

2015年第16屆亞洲物理奧林匹亞競賽及  
第46屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

# 理論試題

2014年11月15日

13:30~16:30

考試時間：三小時

## <<注意事項>>

- 1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為150分。
- 2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予以計分。
- 3、計算題部分，請在答案卷上指定之位置作答。
- 4、可使用掌上型計算器。

# 雄中物理科掃描版

## 2015 年第 16 屆亞洲物理奧林匹亞競賽 及第 46 屆國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

### 壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、在赤道上空同步衛星，其繞地球的週期恰好與地球自轉週期相同，地球上的人會覺得該衛星懸在空中不動；而另一種全球衛星定位系統衛星(GPS)繞行地球的週期是 12 小時。已知同步衛星的軌道半徑為地球半徑的 6.6 倍，則 GPS 衛星地軌道半徑為地球半徑的 (1) 倍。

二、一小球質量為  $m$ ，以一質量可忽略不計且長為  $l$  的細線，懸掛於天花板下。現以一質量為  $M$  的木棒 ( $M \gg m$ ) 在水平的方向，以  $v$  的速度撞擊小球。假設木棒和小球之間是彈性碰撞，則在撞擊後瞬間，球的速度為 (2)。若細線要維持不斷，則細線最少要能承受的張力等於 (3)。

三、質量  $m$  的直角木塊，其水平面的斜角為  $\theta$ ，且暫時鎖定在光滑的水平桌面上。木塊  $m$  用水平細繩經過桌緣輕滑輪與另一質量  $M$  的方塊相連 ( $M > m$ )，如圖 1 所示。今一小方塊靜置在直角木塊粗糙斜面的頂端(除了直角木塊的斜面外，所有接觸面皆無摩擦力)，在移除鎖定裝置後，桌面上的直角木塊  $m$  開始滑動。若開始滑動時小方塊與  $m$  斜面之間的作用力消失，則此時直角木塊  $m$  加速度大小等於 (4)，若此時  $\theta$  恰為最小值，則  $\tan\theta$  等於 (5)。(設重力加速度為  $g$ )

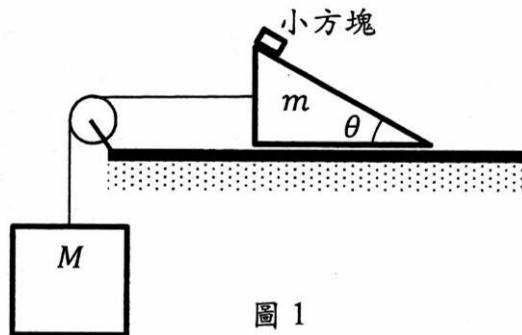


圖 1

四、某甲用力往地面丟擲質量  $M$  之橡膠球，當橡膠球反彈的瞬間為時間零點 (即  $t=0.00\text{ s}$ )，該橡膠球反彈後之動量量值 ( $|p|$ ) 與時間  $t$  關係如圖 2 所示，求反彈後該橡膠球達到最高點時所需時間等於 (6) s。該橡膠球質量  $M = \underline{(7)}\text{ kg}$  (設重力加速度量值為  $9.80\text{ m/s}^2$ )。

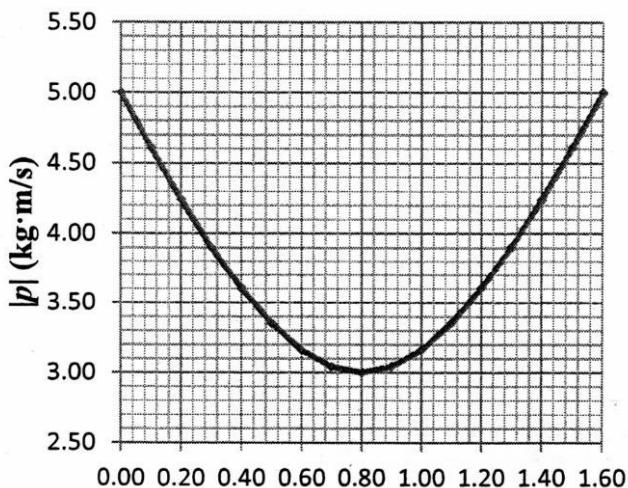


圖 2

- 五、一內有金屬塊 W 之小木桶，整體浮在一裝有水之容器水面上，如圖 3 所示。今將金屬塊 W 由木桶內取出置入容器之水中，金屬塊在沈入底部後，試問容器內的水面高度 h 之變化是上升、下降亦或是不變？(8)。

