# 2018 年第 19 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及 第 49 屆國際物理奧林匹亞競賽

## 國家代表隊初選考試

# 理論試題

2017 年 11 月 11 日
13：30~16：30
考試時間：三小時

《注意事項》

1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
4、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

# 2018 年第 19 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
# 及第 49 屆國際物理奧林匹亞競賽
# 國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

## 壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、 如圖 1 在自行車的輪框上裝置一磁石，在車架上裝置一磁感應器，每當磁石隨輪旋轉而通過感應器時，感應器即傳送一訊號給車速表，如此就構成了可以顯示時速的自行車車速表。若磁石質量為 10 公克，車輪半徑為 60 公分，磁石安裝位置距輪軸 40 公分，當每秒傳送的訊號數為 2，則其車速為___(1)___km/h；磁石所受的向心力為___(2)___N。

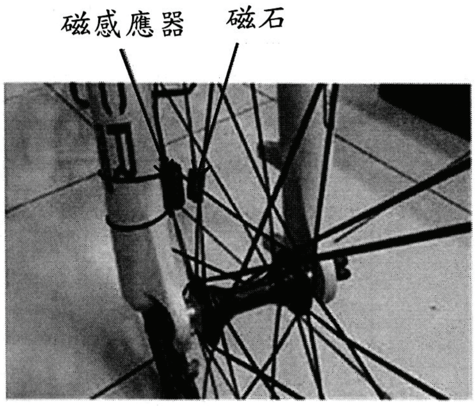



圖 1

二、 在 20°C時將容量為 250cm$^3$的玻璃瓶裝滿水(滿到再增加任何一點都會溢出)。現將水與瓶一起加熱到 50°C，則會溢出___(3)___cm$^3$的水。(水在 20°C的受熱體膨脹係數為 $0.21\times10^{-3}$ K$^{-1}$，玻璃在 20°C的線膨脹係數為 $0.5\times10^{-6}$ K$^{-1}$)

三、

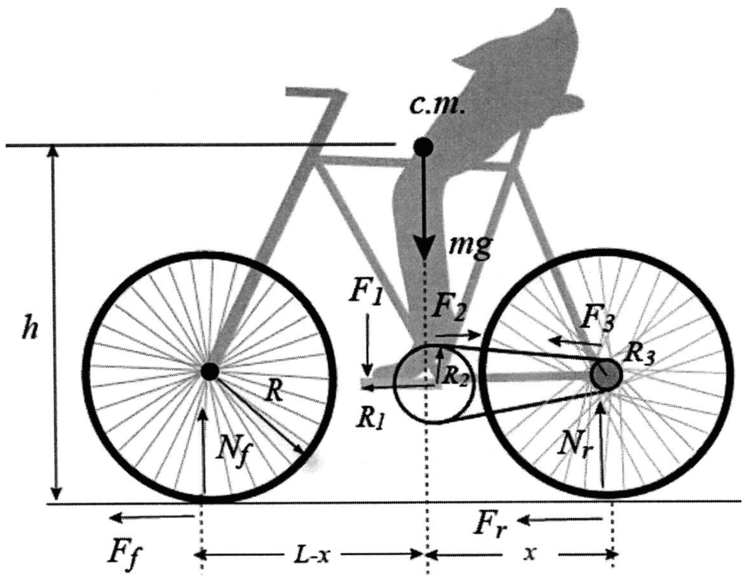
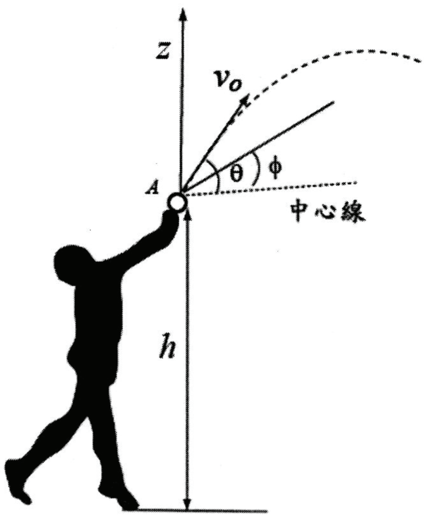



