

2009年第十屆亞洲物理奧林匹亞競賽及 第四十屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2008年11月15日

13:30~16:30

考試時間：三小時

<<注意事項>>

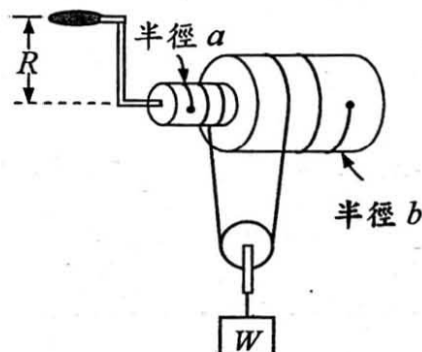
- 1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為150分。
- 2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
- 3、計算題部分，請在答案卷上指定之位置作答。
- 4、可使用掌上型計算器。

2009 年第十屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第四十屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

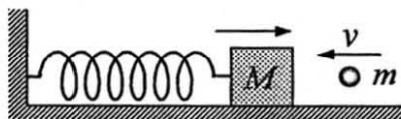
- 一、轆轤是滑輪的另一種形式，人們利用它自井中提水。它的主要組成是一根圓木，一段較細(小轉軸半徑 a)，另一段較粗(大轉軸半徑 b)，並附有一轉動手柄，可使圓木繞其中心軸轉動，旋轉的半徑為 R 。將一條繩子沿正反方向，分繞在該圓木的粗細部分，如右圖所示，繩子的中段繞過一個輕滑輪，下繫有一重量為 W 的物體。若欲將此物體拉升，則作用在轉動手柄的施力，其最小值應為何(以已知量表示之)？(1)。



- 二、從天文觀測得知太陽以 250km/s 的等速率，環繞銀河系的中心，在半徑為 2.5×10^4 光年的圓形軌道上運動，而我們所居住的地球則以太陽為中心，在半徑為 $1.5 \times 10^{11}\text{m}$ 的圓形軌道上轉動。假設銀河系內的星球質量分佈為球形均向對稱，根據以上的數據，估算銀河系在太陽的運動軌道內所包裹的總質量，為太陽質量的多少倍？(2)。

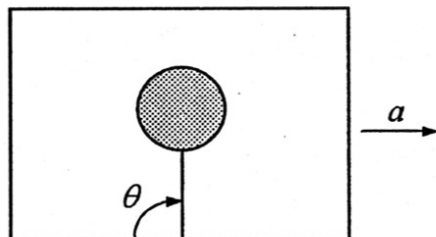
- 三、某園丁以一截面積為 5.0cm^2 的均勻水管，注滿容積為 $6.0 \times 10^{-2}\text{m}^3$ 的水桶，需時 60s 。若原接水龍頭在每秒供水量保持不變的情況下，將此水管連接一截面積為 2.0cm^2 的噴頭，則其出水速率為(3) m/s ；若將此噴頭鉛直向上噴，則噴出的水柱最高可達(4) m (離噴頭出水處的高度)。

- 四、一質量為 M 的鉛塊與彈簧相連，以角頻率 ω 和振幅 A 在光滑的水平面上往復振動。當鉛塊向右經過平衡點的瞬間，恰有一質量為 m 的子彈，以速率 v 沿水平面向左垂直射入鉛塊內，並嵌入其中，如右圖所示。若子彈射入後，鉛塊的運動方向不變，則該系統振動的角頻率變為(5)；其振幅變為(6) (以已知量表示之)。

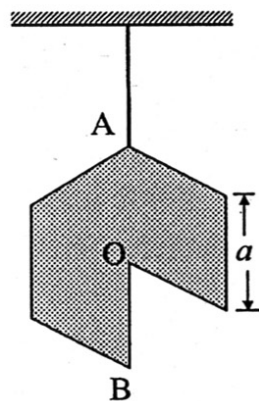


- 五、長條形橡皮筋的張力 T 與其長度 L 的關係式為 $T = A[(L/L_0) - (L_0/L)^2]$ ，式中 A 為常數， L_0 為橡皮筋的自然長度。今將一條橡皮筋的上端固定，下端鉛直懸掛一木塊，橡皮筋在平衡時的長度為 $L = 2L_0$ 。若橡皮筋的質量很輕可忽略不計，則此木塊在平衡點附近，做小振幅振動的頻率 $f =$ (7) (以 L_0 和重力加速度 g 表示之)。

