DOI:10.16854/j.cnki.1000-0712.1992.12.012

第11卷 12
1992年 第12期

大学物理
COLLEGE PHYSICS

Vol.11 No.12
Dec.1992

Feynman－Hellmann 定理的两个推广式及其应用

杭州师范学院　高守恩

摘要　本文将 Feynman－Hellmann 定理推广，得到了两个有用的公式，并讨论了它们的应用.

一、引言

Feynman－Hellmann 定理（以下简称 F－H 定理）发表在本世纪 30 年代末[1]，它的应用相当广泛，既可以用来作理论分析、又可以用来计算力学量的平均值．量子力学中有许多复杂的问题，利用 F－H 定理去求解比直接用量子力学公式去求解要简单方便得多．本文把 F－H 定理加以推广，得出了两个有用的公式，应用就更为广泛，并且具体地讨论了它们在微扰理论和其他一些问题中的应用．

二、F－H 定理的两个推广式

设量子体系的哈密顿算符 $\hat{H}$ 含有实参数 λ，它的本征值 $\varepsilon_n(\lambda)$ 和归一化的本征函数 $\psi_n(\lambda)$ 一般也是 λ 的函数，并满足定态薛定谔方程

$$\hat{H}(\lambda)\psi_n(\lambda)=\varepsilon_n(\lambda)\psi_n(\lambda) \tag{1}$$

利用积分号下对参数 λ 求导的方法，不难得到

$$\langle\psi_n\left|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\right|\psi_n\rangle=\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial\lambda} \tag{2}$$

这就是著名的 F－H 定理．

在能量表象中，哈密顿算符 $\hat{H}$ 的矩阵元为

$$\langle\psi_m|\hat{H}|\psi_n\rangle=\varepsilon_n\delta_{mn}. \tag{3}$$

上式等式两边对 λ 求导，则有

$$\langle\frac{\partial\psi_m}{\partial\lambda}|\hat{H}|\psi_n\rangle+\langle\psi_m\left|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\right|\psi_n\rangle+\langle\psi_m|\hat{H}|\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}\rangle=\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial\lambda}\delta_{mn},$$

即得

$$\langle\psi_m\left|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\right|\psi_n\rangle+(\varepsilon_m-\varepsilon_n)\alpha_{mn}(\lambda)=\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial\lambda}\delta_{mn}, \tag{4}$$

式中

$$\alpha_{mn}(\lambda)=\langle\psi_m\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}\right.\rangle=-\alpha^*_{nm} \tag{5}$$

系数 α_{mn} 满足反厄密条件．当 $m=n$ 时，由(4)式得

$$\langle\psi_n\left|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\right|\psi_n\rangle=\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial\lambda}$$

这就是 F－H 定理．当 $m\neq n$ 时，由(4)式得

$$\langle\psi_m\left|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\right|\psi_n\rangle+(\varepsilon_m-\varepsilon_n)\alpha_{mn}=0 \tag{6}$$

由上讨论可知，F－H 定理是(4)式的特殊情况，所以(4)式是 F－H 定理的第一个推广式．

若设力学量算符 $\hat{F}$ 依赖于与 $\hat{H}$ 同一个实参数 λ，则 $\hat{F}$ 和 $\hat{H}$ 乘积算符 $(\hat{F}\hat{H})$ 的平均值对实参数 λ 求导得

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle\psi_n|\hat{F}\hat{H}|\psi_n\rangle=\langle\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}|\hat{F}\hat{H}|\psi_n\rangle+\langle\psi_n\left|\frac{\partial\hat{F}}{\partial\lambda}\hat{H}+F\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\right|\psi_n\rangle+\langle\psi_n|\hat{F}\hat{H}|\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}\rangle$$

整理后得

$$\langle\psi_n\left|\hat{F}\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\right|\psi_n\rangle=\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial\lambda}\langle\psi_n|\hat{F}|\psi_n\rangle-\langle\psi_n|[\hat{F},\hat{H}]|\psi_n\rangle, \tag{7}$$

