课堂练习1

练习1：证明式$Tr(\mathbf{AB})=Tr(\mathbf{BA})$

证明：设$\mathbf{A}=(a_{ij})$，$\mathbf{B}=(b_{ij})$,其中$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$为n级矩阵，则有：

$$Tr(\mathbf{AB})=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{AB})_{ii}=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}),\ Tr(\mathbf{BA})=\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{BA})_{kk}=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik})=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki})$$

（交换求和顺序不影响最终结果）
因此$Tr(\mathbf{AB})=Tr(\mathbf{BA})$

练习2：证明如果$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT}=\mathbf{A}$，则有$Tr(\mathbf{B})=Tr(\mathbf{A})$

证明：由练习1的结论得：

$$Tr(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT})=Tr(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{BT}))=Tr((\mathbf{BT})\mathbf{T}^{-1})=Tr(\mathbf{B}(\mathbf{TT}^{-1}))=Tr(\mathbf{B})$$

又由题可知$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT}=Tr(\mathbf{A})$，故$Tr(\mathbf{B})=Tr(\mathbf{A})$

练习3：用3×3矩阵的行列式验证式(18)，其中式(18)的形式为

$$det(\mathbf{A})=|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\dots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\dots&A_{nn}\end{vmatrix}\equiv\sum_{I}^{n!}(-1)^{P_I}\hat{P}_I A_{11}A_{22}\dots A_{nn}$$
$$=\sum_{I}^{n!}(-1)^{P_I}A_{I_1 1}A_{I_2 2}\dots A_{I_n n}=\sum_{I}^{n!}(-1)^{P_I}A_{1I_1}A_{2I_2}\dots A_{nI_n}$$

证明：自然数1~3的排列为$(1,2,3)$，$(1,3,2)$，$(2,1,3)$，$(2,3,1)$，$(3,1,2)$，$(3,2,1)$；相应的，互换次数为$P_{(1,2,3)}=0$，$P_{(1,3,2)}=1$，$P_{(2,1,3)}=1$，$P_{(2,3,1)}=2$，$P_{(3,1,2)}=2$，$P_{(3,2,1)}=1$。因此对3×3矩阵的行列式，有：

$$\begin{aligned}det(\mathbf{A})=|\mathbf{A}|&=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{vmatrix}\\&=(-1)^{P_{(1,2,3)}}A_{11}A_{22}A_{33}+(-1)^{P_{(1,3,2)}}A_{11}A_{23}A_{32}+(-1)^{P_{(2,1,3)}}A_{12}A_{21}A_{33}\\&\quad+(-1)^{P_{(2,3,1)}}A_{12}A_{23}A_{31}+(-1)^{P_{(3,1,2)}}A_{13}A_{21}A_{32}+(-1)^{P_{(3,2,1)}}A_{13}A_{22}A_{31}\\&=A_{11}A_{22}A_{33}-A_{11}A_{23}A_{32}-A_{12}A_{21}A_{33}+A_{12}A_{23}A_{31}+A_{13}A_{21}A_{32}-A_{13}A_{22}A_{31}\end{aligned}$$

这与3×3矩阵的行列式定义（即式(15)）一致

习题1.1

1.考虑由四个复数a, b, c, d构成的如下2×2矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$

1)满足什么条件时A是个厄米矩阵？2)满足什么条件时A是个幺正矩阵？3)满足什么条件时A可逆（存在逆矩阵）？写出A的逆矩阵具体表达式。

解：1)若$\mathbf{A}$是个厄米矩阵，即$\mathbf{A}=\mathbf{A}^\dagger$，其中$\mathbf{A}^\dagger=\begin{bmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{bmatrix}$，则$\begin{cases} a=a^* \\ c=b^* \\ b=c^* \\ d=d^* \end{cases}$，故当$a$，$d$皆为实数，而$b$，$c$互为共轭复数时，$\mathbf{A}$是个厄米矩阵

