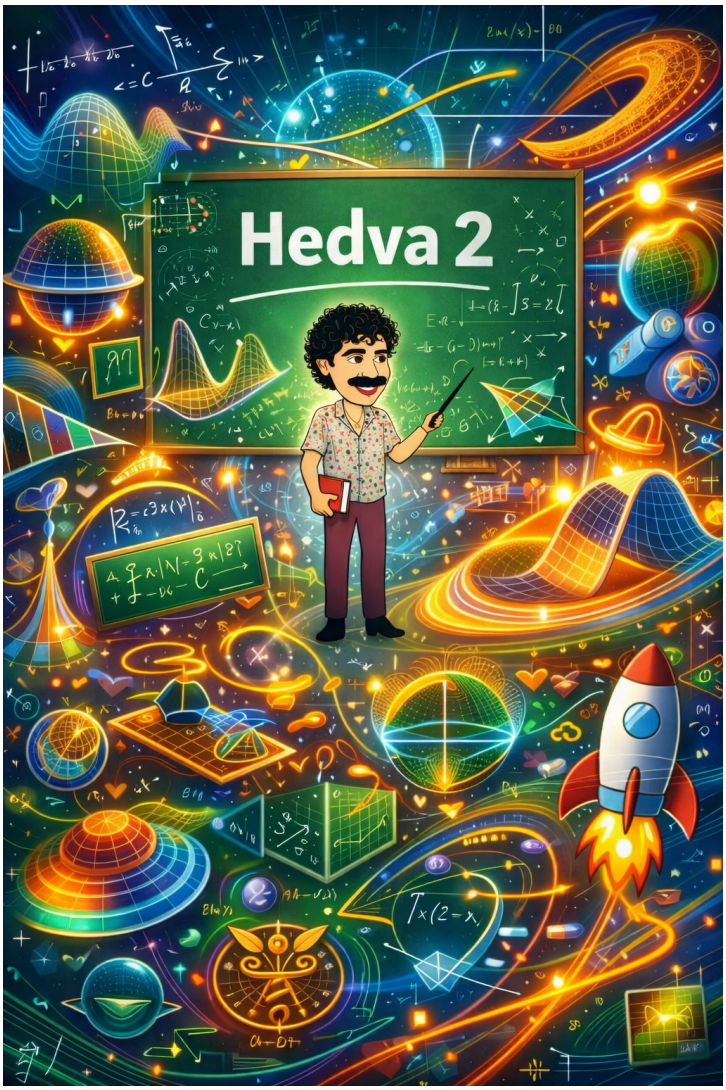
חדו"א 2 להנדסות

סיכומים ותרגולים



נערך ונכתב על ידי חן גדי

ליצירת קשר במייל

ייתכנו טעויות, אי-דיוקים, השמטות או ניסוחים לא מושלמים.
בכל הערה, תיקון או הצעה לשיפור אפשר לפנות לקישור המייל שלמעלה.
החומר המחייב הוא החומר המועבר בהרצאות ובהודעות הרשמיות של הקורס.

תודה גדולה לכל האנשים שתרמו לי בכל דרך, בהערות, בתיקונים, בהסברים, ברעיונות, בתמיכה לאורך הדרך, וגם לכל מי שלימד אותי, המליץ לי, שלח תבניות, שיתף תרגילים או סייע בכל צורה אחרת.

נוצר על ידי חן גדי

תוכן העניינים

1 תרגול 5 – גבולות, רציפות, נגזרות חלקיות ודיפרנציאביליות 2
1.1 ההגדרות והאינטואיציה 2
1.2 תרגילים 14

תרגול 5 – גבולות, רציפות, נגזרות חלקיות ודיפרנציאביליות

מוצר על ידי חן גדי

1.1 ההגדרות והאינטואיציה

הגדרה פורמלית

גבול לפי ε-δ. תהי $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ו-$\vec{a}$ נקודת צבירה של D. אומרים $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = L$ אם:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \quad \text{כך ש-} \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \ \Rightarrow\ |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon.$$

הערה קטנה ומועילה

אינטואיציה – מה ההבדל בין חד-ממד לרב-ממד?
ב-$\mathbf{R}$ קיימים שני כיווני התקרבות לנקודה, מימין ומשמאל; כאשר שני הגבולות החד-צדדיים שווים זה לזה, הגבול קיים. לעומת זאת ב-$\mathbf{R}^2$ קיימים אינסוף מסלולי התקרבות לנקודה – לאורך כל ישר, פרבולה, ספירלה, או עקומה כללית. הגבול $(x, y) \to (x_0, y_0)$ קיים אם ורק אם כל המסלולים הללו, ללא יוצא מן הכלל, מתכנסים לאותו מספר L.
זוהי דרישה חזקה במיוחד, המסבירה מדוע גבולות דו-ממדיים רבים שנראים תמימים אינם קיימים בפועל. השימוש בשיטת המסלולים להפרכת קיום גבול נובע ישירות מן ההגדרה.

דוגמה 1.1.1.

הראו כי לא קיים הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

פתרון! נשאף לנקודה $(0,0)$ דרך המסלולים ליניאריים (t,at) עם פרמטרים a שונים כאשר $t \longrightarrow 0$ (הגדרנו כאן לכל a מסילה שונה). כאשר ערך הגבול תלוי בערכו של a, זה בדיוק אומר שעל מסלולים שונים מתקבל גבול שונה, ולכן בפרט מוכיח את אי קיום הגבול.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2-(at)^2}{t^2+(at)^2} = \frac{1-a^2}{1+a^2}$$

ואכן הגבול תלוי ב-a, כלומר בשיפוע המסלול הקווי שבחרנו, ולכן לא קיים גבול.

דוגמה 1.1.2.

הראו כי לא קיים הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^3+y^3}$ **פתרון!**
נביט בהתנהגות הפונקציה הנ"ל לאורך שתי מסילות. קודם עבור המסילה $(0,t)$ (זהו בדיוק ציר ה-y):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^3+y^3} \overset{?}{=} \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^3} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

כעת נביט במסילה (t,t) (קו ישר היוצא בזווית של 45 מעלות מראשית הצירים):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{t^3}{t^3+t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

נשים לב שקיבלנו גבול שונה לכל אחת מהמסילות, ולכן הגבול תלוי במסילה, כלומר לא קיים הגבול.

תרגיל 1.1.3.

נתבונן בפונקציה $f(x,y) = \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{x+y}$. האם קיים לפונקציה גבול בנקודה $(x,y)=(0,0)$?

פתרון.
נשים לב כי $f(x,y)$ כלל אינה מוגדרת בסביבה מנוקבת של $(0,0)$, כלומר כלל אין משמעות לשאול על הגבול בנקודה זאת. נשים לב כי לאורך הישר $y=-x$ הפונקציה f כלל אינה מוגדרת. כיוון שהישר הזה עובר בנקודה $(0,0)$ נסיק כי כל סביבה של $(0,0)$ מכילה נקודות על הישר שבהן הפונקציה לא מוגדרת. לכן ל-f לא יכול להיות גבול בנקודה זו.

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

הערה קטנה ומועילה

הבעיה פה הייתה שלא הגדרנו טוב את תחום ההגדרה של f. לו היינו דורשים מתחום ההגדרה של f להיות $\mathbb{R}\setminus\{y=x\}$, היינו יכולים לבדוק קיום של גבול בשיטות הרגילות.

□

ניצחון

1.1.1 טכניקות לחישוב גבולות

תזכורת (מההרצאה)

משפט הסנדוויץ' (כלל הכריך).
אם בסביבה של נקודה x_0 מתקיים

$$h(x) \le f(x) \le g(x),$$

ובנוסף $h(x) \xrightarrow{x\to x_0} c$ וגם $g(x) \xrightarrow{x\to x_0} c$, אזי גם $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} c$.

דוגמה 1.1.4.