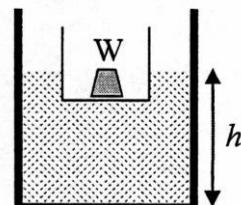


圖 3

- 六、一端開口、另一端是平口封閉的圓柱型玻璃細管，其質量為  $m$ 、半徑為  $r$  (細管本身玻璃的體積可忽略不計)。將玻璃細管開口端倒插入密度為  $\rho$  的液體，且置於以活塞封住的密閉容器中。當處於靜止平衡時(如圖 4 所示)，液面上方的氣體壓力為  $P$ ，玻璃細管內空氣柱的長度為  $l_i$ ，則玻璃細管內空氣柱的氣體壓力等於 (9)。若施力以等溫的方式將活塞下壓，細管會逐漸沒入液體中，當細管平口處恰與水面齊平時，此時液面上方的氣體壓力等於 (10)。(設重力加速度為  $g$ ，本題不考慮液體表面張力效應，且容器的體積遠大於細管。)

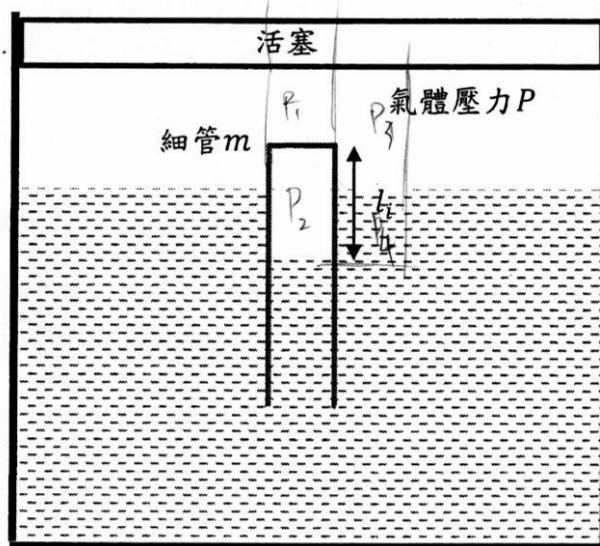


圖 4

# 雄中物理科掃描版

- 七、一固定於船尾的水下噴射推進器(如圖 5)，透過直徑  $D$  為  $0.60\text{ m}$  的螺旋槳，沿水平方向由出口向後排出的穩定水流，出口直徑  $d$  為  $0.50\text{ m}$ ，出口水流相對於推進器的平均速度  $\vec{v}_j$  等於  $8.0\text{ m/s}$ 。若此船水平等速前進的速度  $v_f$  是  $4.0\text{ m/s}$ ，則在一維穩流近似條件下，水進入推進器的體積流率  $Q$  為 (11)  $\text{m}^3/\text{s}$ ，而推進器產生的推力  $F$  為 (12)  $\text{N}$ 。(水的密度  $\rho$  為  $1.0 \times 10^3\text{ kg/m}^3$ )

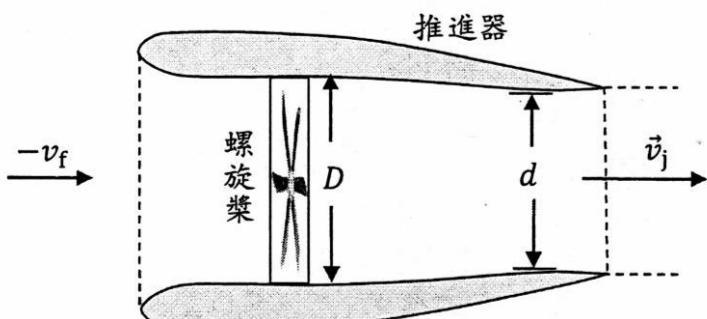


圖 5

- 八、有一實心金屬正立方塊，已知在某一瞬間，其三邊與直角坐標系  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸重合如圖 6 所示，A 點的速度為  $(v, -3v, 0)$ ，B 點的速度為  $(v, 0, 0)$ ，C 點的速度為  $(-2v, 0, 0)$ ，試問金屬塊幾何中心 O 點之速率為 (13)。

