# I. 단일 변수의 함수

## 1 함수의 미분

### 1. 함수(Function)

1) 함수 $y=f(x)$의 정의

(1) $x$를 함수 $y=f(x)$의 독립변수라고 한다.

(2) $y$를 함수 $y=f(x)$의 종속변수라고 한다.

(3) 독립변수 $x$와 종속변수 $y$를 대응시키는 관계를 함수라고 한다.

2) 함수의 대응(correspondence)

(1) 독립변수의 개수에 따라

① 단일변수함수 : 독립변수가 하나인 경우를 단일변수함수라 한다.

② 다변수함수 : 독립변수가 여러 개인 경우를 다변수함수라 한다.

(2) 종속변수의 개수에 따라

① 단일값함수(single-valued function) : 종속 변수가 1개인 경우

② 다중값함수(multi-valued function) : 종속 변수가 여러 개인 경우

3) 다항함수와 초월함수

(1) 대수함수(polynomial functions)

: 유한 개의 다항 연산 기호(+, −, ×, ÷)로 기술

(2) 초월함수(transcendental functions)

: 대수함수가 아닌 나머지 함수들 ▷ 삼각함수, 지수함수, 로그함수

**예제** 어떤 계의 정준분배함수 $Q=\sum_i e^{-E_i/kT}$로 기술된다. $U$와 $A$에 대한 식을 통해 엔트로피에 대한 깁스 표현을 유도하라.

$$U=\frac{\sum_i E_i e^{-E_i/kT}}{Q} \qquad A=-kT\ln Q$$

4) 우함수와 기함수

(1) 우함수(even function) : $f(-x)=f(x)$ ▷ $y$축 대칭

(2) 기함수(odd function) : $f(-x)=-f(x)$ ▷ 원점 대칭

## 2. 연속성(Continuity)

1) 극한 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$의 정의

(1) 개괄적인 정의 : $x$가 $a$를 향해 한없이 가까이 다가갈 때 $f(x)$가 다가가는 값을 $\alpha$라고 한다.

(2) 엄밀한 정의 : 모든 양수 $\epsilon$에 대하여 명제

$$0<|x-a|<\delta => |f(x)-\alpha|<\epsilon$$

을 만족하는 양수 $\delta$가 존재한다.

2) 연속의 정의 : $\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=f(a)$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속

## 3. 함수의 미분(Differentiation)

**예제** 함수 $y=f(x)=x^2e^{-x}\cos x$를 미분하시오.

**예제** $f(x)=e^{-\sqrt{x^2+a^2}}$일 때 $f'(x)$를 구하시오. (단, $a$는 상수이다.)

## 4. 함수의 극값(Local Maximum and Minimum)

(1) 임계점 : $f'(x)=0$인 점들은 함수 $f(x)$의 임계점(critical point)

(2) 극값 : 실수 $a$에 대하여 $f(a)$가 최대/최솟값이 되도록 하는 어떤 개구간이 존재할 때 $f(a)$를 극대(local maxima)/극소(local minima)라고 한다.

(3) 이계도함수 테스트(2nd derivative test)

① $f'(c)=0$이고 $f''(c)<0$이면 $x=c$에서 $f(x)$는 극대이다.

② $f'(c)=0$이고 $f''(c)>0$이면 $x=c$에서 $f(x)$는 극소이다.

③ $f'(c)=f''(c)=0$이면 추가적인 분석이 요구된다.

(4) 변곡점(inflection point) : $f''(c)=0$이고 $f''(x)$의 부호가 $x=c$에서 변하면 $x=c$일 때 함수 $y=f(x)$는 변곡점을 갖는다.

# 2 함수의 적분

## 1. 적분의 정의

(1) 노름(norm)과 파티션(partition)의 정의 :

어떤 열린구간 $(a, b)$ 안에 존재하는 $n$개의 수

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$를 생각하면 구간을 총 $n$개로 쪼갤 수 있다. 이때 택한 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$을 구간 $(a, b)$의 파티션이라고 한다. 이때 각 구간의 길이 중 가장 짧은 것을 파티션의 노름(norm)이라고 하며, $\| P \|$와 같이 쓴다.

(2) 구간 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$과 구간에 속하는 원소 $\xi_i$에 대하여 리만 합은 다음과 같이 정의한다. ▷ 정적분의 정의(definition of definite integral)

$$\lim_{\| P \| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

## 2. 미적분학의 기본 정리(Fundamental Theorem of Calculus)

어떤 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$이 연속이다.

(1) 함수 $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \int_a^x f(t)dt$인 경우 $g'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

(2) $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ ▷ 따름정리 : $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$

## 3. 적분의 실제

**예제** 다음 적분을 구하시오. (1) $\int_0^2 xe^{-x^2}dx$ (2) $\int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta$

**예제** 다음 함수가 수렴할 조건을 구하시오.

$$(1)\ \int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx \quad (2)\ \int_a^\infty e^{-sx}dx \quad (3)\ \int_1^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^6+1}}dx$$