

2011年第12屆亞洲物理奧林匹亞競賽及 第42屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2010年11月13日

13:30~16:30

考試時間：三小時

<<注意事項>>

- 1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為150分。
- 2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
- 3、計算題部分，請在答案卷上指定之位置作答。
- 4、可使用掌上型計算器。

2011 年第 12 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 42 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

- 一、如圖 1 所示，一圓盤以固定的頻率 $f = 10\text{ Hz}$ ，沿順時針方向轉動。在圓盤上靠近邊緣處標記有一個紅點，現將圓盤置於暗室內，以頻閃儀照射該圓盤。當頻閃儀的閃光頻率為 12 Hz 時，所見該紅點的轉動視頻率為 (1) Hz，其轉動方向為 (2) (填入順時針或逆時針)。

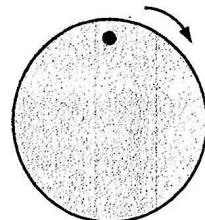


圖 1

- 二、如圖 2 所示，欲利用油壓起重機，抬高一質量為 1200 kg 的重物。已知 U 型油壓機內充滿密度為 800 kg/m^3 、不可壓縮的油；右槽內活塞的半徑為 20.0 cm ；左槽內活塞的半徑為 5.00 cm 。起始時，兩活塞的位置等高，此時施加於左槽內活塞上的力 F 為 (3) N。當重物被升高 1.00 m 靜止後，施加在左槽內活塞上的力應為 (4) N。

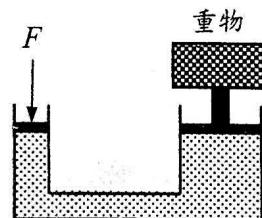
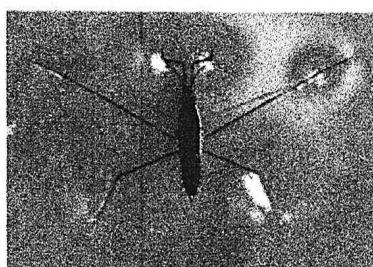
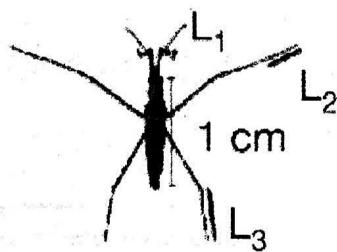


圖 2

- 三、水龜有三對腳，腳上長著濃密的油質纖毛，不會被水濡濕，因此藉由表面張力的作用，可在水面上停留或行走，如下圖 3(a)所示。它的前腳、中腳、和後腳，每一隻腳和水面接觸的長度各為 L_1 、 L_2 、和 L_3 ，如圖 3(b)所示。若以 γ 表示水和空氣之間的表面張力，則水龜因表面張力的作用，所獲向上支撐力的最大值 F_S 為何？ $F_S = \underline{(5)}$ (以已給量表示之)。若就尺度比例而言，設以 W 表示水龜的體重，則 F_S 和 W 之間的關係式可寫為 $F_S \propto W^n$ ，式中的 $n = \underline{(6)}$ 。



(a)



(b)

圖 3

四、本題討論慣性質量與重力質量的差異。假設重力質量和慣性質量的比值對所有物質而言，並非常數，因此無法令兩者恆等。現設有兩種不同物質 A 與 B 所構成的質點，質點 A 的慣性質量與重力質量分別為 m_{AI} 與 m_{AG} ；而質點 B 的慣性質量與重力質量分別為 m_{BI} 與 m_{BG} 。若將兩質點分別以長度同為 L 的輕繩懸掛成單擺，並使其作小角度擺動，則質點 A 與質點 B 的週期比為 (7)。

五、一熱水瓶的電熱功率為 700W，接通電源後，可在兩分鐘內，將瓶內的水溫從 90°C 加熱至 95°C 。接著將電源關閉一分鐘後，水溫下降至 94°C 。按上述的數據估算瓶內的水量約為 (8) kg。(水的比熱為 $4.2 \times 10^3 \text{ J/kg}$)

六、已知湖面上的空氣溫度為 -10°C ，湖中的水溫為 0°C ，湖面已結有一層厚度為 2.0cm 的薄冰，假設僅考慮熱傳導的效應，則此薄冰層的厚度增加率約為 (9) (公分/小時)。