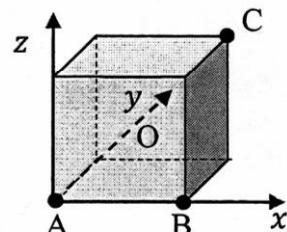


圖 6

- 九、圖 7 所示為一平放在水平地面上之均勻細棒，某生以一細繩綁著細棒底端以垂直細棒方向施力  $F$ ，將細棒緩慢地拉起，發現當夾角  $\theta = 30^\circ$  時，細棒另一端 O 點開始滑動，試問細棒與地面間之最大靜摩擦係數為 (14)。

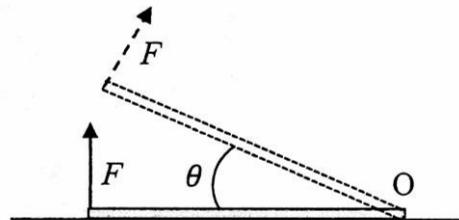


圖 7

- 十、一拋物線軌道用不會變形的鋼絲所製成，並固定於鉛直面上。在此鉛直面上，拋物線軌道滿足： $y = cx^2$ ， $c$  是一個常數。一個質量為  $m$  的小鐵環，套在拋物線軌道上，將鐵環移至距最低點的水平距離  $x_0$  處(如圖 8 所示)，自靜止釋放。假設鐵環與軌道間的摩擦可以忽略，因為  $x_0$  很小，故  $cx_0 \ll 1$ 。在接下來的運動過程，鐵環第一次回到出發點所需要的時間是 (15)。當鐵環到達拋物軌道最低點時，軌道對鐵環的施力  $F$  為  $F = mg +$  (16)。

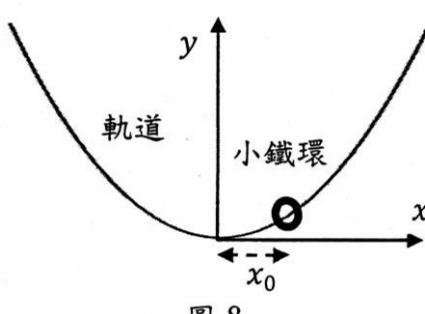


圖 8

【提示】：微分公式  $\frac{dx^n}{dt} = x^{n-1} \frac{dx}{dt}$ 。

十一、一物體質量為 $M$ ，掛於一質量可忽略不計的細線一端，將細線繞於一水平固定不動、半徑為 $R$ 的圓柱上，繞了 $n + \frac{1}{2}$ 圈，細線的另一端懸掛一質量為 $m$ 的物體。