圖 2

圖 2 為一簡化之腳踏車與騎士受力圖。此處$N_f$，$N_r$分別為地面施於前輪與後輪的正向力，$F_f$，$F_r$分別為前輪與後輪所受平行於地面的力。整個系統總重量為$mg$，

質心(c.m.)距地面垂直之距離為$h$，質心距前輪與後輪與地面接觸點之水平距離分別為 $L-x$與$x$。騎士腳施力$F_1$垂直於踏板上，曲柄長度為$R_1$，前齒輪盤徑為$R_2$，後飛輪盤徑為$R_3$，輪圈半徑為$R$。$F_2$與$F_3$分別為鍊條對齒輪盤與飛輪盤之施力。回答下述問題。(A) $F_r$提供腳踏車前行之動力，$F_r$必須克服重力，內部與外部摩擦力，空氣阻力，而$F_r$可由內力$F_1$透過齒輪與飛輪傳動所提供。試問$F_r/F_1$比值為何 (4)______？(以$R_1$、$R_2$、$R_3$與$R$表示) (B) 現在考慮腳踏車行進中緩慢煞車，不踩踏板，($F_1$為零, 即不考慮系統內力)，假設前輪與後輪鎖死不轉動，僅考慮$F_r$與$F_f$(輪胎與地面之摩擦力)，設輪胎與地面動摩擦係數為$\mu_k$，當系統處於力矩平衡時，求$N_f$與$N_r$____(5)____。(注意$F_r$與$F_f$方向的改變)

四、 在鉛球運動中，運動員在投擲圈內單手將鉛球從肩部推出鉛球(如圖 3 所示)，鉛球擲出後須落於扇形落地區內，方視為有效試擲，丈量成績以鉛球落地痕跡的最近點取直線量至投擲圈內緣，丈量線應通過投擲圈圓心。鉛球質量為$m=7.2\text{kg}$，投擲圈半徑$R=1\,m$，扇形區邊線延長應通過投擲圈圓心 O，圓心角約為$35^{\circ}$(如圖 3 所示)。考慮運動員將鉛球擲出時鉛球位於投擲圈內緣 A 點中心線上，鉛球離手距地面為$h=2\text{m}$，速度為$\vec{v}_0=12\,\text{m/s}$與水平面夾角為$\theta=45^{\circ}$，但與水平面中心線夾角為$\phi$。當$\phi=10^{\circ}$時，求鉛球飛行距離為\_\_\_\_(6)\_\_\_\_m。為使鉛球落於落地區，求最大$\sin\phi$值為____(7)____。



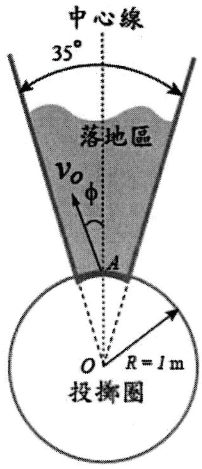




圖 3

五、 如圖 4 所示，一氣體容器的下方接上一鉛垂剛性細管，細管內有質量為$m$的活塞，細管的截面積為$A$。容器、剛性細管及活塞皆為絕熱的物質所製。活塞的上端在位置$x=0$時，容器內理想氣體的體積為$V_0$，氣體壓力恰與容器外的大氣壓力$P_0$相同。已知容器內氣體的體積$V$與溫度$T$遵守$TV^{\beta}$為常數的規律，而$\beta$為一常數。求容器內氣體的體積$V$與壓力$P$所遵守的規律____(8)____。

若活塞與剛性細管管壁之間的摩擦力可忽略，重力加速為$g$，重力造成空氣壓力隨高度的變化可忽略，則活塞在力平衡位置時，其上端位置$x_0$的表達式為$x_0=$____(9)____。