[註]：水和冰的熱導率各為 $0.58 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ 和 $2.2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ；水和冰的密度各為 1000 kg/m^3 與 920 kg/m^3 ；冰的熔化熱為 $3.3 \times 10^5 \text{ J/kg}$ 。

七、有一器壁絕熱的圓柱形汽缸，附有一質量為 m ，截面積為 A ，可自由運動的絕熱活塞。活塞和汽缸器壁之間的摩擦可以忽略不計。起始時，汽缸內充有溫度為 T 的 1 莫耳單原子理想氣體。汽缸外的空氣壓力為一大氣壓 P_0 。又汽缸內部裝有電熱線用以加熱氣體。以 g 代表重力加速度， R 為氣體常數，回答下列各小題：

(a)若汽缸為水平置放，利用電熱線加熱，使氣體的溫度緩慢地增加至 $T + \Delta T$ ，則經由電熱線加入氣體的熱量為 (10)。

(b)若汽缸改為鉛直置放，且活塞向上，利用電熱線加熱，使氣體的溫度緩慢地增加至 $T + \Delta T$ ，則經由電熱線加入氣體的熱量為 (11)。

(c)以 x 代表在(a)小題中活塞移動的距離；以 y 代表在(b)小題中活塞移動的距離，

則兩者的比值 $\frac{x}{y} = \underline{(12)}$ 。

八、如圖 4 所示，一支水槍的槍管長為 L ，管內的截面積為 A ，但槍口射出端的截面積為 a 。槍管內裝滿水之後，在底端以等速率 v 推動活塞將水壓出槍口，試問此水槍的最大射程為何？(13) (以已知量表示之)。

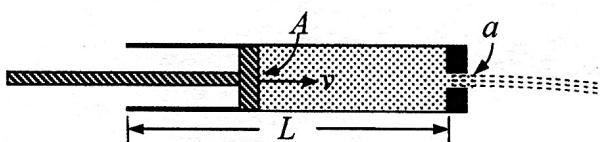


圖 4

九、如圖 5 所示，一圓柱形容器內裝有密度為 ρ_0 的液體，液面高度為 H 。該容器底部的中心處有一直徑為 $2r$ 的圓洞，現以一塞子塞住此圓洞，以防止液體外流。為有效阻止液體外流，該塞子由兩個同軸、同高度 ($h = H/4$)，但半徑各為 $2r$ 和 r 的實心圓柱串連而成。已知塞子的密度為 ρ ，重力加速度為 g ，若大氣壓力可不計，則塞子所受的液體浮力為 (14) (以已知量表示之)。

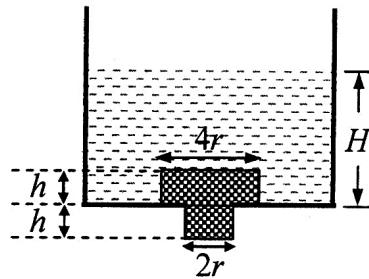


圖 5

十、一質量為 m 的行星起初在半徑為 r 的圓形軌道上，環繞一質量為 M 的恆星轉動。今在遠處有一質量同為 m 、但速率為 v 的殞石，朝向該行星系統射來。經一段時間後，此行星和殞石皆以正圓軌道，環繞該恆星轉動，且殞石的軌道半徑為 $2r$ 。若行星和殞石之間的交互作用力可忽略，以 G 表示萬有引力常數，求最後該行星環繞恆星轉動的速率為 (15) (以已知量表示之)。

十一、如圖 6 所示，某一半徑為 R 的行星有一離地高度亦為 R 的衛星 A，以速率 v 環繞該行星轉動。假設行星本身沒有自轉，今在該行星表面上沿水平方向發射一枚火箭 B，欲與衛星 A 會合。若火箭發射後，即不再具有動力，則火箭 B 在發射時的速率 v' 的最小值需為 (16)。