若線與圓柱的靜摩擦係數為 $\mu$ ，則兩物體質量的比值 $\frac{m}{M}$

在某一範圍內時細線不會滑動；即當 $e^{-(2n+1)\pi\mu} < \frac{m}{M} <$

(17) 在此範圍內細線不會滑動。

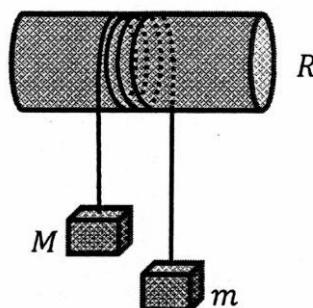


圖 9

【提示】：積分公式  $\int \frac{dx}{x} = \ln x$

十二、已知半徑為 $R$ 、質量為 $M$ 的均勻圓盤，如圖 10 所示，繞圓盤質量中心 C 點的轉動慣量為  $I_C = \frac{1}{2}MR^2$ ，而在距離圓心  $d$  之 D 點為轉軸的轉動慣量為  $I_D = I_C + Md^2$ ，此轉動慣量的關係式稱之為平行軸定理。當圓盤以 D 點鉛直懸吊，其小角度振盪的週期為  $2\pi\sqrt{\frac{I_D}{Mgd}}$ ，其中  $g$  為重力加速度。當此圓盤被裁去  $\frac{1}{2}$  而形成一個半圓，如圖 11 所示，已知  $C_1$  為質量中心，且其和 C 之間的距離為  $\frac{4}{3\pi}R$ ，則繞  $C_1$  點的轉動慣量  $I_{C_1}$  等於 (18)。沿著 C 和  $C_1$  連線上的某一點，以小角度振盪的週期  $T$  為  $2\pi\sqrt{\frac{I}{\frac{1}{2}Mgx}}$ ，其中  $I$  為該點轉動慣量，且  $x$  為與  $C_1$  的距離，則當  $T$  為最小值時， $x = (19)$ 。(以  $I_{C_1}$ 、 $M$ 、 $R$  和  $g$  表示之。)

【提示】：微分公式  $dx^n = x^{n-1}dx$ 。

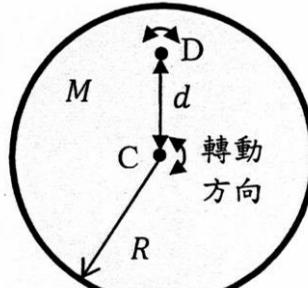


圖 10

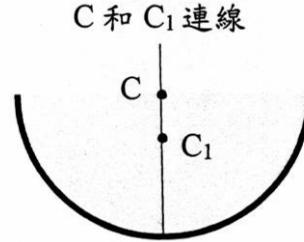


圖 11：半圓盤

十三、光滑水平面上置一質量為 $m$ 的薄木板，其上再靜置一邊長為 $L$ 、質量為 $M$ 的均質立方體木塊，如圖 12 所示。所有過程中，木板 $m$ 和木塊 $M$ 間無滑動。方塊相對於通過質心的水平軸轉動時，其轉動慣量為  $\frac{1}{6}ML^2$  (此轉動軸與木塊的四邊平行。)

# 雄中物理科掃描版

(a) 設重力加速度為 $g$ ，若一固定大小的水平方向施力 $F$ 推木板 $m$ 時，方塊 $M$ 相對於木板靜止不動，則方塊所受合力等於(20)。

(b) 另一種情況，若施力 $F$ 足夠大，使得方塊 $M$ 以木板接觸的邊為轉軸而發生旋轉，則當該方塊剛開始旋轉瞬間，方塊 $M$ 相對於旋轉軸為支點的角加速度率等於(21)。

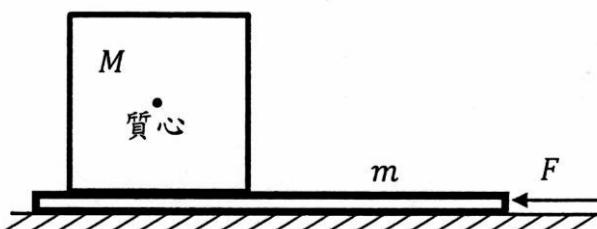


圖 12

十四、在一個鉛直的唧筒中，有質量均為 $m$ 的上下兩個活塞。活塞的面積為 $A$ ，且厚度可以忽略不計，活塞與唧筒之間的摩擦力可視為零。唧筒外部為真空，唧筒內上下兩部分均含有溫度為 $T$ 的理想氣體，如圖 13 所示。起始時，兩活塞均處於平衡狀態。已知上下活塞間相距 $\ell$ ，且下活塞與唧筒底面的距離也是 $\ell$ ，則上半部內的氣體莫耳數與下半部內的氣體莫耳數之比為(22)。現在將上活塞的位置固定住，將下活塞從原來平衡點的位置向上移一小段距離 $z_0$  ( $z_0 \ll \ell$ )，在 $t = 0$ 時，自靜止釋放。假設儀器設置可以讓唧筒內氣體溫度維持不變，且氣體的總質量可以忽略不計，下活塞與其平衡點的距離 $z(t)$ 隨時間變化之函數為(23)。

