Contents

Part

1

TDRP: Truck-Drone collaborative Routing Problem

1

Traveling Salesman Problem with Drone

1.1 Flying Sidekick Traveling Salesman Problem

Flying Sidekick Traveling Salesman Problem (FSTSP) 由 Murray(2015) 等[1] 提出。FSTSP 描述：假定有 c 个顾客需要服务，这个服务可以由无人机或者卡车来提供，但是有些顾客由于某些限制（比如包裹重量超过无人机的载重限制）只能由卡车提供服务。卡车和无人机必须从单一仓库出发，并且返回该仓库一次，即不能重复访问该仓库，无人机和卡车可以同时或者分别离开（返回）仓库。在无人机起飞前需要卡车司机装载包裹和更换电池的时间 s_L，降落时需要给无人机装卸货物和充电的时间 s_R。每次无人机的一次服务称为一次 sortie，一次 sortie 分为三个节点 $\langle i, j, k \rangle$，起飞点 i 可以是仓库也可以是顾客点，中间节点 j 是需要服务的顾客节点，节点 k 可以是仓库也可以是卡车所在的顾客节点，无人机在整个运输过程中可以进行多次 sortie 服务多个顾客，但是一次 sortie 的时间必须在无人机的续航时间内。FSTSP 的目标是最小化服务所有顾客并且返回仓库（无人机和卡车都返回）的时间。

关键假设如下：

- 无人机每次 sortie 的过程中只能服务一个顾客节点，但是在这期间卡车可以服务多个顾客节点。
- 无人机被假定为匀速飞行，如果无人机比卡车提前到达汇合点则无人机不能在中途停下休息以节省电量。
- 无人机可以在降落点重新发射，但是无人机不能返回上一次的发射点。
- 无人机和卡车的汇合点必须在顾客节点，而不能在中间的任何位置汇合，并且卡车不会重新访问已经服务过的顾客节点来回收无人机。
- 无人机和卡车都不能访问除了仓库以外的非顾客节点（即只考虑简化过后的实际情况），并且无人机和卡车都不能重新访问已经服务过的顾客节点。
- 如果无人机返回仓库则不能再次进行服务，这是基于大多顾客节点都离仓库较远（大于无人机的续航里程）的假设，在无人机可以直接起飞服务顾客节点的假设下，PDSTSP 会更加适合。

FSTSP 数学模型的符号含义如表1-1所示。

FSTSP 数学模型可以表示为 MILP 1.1。

表 1-1: FSTSP 模型符号及含义

符号	含义
0	起点仓库
$c+1$	终点仓库（和起点仓库相同，只是为了建模方便的另一个记号）
$C=\{1,2,\cdots,c\}$	全部客户集合
$C' \subseteq C$	无人机可访问的客户集合
$N_0=\{0,1,2,\cdots,c\}$	流出节点集合
$N_+=\{1,2,\cdots,c+1\}$	流入节点集合
$N=\{0,1,2,\cdots,c,c+1\}$	全部节点集合
$\langle i,j,k\rangle \in P, i\in N_0, j\in\{C': j\neq i\}$, $k\in\{N_+ : k\neq i, k\neq j, \tau'_{ij}+\tau'_{jk}\leq e\}$	无人机飞行路径集合（符合模型约束的路径）
$\tau'_{ij}/\tau_{ij}, i\in N_0, j\in N_+, i\neq j, \tau_{0,c+1}\equiv 0$[a]	弧 $\langle i,j\rangle$ 的飞行/行驶时间成本
s_L/s_R	无人机发射/回收耗时
e	无人机续航时长，以单位时间来衡量
$x_{ij}\in\{0,1\}, i\in N_0, j\in N_+, i\neq j$	卡车路由决策变量
$y_{ijk}\in\{0,1\}, i\in N_0, j\in C, k\in\{N_+ : \langle i,j,k\rangle\in P\}$	无人机路由决策变量
$1\leq u_i\leq c+2$	卡车破子圈辅助变量
$t'_i/t_i\geq 0, i\in N_+, t'_0=t_0=0$	无人机/卡车有效到达时间戳辅助变量
$p_{ij}\in\{0,1\}$[b]$, p_{0j}=1 \forall j\in C$	无人机架次先后辅助变量（为了确保无人机连续的 sortie 和卡车访问的顺序一致[c]）

