课堂练习

练习1：对$S_{1/2}$空间和$L_2[0,a]$空间，分别写出其代表性右矢对应的左矢

解：对$S_{1/2}$空间，其代表性右矢为$|a\rangle=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$，对应的左矢为$\langle a|=[\,a_1^*\quad a_2^*\,]$，为原矩阵的厄米共轭矩阵。
对$L_2[0,a]$空间，其代表性右矢为$|\varphi\rangle=\varphi(x)$，对应的左矢为$\langle\varphi|=\varphi^*(x)$，为原函数的复共轭函数。

练习2：设$\hat{B},\hat{C}$为可逆算符，证明$(\hat{B}\hat{C})^{-1}=\hat{C}^{-1}\hat{B}^{-1}$

证明：设$\hat{A}=\hat{B}\hat{C}$，则由于$\hat{B},\hat{C}$为可逆算符，故$\hat{A}$也为可逆算符，且有$\hat{A}^{-1}\hat{A}=\hat{I}$，代入得$(\hat{B}\hat{C})^{-1}\hat{B}\hat{C}=\hat{I}$，两边右乘$\hat{C}^{-1}\hat{B}^{-1}$，得：

$$\begin{aligned}\hat{C}^{-1}\hat{B}^{-1}&=(\hat{B}\hat{C})^{-1}\hat{B}\hat{C}\hat{C}^{-1}\hat{B}^{-1}=(\hat{B}\hat{C})^{-1}\hat{B}(\hat{C}\hat{C}^{-1})\hat{B}^{-1}=(\hat{B}\hat{C})^{-1}\hat{B}\hat{I}\hat{B}^{-1}\\&=(\hat{B}\hat{C})^{-1}\hat{B}\hat{B}^{-1}=(\hat{B}\hat{C})^{-1}(\hat{B}\hat{B}^{-1})=(\hat{B}\hat{C})^{-1}\end{aligned}$$

故原题得证。

练习3：对于任意矢量$|u\rangle,|v\rangle$均有$\langle u|\hat{A}|v\rangle=\langle u|\hat{B}|v\rangle$，则$\hat{A}=\hat{B}$

证明：移项可得$\langle u|(\hat{A}-\hat{B})|v\rangle=0$，将$\langle u|$按共轭空间的基矢$\{\langle a_i|\}$展开，得$\langle u|=\sum\limits_i\langle u|a_i\rangle\langle a_i|$，从而有$\sum\limits_i\langle u|a_i\rangle\langle a_i|(\hat{A}-\hat{B})|v\rangle=0$，该式对任意$|u\rangle,|v\rangle$均成立（因此可以取一个向量$|u\rangle$，使得对任意的$i$都有$\langle u|a_i\rangle\neq 0$），这意味着$(\hat{A}-\hat{B})|v\rangle$与共轭空间的所有基矢均正交，从而$(\hat{A}-\hat{B})|v\rangle$只能为零向量（否则$\langle u|(\hat{A}-\hat{B})|v\rangle=0$不成立），即$|(\hat{A}-\hat{B})|v\rangle=\mathbf{0}$，移项得$\hat{A}|v\rangle=\hat{B}|v\rangle$，因此$\hat{A}=\hat{B}$，证毕

另证：原式两边左乘任意不为零的矢量$|w\rangle$，得$|w\rangle\langle u|\hat{A}|v\rangle=|w\rangle\langle u|\hat{B}|v\rangle$，即$(|w\rangle\langle u|\hat{A})\cdot|v\rangle=(|w\rangle\langle u|\hat{B})\cdot|v\rangle$。根据算符相等的定义，有$|w\rangle\langle u|\hat{A}=|w\rangle\langle u|\hat{B}$，然后再左乘相应的共轭矢量$\langle w|$，得$\langle w|w\rangle\langle u|\hat{A}=\langle w|w\rangle\langle u|\hat{B}$，消去$\langle w|w\rangle$得$\langle u|\hat{A}=\langle u|\hat{B}$，再根据算符相等的定义，得$\hat{A}=\hat{B}$

练习4：证明$(\hat{A}^\dagger)^\dagger=\hat{A}$

证明：对于矢量$|u\rangle,|v\rangle$，由算符的厄米共轭性质，得$\langle u|\hat{A}|v\rangle=\langle v|\hat{A}^\dagger|u\rangle^*$，两边取复共轭，得$\langle u|\hat{A}|v\rangle^*=\langle v|\hat{A}^\dagger|u\rangle$，另一方面，按照厄米共轭算符的定义，$\langle v|\hat{A}^\dagger|u\rangle=\langle u|(\hat{A}^\dagger)^\dagger|v\rangle^*$，因此$\langle u|\hat{A}|v\rangle^*=\langle u|(\hat{A}^\dagger)^\dagger|v\rangle^*$，两边再取复共轭，得$\langle u|\hat{A}|v\rangle=\langle u|(\hat{A}^\dagger)^\dagger|v\rangle$，结合前面的练习3，可得$(\hat{A}^\dagger)^\dagger=\hat{A}$。

