

2013 年第 14 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及
第 44 屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2012 年 11 月 17 日

9：30~12：30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
- 2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
- 3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
- 4、可使用掌上型計算器。

2013 年第 14 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 44 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、假設由密度為 $\rho = 3000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 的岩石所組成的山，若岩石所能承受的最大壓力為 300 MPa，則山的最大可能高度為 (1) 公尺。

二、一細長扁平浮針浮在水面上之橫切面圖，如圖 1 所示。假設浮針寬為 w 、長為 l 、厚度可不計，已知水的表面張力為 Γ ，密度為 ρ ，重力加速度為 g ，經測量發現浮針之底部的深度為 h ，與浮針接觸點接觸之水面與水平面之夾角為 $\pi/6$ ，若浮針兩頭之水面與水平面之夾角亦為 $\pi/6$ ，由此可推知浮針之重量為 (2)。

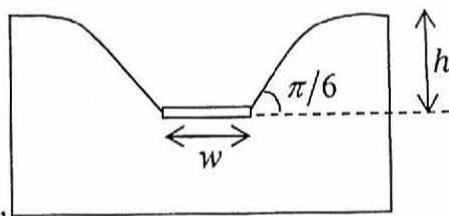


圖 1

三、有一 10kg 之物體在一與水平面夾 30° 之斜面上運動，該物體與斜面之動摩擦係數為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。令起始之瞬時該物體之速率為 10 m/s 向上運動。則 5 秒後：(a) 該物體之速度為 (3) m/s；(b) 該物體相對於起始點位置之距離為 (4) 公尺。(設重力加速度量值為 10m/s^2)

四、參觀台北 101 大樓時，可以搭乘快速電梯上景觀台眺望台北景色。快速電梯內裝著一個顯示板，顯示著上升過程中任一時間之瞬時速度。某生在搭乘時好奇的對著顯示板錄影，直到電梯到達觀景台。該生回家後擷取錄影中的訊息，將上升中的電梯速度對時間作圖，結果如圖 2 所示，其中電梯最快的速度為 16.8m/s。當時電梯加上載人後的總重量為 2000kg 重，則電梯從開始到停止之過程中上升 (5) 公尺；若忽略任何損耗，由圖 2 的數據計算電動機驅動電梯在上升過程中所輸出最低的平均功率為 (6) W。(設重力加速度量值為 $g = 10\text{m/s}^2$)

