

# NOTES FOR PAPER

*Create by*

CHEN HUANNENG

*Update at*  
21 February 2025



*Final review by*  
Abel

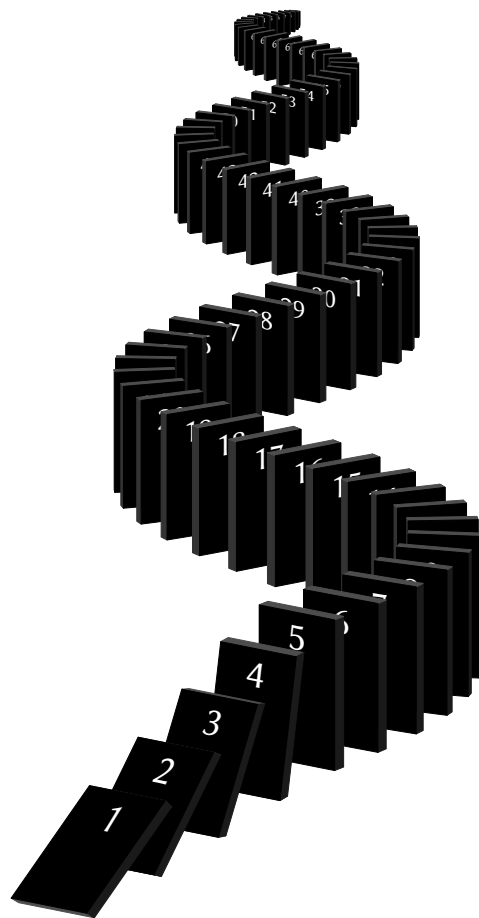


# Notes for Paper

Mira hacia el cielo, eres infinito  
Romperás el capullo, volarás tan alto  
Sigue avanzando, has llegado lejos

---

*Mira Hacia El Cielo*  
G.E.M.



Chen Huaneng (Abel)  
Xiamen University  
huanengchen@foxmail.com



# Contents

<b>1</b>	<b>TDRP: Truck-Drone collaborative Routing Problem</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Traveling Salesman Problem with Drone</b>	<b>3</b>
1.1	Flying Sidekick Traveling Salesman Problem	3
1.1.1	Flying Sidekick Traveling Salesman Problem with Multiple Drops	7
1.2	Parallel Drone Scheduling Traveling Salesman Problem	7
	<b>References</b>	<b>9</b>



Part

**1**

---

# ***TDRP: Truck-Drone collaborative Routing Problem***





# 1

## Traveling Salesman Problem with Drone

### 1.1 Flying Sidekick Traveling Salesman Problem

Flying Sidekick Traveling Salesman Problem (FSTSP) 由 Murray(2015) 等<sup>[1]</sup>提出。

FSTSP 数学模型的符号含义如表1-1。

表 1-1: FSTSP 模型符号及含义

符号	含义
0	起点仓库
$c + 1$	终点仓库
$\mathbf{C} = \{1, 2, \dots, c\}$	全部客户集合
$\mathbf{C}' \subseteq \mathbf{C}$	无人机可访问的客户集合
$N_0 = \{0, 1, 2, \dots, c\}$	流出节点集合
$N_+ = \{1, 2, \dots, c + 1\}$	流入节点集合
$N = \{0, 1, 2, \dots, c, c + 1\}$	全部节点集合
$\langle i, j, k \rangle \in P, i \in N_0, j \in \mathbf{C}', j \neq i, k \in N_+, k \neq i, k \neq j$	无人机飞行路径集合（符合模型约束的路径）
$\tau'_{ij}/\tau_{ij}$	弧 $(i, j)$ 的飞行/行驶时间成本
$S_L/S_R$	无人机发射/回收耗时
$e$	无人机续航时长
$x_{ij} \in \{0, 1\}$	卡车路由决策变量
$y_{ijk} \in \{0, 1\}$	无人机路由决策变量
$1 \leq u_i \leq c + 2$	卡车破子圈辅助变量
$t'_i/t_i$	无人机/卡车有效到达时间戳辅助变量
$p_{ij} \in \{0, 1\}$	无人机架次先后辅助变量

