

# 台阶编年史：连接古代台阶磨损模式与时间使用的多尺度模型

## 摘要

台阶磨损是受材料特性、使用频率及环境条件等多重因素影响的复杂现象。然而理解这种磨损对考古学至关重要，它能为古代社会、日常活动及技术发展提供宝贵洞见。为辅助考古研究，我们开发了台阶磨损模拟模型，从而更精确地揭示磨损形成机制。

在任务1中，我们基于Archard磨损定律与人类行为分析建立模型，以解决楼梯磨损的使用频率与强度问题。通过分析磨损深度 $W(x, y)$ 并拟合地面反作用力数据，该模型可估算磨损量及楼梯使用频率 $f_{use}$ 。此外，通过3D扫描数据进行的验证进一步证实了模型的准确性。

在任务2中，我们采用基于高斯混合模型和贝叶斯信息准则的概率模型来分析楼梯的使用方向和使用模式。该模型通过比较 $n_{(上)}$ 与 $n_{(下)}$ 来评估方向偏好，这两个参数可通过期望最大化算法在模型中进行统计计算。同时使用楼梯的人数与混合高斯分布的数量相关，可通过最小化贝叶斯信息准则来获取。

在任务3中，我们开发了一个结合蒙特卡洛模拟与平滑度检测的模型，用于验证磨损一致性与材料来源。该模型通过评估磨损深度 $W(x, y)$ 和表面梯度 $S(x, y)$ ，检测自然磨损模式中的异常变化，从而识别修复或翻新痕迹。模型还能模拟使用过程中的磨损演变，预测达到安全极限前的剩余使用寿命。此外，我们通过磨损系数分析与统计检验结合定量方法与考古证据，精准识别台阶原始材料来源。为解析使用频率与时长模式，采用Chaboche模型分析不同踏步模式下的台阶疲劳损伤，结果表明：相较于低频长时踏步，高频短时踏步会加速磨损进程。

最终模型虽能可靠预测台阶磨损，但仍存在局限性。未来改进将聚焦于材料适应性、动态环境因素及多尺度建模。

**关键词：**阶梯磨损；高斯分布；蒙特卡洛模拟；疲劳损伤

# 目录

<b>1 引言</b>	<b>2</b>
1.1 问题背景 .....	2
1.2 问题重述 .....	2
1.3 我们的工作 .....	3
<b>2 假设与论证</b>	<b>3</b>
<b>3 符号</b>	<b>4</b>
<b>4 分析与建模</b>	<b>5</b>
4.1 楼梯磨损数据采集 .....	5
4.2 基本物理磨损模型 .....	5
4.3 步行频率模型 .....	9
4.4 单阶段磨损模型 .....	11
4.5 磨损与可用信息的一致性 .....	16
4.6 阶梯式耐久性预测 .....	17
4.7 维修与翻新检查 .....	18
4.8 材料来源鉴定 .....	19
4.9 频率与持续时间模式 .....	20
<b>5 模型评估与进一步讨论</b>	<b>22</b>
5.1 模型的优势与局限性 .....	22
5.2 未来研究方向 .....	23
<b>6 结论</b>	<b>23</b>

# 1 引言

## 1.1 问题背景

楼梯作为建筑物的重要组成部分，直接影响建筑结构的功能性和安全性。随着时间推移，楼梯的持续使用及环境因素会导致不同程度的磨损，而这种磨损受多种因素影响，如材料、设计、使用频率、使用者行为、湿度及温度变化等（如图1所示）。考古学家常通过台阶磨损痕迹推断古代建筑的历史使用情况[1]。然而，准确判定楼梯的使用时长与磨损程度——尤其在考古遗址中——仍面临重大挑战。磨损机制研究表明，磨损预测有助于推断建筑的历史使用状况，因此成为考古学家和工程师的重要工具[2]。



图1：遗址中磨损严重的古代石阶。

楼梯由不同材料制成。通过建立数学模型预测楼梯磨损情况，我们能协助考古学家推断楼梯的历史使用状况。此外，非破坏性检测方法已被开发用于监测磨损，这在研究历史建筑时尤为重要[3]。

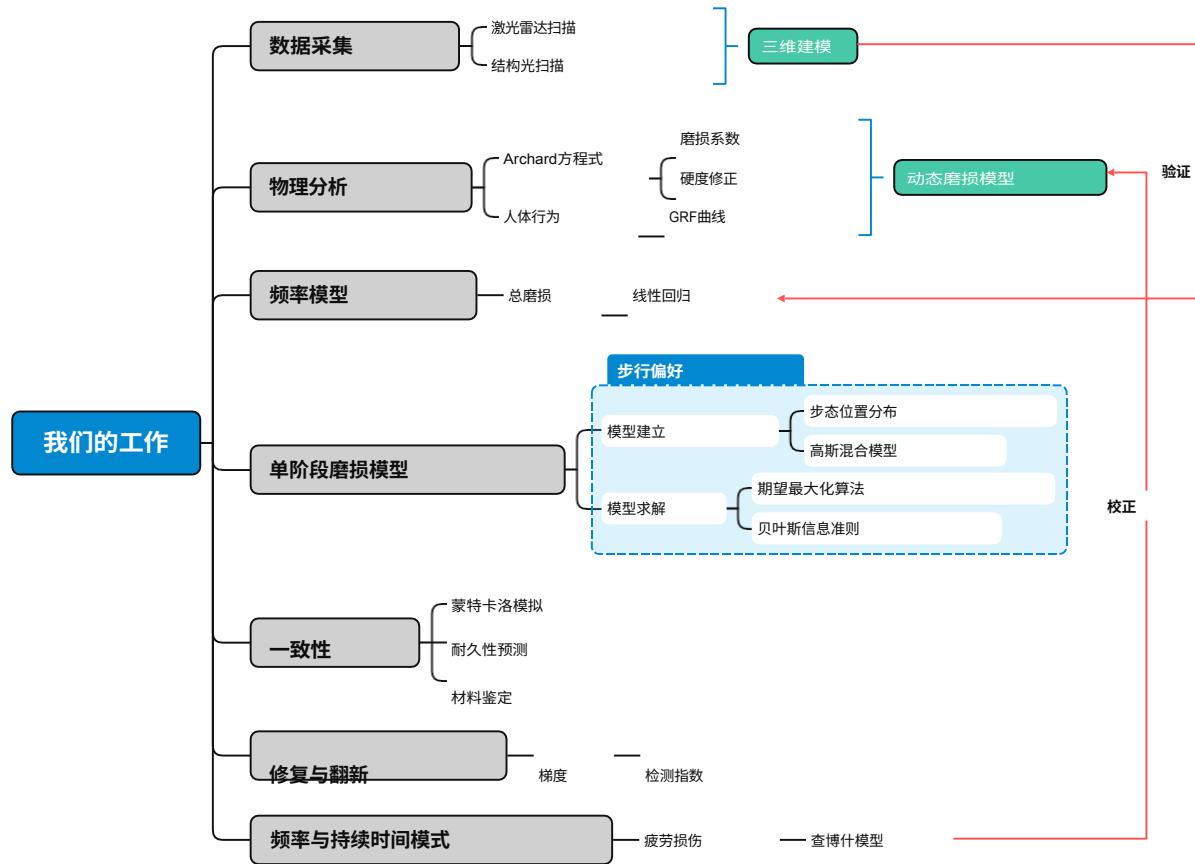
## 1.2 问题重述

基于上述背景，我们的目标是建立通用模型，协助建筑师与考古学家从楼梯磨损特征推断使用模式、使用频率及环境影响。该模型需解答以下问题：

- **使用频率与使用量：**确定楼梯的使用频率，包括是否频繁或偶尔被使用，以及使用者群体规模（大群体或小群体）。
- **方向与使用模式：**识别使用过程中是否存在对某一方向的偏好，并观察人们通常如何使用台阶（例如同时使用人数、排列队形）。

- **磨损一致性与材料来源：**验证磨损模式是否符合历史数据及基于材料来源的预期磨损情况，并评估是否曾进行过修复或翻新。
- **楼梯年龄与可靠性评估：**推测楼梯使用年限，并依据磨损特征验证该推测的准确性。