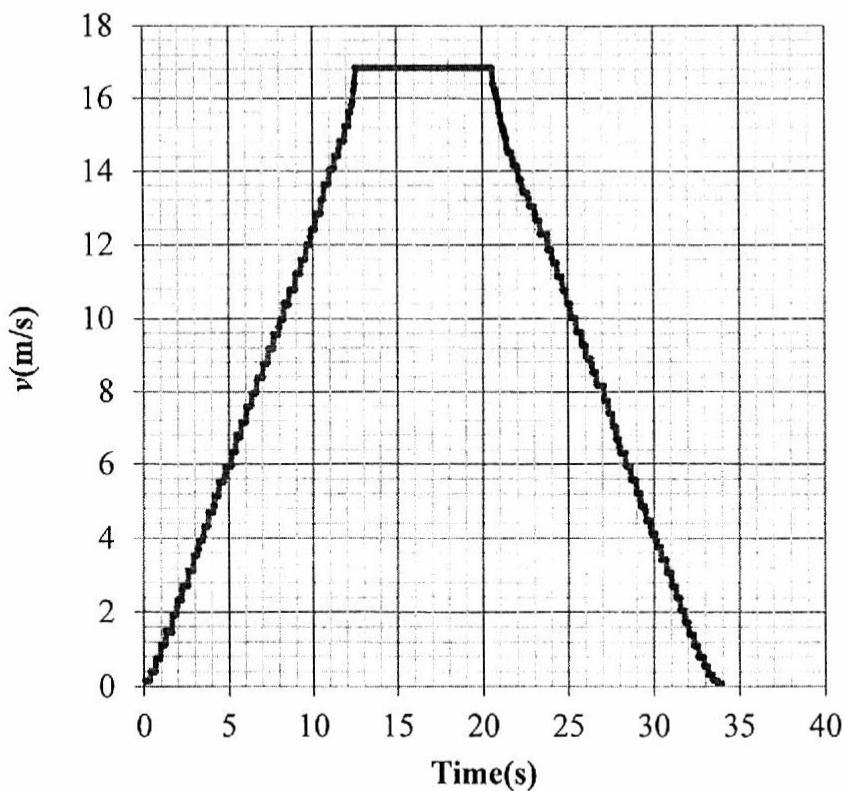


圖 2

五、某人坐在遊樂場中水平面上旋轉的木馬上，其距離轉軸 8 公尺。木馬每 32 秒轉一圈，同時某人騎乘之木馬還以 $2\sin[t/(4\text{秒})]$ 公尺的位移方式上下移動，其中 t 為時間。在旋轉過程中，此人相對於其座騎不動。若此人質量為 64 公斤，則木馬轉一圈的過程中，某人所受最大淨力為 (7) 牛頓。(設重力加速度為 10 m/s^2)

【註】: $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ 。

六、一「水銀連通管」之同半徑長短兩管內通以相同氣壓為 P 之理想氣體，然後封閉上端開口如圖 3。此時兩液面等高，但左管空氣柱長 50 cm，右管空氣柱長 30 cm。如果提升底部連通的汞杯，並在杯中注入 10 cm^3 的汞之後，左管液面上升 6 cm，右管液面上升 4 cm。假設過程中溫度保持不變，則原氣體壓力 P 為 (8) 公分汞柱高。

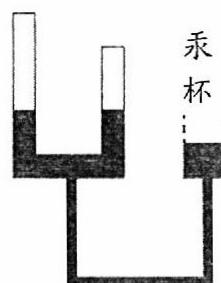


圖 3

七、如圖 4 所示，將一質點由斜坡上的 O 點，以初速率 v 與拋射角 θ ($\tan \theta \geq 0$) 拋射出去，使其在空中飛行並降落於下坡 A 點處，O 點與 A 點之間的垂直與水平距離分別為 H 與 L 。若重力加速度為 g ，且不限定 v 與 θ (但 $\tan \theta \geq 0$) 的量值，則質點由 O 點飛行到 A 點所需的最短時間為 (9)，而可能的最小初速率為 (10)。

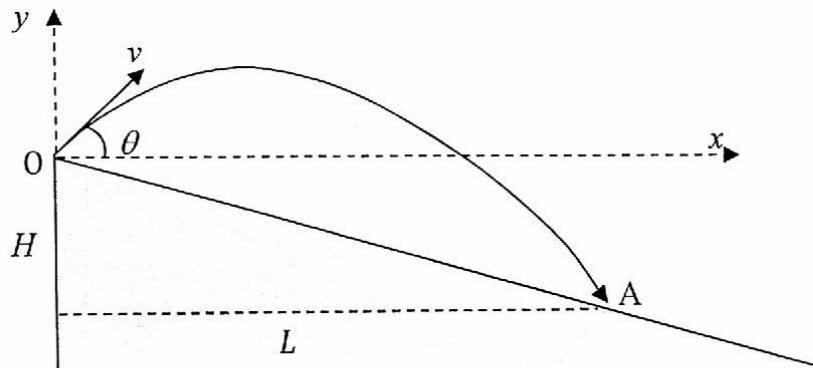


圖 4

八、第一位登上月球的美國太空人阿姆斯壯(Neil Armstrong)在今年(2012 年)8 月 25 日過世。他當年(1969 年)登陸月球的太空任務代號是阿波羅 11(Apollo 11)。下列表一中所紀錄的是阿波羅 11 火箭飛離地球，在火箭熄火後所測得的結果。

表一：阿波羅 11 火箭飛離地球熄火後，測得之其與地心之距離和其所對應的地心的相對速度。

太空船與地心之距離(單位： 10^6m)	太空船與地心的相對速度(單位： m/s)
11.0	8406
26.3	5374
54.4	3653
95.7	2619
169.9	1796
209.2	1532
240.6	1356

已知太空船的總質量為 $m = 4.4 \times 10^4\text{kg}$ ，重力常數 $G = 6.67 \times 10^{-11}\text{m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$ 。利用以上