若活塞在$x_0$的上下進行小幅度的振盪，振盪的週期為$T$，求$T$的表達式 (設$mg \ll P_0A$)，$T=$____(10)____。

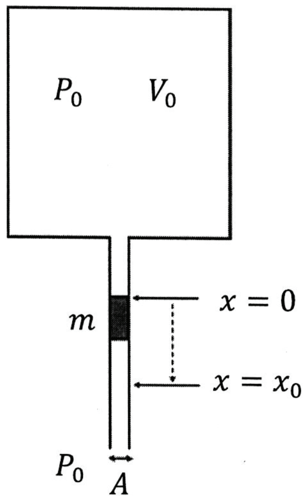


圖 4

六、 某一行星之衛星質量為$M$，繞行星作半徑為$R$、速度大小為$v_0$的圓周運動，假設有一彗星，質量為$m$，沿著衛星運動的方向從後方撞上，並掉落在此衛星上。此過程可視為完全非彈性的一維碰撞，且衛星與行星之間的重力忽略不計，即在碰撞發生前衛星與彗星的速度大小不變。若碰撞後，此衛星並未脫離行星的重力場，則彗星的速度必須小於____(11)____（以$M$、$m$、$v_0$表示）。若碰撞後的瞬間，此衛星速度大小增加了 5%，則此衛星繞行星運行的軌跡與原軌道偏離最大的程度為____(12)____%？