### 1.3 我们的工作



## 2 假设与论证

为简化问题，作出以下假设。

**假设2.1.** 楼梯每级台阶的初始材料特性（如硬度和密度）被假定为均匀，且不存在显著的质量差异。

**假设2.2.** 假设楼梯建造初始时表面平整，无初期磨损或施工不规则现象。

**假设2.3.** 人流在特定时期内被假定具有主导方向，而非大量人群同时双向流动。

**假设2.4.** 楼梯磨损主要源于长期重复的人流踩踏，而非短期剧烈损伤。

**假设2.5.** 假设楼梯使用者行为模式（如行走速度、步幅宽度）在楼梯使用历史中保持一致。

**假设2.6.** 假设未发生显著的极端环境变化。

**假设2.7.** 假定楼梯在历史中经历的任何维修或翻新均有限度，且未改变其主要结构特征或材料特性，或主要使用材料仅限于少数预定类型。

**假设2.8.** 楼梯人流分布遵循概率模型。

### 3 符号说明

表1：符号列表、定义及单位。

符号	定义	单位
$w, w$	磨损深度	m
$V_{磨损}$	磨损体积	$m^3$
$w$	体重	千克
$A$	表面积	$m^2$
$C$	接触面积	$m^2$
$P$	正常压力	Pa
$F$	正常负荷	N(牛顿)
$L$	滑动距离	m
$H$	硬度	Pa
$k, \alpha$	磨损系数	-
克	材料硬度修正	-
$T$	寿命	d
熔断器	使用频率	$d^{-1}$
$R$	修复检测指数	-
$D$	疲劳损伤	-
$n$	踩踏楼梯次数	-
$\mathbf{x}$	位置向量	-
$\pi$	不同高斯分布的权重	-
$\gamma$	责任	-
$I$	对数似然	-
$\varepsilon$	误差项	-

## 4 分析与建模

### 4.1 楼梯磨损数据采集

在楼梯磨损测量中，三维扫描技术被广泛应用于精准捕捉表面形态变化。作为获取三维数据的高精度方法，激光扫描技术可生成精细点云数据，精确测量楼梯表面磨损的深度与形态。这使得激光扫描成为长期监测楼梯磨损的重要工具，能够检测到细微的表面变化。此外，结构光扫描技术通过投射结构光图案并记录其变形，可生成高分辨率三维表面图像，助力研究人员分析使用过程中形成的台阶表面磨损特征[4]。图2展示了台阶磨损模式的三维扫描结果，图像左侧为台阶原始表面，右侧为三维扫描结果。

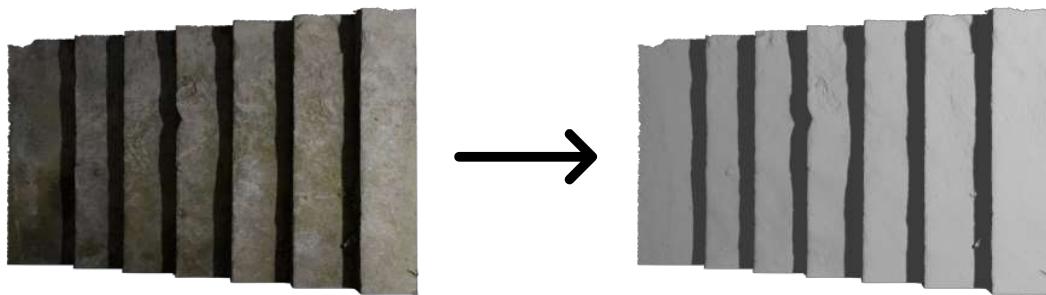


图2：楼梯磨损三维扫描图

在某些应用中，深度感应设备（如Kinect v2）可通过采集深度数据实现实时测量。此类设备能追踪位置变化，有效获取楼梯表面的三维信息，因此适用于进行基础楼梯磨损测量[5]。

### 4.2 基础物理磨损模型

#### 4.2.1 磨损理论概述

磨损可广义定义为固体表面因机械作用导致的材料渐进性剥离或变形。主要磨损机制包括粘附磨损、磨蚀磨损、疲劳磨损及腐蚀磨损。在石材楼梯场景中，磨蚀磨损是主导机制，源于鞋履与台阶表面的反复接触。理解磨损机制为磨损的定量与定性建模奠定基础。

#### 4.2.2 阿查德磨损模型及其应用

阿查德磨损定律[6]是量化磨损最广泛使用的模型之一。它为理解材料磨损提供了基础框架，描述了材料损耗体积与载荷、滑移距离及材料硬度的函数关系。其表达式为：

为负载、滑动距离和材料硬度的函数。其表达式为：

$$V_{\text{磨损}} = k \cdot \frac{F \cdot L}{H} \quad (1)$$

在楼梯磨损的背景下，正常负荷与使用楼梯的个体体重直接相关。滑动距离对应随时间累积的脚步轨迹。材料硬度反映楼梯材料的抗磨损能力。

在楼梯磨损分析的背景下，必须对阿查德模型进行调整，以考虑人流特性和材料特性的具体特征。由此得出扩展模型，其表达式为：

$$V_{\text{磨损}} = \alpha \cdot \frac{h}{H} \cdot g(M) \quad (2)$$

在此表达式中， $\alpha$ 代表材料磨损系数，类似于Archard模型中的磨损系数 $k$ 。不同材料的 $\alpha$ 值如下表所示。

表2：不同材料组合的磨损系数

材料组合	材料1	磨损系数
木材与金属	木材	0.20–0.60
木材与木材	木材	0.25–0.50
钢对钢	金属	0.80
铝与铝	金属	1.10–1.35
铜与钢	金属	0.53
木材与混凝土	混凝土	0.61
混凝土与橡胶	混凝土	0.6–0.85

$h$ 是反映行人行为变异性的人体特征参数，涵盖体重差异、步态差异及鞋履差异等因素，共同影响楼梯表面的压力分布。其表达式为：

$$h = \int \rho(w) \cdot P(w) \cdot C(w) \cdot L(w) dw \quad (3)$$

其中 $\rho(w)$ 为体重分布的概率密度函数，而

$P(w)$ 代表压力， $C(w)$ 代表接触面积， $L(w)$ 代表滑动距离，反映了行人动态引入的变异性。该函数通过考虑人体运动的随机性，对阿查德模型的载荷因子进行了优化。

最后， $g(M)$  是材料硬度修正函数，通过整合材料特性及温度、疲劳效应等环境因素来优化  $H$  的作用。其表达式为：

$$g(M) = \frac{\exp - \frac{H}{RT}}{\exp - \frac{H_0}{RT_0}} \quad (4)$$

其中  $H$  为材料硬度， $R$  为普适气体常数， $T$  为绝对温度。该项可针对材料特性与环境影响调整磨损模型，提升实际应用中的预测精度。

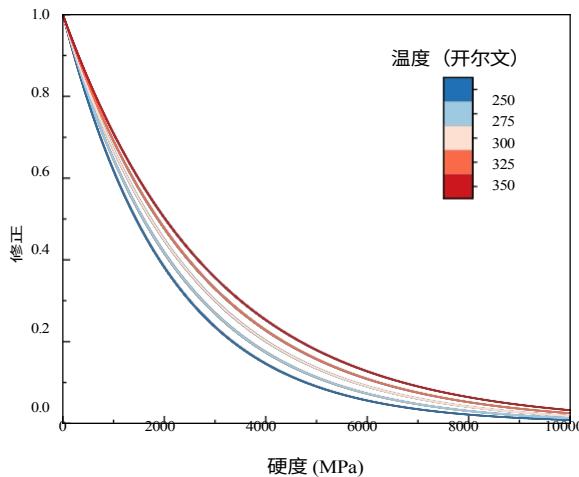


图3：不同温度下  $g(M)$  与  $H$ (MPa) 的关系。

图3展示了硬度与修正系数  $g(M)$  之间的非线性关系。随着硬度增加，修正系数  $g(M)$  显著降低，该趋势在所有测试温度下均一致。此外，温度升高似乎加速了修正系数的下降速率，表明温度对材料硬度及修正系数具有显著影响。此关系对于理解和预测材料在不同环境条件下的性能至关重要。

