

2014 年第 15 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及
第 45 屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2013 年 11 月 09 日
13：30~16：30
考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
- 2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
- 3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
- 4、可使用掌上型計算器。

2014 年第 15 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 45 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

- 一 某砲兵營進行實彈射擊，分別以不同初速和仰角發射五發砲彈。假設任何飛行中的阻力可以忽略不計，砲彈飛行軌跡(A, B, C, D, E)如圖 1 示。請依砲彈在空中飛行時間由長到短排序 _____
(1) _____；依砲彈發射之初始速度量值由大到小排序 _____
(2) _____。(作答時，請以 $>$ $=$ 之符號進行排序)。

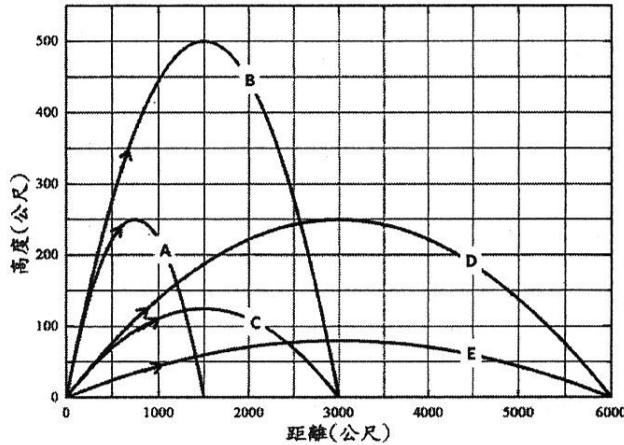


圖 1

- 二 一河流寬度為 W 水流流速為 v_R 向北流動。一艘船相對於靜止水的船速為 $v_B = \sqrt{13} \times v_R$ 若其由河的左岸出發要到河的對岸上游處 W 處 問此船至少需要多少時間？_____ (3) _____。
- 三 $x - y$ 坐標之 x 軸是與地表平行 而 y 軸是鉛直向上。現有 A 與 B 兩點 其坐標分別為 $(-\ell, 0)$ 及 $(\ell, 0)$ 。在 y 軸上任選一點 P 其坐標為 $(0, y)$ 。A 與 P 兩點之間 及 P 與 B 兩點之間 均以直線連接。現在將一質點 以初速為零 自 A 點沿兩段直線滑向 B 點。假設在 P 點有一很小的圓弧 可以讓質點平滑 無摩擦的由 \overline{AP} 轉向到 \overline{PB} 線段上。若摩擦力可以忽略不計 要使質點抵達 B 點所需的時間為最短 則 y 之值等於 _____ (4) _____。

【提示】：微分公式： $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ 。

- 四 考慮一個斜角 θ 為 45° 的極長斜坡 如圖 2 所示。
有一質點鉛直落下 撞擊斜坡時的速率為 v_0 。假設粒子與斜坡的撞擊為完全彈性碰撞 且粒子與斜坡表面間無摩擦力 重力加速度為 g 。撞擊後彈起落下 又與斜坡撞擊 如此一直進行。問第二十一次撞擊的撞擊點與第一次的撞擊點間的距

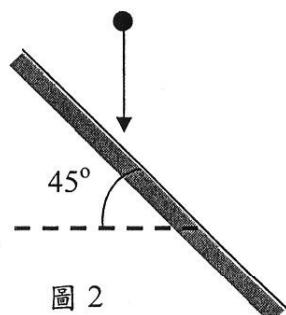


圖 2

高中物理科掃描版

離為 (5)。此次彈起時粒子的速度與水平方向的夾角是 (6)。

五 物體由高空落下時 其所受空氣阻力 F_v 正比於運動速度的平方 且等於 $\frac{1}{2}D\rho S v^2$

其中 D ρ S 以及 v 分別為無因次之風阻係數 空氣密度 運動中物體垂直於速度之截面積 以及運動速度。今有二同質且密度均勻 半徑分別為 R_A 和 R_B 之球狀物體 A 和 B。已知 $R_B = 2R_A$ 則由高空自由落下 A 球之終端速度是 B 球的 (7) 倍。

