课堂练习1

练习1：证明式$Tr(\mathbf{AB})=Tr(\mathbf{BA})$

证明：设$\mathbf{A}=(a_{ij})$，$\mathbf{B}=(b_{ij})$,其中$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$为n级矩阵，则有：

$$Tr(\mathbf{AB})=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{AB})_{ii}=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}),\ Tr(\mathbf{BA})=\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{BA})_{kk}=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik})=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki})$$

（交换求和顺序不影响最终结果）
因此$Tr(\mathbf{AB})=Tr(\mathbf{BA})$

练习2：证明如果$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT}=\mathbf{A}$，则有$Tr(\mathbf{B})=Tr(\mathbf{A})$

证明：由练习1的结论得：

$$Tr(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT})=Tr(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{BT}))=Tr((\mathbf{BT})\mathbf{T}^{-1})=Tr(\mathbf{B}(\mathbf{TT}^{-1}))=Tr(\mathbf{B})$$

又由题可知$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT}=Tr(\mathbf{A})$，故$Tr(\mathbf{B})=Tr(\mathbf{A})$

练习3：用3×3矩阵的行列式验证式(18)，其中式(18)的形式为

$$det(\mathbf{A})=|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\dots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\dots&A_{nn}\end{vmatrix}\equiv\sum_{I}^{n!}(-1)^{P_I}\hat{P}_I A_{11}A_{22}\dots A_{nn}$$
$$=\sum_{I}^{n!}(-1)^{P_I}A_{I_1 1}A_{I_2 2}\dots A_{I_n n}=\sum_{I}^{n!}(-1)^{P_I}A_{1I_1}A_{2I_2}\dots A_{nI_n}$$

证明：自然数1~3的排列为$(1,2,3)$，$(1,3,2)$，$(2,1,3)$，$(2,3,1)$，$(3,1,2)$，$(3,2,1)$；相应的，互换次数为$P_{(1,2,3)}=0$，$P_{(1,3,2)}=1$，$P_{(2,1,3)}=1$，$P_{(2,3,1)}=2$，$P_{(3,1,2)}=2$，$P_{(3,2,1)}=1$。因此对3×3矩阵的行列式，有：

$$\begin{aligned}det(\mathbf{A})=|\mathbf{A}|=&\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{vmatrix}\\&=(-1)^{P_{(1,2,3)}}A_{11}A_{22}A_{33}+(-1)^{P_{(1,3,2)}}A_{11}A_{23}A_{32}+(-1)^{P_{(2,1,3)}}A_{12}A_{21}A_{33}\\&\quad+(-1)^{P_{(2,3,1)}}A_{12}A_{23}A_{31}+(-1)^{P_{(3,1,2)}}A_{13}A_{21}A_{32}+(-1)^{P_{(3,2,1)}}A_{13}A_{22}A_{31}\\&=A_{11}A_{22}A_{33}-A_{11}A_{23}A_{32}-A_{12}A_{21}A_{33}+A_{12}A_{23}A_{31}+A_{13}A_{21}A_{32}-A_{13}A_{22}A_{31}\end{aligned}$$

这与3×3矩阵的行列式定义（即式(15)）一致

习题1.1

1.考虑由四个复数a, b, c, d构成的如下2×2矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$

1)满足什么条件时A是个厄米矩阵？2)满足什么条件时A是个幺正矩阵？3)满足什么条件时A可逆（存在逆矩阵）？写出A的逆矩阵具体表达式。

解：1)若$\mathbf{A}$是个厄米矩阵，即$\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\dagger}$，其中$\mathbf{A}^{\dagger}=\begin{bmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{bmatrix}$，则$\begin{cases} a=a^* \\ c=b^* \\ b=c^* \\ d=d^* \end{cases}$，故当$a$，$d$皆为实数，而$b$，$c$互为共轭复数时，$\mathbf{A}$是个厄米矩阵

2)若$\mathbf{A}$是个幺正矩阵，则$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}=\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}=I$，又$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}=\begin{bmatrix} aa^*+cc^* & ab^*+cd^* \\ ba^*+dc^* & bb^*+dd^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，

$\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a^*a+b^*b & a^*c+b^*d \\ c^*a+d^*b & c^*c+d^*d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