令

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}=\sum_m\alpha_{mn}\psi_m \tag{8}$$

利用(6)式、(7)式可以写成

$$\langle\psi_n\left|\hat{F}\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\right|\psi_n\rangle=\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial\lambda}\langle\psi_n|\hat{F}|\psi_n\rangle+\sum{}'h_{mn}\langle\psi_n|\hat{F}|\psi_m\rangle \tag{9}$$

式中

$$h_{mn}=\langle\psi_m\left|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\right|\psi_n\rangle,\ h=\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda} \tag{10}$$

$\sum\limits_m{}'$ 表示除了 $m=n$ 项外，对所有 m 求和，系数 α_{nn} 由(5)式可知，是纯虚数，选择适当的相位因子，可以使它等于零，关于这点证明如下：

按定义　$\alpha_{nn}=\langle\psi_n\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}\right.\rangle$

用 $e^{i\beta}$ 代替 ψ_n，式中 β 是依赖于实的参数 λ，则有

$$\alpha_{nn} \to \left\langle e^{i\beta}\psi_n \middle| \frac{\partial}{\partial\lambda}(e^{i\beta}\psi_n)\right\rangle = i\beta + \alpha_{nn}$$

我们选择 $i\beta = -\alpha_{nn}$，就使得对角系数 $\alpha_{nn}=0$，于是有

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda} = \sum_m{}' \alpha_{mn}\psi_m \qquad (11)$$

在(9)式中，当 $\hat{F}=\hat{I}$（$\hat{I}$ 是单位矩阵）时，则(9)式的右边第二项等于零，则得

$$\left\langle\psi_n\middle|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\middle|\psi_n\right\rangle = \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial\lambda}$$

这表明 F－H 定理是(9)式的特殊情况，所以(9)式是 F－H 定理第二个推广式.

我们还可以看到，如果(9)式中 ψ_n 也是 $\hat{F}$ 的本征函数，则(9)式右边的第二项也为零，则有

$$\left\langle\psi_n\middle|\hat{F}\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\middle|\psi_n\right\rangle = \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial\lambda}\langle\psi_n|\hat{F}|\psi_n\rangle \qquad (12)$$

这个公式，在计算问题过程中是很有用的.

上面我们得到的 F－H 定理的两个推广式，一个是从对角情况推广到非对角的情况，另一个是把 F－H 定理扩充为(9)式的形式.

三、F－H 定理推广式在微扰理论中的应用

为了利用 F－H 定理的推广式来研究微扰理论，我们首先导出哈密顿算符 $\hat{H}$ 和它的本征值 ε_n 对 λ 求导的矩阵元. 为此，(2)式两边对 λ 求导得

$$\left\langle\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}\middle|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\middle|\psi_n\right\rangle + \left\langle\psi_n\middle|\frac{\partial^2\hat{H}}{\partial\lambda^2}\middle|\psi_n\right\rangle + \left\langle\psi_n\middle|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\middle|\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}\right\rangle = \frac{\partial^2\varepsilon_n}{\partial\lambda^2},$$

将(11)式代入上式得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varepsilon_n}{\partial\lambda^2} - \frac{1}{2}\left\langle\psi_n\middle|\frac{\partial^2\hat{H}}{\partial\lambda^2}\middle|\psi_n\right\rangle = \sum_m{}' h_{nm}\alpha_{mn} = \sum_m{}' \frac{h_{nm}h_{mn}}{\varepsilon_n-\varepsilon_m} \qquad (13)$$

(10)式两边对 λ 求导后得

$$\frac{\partial h_{nm}}{\partial\lambda} = \left\langle\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}\middle|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\middle|\psi_m\right\rangle + \left\langle\psi_n\middle|\frac{\partial^2\hat{H}}{\partial\lambda^2}\middle|\psi_m\right\rangle + \left\langle\psi_n\middle|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\middle|\frac{\partial\psi_m}{\partial\lambda}\right\rangle$$