【註】假設不計浮力 且初始下落之高度 均足以讓二球達到其終端速度。

六 假設鴕鳥蛋與雞蛋之組織成分完全相同 只是照一定的比率放大而已。已知將雞蛋放入滾水中 需要 5 分鐘才能將整顆蛋煮熟。若鴕鳥蛋與雞蛋的重量比是 27:1 則將鴕鳥蛋放入滾水中 需要 (8) 分鐘才能將整顆蛋煮熟。

七 一莫耳之單原子理想氣體 在某一非定壓也非定容的加熱過程中 其莫耳比熱為 $2R$ R 為氣體常數。若在此加熱過程中 氣體之體積增加為原體積之 2 倍，則該氣體之溫度變成為原來溫度之 (9) 倍。

【提示】: $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$ 。

八、巴拿馬運河的寬度為 W ，因此水閘門寬度也是 W 。水閘門兩邊運河水的深度分別為 h_1 和 h_2 ($h_1 > h_2$) 如圖 3 所示 則兩側的水作用在水閘門的靜力和等於 (10)。如以通過水閘門的底部和水閘門平行的線作為轉軸，則作用在水閘門的力矩大小為 (11)。(水閘門的厚度可以忽略不計)

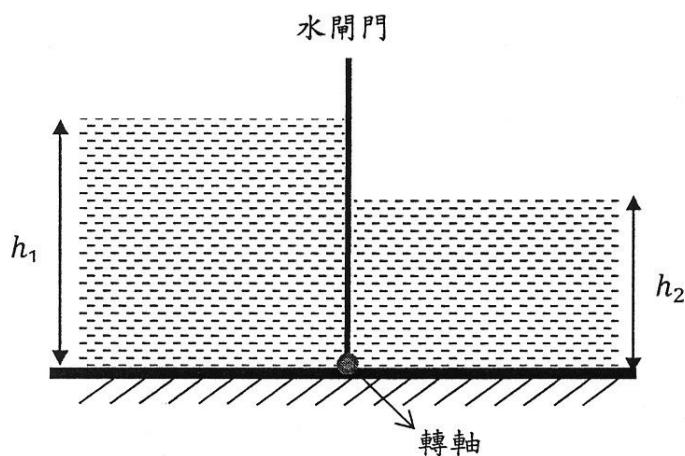


圖 3

【提示】: 積分公式： $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 其中 $n \neq -1$ 。

九 天文觀測發現一未知小物體 X 以速率 v 接近太陽系 並且發現相對於太陽 X 物體運動的撞擊參數為 b 如右圖 4 所示。設太陽的質量為 M 重力常數為 G 若除了太陽外 太陽系其它行星與天體的重力可被忽略，且 X 物體不會因距太陽太近而融化或蒸發，則 X 物體能逼近太陽最近的距離為 (12)。

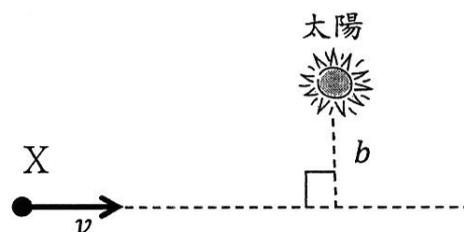


圖 4

十 某一行星是由密度為 ρ_1 的核心和密度為 ρ_2 的外殼所組成 核心的半徑為 a_1 ，行星的半徑為 a 。若最大的重力加速度值發生在核心和外殼的介面 a_1 處，則 ρ_1/ρ_2 的最小值為 (13)。

【提示】：微分公式： $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ 。

十一 半徑 R 為 1 公尺 質量 m 為 2 公斤的實心圓盤狀飛輪（轉動慣量 $I = mR^2/2$ ）以每秒 30 圈的速率繞固定之中心軸轉動。今在半徑 1 m 處 受到一定力 F 作用後均勻減速經過 30 秒後停止 則由開始受力至停止 飛輪共轉了 (14) 圈 所受力 F 量值最小需為 (15) 牛頓。

十二 一個圓形水平轉盤 在距離轉軸 r 處放置一個小方塊 它和轉盤間的最大靜摩擦係數為 b 重力加速度為 g 。(a) 在轉盤轉速保持固定 即等角速度條件下 若要使該方塊不滑動 則轉動角速率最大值等於 (16)。(b) 若轉盤由靜止開始以等角加速度轉動一圈 要以摩擦力保持方塊在此第一圈中不滑動 則轉完第一圈所需要的最短時間等於 (17)。

