

# 2006年第七屆亞洲物理奧林匹亞競賽及 第三十七屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

## 理論試題

2005年11月5日

13:30~16:30

考試時間：三小時

### <<注意事項>>

- 1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為150分。
- 2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
- 3、計算題部分，請於答案卷上指定之位置作答。
- 4、可使用無程式功能之掌上型計算器。

2006 年第七屆亞洲物理奧林匹亞競賽  
及第三十七屆國際物理奧林匹亞競賽  
國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

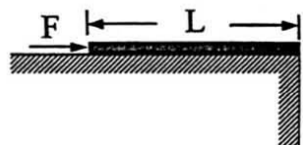
壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、有一個質點以初速  $4 \text{ m/s}$  在光滑的水平直線軌道上運動，在  $t=0$  至  $10 \text{ s}$  的時間內，有一外力  $F=5 \text{ N}$  沿質點的初速方向作用於其上。在  $t=10 \text{ s}$  至  $20 \text{ s}$  的時間內，該外力改為反向作用，但大小不變。已知該質點在上述外力作用期間內的總位移為  $180 \text{ m}$ ，則該質點的質量為 (1)  $\text{kg}$ ；此外力對質點所作的總功為 (2)  $\text{J}$ 。

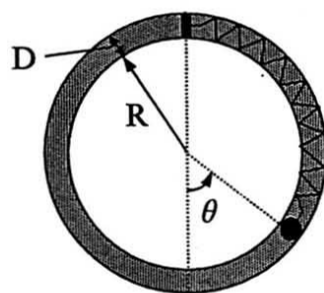
二、起始時，B 球在地面上，A 球在 B 球的正上方高度為  $h$  處。現同時使 A 球自靜止開始自由下落，而 B 球以初速  $v_0$  由地面鉛直上拋。若欲使兩球能在空中相遇，則 (a) 初速  $v_0$  至少應大於何值？(3)。

(b) 若兩球在空中相遇時，B 球正在上升，則初速  $v_0$  的範圍應為何？(4)。

三、如右圖所示，一質量  $m$ ，長度  $L$  的均勻金屬桿，放在粗糙的水平桌面上，桿面和桌面之間的動摩擦係數為  $\mu$ 。金屬桿的一端和桌邊相齊，現以一水平推力  $F$  作用於另一端，欲將其推落桌面。設重力加速度為  $g$ ，則該水平推力所須做的功至少為 (5)。



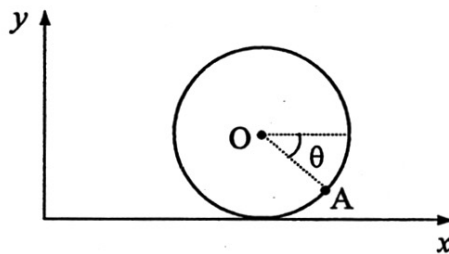
四、如右圖所示，在鉛垂面上有一半徑為  $R$  的環狀管道，其圓形截面的直徑為  $D$ 。今有一自然長度為  $R\pi/2$  的彈簧，其一端固定在環狀管道的頂點，另一端繫有一直徑恰為  $D$ ，質量為  $m$  的小球。假設  $D \ll R$ ，彈簧的質量可忽略，管道內面光滑，則在重力  $g$  的作用下，小球的平衡位置恰位在  $\theta = \pi/4$  處，則該彈簧的力常數  $k = \underline{(6)}$ 。



五、在一光滑桌面上，質量為  $m_1$  的木塊疊置在另一質量為  $m_2$  的木塊的正上方，兩者之間的摩擦係數為  $\mu$ 。若僅對木塊  $m_1$  施以一平行於桌面的外力，則使得兩木塊以相同加速度前進的外力的最大量值為  $F_1$ 。但若僅對另一木塊  $m_2$ ，同樣施以一平行於桌面的外力，則使得兩木塊以相同加速度前進的外力的最大量值為  $F_2$ 。這兩個外力量值的比值  $\frac{F_1}{F_2} = \underline{(7)}$ 。

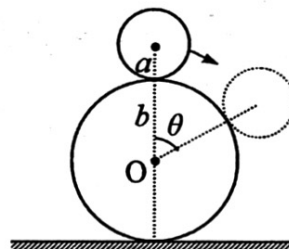
- 六、光是由光子組成，當光在重力場中傳播時，光子可視為質量為  $m$ ，能量為  $E = mc^2$  的質點來考量，式中  $c$  為光在真空中的速率。若質量為  $M$  的星球向內塌縮，則當其半徑縮小至何值時，可形成黑洞，即連光子都無法逃脫重力的束縛？(8)。

