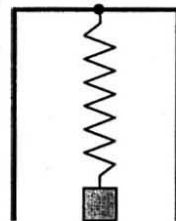


2005 年第六屆亞洲物理奧林匹亞競賽  
及第三十六屆國際物理奧林匹亞競賽  
國家代表隊初選考試試題

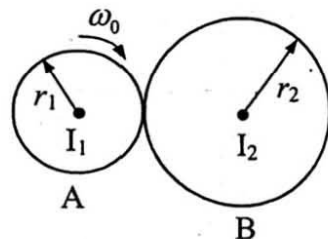
※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格四分，共三十格，合計 120 分)

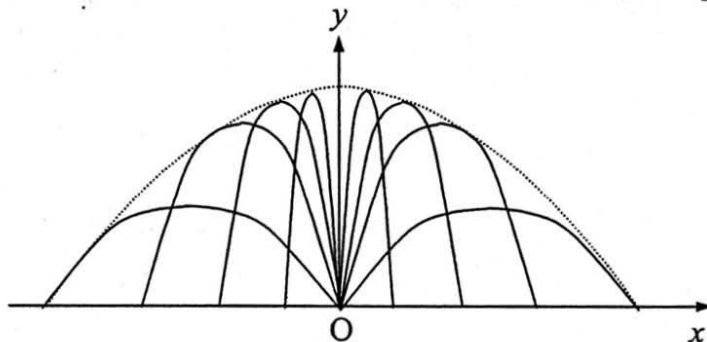
- 一、有一質量為  $M$  的鋼筒，下端開口，內繫一力常數為  $k$  的彈簧，彈簧的下端懸掛一質量為  $m$  的砝碼。當鋼筒靜止懸掛時，砝碼恰垂於筒口，如右圖所示。若使鋼筒自由落下，則在落下的過程中，砝碼離開筒口的最大距離為何？(1)。



- 二、兩圓盤 A 和 B 的半徑分別為  $r_1$  和  $r_2$ ，轉動慣量分別為  $I_1$  和  $I_2$ ，且兩圓盤對其中心轉軸的摩擦力可忽略不計。起始時，圓盤 A 以角速度  $\omega_0$  繞其中心軸旋轉，但圓盤 B 靜止不動。現將圓盤 B 的邊緣緊靠住圓盤 A 的邊緣，並使兩圓盤的中心轉軸之間的相對位置保持不變，由於盤緣摩擦力的作用，圓盤 B 由靜止起開始旋轉，當圓盤 B 到達最後穩定的轉速時，其角速度為何？(2)。

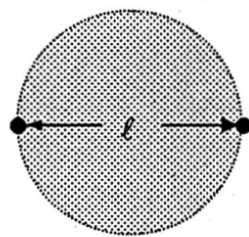


- 三、考慮在公園裡的一座噴水池，位於池中央的噴水頭為半球形，其上佈滿許多噴水孔，可使水以同一速率  $v$  從各個角度和方向噴出，形成水幕，如下圖所示。試求水幕的最大高度和其圓形底面直徑的比值為何？(3)。若從通過噴水頭的鉛直切面來看，該水幕邊界（即包跡）的曲線方程式為何？(4)。



- 四、在宇宙中有許多看不見的物質，稱為暗物質。暗物質對星體的影響，只有萬有引力作用。對雙星系統的觀測，可提供有關暗物質存在的間接證據。所謂雙星系統是由二個星體組成，每個星體的直徑（將星體視為球體）遠小於彼此之間的距離，且它們離開其他星體很遠，因此不需考慮其他星體對它們的作用。今考慮一個雙星系統，兩星體的個別質量皆為  $m$ ，且彼此的間距為  $\ell$ 。若這兩星體對它們的共同