十三 在水平面上將三個大小材質皆相同 半徑皆為 r 形如硬幣的圓盤 依上 中下順序相疊。若僅考慮重力 而要使三者的圓面皆保持水平 且達成靜力平衡 則三者間的兩個接觸面之面積和的最小值為 ar^2 即上 中圓盤的接觸面積 與中 下圓盤的接觸面積的總和為最小值。則 a 的數值等於 (18) (取 2 位有效數字)。

【註】：你可能會需要用到下列中的某些近似：

$$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.5236; \cos^{-1}\frac{4}{5} \approx 0.6435; \cos^{-1}\frac{3}{4} \approx 0.7227; \sqrt{3} \approx 1.732; \\ \sqrt{2} \approx 1.4142; \pi \approx 3.14162$$

十四 水平桌面上有一 0°C 的冰塊以等速度前進 且前進時的每一瞬間 摩擦力所作的功皆可以即時轉換為冰塊熔解所需的熱 而熔解後的水立即靜止附著於桌面上。已知冰的熔解熱為 L 且冰塊和桌面之間的動摩擦係數固定為 μ 重力加速度為 g 忽略冰和四周環境的熱交換；則冰塊前進的速率等於 (19)。每經過 t 的時間冰塊的質量會減半 則 $t =$ (20)。

十五 一熱力學系統包括一個固定於水平表面上 一端封閉的圓筒型剛體汽缸 配置於汽缸另一端的一可滑動 截面積為 A 的密封剛體活塞 以及汽缸內所含之 n 莫耳的理想氣體 如圖 5 所示。當活塞水平移動時 活塞與汽缸壁之間的動摩擦力 其量值固定為 f 。已知此系統在絕對溫度為 T 的等溫條件下 汽缸內氣體的體積很緩慢的由 V_1 膨脹為 V_2 且系統最初與最後均處於靜止平衡。假設在此過程中 系統自外界所吸收的熱量為 Q 系統對外界所作的功為 W 則比值 Q/W 等於 (21)。

已知 $\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \ln \frac{V_2}{V_1}$ 則 W 等於 (22) (假設通用氣體常數為 R)。

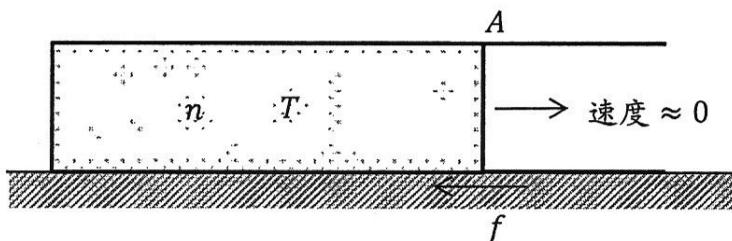


圖 5

十六 一台四輪傳動的車 質量為 M 前後車輪的軸距為 d ; 車子的質心位置在前後車軸的中間而質心離地面的高度為 h (如圖 6 所示)。車的四個輪子大小一樣 四輪傳動使四個輪子的轉速都一樣; 前後車輪與地面上的最大靜摩擦係數則分別為 μ_1 μ_2 且 $\mu_1 < \mu_2$ 。以下考慮車子在水平的路面上往前加速 車子的引擎的馬力足夠。設重力加速度為 g 。若車的加速為 a 則地面作用於兩個後輪的正向力之和等於 (23)。車子最大的加速 a_M 等於 (24)。