- 七、如右圖所示，一均勻圓盤在光滑的水平面上，沿  $+x$  軸方向運動（非純滾動），圖上  $O$  點為圓盤的中心， $A$  點位在圓盤邊緣， $\theta$  為  $\overline{OA}$  和水平線（即  $x$  軸）之間的夾角。若在某一瞬間， $A$  點相對於地面的速度為  $\vec{v}_A = (v_x, v_y) = (5c, 4c)$



( $c > 0$ ，為一常數)，且  $\tan \theta = 3/4$ ，則圓盤中心移動  $L$  位移所需的時間為 (9)。

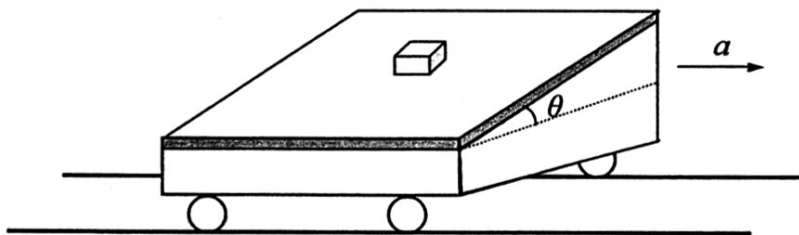
- 八、如右圖所示，一半徑為  $b$  的甲圓柱體固定在水平地面上，另有一半徑為  $a$  ( $a < b$ ) 的乙圓柱體置於其正上方。今使乙圓柱體從靜止開始，沿甲圓柱體的表面以純滾動的方式滾下，則當乙圓柱體脫離甲圓柱體的表面時，其對甲圓柱的中心  $O$  點所轉過的角度  $\theta =$  (10)。



【註】：圓柱體繞其中心軸的轉動慣量  $I = \frac{1}{2}mr^2$ ，式中  $m$

為圓柱體的質量， $r$  為其半徑。

- 九、一列火車行駛在水平的直線軌道上，運貨車廂上的平板突然發生傾斜，傾斜角度為  $\theta$ ，如下圖所示。平板上的一個貨物木箱幸而沒有滑落，仍停留在平板上。已知斜板與木箱之間的靜摩擦係數為  $\mu_s$ ，重力加速度為  $g$ ，假設其後火車行駛平穩，則在維持木箱不產生滑動的情形下，火車的加速度  $a$  可達的最大值為 (11)。

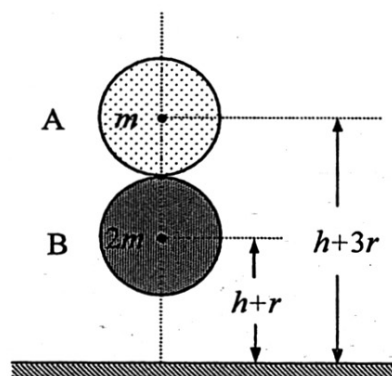


- 十、一條很長的均勻彈性長棒，其密度為  $\rho$ ，截面積為  $A$ 。當此長棒受到縱向（即沿棒長的方向）力  $F$  作用時，則在棒上任取原長為  $L$  的一段，該段受力後的長度變化量為  $\Delta L$ 。定義該棒所受的應力為  $\frac{F}{A}$ ，產生的應變為  $\frac{\Delta L}{L}$ ，則應力和應變有正比例的關係，可寫為  $\frac{\Delta L}{L} = \alpha \frac{F}{A}$ ，式中  $\alpha$  為比例常數。現欲利用「因次分析法」，探求縱

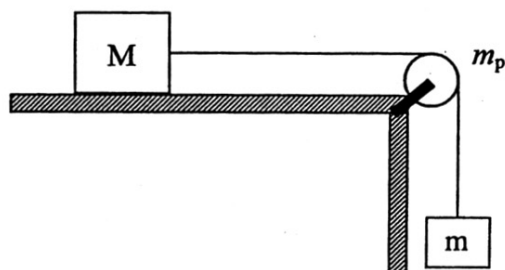
波沿此棒傳播的波速  $v$  的數學式。已知當密度趨近無限大時，波速趨近於零，試求波速  $v$  和哪些物理量有關，以「比例式」的形式，寫出  $v$  的數學式，即  $v \propto$  (12)。

- 十一、設地球的質量為  $M$ ，半徑為  $R$ ，萬有引力常數為  $G$ ，若由距離地球表面為  $H$  的高度處，發射一質量遠小於  $M$  的小拋體，則(a)此拋體的初速必須至少為 (13)，才能到達距離地球無限遠的地方；(b)若沿平行地表的方向發射此拋體，則此拋體的初速必須至少為 (14)，才能使其不致於掉落地面。