- 六、在一密閉的車廂內，有一氫氣球靜止地浮在空氣中，其下端以一條細線繫於地板上，如右圖所示。當車廂以加速度 $a = g$ ($= 9.8 \text{ m/s}^2$) 沿水平方向前進時，該細線和車內地板之間的夾角 $\theta =$ (8)。

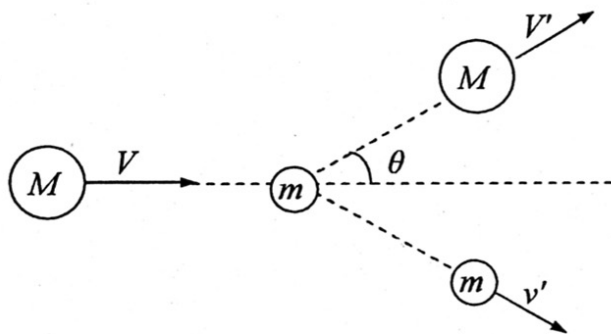


- 七、如右圖所示，一正六邊形的均勻木板，邊長為 a ，由中心 O 點沿徑向向外挖除一邊。今以一細繩繫住該六邊形的 A 點，鉛直懸掛。當達成平衡時，鉛直線和 \overline{AB} 之間的夾角為 θ ，則 $\tan \theta =$ (9)。



- 八、一炮兵在水平的地面上，以 45° 仰角向正東方向發射一炮彈，其落地點距發射點的距離為 d 。現又在同樣情況下發射另一炮彈，但發現此炮彈在達到最高點時，爆裂成質量相等的三塊彈片，其中兩塊分別落在發射點的正北方和正南方，且落地時間與第一次發射的炮彈的落地時間相等。假設炮彈爆裂時，三塊彈片所獲得的衝量值均相等，則第三塊的落地點在何處？方向 (10) (填答正東、東偏北若干度、或東偏南若干度等)；距發射點的距離為 (11)。(空氣的阻力可以忽略不計)

- 九、在光滑的水平桌面上，一質量為 M 的球體以固定的速度 V ，彈性碰撞另一質量為 m 的靜止球體。若 $M > m$ ，則入射球體在碰撞後，偏離原入射方向的角度為 θ ，其可能的最大角度 θ_{\max} 為何？寫出 $\sin \theta_{\max} =$ (12) (以 m 、 M 、 V 表示之)。這時該球體 M 的射出速度 V' 為何 (以 m 、 M 、 V 表示之)？(13)。

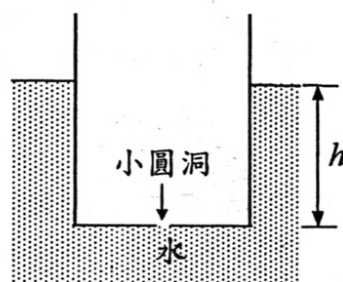


- 十、在重力場中，一內半徑為 R 的球形中空容器，內裝有一物質的液體與氣體，其體積各為容器容積的一半。液體與器壁接觸的液面微向上彎曲，即液體與器壁的接觸角很小，如右圖所示。當容器處於失重狀態時，若氣體與液體的體積沒有變化，則容器內液體與氣體之間界面的面積將變為 (14)。

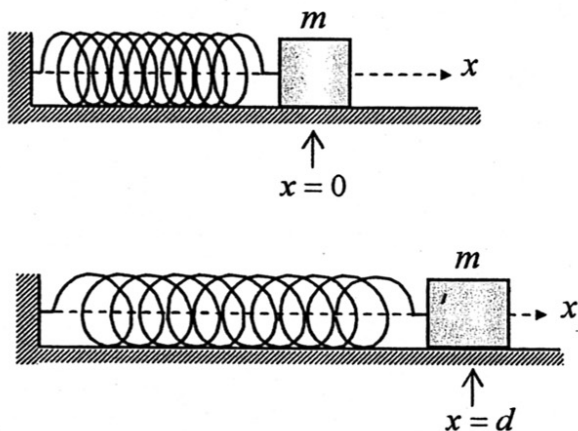


- 十一、一個平底的杯子，內裝 5.0cm 深的水。今在杯底鑽一個小圓孔，若不欲使杯內的水漏出，則該圓孔的最大直徑 D_0 為何？(15) mm。(已知水在室溫時的表面張力為 $7.3 \times 10^{-2} \text{ N/m}$)