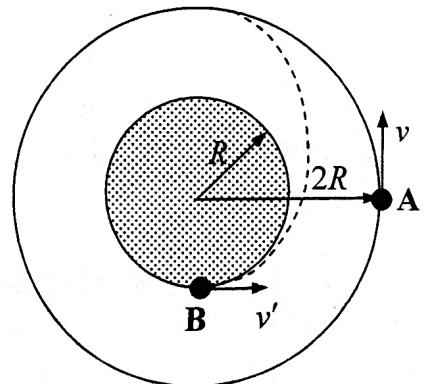


圖 6

十二、某人騎腳踏車經過泥地，車輪邊緣以切線速率 v 在泥地裡打轉。已知車輪的半徑為 R ，P 點為輪緣上的任一點，其離水平地面的高度為 $R+h$ ，式中 h 為 P 點距離通過輪中心的水平面的鉛直高度，如圖 7 所示，則在該點所噴濺出的泥巴，離地面的最大高度為 (17) (以 R 、 v 、 h 、和重力加速度 g 表示之)。若 $v^2 > gR$ ，考慮輪緣上各點所噴濺出的泥巴，則可達的離地面高度的最大值為 (18) (以 R 、 v 、和重力加速度 g 表示之)。

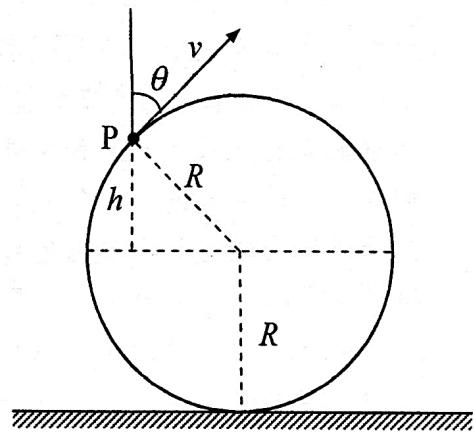


圖 7

十三、

(a) 設肥皂泡膜和空氣之間的表面張力為 γ ，球形泡膜的半徑為 R ，其內外的氣體壓力差為 Δp ，已知 Δp 正比於 γ ，即 $\Delta p = k\gamma$ ，則此 k 值為 (19)。

(b) 依據帕穗定律(Poiseuille's Law)，當流體從毛細管的一端流到另一端時，兩端的

壓力差 Δp 和流體體積的流率之間的關係式，可以寫為 $\Delta p = -\alpha \frac{dV}{dt}$ ，式中 $\frac{dV}{dt}$ 為

流體體積的流率，即每單位時間內所通過的流體體積，而 α 與毛細管的長度和直徑，以及流體的黏滯性相關。若以此毛細管與半徑為 R_0 的球形肥皂泡膜連接時，則泡膜內的空氣經由毛細管流出，而使泡膜縮小。當泡膜的半徑由起始的 R_0

縮小至 $\frac{R_0}{2}$ 時，所經歷的時間為 (20)。

十四、如圖 8 所示，一長度為 L ，質量為 m 的均勻木棒，其一端固定於 O 點，但木棒可在鉛直面上，繞通過此點的轉軸(垂直於木棒)，自由擺動。木棒和轉軸之間的摩擦可忽略不計。起始時，將木棒置放在水平位置上，然後自靜止開始釋放。當木棒擺至鉛直位置時，突然鬆開 O 點，使木棒自由落下，試問當木棒的質心落下的鉛直高度為 H 時，木棒繞其質心總共轉了多少圈？(21) 圈(以已知量表示之)。

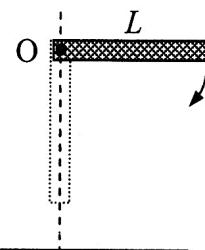


圖 8

[註]：木棒繞通過其端點的轉軸(垂直於棒身)的轉動慣量為 $\frac{1}{3}mL^2$ ；又木棒繞通過

其質心的轉軸(垂直於棒身)的轉動慣量為 $\frac{1}{12}mL^2$ 。

十五、如圖 9 所示，一質量為 m 的小鋼彈，以速度 v 向左方射入一截面為正方形的長木柱內，木柱的質量為 M ($M \gg m$)，木柱的高度和寬度分別為 h 和 a ($h \gg a$)。木柱底面和地板之間的靜摩擦係數為 μ 。假設鋼彈在木柱內穿入的深度為 d ($d < a$)，且穿入的時間極短，又鋼彈在穿入的過程中受到定力的作用，回答下列問題：

