

## 课堂练习1

### 练习1: 证明式 $Tr(\mathbf{AB}) = Tr(\mathbf{BA})$

证明: 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ,  $\mathbf{B} = (b_{ij})$ , 其中 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 为 $n$ 级矩阵, 则有:

$$Tr(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{AB})_{ii} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \right), \quad Tr(\mathbf{BA}) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{BA})_{kk} = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \right)$$

(交换求和顺序不影响最终结果)

因此 $Tr(\mathbf{AB}) = Tr(\mathbf{BA})$

### 练习2: 证明如果 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T} = \mathbf{A}$ , 则有 $Tr(\mathbf{B}) = Tr(\mathbf{A})$

证明: 由练习1的结论得:

$$Tr(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}) = Tr(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{T})) = Tr((\mathbf{B}\mathbf{T})\mathbf{T}^{-1}) = Tr(\mathbf{B}(\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1})) = Tr(\mathbf{B})$$

又由题可知 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T} = \mathbf{A}$ , 故 $Tr(\mathbf{B}) = Tr(\mathbf{A})$

### 练习3: 用 $3 \times 3$ 矩阵的行列式验证式(18), 其中式(18)的形式为

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \equiv \sum_I^{n!} (-1)^{P_I} \hat{P}_I A_{11} A_{22} \cdots A_{nn} \\ &= \sum_I^{n!} (-1)^{P_I} A_{I_1 1} A_{I_2 2} \cdots A_{I_n n} = \sum_I^{n!} (-1)^{P_I} A_{1 I_1} A_{2 I_2} \cdots A_{n I_n} \end{aligned}$$

证明: 自然数1~3的排列为 $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 2)$ ,  $(2, 1, 3)$ ,  $(2, 3, 1)$ ,  $(3, 1, 2)$ ,  $(3, 2, 1)$ ; 相应的, 互换次数为 $P_{(1,2,3)} = 0$ ,  $P_{(1,3,2)} = 1$ ,  $P_{(2,1,3)} = 1$ ,  $P_{(2,3,1)} = 2$ ,  $P_{(3,1,2)} = 2$ ,  $P_{(3,2,1)} = 1$ 。因此对 $3 \times 3$ 矩阵的行列式, 有:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{P_{(1,2,3)}} A_{11} A_{22} A_{33} + (-1)^{P_{(1,3,2)}} A_{11} A_{23} A_{32} + (-1)^{P_{(2,1,3)}} A_{12} A_{21} A_{33} \\ &\quad + (-1)^{P_{(2,3,1)}} A_{12} A_{23} A_{31} + (-1)^{P_{(3,1,2)}} A_{13} A_{21} A_{32} + (-1)^{P_{(3,2,1)}} A_{13} A_{22} A_{31} \\ &= A_{11} A_{22} A_{33} - A_{11} A_{23} A_{32} - A_{12} A_{21} A_{33} + A_{12} A_{23} A_{31} + A_{13} A_{21} A_{32} - A_{13} A_{22} A_{31} \end{aligned}$$

这与 $3 \times 3$ 矩阵的行列式定义 (即式(15)) 一致

## 习题1.1

1. 考虑由四个复数 $a, b, c, d$ 构成的如下 $2 \times 2$ 矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

1) 满足什么条件时 $\mathbf{A}$ 是个厄米矩阵? 2) 满足什么条件时 $\mathbf{A}$ 是个么正矩阵? 3) 满足什么条件时 $\mathbf{A}$ 可逆 (存在逆矩阵)? 写出 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵具体表达式。

解: 1)若 $\mathbf{A}$ 是个厄米矩阵, 即 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ , 其中 $\mathbf{A}^\dagger = \begin{bmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{bmatrix}$ , 则 $\begin{cases} a = a^* \\ c = b^* \\ b = c^* \\ d = d^* \end{cases}$ , 故当 $a, d$ 皆为实数, 而

$b, c$ 互为共轭复数时,  $\mathbf{A}$ 是个厄米矩阵

2)若 $\mathbf{A}$ 是个么正矩阵, 则 $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{I}$ , 又 $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \begin{bmatrix} aa^* + cc^* & ab^* + cd^* \\ ba^* + dc^* & bb^* + dd^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

$$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a^*a + b^*b & a^*c + b^*d \\ c^*a + d^*b & c^*c + d^*d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故由——对应得, 当 $\begin{cases} aa^* = dd^* \Leftrightarrow |a| = |d| \\ bb^* = cc^* \Leftrightarrow |b| = |c| \\ aa^* + bb^* = 1, cc^* + dd^* = 1 \\ ba^* + dc^* = 0, ac^* + bd^* = 0 \end{cases}$ 时,  $\mathbf{A}$ 是个么正矩阵。

3)若 $\mathbf{A}$ 可逆, 则存在矩阵 $\mathbf{B}$ , 使得 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ , 容易验证, 当 $\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ , 其中

$|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) = ad - bc$ 时, 有

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}, \text{ 若要进一步变为单位矩阵,}$$

需要 $ad - bc \neq 0$ , 否则原式无意义

因此, 当 $ad - bc \neq 0$ 时,  $\mathbf{A}$ 可逆, 此时逆矩阵为 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