- 十二、如右圖所示，兩個半徑均為  $r$  的均勻圓球 A 和 B，其質量分別為  $m$  和  $2m$ 。兩球的球心位在同一條鉛直線上，較重的 B 球的球心離水平地面的高度為  $h+r$ ，而較輕的 A 球的球心離地面的高度稍微大於  $h+3r$ 。若兩球同時自靜止開始自由落下，球和地面之間的碰撞，以及兩球之間的碰撞均為完全彈性，則 A 球經過一次碰撞後反彈，離地面的最大高度可達 (15)；B 球經過三次碰撞後，離地面的最大高度為 (16)。



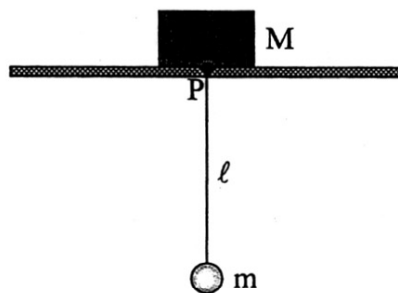
- 十三、如右圖所示，一質量  $M = 10\text{kg}$  的金屬塊放置在粗糙的桌面上，並用一條很輕的細繩連接另一質量為  $m$  的砝碼，此細繩繞經一質量  $m_p = 0.05\text{kg}$ ，半徑  $R = 0.02\text{m}$  的滑輪上。觀察者發現當砝碼質量  $m < 3\text{kg}$  時，金屬塊  $M$  靜止不動；而當砝碼質量略大於  $3\text{kg}$  時， $M$  以等加速度移動。若滑輪轉動時，繩子不打滑，即作純滾動，則  $M$  與桌面之間的摩擦係數為 (17)。當砝碼的質量改為  $4\text{kg}$  時， $M$  的加速度為 (18)  $\text{m/s}^2$ 。【註】：滑輪繞其中心軸的轉動慣量為  $\frac{1}{2}m_p R^2$ 。



- 十四、如右圖所示，一質量為  $M$  的均勻方塊可以在一對水平的光滑軌道上滑動，在其底部中心點  $P$  的正下方以長度為  $\ell$  的輕繩，懸掛一質量為  $m$  的小圓球作為擺錘。設重力加速度為  $g$ ，回答下列問題（答案皆以已知量表示）：

(a)若起始靜止的該系統受到微擾，而使單擺作小幅度的擺動，則其週期為 (19)。

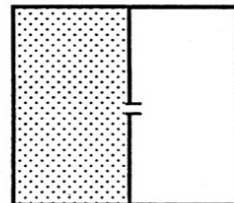
(b)若起始時將擺繩拉緊，使擺錘自軌道的水平位置自由擺下，則此單擺所達到的最大角速率為 (20)。



- 十五、有一莫耳的冰在一大氣壓、攝氏零度下熔化為水時，密度由  $0.9170 \text{ g/cm}^3$  轉變為  $0.9998 \text{ g/cm}^3$ ，已知水的莫耳質量為  $18 \text{ g}$ ，則在熔化的過程中，大氣對冰水系統所作的功的量值為 (21)  $\text{J}$ ，此功為正功或是負功？(22) (答案寫正或負)。

【註】：一大氣壓  $= 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$

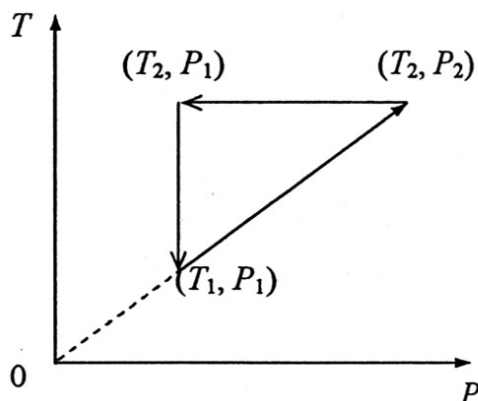
- 十六、如右圖所示，一絕熱的容器內部以隔板分成兩個同體積的氣室，左室內充有絕對溫度為  $T_0$  的理想氣體，右室內則抽成真空。現將隔板上原先封閉的小洞打開，使左室內的氣體可以流入右室內，則當容器內的氣體達到熱平衡時，氣體的溫度為何？(23)。



- 十七、已知氮氣的莫耳質量為  $28 \text{ g}$ ，莫耳定容比熱為  $5.0 \text{ cal/mol} \cdot \text{K}$ ，氣體常數  $R = 2.0 \text{ cal/mol} \cdot \text{K}$ ，現將質量為  $1.0 \text{ kg}$  的氮氣，在一大氣壓下由  $-20^\circ\text{C}$  加熱至  $100^\circ\text{C}$ ，回答下列問題：