故由一一对应得，当$\begin{cases} aa^*=dd^* \Leftrightarrow |a|=|d| \\ bb^*=cc^* \Leftrightarrow |b|=|c| \\ aa^*+bb^*=1, cc^*+dd^*=1 \\ ba^*+dc^*=0, ac^*+bd^*=0 \end{cases}$时，$\mathbf{A}$是个幺正矩阵。

3)若$\mathbf{A}$可逆，则存在矩阵$\mathbf{B}$，使得$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{I}$，容易验证，当$\mathbf{B}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$，其中$|\mathbf{A}|=det(\mathbf{A})=ad-bc$时，有

$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$，若要进一步变为单位矩阵，需要$ad-bc\neq 0$，否则原式无意义

因此，当$ad-bc\neq 0$时，$\mathbf{A}$可逆，此时逆矩阵为$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

2.证明：如果两个厄米矩阵A和B的乘积$\mathrm{C}=\mathbf{AB}$也是厄米矩阵，那么A和B一定对易

证明：因为$\mathbf{C}=\mathbf{C}^{\dagger}$，其中$\mathbf{C}=\mathbf{AB}$，$\mathbf{C}^{\dagger}=(\mathbf{AB})^{\dagger}=\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}$，故$\mathbf{AB}=\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}$
又由题意知$\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\dagger}$，$\mathbf{B}=\mathbf{B}^{\dagger}$，故结合得$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$，即$[\mathbf{A},\mathbf{B}]=\mathbf{AB}-\mathbf{BA}=0$，从而$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$一定对易，证毕

3.从行列式一般定义（或2×2矩阵）出发证明（验证）上面行列式的性质

证明：在证明前，我们定义矩阵$\mathbf{A}=(A_{ij})$，$\mathbf{B}=(B_{ij})$，其中$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$为n级矩阵，此外，我们还会利用行列式的定义，以及行列式的余子式展开$|\mathbf{A}|=\sum_{i=1}^{n}A_{ij}cof(A_{ij}),\forall j=1,2,\ldots,n$

定理1的证明：若矩阵的某一行矩阵元都为零，如矩阵$\mathbf{A}$的第i行为零，则有：

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}=0\times cof(A_{i1})+0\times cof(A_{i2})+\cdots+0\times cof(A_{in})=0$$

同理可得，矩阵的某一列矩阵元均为零

定理2的证明：以上三角矩阵为例，其对应的行列式为：

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \ldots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \ldots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \ldots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}=A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & \ldots & A_{2n} \\ 0 & A_{33} & \ldots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}+\sum_{i=1}^{n}0\times cof(A_{i1})=A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & \ldots & A_{2n} \\ 0 & A_{33} & \ldots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=A_{11}(A_{22}\begin{vmatrix} A_{33} & \ldots & A_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}+\sum_{i=2}^{n}0\times cof(A_{i2}))=A_{11}A_{22}\begin{vmatrix} A_{33} & \ldots & A_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=\prod_{i=1}^{n}A_{ii}$$

下三角矩阵对应的行列式的计算方法同理，特别的，对角矩阵是上（下）三角矩阵的特殊情形
定理3的证明：以下只讨论交换两行的情形，设有如下行列式：

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{l1}&A_{l2}&\dots&A_{ln}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{m1}&A_{m2}&\dots&A_{mn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\dots&A_{nn}\end{vmatrix}，|\mathbf{A}_{\text{swap}}|=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A'_{l1}&A'_{l2}&\dots&A'_{ln}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A'_{m1}&A'_{m2}&\dots&A'_{mn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\dots&A_{nn}\end{vmatrix}$$