數據，求出地球之質量 (11) kg (註月球對太空船的引力可以忽略不計)。若不做任可修正，此太空船可航行至離地球最遠的距離為 (12) m 。

【註】：解題時如需方格紙，可以使用在附錄中的方格紙。

九、如圖 5 所示，一細繩纏繞過圓筒，細繩與圓筒接觸之部份所張的角度為 θ ，假設細繩與圓筒間之靜摩擦係數為 μ ，繩的左端之張力固定為 T_0 。

(a) 若 $\theta \ll 1$ 時，在繩的右端施以張力，使繩子向右滑動最小所需之張力為 T ，已知繩的質量可

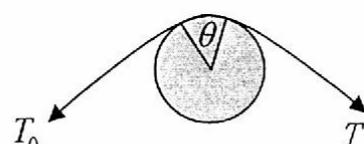


圖 5

被忽略，則近似到 θ 的一次方時，張力 T 等於 (13)。(b) 若纏繞過圓筒的角度不再很小而是 $\theta = \pi$ ，利用(a)所得到的小角度結果組成有限角度的算式，則此時 T 等於 (14)。

【註】：(i) 當 $\theta \ll 1$ ， $\sin \theta \approx \theta$ ， $\cos \theta \approx 1$ (ii) 當 $x \ll 1$ 時 $\rightarrow \frac{1}{1-x} \approx 1+x$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \text{，其中 } e = 2.718\dots$$

- 十、如圖 6 所示，一半徑為 a 之均勻實心球放置在一寬為 a 之平行軌道上。整個軌道再放置在傾角為 θ 的斜面上。實心球由靜止釋放作純滾動運動，已知實心球相對球心的轉動慣量為 $2ma^2/5$ ，則球心高度下降 h 時，球心的速度為 (15)。

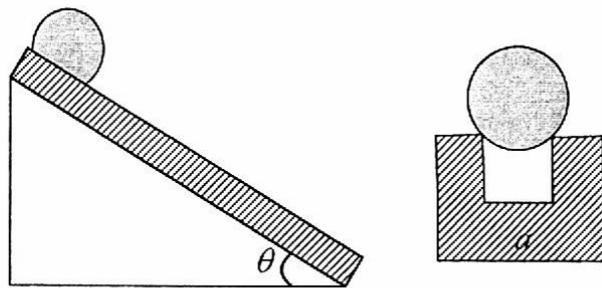


圖 6

- 十一、一個靜止的水平圓盤，在表面布滿小炮竹後的轉動慣量為 I_0 。若在時間 $t=0$ 時，

使圓盤在固定的力矩 τ_0 作用下，開始繞通過其中心的鉛直軸轉動，並點燃炮竹，使炮竹沿圓盤的半徑方向發射出去，以致圓盤的轉動慣量以固定的時變率 β 減小，亦即圓盤在 $t \geq 0$ 時的轉動慣量為 $I = I_0 - \beta t$ ，則在 $t = I_0/(2\beta)$ 時，此圓盤的轉動動能為 (16)，角加速度為 (17)。

- 十二、一個垂直置放在水平面上的圓柱氣室，氣室上端有一質量為 $2m$ 的活塞。氣室內有 n 莫耳之單原子理想氣體，氣室外為真空。在平衡狀態下，活塞距離氣室底部的高度為 ℓ_0 ，此時氣室內氣體的溫度 $T_0 = \underline{(18)}$ (用以上參數及氣體常數 R ，重力加速度 g 表示之)。現有一質量為 m 之小球自活塞之上 ℓ_0 的高度自由落下，與活塞產生彈性碰撞，小球與活塞發生一次碰撞後就被移走。設活塞與氣室內壁的摩擦力可以不計，且活塞及氣室壁均為絕熱材質，則活塞下降至距離氣室底部之最小高度 ℓ 可由下列方程式求得： $18(\ell/\ell_0)^{5/3} - c(\ell/\ell_0)^{2/3} + 27 = 0$ 。此式中 $c = \underline{(19)}$ 。

【註】：你也許會用到積分公式： $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ，其中 $[n \neq -1]$ 。