質心作等速率圓周運動，且其彼此之間沒有其他物質的存在，以  $G$  表示萬有引力常數，則其週期  $T_0$  等於 (5)。若進一步假設在以兩星體的共同質心為球心，直徑為  $\ell$  的球形區域內，均勻分佈有暗物質，如右圖所示，設其平均質量密度為  $\rho$ ，則此時雙星的運動周期  $T$  變為 (6)。因此可藉由  $T$  和  $T_0$  的觀測值，估算暗物質的質量密度。



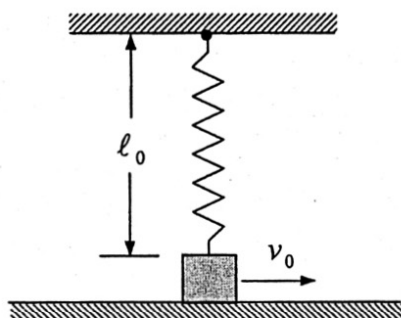
五、為了推估地球上的山，能有多高，我們以下述的模型來分析：

- (a) 假設山體的形狀為圓柱形，其底面積為  $A$ ，高度為  $h$ ，平均密度為  $\rho$ ，若山的高度過大，則山的底部因承受山體的重量，遭受擠壓發熱，以致溫度升高，結果使底部的物質熔化而下沉，因此山的高度應有一個上限。物質熔化所需的能量來自於山體下沉而減少的重力位能。設  $L$  為山體底部物質的熔化熱， $g$  為地球表面的重力加速度，則山的高度上限為何？ (7)。(以  $\rho$ 、 $L$ 、 $g$  表示之。)
- (b) 承上題，設  $L \approx 200 \text{ J/g}$ ， $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ，已知火星表面的重力加速度約為  $4 \text{ m/s}^2$ ，則在火星上的山，其高度上限約為地球上的幾倍？ (8)。

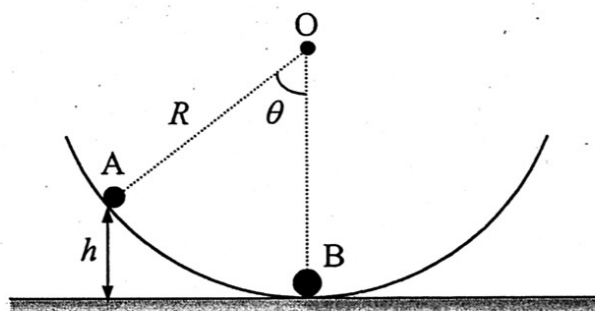
六、一汽車的車身長為  $4.65 \text{ m}$ ，車體連同司機的總質量為  $1060 \text{ kg}$ ，以  $45 \text{ km/hr}$  的時速在道路上行駛，不幸發生車禍，車子正向撞上一堵堅固的牆壁。碰撞後，車體被擠壓，車身長縮短為  $4.05 \text{ m}$ 。坐在車內的司機，質量為  $60 \text{ kg}$ ，由於安全帶的束縛作用，使他往前衝的速度在  $0.10$  秒內停止下來。假設汽車的車身結構均勻，在碰撞過程中，車子可視為被均勻擠壓，則汽車衝撞牆壁的平均作用力的大小為 (9)  $\text{N}$ ；又安全帶對司機的平均束縛力的大小為 (10)  $\text{N}$ 。

七、有一質量為  $m$  的小球，在離地面上方高度為  $h$  處，由靜止開始自由落下，在運動過程中小球所受的空氣阻力  $f$  和其速率  $v$  成正比，即  $f = kv$ ，式中  $k$  為比例常數。以  $g$  表示重力加速度，則此球的終端速率為 (11)。若  $k$  值甚小，小球下落的位移  $s$  可近似為自由落體公式  $s \approx \frac{1}{2}gt^2$ ，則小球的速率  $v$  和時間  $t$  的近似函數關係式為 (12) (取項至  $t^2$ )。