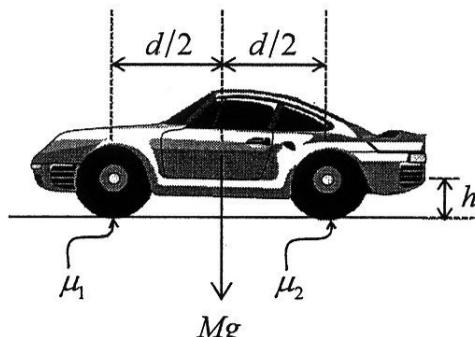


圖 6

十七 將一條長度固定 質量可忽略的柔軟細繩 兩端分別繫上質量為 m 與 M 的物體 以形成一系統。先將細繩繞過一半徑為 r 的定滑輪 並以一水平桌面撐住 M 使兩物體靜止懸吊於滑輪兩側 接著再沿鉛直線使 m 的重心上升 h 的高度(如圖 7) 然後使 m 由靜止下落 直到細繩張緊。已知細繩與滑輪之間無摩擦力 來自空氣之作用力均可忽略 且在細繩張緊之前後的極短期間內 重力產生之衝量可忽略；則此系統的總力學能 總動量 總角動量(以滑輪中心為參考點)三者中 在細繩張緊之前後 沒有守恆的是 (25)。假使 M 在細繩張緊後瞬間的速率

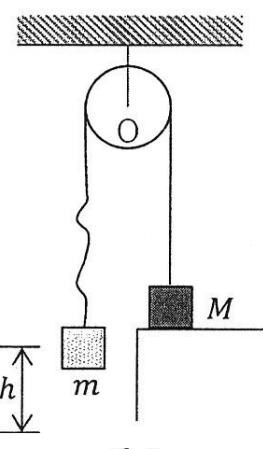


圖 7

為 V 則 m 在細繩張緊後瞬間的速度等於 (26)。(以向下為正 並設重力加速度為 g)。

十八 如圖 8 所示 在一光滑的直線上 一氫原子(H)與一氫分子(H_2)發生一維碰撞, 已知氫原子可被視為質點A 而氫分子則可視為B與C兩質點並以彈簧相連之系統。設質點之質量皆為 m 彈簧的彈力常數為 k 。發生碰撞前瞬間氫原子的速度為 $2v$ ($v > 0$ 故向右為正) 氢分子的質心速度為 $3v/2$ 且 C 相對 B 的速度為 v 而彈簧之伸長量為 x 。試問相較於碰撞前 碰撞後氫原子與氫分子之質心總動能的改變為 (27) (以正值代表增加) 又碰撞後 C 的最大速度為 (28)。

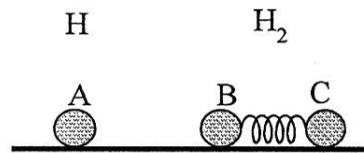


圖 8

十九 楊氏係數 Y 的定義是應力與應變的比值。應力的定義是材料每單位面積的平均受力, 而應變的定義為沿著受力方向的每單位長度的平均形變量。若鋸齒型狀(Zigzag)奈米碳管如圖 9-1 所示, 其截面積為 A 、長度為 l_0 , 當沿著管軸受到 F 力的作用後, 在彈性限度內微小的長度變化量為 Δl 則楊氏係數 Y 等於 $\frac{F/A}{\Delta l/l}$ 。圖 9-2 中是將括弧部分的一小段奈米碳管沿著管軸方向將管壁展開的示意圖, 即圖 9-2 中左邊 B 和右邊 B 是重合在一起而捲成一個奈米碳管, 每一個點●代表一個碳原子。

(a) 若碳-碳原子間鍵結可以用摩斯位能函數來表示, 即 $V(x) = V_0 \left(e^{-4\frac{x}{a}} - 2e^{-2\frac{x}{a}} \right)$

其中 V_0 為平衡時鍵結能, 是一個定值; a 為兩個碳原子平衡時的距離, 即平衡時的鍵長; x 為相對於平衡鍵長的壓縮量或是伸長量。在微小振盪的近似下, 即 $x \ll a$ 時,

碳-碳原子間位能函數可以寫為 $V(x) \approx -V_0 + \frac{1}{2}kx^2$, 則 $k = \underline{(29)}$ 。

【提示】: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$ 當 $x \ll 1$ 。

(b) 假設平行軸方向的碳-碳鍵結是影響軸方向楊氏係數的主要因素 而鋸齒狀碳鍵效應可以忽略(如圖 9-2 虛線部分)。已知 $V_0 = 4.93$ 電子伏特 $a = 0.142$ nm, 則圖中奈米碳管軸方向的楊氏係數等於 (30) GPa。

(1 電子伏特 = 1.602×10^{-19} 焦耳)