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על ידי

$$f(x,y)=\begin{cases} 7+\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)+\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

עבור $\alpha\in\mathbb{R}$, מצאו את α כך ש-f תהיה רציפה ב-$(0,0)$.
פתרון!
על מנת לקבל מועמד לגבול, נחשב את הגבול לאורך המסילה $(t,0)$. עבור $t\neq 0$ נקבל

$$f(t,0)=7+\frac{t^2\cdot 0^2}{t^2+0^2}\cos\left(\frac{1}{t^2+0^2}\right)+\frac{1-\cos(t^2+0^2)}{\sqrt{t^2+0^2}}.$$

לכן

$$f(t,0)=7+\frac{1-\cos(t^2)}{|t|}.$$

נשתמש באי השוויון

$$0\le 1-\cos u\le\frac{u^2}{2}$$

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

לכל $u \in \mathbb{R}$. לכן

$$0 \leq \frac{1-\cos(t^2)}{|t|} \leq \frac{(t^2)^2}{2|t|} = \frac{|t|^3}{2} \longrightarrow 0.$$

מכאן

$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = 7.$$

לכן המועמד היחיד עבור α הוא

$$\alpha = 7.$$

כעת נוכיח בעזרת כלל הסנדוויץ' שאכן

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 7.$$

נסמן

$$r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

כאשר $(x,y) \neq (0,0)$ מתקיים $r > 0$, וכן

$$x^2+y^2 = r^2.$$

נחשב:

$$|f(x,y)-7| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|.$$

לפי אי שוויון המשולש נקבל

$$|f(x,y)-7| \leq \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| + \left|\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|.$$

כיוון ש

$$\left|\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 1,$$

נקבל

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

כעת נשתמש באי השוויון

$$2|xy| \leq x^2+y^2.$$

לאחר העלאה בריבוע:

$$4x^2y^2 \leq (x^2+y^2)^2.$$

לכן

$$x^2y^2 \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{4}.$$

מכאן

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{4} = \frac{r^2}{4}.$$

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

עבור האיבר השני, שוב נשתמש בכך ש

$$0 \leq 1 - \cos u \leq \frac{u^2}{2}.$$

נציב $u = x^2 + y^2 = r^2$ ונקבל

$$0 \leq 1 - \cos(x^2 + y^2) \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} = \frac{r^4}{2}.$$

לכן

$$0 \leq \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1 - \cos(r^2)}{r} \leq \frac{r^4}{2r} = \frac{r^3}{2}.$$

קיבלנו כי

$$0 \leq |f(x, y) - 7| \leq \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{2}.$$

כאשר $(x, y) \to (0, 0)$ מתקיים $r \to 0$, ולכן

$$\frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{2} \longrightarrow 0.$$

לכן, לפי כלל הסנדוויץ',

$$|f(x, y) - 7| \longrightarrow 0.$$

כלומר

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 7.$$

כדי שהפונקציה תהיה רציפה ב-$(0, 0)$ צריך להתקיים

$$f(0, 0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y).$$

אבל

$$f(0, 0) = \alpha,$$

ולכן

$$\alpha = 7.$$

מעבר לחישוב גבול של פונקציה במשתנה יחיד ושימוש בגבולות הידועים

תרגיל 1.1.5.

הוכיחו כי קיים הגבול וחשבו אותו:

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2},0\right)} f(x, y)$$

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

כאשר

$$f(x,y)=\sin(x)+\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

פתרון.
נתחיל בהגדרת פונקציות עזר.
נגדיר את הפונקציה $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ע"י $g(x,y)=\sin(x)$. כיוון ש-$\sin(x)$ היא פונקציה רציפה במשתנה יחיד, מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2},0\right)} g(x,y)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

נגדיר בנוסף את הפונקציות $h_1,h_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$h_1(x,y)=x+y$$

$$h_2(x,y)=x-y$$

מאריתמטיקה של גבולות, מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2},0\right)}\frac{h_1(x,y)}{h_2(x,y)}=\frac{\frac{\pi}{2}+0}{\frac{\pi}{2}-0}=1$$

באמצעות משפט הגבול והרכבה שנלמד בכיתה, נקבל כי:

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2},0\right)}\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=\ln(1)=0$$

נגדיר לבסוף את הפונקציה $q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$q(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

q היא פונקציה רציפה כסכום והרכבה של פונקציות אלמנטריות. כמו כן, $q\left(\frac{\pi}{2},0\right)\neq 0$, ולכן נקבל מאריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2},0\right)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=1$$

לסיכום, מאריתמטיקה של גבולות, נקבל:

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2},0\right)}\left[\sin(x)+\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right]=1+0\cdot 1=1$$

□

ניצחון

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

תרגיל 1.1.6.

האם הגבול הבא קיים? אם כן חשבו אותו:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(2x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

פתרון.
נשתמש בקורדינטות פולריות ונציב

$$x = r\cos(\theta) \quad \text{-ו} \quad y = r\sin(\theta)$$

ולכן

$$x^2+y^2=r^2$$

נחשב את הגבול:

$$\lim_{r\to 0} \frac{1-\cos(2r^2)}{r^4}$$

נשתמש בגבול המוכר:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

ולכן:

$$\lim_{r\to 0} \frac{2\sin^2(r^2)}{r^4} = \lim_{r\to 0} 2\left(\frac{\sin(r^2)}{r^2}\right)^2 = 2\cdot 1^2 = 2$$

לסיכום, הגבול קיים ושווה ל-2, ללא תלות בזווית θ, ולכן זה נכון לכיוונים מכל הצדדים ובהתאם לכל מסילה שתבוא.

□

ניצחון

1.1.2 קואורדינטות מעגליות ומשפטי רציפות

תזכורת (מההרצאה)

יהי $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, ותהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה (a,b). כאשר רוצים לחשב גבול מן הצורה

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y),$$

לעיתים נוח לעבור לקואורדינטות פולאריות סביב הנקודה (a,b). כלומר, מציבים

$$x = a + r\cos\theta$$
$$y = b + r\sin\theta$$

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

כאשר
$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$
נשים לב כי
$$(x,y) \to (a,b)$$
אם ורק אם
$$r \to 0.$$
לכן, לאחר ההצבה הפולארית, חקירת הגבול הדו־ממדי סביב (a,b) מתורגמת לחקירת ההתנהגות של הביטוי כאשר $r \to 0$, באופן שאינו תלוי בבחירה מסוימת של θ.
באופן פורמלי, אם קיימות פונקציות g, h כך שלכל (x,y) בסביבה מנוקבת מתאימה של (a,b) מתקיים
$$|f(x,y)| = |f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)| \le |g(r)||h(r,\theta)|,$$
ובנוסף מתקיים
$$\lim_{r\to 0} g(r) = 0,$$
וכן $h(r,\theta)$ חסומה בסביבה של $r = 0$, כלומר קיים קבוע $M > 0$ כך שלכל r קטן מספיק ולכל θ מתקיים
$$|h(r,\theta)| \le M,$$
אז מתקיים
$$0 \le |f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)| \le M|g(r)| \longrightarrow 0.$$
לכן, לפי כלל הסנדוויץ',
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0.$$

תזכורת (מההרצאה)

(משפט ערך הביניים)
תהא $D \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה <u>קשירה,</u> $f : D \to \mathbb{R}$ רציפה, אז לכל $P_1, P_2 \in D$ כך ש $f(P_1) \neq f(P_2)$, לכל α בין $f(P_1)$ ל$f(P_2)$ קיימת נקודה $M \in D$ כך ש $f(M) = \alpha$.

תזכורת (מההרצאה)

(משפט וויירשטראס)
תהא $D \subset \mathbb{R}^n$ <u>סגורה וחסומה</u> (קומפקטית) ותהא $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אז f חסומה בD, ומקבלת את ערכי הקיצון שלה.

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

דוגמה 1.1.7.

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{2(x-1)^3(y+2)-(x-1)(y+2)^3+(y+2)^4\sin\left(\frac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}\right)}{(x-1)^2+4(y+2)^2}.$$

פתרון!
נסמן את המרחק של הנקודה (x,y) מן הנקודה $(1,-2)$ על ידי

$$r=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}.$$

נעבור לקואורדינטות פולאריות סביב הנקודה $(1,-2)$:

$$\begin{aligned} x-1&=r\cos\theta \\ y+2&=r\sin\theta \end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned} x&=1+r\cos\theta \\ y&=-2+r\sin\theta \end{aligned}.$$

כאשר $(x,y)\to(1,-2)$ מתקיים $r\to 0$.
נציב בביטוי הנתון. עבור $(x,y)\neq(1,-2)$ נקבל:

$$\begin{aligned} &\frac{2(x-1)^3(y+2)-(x-1)(y+2)^3+(y+2)^4\sin\left(\frac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}\right)}{(x-1)^2+4(y+2)^2} \\ &=\frac{2(r\cos\theta)^3(r\sin\theta)-(r\cos\theta)(r\sin\theta)^3+(r\sin\theta)^4\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)}{(r\cos\theta)^2+4(r\sin\theta)^2}. \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} &\frac{2(r\cos\theta)^3(r\sin\theta)-(r\cos\theta)(r\sin\theta)^3+(r\sin\theta)^4\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)}{(r\cos\theta)^2+4(r\sin\theta)^2} \\ &=\frac{r^4\left(2\cos^3\theta\sin\theta-\cos\theta\sin^3\theta+\sin^4\theta\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)}{r^2\left(\cos^2\theta+4\sin^2\theta\right)} \\ &=r^2\cdot\frac{2\cos^3\theta\sin\theta-\cos\theta\sin^3\theta+\sin^4\theta\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}. \end{aligned}$$

כעת נרצה להראות שהגורם התלוי ב-r,θ חסום. ראשית,

$$\cos^2\theta+4\sin^2\theta\geq\cos^2\theta+\sin^2\theta=1.$$

לכן

$$\frac{1}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}\leq 1.$$

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

בנוסף,

$$|\cos\theta|\leq 1, \qquad |\sin\theta|\leq 1, \qquad \left|\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)\right|\leq 1.$$

מכאן

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2\cos^3\theta\sin\theta-\cos\theta\sin^3\theta+\sin^4\theta\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}\right| \\
&\leq \left|2\cos^3\theta\sin\theta-\cos\theta\sin^3\theta+\sin^4\theta\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)\right| \\
&\leq 2|\cos\theta|^3|\sin\theta|+|\cos\theta||\sin\theta|^3+|\sin\theta|^4\left|\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)\right| \\
&\leq 2+1+1=4.
\end{aligned}$$

לכן קיבלנו את החסימה

$$0\leq\left|\frac{2(x-1)^3(y+2)-(x-1)(y+2)^3+(y+2)^4\sin\left(\frac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}\right)}{(x-1)^2+4(y+2)^2}\right|\leq 4r^2.$$

מכיוון ש

$$\lim_{r\to 0}4r^2=0,$$

נקבל לפי כלל הסנדוויץ' כי

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)}\frac{2(x-1)^3(y+2)-(x-1)(y+2)^3+(y+2)^4\sin\left(\frac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}\right)}{(x-1)^2+4(y+2)^2}=0.$$

הגדרה פורמלית

<u>רציפות.</u> f רציפה ב-$\vec{a}\in D$ אם

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}f(\vec{x})=f(\vec{a}).$$

תזכורת (מההרצאה)

כמו בפונקציות במשתנה אחד, גם כאן מתקיים ש–$f(x,y)$ רציפה בנק' (x_0,y_0) אמ"מ קיים הגבול $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ והוא שווה ל–$f(x_0,y_0)$.