(a) 若鋼彈的入射速率 v 小於某一特定值 v_1 時，則鋼彈射入後，木柱不會向左平移，求 $v_1 = \underline{(22)}$ (以已知量表示之)。

(b) 在質點射入後，木柱並未向左方平移的前提下，若 v 小於某一特定值 v_2 ，則質點射入後木柱不會翻倒，求 $v_2 = \underline{(23)}$ (以已知量表示之)。

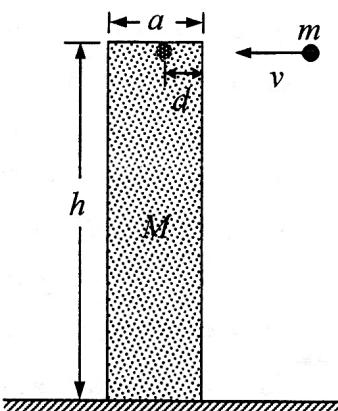


圖 9

[註]：木柱繞其底面邊線轉動的轉動慣量為 $I = \frac{1}{3}M(h^2 + a^2) \approx \frac{1}{3}Mh^2$ 。

十六、假設水和冰皆不能被壓縮，已知下述各項數據：水和冰的比熱分別為 $4.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ 和 $2.1 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ；水和冰的密度分別為 $1.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 和 $0.92 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ；冰的熔化熱為 $L = 3.3 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$ ；又若欲使冰的熔點降低 1.0°C ，則壓力需增加 $14 \times 10^6 \text{ Pa}$ 。現有一附加活塞的密閉汽缸，內裝有質量各為 500 g 的水和冰的混合物，汽缸的內壁和活塞皆絕熱，且活塞的質量可不計，活塞和器壁之間的摩擦也可忽略。今在活塞的上方施加壓力，從 $P_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 增加到 $P_1 = 2.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ ，在此過程中，冰被熔化 (24) kg，又外力所做的功為 (25) J。

十七、一半徑為 r_0 的均勻星球，覆蓋有一層大氣。若此層大氣的氣體分子滿足理想氣體方程式，其平均分子量（即莫耳質量）為 μ ，且氣體壓力 p 與密度 ρ 的關係式

為 $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n$ ，式中 p_0 和 ρ_0 分別為在此星球表面的大氣壓力和密度，而常數 $n > 1$ 。

假設理想氣體常數為 R ，在此星球表面的重力加速度為 g 。若與星球中心的距離為 r 處的大氣，其絕度溫度為 $T(r)$ ，則在此星球表面處（即 $r = r_0$ ）的溫度梯度 $\frac{dT(r)}{dr}$ 為 (26)（以 μ 、 n 、 R 、 g 表示之）；此星球上大氣層的厚度（即大氣壓力由 p_0 降至零的徑向距離）為 (27)（以 n 、 r_0 、 p_0 、 ρ_0 表示之）。

十八、圖 10 所示為一鉛直豎立的均勻長螺旋鐵絲，其螺旋半徑為 R ，螺距為 d ($d \ll R$)。螺旋鐵絲上穿有一質量為 m 的小滑珠，可自由滑動，小滑珠的自旋運動可忽略。

(a) 設 ϕ 為鐵絲和水平面之間的夾角，試求螺旋鐵絲的斜率 $\tan \phi = (28)$ （以 g 、 d 、和 R 表示之， g 為重力加速度）。

(b) 滑珠與鐵絲之間的摩擦力可忽略，同時螺旋鐵絲可繞其中心對稱軸旋轉， θ 代表轉動的角度，當螺旋鐵絲以等角加速 $\alpha = d^2\theta/dt^2$ 轉動時，滑珠恰能維持在一等高的位置上，試求此時螺旋鐵絲的角加速度 $\alpha = (29)$ （以 g 、 d 和 R 表示之）。

(c) 設滑珠與鐵絲之間的動摩擦係數為 μ_k ，同時螺旋鐵絲保持固定，滑珠在螺旋鐵絲上自靜止開始釋放，因受重力的作用而下滑，試求滑珠在此長螺旋鐵絲上運動的終端速率 $v = (30)$ （以 g 、 d 、 R 、 μ_k 表示之）。