[a] 出于完备性的考虑，当只有一个顾客节点的时候，这个顾客将由无人机从仓库直接起飞进行服务。
[b] 当顾客节点 $i\in C$ 在顾客节点 $j\in\{C: j\neq i\}$ 被卡车访问的某个时间点前被卡车访问时，$p_{ij}=1$。
[c] 当顾客节点 i 或者 j 仅被无人机服务时，p_{ij} 的取值就不重要。

Model 1.1: FSTSP MILP

$$\min \quad t_{c+1} \tag{1-1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\substack{i\in N_0\\ i\neq j}} x_{ij} + \sum_{\substack{i\in N_0\\ i\neq j}} \sum_{\substack{k\in N_+\\ \langle i,j,k\rangle\in P}} y_{ijk} = 1, \quad \forall j \in C \tag{1-2}$$

$$\sum_{j\in N_+} x_{0j} = 1 \tag{1-3}$$

$$\sum_{i\in N_0} x_{i,c+1} = 1 \tag{1-4}$$

$$u_i - u_j + 1 \leq (c+2)(1 - x_{ij}), \quad \forall i \in C, j \in \{N_+ : j \neq i\} \tag{1-5}$$

$$\sum_{\substack{i\in N_0\\ i\neq j}} x_{ij} = \sum_{\substack{k\in N_+\\ k\neq j}} x_{jk}, \quad \forall j \in C \tag{1-6}$$

$$\sum_{\substack{j\in C\\ j\neq i}} \sum_{\substack{k\in N_+\\ \langle i,j,k\rangle\in P}} y_{ijk} \leq 1, \quad \forall i \in N_0 \tag{1-7}$$

$$\sum_{\substack{i\in N_0\\ i\neq k}} \sum_{\substack{j\in C\\ \langle i,j,k\rangle\in P}} y_{ijk} \leq 1, \quad \forall k \in N_+ \tag{1-8}$$

$$2y_{ijk} \leq \sum_{\substack{h\in N_0\\ h\neq i}} x_{hi} + \sum_{\substack{l\in C\\ l\neq k}} x_{lk}, \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\}, k \in \{N_+ : \langle i,j,k\rangle \in P\} \tag{1-9}$$

$$y_{0jk} \leq \sum_{\substack{h\in N_0\\ h\neq k}} x_{hk}, \quad \forall j \in C, k \in \{N_+ : \langle 0,j,k\rangle \in P\} \tag{1-10}$$

$$u_k - u_i \geq 1 - (c+2)\left(1 - \sum_{\substack{j\in C\\ \langle i,j,k\rangle\in P}} y_{ijk}\right), \quad \forall i \in C, k \in \{N_+ : k \neq i\} \tag{1-11}$$

$$t'_i \geq t_i - M\left(1 - \sum_{\substack{j\in C\\ j\neq i}} \sum_{\substack{k\in N_+\\ \langle i,j,k\rangle\in P}} y_{ijk}\right), \quad \forall i \in C \tag{1-12}$$

$$t'_i \leq t_i + M\left(1 - \sum_{\substack{j\in C\\ j\neq i}} \sum_{\substack{k\in N_+\\ \langle i,j,k\rangle\in P}} y_{ijk}\right), \quad \forall i \in C \tag{1-13}$$

$$t'_k \geq t_k - M\left(1 - \sum_{\substack{i\in N_0\\ i\neq k}} \sum_{\substack{j\in C\\ \langle i,j,k\rangle\in P}} y_{ijk}\right), \quad \forall k \in N_+ \tag{1-14}$$

$$t'_k \leq t_k + M\left(1 - \sum_{\substack{i\in N_0\\ i\neq k}} \sum_{\substack{j\in C\\ \langle i,j,k\rangle\in P}} y_{ijk}\right), \quad \forall k \in N_+ \tag{1-15}$$