七、 日全蝕的成因可以用下列示意圖(圖 5)來說明：

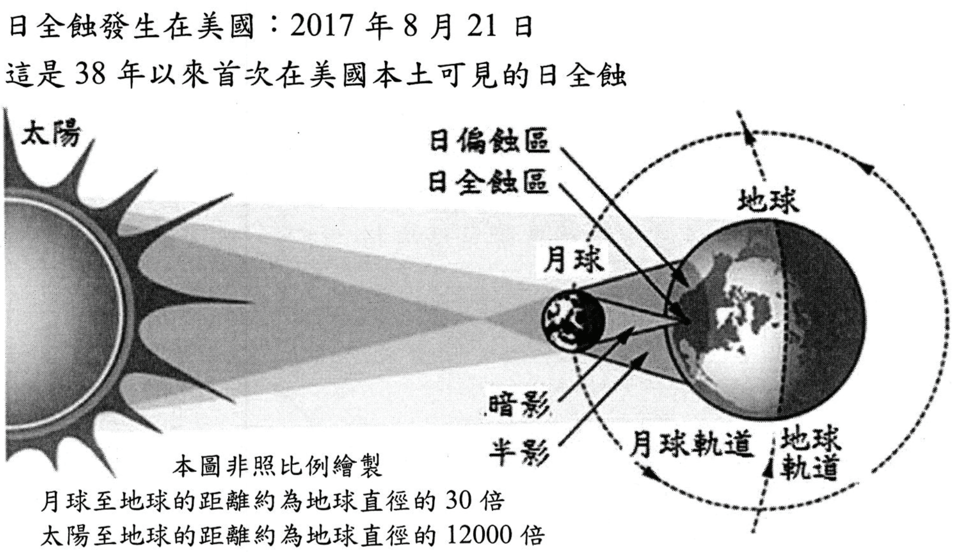


圖 5

由於月球繞地球的軌道面與地球繞太陽的軌道面有五度(5°)的夾角，因此不是每個月都會發生日蝕。

今年八月二十一日(2017.08.21)在美國許多地方可以看見日全蝕，日全蝕發生的地點及時間(以美國東部夏令時間來標示)如圖 6 灰色帶區所示：

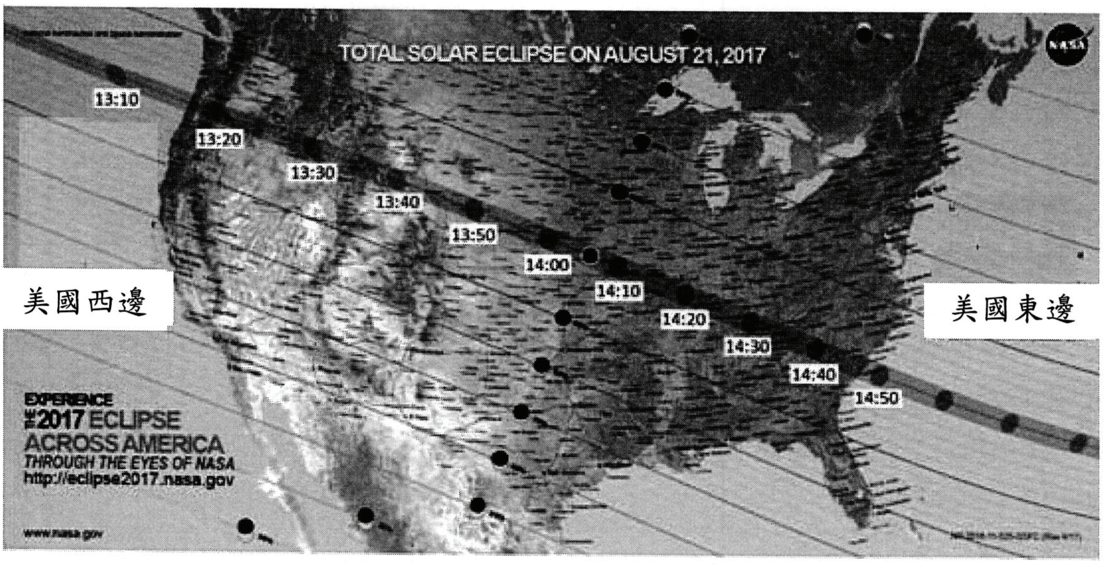



圖 6

已知月球、地球與太陽的半徑分別為$R_M = 1.737 \times 10^3$ km、$R_E = 6.37 \times 10^3$ km及$R_S = 6.96 \times 10^5$ km 。若發生日全蝕時，地球中心與太陽中心的距離為$D_{ES} = 1.50 \times 10^8$ km，則月球中心與地球中心的距離$D_{ME} \leq$ ____(13)____ km。

在地球上觀測到的月球與太陽的軌跡是由東往西，而由圖 6 可知日全蝕的軌跡卻大致是由西向東。

為了簡化計算，我們假設月球繞地球的軌道與地球繞太陽的軌道都在同一平面上，且地球自轉軸垂直此平面。以地球為靜止坐標，利用下列示意圖(圖 7)及提示，估算每十分鐘日全蝕在地球表面由西向東移動的距離：____(14)____ km。
（提示：已知地球繞太陽旋轉方向、月亮繞地球旋轉方向均與地球自旋方向大致同向。相對於遠處恆星，地球自旋角速度為$\omega = \frac{2\pi \times 366}{T_0 \times 365}$，此處$T_0 = 86400$s為一太

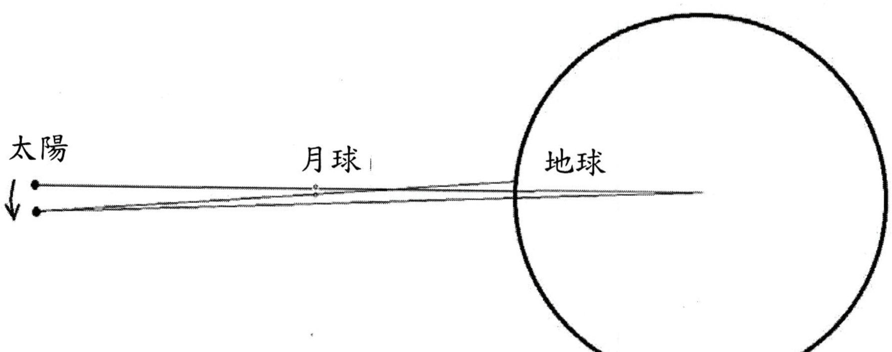



圖 7

陽日的平均時間；地球繞太陽旋轉角速度為$\Omega_{ES}=\frac{2\pi}{T_0\times365}$；月亮繞地球旋轉角速度為$\Omega_{ME}=\frac{2\pi}{T_0\times27.3}$，又設此時月球中心與地球中心的距離為$D_{ME}=3.75\times10^5$ km。）

八、如圖 8 所示，有一質量為$m$、半徑為$R$的鋼珠，在一固定的斜面上，由甲端從靜止開始向乙端作純滾動運動，通過乙端後繼續向地面作斜拋運動。已知斜面甲端比乙端高$h$，乙端比水平地面高$H$，斜面長度為$2h$，鋼珠繞直徑的轉動慣量為$2mR^2/5$。設重力加速度為$g$，且$R\ll H$，則小圓球離開乙端前的加速度量值為____(15)____，即將觸及地面時的垂直速度量值為____(16)____。

