Traveling Salesman Problem & Vehicle Routing Problem

Chen Huaneng

2025 年 8 月 19 日

第一部分 Traveling Salesman Problem

1 Symmetric Traveling Salesman Problem

旅行商问题（Traveling Salesman Problem, TSP）是组合优化领域的经典问题之一，其核心目标是给定城市列表和每对城市之间的距离，求恰好访问每个城市一次并返回起始城市的最短可能路线。该问题于 1930 年正式提出，是优化中研究最深入的问题之一，被用作许多优化方法的基准。自从该问题被正式提出以来，一直是运筹学、计算机科学和物流管理等领域的研究热点，尽管该问题在计算上很困难，但许多启发式方法和精确算法是已知的[1-2]。

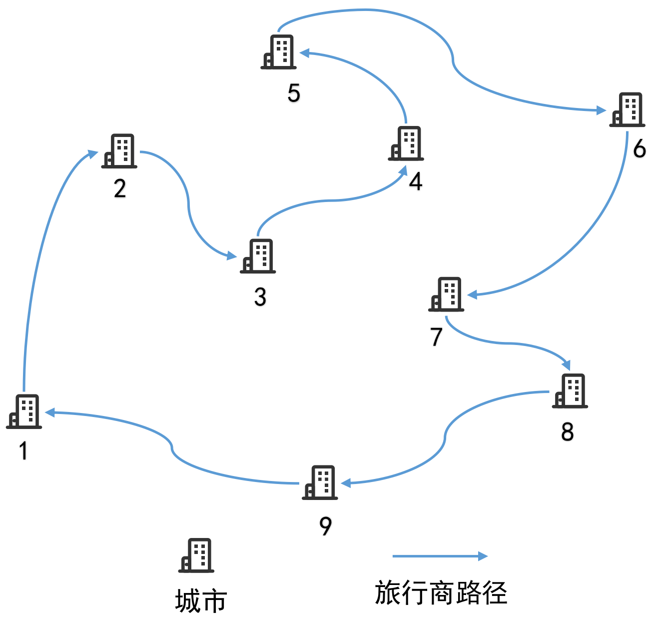

图 1: TSP 示意图

TSP 可以表述为整数线性规划模型[3]：假设共有 N 个城市，每个城市的编号为 $1, \cdots, N$，从城市 i 到城市 j 的旅行成本（距离）为 $c_{ij} > 0$。旅行商的目标是从任意一个城市出发访问完所有的城市，每个城市只能访问一次，最后回到最初的城市，目标是找到一条依次访问所有城市且访问城市不重

复的最短路线。TSP 中的决策变量为 $x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{存在从城市 } i \text{ 到城市 } j \text{ 的路径}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，城市节点集合表示为 $V(|V|=N)$。由于可能存在子回路，所以在构建 TSP 模型时需要消除会产生子回路的情况，这里采用 Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) 约束进行子回路的消除[4]，引入连续变量 $u_i(\forall i\in V, u_i\geq 0)$，其取值可以为任何非负实数（实数集合表示为 R）。这里用 u_i 表示编号为 i 的城市的访问次序，比如当 $u_i=5$ 时表示编号为 1 的城市是从出发点开始，第 5 个被访问到的点。因此，TSP 的数学模型可以表示为 MILP (1)-(6)。

Theorem 1.1.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i\in V}\sum_{j\in V, i\neq j} c_{ij}x_{ij} && && (1)\\
\textit{s.t.} \quad & \sum_{i\in V} x_{ij}=1, && \forall j\in V, i\neq j && (2)\\
& \sum_{j\in V} x_{ij}=1, && \forall i\in V, i\neq j && (3)\\
& u_i-u_j+Nx_{ij}\leq N-1, && \forall i,j\in V; i\neq j && (4)\\
& u_i\geq 0, && u_i\in R && (5)\\
& x_{ij}\in\{0,1\}, && i,j\in V; i\neq j && (6)
\end{aligned}
$$

目标函数(1)表示最小化访问所有城市的成本（距离），约束(2)和(3)保证每个城市节点的入度和出度为 1，即每个城市只进入一次和出去一次，保证了每个城市只访问一次，不会被重复访问，约束(4)消除子回路，约束(5)和(6)表示变量的取值范围。

第二部分 Vehicle Routing Problem

2 Vehicle Routing Problem

车辆路径规划问题 (Vehicle Routing Problem, VRP) 是物流配送领域中的核心优化问题之一，由 George Dantzig 和 John Ramser 于 1959 年首次提出[5]。其目的是为一组具有容量限制的车辆设计最优配送路线，使得所有客户需求被满足且总运输成本（如距离、时间或费用）最小化。当车辆容量足够大时，VRP 退化为 TSP，即当车辆容量足够时，所有货物都可以在一次行驶中全部配送，只需要经过一次配送中心。大多数情况下 VRP 的车辆容量总是小于需要配送的所有货物重量的总和，所以与旅行商问题（TSP）不同，VRP 需要同时考虑多车辆协同、客户需求分配、车辆容量限制等复杂约束，因此更具现实意义和研究挑战性。