continued

$$t_k \geq t_h + \tau_{hk} + s_L \left(\sum_{\substack{l \in C \\ l \neq k}} \sum_{\substack{m \in N_+ \\ \langle k,l,m \rangle \in P}} y_{klm} \right) + s_R \left(\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq k}} \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \right) - M(1 - x_{hk}),$$
$$\forall h \in N_0, k \in \{N_+ : k \neq h\} \tag{1-16}$$

$$t'_j \geq t'_i + \tau'_{ij} - M \left(1 - \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall j \in C', i \in \{N_0 : i \neq j\} \tag{1-17}$$

$$t'_k \geq t'_j + \tau'_{jk} + s_R - M \left(1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall j \in C', k \in \{N_+ : k \neq j\} \tag{1-18}$$

$$t'_k - (t'_j - \tau'_{ij}) \leq e + M(1 - y_{ijk}), \quad \forall k \in N_+, j \in \{C : j \neq k\}, i \in \{N_0 : \langle i,j,k \rangle \in P\} \tag{1-19}$$

$$u_i - u_j \geq 1 - (c+2)p_{ij}, \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\} \tag{1-20}$$

$$u_i - u_j \leq -1 + (c+2)(1 - p_{ij}), \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\} \tag{1-21}$$

$$p_{ij} + p_{ji} = 1, \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\} \tag{1-22}$$

$$t'_l \geq t'_k - M \left(3 - \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P \\ j \neq l}} y_{ijk} - \sum_{\substack{m \in C \\ m \neq i \\ m \neq k \\ m \neq l}} \sum_{\substack{n \in N_+ \\ \langle l,m,n \rangle \in P \\ n \neq i \\ n \neq k}} y_{lmn} - p_{il} \right) \tag{1-23}$$
$$\forall i \in N_0, k \in \{N_+ : k \neq i\}, l \in \{C : l \neq i, l \neq k\}$$

$$t_0 = 0 \tag{1-24}$$

$$t'_0 = 0 \tag{1-25}$$

$$p_{0j} = 1, \quad \forall j \in C \tag{1-26}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N_0, j \in \{N_+ : j \neq i\} \tag{1-27}$$

$$y_{ijk} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N_0, j \in \{C : j \neq i\}, k \in \{N_+ : \langle i,j,k \rangle \in P\} \tag{1-28}$$

$$1 \leq u_i \leq c+2, \quad \forall i \in N_+ \tag{1-29}$$

$$t_i \geq 0, \quad \forall i \in N \tag{1-30}$$

$$t'_i \geq 0, \quad \forall i \in N \tag{1-31}$$

$$p_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N_0, j \in \{C : j \neq i\} \tag{1-32}$$

约束1-1追求最小化卡车到达终点仓库 $c+1$ 的有效时间 t_{c+1}，通过约束

约束条件可以分为四类[2]：

- 客户有关的约束：约束 1-2 要求对于任何一位顾客 j，必须且只能被卡车（或无人机）服务一次。
- 卡车有关的约束：
  - 卡车流平衡约束：约束 1-3 要求卡车从起点仓库流出，约束 1-4 要求卡车从终点仓库流入，

约束 1-6 要求卡车在中间节点满足流入和流出相等的流平衡约束。

- 卡车破子圈约束：约束 1-5 是 MTZ 形式的破子圈约束[3-4]，去除了子圈存在的可能，这里 M 取到了 $u_i - u_j + 1$ 的上界 $c+2$，u_i 可以理解为点 i 的访问次序，比如 $u_1 = 5$ 可以理解为点 1 是从出发点开始，第五个被访问到的点。