十三、有一工程師為了設計雲霄飛車而製作了一個滑軌模型，並進行測試，滑軌設計如圖 7。今將一個體積可忽略之小鋼珠由 A 點自靜止釋放，順著一個與水平面呈 45 度斜角的長直軌道滑到 B 點後，即相切接上半徑為 R 的圓弧形軌道，經繞轉 $9/8$ 圈後在最低點 C 點處進入水平軌道。若鋼珠與滑軌間的摩擦力可忽略，要確保鋼珠可以完成以上的路徑，且與滑軌間在整個過程中接觸不分離，則 A 點離地的高度必須高於 (20) 才行。已知當在最小高度時，鋼珠連續兩次通過 C 點（亦即

繞行半徑為 R 的圓環一圈）所需的時間為 $\int_0^{2\pi} \left[\frac{R}{2g(a + \cos \theta)} \right]^{1/2} d\theta$ ，其中 g 為重力加速度，則式中 a 的數值等於 (21)。

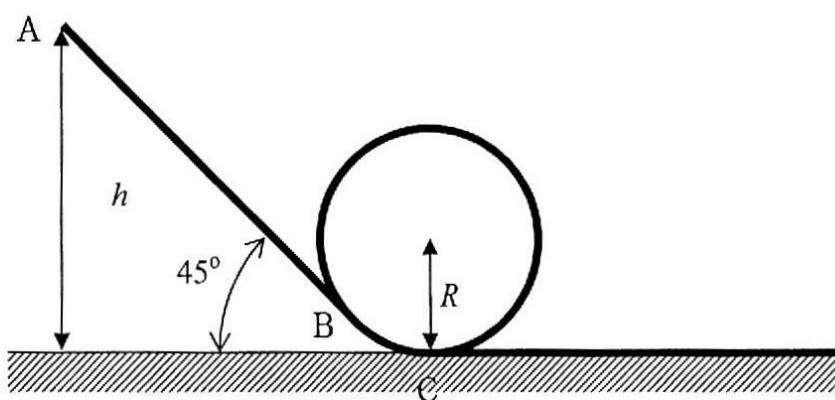


圖 7

十四、長度為 L 的細繩，其一端固定，另一端連接於長度為 L 的細棒，細繩細棒所組成的系統長度為 $2L$ ，如圖 8 所示。已知細棒不是均質，但質量為 M ，但是質心位置恰在棒子的中間，且細棒質心轉動慣量為 $I = 1/4ML^2$ （轉軸垂直於棒長，並穿過質心）。

若細繩質量可忽略；今有一質點自右以水平方向撞擊細棒，撞擊點距離尾端的高度為 h ，如圖所示，碰撞後質點反向離開。若細繩細棒系統在剛撞擊後的瞬間，其運動狀態是細繩與細棒成一直線進行擺動的狀態，則撞擊點的高度 h 等於 (22)。

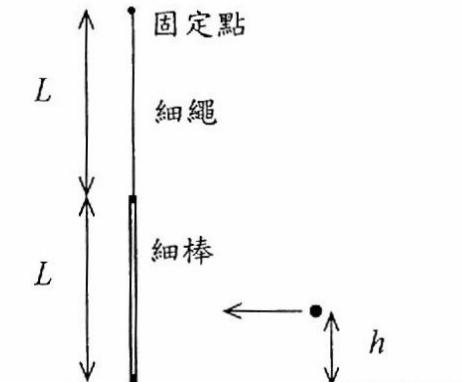


圖 8

十五、假設一質量為 M 的汽車可簡化為密度均勻，長寬高分別為 a 、 b 、 c 的長方體，如圖 9 所示。當突然緊急剎車，使得速度在極短的時間內降為零，則在剎車瞬間，

車子產生相對於地面的角速度 $\omega_0 = \underline{\quad(23)\quad}$ 。當速度超過 v_0 時，會因為突然緊急剎車造成向前翻滾，則 $v_0 = \underline{\quad(24)\quad}$ 。