## 2.证明: 如果两个厄米矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的乘积 $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ 也是厄米矩阵, 那么 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 一定对易

证明: 因为 $\mathbf{C} = \mathbf{C}^\dagger$ , 其中 $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}^\dagger = (\mathbf{A}\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$ , 故 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$

又由题意知 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^\dagger$ , 故结合得 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}$ , 即 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A} = 0$ , 从而 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 一定对易, 证毕

## 3.从行列式一般定义 (或 $2 \times 2$ 矩阵) 出发证明 (验证) 上面行列式的性质

证明: 在证明前, 我们定义矩阵 $\mathbf{A} = (A_{ij})$ ,  $\mathbf{B} = (B_{ij})$ , 其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 $n$ 级矩阵, 此外, 我们还会利用

行列式的定义, 以及行列式的余子式展开 $|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n A_{ij} \text{cof}(A_{ij}), \forall j = 1, 2, \dots, n$

定理1的证明: 若矩阵的某一行矩阵元都为零, 如矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 $i$ 行为零, 则有:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = 0 \times \text{cof}(A_{i1}) + 0 \times \text{cof}(A_{i2}) + \dots + 0 \times \text{cof}(A_{in}) = 0$$

同理可得, 矩阵的某一列矩阵元均为零

定理2的证明: 以上三角矩阵为例, 其对应的行列式为:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^n 0 \times \text{cof}(A_{i1}) = A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \\ &= A_{11} (A_{22} \begin{vmatrix} A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{i=2}^n 0 \times \text{cof}(A_{i2})) = A_{11} A_{22} \begin{vmatrix} A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = \dots = \prod_{i=1}^n A_{ii} \end{aligned}$$

下三角矩阵对应的行列式的计算方法同理，特别的，对角矩阵是上（下）三角矩阵的特殊情形  
定理3的证明：以下只讨论交换两行的情形，设有如下行列式：

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \dots & A_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{A}_{\text{swap}}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A'_{l1} & A'_{l2} & \dots & A'_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A'_{m1} & A'_{m2} & \dots & A'_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

其中  $A'_{li} = A_{mi}$ ,  $A'_{mi} = A_{li}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$

对  $|\mathbf{A}|$  和  $|\mathbf{A}_{\text{swap}}|$  分别按行展开，有  $|\mathbf{A}| = \sum_I (-1)^{P_I} A_{1I_1} \dots A_{lI_l} \dots A_{mI_m} \dots A_{nI_n}$ ,

$|\mathbf{A}_{\text{swap}}| = \sum_I (-1)^{P_I} A_{1I_1} \dots A'_{lI_l} \dots A'_{mI_m} \dots A_{nI_n}$ ,

结合前述性质知， $|\mathbf{A}|$  中  $A_{1I_1} \dots A_{lI_l} \dots A_{mI_m} \dots A_{nI_n}$  这一项在  $|\mathbf{A}_{\text{swap}}|$  中为  $A_{1I_1} \dots A'_{lI_m} \dots A'_{mI_l} \dots A_{nI_n}$ ，而对应的置换操作满足  $\hat{P}_{(1 \dots I_l \dots I_m \dots I_n)} = \hat{P}_{(1 \dots I_m \dots I_l \dots I_n)} \hat{P}_{I_m I_l}$ ，即操作数相差1，故  $A_{1I_1} \dots A_{lI_l} \dots A_{mI_m} \dots A_{nI_n}$  这一项在  $|\mathbf{A}|$  和  $|\mathbf{A}_{\text{swap}}|$  中系数相反，从而  $|\mathbf{A}_{\text{swap}}| = -|\mathbf{A}|$ ，证毕。同理可得该定理对列交换也成立

定理4的证明：利用定理3可知，若  $|\mathbf{A}|$  存在相同的两行（或两列），则相互交换后，有  $|\mathbf{A}_{\text{swap}}| = -|\mathbf{A}|$ ，但由于相互交换的两行（或两列）相同，因此交换后行列式不变，即  $|\mathbf{A}_{\text{swap}}| = |\mathbf{A}|$ ，联立可得  $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}|$ ，即  $|\mathbf{A}| = 0$ ，证毕

定理5的证明：为讨论方便，我们令  $\mathbf{B} = (B_{ij}) = (A_{ji})$ ，此时  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$

由行列式定义，对  $|\mathbf{A}|$  按行展开，有  $|\mathbf{A}| = \sum_I (-1)^{P_I} A_{1I_1} A_{2I_2} \dots A_{nI_n}$ ；按列展开，有

$|\mathbf{A}| = \sum_I (-1)^{P_I} A_{I_1 1} A_{I_2 2} \dots A_{I_n n}$ 。这两种展开是相同的。

另一方面，对  $|\mathbf{B}|$  按行展开，有

$|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}^T| = \sum_I (-1)^{P_I} B_{1I_1} B_{2I_2} \dots B_{nI_n} = \sum_I (-1)^{P_I} A_{I_1 1} A_{I_2 2} \dots A_{I_n n}$ ，恰好为对  $|\mathbf{A}|$  按列展开，