其中$A'_{li}=A_{mi},A'_{mi}=A_{li},\forall i=1,2,\dots,n$
对$|\mathbf{A}|$和$|\mathbf{A}_{\text{swap}}|$分别按行展开，有$|\mathbf{A}|=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{1I_1}\dots A_{lI_l}\dots A_{mI_m}\dots A_{nI_n}$，
$|\mathbf{A}_{\text{swap}}|=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{1I_1}\dots A'_{lI_l}\dots A'_{mI_m}\dots A_{nI_n}$，
结合前述性质知，$|\mathbf{A}|$中$A_{1I_1}\dots A_{lI_l}\dots A_{mI_m}\dots A_{nI_n}$这一项在$|\mathbf{A}_{\text{swap}}|$中为
$A_{1I_1}\dots A'_{lI_m}\dots A'_{mI_l}\dots A_{nI_n}$，而对应的置换操作满足$\hat{P}_{(1\dots I_l\dots I_m\dots I_n)}=\hat{P}_{(1\dots I_m\dots I_l\dots I_n)}\hat{P}_{I_mI_l}$，即操作数相差1，故$A_{1I_1}\dots A_{lI_l}\dots A_{mI_m}\dots A_{nI_n}$这一项在$|\mathbf{A}|$和$|\mathbf{A}_{\text{swap}}|$中系数相反，从而
$|\mathbf{A}_{\text{swap}}|=-|\mathbf{A}|$，证毕。同理可得该定理对列交换也成立
定理4的证明：利用定理3可知，若$|\mathbf{A}|$存在相同的两行（或两列），则相互交换后，有$|\mathbf{A}_{\text{swap}}|=-|\mathbf{A}|$，但由于相互交换的两行（或两列）相同，因此交换后行列式不变，即$|\mathbf{A}_{\text{swap}}|=|\mathbf{A}|$，联立可得
$|\mathbf{A}|=-|\mathbf{A}|$，即$|\mathbf{A}|=0$，证毕
定理5的证明：为讨论方便，我们令$\mathbf{B}=(B_{ij})=(A_{ji})$，此时$\mathbf{B}=\mathbf{A}^T$
由行列式定义，对$|\mathbf{A}|$按行展开，有$|\mathbf{A}|=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{1I_1}A_{2I_2}\dots A_{nI_n}$；按列展开，有
$|\mathbf{A}|=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{I_11}A_{I_22}\dots A_{I_nn}$。这两种展开是相同的。
另一方面，对$|\mathbf{B}|$按行展开，有
$|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^T|=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}B_{1I_1}B_{2I_2}\dots B_{nI_n}=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{I_11}A_{I_22}\dots A_{I_nn}$，恰好为对$|\mathbf{A}|$按列展开，
因此有$|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^T|$
定理6的证明：仿照定理5的证明，令$\mathbf{B}=(B_{ij})=(A^*_{ji})$，此时$\mathbf{B}=\mathbf{A}^\dagger$。分别展开展开$|\mathbf{A}|$和$|\mathbf{B}|$得：

$$|\mathbf{A}|=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{1I_1}A_{2I_2}\dots A_{nI_n}=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{I_11}A_{I_22}\dots A_{I_nn}$$

$$|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^\dagger|=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}B_{1I_1}B_{2I_2}\dots B_{nI_n}=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A^*_{I_11}A^*_{I_22}\dots A^*_{I_nn}$$

让$|\mathbf{A}|$取复共轭，得$|\mathbf{A}|^*=[\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{I_11}A_{I_22}\dots A_{I_nn}]^*=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A^*_{I_11}A^*_{I_22}\dots A^*_{I_nn}$，从而得
$|\mathbf{A}|^*=|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^\dagger|$
定理7的证明：此处要用到Laplace定理，记$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\dots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\dots&A_{nn}\end{bmatrix}$，
$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&\dots&B_{1n}\\B_{21}&B_{22}&\dots&B_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\B_{n1}&B_{n2}&\dots&B_{nn}\end{bmatrix}$，再记对角矩阵为$\mathbf{I}$，零矩阵为$\mathbf{O}$，则我们可以将以上矩阵拼接为

$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$，其对应的行列式为：

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

根据Laplace定理，对该行列式按前n行展开，则因该行列式中前n行除去最左上角的n级子式外，其余的n级子式均含有一个全零列（即其余n级子式均等于零），因此

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

接下来，根据定理4，我们可以将行列式的一行（或一列）乘上一个系数，加在行列式的另一行（或另一列）上，而行列式的值不变。从而，将第$(n+1)$行乘以A_{11}，再加在第一行上；将第$(n+2)$行乘以A_{12}，再加在第一行上；......；以此类推，直至将第$2n$行乘以A_{1n}，再加在第一行上。由此可得：

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{in} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

同理，将第$(n+1)$行乘以A_{21}，再加在第二行上；将第$(n+2)$行乘以A_{22}，再加在第二行上；......；以此类推，直至将第$2n$行乘以A_{2n}，再加在第二行上。由此可得：

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{in} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