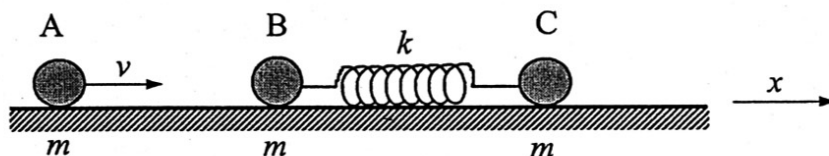
八、如右圖所示，一置放在光滑水平桌面上的木塊，質量為  $m$ ，以一自然長度為  $\ell_0$ ，力常數為  $k$  的輕彈簧，沿鉛直方向固定在上方，此時彈簧的伸長量為零。若木塊的質量  $m < \frac{k\ell_0}{g}$ ，並以初速  $v_0$  向右沿水平方向射出，則欲使木塊衝離桌面， $v_0$  的最小值為何？ (13)。



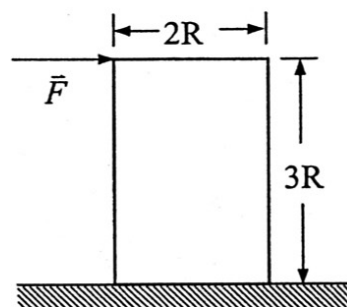
- 九、如右圖所示，在一半徑為  $R$  的光滑圓弧軌道上，有兩個質點 A 與 B，其質量分別為  $m$  和  $1.5m$ 。起始時，質點 B 靜止在軌道最低點，質點 A 自高度  $h$  處（設  $R \gg h$ ，故  $\theta \ll 1$ ），由靜止開始滑下與 B 發生碰撞，碰撞後兩質點沿圓弧軌道反彈分離。之後，兩者又滑回再度碰撞，如此 A 和 B 之間會往復來回碰撞多次。假設所有的碰撞皆為彈性碰撞，則當兩者第 7 次碰撞後，但在第 8 次碰撞前，質點 A 能達到的最大高度為 (14)（以  $m$ 、 $R$  和  $h$  表示之）。



- 十、如下圖所示，在光滑水平面上有一系統，是由質量同為  $m$  的三個質點 A、B、和 C 三者所組成。此三質點均位在  $x$  軸上，且 B 和 C 之間以一條力常數為  $k$  的輕彈簧相連接。當 B 與 C 為靜止，且彈簧處於無伸縮狀態時，A 以速度  $v$  沿  $x$  軸向右前進，與 B 發生完全非彈性碰撞。假設在 A 和 B 碰撞期間，C 保持靜止不動，且此時彈簧長度的縮短量可忽略不計，則在兩者碰撞後，系統的力學能損失為 (15)；又彈簧長度的最大縮短量為 (16)。



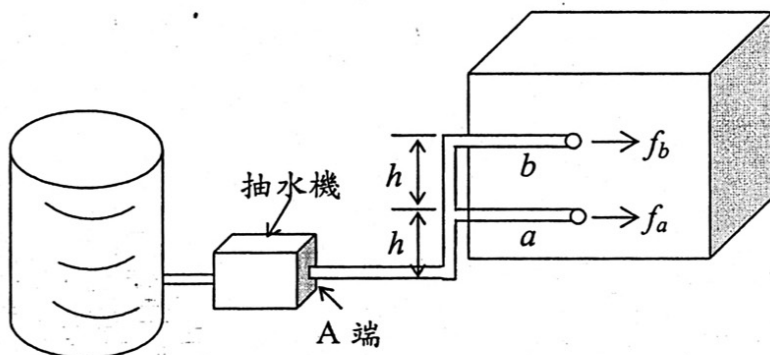
- 十一、一半徑為  $R$ ，高為  $3R$  的均質圓柱體，重量為  $W$ ，靜置在水平桌面上。圓柱底部與桌面之間的動摩擦係數等於靜摩擦係數， $\mu_k = \mu_s = \frac{1}{4}$ 。現施一水平力  $\bar{F}$  於圓柱體的上緣，如右圖所示，此力的延長線通過圓柱上端面的圓心。