#### 4.2.3 单步磨损

为研究攀爬楼梯时作用于台阶表面的力，必须获取该过程中的**地面反作用力（GRF）** 曲线。该曲线反映人体移动时地面施加于足部的力，涵盖整个支撑期内垂直与水平方向的力分量。

测试参数依据Stüssi和Debrunner[7]提出的流程进行测量，该方法被应用于本研究全部数据集。所有力值均按体重进行标准化处理，每条曲线被划分为

两部分。随后在体中线两侧识别最大值，从而定义Z1（第一峰值）和Z3（第二峰值）（图4）。Z1出现在触地后的受力阶段，Z3则出现在蹬离阶段。在Z1与Z2之间还测量了最小值Z2，代表站立中期卸载状态。

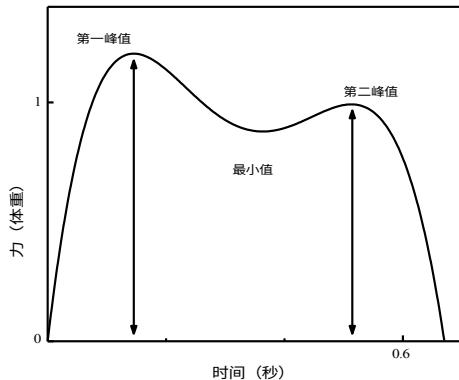


图4：标准地面反作用力曲线

为分析上下楼梯过程中的压力变化，我们从Stacoff的研究[8]中提取了相关地面反作用力曲线。该研究呈现了上行与下行楼梯运动的独特力学特征，突显了两种动作在力分布与强度上的差异。通过比较这些曲线，可识别楼梯攀爬各阶段特有的机械需求及负荷变化。这种对比对于理解不同楼梯攀爬任务如何影响作用于人体与楼梯表面的力至关重要。

表3：地面反作用力曲线参数均值。

参数	上楼梯		下楼梯	
	左侧	右侧	左	右
T(毫秒)	698.35	700.99	636.84	640.41
Z1(BW)	1.12	1.12	1.49	1.54
Z2(BW)	0.71	0.69	-	-
Z3(BW)	1.13	1.13	-	-

根据Stacoff的数据，下楼梯时垂直地面反作用力曲线仅呈现单峰形态，即不存在Z2和Z3峰值。表3展示了多次测试中检测到的关键参数均值。为分析不同方向造成的磨损差异，我们采用多项式拟合方法处理图5所示的多组实验GRF曲线。通过对实验数据进行多项式拟合，可获得平滑曲线，精确呈现时间与力的关系，从而更准确地解读实验结果并揭示数据深层规律。

时间与力之间的关系，从而更好地解释实验结果并洞察数据中的潜在模式。

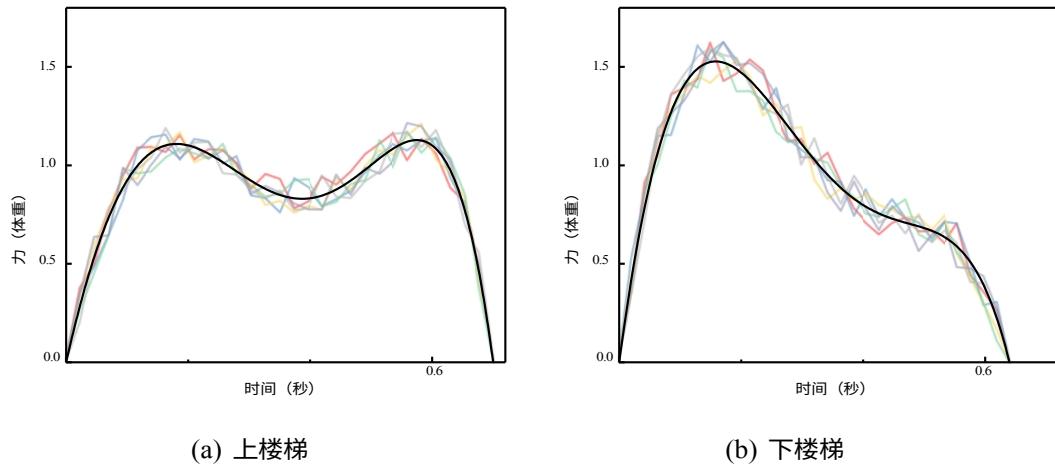


图5：不同方向的地面对作用力曲线。

通过对两个拟合函数  $G(t)$  进行积分，可分别获得上行和下行台阶的人体特征参数  $h$ 。

$$P \cdot C = \int_0^T G(t) dt \quad (5)$$

假设滑动距离与接触时间成正比，且滑动速度为每秒1厘米。根据式(3)，可得：

$$h = T \cdot v \cdot \int_0^T G(t) dt \quad (6)$$

通过将上升运动的高度  $h$  除以下降运动的高度  $h$ ，可得出同一楼梯上升与下降阶段的磨损比：

$$\frac{w(\text{上})}{w(\text{下})} = \frac{0.4335}{0.3804} \quad (7)$$

### 4.3 步行频率模型

#### 4.3.1 频率估计

在实际应用场景中，磨损体积与楼梯表面磨损深度直接相关。磨损深度提供了关键信息，揭示了因使用而被磨损的材料量。在频率分析过程中，我们通过基于整体磨损程度进行频率估算来简化流程，而非采用复杂的物理模型进行精细计算。

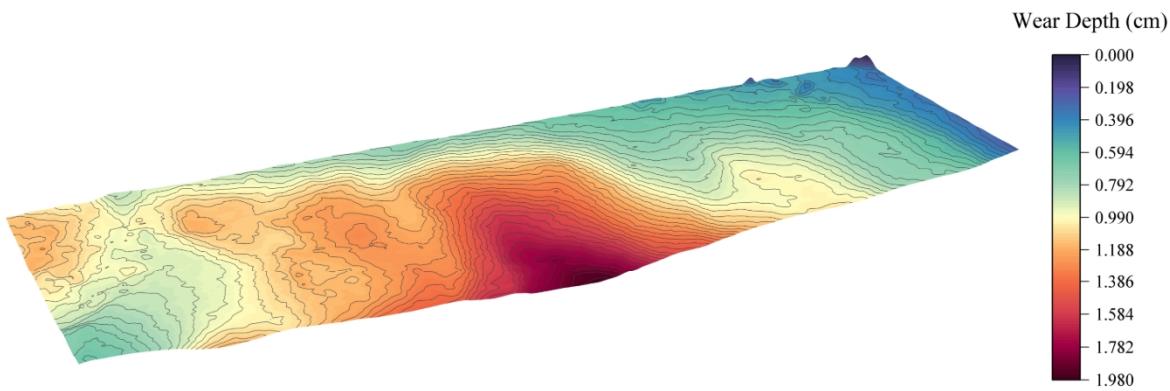


图6：激光雷达扫描的磨损表面。

总磨损体积 $V_{\text{wear}}$ 可表示为磨损深度 $W(x, y)$ 在楼梯表面积 $A$ 上的积分，如图6所示：在台阶表面积 $A$ 上的积分，如图6所示：

$$\iint_A W(x, y) dS \quad (8)$$

在我们的模型中，该值通过将每周期磨损体积、频率与台阶使用时间相乘计算得出。因此可解释为：

$$V_{\text{磨损, 总}} = V_{\text{磨损}} \cdot T \quad (9)$$

实际上，磨损体积与使用频率之间的关系会受到环境条件、用户行为及测量误差等因素的影响。为考虑这些因素，我们引入误差项 $\epsilon$ ，该项代表系统中的随机波动或不确定性。因此，包含误差项的模型变为：

$$V_{\text{wear,tot}} = V_{\text{wear}} \cdot f_{\text{use}} \cdot T + \epsilon \quad (10)$$

在频率分析中，我们通过估算整体磨损水平简化了流程，而非采用复杂的物理模型。该方法可快速完成初步评估，但其准确性需通过与实际磨损数据比对验证。定期检查楼梯实际磨损状况并收集现场数据，可校准模型结果并提升其可靠性。