因此有  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}^T|$

定理6的证明：仿照定理5的证明，令  $\mathbf{B} = (B_{ij}) = (A_{ji}^*)$ ，此时  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\dagger$ 。分别展开  $|\mathbf{A}|$  和  $|\mathbf{B}|$  得：

$$|\mathbf{A}| = \sum_I (-1)^{P_I} A_{1I_1} A_{2I_2} \dots A_{nI_n} = \sum_I (-1)^{P_I} A_{I_1 1} A_{I_2 2} \dots A_{I_n n}$$

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}^\dagger| = \sum_I (-1)^{P_I} B_{1I_1} B_{2I_2} \dots B_{nI_n} = \sum_I (-1)^{P_I} A_{I_1 1}^* A_{I_2 2}^* \dots A_{I_n n}^*$$

让  $|\mathbf{A}|$  取复共轭，得  $|\mathbf{A}|^* = [\sum_I (-1)^{P_I} A_{I_1 1} A_{I_2 2} \dots A_{I_n n}]^* = \sum_I (-1)^{P_I} A_{I_1 1}^* A_{I_2 2}^* \dots A_{I_n n}^*$ ，从而得

$|\mathbf{A}|^* = |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}^\dagger|$

定理7的证明：此处要用到Laplace定理，记  $\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix}$ ，再记对角矩阵为  $\mathbf{I}$ ，零矩阵为  $\mathbf{O}$ ，则我们可以将以上矩阵拼接为

$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ , 其对应的行列式为:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

根据Laplace定理, 对该行列式按前 $n$ 行展开, 则因该行列式中前 $n$ 行除去最左上角的 $n$ 级子式外, 其余的 $n$ 级子式均含有一个全零列 (即其余 $n$ 级子式均等于零), 因此

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$$

接下来, 根据定理4, 我们可以将行列式的一行 (或一列) 乘上一个系数, 加在行列式的另一行 (或另一列) 上, 而行列式的值不变。从而, 将第 $(n+1)$ 行乘以 $A_{11}$ , 再加在第一行上; 将第 $(n+2)$ 行乘以 $A_{12}$ , 再加在第一行上; .....; 以此类推, 直至将第 $2n$ 行乘以 $A_{1n}$ , 再加在第一行上。由此可得:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{in} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

同理, 将第 $(n+1)$ 行乘以 $A_{21}$ , 再加在第二行上; 将第 $(n+2)$ 行乘以 $A_{22}$ , 再加在第二行上; .....; 以此类推, 直至将第 $2n$ 行乘以 $A_{2n}$ , 再加在第二行上。由此可得:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{in} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{i=1}^n A_{2i} B_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{2i} B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{2i} B_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

继续如此迭代, 最终结合Laplace定理, 得到:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{in} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{i=1}^n A_{2i} B_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{2i} B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{2i} B_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{i=1}^n A_{ni} B_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{ni} B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{ni} B_{in} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix} \\
& = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{in} \\ \sum_{i=1}^n A_{2i} B_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{2i} B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{2i} B_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_{ni} B_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{ni} B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{ni} B_{in} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{\left(\sum_{i=1}^n i\right) + \sum_{i=1}^n (n+i)} \\
& = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{1i} B_{in} \\ \sum_{i=1}^n A_{2i} B_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{2i} B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{2i} B_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_{ni} B_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{ni} B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{ni} B_{in} \end{vmatrix} = |\mathbf{AB}|
\end{aligned}$$

因此  $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

定理8的证明：将题中行列式按第*i*列（即和式出现的那一列）展开余子式得：

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & \sum_{k=1}^m c_k B_{1k} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & \sum_{k=1}^m c_k B_{2k} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & \sum_{k=1}^m c_k B_{nk} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^m c_k B_{1k} (-1)^{1+i} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^m c_k B_{2k} (-1)^{2+i} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \\
&\quad + \dots + \sum_{k=1}^m c_k B_{nk} (-1)^{n+i} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^m c_k [B_{1k} (-1)^{1+i} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} + B_{2k} (-1)^{2+i} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \\
&\quad + \dots + B_{nk} (-1)^{n+i} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n} \end{vmatrix}] \\
&= \sum_{k=1}^m c_k \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & B_{1k} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & B_{2k} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & B_{nk} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

该命题也适用于行中出现相同形式和式的情形

#### 4. 证明将矩阵的任一行（列）加上另外一行（列）乘以一个常数所得新的矩阵的行列式与原矩阵行列式相等，以3×3矩阵为例，

$$\begin{vmatrix} A_{11} + aA_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} + aA_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} + aA_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

**证明：**根据第3题第8点性质，可得：

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A_{11} + aA_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} + aA_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} + aA_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} aA_{12} & A_{12} & A_{13} \\ aA_{22} & A_{22} & A_{23} \\ aA_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} A_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

再由第3题第4点性质，得  $a \begin{vmatrix} A_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0$ ，故有

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} A_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}, \text{ 证毕}$$

## 课堂练习2

### 练习1：证明 $S_2$ 是个二维的复数线性空间

**证明：**我们设如下三个右矢： $|a\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$