考虑了(8)式，上式可以写成

$$\frac{\partial h_{nm}}{\partial\lambda} - \left\langle\psi_n\middle|\frac{\partial^2\hat{H}}{\partial\lambda^2}\middle|\psi_m\right\rangle = \sum_k(h_{nk}\alpha_{km} - \alpha_{nk}h_{km}) \quad (14)$$

(13)式两边再对 λ 求导一次后得

$$\frac{1}{3!}\frac{\partial^3\varepsilon_n}{\partial\lambda^3} - \frac{1}{3!}\left\langle\psi_n\middle|\frac{\partial^3\hat{H}}{\partial\lambda^3}\middle|\psi_n\right\rangle - \frac{1}{2}\sum_m{}'(h^{(2)}_{nm}\alpha_{mn} - \alpha_{nm}h^{(2)}_{mn}) = \sum_{m,k}{}' \frac{h_{nk}h_{km}h_{mn}}{(\varepsilon_m-\varepsilon_n)(\varepsilon_k-\varepsilon_n)} - \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial\lambda}\sum_m{}'\frac{h_{nm}h_{mn}}{(\varepsilon_m-\varepsilon_n)^2}, \qquad (15)$$

式中 $h^{(2)} = \dfrac{\partial^2\hat{H}}{\partial\lambda^2}$，$h^{(2)}_{nm} = \left\langle\psi_n\middle|\dfrac{\partial^2\hat{H}}{\partial\lambda^2}\middle|\psi_m\right\rangle$. (16)

利用这些矩阵元和求和规则，可以得到微扰理论中非简并定态微扰理论的主要公式.

众所周知，微扰体系的哈密顿算符 $\hat{H}$ 写成

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{H}' \qquad (17)$$

的形式，式中 λ 是连续可变的实参数，是一个小量，$\hat{H}'$ 称为微扰，$\hat{H}_0$ 表示未受微扰时体系的哈密顿算符，它的本征值 $E^{(0)}_n = \varepsilon_n(\lambda=0)$ 和本征函数 $\psi^{(0)}_n = \psi_n(\lambda=0)$ 是已知的，或严格可以求解的，它们满足方程

$$\hat{H}_0\psi^{(0)}_n = E^{(0)}_n\psi^{(0)}_n. \qquad (18)$$

微扰体系的薛定谔方程为

$$\hat{H}\psi_n = (\hat{H}_0 + \lambda\hat{H}')\psi_n = \varepsilon_n\psi_n. \qquad (19)$$

由于方程(19)不能精确求解，故采用微扰近似法求解.

现在在 $\lambda=0$ 附近用泰勒级数展开 $\hat{H}$ 的本征值 ε_n，我们得

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n(\lambda=0) + \lambda\left.\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} + \frac{1}{2!}\lambda^2\left.\frac{\partial^2\varepsilon_n}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=0} + \frac{1}{3!}\lambda^3\frac{\partial^3\varepsilon_n}{\partial\lambda^3} + \cdots \qquad (20)$$

为了简单起见，假定 $\varepsilon_n(\lambda=0) = E^{(0)}_n$ 是非简并的. 对于哈密顿算符(17)式，我们有

$$\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda} = \hat{H}', \quad \frac{\partial^n\hat{H}}{\partial\lambda^n} = 0, \ (n\geqslant 2) \qquad (21)$$

在 $\lambda\to 0$ 的极限情况下，有

$$h_{nm}(\lambda=0) = \left\langle\psi^{(0)}_n\middle|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\middle|\psi^{(0)}_m\right\rangle = H'_{nm} \qquad (22)$$

能量微扰一级修正，可以从(20)式和(2)式得

$$E^{(1)}_n = \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial\lambda} = \left\langle\psi^{(0)}_n\middle|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\middle|\psi^{(0)}_n\right\rangle = H'_{nn} \qquad (23)$$

此式表示能量微扰一级修正，它等于微扰在 $\hat{H}_0$ 本征函数 $\psi^{(0)}_n$ 描述的状态中的平均值.