#### 4.3.2 频率模型的验证

为验证该模型，我们在受控环境条件下使用花岗岩楼梯进行了实验。目标是计算 $h$ 和 $g(M)$ 的数值，并将模型的预测结果与实际磨损数据进行对比。

选择花岗岩作为研究对象，因其应用广泛且物理特性记录详实。环境温度维持在20°C至25°C之间。通过动作捕捉传感器记录行人特征参数，包括体重、步态及鞋履类型。

**计算 $h$ 值。**通过测量花岗岩硬度H=278 MPa及其环境依赖性，确定了 $g(M)$ 和 $\alpha$ 参数。根据实验数据，计算得出 $h$ 值为0.15，测得 $\alpha$ 值为0.74，而 $g(M)$ 在22°C环境下测得值为0.854。

22°C时测得 $g(M)$ 为0.854。

磨损体积 $V_{\text{磨损, 总}}$ 通过模型计算得出，并与通过3D扫描楼梯表面获得的实际测量值进行对比。我们可运用3D扫描技术获取楼梯的精细表面数据，从而对磨损模式进行更精准的分析。将扫描数据与模型预测的磨损区域进行比对，有助于进一步验证模型准确性并优化磨损预测流程。例如，在步行频率 $f_{\text{use}} = 52$ 次/天且总使用时长1647天的情况下，模型预测磨损体积为 $29.2 \text{ cm}^3$ ，而实际测量值为 $30.7 \text{ cm}^3$ 。相对误差约为4.89%（），该数值处于可接受范围内。

## 4.4 单级磨损模型

### 4.4.1 模型建立基础

在长楼梯上，人们在每个台阶上的行走模式几乎相同。此外，人们几乎不会接触楼梯的垂直表面。因此，单独考虑单个台阶的水平表面是合理的。

选取适当的笛卡尔坐标系 $xyz$ ，使楼梯顶面投影在 $xy$ 平面上形成区间： $[0, l] \times [0, w]$ ，其中 $l$ 和 $w$ 分别为楼梯长度与宽度。假设通过无损测量可获取磨损深度函数 $W : D \rightarrow R$ ，即 $(x, y) \mapsto W(x, y)$ 。

假设每次有人在楼梯任意位置踩踏造成的磨损深度 $w$ 保持恒定，则在位置 $(x, y)$ 处，磨损深度 $W$ 可表示为：

$$W(x, y) = w \cdot N(x, y) \quad (11)$$

其中 $N(x, y)$ 表示人们踩踏位置 $(x, y)$ 的总次数。

由于人们上下楼时施加的力大小不同，每次上下楼造成的磨损深度也各不相同。因此，磨损深度 $W$ 可定义为：

$$W(x, y) = w_{\text{上}} \cdot N_{\text{上}}(x, y) + w_{\text{下}} \cdot N_{\text{下}}(x, y) \quad (12)$$

### 4.4.2 $N_{\text{up}}$ 与 $N_{\text{down}}$ 的后续处理

人们上楼时脚落的位置看似随机，实则存在某种规律。例如，多数人更倾向于将左脚踩在台阶左中位置而非角落。

不妨设 $N_{up}$ 为实际踏上 $(x, y)$ 位置的人数。对于楼梯顶面某一点 $(x, y)$ , 当一人经过该楼梯段时,  $(x, y)$ 点可能被踩踏也可能未被踩踏。我们用随机变量序列  $X_{(i)}(n)$  表示当总计 $n_{up}$ 人上楼时, 第*i*个人是否踩踏 $(x, y)$ 的结果。具体而言:

$$\begin{aligned} X_i &= 1 && (x, y) \text{ 被踩踏} \\ X_i &= 0 && (x, y) \text{ 未被踩踏} \end{aligned} \quad (13)$$

若满足以下两个假设:

**假设4.1.**  $\{X_i\}_{i=1}^n$  服从独立同分布, 其中 $P(X_i = 1) = p_{up}(x, y)$ 。

**假设4.2.**  $n$  足够大, 即已有足够多的人走过这段楼梯。

根据大数定律,  $X_i$  以概率收敛于  $\bar{EX}_i$ 。为简化起见:

$$N_{up} = n \bar{X}_i = n_{up} \bar{EX}_i = n_{up} \cdot p_{up}(x, y) \quad (14)$$

同理,  $N_{down}$  具有相同形式。因此,

$$W(x, y) = w_{up} n_{up} \cdot p_{up}(x, y) + w_{down} n_{down} \cdot p_{down}(x, y) \quad (15)$$

#### 4.4.3 踏上 $(x, y)$ 点的概率分布

人们行走楼梯时, 目标是寻找舒适省力的落脚点, 这导致足部位置的概率分布呈现一定集中度。然而受腿长差异、步态习惯或身体轻微不对称等因素影响, 每脚步掌的精确位置会产生变化 (如图7所示)。因此磨损深度分布 (如图8所示) 呈现出与脚掌位置分布相似的特征。

为简化模型, 我们假设每次踏上台阶的概率分布遵循二维联合高斯分布。由于每人拥有双足且可能存在多人并行, 该概率分布实为两个或多个联合高斯分布的混合:

$$p_{up}(x, y) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k N(x/\mu_i, \Sigma_i) \quad (16)$$

其中

$$N(x/\mu_i, \Sigma_i) = \frac{1}{2\pi|\Sigma_i|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i) \right] \quad (17)$$

$\mathbf{x} = (x, y)^T$ , 若仅一人可通过楼梯则 $k=2$ , 若多人可同时通行则累加。

于是我们得到：

$$W(x, y) = \frac{1}{k} w_{up} n_{up} \sum_{i=1}^k N(x, y | \mu_i, \Sigma_i) + w_{down} n_{down} \sum_{i=1}^k N(x, y | \mu_i, \Sigma_i) \quad (18)$$

由于  $n_{up}$  或  $n_{down}$  可能存在微小差异, 引入误差项  $\epsilon$ 。因此最终模型为:

$$W(x, y) = \frac{1}{k} w_{up} \sum_{i=1}^k (n_{up} + \epsilon_i) \cdot N(x, y | \mu_{(i)}, \Sigma_{(i)}) + w_{down} \sum_{i=1}^k (n_{down} + \epsilon_i) \cdot N(x, y | \mu_{(i)}, \Sigma_{(i)}) \quad (19)$$