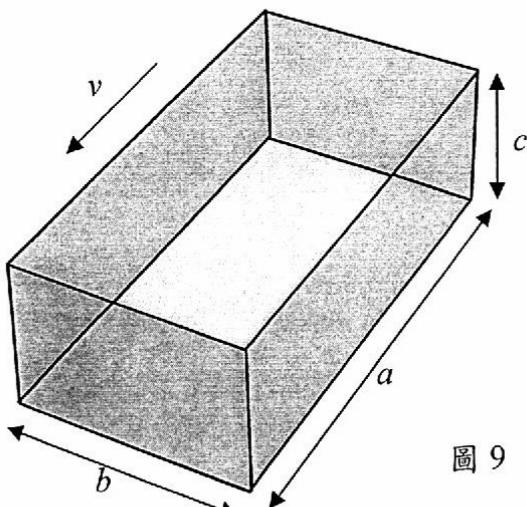


圖 9

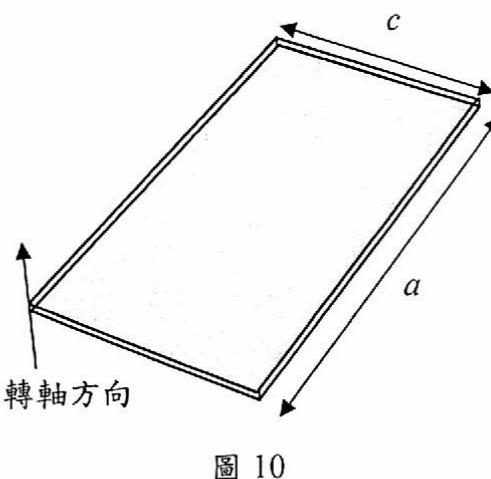


圖 10

【註】：已知質量為 m ，密度均勻分布且邊長為 l ， w 的長方形，相對於其頂點的轉動慣量為 $\frac{1}{3}m(a^2 + c^2)$ ，如圖 10 所示。

十六、一太空船繞行一質量為 M 的星球，其軌道半徑為 r_0 。太空船的火箭在某瞬間噴發，給予太空船一速度增量 $\Delta\bar{v}$ ，其方向與原速度夾角為 θ 。計算能夠使太空船脫離該星球之最小速度增量的角度 $\theta = \underline{\quad(25)\quad}$ 與量值 $\Delta v_{\min} = \underline{\quad(26)\quad}$ 。(設萬有引力常數為 G 。)

十七、許多歐美建築的暖氣設備都是以恆溫的熱水通過環繞室內之熱水管，利用熱水將熱傳導到室內以達到加熱室內的目的。已知某一建築當室外為 -10°C 時，室內為 20°C ，而室外為 -30°C 時，室內為 10°C 。設熱輻射與對流皆可忽略，則當室外為 0°C 時，室內溫度約為 $\underline{\quad(27)\quad}^\circ\text{C}$ 。

十八、在室溫、一大氣壓下，以 1 莫耳空氣進行兩個實驗。

- (1) 在壓力保持固定的加熱過程中，測得 1 莫耳空氣溫度升高 1°C 需要輸入 29.19 焦耳的熱量；
- (2) 在體積保持固定的加熱過程中，測得 1 莫耳空氣溫度升高 1°C 需要輸入 20.85 焦耳的熱量。

空氣的狀態方程式為 $PV = nRT$ ，其中 P 、 V 、 T 和 n 各為氣體壓力、體積、溫度和莫耳數，由上述兩個實驗可以得到狀態方程式中等效 R 值等於 $\underline{\quad(28)\quad}\text{J/K}\cdot\text{mol}$ 。

十九、太平洋的馬里亞納海溝底部，距海平面的深度為 10.9km。已知在海平面處的海水密度為 $\rho_0 = 1050 \text{ kg/m}^3$ ，由於海水很難壓縮，海水密度隨水深的變化量很小，因此海水的密度可視為不變。回答下列問題：

(a) 在該海溝底部的海水靜液壓力是海平面大氣壓力的 (29) 倍。

(b) 為探測馬里亞納海溝，設計一可以深潛至該海溝底部的圓球形空心容器，其通過球心的剖面形狀如圖 11 所示，其內半徑 $r = 1.5 \text{ m}$ ，鋼壁的厚度為 t 。若鋼的楊氏係數

$Y = 2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，且鋼材可維持彈性的線性

應變量的上限為 $\Delta\ell/\ell = 0.0050$ ，則該深潛容器的鋼壁厚度的最小值為 (30) 公分。

【註】：楊氏係數的定義為應力與應變的比值，即： $Y = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell}$ 。

