II. 급수(Series)

1 급수의 수렴판정법

1. 급수(series)

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 정의

$\sum_{k=1}^{n} a_n = s_n$으로 정의(부분합수열)할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$으로 정의한다.

(2) 급수의 수렴과 발산

① 급수의 수렴(convergence)

- 급수가 수렴할 경우 부분합수열의 극한은 수렴하며, 수열의 무한합은 특정 실수가 된다.
- 급수의 수렴값을 표현한 것을 닫힌 표현(closed form)이라고 한다.

② 급수의 발산(divergence)

- 급수가 발산할 경우 부분합 수열은 발산한다.

③ 수렴판정법 : 급수의 수렴/발산 여부는 여러 수렴판정법을 이용해 판단할 수 있다.

예제 양자역학의 조화 진동자로 묘사되는 2원자 분자의 parition function은 다음과 같다.

$$q(T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)h\nu/k_B T}$$

예제 다음 급수의 closed form을 구하라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

2. 수렴판정법(Test for convergence)

(1) 일반항판정법(nth term test)

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

(2) p−급수 판정법(p-series test)

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$의 수렴 조건은 $p > 1$인 경우이다.

(3) 적분판정법(integral test)

수열 a_n의 실수체 확장 $f(x)$가 $f(x) > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$일 때

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴성은 $\int_1^{\infty} f(x)dx$의 수렴성과 같다.

(4) 극한비교판정법(limit comparison test)

두 양항수열 a_n, b_n에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$이 유한수로 수렴하면

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 수렴/발산을 함께한다.

(5) 비판정법(ratio test)

수열 a_n에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$이라고 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은

$0 < L < 1$이면 수렴, $L = 1$이면 추가 판정 필요, $L > 1$이면 발산한다.

(6) 근판정법(root test)

수열 a_n에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$이라고 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은

$0 < L < 1$이면 수렴, $L = 1$이면 추가 판정 필요, $L > 1$이면 발산한다.

(7) 교대급수판정법(alternating series test)

수열 $a_n = (-1)^n b_n$일 때, 수열 b_n이

① $b_n \geqq b_{n+1}$ ② $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ③ $b_n > 0$을 만족하면

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

예제 다음 급수의 수렴/발산을 판정하라.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^3+n+2}$ (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n^2}$ (4) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n!}$

2 멱급수(Power Series)

1. 멱급수(Power series)

1) 수렴구간에서의 연산

다음 형태의 급수를 멱급수(Power series)라고 한다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(1) 멱급수에 비판정법을 적용하면 다음을 얻을 수 있다(아벨의 정리).

만약 $-R < x < R$에서 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$이 수렴하면,

① 구간 $(-R, R)$에서 함수 $f(x)$는 연속이다.

② 구간 $(-R, R)$에서 적분 $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$은 수렴한다.

③ 구간 $(-R, R)$에서 미분 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$은 수렴한다.

▷ 수렴구간 내에서는 항별 미분과 항별 적분이 모두 가능하다(증명 생략).

예제 다음 급수의 닫힌 표현을 유도하시오.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

2) 매클로린 급수(Macluarin series)

(1) 가정 : 임의의 함수 $f(x)$가 멱급수로 표현될 수 있다고 가정한다. 즉,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(2) 일반항 구하기 : 양변을 지속적으로 미분하여 $x = 0$을 대입하면 $n!\,a_n = f^{(n)}(0)$의 해를 얻을 수 있다. 따라서

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

예제 $\cos x$와 $\sin x$의 매클로린급수로부터 오일러 항등식 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$를 유도하시오.

2. 급수의 활용

1) 강전해질 용액으로의 응용

(1) 강전해질 용액의 특성

① 강전해질 용액에서 이온은 용매화에 의해 분리된다. 따라서 강전해질 용액의 퍼텐셜은 Coulomb 상호작용에 큰 영향을 받는다.

→ 이온의 평균 반지름과 용액의 특성에 따른 효과를 모두 고려하고자 $x = \varkappa a$라는 표현을 도입한다.