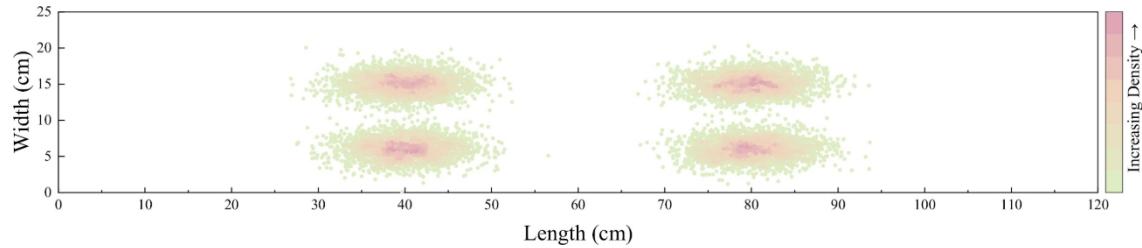


图7：脚部踩踏位置分布图。

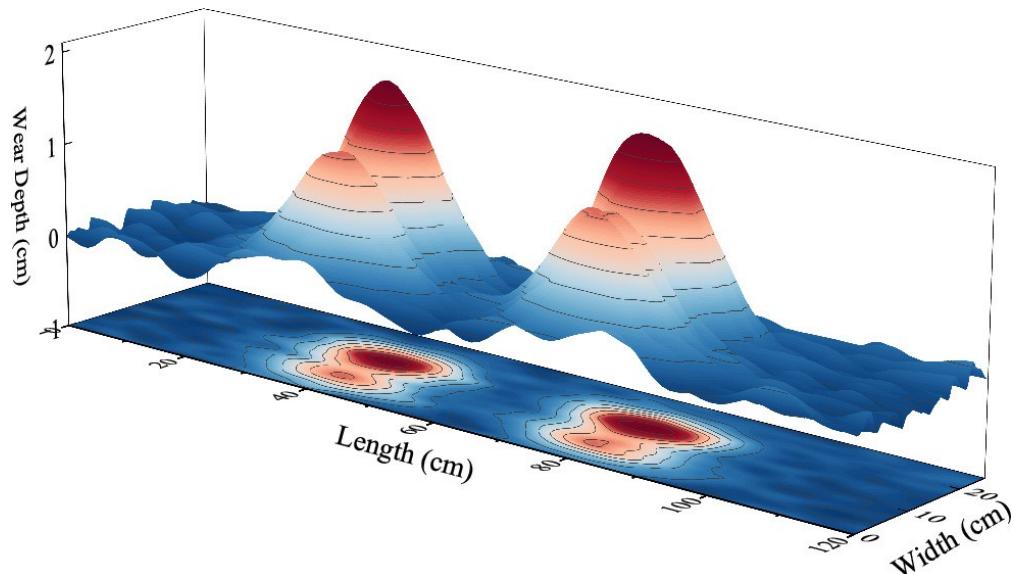


图8：磨损深度分布

#### 4.4.4 模型求解

本模型中需求解的参数为:  $k$ 、 $n_{up}$ 、 $n_{down}$ 、 $\mu$ 、 $\Sigma$ 。  
 $w_{up}$ ,  $w_{down}$  的数值可通过物理分析获得。

由于  $W(x, y)$  与高斯混合分布具有仿射等价性, 首先可将  $W$  仿射变换为概率分布:

$$p_{\text{W}}(x, y) = \iint_D \frac{W(x, y)}{\iint_D W(x, y) dx dy} = \sum_{i=1}^k \pi_i N(x, y | \mu_i, \Sigma_i) \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} \pi_i &= \frac{\iint_D W_{\text{up}}(n_{\text{up}} + \varepsilon_i)}{\iint_D W(x, y) dx dy} \quad 1 \leq i \leq k, \\ \iint_D W(x, y) dx dy &= \iint_D W_{\text{down}}(n_{\text{down}} + \varepsilon_i) \quad k < i \leq 2k \\ \iint_D W(x, y) dx dy &= k \end{aligned} \quad (21)$$

$W(x, y) dx dy$  可通过程序离散计算。然后, 通过求解该模型可

归结为求解参数  $\pi_i$ 、 $\mu_i$ 、 $\Sigma_i$  和  $k$ 。

在假设  $k$  值可获取的前提下, 期望最大化 (EM) 算法能够有效解决此问题。

首先随机初始化  $\pi_i$ 、 $\mu_i$ 、 $\Sigma_i$ 。随后计算每个数据点  $\{x_m\}_{m=1}^M$  在模型 M 中的责任值  $\gamma_{(m,i)}$ 。  
 $\{x_m\}_{m=1}^M = \{(x_m, y_m)^T\}_{m=1}^M$  通过:

$$\gamma_{(m,i)} = \frac{\pi_i \cdot N(x_m | \mu_i, \Sigma_i)}{\pi_i \cdot N(x_m | \mu_i, \Sigma_i)} \quad (22)$$

分别通过以下方式更新  $\pi_i$ 、 $\mu_i$ 、 $\Sigma_i$

:

$$\pi_i = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \gamma_{m,i} \quad (23)$$

$$\mu_i (=) \frac{\sum_{m=1}^M \gamma_{m,i} x_m}{\sum_{m=1}^M \gamma_{m,i}} \quad (24)$$

$$\Sigma_i = \frac{\sum_{m=1}^M \gamma_{m,i} (x_m - \mu_i)(x_m - \mu_i)^T}{\sum_{m=1}^M \gamma_{m,i}} \quad (25)$$

根据上述更新后的参数计算对数似然值:

$$I = \log \prod_{m=1}^M \sum_{i=1}^{2k} \pi_i \cdot N(x_m | \mu_i, \Sigma_i) \quad (26)$$

若迭代间对数似然函数的变化值小于预设阈值（例如  $\epsilon$ ），则表明已达到最大值，此时可获得  $\pi_i$ 、 $\mu_i$ 、 $\Sigma_i$  的最优解。

一旦  $\pi_i$  的值可获取，

$$\frac{n_{\text{up}} + \varepsilon_i}{w_{\text{up}}} = \frac{\pi_i k}{\iint_D W(x, y) dx dy, n_{\text{向下}}} \quad + \varepsilon_i = \frac{\pi_i k}{w_{\text{down}}} \iint_D W(x, y) dx dy \quad (27)$$

误差项  $\varepsilon_i$  可通过回归分析分别消除。由此可得楼梯使用者倾向的特定通行方向为：

- 若  $n_{\text{上}} > n_{\text{下}}$ ，则为上楼；
- 若  $n_{\text{上}} < n_{\text{下}}$ ，则为下楼。