- 无人机有关的约束：
  - 无人机发射、回收节点流约束：约束 1-7 表示无人机可以从非终点仓库流出，约束 1-8 表示无人机可以从非起点仓库流入。
  - 无人机访问、回收节点时间戳约束：约束 1-17 表示无人机访问顾客的时间戳应该符合时间逻辑，即不早于起飞时间戳 t'_i+ 前往服务顾客点的飞行时长 τ'_{ij}，约束 1-18 表示无人机回到卡车的时间戳应该符合时间逻辑，即不早于访问顾客点的 t'_j+ 返回卡车的飞行时长 τ'_{jk}+ 回收无人机用时 s_R。
  - 无人机电量续航约束：约束 1-19 表示无人机的飞行时间不能超过其续航时间，即到达汇合点 t'_k 的有效时间-无人机的起飞时间 $t'_j - \tau'_{ij}$（不直接使用 t'_i 是因为 t'_i 不是起飞的时间戳而是无人机到达 i 点的时间戳）要在无人机的续航时间 e 之内。
  - 无人机飞行次序约束：约束 1-23 要求无人机对于任意两条路径 $\langle i,j,k\rangle$ 和 $\langle l,m,n\rangle$ 而言，如果无人机先访问顾客点 i 之后的某个时间才访问顾客点 l（$p_{il}=1$），则无人机必须先完成上一次飞行才能继续下一次飞行（$t'_l \geq t'_k$），并且任意两条路径之间无交叉。

- 无人机和卡车同步有关的约束：
  - 无人机发射、回收点卡车访问约束：约束 1-9 要求对于非起点发射的无人机（$\forall i \in C$），卡车必须经过无人机的起飞点 i 和降落点 k，约束 1-10 要求对于从起点仓库起飞的无人机来说，卡车必须经过无人机的降落点。
  - 无人机访问顾客时卡车访问次序约束：约束 1-11 要求卡车必须先访问无人机的起飞点再访问无人机的降落点。
  - 无人机发射点时间戳约束：约束 1-12 和 1-13 为无人机发射点的有效时间约束，要求无人机在发射节点的有效时间等于卡车在该点的有效时间，共同实现了卡车和无人机在发射节点时间上的对齐。
  - 无人机回收点时间戳约束：约束 1-14 和 1-15 为无人机回收点的有效时间约束，要求无人机在回收节点的有效时间等于卡车在该点的有效时间，共同实现了卡车和无人机在回收节点时间上的对齐。
  - 卡车访问顾客节点时间戳约束：约束 1-16 要求卡车访问当前顾客点 k 时必须要先将需要起飞的无人机 s_L 发射或者需要降落的无人机 s_R 回收，并且要大于到达顾客点 h 的有效时间戳 + 路径 $\langle h,k\rangle$ 所花费的时间 τ_{hk}。

- 辅助决策变量：
  - 卡车访问次序和无人机访问次序约束：约束1-20和1-21要求无人机访问次序和卡车访问次序的一致性。
  - 无人机访问顺序约束：约束1-22限制了无人机访问任意两个顾客点之间的次序，即不能同时访问不同的顾客点。

– 辅助变量初始值和取值范围：约束1-24和1-25给定了卡车和无人机有效时间的初始值，约束1-26规定了无人机的起点仓库的访问次序一定在其他所有顾客节点之前，约束1-27和1-28给定了决策变量的取值范围，约束1-29规定了卡车辅助变量的取值范围，约束1-30和1-31规定了卡车和无人机的有效时间必须是非负实数，约束1-32给定了无人机次序辅助变量的取值范围。

1.1.1 Flying Sidekick Traveling Salesman Problem with Multiple Drops

1.2 Parallel Drone Scheduling Traveling Salesman Problem

Parallel Drone Scheduling Traveling Salesman Problem (PDSTSP) 同样由 Murray(2015) 等[1]提出。

PDSTSP 数学模型的符号含义如表1-2。

表 1-2: PDSTSP 模型符号及含义

符号	含义
0	起点仓库
$c+1$	终点仓库
$\mathbf{C}=\{1,2,\cdots,c\}$	全部客户集合
$\mathbf{C}'\subseteq\mathbf{C}$	无人机可访问的客户集合
$N_0=\{0,1,2,\cdots,c\}$	流出节点集合
$N_+=\{1,2,\cdots,c+1\}$	流入节点集合
$N=\{0,1,2,\cdots,c,c+1\}$	全部节点集合
$\tau'_{i,j}/\tau_{i,j}$	弧 (i,j) 的飞行/行驶时间成本
$1\leq\hat{u}_i\leq c+2$	卡车破子圈辅助变量
$\hat{y}_{i,v}\in\{0,1\}$	无人机访问决策变量
$\hat{x}_{i,j}\in\{0,1\}$	卡车路由决策变量