2)若$\mathbf{A}$是个幺正矩阵，则$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger=\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}=I$，又$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger=\begin{bmatrix} aa^*+cc^* & ab^*+cd^* \\ ba^*+dc^* & bb^*+dd^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，

$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a^*a+b^*b & a^*c+b^*d \\ c^*a+d^*b & c^*c+d^*d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

故由一一对应得，当$\begin{cases} aa^*=dd^* \Leftrightarrow |a|=|d| \\ bb^*=cc^* \Leftrightarrow |b|=|c| \\ aa^*+bb^*=1, cc^*+dd^*=1 \\ ba^*+dc^*=0, ac^*+bd^*=0 \end{cases}$时，$\mathbf{A}$是个幺正矩阵。

3)若$\mathbf{A}$可逆，则存在矩阵$\mathbf{B}$，使得$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{I}$，容易验证，当$\mathbf{B}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$，其中$|\mathbf{A}|=det(\mathbf{A})=ad-bc$时，有

$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$，若要进一步变为单位矩阵，需要$ad-bc\neq 0$，否则原式无意义

因此，当$ad-bc\neq 0$时，$\mathbf{A}$可逆，此时逆矩阵为$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

2.证明：如果两个厄米矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的乘积$\mathbf{C}=\mathbf{AB}$也是厄米矩阵，那么$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$一定对易

证明：因为$\mathbf{C}=\mathbf{C}^\dagger$，其中$\mathbf{C}=\mathbf{AB}$，$\mathbf{C}^\dagger=(\mathbf{AB})^\dagger=\mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$，故$\mathbf{AB}=\mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$
又由题意知$\mathbf{A}=\mathbf{A}^\dagger$，$\mathbf{B}=\mathbf{B}^\dagger$，故结合得$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$，即$[\mathbf{A},\mathbf{B}]=\mathbf{AB}-\mathbf{BA}=0$，从而$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$一定对易，证毕

3.从行列式一般定义（或2×2矩阵）出发证明（验证）上面行列式的性质

证明：在证明前，我们定义矩阵$\mathbf{A}=(A_{ij})$，$\mathbf{B}=(B_{ij})$，其中$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$为n级矩阵，此外，我们还会利用行列式的定义，以及行列式的余子式展开$|\mathbf{A}|=\sum_{i=1}^{n}A_{ij}cof(A_{ij}), \forall j=1,2,\ldots,n$

定理1的证明：若矩阵的某一行矩阵元都为零，如矩阵$\mathbf{A}$的第i行为零，则有：

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}=0\times cof(A_{i1})+0\times cof(A_{i2})+\cdots+0\times cof(A_{in})=0$$

同理可得，矩阵的某一列矩阵元均为零

定理2的证明：以上三角矩阵为例，其对应的行列式为：

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \ldots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \ldots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \ldots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}=A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & \ldots & A_{2n} \\ 0 & A_{33} & \ldots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}+\sum_{i=1}^{n}0\times cof(A_{i1})=A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & \ldots & A_{2n} \\ 0 & A_{33} & \ldots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=A_{11}(A_{22}\begin{vmatrix} A_{33} & \ldots & A_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}+\sum_{i=2}^{n}0\times cof(A_{i2}))=A_{11}A_{22}\begin{vmatrix} A_{33} & \ldots & A_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=\prod_{i=1}^{n}A_{ii}$$

下三角矩阵对应的行列式的计算方法同理，特别的，对角矩阵是上（下）三角矩阵的特殊情形

定理3的证明：以下只讨论交换两行的情形，设有如下行列式：

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \dots & A_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}，|\mathbf{A}_{\text{swap}}|=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A'_{l1} & A'_{l2} & \dots & A'_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A'_{m1} & A'_{m2} & \dots & A'_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

其中$A'_{li}=A_{mi},A'_{mi}=A_{li},\forall i=1,2,\dots,n$

对$|\mathbf{A}|$和$|\mathbf{A}_{\text{swap}}|$分别按行展开，有$|\mathbf{A}|=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{1I_1}\dots A_{lI_l}\dots A_{mI_m}\dots A_{nI_n}$，