然而，上述求解过程基于  $k$  的特定取值。为确定  $k$  的值，我们将采用贝叶斯信息准则（BIC）：

$$\text{BIC} = p \ln M - 2I \quad (28)$$

其中  $p$  为参数总数， $M$  为数据点总数，为对数似然函数的最大化值。

初始阶段，我们设定  $k$  值的合理区间  $I$ ，例如  $1 \leq k \leq 10$ ，并针对  $k$  的每个可能取值计算 BIC。随后，

$$k = \underset{k \in I}{\text{最大似然比最小值的极值}} \quad (29)$$

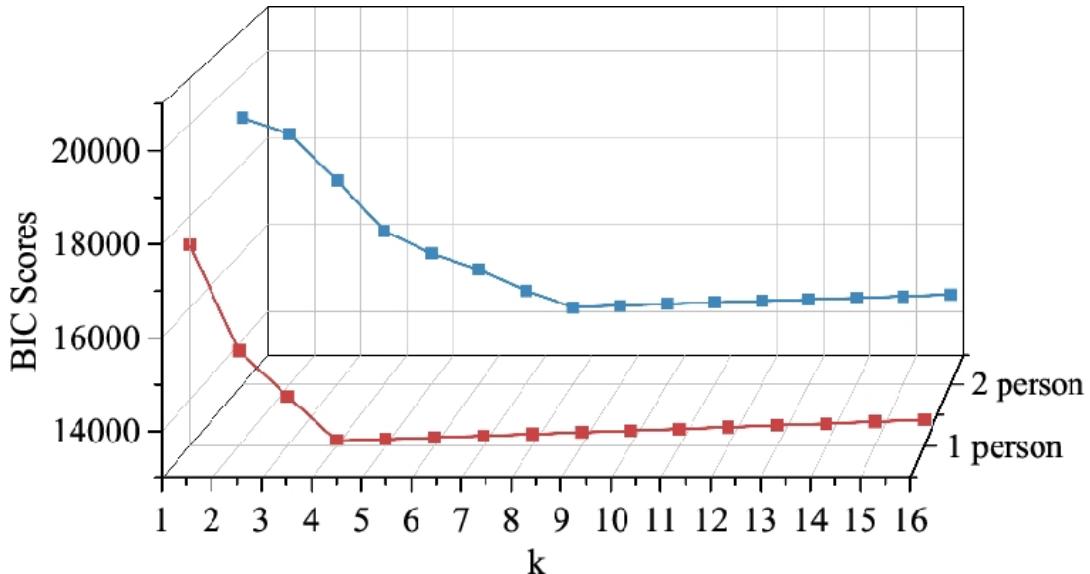


图9：当同时使用楼梯的人数不同时， 的BIC评分与  $k$  的关系。

由于每人拥有两只脚，同时使用楼梯的人数为 $k$ 。例如在图9中，当1或2人通过楼梯时， $k$ 值分别降至最小值4或8。

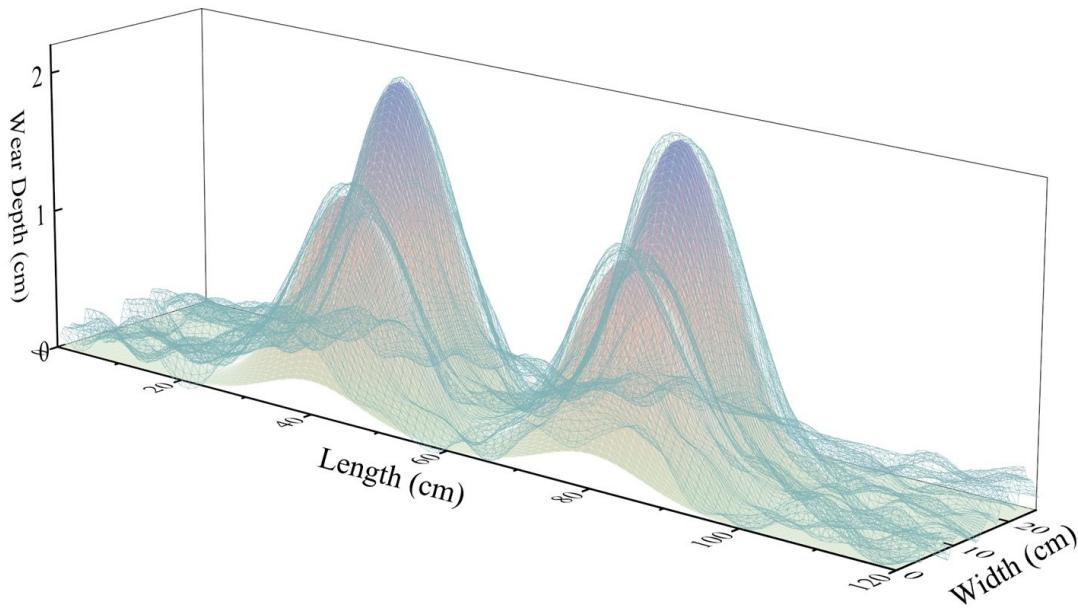


图10：磨损深度的高斯混合模型拟合

图10展示了运用上述方法拟合图8的实例。

## 4.5 磨损与可用信息的一致性

### 4.5.1 磨损与可用信息的一致性

考古学家通过对比台阶磨损程度与建筑年代来验证历史记录。轻微磨损可能表明使用频率较低，而特定区域的集中磨损则暗示这些部分使用更为频繁。通过详细研究磨损模式，考古学家可判断其是否符合已知的日常活动。若台阶曾是主要通道，则应可见显著磨损痕迹。地层数据、磨损率计算及表面化学分析可帮助确定不同时期的使用强度，并验证现存的历史背景。通过这些分析，考古学家能全面考察台阶磨损情况，评估其是否符合建筑的历史沿革与使用模式。

### 4.5.2 蒙特卡洛模拟

蒙特卡洛模拟[9]在建模复杂随机系统方面尤为有效，因其能捕捉磨损等过程固有的随机性和变异性。我们选择蒙特卡洛模拟进行楼梯踏板磨损分析，是因为它能建模那些难以或无法推导解析解的复杂系统。与提供单一结果的确定性方法不同，蒙特卡洛方法提供潜在结果的分布，从而更准确地反映磨损情况——该分布考虑了行人流量和环境条件等因素。

潜在结果分布，从而更精确地呈现考虑行人流量和环境条件等因素的磨损情况。

为验证该方法的有效性，我们实施了如算法1所示的详细蒙特卡罗模拟流程。通过构建楼梯踏板磨损的随机模型，我们生成大量模拟场景，以全面评估不同条件下的磨损特性。

---

### 算法1：楼梯磨损蒙特卡洛模拟

---

**输入：** $\tau$ : 总模拟时间  
 $l, w$ : 楼梯长度与宽度  
 $\alpha, H, g$ : 材料磨损系数、硬度及修正因子  
 $N$ : 每次模拟间隔的人数  
 $\mu_w, \sigma_w$ : 平均体重与体重标准差  
 $\mu_n, \sigma_n$ : 同时使用楼梯的人数均值与标准差  
 $p_{up}$ : 上楼概率  
**输出：**磨损值: 楼梯磨损值

```

1 wear ← [l, w];
2 for time ← 0 to T do
3   for person ← 1 至 N 循环
4     权重 ← NormalDistribution( $\mu_w, \sigma_w$ );
5     并行 ← 正态分布( $\mu_n, \sigma_n$ );
6     如果 Random() <  $p_{up}$  则
7       | 方向 ← UP;
8     否则
9       | 方向 ← 向下;
10    结束
11    正常力 ← 地面反作用力(重量, 方向);
12    滑动距离 ← 滑动长度(重量, 方向);
13    h ← 正向力 · 滑动距离
14    ( $x, y$ ) ← 位置生成器(方向, 平行);
15    磨损[ $x, y$ ] ← 磨损[ $x, y$ ] +  $\alpha \times \frac{h}{H} \times g_H$ 
16 end
17 结束

```

---

## 4.6 楼梯耐久性预测

基于上述楼梯磨损模型，我们可以预测楼梯的剩余使用寿命。该模型综合考虑了多种因素，包括材料磨损系数、使用频率与分布情况，以及使用者施加的力。通过模拟楼梯与使用者的交互作用，我们可以估算磨损速率，并计算楼梯表面达到关键劣化程度前的剩余时间。

假设4.3：当最大踏步深度达到

磨损形成的凹坑深度达到台阶高度时，即达到该阈值。该阈值基于台阶的结构完整性设定——当凹坑深度达到此值时，将危及台阶的功能性与安全性。一旦磨损深度达到此临界值，该台阶即被视为无法使用，需进行更换或维修。

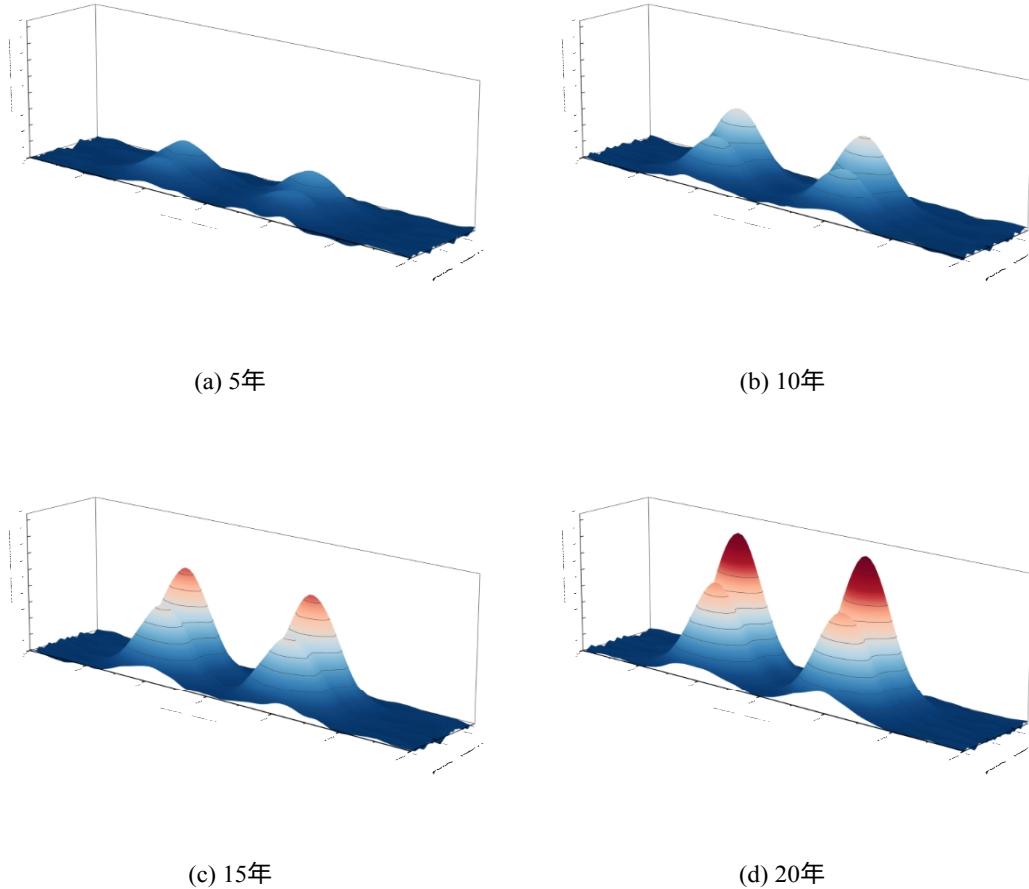


图11：随时间推移的阶梯磨损演变过程。

图11展示了在磨损模型下楼梯的磨损演变过程，呈现了使用5年、10年、15年及20年后的变化。结果表明，随着时间推移，由于使用模式的累积效应，磨损深度持续增加。经20年使用后，最大磨损深度已接近台阶高度，验证了模型对楼梯使用寿命的预测。这为楼梯何时需要维护或更换提供了定量评估依据，以确保其持续功能性与安全性（）。