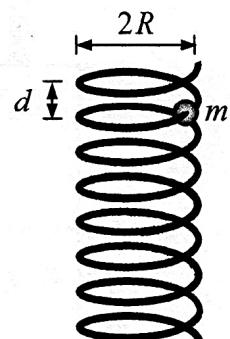


圖 10

貳、計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、雙斜面上兩相聯空心圓筒的運動

如圖 11 所示，在斜角皆為 30° 的兩個長斜面上，有兩個半徑均為 r 的空心圓筒滾輪，

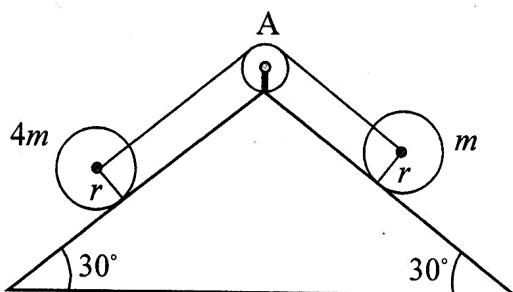


圖 11

質量分別為 $4m$ 與 m ；繞中心轉軸的轉動慣量分別為 $4mr^2$ 與 mr^2 。兩輪的中心轉軸以一條質輕且不可伸縮的細繩，繞過一個固定於斜面頂端 A 的無摩擦、半徑為 $r/2$ 的輕滑輪後，彼此連接，使兩圓筒皆可自由繞軸轉動。假設兩輪皆沿斜面的最陡方向運動，且斜面能提供足夠的摩擦力使兩輪不致滑動，則兩輪沿斜面運動的加速度為何？又繩子的張力為何？（答案以重力加速度 g 與質量 m 表示之）

二、考慮一個不會變形的長方體容器，以一可沿水平方向移動的分隔牆分成 A 和 B 兩室，如圖 12 所示，分隔牆的截面積為 A 。除了 B 室右方的牆可以導熱外，其他器壁和分隔牆都是絕熱材料，容器內充滿氮氣（單原子氣體）。本題中的氮氣可視為理想氣體。

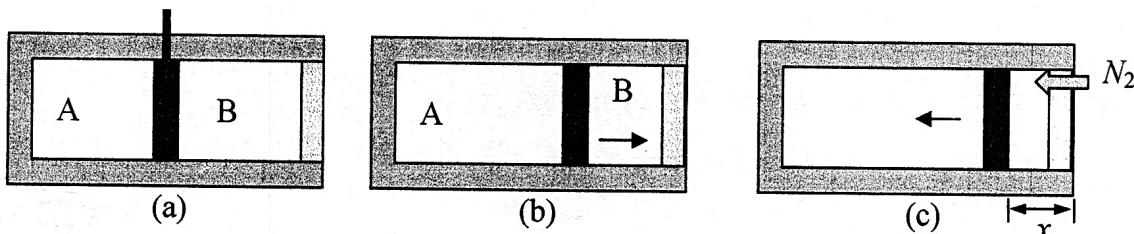


圖 12

- (1) 先將分隔牆固定於中央，A 和 B 兩氣室的體積相等皆為 V_0 ，壓力皆為 P_0 ，此時將 B 室的氮氣抽除，使 B 室幾乎成為真空（如圖(a)所示）。再將分隔牆的固定栓打開，使分隔牆可以無摩擦地自由在水平方向移動。因 B 室為真空，分隔牆會向右移動（如圖(b)所示），假設分隔牆移動夠慢，使過程中 A 室內的氣體一直處於平衡狀態，當分隔牆撞擊 B 室右方的牆時，分隔牆的動能是多少？（答案以 V_0 、 P_0 表示之）
- (2) 承上題，此時開始在 B 室中慢慢注入氮氣（如圖(c)所示）。過程中 A 室和 B 室內的氣體一直分別維持熱平衡狀態，而分隔牆移動極慢，可以忽略它移動時的動能。B 室內的氣體透過右方導熱牆，一直保持為定溫 T 。在過程中，分隔牆由極右邊向左方移動的距離設為 x ，寫下注入 B 室的氮氣莫耳數 n 和 x 之間的

關係式。當分隔牆到達容器中央時，假設分隔牆移動的速率為 v ，計算此時 B 室內氮氣莫耳數的瞬時變化率 $\frac{dn}{dt}$ (即單位時間注入的莫耳數)。(答案以 V_0 、 P_0 、 T 、 v 、 R 、和 A 表示之)