能量微扰二级修正，可以从(20)式和(13)式得

$$E^{(2)}_n = \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2\varepsilon_n}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=0} = \sum_m{}'\frac{h_{nm}h_{mn}}{E^{(0)}_n - E^{(0)}_m} = \sum_m{}'\frac{|H'_{nm}|^2}{E^{(0)}_n - E^{(0)}_m} \qquad (24)$$

能量微扰三级修正，可以从(20)式和(15)式得

$$E_n^{(3)}=\frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3\varepsilon_n}{\partial\lambda^3}\right|_{\lambda=0}=\sum_{m,k}{}'\frac{H'_{nm}H'_{mk}H'_{kn}}{(E_m^{(0)}-E_n^{(0)})(E_k^{(0)}-E_n^{(0)})}-E_n^{(1)}\sum_m{}'\frac{|H'_{nm}|^2}{(E_n^{(0)}-E_m^{(0)})} \quad (25)$$

通过(16)式两边再对 λ 求导，可以得到高一级的微扰修正，如此继续下去，可以得到能量任意高阶微扰修正.

关于波函数的微扰修正. 我们将 $\hat{H}$ 的本征函数 ψ_n 在 $\lambda=0$ 附近用泰勒级数展开

$$\psi_n=\psi_n(\lambda=0)+\lambda\left.\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}+\lambda^2\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2\psi_n}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=0}+\cdots \quad (26)$$

波函数的微扰一级修正，由(26)式和(8)式得

$$\psi_n^{(1)}=\left.\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=\sum_m{}'\alpha_{mn}\psi_m^{(0)}=\sum_m{}'\frac{H'_{mn}}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\psi_m^{(0)} \quad (27)$$

再对上式两边对 λ 求导，并考虑了(14)式，在 $\lambda\to0$ 极限情况下，展开式(26)中的高阶项，就是我们所求得的波函数相应于波函数微扰高阶修正.

由上所述，能量和波函数的各级修正，可以利用F－H定理推广式来得到. 一般来说，能量求到二级近似，波函数到一级修正、问题的解与实验结果比较，已符合得较好，所以非简并的定态微扰理论高阶的公式，一般不去具体的给出.

四、关于F－H定理的推广式在其他问题中应用举例

[例一]，有一维线性谐振子，试证线性谐振子动能平方的平均值等于其势能平方的平均值，即

$$\langle\psi_n|\hat{T}^2|\psi_n\rangle=\langle\psi_n|V^2(x)|\psi_n\rangle \quad (28)$$

[解] 一维线性谐振子的哈密顿算符为

$$\hat{H}=\hat{T}+\hat{V}(x)=-\frac{\hbar^2d^2}{2mdx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (29)$$

它的本征值与本征函数为

$$\varepsilon_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega,\ (n=0,1,2,\cdots) \quad (30)$$

$$\psi_n=N_n e^{-\frac{1}{2}\xi^2}H_n(\xi),\ \xi=\alpha x. \quad (31)$$

在公式(9)中，若令 $\hat{F}=\hat{H}$，$\lambda=\hbar$，即有

$$\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hbar}=\frac{2}{\hbar}\hat{T},\ \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial\hbar}=\varepsilon_n/\hbar. \quad (32)$$

将(32)式代入(9)式得

$$\langle\psi_n|(\hat{T}+V(x))\frac{2}{\hbar}\hat{T}|\psi_n\rangle=\frac{2}{\hbar}\langle\psi_n|\hat{T}^2+V(x)\hat{T}|\psi_n\rangle=\frac{\varepsilon_n^2}{\hbar} \quad (33)$$

若令 $\lambda=\omega$，则有

$$\frac{\partial\hat{H}}{\partial\omega}=\frac{2}{\omega}V(x),\ \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial\omega}=\frac{\varepsilon_n}{\omega}, \quad (34)$$

将(34)式代入(9)式得

$$\langle\psi_n|(\hat{T}+V(x))\frac{2}{\omega}V(x)|\psi_n\rangle=\frac{2}{\omega}\langle\psi_n|\hat{T}V(x)-V^2(x)|\psi_n\rangle=\frac{\varepsilon_n^2}{\omega}, \quad (35)$$