#### 4.7 维修与翻新检查

老旧楼梯，尤其是历史建筑中的楼梯，常因岁月侵蚀而需要维修或翻新[10]。随着楼梯随时间推移逐渐老化，翻新工程对于保障安全及维持结构完整性至关重要。判断楼梯是否曾经历过维修或改造，对于评估其当前状态及预测未来使用寿命具有重要意义。

判断楼梯是否曾经历过修复或翻新，对于评估其当前状况及预测未来使用寿命至关重要。

自然磨损会因长期使用在表面形成渐进且均匀的坡度变化。而修复过程中的材料替换或表面重铺则会导致坡度突变，破坏自然形成的纹理。表面坡度 $w(x,y)$ 的计算公式为：

$$S(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x}^2 + \frac{\partial w}{\partial y}^2 \quad (30)$$

其中  $\frac{\partial w}{\partial x}$  以及  $\frac{\partial w}{\partial y}$  分别表示表面高度在 $x$ -和 $y$ -方向上的偏导数。  
方向。  
 $\partial y$

修复检测指数 $R(x, y)$ 现可仅通过梯度及其局部偏差定义：

$$R(x, y) = S(x, y) - \bar{S}_{local}(x, y) \quad (31)$$

其中 $\bar{S}_{local}(x, y)$ 表示 $(x, y)$ 点局部邻域内的平均坡度。

$R(x, y)$ 量化了每个点上梯度与周边区域的偏差。自然磨损区域的梯度相对一致，而修复区域会引入梯度的突变，导致偏差增大。

该方法通过聚焦梯度简化检测过程，减少冗余并优化模型。它通过捕捉表面纹理与变化来区分修复造成的破坏，保持高精度。利用单一梯度指标，可基于表面连续性中断有效识别修复区域。该方法计算效率高、准确性强，为修复识别提供实用结果。

## 4.8 材料来源鉴定

为确定台阶所用材料的来源，磨损系数分析首先对疑似采石场或伐木场的材料进行受控摩擦学测试，以测定其磨损系数（ $\alpha$ ）。对于现有台阶，可参照基础磨损方程（2）计算有效磨损系数（ $\alpha_e$ ）。

统计一致性检验采用零假设 $H_0: K = K_e$ ，与备择假设 $H_1:$

$K \neq K_e$ 。t检验统计量为：

$$t = \frac{K - K_e}{s / \sqrt{n}} \quad (32)$$

对于非正态分布，柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫检验可用于分布比较：

$$D = \sup_x |F_1(x) - F_2(x)| \quad (33)$$

该框架可在考虑测量误差与环境效应的前提下，实现源材料与考古样本的定量比较。

环境影响。结果应结合其他考古证据进行解读，以实现全面的材料来源验证。

## 4.9 频率与持续时间模式

### 4.9.1 查博什模型

在结构工程中，**疲劳**损伤是关键考量因素，尤其当构件承受重复载荷时。对于楼梯结构，常见两种载荷场景：**短时高频踏步与长时低频踏步**，二者对结构的影响方式截然不同[11]。前者引发快速高幅值冲击，可能导致局部突发性损伤；后者则涉及持续性低幅值应力，随时间累积作用。理解这两种踏步方式如何导致疲劳损伤，对评估楼梯的长期耐久性至关重要。本节旨在探讨不同载荷条件下的疲劳损伤机制。

**Chaboche模型**通过多重背应力分量描述材料的非线性硬化行为。屈服函数与背应力演化方程是该模型的核心要素：

$$f = \frac{r}{3} - \frac{1}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{X}) : (\mathbf{s} - \mathbf{X}) - \sigma_y = 0 \quad (34)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \frac{2}{3} C_i \dot{\epsilon}_p - \gamma_i \mathbf{X}_i \mathbf{p}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (35)$$

此处 $\mathbf{s}$ 为偏应力张量，**定义为** $\mathbf{s} = \sigma - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$ 。项 $\mathbf{X}_i$ 代表第*i*个背应力分量，用于表征材料的硬化状态。屈服应力记作 $\sigma_y$ ，而 $C_i$ 和 $\gamma_i$ 则是控制硬化速率与动态恢复的材料参数。塑性应变率张量为 $\dot{\epsilon}_p$ ，而

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{3} \dot{\mathbf{p}} = \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_p : \dot{\epsilon}_p$$

Chaboche模型的损伤演化方程由以下表达式给出：

$$\dot{D} = \frac{Y}{S} p^s \exp(-p^s \sigma_H m) \quad (36)$$

在此方程中， $Y$ 代表弹性应变能密度，其计算公式为 $Y = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$ 。参数 $S$ 、 $s$ 和 $m$ 为材料特有的损伤参数。项 $\sigma_H$ 表示静水压力，定义为 $\sigma_H = \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ 。麦考利括号 $\langle \cdot \rangle$ 确保仅考虑正值。

3

### 4.9.2 参数校准与损伤计算

为将Chaboche模型应用于阶梯磨损分析，假设阶梯材料为混凝土。材料参数基于单轴循环试验进行校准：

- 弹性参数：杨氏模量  $E=30\text{GPa}$ , 泊松比  $\nu=0.2$ 。
- 塑性参数：初始屈服应力  $\sigma_y=20\text{ MPa}$ 。
- 背应力分量：采用三个分量，参数设定为  $C_1=1000\text{ MPa}$ ,  $\gamma_1=100$ ,  $C_2=500\text{ MPa}$ ,  $\gamma_2=50$ ,  $C_3=200\text{ MPa}$ ,  $\gamma_3=10$ 。
- 损伤参数： $s=0.1\text{ MPa}^{-1}$ ,  $s=2$ ,  $m=1$ 。

载荷条件定义如下：

- 单步应力：体重70千克的人体接触面积为  $0.02\text{平方米}$ ，产生的静态应力  $\sigma_{\text{静态}}=\frac{70\times9\times(0.02)\times(8)}{0.02}=34.3\text{千帕}$ 。
- 动态效应：短期密集人流可能产生冲击应力，假设为静态应力的两倍 ( $\sigma_{\text{动态}}=68.6\text{ kPa}$ )。
- 时间分布：考虑两种场景——分散使用（1000人均匀分布于10小时）和集中使用（1000人集中于1小时）。

对于分布式使用，应力历史由每小时100个步骤组成，每个步骤的应力为  $\sigma_{\text{静态}}=34.3\text{ kPa}$ ，持续10小时。每个步骤的等效塑性应变增量

假定为  $\Delta p=1\times10^{-5}$ 。每循环损伤增量计算如下：

$$\Delta D = \frac{Y}{S} \cdot \Delta p \cdot \langle \sigma(H) \rangle^m$$

对于静载荷，弹性应变能密度Y为：

$$Y = \frac{\sigma_{\text{静态}}^2}{2E} = \frac{(34.3 \times 10^3)^2}{2 \times 30 \times 10^9} \approx 1.96 \times 10^{-3} \text{ MPa}$$

代入数值后，每步损伤增量为：

$$\Delta D = \frac{1.96 \times 10^{-3}}{0.1}^2 \times 1 \times 10^{-5} \times 34.3 \approx 2.3 \times 10^{-9}$$