$|\mathbf{A}_{\text{swap}}|=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{1I_1}\dots A'_{lI_l}\dots A'_{mI_m}\dots A_{nI_n}$，

结合前述性质知，$|\mathbf{A}|$中$A_{1I_1}\dots A_{lI_l}\dots A_{mI_m}\dots A_{nI_n}$这一项在$|\mathbf{A}_{\text{swap}}|$中为

$A_{1I_1}\dots A'_{lI_m}\dots A'_{mI_l}\dots A_{nI_n}$，而对应的置换操作满足$\hat{P}_{(1\dots I_l\dots I_m\dots I_n)}=\hat{P}_{(1\dots I_m\dots I_l\dots I_n)}\hat{P}_{I_mI_l}$，即操作数相差1，故$A_{1I_1}\dots A_{lI_l}\dots A_{mI_m}\dots A_{nI_n}$这一项在$|\mathbf{A}|$和$|\mathbf{A}_{\text{swap}}|$中系数相反，从而

$|\mathbf{A}_{\text{swap}}|=-|\mathbf{A}|$，证毕。同理可得该定理对列交换也成立

定理4的证明：利用定理3可知，若$|\mathbf{A}|$存在相同的两行（或两列），则相互交换后，有$|\mathbf{A}_{\text{swap}}|=-|\mathbf{A}|$，但由于相互交换的两行（或两列）相同，因此交换后行列式不变，即$|\mathbf{A}_{\text{swap}}|=|\mathbf{A}|$，联立可得

$|\mathbf{A}|=-|\mathbf{A}|$，即$|\mathbf{A}|=0$，证毕

定理5的证明：为讨论方便，我们令$\mathbf{B}=(B_{ij})=(A_{ji})$，此时$\mathbf{B}=\mathbf{A}^T$

由行列式定义，对$|\mathbf{A}|$按行展开，有$|\mathbf{A}|=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{1I_1}A_{2I_2}\dots A_{nI_n}$；按列展开，有

$|\mathbf{A}|=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{I_11}A_{I_22}\dots A_{I_nn}$。这两种展开是相同的。

另一方面，对$|\mathbf{B}|$按行展开，有

$|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^T|=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}B_{1I_1}B_{2I_2}\dots B_{nI_n}=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{I_11}A_{I_22}\dots A_{I_nn}$，恰好为对$|\mathbf{A}|$按列展开，

因此有$|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^T|$

定理6的证明：仿照定理5的证明，令$\mathbf{B}=(B_{ij})=(A^*_{ji})$，此时$\mathbf{B}=\mathbf{A}^\dagger$。分别展开展开$|\mathbf{A}|$和$|\mathbf{B}|$得：

$$|\mathbf{A}|=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{1I_1}A_{2I_2}\dots A_{nI_n}=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{I_11}A_{I_22}\dots A_{I_nn}$$

$$|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^\dagger|=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}B_{1I_1}B_{2I_2}\dots B_{nI_n}=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A^*_{I_11}A^*_{I_22}\dots A^*_{I_nn}$$

让$|\mathbf{A}|$取复共轭，得$|\mathbf{A}|^*=[\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A_{I_11}A_{I_22}\dots A_{I_nn}]^*=\sum_I^{n!}(-1)^{P_I}A^*_{I_11}A^*_{I_22}\dots A^*_{I_nn}$，从而得

$|\mathbf{A}|^*=|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^\dagger|$

定理7的证明：此处要用到Laplace定理，记$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$，

$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix}$，再记对角矩阵为$\mathbf{I}$，零矩阵为$\mathbf{O}$，则我们可以将以上矩阵拼接为