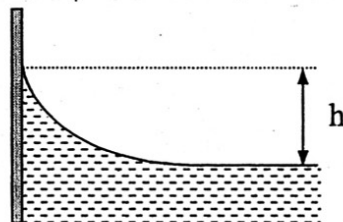
- (a) 若此圓柱體沿水平方向作直線等速度運動，則桌面對圓柱體所施正向力之合力的施力點，至圓柱體下端面圓心之間的距離等於 (17)。  
 (b) 水平施力  $F$  的量值在何範圍時，此圓柱體只滑動而不會傾倒？(18)。（寫出不等式）。

- 十二、已知肥皂溶液的表面張力為  $\gamma = 5.0 \times 10^{-2} \text{ N/m}$ ，假設緩緩吹肥皂泡時，皂液的表面張力性質不變，當肥皂泡的半徑為  $10 \text{ cm}$  時，肥皂泡內外所承受的壓力差為 (19)  $\text{N/m}^2$ 。

- 十三、颱風過後有些地方因為淤泥阻塞取水渠道而無法供水，為了提供自來水給一棟兩層樓房的用戶，水公司臨時架設一套供水系統：包括一台抽水機和一組水管系統，如下圖所示。水管的直徑都同樣為  $d$ ，抽水機的作用是使水管系統的 A 端產生水壓  $P_0 + \Delta P$  和水的流速  $v$ ， $P_0$  為當時的大氣壓力。若出水口  $a$  和  $b$  都同時打開，結果發現每單位時間流出的水量分別為  $f_a$  和  $f_b$ ，兩者的比值  $f_a / f_b = 3$ ，水的密度為  $\rho$ ，問此時在水管 A 端的水流速度  $v$  為何？    (20)    ；在 A 端的水壓差值  $\Delta P$  為何？    (21)    （皆以已知量表示之。）

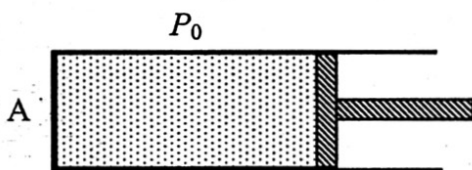


- 十四、將水注入方形的水族箱內，可以看到水沿著玻璃的內壁面爬升  $h$  的高度，如右圖所示。已知水的表面張力  $T = 0.073 \text{ N/m}$ ，且水和玻璃壁的接觸角可視為零，則  $h$  值為何？    (22)     m。



- 十五、利用真空幫浦將體積為  $1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^3$  的陰極射線管，抽至  $6.2 \times 10^{-6} \text{ mmHg}$  的高真空後密封，管內溫度為  $300 \text{ K}$ ，則管內的氣體分子數約    (23)    個；分子間的平均距離約為    (24)     m。（氣體常數  $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ）
- 十六、一登山者的身體表面積為  $2.0 \text{ m}^2$ ，穿著  $2.0 \text{ cm}$  厚的羽毛衣褲（導熱係數為  $2.0 \times 10^{-2} \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ），若身體熱量散失率的上限為  $80 \text{ W}$ ，體溫的安全下限為  $34^\circ \text{C}$ ，則登山者所能承受的最低氣溫為何？    (25)      $^\circ \text{C}$ 。
- 十七、潛水者所揹的空氣筒，筒內的容積約為  $10.0$  公升。空筒時，筒內有  $25^\circ \text{C}$ （室溫）， $1$  大氣壓（ $1.013 \times 10^2 \text{ kPa}$ ）的空氣。使用時，利用壓縮機將熱空氣灌入筒內，充氣後，筒內空氣的溫度為  $40^\circ \text{C}$ ，壓力為  $2.00 \times 10^4 \text{ kPa}$ 。計算充氣後空氣筒的總質量比空筒時增加了多少？    (26)     kg。（空氣約含  $4/5$  的氮氣和  $1/5$  的氧氣，氣體常數  $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ）
- 十八、某一物體的熱容量  $C$  與溫度  $T$  之間的關係式為  $C = a + bT$ ，式中  $a$  和  $b$  皆為正值常數。若欲使該物體的溫度從  $T_1$  增加至  $T_2$ ，則所需提供的熱量為    (27)    。