分布式使用的总损伤为：

$$D_{\text{分散}} = 1000 \times 2.3 \times 10^{-9} = 2.3 \times 10^{-6}$$

集中使用时，应力历史包含1小时内的1000个步骤。按相同样步计算，集中使用的总损伤为：  
：

$$D_{\text{集中}} = 1000 \times 1.1 \times 10^{-7} = 1.1 \times 10^{-4}$$

集中使用与分布式使用的损伤比约为48，表明短期使用显著加速阶梯磨损。

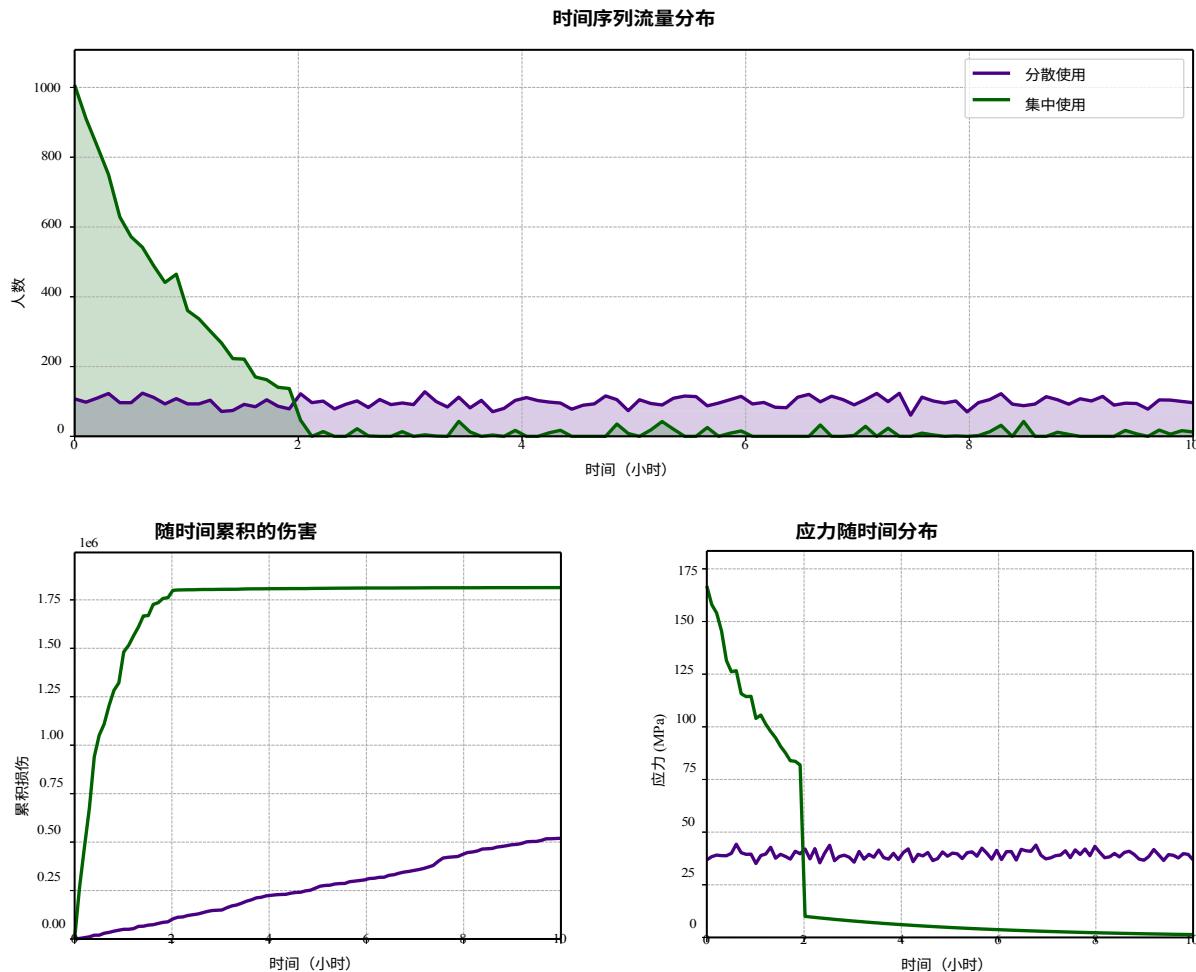


图12：查博什模型。

Chaboche模型通过非线性硬化（背应力演化）和动态损伤放大效应捕捉了这一现象。研究结果表明该模型能够量化不同使用模式对材料退化的影响。

## 5 模型评估与进一步讨论

### 5.1 模型的优势与局限

该模型融合物理磨损理论、概率性行人行为及环境因素来预测楼梯磨损。其核心优势在于将阿查德磨损定律与随机人群动力学相结合，实现了理论严谨性与实践适用性的平衡。蒙特卡洛模拟进一步增强了模型捕捉行人流不确定性与环境变异性的

阿查德磨损定律与随机人体动力学，实现了理论严谨性与实践适用性的平衡。蒙特卡洛模拟进一步增强了模型捕捉行人流不确定性与环境变异性的能力。花岗岩台阶的验证实验显示相对误差仅为4.89%，表明在受控条件下具有高可靠性。

然而，必须承认该模型存在若干局限性。首先，模型假设材料特性均匀且行人行为理想化。现实中，材料异质性和多样化的使用者行为可能导致偏差。其次，湿度和冻融循环等环境因素虽通过修正因子 $g(M)$ 进行简化处理，但其对材料疲劳的瞬态影响未能充分体现动态特性。第三，修复检测方法依赖梯度分析，在高度不规则磨损模式中可能难以识别细微修复痕迹。

## 5.2 未来方向

1. **材料特异性适应：**扩展模型以考虑各向异性材料（如层状石材或木纹）。例如，可根据材料微观结构使磨损系数（ $\alpha$ ）呈现空间变化。
2. **动态环境集成：**开发 $g(M)$ 的时间依赖函数，以反映季节性湿度波动或长期气候趋势，从而提高户外楼梯的预测精度。
3. **多尺度建模：**将宏观尺度磨损预测与微观尺度摩擦学仿真相结合，以更准确地捕捉局部磨损机制，例如磨料颗粒相互作用。

## 6 结论

我们提出阶梯式预测模型以精确评估磨损模式。经三维扫描数据验证的模型成功解决了相关任务，为考古研究提供了宝贵工具。

## 参考文献

- [1] A. Figueiredo 与 J. Ribeiro. 历史阶梯磨损模式及其对考古研究的意义。《考古科学杂志》，106:58–67, 2019.
- [2] J. Williams. 《磨损与表面损伤》. 剑桥大学出版社, 2005.
- [3] R. 克雷斯波与S. 肯尼. 《楼梯预测模型在可靠性与风险分析中的应用》. 《国际建筑遗产期刊》，22(1):1–15, 2018.
- [4] 郑泽, 钟刚, 邓辉. 六足机器人爬楼梯的三维扫描楼梯检测方法. 2016年IEEE机电一体化与自动化国际会议 (ICMA)，第1450–1455页, 2016年.

- [5] 小川敦、三田明、A. Yorozu、M. 高桥. 基于深度数据的无标记膝关节位置测量技术在楼梯行走中的应用. *传感器 (瑞士巴塞尔)*, 17(11):2698, 2017.
- [6] J. F. Archard. 平面接触与摩擦. *应用物理学杂志*, 24(8):981–988, 1953年8月.
- [7] E. Stüssi 与 H. U. Debrunner. 人体步态参数分析. *生物医学工程 / Biomedizinische Technik*, 25(s1):222–224, 1980.
- [8] 亚历克斯·斯塔科夫、克里斯蒂安·迪齐、格哈德·吕德、埃德加·施图西与伊内斯·A·克拉默斯-德·克尔万. 《楼梯地面反作用力：楼梯倾角与年龄的影响》. 《步态姿势》, 21(1):24–38, 2005.
- [9] D. 兰道与K. 宾德尔。《统计物理学中的蒙特卡洛模拟指南》。剑桥大学出版社，2021年。
- [10] J.W.P.坎贝尔与M.塔顿。《楼梯：历史、修复与保护》。泰勒与弗朗西斯出版社，2013年。
- [11] B. 塞尔丰坦与F. 科林。《岩石材料的循环与疲劳行为：综述、解释与研究展望》。《岩石力学与岩石工程》, 51(2):391–414, 2018年2月。