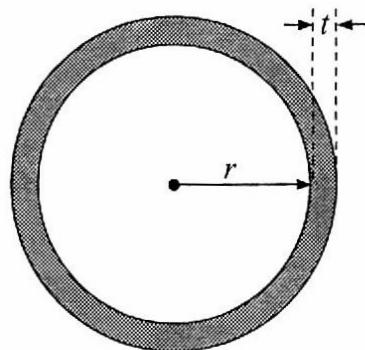


圖 11

貳、計算題(每題 15 分，共二題，合計 30 分)

一、一維的移動與振盪運動(15 分)

有兩個方塊，A 木塊質量為 8.00 kg，B 木塊質量為 2.00 kg，靜止置於一個無摩擦的水平面上。兩者以一個力常數為 $k = 40 \text{ N/m}$ 的彈簧連接，彈簧維持其自然長度 $L = 0.5 \text{ m}$ 的狀態。在時間 $t = 0$ 時，B 木塊開始受到一個向右的力 F 作用，且 $F = 10.0 \text{ N}$ 。系統自靜止狀態開始運動。回答下列問題：

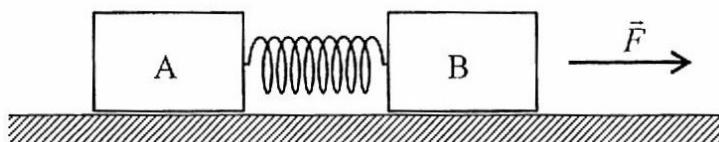


圖 12

- (1) 開始受力 F 作用後的運動過程中，求以質心坐標系觀察到 A 木塊的振盪頻率為多少赫？(3 分)
- (2) 開始受力 F 作用後的運動過程中，兩木塊間距離的最大值為多少公尺？(4 分)
- (3) 當時間 $t = 0.42 \text{ s}$ 時，此時 B 木塊的位置與其起始位置的距離為多少公尺？(4 分)
- (4) 在 $t = 0.42 \text{ s}$ 時，外力 F 對於整個系統所施的瞬間功率是多少瓦？(正值表示作功，負值表示被作功)。(4 分)

二、小孔的水柱高

一超大型蓄水池水位高度為 H ，水池底部外接一出水管，水管維持水平。水管共有兩段前後連接；前段的截面積 A_1 比較大，後段的截面積 A_2 比較小；後段的出水端置有一閥門開關，可以調節水流。 A_1 及 A_2 皆遠小於蓄水池的面積，且 H 皆遠大於 $\sqrt{A_1}$ 與 $\sqrt{A_2}$ 。今前段水管的上方忽然產生一小孔，小孔的面積遠小於 A_1 及 A_2 ，如圖 13 所示。

水會自小孔噴出，且噴出小水柱的高度 h 會與閥門的開關狀態有關；若水可以視為理想流體(無黏滯，且不可壓縮)，則：

- (1) 當閥門完全閉鎖時，自小孔噴出的水柱高度 h 為何？(4 分)
- (2) 當閥門完全開啟時，自小孔噴出的水柱高度 h 為何？(6 分)
- (3) 若閥門完全閉鎖時與完全開啟時水柱高度的比值為 3，試求 A_1/A_2 的比值為何？(5 分)

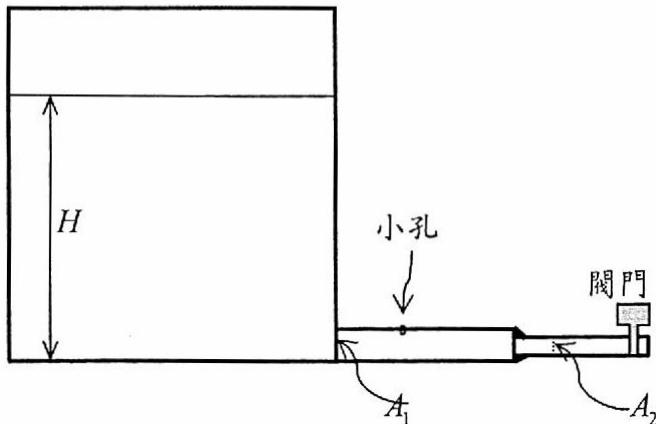


圖 13

附錄：方格紙