继续如此迭代，最终结合Laplace定理，得到：

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{in} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{in} \\
-1 & 0 & \ldots & 0 & B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1n} \\
0 & -1 & \ldots & 0 & B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & -1 & B_{n1} & B_{n2} & \ldots & B_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
\sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{in} \\
\sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{in}
\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}
-1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & -1 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & -1
\end{vmatrix} \cdot (-1)^{(\sum\limits_{i=1}^{n} i)+\sum\limits_{i=1}^{n}(n+i)} \\
&= \begin{vmatrix}
\sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{in} \\
\sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{in}
\end{vmatrix} = |\mathbf{AB}|
\end{aligned}
$$

因此$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

定理8的证明：将题中行列式按第i列（即和式出现的那一列）展开余子式得：

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{m} c_k B_{1k} & \ldots & A_{1n} \\
A_{21} & A_{22} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{m} c_k B_{2k} & \ldots & A_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & A_{n2} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{m} c_k B_{nk} & \ldots & A_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_k B_{1k} (-1)^{1+i} \begin{vmatrix}
A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\
A_{31} & A_{32} & \ldots & A_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn}
\end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{m} c_k B_{2k} (-1)^{2+i} \begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\
A_{31} & A_{32} & \ldots & A_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn}
\end{vmatrix} + \cdots + \sum_{k=1}^{m} c_k B_{nk} (-1)^{n+i} \begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\
A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \ldots & A_{n-1,n}
\end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_k [B_{1k} (-1)^{1+i} \begin{vmatrix}
A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\
A_{31} & A_{32} & \ldots & A_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn}
\end{vmatrix} + B_{2k} (-1)^{2+i} \begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\
A_{31} & A_{32} & \ldots & A_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn}
\end{vmatrix} + \cdots + B_{nk} (-1)^{n+i} \begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\
A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \ldots & A_{n-1,n}
\end{vmatrix}] \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_k \begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & \ldots & B_{1k} & \ldots & A_{1n} \\
A_{21} & A_{22} & \ldots & B_{2k} & \ldots & A_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & A_{n2} & \ldots & B_{nk} & \ldots & A_{nn}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

该命题也适用于行中出现相同形式和式的情形

4. 证明将矩阵的任一行（列）加上另外一行（列）乘以一个常数所得新的矩阵的行列式与原矩阵行列式相等，以3×3矩阵为例，

$$\begin{vmatrix} A_{11}+aA_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21}+aA_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31}+aA_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

证明：根据第3题第8点性质，可得：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{11}+aA_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21}+aA_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31}+aA_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} aA_{12} & A_{12} & A_{13} \\ aA_{22} & A_{22} & A_{23} \\ aA_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} A_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

再由第3题第4点性质，得$a\begin{vmatrix} A_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}=0$，故有
$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} A_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$，证毕

课堂练习2

练习1：证明S_2是个二维的复数线性空间

证明：易知S_2是个二维的复数线性空间⇔线性无关的向量（右矢）个数最多有两个，故先设两个右矢：$|a\rangle=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$，$|b\rangle=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$，满足$n_a|a\rangle+n_b|b\rangle=0$，则有$\begin{cases} n_aa_1+n_bb_1=0 \\ n_aa_2+n_bb_2=0 \end{cases}$，由此得$\begin{cases} n_b(b_1a_2-b_2a_1)=0 \\ n_b(a_1b_2-a_2b_1)=0 \end{cases}$。对以上情形，只要保证$\begin{cases} a_1,a_2,b_1,b_2\neq 0 \\ a_1b_2\neq b_1a_2 \end{cases}$，即可得到$n_a=n_b=0$，从而$|a\rangle$与$|b\rangle$线性无关，即$S_2$中线性无关的向量（右矢）个数可以为两个。

接下来，我们还要证明S_2中线性无关的向量（右矢）个数不能为三个或更多个。设三个右矢：$|a\rangle=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$，$|b\rangle=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$，$|c\rangle=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$，满足$n_a|a\rangle+n_b|b\rangle+n_c|c\rangle=0$，则有$\begin{cases} n_aa_1+n_bb_1+n_cc_1=0 \\ n_aa_2+n_bb_2+n_cc_2=0 \end{cases}$，该方程组中齐次线性方程的个数小于变量个数，故有无穷组非零解，从而存在不全为零的n_a,n_b,n_c，使$n_a|a\rangle+n_b|b\rangle+n_c|c\rangle=0$，即$|a\rangle,|b\rangle,|c\rangle$线性相关。对更多右矢的情形，同理可证它们均满足线性相关。