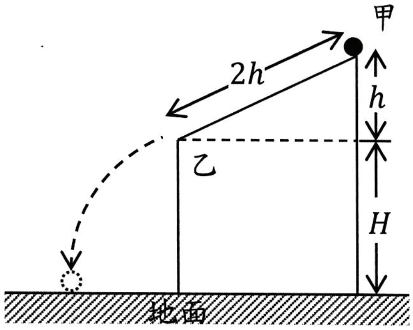


圖 8

九、一上下不同截面積的直立氣缸如圖 9 所示，上活塞的截面積為$A_1$、重量為$W_1$，下活塞的截面積為$A_2$、重量為$W_2$，兩活塞間以彈簧相連。氣缸內裝有理想氣體，氣缸置於壓力為$P_0$的大氣中。當氣缸內氣體的溫度為 800 K 時，彈簧增長了$x=5.0$cm，此時上下活塞距氣缸寬狹交接處均為15 cm，則氣缸內理想氣體的壓力為若干？____(17)____請以$P_0$、$W_1$、$W_2$、$A_1$及$A_2$表示之。
將氣缸內溫度由 800 K緩緩下降，發現彈簧伸長量從原來5.0cm漸減，最後上活塞降至氣缸寬狹交接處而被撐住。已知$A_1=40\text{cm}^2$，$A_2=20\text{cm}^2$，$W_1=W_2=20$N，$P_0=1.0\times10^5$ N/m$^2$。若忽略氣缸及彈簧冷縮熱漲效應，則需繼續降至何溫度時彈簧伸長量恰為 0？____(18)____

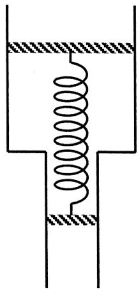


圖 9

十、脈衝星（pulsar）是恆星演化末期的產物，是一種高速自轉、質量密度極大的中子星（neutron star），由於內部有極強的磁場（如地磁），帶電粒子在中子星內的運動，會造成電磁波由磁極兩端輻射出去。脈衝星的自轉軸與磁軸一般而言並不相同，所以可以透過觀測其輻射出的電磁波來測量脈衝星的自轉週期（如燈塔一般）。今有一脈衝星，測量到其自轉週期為$2.16\times10^{-2}$s。如果此脈衝星是由太陽演化而來，且假設演化過程中太陽質量不變，而且為密度均勻的球體。（太陽質量為$2\times10^{30}$ kg，半徑為$1.4\times10^6$km；質量為$M$、半徑為$R$的球體之轉動慣量為$2MR^2/5$，重力常數$G=6.67\times10^{-11}$ m$^3\cdot$kg$^{-1}\cdot$s$^{-2}$）此脈衝星質量密度最小為____(19)____。由於幅射出電磁波，脈衝星能量因而有所損耗，假設損耗的能量由轉動動能來提供。若觀測到輻射電磁波的總功率為 $10^{30}$ 瓦特，假設半徑不變，則此脈衝星轉動角速度的時變率為____(20)____。

十一、 考慮一密度均勻，質量為$M$，半徑為$R$的星體。欲計算該星體的重力位能$U$，可以假想將構成該星體的物質逐層加至半徑為 $r$ 的球狀準星體表面所作的功，並讓$r$由$r=0$ 逐漸增加到$r=R$。試計算$U$，答案以萬有引力常數$G$、$M$和$R$表示。
$U=$____(21)____；假設該星體的組成物質粒子平均質量為$m$，可視為理想氣體，且該星體形成時，有一半的重力位能轉換為星體內能，另一半則以輻射形式散失。試求該星體的溫度$T$，答案以$G$、$M$、$R$、$m$和波茲曼常數$k_B$表示。
$T=$____(22)____。

十二、 如圖 10 所示，一質量為$m$、上方挖空成半徑為$R$之半球面的木塊置於一水平面上，今有一質量為$m$之質點自球面邊緣處由靜止自由滑落，假設所有界面的摩擦力皆可忽略，試問質點達最低點時，所受來自木塊正向力的量值為____(23)____。(設重力加速度為$g$)

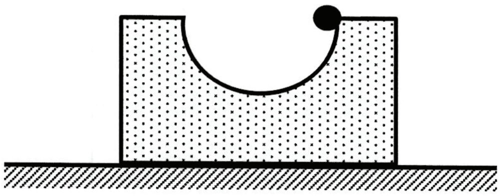


圖 10

十三、 如圖 11 所示，一質量為$m$之長直木條經由滑輪連接兩彈簧與不可伸縮之繩索，左右對稱做水平吊掛。兩彈簧之彈力常數各為$k$與$2k$，滑輪的半徑為$R$、轉動慣量為$\frac{1}{2}MR^2$，假設彈簧與繩索的質量可忽略，且摩擦力損耗的功亦可忽略，今使木條維持水平並在鉛直方向運動，試問其振盪週期為
____(24)____。

