III. 적분으로 정의된 함수

1 적분으로 정의된 함수

1. 감마 함수(Gamma function)

1) 감마함수의 정의

(1) 계승(factorial)의 정의 : n개의 확률변수가 n개의 상태에 하나씩 배당되는 경우의 수 = ${}_n\mathrm{P}_1 = n!$

(2) 감마함수(Gamma function) : 감마함수는 계승함수의 정의역으로 복소수까지 확장한 것으로 정의한다. (단, 실수부는 양수)

> 다음 함수를 감마함수라 한다: $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} z^{x-2} e^{-z} dx$ (단, $x > 0$)

2) 감마함수의 특성

(1) 감마함수와 계승의 연관성

① $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} z^{x-1} e^{-z} dz$에서 부분적분하면

$$\Gamma(x) = (x-1)\int_0^{\infty} z^{x-2} e^{-z} = (x-1)\Gamma(x-1)$$

② 따라서 감마함수는 다음의 귀납적 성질을 갖는다.

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdots\Gamma(1)$$

③ 이때 x에 양의 정수가 들어가면 계승(factorial)의 의미를 가지며, 감마함수의 정의역은 양의 실수이기에 $\Gamma(x)$의 값은 반드시 정수만으로 한정되지는 않는다.

예제 다음 적분을 계산하시오. $\int_0^{\infty} x e^{-ax^4} dx$ (단, $a > 0$이다.)

예제 수소 원자에 대한 많은 평균값의 계산은 $\beta > 0$일 때 다음 형태의 적분과 관련된다.

$$I_n = \int_0^\infty r^n e^{-\beta r} dr$$

$I_n = \dfrac{n!}{\beta^{n+1}}$임을 보이시오.

2. 베타함수(Beta function)

1) 베타함수의 정의

(1) 베타함수의 정의

$$B(x, y) = \int_0^1 z^{x-1}(1-z)^{y-1} dz \quad (\text{단, } x > 0,\ y > 0)$$

2) 베타함수의 성질

(1) $1 - z = u$로 치환하면 $B(x, y) = B(y, x)$

(2) 베타함수와 감마함수의 관계

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

(3) 베타함수의 재기술

① $z = \sin^2\theta$로 치환하면 $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

② 따라서 $B(x, y) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1} d\theta$ (단, $x > 0$, $y > 0$).

예제 다음의 적분을 구하시오. (1) $\int_0^2 u^3(4-u^2)^{3/2} du$ (2) $\int_0^\pi \cos^6\theta\, d\theta$

2 통계적 분포

1. 오차함수(error function)

1) 오차함수의 정의

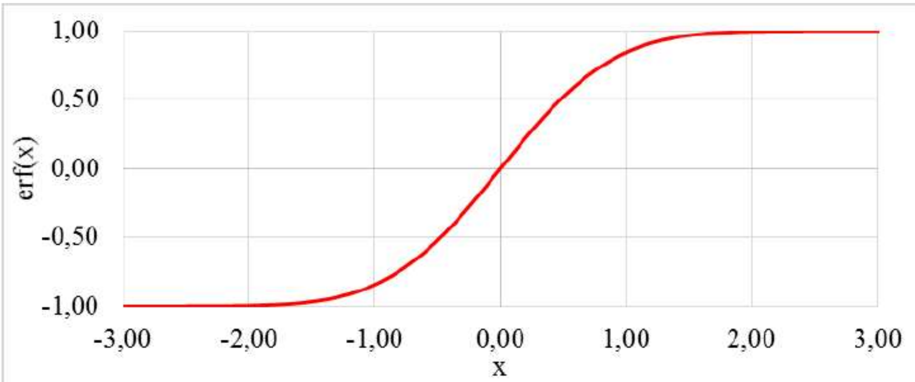
: 오차함수는 지수함수를 포함한 유한수까지의 정적분의 형태로 정의한다.

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du \quad (\text{단},\ x\in\mathbb{R})$$

2) 오차함수의 성질

(1) 정적분 내의 함수가 우함수이므로 $\operatorname{erf}(x)$는 기함수이다. 즉,

$$\operatorname{erf}(-x)=-\operatorname{erf}(x)$$



(2) 오차함수의 값은 표를 이용하여 구할 수 있다.

예제 오차함수는 기체의 반응 속도론에서 자주 일어난다. v와 $v+dv$ 사이에서 성분 속도(x, y, z)를 갖는 분자의 분율은 다음 식에 의해 주어진다.

$$f(v)\,dv=\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-mv^2/2k_B T}dv$$

(단, m : 분자의 질량, T : 온도(K), k_B : 볼츠만 상수)

$-\sqrt{\dfrac{2k_BT}{m}} \leq v \leq \sqrt{\dfrac{2k_BT}{m}}$가 되도록 하는 분자의 분율을 구하시오.

3) 상보오차함수(complementary error function)

(1) 상보오차함수의 정의

$$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du \quad (\text{단, } x \in \mathbb{R})$$

(2) 상보오차함수의 성질

① $\mathrm{erfc}(-\infty) = 2$, $\mathrm{erfc}(0) = 1$, $\mathrm{erfc}(\infty) = 0$

② quadratic form이 $\exp(x)$에 있는 경우 적분은 $\mathrm{erfc}(x)$를 포함한 식으로 표현된다.

2. 디렉 델타 함수(Dirac delta function)

1) 디렉 델타 함수의 정의

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & (x \neq x_0) \\ \infty & (x = x_0) \end{cases}$$

2) 디렉 델타 함수의 표현

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\, dx = 1$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x)\, dx = f(x_0)$

예제 다음의 적분을 구하시오.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \cos x \, dx$$

예제 다음을 설명하시오.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\, \delta(x-b)\, dx = \delta(a-b)$

(2) $\displaystyle\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(a)|} \delta(x-a)$

3) 가우스 함수(Gaussian function)

(1) 가우스 함수의 정의

$$p_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2}$$

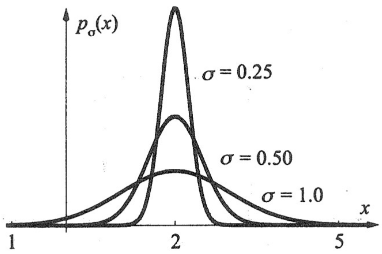
(2) 가우스 함수의 특성

① 가우스 함수는 확률분포의 의미를 갖는다. 즉,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\sigma(x)\,dx = 1$$

→ $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$의 의미 : 정규화 계수(normalization coefficient)

② σ의 값이 클수록 $p_\sigma(x)$는 넓어지며, σ의 값이 작을수록 $p_\sigma(x)$는 좁아진다.



[그림 4.7] $\sigma = 1.0$, 0.50 및 0.25와 $x_0 = 2$에 대해 x에 따라 도시된 식 4.19의 가우스 분포.

③ 가우스 함수와 델타함수의 관련성

$$\lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

예제 $I(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} \sin x\, dx$의 값을 정확하게 구하시오. 그리고 $\sigma \to 0$일 때 $\lim_{\sigma\to 0} I(\sigma) = \sin x_0$임을 보이시오.

예제 가우스 함수는 입자의 크기 분포나 스펙트럼 해석 등 여러 분야에 활용된다.

가우스함수는 계수항 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi r\sigma^2}}$ 을 포함한다.

(1) 계수항 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi r\sigma^2}}$ 의 역할을 설명하시오.

(2) 다음 적분의 값을 구하시오.

$$I(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} \cos x \, dx$$

예제 다음 적분을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$