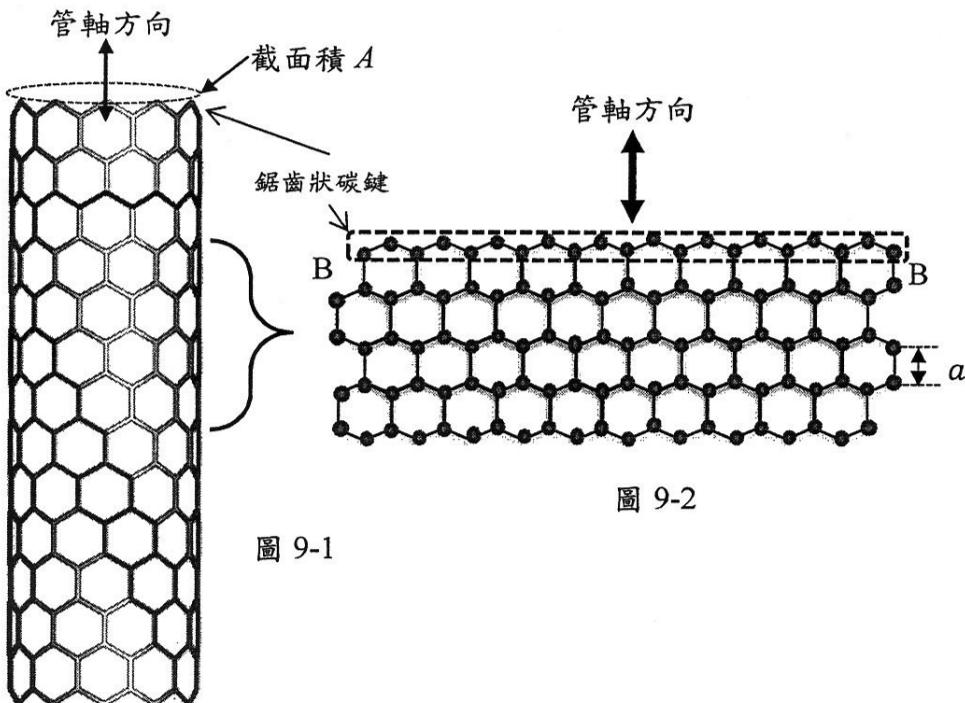


圖 9-2

圖 9-1

貳 計算題(每題 15 分，共二題，合計 30 分)

一 一維的質點振盪運動(15 分)

一彈力常數為 k 的理想彈簧 其一端連在固定的牆上 一端與一個質量可以忽略不計的碗相連接。碗的底面是一個半徑為 R 的凹半球形 碗底有一個質量為 m 的質點。以此彈簧的方向定為 x 軸 設彈簧為原長 且質點在碗底時的位置為 x 軸之原點 如下圖 10-1 所示。假設碗與地面 質點 m 與碗面之間的摩擦力都可以忽略不濟。今對質點施以一個一直與碗圓弧面平行的力，使得質點在碗面內自碗底緩慢上升，質點與碗的球心之連線與鉛垂線的夾角為 θ 。過程中施力方向跟著改變而一直保持沿碗面方向，直到與鉛直夾角等於 θ_0 ，如下圖 10-2 所示。回答下列問題：

(1) 當質點在 θ_0 處保持靜力平衡 整個系統處於平衡狀態。此時碗亦已離開原來位置，設此時的碗底位置為 x_0 求 x_0 表示式(以 θ_0 k R m 和重力加速度 g 表示之)。(3 分)

設時間零點是使質點維持在 θ_0 位置的外力消失的時間，則

(2) 若 θ_0 很小 外力消失之後質點會在碗中作簡諧運動 其角頻率 ω 是多少？(以 θ_0 k R m 和重力加速度 g 表示之)(6 分)

(3) 承(2)的結果，當以外力消失，經過 t 的時間後 此質點相對於地面的水平速度為何？(以 θ_0 k R m 和重力加速度 g 表示之)。(6 分)

【提示】: $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$ $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$ 。