PDSTSP 数学模型可以表示为 MILP 1.2。

Model 1.2: PDSTSP MILP

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z && \text{(1-33)}\\
\text{s.t.}\quad & z\geq\sum_{i\in N_0}\sum_{\substack{j\in N_+\\ j\neq i}}\tau_{i,j}\hat{x}_{i,j} && \text{(1-34)}\\
& z\geq\sum_{i\in C''}(\tau'_{0,i}+\tau'_{i,c+1})\hat{y}_{i,v},\quad\forall v\in V && \text{(1-35)}\\
& \sum_{\substack{i\in N_0\\ i\neq j}}\hat{x}_{i,j}+\sum_{\substack{v\in V\\ j\in C''}}\hat{y}_{j,v}=1,\quad\forall j\in C && \text{(1-36)}\\
& \sum_{j\in N_+}\hat{x}_{0,j}=1 && \text{(1-37)}\\
& \sum_{i\in N_0}\hat{x}_{i,c+1}=1 && \text{(1-38)}
\end{aligned}
$$

continued

$$\sum_{\substack{i\in N_0\\ i\neq j}} \hat{x}_{i,j} = \sum_{\substack{k\in N_+\\ k\neq j}} \hat{x}_{j,k}, \quad \forall j \in C \tag{1-39}$$

$$\hat{u}_i - \hat{u}_j + 1 \leq (c+2)(1-\hat{x}_{i,j}), \quad \forall i \in C, j \in \{N_+ : j \neq i\} \tag{1-40}$$

$$1 \leq \hat{u}_i \leq c+2, \quad \forall i \in N_+ \tag{1-41}$$

$$\hat{x}_{i,j} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N_0, j \in \{N_+ : j \neq i\} \tag{1-42}$$

$$\hat{y}_{i,v} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in C'', v \in V \tag{1-43}$$

约束1-33追求最小化完工时间 z，即无人机和卡车最晚到达终点仓库的时间，通过约束1-34和1-35分别限制卡车和无人机最晚到达终点仓库的时间来实现；约束1-36确保了每个顾客能且只能被服务一次，服务可以由无人机或者卡车提供；约束1-37和1-38要求卡车必须从起点仓库 0 出发并返回终点仓库 $c+1$，约束1-39要求卡车在中间的顾客节点满足流入和流出相等的流约束；约束1-40是 MTZ 形式的破子圈约束；约束1-41，1-42和1-43给出了决策变量和辅助决策变量的取值范围。

References

[1] MURRAY C C, CHU A G. The flying sidekick traveling salesman problem: Optimization of drone-assisted parcel delivery[J/OL]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2015, 54: 86-109. DOI: 10.1016/j.trc.2015.03.005.

[2] 运筹 OR 帷幄. 交通 | 带飞行助手的旅行商问题：无人机协助的配送优化建模及求解（附代码）[EB/OL]. 2024[2025-02-21]. https://zhuanlan.zhihu.com/p/3235861366.

[3] 运筹 OR 帷幄. 优化 | 浅谈旅行商问题（TSP）的七种整数规划模型[EB/OL]. 2022 年 01 月 19 日 20:37[2025-02-23]. https://mp.weixin.qq.com/s/tDYOxlSQHKRJkf5EcaBJ1A.

[4] 运筹 OR 帷幄. 优化 | TSP 中两种不同消除子环路的方法及 callback 实现（Python 调用 Gurobi 求解）[EB/OL]. 2020 年 09 月 26 日 20:30[2025-02-23]. https://mp.weixin.qq.com/s/i7I-o0LiC_JP3vVOQw2AIw.