- 十九、如下圖所示，一水平放置的汽缸內裝有  $n$  莫耳的理想氣體，其定容熱容量為  $\frac{3}{2}nR$ ，式中  $R$  為氣體常數。此汽缸的右端裝有一光滑無摩擦的絕熱活塞，而其缸壁除左端 A 可導熱外，其餘部分均為絕熱體。假設周圍空氣壓力  $P_0$  恆維持不變，而最初達熱平衡時，汽缸內氣體的絕對溫度為  $T_0$ ，且活塞靜止不動。若由最初之平衡態，令一熱源與缸壁 A 保持接觸，使缸內的氣體在近近平衡的狀態下，分別以「等壓膨脹」和「等溫膨脹」兩種不同的方式，吸收熱量。當氣體總共獲得  $Q = nRT_0$  的熱量後，移除熱源並將缸壁 A 絕熱，使活塞固定不動。設以  $W$  表示氣體膨脹所作的功，則  $\frac{W}{Q}$  的比值，在「等壓膨脹」過程時為 (28)；而在「等溫膨脹」過程時為 (29)。

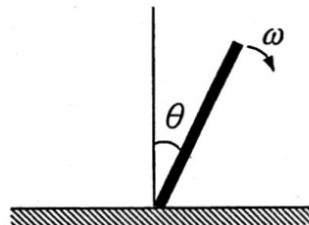


- 二十、有一物體和水裝在同一容器中，當溫度在  $20^\circ\text{C}$  時，物體和水的體積比值為  $1.0:8.0$ ，此時物體的平均密度與水相同，但是物體完全沒入水中。當物體和水的溫度同時升至  $70^\circ\text{C}$  時，水面的高度沒有改變，但物體有百分之十的體積浮出水面。已知水的體膨脹係數為  $2.0 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ，問該物體的平均體膨脹係數為何？  
(30)  $\text{K}^{-1}$ 。

## 貳、計算題（每題十五分，共二題，合計 30 分）

- 一、一根長為  $\ell$ ，質量為  $m$  的均勻剛棒，垂直豎立於粗糙的水平地面上。現輕推一下剛棒的頂端，使其傾斜倒下，但其接地的底端則未滑動。回答下列問題：

- (a) 當剛棒傾斜的角度為  $\theta$  時，如右圖所示，其角速度  $\omega$  為何？（以已知量表示之。）  
(b) 若  $\theta = 30^\circ$  時，剛棒的底端開始在地面上滑動，則剛棒和地面之間的靜摩擦係數為何？



【註】：剛棒繞其質心的轉動慣量  $I_C = \frac{1}{12} m\ell^2$ ，繞其一端的轉動慣量  $I = \frac{1}{3} m\ell^2$ 。

- 二、有一高度為  $2h$ ，截面積為  $A$  的絕熱圓筒，兩端密封，內裝氦氣，沿鉛直方向固定放置，筒內有一厚度很薄且可滑動的活塞，活塞的質量和熱容量皆很小，可以忽略。該活塞以輕繩下懸一個重量為  $W$  的重物，如右圖所示。起始時，活塞將圓筒均分成兩半，上下兩部分所含的氣體分子數相等，壓力皆等於  $P_0$ 。現放鬆重物，使其自由下落，活塞也隨之下降，但因氣體的彈性作用，會使活塞上下振動，直到最後停止下來。
- (a) 當圓筒內的上下兩氣室達成熱平衡狀態時，下方氣室被壓縮後的體積和起始體積的比值為何？以  $W$ 、 $P_0$ 、和  $A$  表示之。
- (b) 若重物很重，則(a)題中比值的極限值為何？