以 $\frac{1}{\omega}\times$(33)式减去以 $\frac{1}{\hbar}\times$(35)式得

$$\langle\psi_n|\hat{T}^2-V^2(x)+V(x)\hat{T}-\hat{T}V(x)|\psi_n\rangle=0$$

即

$$\langle\psi_n|\hat{T}^2-V^2(x)|\psi_n\rangle=\langle\psi_n|\hat{T}V(x)-V(x)\hat{T}|\psi_n\rangle$$

现在我们证明，在束缚态 ψ_n 情况下

$$\langle\psi_n|\hat{T}V(x)-V(x)\hat{T}|\psi_n\rangle=0 \quad (36)$$

证：$\langle\psi_n|\hat{T}V(x)-V(x)\hat{T}|\psi_n\rangle$

$=\langle\psi_n|\hat{H}V(x)-V(x)\hat{H}|\psi_n\rangle$

$=\varepsilon_n\langle\psi_n|V(x)-V(x)|\psi_n\rangle=0$

所以，我们得到

$$\langle\psi_n|\hat{T}^2|\psi_n\rangle=\langle\psi_n|V^2(x)|\psi_n\rangle.$$

[例二]，类氢离子(核电荷为 Ze)中电子，处于束缚态 ψ_{nlm} 中，试计算 r^{-1}，r^{-2}，r^{-3} 在态 ψ_{nlm} 中的平均值.

[解] 在中心力场 $V(r)$ 中，粒子的哈密顿算符为

$$\hat{H}=\frac{1}{2\mu}\hat{p}_r^2+\frac{1}{2\mu r^2}\hat{L}^2+V(r),\quad (V(r)=-Ze^2/r). \quad (37)$$

在 $(\hat{H},\hat{L}^2,\hat{L}_z)$ 对角表象中，$\hat{H}$ 的归一化本征函数为

$$\psi_{nlm}=\frac{1}{r}u(r)Y_{lm}(\theta,\varphi) \quad (38)$$

相应的本征值为

$$\varepsilon_n=-\frac{Z^2\mu e^4}{2n^2\hbar^2}. \quad (39)$$

(28)中 $u(r)$ 满足方程

$$-\frac{\hbar^2d^2}{2\mu dr^2}u(r)+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}u(r)-\frac{Ze^2}{r}u(r)=\varepsilon_n u(r) \quad (40)$$

总能量算符 $\hat{H}$ 等价于

$$\hat{H} \to -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}-\frac{Ze^2}{r}.$$

现在利用公式(9)，分别计算出$\langle \frac{1}{r}\rangle_{nlm}$，$\langle \frac{1}{r^2}\rangle_{nlm}$，$\langle \frac{1}{r^3}\rangle_{nlm}$

在公式(9)中，令$\hat{F}=\hat{L}_z$，$\lambda=Ze^2$，则有

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial (Ze^2)}=-\frac{1}{r}, \quad \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial (Ze^2)}=-\frac{Z}{n^2 a_0} \quad (41)$$

式中$a_0=\hbar^2/\mu e^2$是玻尔第一轨道半径，将(41)式代入(9)式得

$$\langle \psi_{nlm} | \hat{L}_z\left(-\frac{1}{r}\right) \Big| \psi_{nlm}\rangle=-\frac{Z}{n^2 a_0}\langle \psi_{nlm} | \hat{L}_z | \psi_{nlm}\rangle$$

即得

$$\langle \frac{1}{r}\rangle_{nlm}=\langle \psi_{nlm} \Big| \frac{1}{r} \Big| \psi_{nlm}\rangle=\frac{Z}{n^2 a_0}. \quad (42)$$

若令$\lambda=l$，则有

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial l}=\frac{2l+1}{2\mu r^2}\hbar^2, \quad \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial l}=-\frac{2\varepsilon_n}{n}, \quad (43)$$