FSTSP 数学模型可以表示为 MILP 1.1。

#### Model 1.1: FSTSP MILP

$$\min \quad t_{c+1}$$

(1-1)

continued

$$\text{s.t. } \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} x_{ij} + \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} = 1, \quad \forall j \in C \quad (1-2)$$

$$\sum_{j \in N_+} x_{0j} = 1 \quad (1-3)$$

$$\sum_{i \in N_0} x_{i,c+1} = 1 \quad (1-4)$$

$$u_i - u_j + 1 \leq (c+2)(1 - x_{ij}), \quad \forall i \in C, j \in \{N_+ : j \neq i\} \quad (1-5)$$

$$\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} x_{ij} = \sum_{\substack{k \in N_+ \\ k \neq j}} x_{jk}, \quad \forall j \in C \quad (1-6)$$

$$\sum_{j \in C} \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \leq 1, \quad \forall i \in N_0 \quad (1-7)$$

$$\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq k}} \sum_{j \in C} y_{ijk} \leq 1, \quad \forall k \in N_+ \quad (1-8)$$

$$2y_{ijk} \leq \sum_{\substack{h \in N_0 \\ h \neq i}} x_{hi} + \sum_{\substack{l \in C \\ l \neq k}} x_{lk}, \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\}, k \in \{N_+ : \langle i,j,k \rangle \in P\} \quad (1-9)$$

$$y_{0jk} \leq \sum_{\substack{h \in N_0 \\ h \neq k}} x_{hk}, \quad \forall j \in C, k \in \{N_+ : \langle 0,j,k \rangle \in P\} \quad (1-10)$$

$$u_k - u_i \geq 1 - (c+2) \left( 1 - \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall i \in C, k \in \{N_+ : k \neq i\} \quad (1-11)$$

$$t'_i \geq t_i - M \left( 1 - \sum_{\substack{j \in C \\ j \neq i}} \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall i \in C \quad (1-12)$$

$$t'_i \leq t_i + M \left( 1 - \sum_{\substack{j \in C \\ j \neq i}} \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall i \in C \quad (1-13)$$

$$t'_k \geq t_k - M \left( 1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq k}} \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall k \in N_+ \quad (1-14)$$

$$t'_k \leq t_k + M \left( 1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq k}} \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall k \in N_+ \quad (1-15)$$

$$t_k \geq t_h + \tau_{hk} + s_L \left( \sum_{\substack{l \in C \\ l \neq k}} \sum_{\substack{m \in N_+ \\ \langle k,l,m \rangle \in P}} y_{klm} \right) + s_R \left( \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq k}} \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \right) - M(1 - x_{hk}),$$

$$\forall h \in N_0, k \in \{N_+ : k \neq h\}$$

(1-16)

continued

$$t'_j \geq t'_i + \tau'_{ij} - M \left( 1 - \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i, j, k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall j \in C', i \in \{N_0 : i \neq j\} \quad (1-17)$$

$$t'_k \geq t'_j + \tau'_{jk} + s_R - M \left( 1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ \langle i, j, k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall j \in C', k \in \{N_+ : k \neq j\} \quad (1-18)$$

$$t'_k - (t'_j - \tau'_{ij}) \leq e + M(1 - y_{ijk}), \quad \forall k \in N_+, j \in \{C : j \neq k\}, i \in \{N_0 : \langle i, j, k \rangle \in P\} \quad (1-19)$$

$$u_i - u_j \geq 1 - (c + 2)p_{ij}, \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\} \quad (1-20)$$

$$u_i - u_j \leq -1 + (c + 2)(1 - p_{ij}), \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\} \quad (1-21)$$

$$p_{ij} + p_{ji} = 1, \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\} \quad (1-22)$$

$$t'_l \geq t'_k - M \left( 3 - \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i, j, k \rangle \in P \\ j \neq l}} y_{ijk} - \sum_{\substack{m \in C \\ m \neq i \\ m \neq k \\ m \neq l}} \sum_{\substack{n \in N_+ \\ \langle l, m, n \rangle \in P \\ n \neq i \\ n \neq k}} y_{lmn} - p_{il} \right) \quad (1-23)$$

$$\forall i \in N_0, k \in \{N_+ : k \neq i\}, l \in \{C : l \neq i, l \neq k\}$$

$$t_0 = 0 \quad (1-24)$$

$$t'_0 = 0 \quad (1-25)$$

$$p_{0j} = 1, \quad \forall j \in C \quad (1-26)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N_0, j \in \{N_+ : j \neq i\} \quad (1-27)$$

$$y_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N_0, j \in \{C : j \neq i\}, k \in \{N_+ : \langle i, j, k \rangle \in P\} \quad (1-28)$$

$$1 \leq u_i \leq c + 2, \quad \forall i \in N_+ \quad (1-29)$$

$$t_i \geq 0, \quad \forall i \in N \quad (1-30)$$

$$t'_i \geq 0, \quad \forall i \in N \quad (1-31)$$

$$p_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N_0, j \in \{C : j \neq i\} \quad (1-32)$$