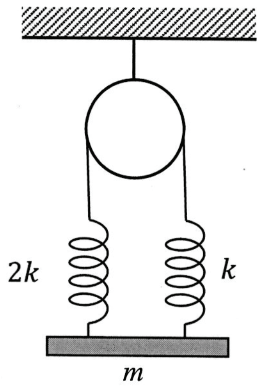


圖 11

十四、 如圖 12 所示，一截面積為$a$之U型管，某生將總長度為$L(L^2 \gg a,\ L \gg b)$、密度為$\rho$之液體注入時，不小心在距離液體左端長$L/3$處產生一氣泡，若此氣泡在大氣壓力下長度約為$\ell$。設大氣壓力為$P_0$，則將U型管置放在水平面上平衡時，右管液體達到之最大高度$h$為____(25)____。

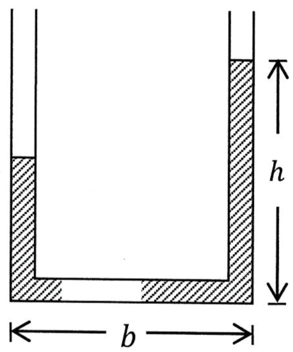


圖 12

十五、 表面張力是一種作用在兩種不同物質的界面之張力，其作用方向平行於界面的切線方向，傾向於減小界面的面積。如圖 13 所示，考慮兩個玻璃平板間的軸對稱液體橋。已知兩平板的距離$h \ll R_2$，液體橋在水平及垂直方向的曲率半徑分別是$R_1$及$R_2$。環境中的大氣壓為$P_2$，且液體中有大致均勻的壓力$P_1$。若液體與氣體間的表面張力為$\gamma_1$，液體與固體間的表面張力為$\gamma_2$，固體與氣體間的表面張力為$\gamma_3$。

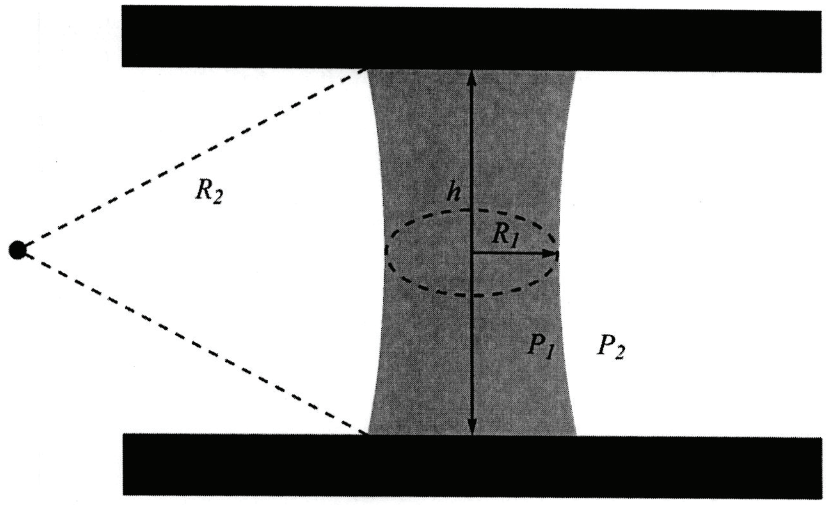



圖 13

求$(\gamma_3-\gamma_2)/\gamma_1=$____(26)____(以$h, R_1, R_2$表示)及$P_2-P_1=$\_\_\_\_(27)\_\_\_\_(以$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, h, R_1, R_2$表示)。

十六、 本題假設水為密度為$\rho$之不可壓縮的理想流體，重力的效應很小可忽略。如圖 14 所示，考慮在大氣壓力為$P_0$下，一個固定不動的開口大容器，其內水流速度可近似為零，頂部水面高度可近似為固定不變，底部有一厚度可忽略、橫截面積為$A$的排水小孔。當水流處於穩流狀態時，一流線在小孔內緣處的液壓若為$P_1$，則依白努利定理，在小孔外壓力為$P_0$處(緊鄰小孔外緣)的流速$u$須滿足$P_1-P_0=\frac{1}{2}\rho u^2$(忽略重力項的貢獻)的關係。