将(43)式代入(9)式中，我们就得

$$\frac{(2l+1)\hbar^2}{2\mu}\langle \psi_{nlm} \Big| \hat{L}_z \frac{1}{r^2} \Big| \psi_{nlm}\rangle$$

$$=-\frac{2\varepsilon_n}{n}\langle \psi_{nlm} | \hat{L}_z | \psi_{nlm}\rangle$$

即得

$$\langle \frac{1}{r^2}\rangle_{nlm}=\langle \psi_{nlm} \Big| \frac{1}{r^2} \Big| \psi_{nlm}\rangle=\frac{Z^2}{n^3 a_0^2\left(l+\frac{1}{2}\right)} \quad (44)$$

若令$\lambda=r$，则有

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial r}=-\frac{l(l+1)\hbar^2}{\mu r^3}+\frac{Ze^2}{r^2}, \quad \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r}=0 \quad (45)$$

将(45)式代入(9)式中，我们就得到

$$\langle \psi_{nlm} \Big| \hat{L}_z\left(-\frac{l(lH)\hbar^2}{\mu r^3}+\frac{Ze^2}{r^2}\right) \Big| \psi_{nlm}\rangle=0$$

即得

$$\langle \frac{1}{r^3}\rangle_{nlm}=\langle \psi_{nlm} \Big| \frac{1}{r^3} \Big| \psi_{nlm}\rangle=\frac{Z\mu e^2}{l(l+1)\hbar^2}\langle \frac{1}{r^2}\rangle_{nlm}$$

$$=\frac{1}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3. \quad (46)$$

从这个例子中看出，利用F－H定理的推广式，计算类氢离子中电子处于束缚态ψ_{nlm}中的$\langle \frac{1}{r}\rangle_{nlm}$，$\langle \frac{1}{r^2}\rangle_{nlm}$，$\langle \frac{1}{r^3}\rangle_{nlm}$，很方便地得到了正确结果.

总之，F－H定理的两个推广式，它们的应用比F－H定理本身更为广泛，计算量子力学中复杂的有关问题，既简单又方便. 关于它们的应用进一步的讨论，有待于深入，这对于发展量子力学的基础理论无疑是有意义的.

参考文献

[1] R.P.Feynman, *Phy*, *Rev*. 56(1935)340

[2] 钱伯初等,《量子力学习题精选与剖析》, 科学出版社(1988), 第154页.

(上接29页)

的逆变换式 $\cos\theta'=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}$

可求出 $$\frac{1}{1+\beta\cos\theta'}=\gamma^2(1-\beta\cos\theta) \quad (9)$$

于是，依据(6)、(7)式及(9)式有

$$\lambda_f-\lambda_i=\frac{\lambda_f'}{\gamma(1+\beta\cos\theta_f')}-\frac{\lambda_i'}{\gamma(1+\beta\cos\theta_i')}$$

$$=\lambda'\gamma\beta(\cos\theta_i-\cos\theta_f) \quad (10)$$

把(7)式的逆变换式

$$\lambda'=\frac{\lambda}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

应用于入射光波有

$$\lambda'=\lambda_i'=\frac{\lambda_i}{\gamma(1-\beta\cos\theta_i)} \quad (11)$$

最后将(4)式及(11)式代入(10)式不难导出$\sum$中散射光与入射光的波长差

$$\lambda_f-\lambda_i=\lambda_i\frac{\cos\theta_i-\cos\theta_f}{(p_t/cp)-\cos\theta_i} \quad (12)$$

令$p_i=0$，则$p_{ti}=m_0c^2$，$p_t=m_0c^2+ch/\lambda_i$，$p=h/\lambda_i$，$\theta_i=0$.代入(12)式不难得到与(1)式一致的结果. 它表明本文的结果可回到"特殊"康普顿效应的情形. 此外，(12)式和文献[2]中的(3)式都含有角度量，似乎与x轴的选取有关. 其实不然，文献[2]中，规定x轴沿碰撞前入射光子动量的正向；本文中，规定x轴沿目标电子和入射光子合动量的正向. 也正因为如此，得到了两个形式上不同的表达式.

参考文献

[1] 蔡圣善、朱耘. 经典电动力学. 上海:复旦大学出版社，1985.425

[2] 姚仲祥. 大学物理，1988,7(4). 19.