- 十二、一中空的長直圓筒，頂面開口，底面(厚度可忽略)鑽有一個半徑為 $40 \mu\text{m}$ 的小圓洞。如右圖所示，若將圓筒沿鉛直方向緩慢地浸入室溫的水中，則當底面小洞在水面下的深度 $h =$ (16) m 時，開始有水湧入圓筒中。(已知水在室溫時的表面張力為 $7.3 \times 10^{-2} \text{ N/m}$)

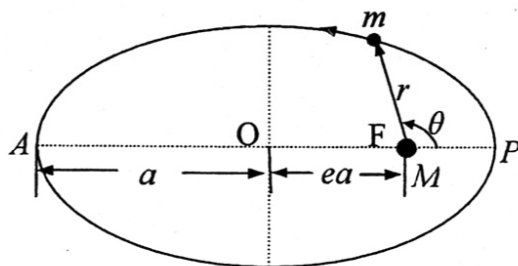


- 十三、在水平桌面上有一質量可忽略，力常數為 k 的理想彈簧，其中心軸與 x 軸重合，如右圖所示。彈簧的左端固定，其右端和一質量為 m 的物體連接，物體與水平桌面之間的動摩擦係數為 μ ，靜摩擦係數為 μ_s ，起始時彈簧處於自然長度狀態，物體位於 $x = 0$ 。若將物體向右慢慢拉到 $x = d$ 處，自靜止開始釋放。此後物體沿 x 軸作來回的往復運動。當物體通過 $x = 0$ 時，其動能的最大值為何？(17)。當物體第一次回到平衡位置的右邊時，其最大位移為 (18)。



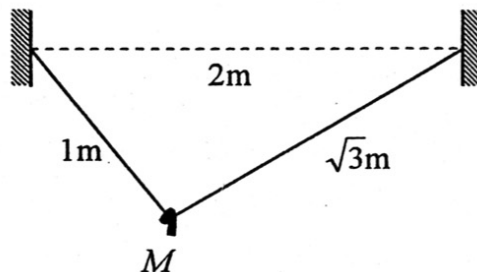
(假設 $\frac{kd}{5mg} > \mu_s > \mu$, g 為重力加速度)

- 十四、一質量為 m 的小行星在半長軸為 a 的橢圓軌道上轉動，一質量為 M ($M \gg m$) 的恆星位居焦點 F ，如右圖所示，圖中 e 為橢圓的離心率， O 點為對稱中心， A 和 P 兩點分別為遠日點和近日點。設 r_1 和 r_2 分別為 A 和 P 兩點距 F 點的徑向距



離， G 為萬有引力常數， L 為小行星的角動量， E 為小行星的力學能，寫出 r_1 和 r_2 所滿足的數學方程式 (19) (以 G 、 L 、 E 、 M 、和 m 表示之)；又角動量 $L =$ (20) (以 G 、 M 、 m 、 a 、和 e 表示之)。

- 十五、一條輕質細繩的兩端固定如右圖所示，兩固定點位在同一水平面上，相距 2m ，繩子全長為 $(1+\sqrt{3})\text{m}$ ，其上吊掛一質量為 M 的活動小勾，小勾和繩子之間無摩擦力。初始時小勾吊掛在距左固定點的繩長為 1m 處，自靜止開始釋放，小勾在繩上的滑動過程中無擺動。以 g 代表重力加速度，當小勾到達最低點時，其速率為何？(21)。

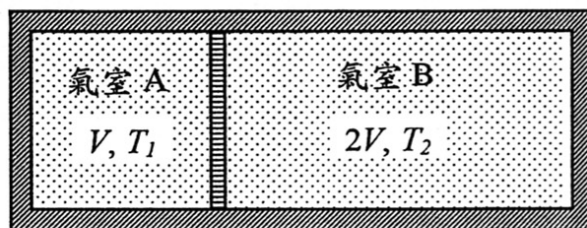


- 十六、用於表示冷氣機效率的 EER 值 (Energy Efficiency Ratio) 定義為冷卻功率除以所消耗的電功率。現在有 A 和 B 兩部冷氣機，冷卻功率皆為 3600 仟卡/小時，A 機的 EER 值為 2.40 ，B 機為 2.00 ，但是 A 機較 B 機貴 5000 元。如果用電費率是 3.22 元/度，試問在使用多少小時後，A 機所省的電費，方可抵銷與 B 機之間的價差？(22) 小時。