综上，S_2是个二维的复数线性空间。

注：如果不用线性方程组的性质，第二部分亦可按如下说明：由$\begin{cases} n_aa_1+n_bb_1+n_cc_1=0 \\ n_aa_2+n_bb_2+n_cc_2=0 \end{cases}$，得$\begin{cases} n_b(b_1a_2-b_2a_1)+n_c(c_1a_2-c_2a_1)=0 \\ n_a(a_1b_2-a_2b_1)+n_c(c_1b_2-c_2b_1)=0 \\ n_a(a_1c_2-a_2c_1)+n_b(b_1c_2-b_2c_1)=0 \end{cases}$，若$|a\rangle,|b\rangle,|c\rangle$线性无关，则前提条件为$\begin{cases} a_1b_2\neq a_2b_1 \\ b_1c_2\neq b_2c_1 \\ c_1a_2\neq c_2a_1 \end{cases}$（否则在$|a\rangle,|b\rangle,|c\rangle$中取任意一对向量，必满足线性相关，矛盾！），此时可得到如下比例关系：$n_a:n_b:n_c=(b_1c_2-b_2c_1):(c_1a_2-a_1c_2):(a_1b_2-a_2b_1)$，从而存在不全为零的$n_a,n_b,n_c$，使$n_a|a\rangle+n_b|b\rangle+n_c|c\rangle=0$，即$|a\rangle,|b\rangle,|c\rangle$线性相关，这与$|a\rangle,|b\rangle,|c\rangle$线性无关矛盾。对更多右矢的情形，同理可证它们均满足线性相关。

练习2：证明任意矢量用一组基矢的展开是唯一的

证明：反证法，设$|\alpha\rangle$在基矢$\{|u_i\rangle\}$下存在至少两种展开$|\alpha\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i|u_i\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^{'}|u_i\rangle$，其中$\alpha_i$与$\alpha_i^{'}$不全相等，则移项得$\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_i^{'})|u_i\rangle=0$，若第$k_1,k_2,\ldots,k_m$项满足$\alpha_{k_1}\neq\alpha_{k_1}^{'},\alpha_{k_2}\neq\alpha_{k_2}^{'},\ldots,\alpha_{k_m}\neq\alpha_{k_m}^{'}$，原式可化为$\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_{k_i}-\alpha_{k_i}^{'})|u_{k_i}\rangle=0$，即$|u_{k_1}\rangle,|u_{k_2}\rangle,\ldots,|u_{k_m}\rangle$线性相关，但基矢$\{|u_i\rangle\}$之间满足线性无关，矛盾！因此任意矢量用一组基矢的展开是唯一的。

练习3：两个归一化的矢量，什么时候它们之间的距离最大，什么时候距离最小？

解：对于两个归一化的矢量$|\alpha\rangle,|\beta\rangle$，其中$\langle\alpha|\alpha\rangle=1,\langle\beta|\beta\rangle=1$，有：

$$||\alpha-\beta||=\sqrt{\langle\alpha-\beta|\alpha-\beta\rangle}=\sqrt{(\langle\alpha|-\langle\beta|)(|\alpha\rangle-|\beta\rangle)}=\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle-\langle\beta|\alpha\rangle-\langle\alpha|\beta\rangle+\langle\beta|\beta\rangle}=\sqrt{2-\langle\beta|\alpha\rangle-\langle\alpha|\beta\rangle}$$

（未完待续）

练习4：为什么不能将S_2空间中的内积按如下定义

$$\langle a|b\rangle\equiv\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2$$

解：若按如上定义，可设$|u\rangle=\begin{bmatrix}\mathrm{i}u_1\\ \mathrm{i}u_2\end{bmatrix}$，其中$u_1,u_2\in\mathbb{R}$，则
$\langle u|u\rangle=\begin{bmatrix}\mathrm{i}u_1 & \mathrm{i}u_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{i}u_1\\ \mathrm{i}u_2\end{bmatrix}=\mathrm{i}^2(u_1^2+u_2^2)=-(u_1^2+u_2^2)\leq 0$，但内积必须满足正定性，即$\langle u|u\rangle\geq 0$，矛盾！因此如上定义是不合理的