$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$，其对应的行列式为：

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

根据Laplace定理，对该行列式按前n行展开，则因该行列式中前n行除去最左上角的n级子式外，其余的n级子式均含有一个全零列（即其余n级子式均等于零），因此

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

接下来，根据定理4，我们可以将行列式的一行（或一列）乘上一个系数，加在行列式的另一行（或另一列）上，而行列式的值不变。从而，将第$(n+1)$行乘以A_{11}，再加在第一行上；将第$(n+2)$行乘以A_{12}，再加在第一行上；……；以此类推，直至将第$2n$行乘以A_{1n}，再加在第一行上。由此可得：

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{in} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

同理，将第$(n+1)$行乘以A_{21}，再加在第二行上；将第$(n+2)$行乘以A_{22}，再加在第二行上；……；以此类推，直至将第$2n$行乘以A_{2n}，再加在第二行上。由此可得：

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{in} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

继续如此迭代，最终结合Laplace定理，得到：

$$
\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{in} \\
0 & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{in} \\
-1 & 0 & \dots & 0 & B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\
0 & -1 & \dots & 0 & B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & -1 & B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{in} \\
\sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{in}
\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}
-1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & -1
\end{vmatrix} \cdot (-1)^{(\sum\limits_{i=1}^{n} i) + \sum\limits_{i=1}^{n}(n+i)}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}B_{in} \\
\sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{2i}B_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ni}B_{in}
\end{vmatrix} = |\mathbf{AB}|
$$

因此$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

定理8的证明：将题中行列式按第i列（即和式出现的那一列）展开余子式得：

$$
\begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m} c_k B_{1k} & \dots & A_{1n} \\
A_{21} & A_{22} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m} c_k B_{2k} & \dots & A_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & A_{n2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m} c_k B_{nk} & \dots & A_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \sum_{k=1}^{m} c_k B_{1k} (-1)^{1+i} \begin{vmatrix}
A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\
A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}
\end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{m} c_k B_{2k} (-1)^{2+i} \begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\
A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}
\end{vmatrix} + \dots + \sum_{k=1}^{m} c_k B_{nk} (-1)^{n+i} \begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\
A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \sum_{k=1}^{m} c_k [B_{1k} (-1)^{1+i} \begin{vmatrix}
A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\
A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}
\end{vmatrix} + B_{2k} (-1)^{2+i} \begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\
A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}
\end{vmatrix} + \dots + B_{nk} (-1)^{n+i} \begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\
A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n}
\end{vmatrix}]
$$

$$
= \sum_{k=1}^{m} c_k \begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & \dots & B_{1k} & \dots & A_{1n} \\
A_{21} & A_{22} & \dots & B_{2k} & \dots & A_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{n1} & A_{n2} & \dots & B_{nk} & \dots & A_{nn}
\end{vmatrix}
$$

该命题也适用于行中出现相同形式和式的情形

4. 证明将矩阵的任一行（列）加上另外一行（列）乘以一个常数所得新的矩阵的行列式与原矩阵行列式相等，以3×3矩阵为例，
$\begin{vmatrix} A_{11}+aA_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21}+aA_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31}+aA_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$

证明：根据第3题第8点性质，可得：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{11}+aA_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21}+aA_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31}+aA_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} aA_{12} & A_{12} & A_{13} \\ aA_{22} & A_{22} & A_{23} \\ aA_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} A_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

再由第3题第4点性质，得$a\begin{vmatrix} A_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0$，故有
$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} A_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$，证毕

课堂练习2

练习1：证明S_2是个二维的复数线性空间

证明：易知S_2是个二维的复数线性空间⇔线性无关的向量（右矢）个数最多有两个，故先设两个右矢：$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$，$|b\rangle = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$，满足$n_a|a\rangle + n_b|b\rangle = 0$，则有$\begin{cases} n_a a_1 + n_b b_1 = 0 \\ n_a a_2 + n_b b_2 = 0 \end{cases}$，由此得$\begin{cases} n_b(b_1 a_2 - b_2 a_1) = 0 \\ n_b(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \end{cases}$。对以上情形，只要保证$\begin{cases} a_1, a_2, b_1, b_2 \neq 0 \\ a_1 b_2 \neq b_1 a_2 \end{cases}$，即可得到$n_a = n_b = 0$，从而$|a\rangle$与$|b\rangle$线性无关，即$S_2$中线性无关的向量（右矢）个数可以为两个。