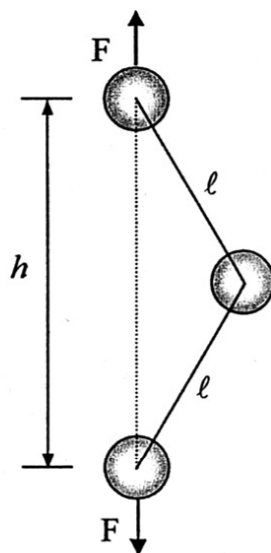
- (a) 需要提供的總熱能為 (24)  $\text{cal}$ ；  
 (b) 氮氣的內能增加了 (25)  $\text{cal}$ ；  
 (c) 在加熱的過程中，氮氣對外界所作的功為 (26)  $\text{cal}$ 。

- 十八、在一個唧筒（具有活塞的氣室）中，有  $n$  莫耳的單原子理想氣體，按右圖所標示的過程，筒內的氣體由起始狀態  $(T_1, P_1)$ ，連續改變至  $(T_2, P_2)$ ，再變至  $(T_2, P_1)$ ，最後回復至起始狀態  $(T_1, P_1)$ 。以  $R$  代表氣體常數，試問在第一個過程，即從  $(T_1, P_1)$  變至  $(T_2, P_2)$ ，唧筒對外所作的功為何？(27)；又在整個循環過程中，唧筒對外所作的總功為何？(28)。



- 十九、一個簡單分子由三個原子組成，其模型如右圖所示，居中的原子分別以強鍵連結另兩個原子，兩鍵的長度同為  $\ell$  且固定不變，但兩鍵之間的夾角可以自由變動。設該分子和絕對溫度保持為  $T$  的周圍環境達成熱平衡，則居中的原子的平均動能為何？(29)；若對位居兩端的原子，沿其聯心線方向施加外力  $F$ ，則欲使該兩原子相距  $h$ ，則外力  $F$  的平均值 = (30)。(答案以  $\ell$ 、 $h$ 、 $T$ 、和波茲曼常數  $k$  表示之)

【註】：根據熱力學的能量均分原理，若一個簡單粒子的運動僅有一個自由度時，則其動能的平均值等於



$kT/2$ 。普通的單原子氣體分子可在三維空間運動，有三個自由度，因此其平均動能等於 $3(kT/2)$ 。

## 貳、計算題（每題十五分，共二題，合計 30 分）

- 一、太空船在離地面高度 500km 處的圓形軌道上環繞地球運轉，在此軌域中的稀薄大氣層的氣體分子，會附著在船身上，而使太空船的速率減慢。假定該稀薄大氣層相對於地面為靜止，其密度  $\rho = 2 \times 10^{-15} \text{ g/cm}^3$ ，所有和太空船碰撞的氣體分子都會被吸附在太空船的表面上。已知太空船本身的質量  $m_0 = 2.0 \times 10^2 \text{ kg}$ ，其起始相對於地面的速度  $v_0 = 7.6 \times 10^3 \text{ m/s}$ ，垂直於其速度方向的截面積  $A = 2.0 \text{ m}^2$ ，回答下列問題：

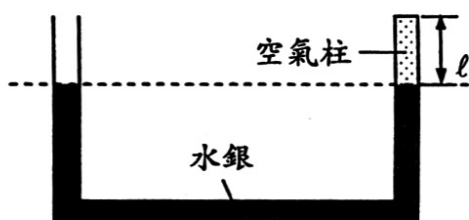
- (a) 設太空船在圓形軌道上的瞬時速度為  $v$ ，若太空船質量的時增率可寫為

$$\frac{dm}{dt} = Cv, \text{ 則式中的比例常數 } C \text{ 的數值為何？}$$

- (b) 導出太空船的速度  $v$  和時間  $t$  的關係式（以  $C$ 、 $m_0$ 、和  $v_0$  表示之）。

- (c) 經多少年後，太空船的速率將減為起始值的 90%？

- 二、將兩端開口的均勻 U 形管，鉛直地固定在水平地面上，管內注入長度  $L$  的水銀柱，等左右兩管內的水銀面相齊後，將右端管口封閉，這時右管內的空氣柱長為  $\ell$ ，如右圖所示。今將左管稍提高後放回，使管內的水銀柱做微小的振盪，忽略空氣和水銀以及玻璃壁之間的熱交換，亦即右管內的空氣柱振盪，可視為絕熱過程。假設空氣為理想氣體，在絕熱過程中  $PV^\gamma = \text{常數}$ ，式中  $P$  和  $V$  分別為空氣柱的壓力和體積， $\gamma$  為一常數。當時的大氣壓力相當於高度為  $H$  的水銀柱壓力，試求水銀柱振動的週期，以已知量表示之。



【註】：在本試題的計算中，你也許需要用到下列的積分式：

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \text{常數}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \text{常數}$$