由觀察可發現，水流在流出小孔後，其橫截面積會縮小至一極小值$\alpha$，各流線在此截面之速度向量，方向彼此平行一致，且流速均為$u$(忽略重力的效應)。依據上述，容器中之水每單位時間流失之淨動量的量值$\dot{p}$為\_\_\_\_(28)\_\_\_\_(以$\rho$、$u$、$\alpha$、$A$表示)，而比值$r=\alpha/A$的範圍應為____(29)____。

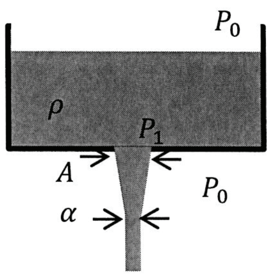



圖 14

十七、　一立方體物塊靜置於一裝有水和油的圓柱形容器中，物塊邊長為 $a$，圓柱形容器的底面截面積為$3a^2$。水、油、物塊的密度，分別為$d$, $0.8d$, 和$2d$。如圖 15 所示，若起始時，水和油層的深度分別為$0.5a$和$a$（假設水和油完全不互溶，且液體與物塊表面摩擦力可以忽略），試問將物塊緩慢完全提離液面所須作功的最小值為何__(30)__？（以$a$, $d$,及重力加速度$g$表示。）

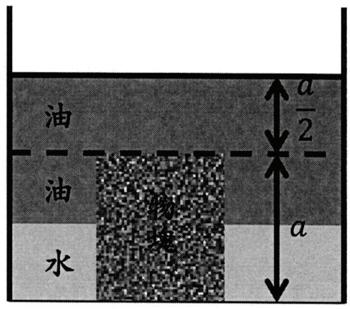



圖 15：起始時物塊與液體之狀態

計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、 一質量為$m(= 1 \times 10^{24}$ kg)的行星繞行一恆星運行，其繞行的橢圓軌道如圖 15 軌跡所示，圖中每一方格(約1cm × 1cm)的邊長均為$1.5 \times 10^{8}$ km，O為橢圓的中心，A、B和 C 在行星軌道上；已知恆星質量$M$為行星的$x$倍，即$M = xm$，且恆星位置在 O 和 A 兩點之間，則：

(A) 恆星與 A 點的距離為何？橢圓軌道的離心率為何？(4 分)

(B) 此行星的運行週期為 300 天，則$x$的數值為何？ (3 分)

(C) 此行星在橢圓軌道上運行的角動量為何？ (4 分)

(D) 此行星在 B 和 C 點的速率各為何？(4 分)