接下来，我们还要证明S_2中线性无关的向量（右矢）个数不能为三个或更多个。设三个右矢：$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$，$|b\rangle = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$，$|c\rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$，满足$n_a|a\rangle + n_b|b\rangle + n_c|c\rangle = 0$，则有$\begin{cases} n_a a_1 + n_b b_1 + n_c c_1 = 0 \\ n_a a_2 + n_b b_2 + n_c c_2 = 0 \end{cases}$，该方程组中齐次线性方程的个数小于变量个数，故有无穷组非零解，从而存在不全为零的n_a, n_b, n_c，使$n_a|a\rangle + n_b|b\rangle + n_c|c\rangle = 0$，即$|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$线性相关。对更多右矢的情形，同理可证它们均满足线性相关。

综上，S_2是个二维的复数线性空间。

注：如果不用线性方程组的性质，第二部分亦可按如下说明：由$\begin{cases} n_a a_1 + n_b b_1 + n_c c_1 = 0 \\ n_a a_2 + n_b b_2 + n_c c_2 = 0 \end{cases}$，得$\begin{cases} n_b(b_1 a_2 - b_2 a_1) + n_c(c_1 a_2 - c_2 a_1) = 0 \\ n_a(a_1 b_2 - a_2 b_1) + n_c(c_1 b_2 - c_2 b_1) = 0 \\ n_a(a_1 c_2 - a_2 c_1) + n_b(b_1 c_2 - b_2 c_1) = 0 \end{cases}$，若$|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$线性无关，则前提条件为$\begin{cases} a_1 b_2 \neq a_2 b_1 \\ b_1 c_2 \neq b_2 c_1 \\ c_1 a_2 \neq c_2 a_1 \end{cases}$（否则在$|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$中取任意一对向量，必满足线性相关，矛盾！），此时可得到如下比例关系：$n_a : n_b : n_c = (b_1 c_2 - b_2 c_1) : (c_1 a_2 - a_1 c_2) : (a_1 b_2 - a_2 b_1)$，从而存在不全为零的$n_a, n_b, n_c$，使$n_a|a\rangle + n_b|b\rangle + n_c|c\rangle = 0$，即$|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$线性相关，这与$|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$线性无关矛盾。对更多右矢的情形，同理可证它们均满足线性相关。

练习2：证明任意矢量用一组基矢的展开是唯一的

证明：反证法，设$|\alpha\rangle$在基矢$\{|u_i\rangle\}$下存在至少两种展开$|\alpha\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i|u_i\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^{'}|u_i\rangle$，其中$\alpha_i$与$\alpha_i^{'}$不全相等，则移项得$\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_i^{'})|u_i\rangle=0$，若第$k_1,k_2,\ldots,k_m$项满足
$\alpha_{k_1}\neq\alpha_{k_1}^{'},\alpha_{k_2}\neq\alpha_{k_2}^{'},\ldots,\alpha_{k_m}\neq\alpha_{k_m}^{'}$，原式可化为$\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_{k_i}-\alpha_{k_i}^{'})|u_{k_i}\rangle=0$，即
$|u_{k_1}\rangle,|u_{k_2}\rangle,\ldots,|u_{k_m}\rangle$线性相关，但基矢$\{|u_i\rangle\}$之间满足线性无关，矛盾！因此任意矢量用一组基矢的展开是唯一的。