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

הגדרה פורמלית

נגזרת חלקית.

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}, \quad f_y(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}.$$

הערה קטנה ומועילה

אינטואיציה – מה "רואה" $f_x(a,b)$?
הנגזרת החלקית $f_x(a,b)$ רואה אך ורק את התנהגות f לאורך הישר $y=b$ – קו אופקי שעובר דרך (a,b) – ומתעלמת לחלוטין משאר המישור.
מכאן תופעה חשובה: ייתכן ש-$f_x(x_0,y_0)$ ו-$f_y(x_0,y_0)$ קיימות – כלומר הפונקציה מתנהגת היטב לאורך שני הצירים – ובכל זאת ההתנהגות בכיוונים אלכסוניים תהיה בלתי רציפה. הצירים הם רק שני מסלולים מתוך אינסוף.
התרגום הלוגי: קיום נגזרות חלקיות $\not\Rightarrow$ רציפות $\not\Rightarrow$ דיפרנציאביליות.

הגדרה פורמלית

נגזרת כיוונית. לוקטור יחידה $\vec{v}=(v_1,v_2)$:

$$D_{\vec{v}}f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv_1,b+tv_2)-f(a,b)}{t}.$$

הערה קטנה ומועילה

אינטואיציה – נגזרת כיוונית כנגזרת לאורך ישר.
$D_{\vec{v}}f(a,b)$ מודדת את קצב השינוי של f לאורך הישר היוצא מן הנקודה (a,b) בכיוון $\vec{v}$. אם מגדירים את הפונקציה במשתנה אחד

$$g(t) := f(a+tv_1,b+tv_2),$$

אזי $D_{\vec{v}}f(a,b) = g'(0)$. הנגזרות החלקיות הן מקרה פרטי: $f_x(a,b) = D_{(1,0)}f(a,b)$ ו-$f_y(a,b) = D_{(0,1)}f(a,b)$.
קיומן של הנגזרות הכיוניות בכל הכיוונים אינו גורר דיפרנציאביליות – נציג דוגמה נגדית בתרגילים שבהמשך.

הגדרה פורמלית

דיפרנציאביליות. תהי f מוגדרת בסביבה של הנקודה (x_0,y_0). אומרים כי f *דיפרנציאבילית* ב-

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

(x_0, y_0) אם קיימים שני מספרים $A, B \in \mathbf{R}$ כך ש-

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - A(x-x_0) - B(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

הצבת $h := x - x_0$, $k := y - y_0$ נותנת את הצורה השקולה

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

זוהי בדיוק הדרישה שההפרש $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ ניתן לקירוב על ידי הביטוי הליניארי $A(x-x_0) + B(y-y_0)$, עד כדי שגיאה השואפת לאפס מהר יותר מן המרחק $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.
מקדמי הקירוב הליניארי. אם f דיפרנציאבילית ב-(x_0, y_0) והנגזרות החלקיות קיימות שם, אז בהכרח

$$A = f_x(x_0, y_0), \qquad B = f_y(x_0, y_0).$$

הערה קטנה ומועילה

אינטואיציה – מה אומרת דיפרנציאביליות?
ההפרש $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$ ניתן לקירוב על ידי הביטוי הליניארי $Ah + Bk$, כאשר השגיאה

$$R(h,k) := f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - Ah - Bk$$

מקיימת $R(h,k)/\sqrt{h^2+k^2} \to 0$. זוהי דרישה חזקה מן הדרישה החלשה $R(h,k) \to 0$: נדרש שהשגיאה תהיה *מסדר גודל קטן יותר* מן המרחק עצמו.
תמונה גיאומטרית. דיפרנציאביליות שקולה לקיום *מישור משיק*

$$z = f(x_0,y_0) + A(x-x_0) + B(y-y_0),$$

המקרב את גרף הפונקציה בסביבת (x_0, y_0) כך שהפרש הגבהים בין הגרף לבין המישור שואף לאפס מהר יותר ממרחק נקודת ה-XY מ-(x_0, y_0).
הבדל מחד-ממד. בחד-ממד, אם f גזירה ב-x_0, השגיאה $f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h$ מקיימת אוטומטית

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

ברב-ממד הדרישה אינה אוטומטית, ויש לבדוק אותה במפורש.

הערה קטנה ומועילה

היררכיית הגרירות (מה גורר מה).

- f דיפרנציאבילית ב-(x_0, y_0) $\Rightarrow$ f רציפה ב-(x_0, y_0). *תמיד.*
- f דיפרנציאבילית ב-(x_0, y_0) $\Rightarrow$ הנגזרות החלקיות $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ קיימות. *תמיד.*

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

- f דיפרנציאבילית ב-(x_0, y_0) $\Rightarrow$ הנגזרות הכיווניות בכל הכיוונים קיימות, והן *ליניאריות* בכיוון $\vec{v}$. *תמיד*.

לעומת זאת, החיצים ההפוכים אינם נכונים:

- קיום הנגזרות החלקיות $\not\Rightarrow$ רציפות.
- רציפות $+$ קיום הנגזרות החלקיות $\not\Rightarrow$ דיפרנציאביליות.
- קיום הנגזרות הכיווניות בכל הכיוונים $\not\Rightarrow$ דיפרנציאביליות (כאשר הן אינן ליניאריות בכיוון).

לכל אחד מן החיצים שאינם הופכיים יש דוגמה נגדית קלאסית בתרגילים שבהמשך.

1.2 תרגילים

תרגיל 1.2.1.

חשבו את הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos x\cos y}{x^2+y^2}.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

הזהות $1-\cos x\cos y = (1-\cos x)+\cos x(1-\cos y)$ מפצלת את הבעיה לשני איברים, וכל אחד מהם מנוצל בעזרת הגבול $\frac{1-\cos t}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2}$ מחדו"א 1.

נשתמש בזהות

$$1-\cos x\cos y = (1-\cos x)+\cos x(1-\cos y).$$

לאחר חלוקה ב-x^2+y^2 מקבלים

$$\frac{1-\cos x\cos y}{x^2+y^2} = \frac{1-\cos x}{x^2+y^2} + \cos x\cdot\frac{1-\cos y}{x^2+y^2}.$$

עבור האיבר הראשון נכתוב, עבור $x\neq 0$,

$$\frac{1-\cos x}{x^2+y^2} = \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

מחדו"א 1 ידוע ש-$\frac{1-\cos x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$, והגורם $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ שייך לקטע $[0,1]$.
באופן דומה, עבור $y\neq 0$,

$$\cos x\cdot\frac{1-\cos y}{x^2+y^2} = \cos x\cdot\frac{1-\cos y}{y^2}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

לכן, עבור $(x,y)\neq(0,0)$ עם $x\neq 0$ ו-$y\neq 0$, הביטוי נכתב כ-

$$\frac{1-\cos x\cos y}{x^2+y^2}=\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\alpha(x,y)+\cos x\cdot\frac{1-\cos y}{y^2}\cdot\beta(x,y),$$

כאשר

$$\alpha(x,y):=\frac{x^2}{x^2+y^2},\qquad \beta(x,y):=\frac{y^2}{x^2+y^2},\qquad \alpha+\beta=1.$$

נסמן

$$A(x):=\frac{1-\cos x}{x^2}-\frac{1}{2},\qquad B(y):=\frac{1-\cos y}{y^2}-\frac{1}{2},\qquad C(x):=\cos x-1.$$

אזי $A(x)\to 0$ כאשר $x\to 0$, וכן $B(y)\to 0$, $C(x)\to 0$. הביטוי נכתב כ-

$$\frac{1-\cos x\cos y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\alpha+A(x)\alpha+(1+C(x))(\frac{1}{2}+B(y))\beta.$$