VRP 可以表述为整数规划问题[6]：假设存在一个配送中心（仓库）和若干顾客点，顾客点需求为 $q_i(i=1,2,\cdots,n)$，车辆载重上限为 Q，每辆车从仓库出发并最终返回仓库。定义决策变量 $x_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{车辆 } k \text{ 从 } i \text{ 行驶到 } j\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，节点集合 $V=\{0,1,2,\cdots,n\}$，其中 0 表示配送中心，$S=\{1,2,\cdots,n\}$ 表示顾客节点，车辆集合 $K=\{1,2,\cdots,m\}$，c_{ij} 表示从点 i 到点 j 的行驶成本（距离或时间），同样在 VRP 中为了消除子回路，引入辅助变量 u_i 表示车辆访问顾客点 i 时的累计载重量。因此，VRP 的数学模型可以表示为 MILP (7)-(14)。

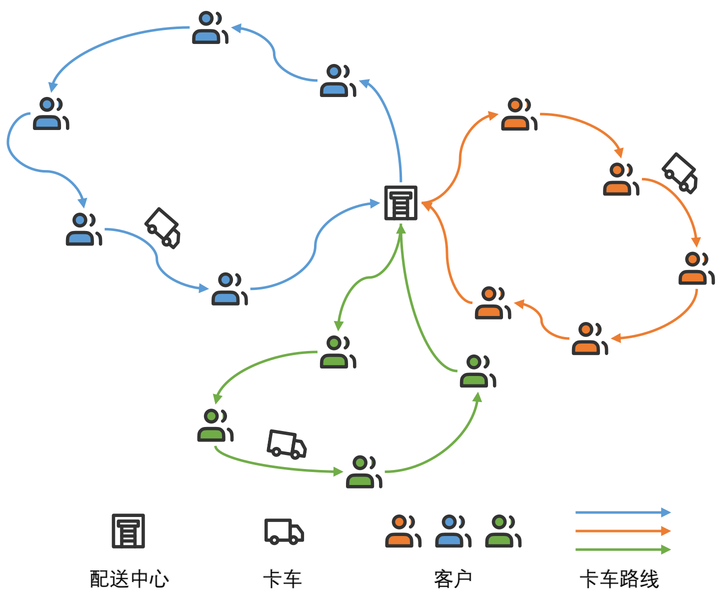

图 2: VRP 示意图

Theorem 2.1.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{k\in K}\sum_{i\in V}\sum_{j\in V, j\neq i} c_{ij}x_{ijk} && && (7)\\
s.t. \quad & \sum_{j\in S} x_{0jk} = 1, && \forall k \in K && (8)\\
& \sum_{i\in S} x_{i0k} = 1, && \forall k \in K && (9)\\
& \sum_{k\in K}\sum_{i\in V, i\neq j} x_{ijk} = 1, && \forall j \in S && (10)\\
& \sum_{i\in V, i\neq j} x_{ijk} = \sum_{i\in V, i\neq j} x_{jik}, && \forall j \in V, k \in K && (11)\\
& u_j \geq u_i + q_j - Q(1 - x_{ijk}), && \forall i, j \in S, k \in K && (12)\\
& q_j \leq u_j \leq Q, && \forall j \in S && (13)\\
& x_{ijk} \in \{0, 1\}, && \forall i, j \in V, k \in K && (14)
\end{aligned}
$$

目标函数(7)表示最小化所有车辆的总行驶成本，约束(8)和(9)确保每辆车从配送中心出发并最终返回，约束(10)保证每个顾客点只被访问一次，约束(11)保证了流量守恒，即保证了路径的连续性，约束(12)和(13)通过 *MTZ* 方法消除子回路并满足车辆的容量限制，约束(14)对变量进行限制。

参考文献

[1] OENCAN T, ALTINEL I K, LAPORTE G. A comparative analysis of several asymmetric traveling salesman problem formulations[J/OL]. Computers & Operations Research, 2009, 36(3): 637-654. DOI:

10.1016/j.cor.2007.11.008.

[2] ROBERTI R, TOTH P. Models and algorithms for the asymmetric traveling salesman problem: an experimental comparison[J/OL]. Euro Journal on Transportation & Logistics, 2012, 1(1-2): 113-133. DOI: 10.1007/s13676-012-0010-0.

[3] PAPADIMITRIOU C H, STEIGLITZ K. Combinatorial optimization: algorithms and complexity[M]. Dover edition ed. Mineola, NY: Dover Publications, 1998: 308-309.

[4] MILLER C E, TUCKER A W, ZEMLIN R A. Integer programming formulation of traveling salesman problems[J/OL]. Journal of the Acm, 1960, 7(4): 326-329. DOI: 10.1145/321043.321046.

[5] DANTZIG G B, RAMSER J H. The truck dispatching problem[J/OL]. Management Science, 1959, 6(1): 80-91. DOI: 10.1287/mnsc.6.1.80.

[6] TOTH P, VIGO D. Vehicle routing: Problems, methods, and applications, second edition[J/OL]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014: 4-6. DOI: 10.1137/1.9781611973594.fm.