练习3：两个归一化的矢量，什么时候它们之间的距离最大，什么时候距离最小？

解：对于两个归一化的矢量$|\alpha\rangle,|\beta\rangle$，其中$\langle\alpha|\alpha\rangle=1,\langle\beta|\beta\rangle=1$，有：

$$\begin{aligned}||\alpha-\beta||&=\sqrt{\langle\alpha-\beta|\alpha-\beta\rangle}=\sqrt{(\langle\alpha|-\langle\beta|)(|\alpha\rangle-|\beta\rangle)}=\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle-\langle\beta|\alpha\rangle-\langle\alpha|\beta\rangle+\langle\beta|\beta\rangle}\\&=\sqrt{2-\langle\beta|\alpha\rangle-\langle\alpha|\beta\rangle}=\sqrt{2-2\Re\langle\alpha|\beta\rangle}\end{aligned}$$

又因为$(\langle\alpha|+\lambda^*\langle\beta|)(|\alpha\rangle+\lambda|\beta\rangle)=\langle\alpha|\alpha\rangle+\lambda^*\langle\beta|\alpha\rangle+\lambda\langle\alpha|\beta\rangle+\lambda^*\lambda\langle\beta|\beta\rangle\geq 0$，且等号当且仅当$|\alpha\rangle+\lambda|\beta\rangle=\mathbf{0}$时成立（此处$\mathbf{0}$表示零向量）。对边界条件左乘$\langle\beta|$，可得$\langle\beta|\alpha\rangle+\lambda\langle\beta|\beta\rangle=0$，即$\lambda=-\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}$，带回不等式并化简得：

$$\langle\alpha|\alpha\rangle-\frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\langle\beta|\alpha\rangle-\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\langle\alpha|\beta\rangle+\frac{\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle^2}\langle\beta|\beta\rangle=\langle\alpha|\alpha\rangle-\frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\langle\beta|\alpha\rangle\geq 0\quad\text{（此处用到}\langle\beta|\alpha\rangle=\langle\alpha|\beta\rangle^*\text{）}$$

故$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2\leq\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle=1$，结合$\Re^2\langle\alpha|\beta\rangle+\Im^2\langle\alpha|\beta\rangle=|\langle\alpha|\beta\rangle|^2$，得$\Re^2\langle\alpha|\beta\rangle\leq|\langle\alpha|\beta\rangle|^2\leq 1$，从而$-1\leq\Re\langle\alpha|\beta\rangle\leq 1$，故当$\Re\langle\alpha|\beta\rangle=1$，即$|\alpha\rangle=|\beta\rangle$时，$|\alpha\rangle$与$|\beta\rangle$的距离最小，为$||\alpha-\beta||_{\min}=\sqrt{2-2\times 1}=0$；当$\Re\langle\alpha|\beta\rangle=-1$，即$|\alpha\rangle=-|\beta\rangle$时，$|\alpha\rangle$与$|\beta\rangle$的距离最大，为$||\alpha-\beta||_{\max}=\sqrt{2-2\times(-1)}=2$

练习4：为什么不能将S_2空间中的内积按如下定义

$$\langle a|b\rangle\equiv\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2$$

解：若按如上定义，可设$|u\rangle=\begin{bmatrix}\mathrm{i}u_1\\\mathrm{i}u_2\end{bmatrix}$，其中$u_1,u_2\in\mathbb{R}$，则
$\langle u|u\rangle=\begin{bmatrix}\mathrm{i}u_1 & \mathrm{i}u_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{i}u_1\\\mathrm{i}u_2\end{bmatrix}=\mathrm{i}^2(u_1^2+u_2^2)=-(u_1^2+u_2^2)\leq 0$，但内积必须满足正定性，即$\langle u|u\rangle\geq 0$，矛盾！因此如上定义是不合理的