פירוק האיבר השני נותן

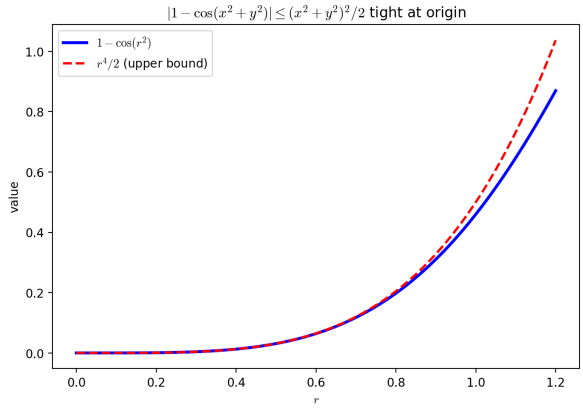
$$\frac{1-\cos x\cos y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+A(x)\alpha+\frac{1}{2}C(x)\beta+(1+C(x))B(y)\beta.$$

מאחר ש-$\alpha+\beta=1$, האיבר העיקרי שווה $\frac{1}{2}$. יתר האיברים מקיימים, בעזרת $0\leq\alpha,\beta\leq 1$ ו-$|1+C(x)|\leq 2$ בסביבת $(0,0)$,

$$\left|A(x)\alpha+\frac{1}{2}C(x)\beta+(1+C(x))B(y)\beta\right|\leq|A(x)|+\frac{1}{2}|C(x)|+2|B(y)|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0.$$

לאורך הצירים, שבהם α או β שווים 0 או 1, הביטוי הופך מיד לאחד מהגבולות החד-ממדיים $\frac{1-\cos x}{x^2}$ או $\frac{1-\cos y}{y^2}$ הזה ל-$\frac{1}{2}$. מכאן, לפי משפט הסנדוויץ',

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos x\cos y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}.}$$



□

ניצחון

תרגיל 1.2.2.

חשבו את הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

הביטוי תלוי רק ב-$u := x^2+y^2$, ולכן הצבה זו הופכת את הגבול הדו-ממדי לגבול חד-ממדי שניתן לחישוב באמצעות נוסחת טיילור עבור $\sin u$.

נציב $u := x^2+y^2$. כאשר $(x,y)\to(0,0)$ מתקיים $u\to 0^+$, ולכן

$$\frac{\sin(x^2+y^2)-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\sin u - u}{u^2}.$$

מנוסחת טיילור עם שארית לגראנז' עבור $\sin$ קיים $\xi = \xi(u)$ בין 0 ל-u כך ש-

$$\sin u = u - \frac{u^3}{6} + \frac{\cos\xi}{120}u^5.$$

מאחר ש-$|\cos\xi|\le 1$, מתקבל

$$\left|\sin u - u + \frac{u^3}{6}\right| \le \frac{|u|^5}{120}.$$

לכן, עבור $u>0$,

$$\left|\frac{\sin u - u}{u^2} + \frac{u}{6}\right| \le \frac{u^3}{120},$$

ובפרט

$$0 \le \left|\frac{\sin u - u}{u^2}\right| \le \frac{u}{6} + \frac{u^3}{120}.$$

שני האגפים מימין שואפים לאפס כאשר $u\to 0^+$, ומשפט הסנדוויץ' נותן

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{\sin u - u}{u^2} = 0.$$

מסקנה:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0.}$$

□

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

ניצחון

תרגיל 1.2.3.

תהי
$$f(x,y)=\frac{x^3y^2}{x^6+y^4}.$$

1. הראו שלאורך כל ישר $y=mx$, הגבול ב-$(0,0)$ הוא 0.
2. הראו שלאורך $y=x^2$ הגבול 0.
3. מצאו $\alpha>0$ שעבור $y=x^\alpha$ הגבול *אינו* 0, וחשבו אותו.
4. הסיקו את אי-קיום הגבול.

פתרון.

עיקרון מנחה

המכנה x^6+y^4 "מאוזן" לאורך המסלול $y=x^{3/2}$ (שבו $x^6=y^4$), ושם החזקות במונה ובמכנה משתוות – כך מתקבל מסלול קריטי שלאורכו הגבול אינו אפס.

(א) ישרים $y=mx$, $m\neq 0$. מציבים
$$f(x,mx)=\frac{x^3\cdot(mx)^2}{x^6+(mx)^4}=\frac{m^2x^5}{x^6+m^4x^4}=\frac{m^2x^5}{x^4(x^2+m^4)}=\frac{m^2x}{x^2+m^4}.$$
המכנה שואף ל-$m^4>0$ והמונה שואף ל-0, ולכן $f(x,mx)\xrightarrow[x\to 0]{}0$. על הצירים $x=0$ או $y=0$ הפונקציה זהותית אפס.

(ב) הפרבולה $y=x^2$.
$$f(x,x^2)=\frac{x^3\cdot x^4}{x^6+x^8}=\frac{x^7}{x^6(1+x^2)}=\frac{x}{1+x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}0.$$

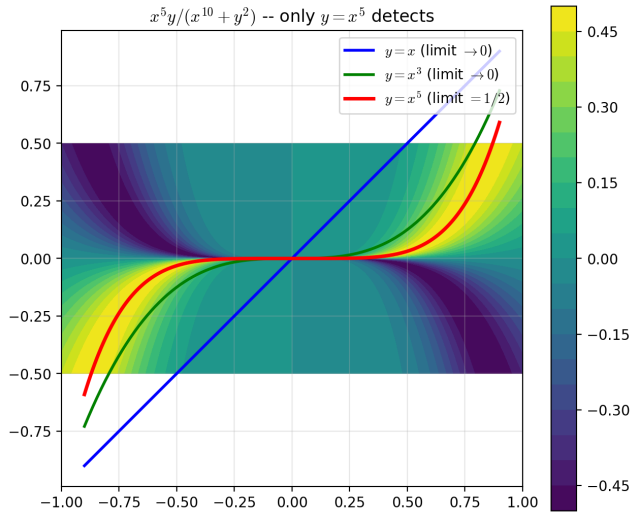
(ג) חיפוש המסלול הקריטי $y=x^\alpha$ **(**$\alpha>0$**).** עבור $x>0$ קטן,
$$f(x,x^\alpha)=\frac{x^3\cdot x^{2\alpha}}{x^6+x^{4\alpha}}=\frac{x^{3+2\alpha}}{x^6+x^{4\alpha}}.$$
חיזוק החזקות במכנה ובמונה לידי שוויון, $6=4\alpha$, נותן
$$\alpha=\frac{3}{2}.$$
בהצבה זו,
$$f(x,x^{3/2})=\frac{x^{3+3}}{x^6+x^6}=\frac{x^6}{2x^6}=\frac{1}{2}.$$

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

לאורך המסלול $y = x^{3/2}$ מתקבל הגבול $\frac{1}{2}$.

(ד) מסקנה. לאורך הישרים והפרבולה הגבול הוא 0, בעוד שלאורך $y = x^{3/2}$ הגבול הוא $\frac{1}{2}$. שני מסלולים נותנים גבולות שונים, ולכן

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^4} \text{ אינו קיים.}}$$



□

ניצחון

תרגיל 1.2.4.

חשבו את הגבול או הוכיחו שאינו קיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{1/(x^4+y^4)}.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

כותבים את הביטוי בצורה $\exp(\frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^4+y^4})$; הגבול של המעריך מתנהג כמו $\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, אשר ערכו תלוי במסלול.

עבור $(x,y)\neq(0,0)$ נכתוב

$$(1+x^2y^2)^{1/(x^4+y^4)}=\exp\left(\frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^4+y^4}\right).$$

נסמן $u:=x^2y^2\geq 0$. מנוסחת טיילור עם שארית לגראנז' עבור $\ln(1+u)$ קיים $\eta\in(0,u)$ כך ש-

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2(1+\eta)^2}.$$

בסביבת הראשית מתקיים $u\leq 1$, ולכן $(1+\eta)^2\geq 1$, ומכאן

$$|\ln(1+u)-u|\leq\frac{u^2}{2}.$$

חלוקה ב-u (כאשר $u>0$) נותנת

$$\left|\frac{\ln(1+u)}{u}-1\right|\leq\frac{u}{2}\xrightarrow[u\to 0]{}0.$$

לכן, עבור כל מסלול $(x,y)\to(0,0)$ שלאורכו $x^2y^2>0$ מתקיים

$$\frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^4+y^4}=\frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{x^4+y^4},$$

והגורם הראשון שואף ל-1. מספיק אם כן לנתח את הביטוי

$$\varphi(x,y):=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}.$$

לאורך ציר $y=0$: $\varphi(x,0)=0$, ולכן הביטוי המקורי שואף ל-$\exp(0)=1$.
לאורך האלכסון $y=x$ ($x\neq 0$):

$$\varphi(x,x)=\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2},$$

ולכן הביטוי המקורי שואף ל-$\exp(\frac{1}{2})=\sqrt{e}$.
שני מסלולים נותנים שני ערכים שונים, ולכן

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{1/(x^4+y^4)}\text{ אינו קיים.}}$$

□

ניצחון

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

תרגיל 1.2.5.

חשבו את הגבול בתלת-ממד:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

כל אחת מהקואורדינטות חסומה על ידי המרחק $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ולכן $|xyz| \leq r^3$ והמנה חסומה על ידי r.

