δ函数的导数

$$\delta'(x-x') \equiv \frac{d}{dx}\delta(x-x') = \delta(x-x')\frac{d}{dx'} \tag{1}$$

以上公式在对x'的积分出现时成立（这个公式在【Shankar】教材中出现（1.10.22））。但如果是出现在对x的积分中，则应满足如下公式

$$\delta'(x-x') \equiv \frac{d}{dx}\delta(x-x') = -\delta(x-x')\frac{d}{dx} \tag{2}$$

这个公式见曾谨严《量子力学（第四版）》（附录A2.29）。

【证明】对任意函数$f(x)$，有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(x-x')f(x')dx' = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\delta(x-x')}{dx}f(x')dx' \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\delta(x-x')}{dx'}f(x')dx' \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty}f(x')d\delta(x-x') \\
&= -f(x')\delta(x-x')|_{x'=-\infty}^{x'=\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x')\frac{d}{dx'}f(x')dx' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x')\frac{d}{dx'}f(x')dx' \\
&\Rightarrow \delta'(x-x') = \delta(x-x')\frac{d}{dx'}
\end{aligned}$$

由此证得式1。但另一方面，又有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(x-x')f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\delta(x-x')}{dx}f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)d\delta(x-x') \\
&= f(x)\delta(x-x')|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x')\frac{d}{dx}f(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x')\frac{d}{dx}f(x)dx \\
&\Rightarrow \delta'(x-x') = -\delta(x-x')\frac{d}{dx}
\end{aligned}$$

由此证得式2。