當 $x \ll 1$ $\sin x \approx x$ $\cos x \approx 1$ 。

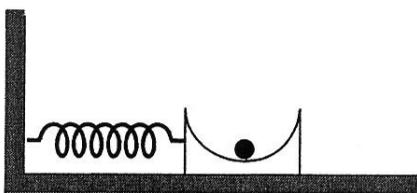


圖 10-1

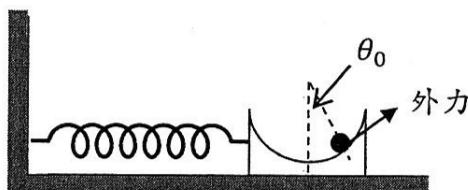


圖 10-2

二 量測大氣壓力(15 分)

一端為開口另一端為閉口的玻璃管 其截面積為 1 cm^2 長度為 L 。玻璃管內裝有高度為 h_0 的水柱($L > h_0$)，其他剩餘的長度裝有空氣。將此管開口以手暫時封閉垂直倒立插入一盛有水的容器中 將手放開後成為一個測量大氣壓力的簡易裝置；如圖 11 所示。設玻璃管上端的空氣柱高度為 H ，管內水面距離容器水面的水柱高度為 h ；則隨著玻璃管沿鉛直線在容器中上下移動(即玻璃管在水中的深度不同時)， H 和 h 會隨玻璃管深度而變化。某生利用此裝置進行實驗，紀錄玻璃管不同深度時的 H 和 h 數值 並將實驗結果繪圖 其結果如圖 12 所示。

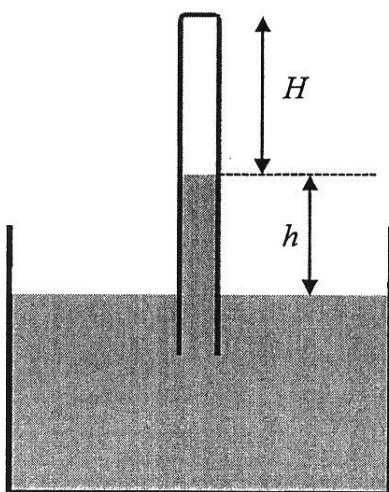


圖 11：測量大氣壓力之簡易裝置

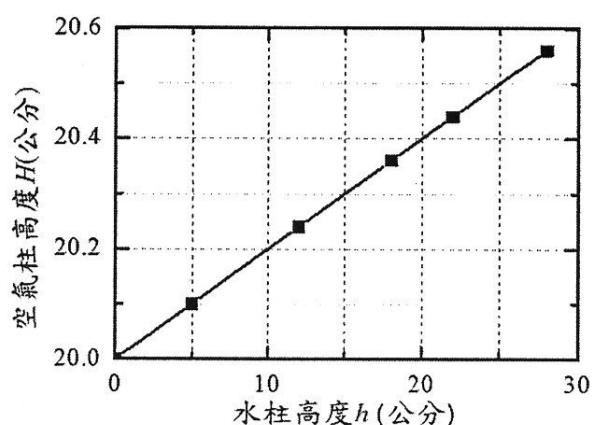


圖 12：空氣柱 H 與水柱 h 實驗數據圖。

實驗過程中 系統的溫度恆定不變 且由圖 12 的實驗結果知 H 和 h 具有線性關係
若兩者的關係可以寫成 $H = a + bh$ 則：

- (1) 由圖 12 的實驗結果 求 a 和 b 的數值。(2 分)
- (2) 設大氣壓力為 P_{atm} 重力加速度為 g 而水的密度為 ρ 試推導得 a 和 b 的理論表示式(即以 P_{atm} g ρ L 和 h_0 表示之)。(5 分)

雄中物理科掃描版

若已知玻璃管長度 $L = 60\text{ cm}$ 而水的密度為 $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ 重力加速度為 $g = 9.8\text{ m/s}^2$ 則

- (3) 求初始管中的水柱高度 h_0 是幾公分高？(2 分)
- (4) 請問實驗當地的大氣壓力 P_{atm} 約是多少 kPa？(4 分)
- (5) 當改變玻璃管在水中的深度時， H 和 h 會隨之變化。試問實驗過程中 H 和 h 可容許的最大值各為多少公尺？(精確至小數點下兩位數，即公分的位數)

【提示】: $\frac{1}{1-x} \approx 1+x$ ，當 $x \ll 1$ 。