【提示】：近似公式：當 $x \ll 1$ 時， $(1 \pm x)^{-1} \approx 1 \mp x$ 。

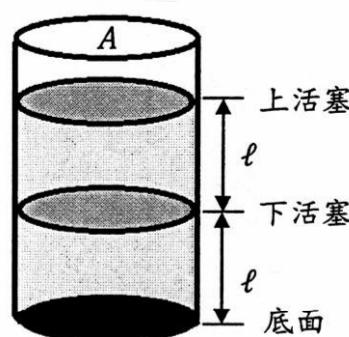


圖 13

十五、一長度 $L$ 、截面積 $A$ 之密閉容器，其除左側器壁外，其餘器壁均完全絕熱，如圖 14 中陰影所示。容器以一活塞分隔成左、右兩部分，左半部充滿 1 莫耳的單原子理想氣體，右半部為真空，且活塞以一力常數為 $k$ 之理想彈簧連接於容器右端器壁上。若該彈簧之自然長度恰等於 $L$ ，並假設活塞與器壁間無摩擦力，且容器器壁、活塞和彈簧的熱容均可忽略，則該氣體的比熱等於(24)（以氣體常數 $R$ 以及可能相關的參數表示。）。

【提示】：微分公式  $dx^n = x^{n-1}dx$ ，

$$d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df.$$

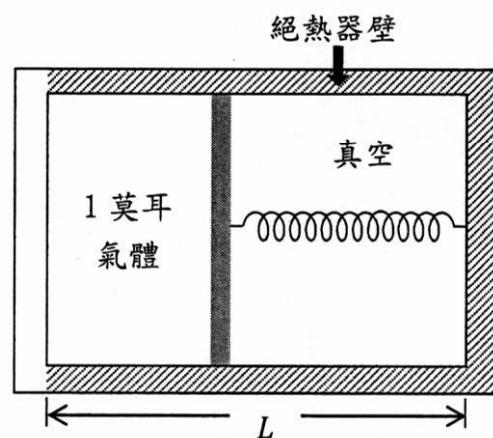


圖 14

十六、某生欲研究鐵皮屋之遮陽效果，在一室溫（即空氣溫度）為 $33^\circ\text{C}$ 之正午，以一金屬板遮陽，當溫度達穩定時，發現接受陽光照射的一面（A 面）溫度可達 $87^\circ\text{C}$ ，而未

# 雄中物理科掃描版

被太陽照設之金屬面(B面)溫度亦達到 $69^{\circ}\text{C}$ ，若忽略金屬板的熱幅射以及空氣的對流，僅考慮金屬板和其與空氣間的熱傳導效應(但忽略板邊緣的效應)，在同樣的陽光照射情形下，欲將B面的溫度降到 $50^{\circ}\text{C}$ 以下，則金屬板的厚度至少應為原先厚度的(25)倍(取最接近的整數)。

十七、歷史上，秦始皇為了防禦北方匈奴的侵襲，曾徵集大批的民工，建造萬里長城。這條長城西起甘肅，東至遼東，順著地形蜿蜒曲折，全長約 $5000\text{ km}$ ，全部工程費時9年完成。大多數地段是建在山嶺上，隨著山勢的高低而起伏。為了估算築城所需的人力，將長城模型化如下述：

(a) 長城建築在平均高度為 $200\text{ m}$ 的山嶺上，這個高度是從城牆所在地的山腳下的平地算起。城牆的平均高度為 $8.0\text{ m}$ ，平均寬度為 $6.0\text{ m}$ ，築城所需的磚石砂土，其平均密度為 $2.2\text{ g/cm}^3$ ，皆採自山腳下的平地。