约束1-1追求最小化卡车到达终点仓库  $c + 1$  的有效时间  $t_{c+1}$ ，通过约束

约束条件可以分为四类<sup>[2]</sup>：

- 客户有关的约束：约束 1-2 要求对于任何一位顾客  $j$ ，必须且只能被卡车（或无人机）服务一次。
- 卡车有关的约束：
  - 卡车流平衡约束：约束 1-3 要求卡车从起点仓库流出，约束 1-4 要求卡车从终点仓库流入，约束 1-6 要求卡车在中间节点满足流入和流出相等的流平衡约束。
  - 卡车破子圈约束：约束 1-5 是 MTZ 形式的破子圈约束<sup>[3-4]</sup>，去除了子圈存在的可能，这里  $M$  取到了  $u_i - u_j + 1$  的上界  $c + 2$ ， $u_i$  可以理解为点  $i$  的访问次序，比如  $u_1 = 5$  可以理解为点 1 是从出发点开始，第五个被访问到的点。
- 无人机有关的约束：

- 无人机发射、回收节点流约束：约束 1-7 表示无人机可以从非终点仓库流出，约束 1-8 表示无人机可以从非起点仓库流入。
- 无人机访问、回收节点时间戳约束：约束 1-17 表示无人机访问顾客的时间戳应该符合时间逻辑，即不早于起飞时间戳  $t'_i$  + 前往服务顾客点的飞行时长  $\tau'_{ij}$ ，约束 1-18 表示无人机回到卡车的时间戳应该符合时间逻辑，即不早于访问顾客点的  $t'_j$  + 返回卡车的飞行时长  $\tau'_{jk}$  + 回收无人机用时  $s_R$ 。
- 无人机电量续航约束：约束 1-19 表示无人机的飞行时间不能超过其续航时间，即到达汇合点  $t'_k$  的有效时间-无人机的起飞时间  $t'_j - \tau'_{ij}$ （不直接使用  $t'_i$  是因为  $t'_i$  不是起飞的时间戳而是无人机到达  $i$  点的时间戳）要在无人机的续航时间  $e$  之内。
- 无人机飞行次序约束：约束 1-23 要求无人机对于任意两条路径  $\langle i, j, k \rangle$  和  $\langle l, m, n \rangle$  而言，如果无人机先访问顾客点  $i$  之后的某个时间才访问顾客点  $l$  ( $p_{il} = 1$ )，则无人机必须先完成上一次飞行才能继续下一次飞行 ( $t'_l \geq t'_k$ )，并且任意两条路径之间无交叉。
- 无人机和卡车同步有关的约束：
  - 无人机发射、回收点卡车访问约束：约束 1-9 要求对于非起点发射的无人机 ( $\forall i \in C$ )，卡车必须经过无人机的起飞点  $i$  和降落点  $k$ ，约束 1-10 要求对于从起点仓库起飞的无人机来说，卡车必须经过无人机的降落点。
  - 无人机访问顾客时卡车访问次序约束：约束 1-11 要求卡车必须先访问无人机的起飞点再访问无人机的降落点。
  - 无人机发射点时间戳约束：约束 1-12 和 1-13 为无人机发射点的有效时间约束，要求无人机在发射节点的有效时间等于卡车在该点的有效时间，共同实现了卡车和无人机在发射节点时间上的对齐。
  - 无人机回收点时间戳约束：约束 1-14 和 1-15 为无人机回收点的有效时间约束，要求无人机在回收节点的有效时间等于卡车在该点的有效时间，共同实现了卡车和无人机在回收节点时间上的对齐。
  - 卡车访问顾客节点时间戳约束：约束 1-16 要求卡车访问当前顾客点  $k$  时必须要先将需要起飞的无人机  $s_L$  发射或者需要降落的无人机  $s_R$  回收，并且要大于到达顾客点  $h$  的有效时间戳 + 路径  $\langle h, k \rangle$  所花费的时间  $\tau_{hk}$ 。
- 辅助决策变量：
  - 卡车访问次序和无人机访问次序约束：约束 1-20 和 1-21 要求无人机访问次序和卡车访问次序的一致性。
  - 无人机访问顺序约束：约束 1-22 限制了无人机访问任意两个顾客点之间的次序，即不能同时访问不同的顾客点。
  - 辅助变量初始值和取值范围：约束 1-24 和 1-25 给定了卡车和无人机有效时间的初始值，约束 1-26 规定了无人机的起点仓库的访问次序一定在其他所有顾客节点之前，约束 1-27 和 1-28 给定了决策变量的取值范围，约束 1-29 规定了卡车辅助变量的取值范围，约束 1-30 和 1-31 规定了卡车和无人机的有效时间必须是非负实数，约束 1-32 给定了无人机次序辅助变量的取值范围。