נסמן $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. מהאי-שוויונים $x^2 \leq r^2$, $y^2 \leq r^2$, $z^2 \leq r^2$ מקבלים

$$|x| \leq r, \quad |y| \leq r, \quad |z| \leq r,$$

ומכאן

$$|xyz| \leq r^3.$$

לכן עבור $(x,y,z) \neq (0,0,0)$,

$$0 \leq \left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| = \frac{|xyz|}{r^2} \leq \frac{r^3}{r^2} = r.$$

כאשר $(x,y,z) \to (0,0,0)$ מתקיים $r \to 0$, ולפי משפט הסנדוויץ'

$$\boxed{\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.6.

חשבו את הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}.$$

פתרון.

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

עיקרון מנחה

כפל מונה ומכנה בצמוד $\sqrt{1+x^2+y^2}+1$ מבטל את השורש ומותיר ביטוי רציף שניתן לחשב בהצבה ישירה.

נכפיל את המונה ואת המכנה בצמוד $\sqrt{1+x^2+y^2}+1$:

$$\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}=\frac{(1+x^2+y^2)-1}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)}.$$

עבור $(x,y)\neq(0,0)$ ניתן לצמצם, ומקבלים

$$\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}+1}.$$

האגף הימני הוא פונקציה רציפה בכל $\mathbf{R}^2$, ולכן הגבול שלו ב-$(0,0)$ מתקבל בהצבה ישירה:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}.$$

מסקנה:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.7.

תהי

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. הראו שלכל $y_0\in\mathbf{R}$ קבוע, הפונקציה $x\mapsto f(x,y_0)$ רציפה.
2. הראו שלכל $x_0\in\mathbf{R}$ קבוע, הפונקציה $y\mapsto f(x_0,y)$ רציפה.
3. הוכיחו ש-f *אינה* רציפה ב-$(0,0)$.

פתרון.

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

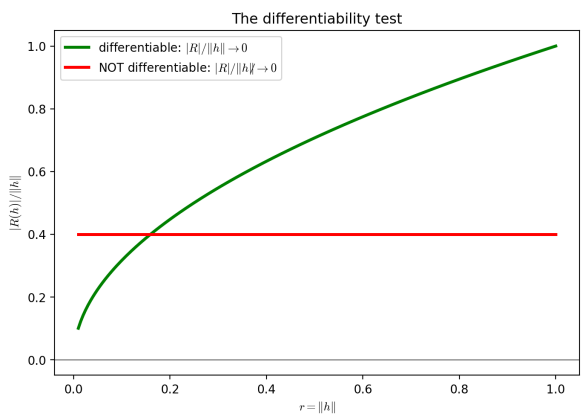
עיקרון מנחה

הפונקציה רציפה בכל ציר בנפרד מפני שהיא מתאפסת על הצירים, אך לאורך האלכסון $y = x$ היא קבועה $\frac{1}{2}$ – כך שאין לה גבול ב-$(0,0)$, ולכן אינה רציפה שם.

(א) רציפות ב-x עבור $y_0 \in \mathbf{R}$ קבוע. עבור $y_0 \neq 0$ הפונקציה $g(x) := f(x, y_0) = \frac{xy_0}{x^2 + y_0^2}$ היא מנה של פולינומים שמכנה שלה אינו מתאפס ($x^2 + y_0^2 \geq y_0^2 > 0$), ולכן רציפה בכל $\mathbf{R}$. עבור $y_0 = 0$ מתקיים $f(x, 0) = 0$ לכל $x \in \mathbf{R}$ (בפרט $f(0,0) = 0$ לפי ההגדרה), ולכן g קבועה ורציפה.
(ב) רציפות ב-y עבור $x_0 \in \mathbf{R}$ קבוע. בסימטריה מלאה לסעיף (א), הפונקציה $y \mapsto f(x_0, y)$ רציפה לכל $x_0 \in \mathbf{R}$.
(ג) אי-רציפות משותפת ב-$(0,0)$. לאורך ציר $y = 0$ מתקיים $f(x, 0) = 0$, ולכן הגבול לאורך הציר הוא 0. לעומת זאת לאורך האלכסון $y = x$ ($x \neq 0$):

$$f(x, x) = \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

שני מסלולים שונים נותנים את הערכים 0 ו-$\frac{1}{2}$, ולכן לא קיים מספר $L \in \mathbf{R}$ כך ש-$f(x,y) \to L$ כאשר $(x,y) \to (0,0)$. מאחר ש-f רציפה ב-$(0,0)$ $\Leftrightarrow$ הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ קיים ושווה $f(0,0) = 0$, נסיק כי f אינה רציפה ב-$(0,0)$.



□

ניצחון

תרגיל 1.2.8.

תהי

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. הוכיחו ש-f רציפה ב-$(0,0)$.
2. חשבו $D_{\vec{v}}f(0,0)$ לכל וקטור יחידה $\vec{v}=(v_1,v_2)$.
3. הסיקו ש-f אינה דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

הנגזרת הכיוונית בנקודה הראשית מתקבלת באופן מפורש כ-$D_{\vec{v}}f(0,0)=v_1^3$, והיא איננה ליניארית בכיוון $\vec{v}$; לכן לא קיים קירוב ליניארי $Ah+Bk$ המתאים לדרישת הדיפרנציאביליות.

(א) רציפות ב-$(0,0)$. עבור $(x,y)\neq(0,0)$ מתקיים $x^2\leq x^2+y^2$, ולכן

$$|f(x,y)|=\frac{|x|^3}{x^2+y^2}=|x|\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}\leq|x|.$$

כאשר $(x,y)\to(0,0)$ מתקיים $|x|\to 0$, ולפי משפט הסנדוויץ' $f(x,y)\to 0=f(0,0)$. לכן f רציפה ב-$(0,0)$.

(ב) חישוב הנגזרת הכיוונית. תהי $\vec{v}=(v_1,v_2)$ וקטור יחידה ($v_1^2+v_2^2=1$). עבור $t\neq 0$,

$$f(tv_1,tv_2)=\frac{(tv_1)^3}{(tv_1)^2+(tv_2)^2}=\frac{t^3v_1^3}{t^2(v_1^2+v_2^2)}=tv_1^3.$$

לכן

$$D_{\vec{v}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{tv_1^3}{t}=v_1^3.$$

בפרט $f_x(0,0)=D_{(1,0)}f(0,0)=1$ ו-$f_y(0,0)=D_{(0,1)}f(0,0)=0$.

(ג) אי-דיפרנציאביליות ב-$(0,0)$. אילו f הייתה דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$, אזי לפי ההגדרה היו קיימים $A,B\in\mathbf{R}$ שעבורם

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-Ah-Bk}{\sqrt{h^2+k^2}}=0,$$

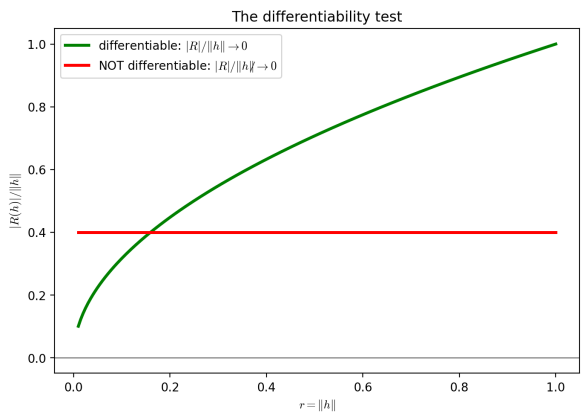
ובהכרח $A=f_x(0,0)=1$, $B=f_y(0,0)=0$. בדיקה לאורך המסלול $(h,k)=(tv_1,tv_2)$, $t>0$:

$$\frac{f(tv_1,tv_2)-A\,tv_1-B\,tv_2}{\sqrt{t^2}}=\frac{tv_1^3-tv_1}{t}=v_1^3-v_1=v_1(v_1^2-1)=-v_1v_2^2.$$

עבור $\vec{v}=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ הביטוי שווה $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\neq 0$, ולכן הגבול הדרוש איננו אפס. בסתירה להנחה, מסקנה:

$$\boxed{f\text{ אינה דיפרנציאבילית ב-}(0,0).}$$

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.



□

ניצחון

תרגיל 1.2.9.

תהי

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. הראו שלאורך כל ישר העובר ב-$(0,0)$ הגבול הוא 0.
2. הראו שלאורך $x = y^2$ הגבול $1/2$. מסקנה?
3. חשבו $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.
4. האם f דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$?

פתרון.

עיקרון מנחה

המכנה x^2+y^4 "מאוזן" לאורך הפרבולה $x = y^2$, שבה הפונקציה קבועה $\frac{1}{2}$; מכאן ש-f אינה רציפה ב-$(0,0)$, ובפרט אינה דיפרנציאבילית שם, אף שהנגזרות החלקיות מתאפסות בנקודה.

(א) ישרים $y = mx$, $m \neq 0$.

$$f(x,mx) = \frac{x \cdot m^2x^2}{x^2+m^4x^4} = \frac{m^2x^3}{x^2(1+m^4x^2)} = \frac{m^2x}{1+m^4x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

על ציר $x=0$ מתקיים $f(0,y)=0$, ועל ציר $y=0$ מתקיים $f(x,0)=0$. מכאן שלאורך כל ישר העובר ב-$(0,0)$ הגבול שווה 0.