(b) 一個人每天搬運磚石砂土所做的有效功為 $2.5 \times 10^5\text{ J}$ 。

根據(a)和(b)所述的長城模型和數據，估計當時為了建造長城所徵集的勞工總人數約為(26)人。

十八、液體具有黏滯性，通常以黏滯係數 $\eta$ 表示液體黏稠的程度。在某一平整表面上塗布一層厚度均勻為 $z$ 的液體，再平放一面積為 $A$ 之小平板於平整表面上。當施一外力 $F$ 於小平板，且平行於平整表面時(如圖15所示)，小平板相對於平整表面的移動速度 $v$ 與施力 $F$ 、液體黏滯係數 $\eta$ 、厚度 $z$ 和接觸面積 $A$ 的關係式為

$$F = \eta \frac{A}{z} v$$

今於兩鉛直架設之載玻片間塗布一層厚度均勻 $z$ 之洗碗精，如圖16所示。開始時，兩載玻片上下左右對齊，將左邊的載玻片固定住，使右邊的載玻片由靜止開始向下滑動，且下滑過程中的洗碗精厚度維持不變。實驗中得到右邊的載玻片完全滑離左邊的載玻片時，其所需要的時間為17.00秒。則兩載玻片之間所塗布洗碗精的厚度 $z =$ (27) $\mu\text{m}$ (以微米為單位)；(b) 右邊的載玻片由靜止下滑至載玻片長度的一半時，所需要的時間 $t_{\frac{1}{2}} =$ (28)秒。

備註：相關數值

- 載玻片之長度為 $7.60 \times 10^{-2}\text{ m}$ ，寬度為 $2.60 \times 10^{-2}\text{ m}$ ，厚度為 $0.80 \times 10^{-3}\text{ m}$ ；且載玻片之密度為 $2.50 \times 10^3\text{ kg/m}^3$ 。

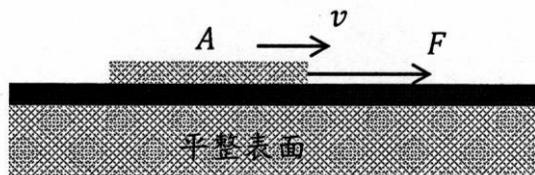


圖 15

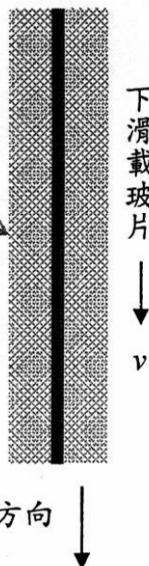


圖 16

2. 洗碗精的黏滯係數為  $0.83 \text{ kg/m.s}$ 。
3. 重力加速度量值為  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ 。

【提示】：積分公式  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ，當  $n \neq -1$ 。

十九、太空站的結構俯視圖，如圖 17 所示，內外環之間有三個連接的管道。管道是介於內圓環 ( $R_1$ ) 和外圓環 ( $R_2$ ) 之間，即管道是在  $R_1 < R < R_2$  之間，其中  $R$  是管道中某點和太空站中心的距離。管道的長度為  $R_2 - R_1$ ，截面為長方形，高度為  $h$ 。在  $R$  處的弧線長度為  $R\theta$ ， $\theta$  為連接管道左右兩壁與中心軸所形成的夾角。若太空站內空氣溫度恆為定值  $T$ ，空氣可視為由單一種分子組成的理想氣體，每個分子質量為  $m$ 。已知太空站繞中心軸以角速率  $\omega$  自轉，空氣被帶動一起轉動並達到平衡。若在管道  $R$  處的空氣壓力為  $P$ ，在  $R + \Delta R$  處的壓力為  $P + \Delta P$ ，已知  $\frac{\Delta P}{P} =$

$C \times R\Delta R$ ，則係數  $C$  等於 (29)。(設  $k_B$  為波茲曼常數)

若通道中空氣壓力  $P(R)$  與  $R$  的關係形式為  $P(R) = P_1 e^{f(R)}$ ，其中  $P_1$  為空氣在  $R_1$  處的壓力，則函數  $f(R)$  等於 (30)。

