IV. 복소수

1 복소수와 복소평면

1. 복소수

1) 복소수의 정의

(1) 허수단위 i의 정의 : $\sqrt{-1}$을 i로 정의한다.

(2) 복소수의 정의 : $z=x+yi$의 형태로 표현되는 모든 수를 복소수라고 한다.

① 모든 실수는 $y=0$인 경우이므로 복소수에 포함된다(subset).

② x를 복소수 z의 실수부($\mathrm{Re}(z)$), y를 복소수 z의 허수부($\mathrm{Im}(z)$)라고 한다.

③ 실수부는 같지만 허수부의 부호가 반대인 두 복소수를 켤레복소수라고 한다. ▷ $z_1=a+bi$, $z_2=a-bi$는 켤레복소수 관계에 있다. $z_2=\overline{z_1}$

2) 복소수의 연산

$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$일 때 다음이 성립한다.

① $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$

② $z_1z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$

▷ z_2가 z_1의 켤레복소수인 경우 $ad+bc=0$, $z_1z_2=(\overline{z_1})^2$

③ $\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{c+di}{a+bi}=\dfrac{(a-bi)(c+di)}{a^2+b^2}=\dfrac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}$

예제 복소수 $z=x+yi$에 대하여 $z^{-1}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$임을 보이시오.

2. 복소평면

1) 복소평면

(1) 복소평면의 정의 : x축에 복소수의 실수부를, y축에 복소수의 허수부를 표기한 평면을 복소평면(=복소수평면)이라 한다.

(2) 복소평면의 원점으로부터 해당 점까지의 동경과 x축이 이루는 각 θ를 복소수 z의 편각이라고 한다.

→ 따라서 복소수 $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$로 표현할 수 있다.

2) 복소평면과 벡터

① 두 복소수를 더한다는 것은 두 벡터를 더하는 것과 유사하다.

② 따라서 벡터의 합연산에 사용된 평행사변형법, 삼각형법은 모두 복소평면에서 적용할 수 있다.

예제 $|z-1| = 2$로 그려지는 복소평면의 곡선을 결정하시오.

예제 $z = 2 - i$를 극 형태로 표현하시오.

2 박사가 사랑한 수식

1. 오일러 공식

1) 오일러 공식

(1) 정의 : 크기가 r이고 편각이 θ인 복소수 z에 대하여 z는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

(2) 이때 r은 복소수의 극형식에서 복소수의 크기를 의미하는 실수($\mathbb{R}$)다.

2) 따름정리 - 극형식을 활용하여 다음을 보이시오.

어떤 복소수 $z = \cos\theta + i\sin\theta$일 때,

예제 $z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$임을 보이시오. (드무아브르 정리)

예제 $z^* = \cos\theta - i\sin\theta$일 때 $zz^* = 1$임을 보이시오. (켤레복소수의 성질)

3) 오일러 공식과 적분 : 복소수를 계수가 i인 실함수로 해석한다.

예제 $I = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \sin t\, dt$ $(\alpha > 0)$을 구하시오.

예제 다음과 같은 합계

$$S(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta)$$

는 군론, 결정학 및 광학에서 나온다. $S(\theta)$에 대한 닫혀 있는 식을 유도하시오.