【註】：1 度電 = 1 仟瓦小時 (kWh)，1 卡 = 4.186 焦耳)。

- 十七、在一邊長為 1.0m 的立方容器中，封入 2.0mol 、 27°C 的氬氣。今將一半徑為 1.0cm 的硬球置入其中，估計在硬球表面上，平均每秒所受到氬原子撞擊次數的數量級為 (23) 次。(氣體常數 $R = 8.32\text{J/mol}\cdot\text{K}$ ，波茲曼常數 $k = 1.38 \times 10^{-23}\text{J/K}$)

- 十八、右圖所示為一與外界絕熱的氣體容器，其內以一片固定的傳熱隔板分成兩個氣室，A 和 B，兩氣室的體積比為 $1:2$ 。在常溫下，氣室 A 內裝有單原子分子的氣體，B 則裝有雙原子分子的氣體，但兩氣室內的氣體分子總數相等。起始時，兩

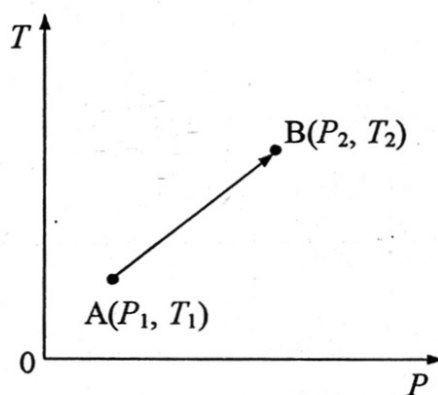


氣室內的氣體溫度不同，經由隔板的熱傳導作用而交換熱量。假設在交換熱量的過程中，氣體皆維持在準靜狀態，則兩氣室內氣體壓力變化率的比值為

$$\frac{\Delta P_1 / \Delta t}{\Delta P_2 / \Delta t} = \text{(24)}.$$

十九、美國利用「太空梭」作為進出大氣層的航空載具。太空梭的平坦底部，緊密貼覆一層厚度 $d = 4.00 \text{ cm}$ ，導熱係數 $\kappa = 1.30 \times 10^{-2} \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ 的絕熱磚，用於保護太空梭，以免當太空梭通過大氣層時，由於空氣的摩擦，產生高熱而致燒毀。在地面上為測試這種絕熱磚，將一片正方形的大塊絕熱磚底面以火焰加熱，維持在 $T_s = 1500^\circ\text{C}$ ，若僅計算頂面因輻射而導致之熱損失（側面的面積比頂面小得多，其熱輻射可忽略），且該絕熱磚可視為黑體，設其頂面的溫度為 $T \text{ (K)}$ ，已知周遭環境的溫度為 $T_0 = 25.0^\circ\text{C}$ ，黑體表面每單位面積的輻射功率為 $P = \sigma T^4$ ，式中史特凡-波茲曼常數 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ 。寫出該絕熱磚頂面的溫度 T 所需滿足的方程式 (25)（以 T_s 、 T_0 、 d 、 κ 和 σ 表示之）。將已知的數據代入該方程式，所得該絕熱磚的頂面溫度為 (26) $^\circ\text{C}$ 。

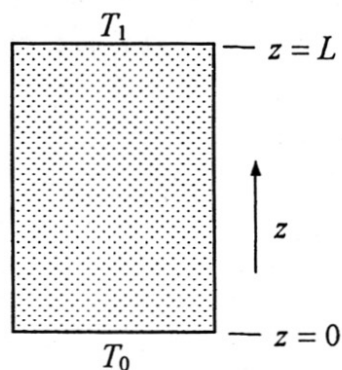
二十、一汽缸內裝有 n 莫耳的單原子理想氣體，假設該氣體由起始狀態 $A(P_1, T_1)$ ，緩慢地經由右圖所示的路徑改變成最後狀態 $B(P_2, T_2)$ ，以 R 代表氣體常數，則在此過程中，該氣體對外界所作的功 $W =$ (27)；又氣體所吸入的熱量 $Q =$ (28)。（本題答案以 P_1 、 P_2 、 T_1 、 T_2 、 n 和 R 表示之）



【註】： $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln \left| x + \frac{b}{a} \right| + \text{常數}$