(ב) מסלול $x=y^2$. עבור $y\neq 0$,

$$f(y^2,y)=\frac{y^2\cdot y^2}{(y^2)^2+y^4}=\frac{y^4}{2y^4}=\frac{1}{2}.$$

לאורך המסלול הזה הביטוי קבוע $\frac{1}{2}$, ומכאן שהגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ אינו קיים. בפרט, מאחר ש-$f(0,0)=0$, הפונקציה f אינה רציפה ב-$(0,0)$.

(ג) הנגזרות החלקיות בנקודת הראשית.

$$f(h,0)=\frac{h\cdot 0^2}{h^2+0}=0,\qquad f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

באופן דומה,

$$f(0,k)=\frac{0\cdot k^2}{0+k^4}=0,\qquad f_y(0,0)=0.$$

(ד) דיפרנציאביליות. לפי הטענה הכללית (אותה נוכיח בתרגיל בהמשך), אם f דיפרנציאבילית ב-(x_0,y_0) אזי היא רציפה שם:

$$f\text{-דיפרנציאבילית ב}\ (x_0,y_0)\ \Rightarrow\ f\text{-רציפה ב}\ (x_0,y_0).$$

לפי הקונטרהפוזיטיב, אי-רציפות גוררת אי-דיפרנציאביליות. מאחר ש-f אינה רציפה ב-$(0,0)$,

$$\boxed{f\text{-אינה דיפרנציאבילית ב}\ (0,0).}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.10.

תהי

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. הוכיחו ש-f רציפה ב-$(0,0)$.
2. חשבו $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.
3. הוכיחו מההגדרה ש-f דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.
4. הראו ש-f_x (כפונקציה) *אינה* רציפה ב-$(0,0)$.

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

פתרון.

עיקרון מנחה

הפונקציה היא הגרסה הדו-ממדית של $t^2\sin(1/t)$: הגורם (x^2+y^2) דועך מספיק כדי לכפות דיפרנציאביליות, אך f_x מתנדנדת ליד הראשית ואינה רציפה שם.

נסמן $r := \sqrt{x^2+y^2}$.

(א) רציפות ב-$(0,0)$. $|\sin(1/r)|\leq 1$ ולכן

$$|f(x,y)|=(x^2+y^2)\,|\sin(1/r)|\leq r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0=f(0,0),$$

כלומר f רציפה ב-$(0,0)$.

(ב) הנגזרות החלקיות בנקודת הראשית. $f(h,0)=h^2\sin(1/|h|)$, ולכן

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=h\sin(1/|h|),\qquad |h\sin(1/|h|)|\leq |h|\xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

לפי משפט הסנדוויץ' $f_x(0,0)=0$, ובסימטריה $f_y(0,0)=0$.

(ג) דיפרנציאביליות מההגדרה. המועמדים לקירוב הליניארי הם $A=B=0$, והשארית היא $R(h,k)=f(h,k)$. מאחר ש-

$$\frac{|R(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{(h^2+k^2)\,|\sin(1/\sqrt{h^2+k^2})|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leq \sqrt{h^2+k^2}\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0,$$

לפי ההגדרה

$$\boxed{L\equiv 0.\ \text{עם קירוב ליניארי}\quad (0,0)\ \text{דיפרנציאבילית ב-}f}$$

(ד) אי-רציפות של f_x ב-$(0,0)$. עבור $(x,y)\neq(0,0)$, נחשב לפי כללי הגזירה ובהשתמשות ב-$\partial r/\partial x = x/r$:

$$f_x(x,y)=2x\sin(1/r)+(x^2+y^2)\cos(1/r)\cdot\left(-\frac{x}{r^3}\right)=2x\sin(1/r)-\frac{x}{r}\cos(1/r).$$

לאורך הציר $y=0$, $x>0$ ($r=x$),

$$f_x(x,0)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x).$$

עבור הסדרה $x_n=1/(2n\pi)\to 0^+$ מתקבל $\sin(2n\pi)=0$ ו-$\cos(2n\pi)=1$, ולכן $f_x(x_n,0)=-1$.
עבור $x_n=1/((2n+1)\pi)\to 0^+$ מתקבל $\sin((2n+1)\pi)=0$ ו-$\cos((2n+1)\pi)=-1$, ולכן $f_x(x_n,0)=1$. שתי תת-סדרות מתכנסות לנקודה הראשית עם ערכי f_x שונים, ולכן f_x אינה בעלת גבול ב-$(0,0)$ ובפרט אינה רציפה שם.

$$\boxed{\text{באף סביבה של הראשית.}C^1\ \text{אך אינה}\ (0,0)\ \text{דיפרנציאבילית ב-}f}$$

□

ניצחון

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

תרגיל 1.2.11.

תהי $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + x - y + 5$. הוכיחו מההגדרה ש-$f$ דיפרנציאבילית ב-$(1,1)$, ומצאו את הקירוב הליניארי.

פתרון.

עיקרון מנחה

המקדמים בקירוב הליניארי הם בהכרח $f_x(1,1)$ ו-$f_y(1,1)$; הצבת $x = 1+h,\ y = 1+k$ חושפת שהשארית היא צורה ריבועית, וצורות ריבועיות חסומות על ידי $6\rho^2$.

ערכי f ונגזרותיה בנקודה $(1,1)$:

$$f(1,1) = 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1^2 + 1 - 1 + 5 = 7,$$

$$f_x(x,y) = 2x - 2y + 1, \qquad f_y(x,y) = -2x + 6y - 1,$$

$$f_x(1,1) = 1, \qquad f_y(1,1) = 3.$$

מקדמי הקירוב הליניארי המתחייבים הם $A = 1$, $B = 3$, כלומר

$$L(h,k) := f(1,1) + Ah + Bk = 7 + h + 3k.$$

חישוב $f(1+h, 1+k)$ בעזרת הצבה ופישוט:

$$(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2,$$

$$-2(1+h)(1+k) = -2 - 2h - 2k - 2hk,$$

$$3(1+k)^2 = 3 + 6k + 3k^2,$$

$$(1+h) - (1+k) = h - k.$$

איסוף כל הביטויים נותן

$$f(1+h, 1+k) = 7 + h + 3k + h^2 - 2hk + 3k^2.$$

מכאן השארית

$$R(h,k) := f(1+h,1+k) - L(h,k) = h^2 - 2hk + 3k^2.$$

נסמן $\rho := \sqrt{h^2+k^2}$. מאחר ש-$|h|, |k| \le \rho$ ו-$2|hk| \le h^2 + k^2 \le 2\rho^2$, מתקבל

$$|R(h,k)| \le h^2 + 2|hk| + 3k^2 \le \rho^2 + 2\rho^2 + 3\rho^2 = 6\rho^2.$$

לכן עבור $(h,k) \neq (0,0)$,

$$0 \le \frac{|R(h,k)|}{\rho} \le 6\rho \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0.$$

לפי הגדרת הדיפרנציאביליות,

$$\boxed{f \text{ דיפרנציאבילית ב-} (1,1), \qquad L(h,k) = 7 + h + 3k.}$$

□

ניצחון

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

תרגיל 1.2.12.

חשבו את הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(x^2+y^2)}{\ln(1+x^2+y^2)}.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

המונה והמכנה הם פונקציות של $u := x^2+y^2$ בלבד; הגבולות החד-ממדיים הידועים $\arctan u/u \to 1$ ו-$\ln(1+u)/u \to 1$ נותנים את התשובה.

נציב $u := x^2+y^2$. כאשר $(x,y)\to(0,0)$ מתקיים $u \to 0^+$, ולכן

$$\frac{\arctan(x^2+y^2)}{\ln(1+x^2+y^2)} = \frac{\arctan u}{\ln(1+u)}.$$

מן הגבולות הידועים מחדו"א 1 (לופיטל או טיילור),

$$\lim_{u\to 0}\frac{\arctan u}{u} = 1, \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1.$$

לכן עבור $u>0$ קטן,

$$\frac{\arctan u}{\ln(1+u)} = \frac{\arctan u}{u}\cdot\frac{u}{\ln(1+u)} \xrightarrow[u\to 0^+]{} 1\cdot 1 = 1.$$

מסקנה:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(x^2+y^2)}{\ln(1+x^2+y^2)} = 1.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.13.

תהי $f: D \to \mathbf{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית על תחום פתוח $D \subseteq \mathbf{R}^2$ המקיימת $f_x \equiv f_y \equiv 0$ ב-D.

1. הוכיחו ש-f קבועה כאשר $D = (a,b)\times(c,d)$ היא תיבה פתוחה.
2. הראו דוגמה נגדית לטענת הקביעות כאשר D אינה קשירה.

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

פתרון.

עיקרון מנחה

מנקודה P_0 לנקודה P_1 בתיבה ניתן לעבור על ידי שני מקטעים אופקי ואנכי שעליהם f היא פונקציה במשתנה אחד עם נגזרת אפס; אם התחום אינו קשיר ניתן להגדיר ערכים שונים על שני רכיבים נפרדים.