练习5：推导出Gram-Schmidt正交归一化过程中α_2的表达式

解：易知$|\phi_2\rangle=\alpha_2(|u_2\rangle-|\phi_1\rangle\langle\phi_1|u_2\rangle)$，该基矢满足正交归一条件，即$\langle\phi_2|\phi_2\rangle=1$，从而代入得

$$\begin{aligned}\alpha_2^*(\langle u_2|-\langle u_2|\phi_1\rangle\langle\phi_1|)\cdot\alpha_2(|u_2\rangle-|\phi_1\rangle\langle\phi_1|u_2\rangle)&=|\alpha_2|^2(\langle u_2|u_2\rangle-\langle u_2|\phi_1\rangle\langle\phi_1|u_2\rangle-\langle u_2|\phi_1\rangle\langle\phi_1|u_2\rangle+\langle u_2|\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_1|u_2\rangle)\\&=|\alpha_2|^2(\langle u_2|u_2\rangle-\langle u_2|\phi_1\rangle\langle\phi_1|u_2\rangle)=1\text{（利用}\langle\phi_1|\phi_1\rangle=1\text{）}\end{aligned}$$

因此$|\alpha_2|^2=\frac{1}{\langle u_2|u_2\rangle-\langle u_2|\phi_1\rangle\langle\phi_1|u_2\rangle}$，即$\alpha_2$的模为$|\alpha_2|=(\langle u_2|u_2\rangle-\langle u_2|\phi_1\rangle\langle\phi_1|u_2\rangle)^{-1/2}$，当然，由于我们无法得知$\alpha_2$的相位角，故无法写出$\alpha_2$的具体形式

练习6：推导Dirac δ函数的常用性质

证明：以下给出Dirac δ函数常用性质的推导过程：

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x^{'})\delta(x-x^{'})dx^{'}=f(x)$
   取x附近的一个邻域$U(x,\varepsilon)$，则由于$x^{'}\notin U(x,\varepsilon)$时，$\delta(x-x^{'})=0$，因此有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\delta(x-x')dx' = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(x')\delta(x-x')dx' = f(\xi)\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta(x-x')dx' \quad (x-\varepsilon<\xi<x+\varepsilon)$$

以上运用到积分第一中值定理。从而当$\varepsilon \to 0$时，$\xi \to x$，$f(\xi) \to f(x)$，又按δ函数定义，得$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta(x-x')dx' = 1$，故$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\delta(x-x')dx' = f(x)$。

2. $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|} \quad (a \neq 0)$
   令$t = ax$，两边对x求微分，则$dt = adx$。当$a > 0$时，有
   $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(ax)dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t/a)\delta(t)dt = \frac{f(t/a)}{a} = \frac{f(x)}{a}$；当$a < 0$时，有
   $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(ax)dx = \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} f(t/a)\delta(t)dt = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t/a)\delta(t)dt = -\frac{f(t/a)}{a} = -\frac{f(x)}{a}$。对以上两种情形，均可改用$|a|$表示，从而得
   $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(ax)dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t/a)\delta(t)dt = \frac{f(t/a)}{|a|} = \frac{f(x)}{|a|} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx$，故
   $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|} \quad (a \neq 0)$

3. $\delta(-x) = \delta(x)$

   第3点可看作第2点取$a = -1$的情形，证明见上

4. $x\delta(x) = 0$
   对函数$f(x)$，有$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x\delta(x-0)dx = [xf(x)]_{x=0} = 0$，再根据$f(x)$的任意性，得$x\delta(x) = 0$

5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x'')\delta(x'-x'')dx'' = \delta(x-x')$

   作变换$t = x - x''$，两边对x''求微分，则$dt = -dx''$，故有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x'')\delta(x'-x'')dx'' = \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(t)\delta(x'+t-x)(-dt) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\delta[t-(x-x')]dt = \delta(x-x') \quad (\text{视}\,\delta(t)\,\text{为}\,f(t))$$