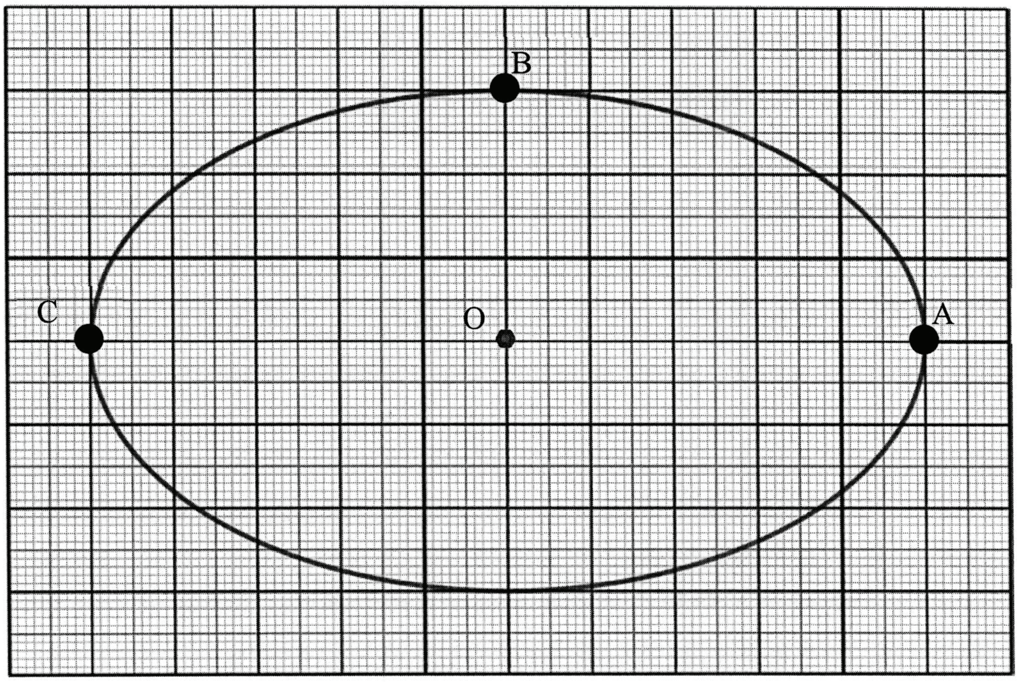



圖 16：行星運行之橢圓軌道。

二、$\boxed{\text{理想氣體定律；理想氣體內能；絕熱與等溫過程；熱力學第一定律}}$

如圖16所示，有兩個熱容量很小、尺寸和形狀完全相同、橫截面積為$A$的汽缸甲和乙。甲由熱的良導體製成，而乙由熱的良絕緣體製成。兩個汽缸的底部封閉，頂部開放，且都浸沒於絕對溫度固定為室溫 $T_0$ 的水中，而大氣壓力固定為$P_0$。每個汽缸都充有氦氣(可視為理想氣體)，且配置有絕熱而無摩擦的活塞，並以連桿與淺盤連接。已知活塞－連桿－淺盤合計的重量為$w_0$，而最初處於熱力學平衡狀態時，缸內氦氣的絕對溫度都為$T_0$ ，兩個活塞比各自汽缸的底部都高出$h_0$。

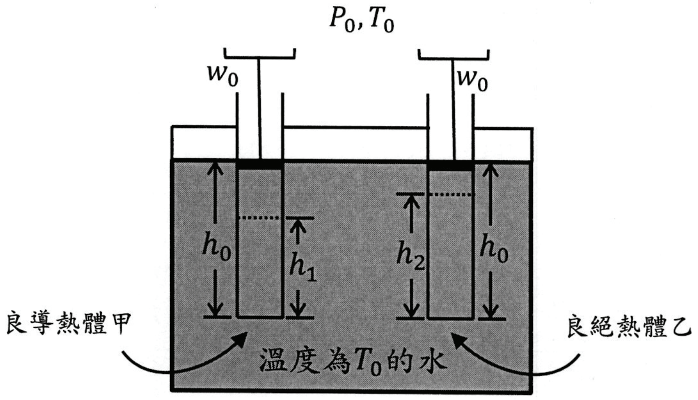



圖 17

假設在以下兩部分考慮的過程中，活塞都沒有高出水面，且氦氣與大氣的重力位能變化可忽略。

**A部分(5分)**

假設在甲和乙中的氦氣維持近乎平衡的狀態下，每次只將微量的沙粒靜置於每個淺盤上，以壓縮氦氣，直到盤內沙粒的總重量等於$w_s$為止。

(1)已知在整個壓縮過程中，甲和乙中氦氣的壓力$P$和體積$V$之間的關係為$PV^{\gamma}=$定值，試問甲和乙中氦氣的$\gamma$值(分別稱為$\gamma_1$和$\gamma_2$)各為何？(2分)

(2)設以$h_1$與$h_2$分別代表甲和乙中活塞的最終高度（從各自汽缸的底部算起），則最終高度與最初高度$h_0$的比值$h_1/h_0$與$h_2/h_0$各為何？(3分)

**B部分(10分)**

假設改為一次就將重量同為$w_s$的兩堆沙粒，分別靜置於甲和乙的淺盤上，以致活塞開始做加速度運動，並上下振盪，直到最終再度達到平衡狀態後停下。

(3)已知甲和乙中活塞的最終高度（從各自汽缸的底部算起）分別為$H_1$與$H_2$，則甲和乙中氦氣的內能變化量(分別以$\Delta U_1$與$\Delta U_2$代表)各為何？(4分)

(4)甲和乙中活塞的最終高度與其最初高度$h_0$的比值$H_1/h_0$與$H_2/h_0$各為何？(6分)