(a는 양이온과 음이온의 평균 반지름, $\varkappa$는 용액의 특성을 반영하는 인자)

② $\varkappa \to 0$인 경우 용액의 농도가 0인 상황(Coulomb 상호작용을 무시할 수 있는 계)임을 의미한다.

예제 (염화 소듐의 수용액과 같은) 강전해질 용액에 대한 통계역학의 한 이론에 의하면 그 용액의 열역학 에너지는 다음과 같다.

$$U(x,a) = -\frac{x^2+x-x(1+2x)^{1/2}}{4\pi\beta a^3}$$

여기서 $\beta = 1/k_B T$일 때, $x \to 0$인 경우, 즉 묽은 용액에서는 U가 x^3에 의존함을 보이시오.

예제 (염화 소듐의 수용액과 같은) 강전해질 용액에 대한 물리화학의 한 이론에 따르면 그 용액의 삼투압은 다음과 같다.

$$\sigma(x) = \frac{3}{x^3}\left(1+x-\frac{1}{1+x}-2\ln(1+x)\right)$$

이때 $x \to 0$일 때, 즉 묽은 용액에서 $\sigma(x)$는 선형적으로 표현됨을 보이시오.

2) Dulong-Petit 극한

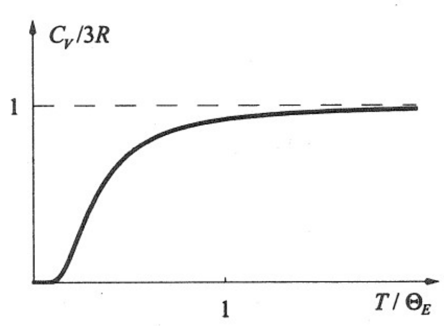
① Dulong-Petit 극한, Dulong-Petit 법칙

: 균등분배정리(equipartition theorem)에서 온도가 높아질수록 입자는 회전운동에 대한 기여와 아주 높은 온도에서는 진동운동에 대한 기여를 포함한다. 이때 매우 높은 온도($T \to \infty$)에서는 $c_V \approx 3R$이다. (단원자 기체의 경우)

② 아인슈타인은 c_V를 다음과 같이 계산하였다.

$$c_V = 3R\left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2 \frac{e^{-\Theta_E/T}}{(1-e^{-\Theta_E/T})^2}$$

(Θ_E : 아인슈타인 온도)



예제 결정의 정적 몰열용량에 대한 아인슈타인의 이론은 다음과 같이 묘사된다:

$$c_V = 3R\left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2 \frac{e^{-\Theta_E/T}}{(1-e^{-\Theta_E/T})^2}$$

이때 R은 기체 상수이고 Θ_E는 아인슈타인의 상수로 결정의 특성을 반영한다. 높은 온도에서 c_V의 값을 구하고 그 물리적 의미를 설명하시오.

예제 결정의 정적 몰열용량에 대한 디바이의 이론은 다음과 같다.

$$c_V = 9R\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x-1)^2} dx$$

이때 R은 이상 기체 상수, T는 절대 온도이고 Θ_D는 디바이 온도로 결정의 특성을 반영한다.

(1) 높은 온도에서는 Dulong-Petit 법칙에 해당하는 $c_V \to 3R$임을 보이시오.

(2) 낮은 온도에서는 c_V는 T^3에 비례함을 보이시오.

3) 양자역학에서의 이용

예제 양자역학의 조화 진동자 에너지는 $\epsilon_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)h\nu$로 주어진다. 여기서 h는 플랑크 상수, ν는 진동자의 고유 진동수이다. 그러면 조화 진동자의 평균 에너지는 다음 식으로 주어진다.

$$\epsilon_{vib} = \left(1-e^{-h\nu/k_B T}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{-nh\nu/k_B T}$$

이것은 다음과 같은 형태의 닫힌 수식이 됨을 보여라.

$$\epsilon_{vib} = \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu\, e^{-h\nu/k_B T}}{1-e^{-h\nu/k_B T}}$$