(א) הוכחה לתיבה. תהיינה $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ שתי נקודות ב-$D = (a, b) \times (c, d)$. מאחר ש-$x_1 \in (a, b)$ ו-$y_0 \in (c, d)$, הנקודה $Q := (x_1, y_0)$ שייכת אף היא ל-D.
על המקטע מ-P_0 ל-Q הקואורדינטה y קבועה. נגדיר $g(x) := f(x, y_0)$ על הקטע שבין x_0 ל-x_1. מאחר ש-$g'(x) = f_x(x, y_0) = 0$, משפט הערך הממוצע מחדו"א 1 נותן $g(x_0) = g(x_1)$, כלומר

$$f(x_0, y_0) = f(x_1, y_0).$$

על המקטע מ-Q ל-P_1 הקואורדינטה x קבועה. נגדיר $h(y) := f(x_1, y)$ על הקטע שבין y_0 ל-y_1. מאחר ש-$h'(y) = f_y(x_1, y) = 0$,

$$f(x_1, y_0) = f(x_1, y_1).$$

שילוב שתי השוויונות:

$$f(P_0) = f(x_0, y_0) = f(x_1, y_0) = f(x_1, y_1) = f(P_1).$$

מאחר ש-$P_0, P_1 \in D$ שרירותיות, f קבועה ב-D.
(ב) דוגמה נגדית כאשר D אינה קשירה. נגדיר

$$D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < -1\},$$

שהוא פתוח אך מורכב משני רכיבי קשירות זרים. הפונקציה

$$f(x, y) := \begin{cases} 5, & x > 0, \\ 7, & x < -1, \end{cases}$$

מקיימת $f_x \equiv f_y \equiv 0$ על כל רכיב של D, אך אינה קבועה ב-D: היא מקבלת את שני הערכים השונים 5 ו-7. מסקנה:

$$\boxed{f_x \equiv f_y \equiv 0 \Rightarrow f \text{ קבועה רק כאשר התחום } D \text{ קשיר.}}$$

□

ניצחון

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

תרגיל 1.2.14.

תהי

$$f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}\quad (x+y\neq 0).$$

חשבו:

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right),\quad B=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right),\quad C=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y).$$

פתרון.

עיקרון מנחה

אם הגבול הדו-ממדי C קיים, אזי שני הגבולות האיטרטיביים שווים לו; ולכן $A\neq B$ גורר באופן מיידי שהגבול הדו-ממדי אינו קיים.

חישוב A. עבור $x\neq 0$, $y\to 0$ נותן $x+y\to x\neq 0$ ו-

$$\lim_{y\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}=\frac{x+x^2}{x}=1+x.$$

לכן

$$A=\lim_{x\to 0}(1+x)=1.$$

חישוב B. עבור $y\neq 0$, $x\to 0$ נותן

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}=\frac{-y+y^2}{y}=-1+y,$$

ולכן

$$B=\lim_{y\to 0}(-1+y)=-1.$$

מאחר ש-$A=1\neq -1=B$ ולפי המשפט הקיום של C היה גורר $A=B=C$, נסיק כי C אינו קיים:

$$\boxed{A=1,\qquad B=-1,\qquad C\text{ אינו קיים.}}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.15.

תהי $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$. הוכיחו מההגדרה ש-$f$ דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$ ומצאו את הקירוב הליניארי שלה שם.

פתרון.

עיקרון מנחה

כפל בצמוד מראה ש-$\sqrt{1+u}-1 = u/(\sqrt{1+u}+1)$; מכאן השארית מסדר ρ^2, והתנאי $R/\rho \to 0$ מקבלים מיד.

ערך הפונקציה ונגזרותיה בנקודה הראשית:

$$f(0,0)=\sqrt{1}=1, \qquad f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \qquad f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}},$$

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0.$$

לכן הקירוב הליניארי המתחייב הוא $L(h,k)\equiv 1$, והשארית

$$R(h,k)=f(h,k)-L(h,k)=\sqrt{1+h^2+k^2}-1.$$

כפל המונה והמכנה של $\sqrt{1+u}-1$ בצמוד $\sqrt{1+u}+1$ נותן

$$\sqrt{1+u}-1=\frac{u}{\sqrt{1+u}+1}.$$

עם $u=h^2+k^2$,

$$R(h,k)=\frac{h^2+k^2}{\sqrt{1+h^2+k^2}+1}.$$

המכנה גדול מ-2, ולכן $|R(h,k)|\le \frac{1}{2}(h^2+k^2)=\frac{1}{2}\rho^2$, כאשר $\rho := \sqrt{h^2+k^2}$. מכאן

$$0\le \frac{|R(h,k)|}{\rho}\le \frac{\rho}{2}\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0,$$

ולפי ההגדרה

$$\boxed{L(h,k)=1. \text{ עם קירוב ליניארי } (0,0) \text{ דיפרנציאבילית ב-} f}$$

□

ניצחון

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

תרגיל 1.2.16.

תהי $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$. הוכיחו ש-f רציפה ב-$(0,0)$, חשבו את $f_x(0,0)$ ו-$f_y(0,0)$, והוכיחו מההגדרה כי f אינה דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

מהאי-שוויון $|xy|\leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ נקבל רציפות וגם מתאפסות הנגזרות החלקיות בראשית; אך לאורך האלכסון $k=h$ השארית מתנהגת כמו $\rho/\sqrt{2}$, ולכן $R/\rho \not\to 0$.

מאחר ש-$2|xy|\leq x^2+y^2$, מתקיים

$$|f(x,y)|=\sqrt{|xy|}\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0=f(0,0),$$

ולכן f רציפה ב-$(0,0)$.
הנגזרות החלקיות בנקודה הראשית מתקבלות מן הזהות $f(h,0)=\sqrt{|h\cdot 0|}=0$:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,\qquad f_y(0,0)=0.$$

אילו f הייתה דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$, אזי בהכרח $A=B=0$, השארית הייתה $R(h,k)=f(h,k)=\sqrt{|hk|}$, והגבול

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|R(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

היה שווה אפס. נבחן את אגף השמאל לאורך המסלול (h,h) עם $h>0$:

$$\frac{|R(h,h)|}{\sqrt{h^2+h^2}}=\frac{\sqrt{h^2}}{\sqrt{2h^2}}=\frac{h}{h\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\not\to 0.$$

לכן הגבול הדרוש אינו אפס, ובסתירה להנחה

$$\boxed{f\text{ אינה דיפרנציאבילית ב-}(0,0).}$$

□

ניצחון

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

תרגיל 1.2.17.

נגדיר $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ על ידי

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. הוכיחו ש-f רציפה ב-$(0,0)$.
2. חשבו $f_x(0,0)$ ו-$f_y(0,0)$ מההגדרה.
3. הוכיחו מההגדרה ש-f דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

האקספוננטה e^{-t} דועכת מהר יותר מכל חזקה פולינומית של t; מכאן ש-f "שטוחה" בנקודה הראשית, והקירוב הליניארי הוא $L\equiv 0$.

נסמן $\rho:=\sqrt{x^2+y^2}$. נשתמש בהמשך בעובדה הידועה מחדו"א 1 ש-

$$\lim_{t\to+\infty} t^n e^{-t}=0 \qquad \text{לכל } n\in\mathbf{N}.$$

(א) רציפות ב-$(0,0)$. כאשר $(x,y)\to(0,0)$ מתקיים $\rho\to 0^+$, ולכן $1/\rho^2\to+\infty$ ו-

$$e^{-1/\rho^2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0=f(0,0),$$

כלומר f רציפה ב-$(0,0)$.

(ב) הנגזרות החלקיות בנקודה הראשית. עבור $h\neq 0$,

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{e^{-1/h^2}}{h}.$$

נציב $t:=1/h^2$. כאשר $h\to 0$ מתקיים $t\to+\infty$, ו-$|h|=1/\sqrt{t}$. מכאן

$$\left|\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\right|=\sqrt{t}\,e^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

ולכן $f_x(0,0)=0$. בסימטריה $f_y(0,0)=0$.

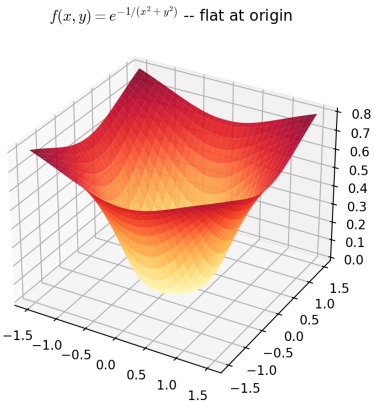
(ג) דיפרנציאביליות מההגדרה. המקדמים בקירוב הליניארי הם $A=B=0$, והשארית $R(h,k)=f(h,k)$. עבור $\rho>0$, בעזרת ההצבה $t:=1/\rho^2$,

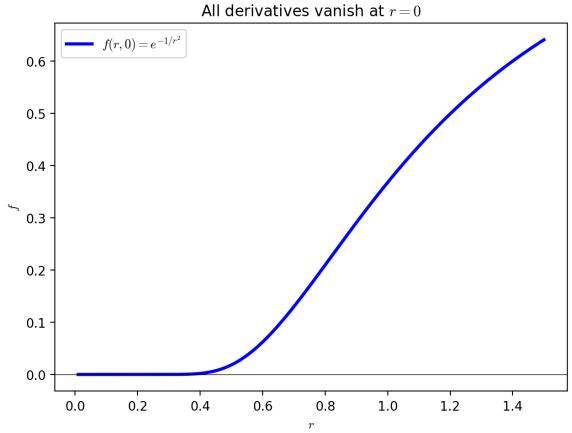
$$\frac{|R(h,k)|}{\rho}=\frac{e^{-1/\rho^2}}{\rho}=\sqrt{t}\,e^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

לפי ההגדרה,

$$\boxed{f\text{-ב דיפרנציאבילית } (0,0) \text{ עם קירוב ליניארי } L\equiv 0.}$$

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.