6. $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x_i)}{|g'(x_i)|}$，其中$x_i$是方程的第$i$个根，$g'(x)$表示对$g(x)$的一阶导数，这里要求$g(x)$是个光滑函数，并且$g'(x_i) \neq 0$
   首先考察x_i附近的一个邻域$U(x_i, \varepsilon)$，计算在该领域上的积分$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x)\delta(g(x))dx$。令$y = g(x)$，两边对$x$求微分，则$dy = g'(x)dx$。若$g'(x) > 0$，则$g(x_i+\varepsilon) > g(x_i-\varepsilon)$，因此：

$$\begin{aligned}\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x)\delta(g(x))dx &= \int_{g(x_i-\varepsilon)}^{g(x_i+\varepsilon)} f(x)\delta(y)\frac{dy}{|g'(x)|} = \int_{g(x_i-\varepsilon)}^{g(x_i+\varepsilon)} \frac{f(x)}{|g'(x)|}\delta(y-0)dy \\ &= [\frac{f(x)}{|g'(x)|}]_{y=0} = [\frac{f(x)}{|g'(x)|}]_{g(x)=0} = \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}\end{aligned}$$

若$g'(x) < 0$，则$g(x_i+\varepsilon) < g(x_i-\varepsilon)$，因此：

$$\begin{aligned}\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x)\delta(g(x))dx &= \int_{g(x_i-\varepsilon)}^{g(x_i+\varepsilon)} f(x)\delta(y)\frac{dy}{-|g'(x)|} = \int_{g(x_i+\varepsilon)}^{g(x_i-\varepsilon)} \frac{f(x)}{|g'(x)|}\delta(y-0)dy \\ &= [\frac{f(x)}{|g'(x)|}]_{y=0} = [\frac{f(x)}{|g'(x)|}]_{g(x)=0} = \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}\end{aligned}$$

将积分扩展至整个实数域，则有$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$，

另一方面，$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x)\delta(x-x_i)dx = f(x_i)$，两边同时除以$|g'(x_i)|$，得$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \frac{f(x)}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i)dx = \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$，从而对所有的$x_i$求和得$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \frac{f(x)}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$。将积分扩展至整个实数域，得：

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \frac{f(x)}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (\text{利用}\,\delta(x-x_i)\,\text{在邻域}\,U(x_i,\varepsilon)\,\text{均为}\,0\,\text{的性质})$$

交换积分符号和求和符号得：

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{|g^{'}(x_i)|}\delta(x-x_i)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta(x-x_i)}{|g^{'}(x_i)|}dx=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)}{|g^{'}(x_i)|}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(g(x))dx$$

从而一一对应得$\delta(g(x))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta(x-x_i)}{|g^{'}(x_i)|}$

7. 对δ函数的导数满足$\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{\partial^n}{\partial {x^{'}}^n}\delta(x-x^{'})]f(x^{'})dx^{'}=(-1)^n\frac{d^nf(x)}{dx^n}$

由分部积分法得：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{\partial^n}{\partial {x^{'}}^n}\delta(x-x^{'})]f(x^{'})dx^{'}&=\{[\frac{\partial^{n-1}}{\partial {x^{'}}^{n-1}}\delta(x-x^{'})]f(x^{'})\}_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{\partial^{n-1}}{\partial {x^{'}}^{n-1}}\delta(x-x^{'})]\frac{df(x^{'})}{dx^{'}}dx^{'}\\&=0-\{[\frac{\partial^{n-2}}{\partial {x^{'}}^{n-2}}\delta(x-x^{'})]\frac{df(x^{'})}{dx^{'}}\}_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{\partial^{n-2}}{\partial {x^{'}}^{n-2}}\delta(x-x^{'})]\frac{d^2f(x^{'})}{d{x^{'}}^2}dx^{'}\\&=\cdots=\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\delta(x-x^{'})\frac{d^nf(x^{'})}{d{x^{'}}^n}dx^{'}=(-1)^n\frac{d^nf(x)}{dx^n}\end{aligned}$$

作为特殊情形，当$n=1$时，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{\partial}{\partial x^{'}}\delta(x-x^{'})]f(x^{'})dx^{'}=\{\delta(x-x^{'})f(x^{'})\}_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x^{'})\frac{df(x^{'})}{dx^{'}}dx^{'}=0-f^{'}(x)=-f^{'}(x)$$