【提示】：微分公式  $de^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot df(x)$

積分公式  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ，當  $n \neq -1$ 。

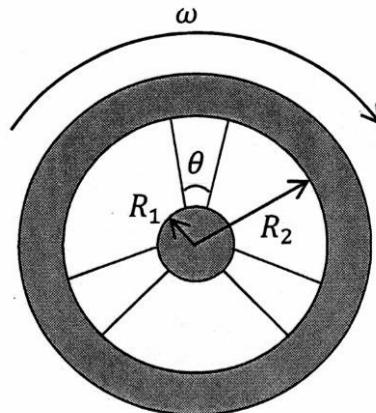


圖 17：太空站俯視圖

## 計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

### 一、受力加速運動的方塊與圓柱體

考慮在一水平桌面放置一個方塊，質量為  $M$ ，和一半徑為  $r$ 、質量為  $m$  的圓柱體，如下圖 18 所示。方塊  $M$  與桌面間的動摩擦係數為  $\mu_k = 0.3$ ，方塊  $M$  與圓柱體  $m$  材質接近，且之間的接觸面亦有摩擦，其動摩擦係數為  $\nu_k = 0.3$ 。從方塊左方向右施一力  $F$ ，使方塊與圓柱體一起向右加速移動。已知圓柱體以純滾動形式加速，即圓柱體與地面間並無滑動，則

- 系統的加速度為何？(5 分)
- 地面對圓柱體所施的摩擦力為何？(5 分)
- 方塊與圓柱體間的作用力為何？(5 分)

【提示】：圓柱  $m$  之轉動慣量等於  $\frac{1}{2}mr^2$ 。

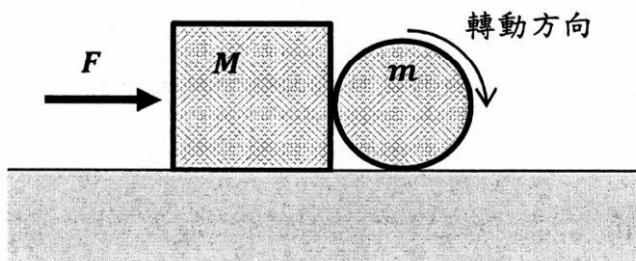


圖 18

### 二、大氣的溫度 $T$ 和壓力 $P$ 隨離地面的高度 $h$ 的增加而遞減。設在地面處 ( $h = 0$ ) 的大氣溫度和壓力分別為 $T_0$ 和 $P_0$ ，大氣溫度和離地高度之間的函數關係式為

$$T = T_0 - ah \quad (1)$$

式中  $a = 6.50 \times 10^{-3} \text{ Km}^{-1}$ ；而大氣壓力和離地高度之間的函數關係式為

$$P = P_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} h\right)^{5.23} \quad (2)$$

注意： $T$  和  $T_0$  皆為絕對溫度。大氣成分除了氧氣和氮氣之外，還有水蒸氣、二氧化碳等氣體。大氣壓力為這些氣體成分分壓的和。假設大氣內各氣體成分的組成比例維持不變，和離地的高度無關。在  $0 \sim 50^\circ\text{C}$  的溫度範圍內，水蒸氣的飽和蒸氣壓  $P_s(T)$ ，可以下式表之：

$$P_s(T) = P_s(T_0) e^{5210 \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)} \quad (3)$$

其中  $P_s(T_0)$  為地面水蒸氣的飽和蒸氣壓。

- 今在地面處測得大氣壓力為一大氣壓 ( $= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ )，氣溫為  $26.0^\circ\text{C}$ ，空氣中的相對濕度為  $70\%$ ，已知在該溫度的飽和蒸氣壓等於  $3.36 \times 10^3 \text{ Pa}$ ，則

# 雄中物理科掃描版

地面上空氣中的水蒸氣壓為何？(3分)

- (b) 根據以上的資料，估算天空中雲層下緣的大氣溫度，即大氣中的水蒸氣開始凝結時所在高度的溫度為多少°C？(8分)
- (c) 依據(b)的結果，估算天空中雲層下緣的離地高度，即大氣中的水蒸氣開始凝結時所在的高度為多少公尺？(4分)

【註】：相對濕度的定義：相對濕度 =  $\frac{\text{空氣中的水蒸氣壓}}{\text{當時氣溫的飽和蒸汽壓}} \times 100\%。$