练习：在函数空间中，$\hat{d}_x$作用在右矢的定义是非常明确的，$\hat{d}_x|u\rangle=\frac{d}{dx}u(x)$。但根据前面的讨论，算符$\hat{d}_x$也应该能作用于左矢，那么如何定义$\langle u|\hat{d}_x$？

解：我们知道，$\frac{d}{dx}$是一个右结合的运算符，即波函数在坐标表象下表示时，形式上$\frac{d}{dx}$只能作用在其右侧的波函数$v(x)$，而不能作用在左侧的波函数$u(x)$，因此考虑函数空间的如下内积$\langle u|\hat{d}_x|v\rangle$，有：

$$\begin{aligned}\langle u|\hat{d}_x|v\rangle&=\int_0^a u^*(x)\hat{d}_x v(x)dx=\int_0^a u^*(x)\frac{dv(x)}{dx}dx=\int_0^a u^*(x)dv(x)\\&=[u^*(x)v(x)]_0^a-\int_0^a du^*(x)v(x)\qquad\text{（利用分部积分法）}\\&=-\int_0^a du^*(x)v(x)\qquad\text{（利用波函数的边界条件，即波函数在边界的函数值为0）}\end{aligned}$$

比较$\int_0^a u^*(x)\hat{d}_x v(x)dx$和$-\int_0^a du^*(x)v(x)$得$\langle u|\hat{d}_x = -\frac{d}{dx}u^*(x)$

练习：在$L_2[0,a]$空间中证明：（1）$\hat{p}_x$是个厄米算符；（2）$\hat{p}_x$与x不对易，且满足$[\hat{x},\hat{p}_x]=\mathrm{i}\hbar$

证明：（1）易知：

$$\begin{aligned}\langle u|\hat{p}_x|v\rangle &= \int_0^a u^*(x)\hat{p}_x v(x)dx = \int_0^a u^*(x)[-\mathrm{i}\hbar\frac{dv(x)}{dx}]dx = -\mathrm{i}\hbar\int_0^a u^*(x)dv(x)\\ &= -\mathrm{i}\hbar\{[u^*(x)v(x)]_0^a - \int_0^a du^*(x)v(x)\} = -\mathrm{i}\hbar\{-\int_0^a du^*(x)v(x)\}\\ &= \int_0^a [\mathrm{i}\hbar\frac{du^*(x)}{dx}]v(x)dx = \int_0^a [\hat{p}_x u(x)]^* v(x)dx\\ &= [\int_0^a v^*(x)\hat{p}_x u(x)dx]^* = \langle v|\hat{p}_x|u\rangle^*\end{aligned}$$

因此根据定义，得$\hat{p}_x$是个厄米算符

（2）易知：

$$\begin{aligned}\langle u|\hat{x}\hat{p}_x|v\rangle &= \int_0^a u^*(x)\hat{x}\hat{p}_x v(x)dx = \int_0^a u^*(x)\hat{x}[-\mathrm{i}\hbar\frac{dv(x)}{dx}]dx = -\mathrm{i}\hbar\int_0^a u^*(x)\hat{x}dv(x)\\ &= -\mathrm{i}\hbar\int_0^a u^*(x)xdv(x) = -\mathrm{i}\hbar\int_0^a xu^*(x)dv(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle u|\hat{p}_x\hat{x}|v\rangle &= \int_0^a u^*(x)\hat{p}_x\hat{x}v(x)dx = \int_0^a u^*(x)\hat{p}_x[xv(x)]dx = \int_0^a u^*(x)\{-\mathrm{i}\hbar\frac{d[xv(x)]}{dx}\}dx\\ &= -\mathrm{i}\hbar\int_0^a u^*(x)\{v(x)+\frac{dv(x)}{dx}\}dx = -\mathrm{i}\hbar\int_0^a u^*(x)\{v(x)+\frac{dv(x)}{dx}\}dx\\ &= -\mathrm{i}\hbar\int_0^a u^*(x)v(x)dx - \mathrm{i}\hbar\int_0^a xu^*(x)dv(x)\end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned}\langle u|[\hat{x},\hat{p}_x]|v\rangle &= \langle u|(\hat{x}\hat{p}_x-\hat{p}_x\hat{x})|v\rangle = \langle u|\hat{x}\hat{p}_x|v\rangle - \langle u|\hat{p}_x\hat{x}|v\rangle = \mathrm{i}\hbar\int_0^a u^*(x)v(x)dx\\ &= \mathrm{i}\hbar\langle u|v\rangle = \langle u|(\mathrm{i}\hbar\hat{I})|v\rangle\end{aligned}$$

从而$[\hat{x},\hat{p}_x]=\mathrm{i}\hbar\hat{I}=\mathrm{i}\hbar$，证毕