### 1.1.1 Flying Sidekick Traveling Salesman Problem with Multiple Drops

## 1.2 Parallel Drone Scheduling Traveling Salesman Problem

Parallel Drone Scheduling Traveling Salesman Problem (PDSTSP) 同样由 Murray(2015) 等<sup>[1]</sup>提出。

PDSTSP 数学模型的符号含义如表1-2。

表 1-2: PDSTSP 模型符号及含义

符号	含义
0	起点仓库
$c + 1$	终点仓库
$\mathbf{C} = \{1, 2, \dots, c\}$	全部客户集合
$\mathbf{C}' \subseteq \mathbf{C}$	无人机可访问的客户集合
$N_0 = \{0, 1, 2, \dots, c\}$	流出节点集合
$N_+ = \{1, 2, \dots, c + 1\}$	流入节点集合
$N = \{0, 1, 2, \dots, c, c + 1\}$	全部节点集合
$\langle i, j, k \rangle \in P, i \in N_0, j \in \mathbf{C}', j \neq i, k \in N_+, k \neq i, k \neq j$	无人机飞行路径集合（符合模型约束的路径）
$\tau'_{i,j}/\tau_{i,j}$	弧 $(i, j)$ 的飞行/行驶时间成本
$S_L/S_R$	无人机发射/回收耗时
$e$	无人机续航时长
$x_{ij} \in \{0, 1\}$	卡车路由决策变量
$y_{ijk} \in \{0, 1\}$	无人机路由决策变量
$1 \leq \hat{u}_i \leq c + 2$	卡车破子圈辅助变量
$t'_i/t_i$	无人机/卡车有效到达时间戳辅助变量
$p_{ij} \in \{0, 1\}$	无人机架次先后辅助变量
$\hat{y}_{i,v} \in \{0, 1\}$	无人机访问决策变量
$\hat{x}_{i,j} \in \{0, 1\}$	卡车路由决策变量

PDSTSP 数学模型可以表示为 MILP 1.2。

#### Model 1.2: PDSTSP MILP

$$\min \quad z \quad (1-33)$$

$$\text{s.t.} \quad z \geq \sum_{i \in N_0} \sum_{\substack{j \in N_+ \\ j \neq i}} \tau_{i,j} \hat{x}_{i,j} \quad (1-34)$$

$$z \geq \sum_{i \in \mathbf{C}''} (\tau'_{0,i} + \tau'_{i,c+1}) \hat{y}_{i,v}, \quad \forall v \in V \quad (1-35)$$

$$\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} \hat{x}_{i,j} + \sum_{\substack{v \in V \\ j \in \mathbf{C}''}} \hat{y}_{j,v} = 1, \quad \forall j \in \mathbf{C} \quad (1-36)$$

$$\sum_{j \in N_+} \hat{x}_{0,j} = 1 \quad (1-37)$$

约束1-33追求最小化完工时间  $z$ ，即无人机和卡车最晚到达终点仓库的时间，通过约束1-34和1-35分别限制卡车和无人机最晚到达终点仓库的时间来实现；约束1-36确保了每个顾客能且只能被服务一次，服务可以由无人机或者卡车提供；

# References

- [1] MURRAY C C, CHU A G. The flying sidekick traveling salesman problem: Optimization of drone-assisted parcel delivery[J/OL]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2015, 54: 86-109. DOI: [10.1016/j.trc.2015.03.005](https://doi.org/10.1016/j.trc.2015.03.005).
- [2] 运筹 OR 帷幄. 交通 | 带飞行助手的旅行商问题：无人机协助的配送优化建模及求解（附代码）[EB/OL]. 2024[2025-02-21]. <https://zhuanlan.zhihu.com/p/3235861366>.
- [3] 运筹 OR 帷幄. 优化 | 浅谈旅行商问题（TSP）的七种整数规划模型[EB/OL]. 2022 年 01 月 19 日 20:37[2025-02-23]. <https://mp.weixin.qq.com/s/tDYOlSQHKRjKf5EcaBJ1A>.
- [4] 运筹 OR 帷幄. 优化 | TSP 中两种不同消除子环路的方法及 callback 实现（Python 调用 Gurobi 求解）[EB/OL]. 2020 年 09 月 26 日 20:30[2025-02-23]. [https://mp.weixin.qq.com/s/i7I-o0LiC\\_JP3vVOQw2AIw](https://mp.weixin.qq.com/s/i7I-o0LiC_JP3vVOQw2AIw).