□

ניצחון

תרגיל 1.2.18.

הוכיחו ישירות מהגדרת ε-δ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

אי-השוויונות $x^2 \leq x^2+y^2$ ו-$|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ חוסמים את הביטוי על ידי $\sqrt{x^2+y^2}$; מכאן הבחירה $\delta = \varepsilon$ פותרת את הגדרת ה-ε-δ.

נחסום את הביטוי במונחי $\sqrt{x^2+y^2}$. עבור $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\,|y| \leq |y|,$$

כאשר השתמשנו ב-$x^2 \leq x^2+y^2$. מן האי-שוויון $y^2 \leq x^2+y^2$ נובע $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, ולכן

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

נוכיח את הגבול לפי הגדרת ε-δ. יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta := \varepsilon$. אזי לכל (x,y) המקיימת $0 < \sqrt{x^2+y^2} <$

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

δ,

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon. \checkmark$$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0, \quad \delta(\varepsilon) = \varepsilon.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.19.

תהי f דיפרנציאבילית ב-(a,b). הוכיחו, מן ההגדרה בלבד, כי

$$f\text{-דיפרנציאבילית ב-}(a,b) \;\Rightarrow\; f\text{-רציפה ב-}(a,b).$$

פתרון.

עיקרון מנחה

מן הגדרת הדיפרנציאביליות מקבלים $f(a+h,b+k)-f(a,b) = Ah+Bk+R(h,k)$ עם $R/\rho \to 0$; שלושת האיברים מימין שואפים לאפס, ולכן f רציפה ב-(a,b).

מהגדרת הדיפרנציאביליות קיימים $A,B \in \mathbf{R}$ כך שהשארית

$$R(h,k) := f(a+h,b+k)-f(a,b)-Ah-Bk$$

מקיימת

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R(h,k)}{\rho} = 0, \qquad \rho := \sqrt{h^2+k^2}.$$

נחסום את $|R|$: לפי הגדרת הגבול עם $\varepsilon = 1$ קיים $\delta_0 > 0$ כך שלכל $0 < \rho < \delta_0$ מתקיים $|R(h,k)|/\rho < 1$, כלומר

$$|R(h,k)| < \rho.$$

מאי-שוויון המשולש,

$$|f(a+h,b+k)-f(a,b)| = |Ah+Bk+R(h,k)| \le |A||h|+|B||k|+|R(h,k)|.$$

מאחר ש-$|h| \le \rho$, $|k| \le \rho$, ו-$|R(h,k)| < \rho$ לכל $0 < \rho < \delta_0$,

$$|f(a+h,b+k)-f(a,b)| \le (|A|+|B|+1)\rho.$$

כאשר $(h,k) \to (0,0)$ מתקיים $\rho \to 0$, ולכן

$$(|A|+|B|+1)\rho \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0,$$

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

ומכאן, לפי משפט הסנדוויץ',

$$f(a+h,b+k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} f(a,b).$$

לפי הגדרת הרציפות:

$$\boxed{f\text{-רציפה ב-}(a,b).}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.20.

תהי

$$g(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+y^2)^n}{n^2}.$$

1. מצאו את התחום שבו הטור מתכנס.
2. הוכיחו ש-g רציפה ב-$(0,0)$ ושוות שם 0.
3. הוכיחו ש-g דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

ההצבה $u:=x^2+y^2$ הופכת את הטור לטור חזקות חד-ממדי המתכנס בדיסק $\{u\le 1\}$; השוואה ל-$\sum 1/n^2$ נותנת חסם $g(x,y)\le \frac{\pi^2}{6}(x^2+y^2)$, ומכאן דיפרנציאביליות ב-$(0,0)$ עם קירוב $L\equiv 0$.

(א) תחום התכנסות. נסמן $u:=x^2+y^2\ge 0$. הטור הוא $\sum_{n=1}^{\infty}u^n/n^2$. לפי מבחן השורש,

$$\sqrt[n]{u^n/n^2}=\frac{u}{n^{2/n}}\xrightarrow[n\to\infty]{} u,$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט עבור $u<1$. עבור $u=1$ הטור הופך ל-$\sum 1/n^2<\infty$, ועבור $u>1$ האיבר הכללי שואף לאינסוף והטור מתבדר. תחום ההתכנסות הוא הדיסק הסגור

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}.$$

בנקודה הראשית, $g(0,0)=\sum_{n=1}^{\infty}0^n/n^2=0$.

(ב) רציפות ב-$(0,0)$**.** עבור $0\le u\le 1$ ולכל $n\ge 1$ מתקיים $u^n\le u$, ולכן

$$0\le g(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n^2}\le u\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}u=\frac{\pi^2}{6}(x^2+y^2).$$

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

כאשר $(x,y)\to(0,0)$ מתקיים $u\to 0$, ולכן $g(x,y)\to 0=g(0,0)$. מכאן g רציפה ב-$(0,0)$.
(ג) דיפרנציאביליות ב-$(0,0)$**.** מהזהות $g(h,0)=\sum_{n=1}^{\infty}h^{2n}/n^2$ נובע, עבור $0<|h|<1$,

$$\left|\frac{g(h,0)-g(0,0)}{h}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{2n-1}}{n^2}\right|\le|h|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|h|^{2n-2}}{n^2}\le|h|\cdot\frac{\pi^2}{6}\xrightarrow[h\to 0]{}0,$$

ולכן $g_x(0,0)=0$. בסימטריה, $g_y(0,0)=0$. המקדמים בקירוב הליניארי הם $A=B=0$, והשארית $R(h,k)=g(h,k)$. מהחסם של (ב),

$$\frac{|R(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}}\le\frac{\pi^2}{6}\sqrt{h^2+k^2}\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}0.$$

לפי ההגדרה,

$$\boxed{\text{דיפרנציאבילית ב-}g\text{ עם קירוב ליניארי }(0,0)\text{ עם }L\equiv 0.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.21.

תהי $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ המקיימת, לכל $(x,y)\in\mathbf{R}^2$,

$$|f(x,y)|\le 2026\,x^2+2026\,y^2.$$

הוכיחו כי f דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$, ומצאו את הקירוב הליניארי שלה שם.

פתרון.

עיקרון מנחה

החסם הריבועי שולט בכל החזקות הנמוכות יותר; הוא כופה $f(0,0)=0$ ו-$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, ומשאיר את השארית חסומה על ידי $2026\sqrt{x^2+y^2}$, ששואפת לאפס.

ערך הפונקציה בראשית. בנקודה $(x,y)=(0,0)$ האי-שוויון נותן

$$|f(0,0)|\le 2026\cdot 0+2026\cdot 0=0,$$

ולכן

$$f(0,0)=0.$$

הנגזרות החלקיות בראשית. עבור $h\neq 0$, מן האי-שוויון $|f(h,0)|\le 2026\,h^2$ מתקבל

$$\left|\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\right|=\left|\frac{f(h,0)}{h}\right|\le\frac{2026\,h^2}{|h|}=2026\,|h|\xrightarrow[h\to 0]{}0.$$

לשימוש לימודי אישי בלבד. אין להעתיק, לשכפל או להפיץ ללא אישור מפורש.

משפט הסנדוויץ' נותן

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0.$$

בסימטריה,

$$f_y(0,0) = 0.$$

הקירוב הליניארי המתחייב. המקדמים בקירוב הליניארי הם בהכרח $A = f_x(0,0) = 0$ ו-$B =$ $f_y(0,0) = 0$, ולכן הקירוב הליניארי המוצע הוא

$$L(x,y) \equiv 0.$$

בדיקת תנאי הדיפרנציאביליות. השארית היא $R(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - Ax - By = f(x,y)$. לכן, עבור $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - 0\cdot x - 0\cdot y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

מן החסם הנתון,

$$\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{2026\,x^2 + 2026\,y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2026\,\sqrt{x^2+y^2}.$$

מאחר ש-$2026\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$, משפט הסנדוויץ' נותן

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

לפי הגדרת הדיפרנציאביליות,

$$\boxed{f \text{ דיפרנציאבילית בנקודה } (0,0) \text{ עם קירוב ליניארי } L \equiv 0.}$$

הערה גיאומטרית. החסם $-2026(x^2+y^2) \leq f(x,y) \leq 2026(x^2+y^2)$ אומר שגרף f נלכד בין שני פרבולואידי-מהפכה חיובי ושלילי הנפגשים בראשית; מכאן ש-f קטנה שם מסדר ρ^2, וההשתוואה ל-$L \equiv 0$ פשוטה.

□

ניצחון