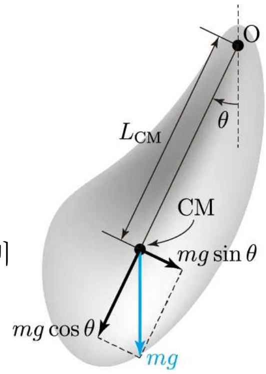
3-8. 물리진자

▣ 물리진자(physical pendelum)



① 물리진자란 무엇인가? 단진자와 두 개념을 비교하여 설명하시오.

② 비틀림진자란 무엇인가? 최종적으로 단진자, 물리진자, 비틀림진자의 개념을 비교하면?

▣ 물리진자 해석

(탐구) 회전관성이 I 이고 회전의 중심으로부터 질량중심까지의 거리가 L인 물리진자가 있다. 물음에 답하시오.

① 물리진자의 운동방정식을 구하시오.

② ①의 결과를 토대로 물리진자의 각진동수와 주기를 구하시오.

③ 회전관성 I 를 알고 있는 정형화된 물체를 실험에 이용하여 이론과 실측값을 비교하고자 한다. 유의해야 할 점은 무엇일까?

예1> 길이가 L이고 질량이 m인 가느다란 막대의 끝을 천장에 매달아 물리진자를 만들어 단순조화진동을 시키고 있다.

① 이 막대 진자의 주기는 얼마인가?

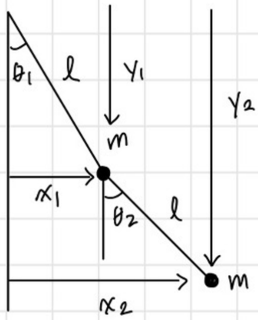
② 막대 진자의 주기와 같도록 단순진자를 만들고자 한다. 단순진자에 달린 물체의 질량도 m이라면 실의 길이는 얼마여야 하는가?

예2> 길이가 l이고 질량이 없는 막대의 한쪽 끝을 천장에 매달고 다른 쪽 끝에 질량이 있는 물체를 매달아 물리진자를 만든다. 질량 m, 반지름 R인 원판을 매달았을 때의 전자의 주기 $T_{원판}$과 같은 질량과 크기의 고리를 매달았을 때의 진자의 주기 $T_{고리}$의 비 $\dfrac{T_{원판}}{T_{고리}}$을 구하시오.

예3> 물리진자의 값들이 단진자와 동일해지기 위한 물리적 조건을 설명하고 수학적으로 이 조건을 통한 극한이 타당함을 설명하시오.

※ **이중진자.** 출처> https://super-master.tistory.com/43

이중진자문제 : 이중진자의 normal freqency를 구하라.



운동에너지 $= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$

위치에너지 $= mgy_1 + mgy_2$

$x_1 = l\sin\theta_1 \simeq l\theta_1 \ (\theta_1 \ll 1) \qquad \dot{x}_1 = l\dot{\theta}_1$

$y_1 = -l\cos\theta_1 \qquad \dot{y}_1 = l\sin\theta_1$

$x_2 = x_1 + l\sin\theta_2 = l(\theta_1+\theta_2) \qquad \dot{x} = l(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)$

$y_2 = y_1 - l\cos\theta_2 = -l(\cos\theta_1+\cos\theta_2) \qquad \dot{y} = l(\sin\theta_1+\sin\theta_2)$

운동에너지 $T = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}_1^2 + l^2\underbrace{\sin^2\theta_1}_{0}) +$

$\frac{1}{2}m(l^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2 + l^2\underbrace{(\sin\theta_1+\sin\theta_2)^2}_{0})$

$\theta_1, \theta_2 \ll 0$ 작은값을 제곱하면 무의미하게 작아짐.

$= \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2)$

위치에너지 $V = -mgl\cos\theta_1 - mgl(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$

$= -2mgl\cos\theta_1 - mgl\cos\theta_2$

라그랑지안 $L = T - V$

$= \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2) + 2mgl\cos\theta_1 + mgl\cos\theta_2$

θ_2에 대한 운동방정식 : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$

라그랑지안 $L = T - V$

$$= \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\right) + 2mgl\cos\theta_1 + mgl\cos\theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = ml^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = ml^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -mgl\sin\theta_2 \simeq -mgl\theta_2$$

$$\therefore \; ml^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + mgl\theta_2 = 0$$

$$(l\theta_2 = x_2 \quad l\ddot{\theta}_2 = \ddot{x}_2)$$

$$ml\ddot{x}_1 + ml\ddot{x}_2 + mgx_2 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \frac{g}{l}x_2 = 0$$

두개의 운동방정식을 각각 $\ddot{x}_1$과 $\ddot{x}_2$에 대하여 정리하면,

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}\ddot{x}_2 + \frac{g}{l}x_1 = 0 \\ &\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \frac{g}{l}x_2 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\frac{g}{l}x_1 + \frac{g}{l}x_2 \\ \ddot{x}_2 &= 2\frac{g}{l}x_1 - 2\frac{g}{l}x_2 \end{aligned}$$

θ_1에 대한 운동방정식 : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$

라그랑지안 $L = T - V$

$$= \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\right) + 2mgl\cos\theta_1 + mgl\cos\theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{1}{2}ml^2\left(2\dot{\theta}_1 + 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1} = \frac{1}{2}ml^2\left(2\dot\theta_1 + 2(\dot\theta_1+\dot\theta_2)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1}\right) = 2ml^2\ddot\theta_1 + ml^2\ddot\theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -2mgl\sin\theta_1 \simeq -2mgl\theta_1 \quad (\theta_1 \ll 0)$$

$$\therefore\ 2ml^2\ddot\theta_1 + ml^2\ddot\theta_2 + 2mgl\theta_1 = 0$$

$$(l\theta_1 = x_1 \quad l\ddot\theta_1 = \ddot x_1)\quad 2ml\ddot x_1 + ml\ddot x_2 + 2mgx_1 = 0$$

$$\ddot x_1 + \frac{1}{2}\ddot x_2 + \frac{g}{l}x_1 = 0$$

유도된 운동방정식

$$\begin{cases}\ddot x_1 = -2\frac{g}{l}x_1 + \frac{g}{l}x_2 \\ \ddot x_2 = 2\frac{g}{l}x_1 - 2\frac{g}{l}x_2\end{cases} \qquad x_1, x_2 \sim e^{-i\omega t} \text{ 라고하면.}$$

$$\begin{cases}-\omega^2x_1 = -2\frac{g}{l}x_1 + \frac{g}{l}x_2 \\ -\omega^2x_2 = 2\frac{g}{l}x_1 - 2\frac{g}{l}x_2\end{cases}$$

Matrix로 표현

$$-\omega^2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \frac{g}{l}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$\omega^2\frac{l}{g}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Hermit행렬 → 고유값문제

고유값 Hermit행렬 고유함수

$$\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

λ라고하고 고유값을 찾으면

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -2 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned}&(2-\lambda)^2 - 2 = 0\\ &4-4\lambda+\lambda^2-2=0\\ &\lambda^2-4\lambda+2=0 \ (\text{근의공식用})\\ &\lambda = 2\pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\omega^2\frac{l}{g} = 2\pm\sqrt{2} \longrightarrow \omega = \sqrt{(2\pm\sqrt{2})\frac{g}{l}} \quad \text{normal freqency}$$