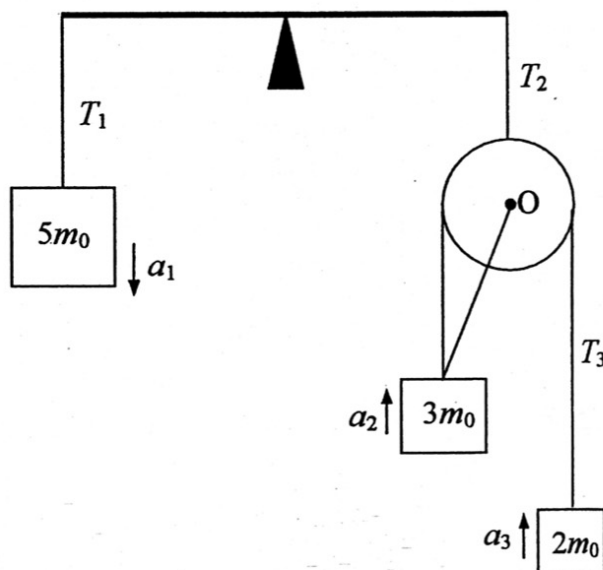
二十一、由實驗得知：一物體吸收或放出熱量的時變率 $\frac{dQ}{dt}$ ，和該物體溫度 T 與環境溫度 T_0 的溫差成正比，即 $\frac{dQ}{dt} \propto -(T - T_0)$ 。已知一置於室溫為 300 K 的某物體，自初溫 360 K 降至 330 K ，需時 10 分鐘，則此物體繼續自 330 K 降至 315 K ，需時 (29) 分鐘。

二十二、右圖所示為一圓柱形氣體容器的剖面圖，圓柱的高度為 L ，側面為絕熱的器壁，頂面和底面分別維持在固定的溫度 T_1 和 T_0 。容器內裝有單原子分子的理想氣體。若將該氣體容器置於太空中，即重力可以不計，假設容器的高度 L 遠大於氣體分子的平均自由徑的長度 ℓ ，則當容器內的氣體達成穩定狀態時，氣體溫度 T 和位置高度 z 之間的數學關係式為何？ $T(z) =$ (30)。

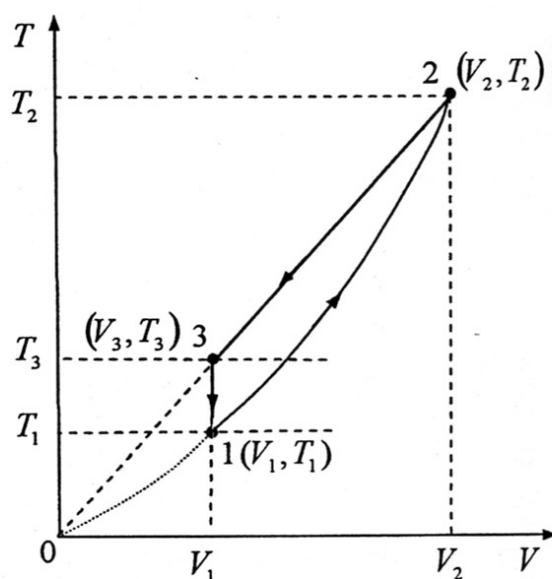


貳、計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

- 一、如右圖所示，在一等臂天平的左端懸掛一質量為 $5m_0$ 的重物，在其右端懸掛一質量可忽略的輕滑輪，跨過該滑輪各懸掛質量分別為 $3m_0$ 和 $2m_0$ 的重物。假設滑輪的表面光滑，其和繩子之間的摩擦力可忽略不計。起始時，滑輪的中心點 O 和 $3m_0$ 質量的頂端以輕繩相連，等臂天平得以維持平衡。若將該繩子在瞬間剪斷或以火燒斷，則三個重物的加速度 a_1 、 a_2 、和 a_3 各為何？又三段繩子的張力 T_1 、 T_2 、和 T_3 各為何？設等臂天平的左右兩臂的長度各為 ℓ ，天平繞其中心支柱的轉動慣量為 $I = \frac{1}{3}m\ell^2$ ，式中 $m = 3m_0$ ，為天平的質量。



- 二、一汽缸內裝有 1 mole 的理想氣體，該氣體的絕對溫度 T 對其體積 V 的變化關係（ T - V 圖）如右圖所示。汽缸內的氣體執行 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 的可逆循環過程，在過程 $1 \rightarrow 2$ 中，氣體溫度與其體積間的關係式為 $T = aV^2$ ，式中 a 為一常數。已知在此循環中，氣體的最高溫度 T_{\max} 等於氣體最低溫度 T_{\min} 的 4 倍。回答下列問題：



- (a) 畫出該氣體在執行 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 的過程中，氣體壓力 P 對其體積 V 的變化關係圖，即 P - V 圖。
- (b) 求在此一循環過程中，氣體對外界所作的功（以 T_1 和氣體常數 R 表示之）。