ 时，函数是减函数。
- 定义域和值域：一次函数的定义域和值域都是全体实数 $\mathbb{R}$。



斜率 k	截距 b	图像性质
$k>0$	$b>0$	上升直线，过 y 轴正半轴，过 x 轴负半轴，穿过第一、二、三象限
$k>0$	$b<0$	上升直线，过 y 轴负半轴，过 x 轴正半轴，穿过第一、三、四象限
$k<0$	$b>0$	下降直线，过 y 轴正半轴，过 x 轴正半轴，穿过第一、二、四象限
$k<0$	$b<0$	下降直线，过 y 轴负半轴，过 x 轴负半轴，穿过第二、三、四象限
$k>0$	$b=0$	正比例函数，直线过原点，向右上方倾斜
$k<0$	$b=0$	正比例函数，直线过原点，向右下方倾斜

5 应用实例

一次函数在实际生活中有广泛的应用。例如：

- 经济学：描述成本与收益之间的关系。
- 物理学：描述物体的匀速运动。
- 日常生活：计算打车费用、购物总价等。

通过理解一次函数的定义、图像和性质，我们可以更好地分析和解决实际问题。

6 练习题

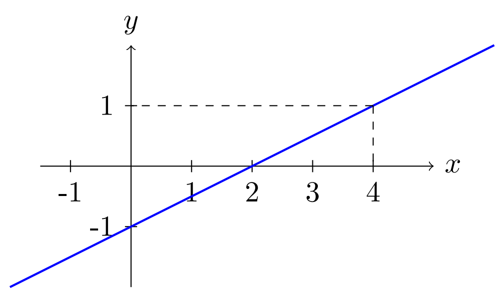
1. 写出一次函数的一般形式，并解释各个部分的含义。
2. 画出函数 $y = 3x + 2$ 的图像，并标出斜率和截距。
3. 判断函数 $y = -2x + 5$ 是增函数还是减函数，并解释原因。
4. 在下列函数中，哪一个 **不是一次函数**?
   (a) $y = 2x + 3$
   (b) $y = -x + 5$
   (c) $y = \frac{1}{2}x - 4$
   (d) $y = x^2 + 1$
5. 在下列点中，哪一个在函数 $y = x + 1$ 的图像上?
   (a) $A(2, 3)$
   (b) $B(1, 3)$
   (c) $C(0, 0)$
   (d) $D(1, 0)$
6. 已知：$y = -ax^2 + 3$（$a \neq 0$）是关于 x 的一次函数，下列说法正确的是（ ）
   (a) 当 $x > 0$ 时，$y > 3$
   (b) 函数图象与 y 轴的交点为 $(0, 3)$
   (c) y 随 x 的增大而增大
   (d) 函数图象经过第一、二、三象限
7. 已知 $(-2, y_1), (-1, y_2), (3, y_3)$ 是直线 $y = -5x+a$（a 为常数）上的三个点，则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是（ ）
   (a) $y_3 > y_2 > y_1$

(b) $y_1 > y_2 > y_3$

(c) $y_1 > y_3 > y_2$

(d) $y_3 > y_1 > y_2$

8. 已知一次函数 $y = ax + b$ 的图象如图所示，则方程 $ax + b = 1$ 的解为（　）



A. $x = 4$

B. $x = 2$

C. $x = 0$

D. $x = -1$