

# Traveling Salesman Problem & Vehicle Routing Problem

## 第一部分 Traveling Salesman Problem

### 1 Symmetric Traveling Salesman Problem

旅行商问题 (Traveling Salesman Problem, TSP) 是组合优化领域的经典问题之一，其核心目标是给定城市列表和每对城市之间的距离，求恰好访问每个城市一次并返回起始城市的最短可能路线。该问题于 1930 年正式提出，是优化中研究最深入的问题之一，被用作许多优化方法的基准。自从该问题被正式提出以来，一直是运筹学、计算机科学和物流管理等领域的研究热点，尽管该问题在计算上很困难，但许多启发式方法和精确算法是已知的<sup>[1-2]</sup>。

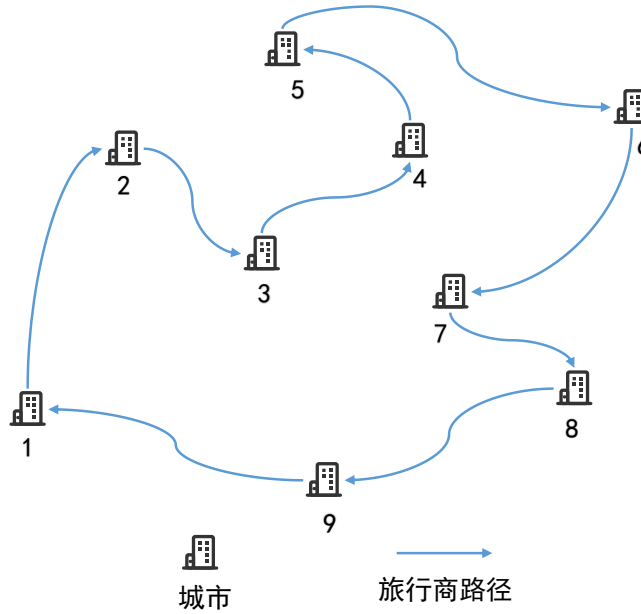


图 1: TSP 示意图

TSP 可以表述为整数线性规划模型<sup>[3]</sup>：假设共有  $N$  个城市，每个城市的编号为  $1, \dots, N$ ，从城市  $i$  到城市  $j$  的旅行成本（距离）为  $c_{ij} > 0$ 。旅行商的目标是从任意一个城市出发访问完所有的城市，每个城市只能访问一次，最后回到最初的城市，目标是找到一条依次访问所有城市且访问城市不重复的最短路线。TSP 中的决策变量为  $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{存在从城市 } i \text{ 到城市 } j \text{ 的路径} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，城市节点集合表示

为  $V(|V| = N)$ 。由于可能存在子回路，所以在构建 TSP 模型时需要消除会产生子回路的情况，这里采用 Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) 约束进行子回路的消除<sup>[4]</sup>，引入连续变量  $u_i (\forall i \in V, u_i \geq 0)$ ，其取值可以为任何非负实数（实数集合表示为  $R$ ）。这里用  $u_i$  表示编号为  $i$  的城市的访问次序，比如当  $u_i = 5$  时表示编号为 1 的城市是从出发点开始，第 5 个被访问到的点。因此，TSP 的数学模型可以

表示为 MILP (1)-(6)。

**Theorem 1.1.**

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, i \neq j} c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$s.t. \sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in V, i \neq j \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V, i \neq j \quad (3)$$

$$u_i - u_j + Nx_{ij} \leq N - 1, \quad \forall i, j \in V; i \neq j \quad (4)$$

$$u_i \geq 0, \quad u_i \in R \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in V; i \neq j \quad (6)$$

目标函数(1)表示最小化访问所有城市的成本（距离），约束(2)和(3)保证每个城市节点的入度和出度为 1，即每个城市只进入一次和出去一次，保证了每个城市只访问一次，不会被重复访问，约束(4)消除子回路，约束(5)和(6)表示变量的取值范围。

## 第二部分 Vehicle Routing Problem

### 2 Vehicle Routing Problem

车辆路径规划问题 (Vehicle Routing Problem, VRP) 是物流配送领域中的核心优化问题之一，由 George Dantzig 和 John Ramser 于 1959 年首次提出<sup>[5]</sup>。其目的是为一组具有容量限制的车辆设计最优配送路线，使得所有客户需求被满足且总运输成本（如距离、时间或费用）最小化。当车辆容量足够大时，VRP 退化为 TSP，即当车辆容量足够时，所有货物都可以在一次行驶中全部配送，只需要经过一次配送中心。大多数情况下 VRP 的车辆容量总是小于需要配送的所有货物重量的总和，所以与旅行商问题 (TSP) 不同，VRP 需要同时考虑多车辆协同、客户需求分配、车辆容量限制等复杂约束，因此更具现实意义和研究挑战性。

VRP 可以表述为整数规划问题<sup>[6]</sup>：假设存在一个配送中心（仓库）和若干顾客点，顾客点需求为  $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，车辆载重上限为  $Q$ ，每辆车从仓库出发并最终返回仓库。定义决策变量  $x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{车辆 } k \text{ 从 } i \text{ 行驶到 } j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，节点集合  $V = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ，其中 0 表示配送中心， $S = \{1, 2, \dots, n\}$  表示顾客节点，车辆集合  $K = \{1, 2, \dots, m\}$ ， $c_{ij}$  表示从点  $i$  到点  $j$  的行驶成本（距离或时间），同样在 VRP 中为了消除子回路，引入辅助变量  $u_i$  表示车辆访问顾客点  $i$  时的累计载重量。因此，VRP 的数学模型可以表示为 MILP (7)-(14)。

**Theorem 2.1.**

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} c_{ij} x_{ijk} \quad (7)$$

$$s.t. \sum_{j \in S} x_{0jk} = 1, \quad \forall k \in K \quad (8)$$

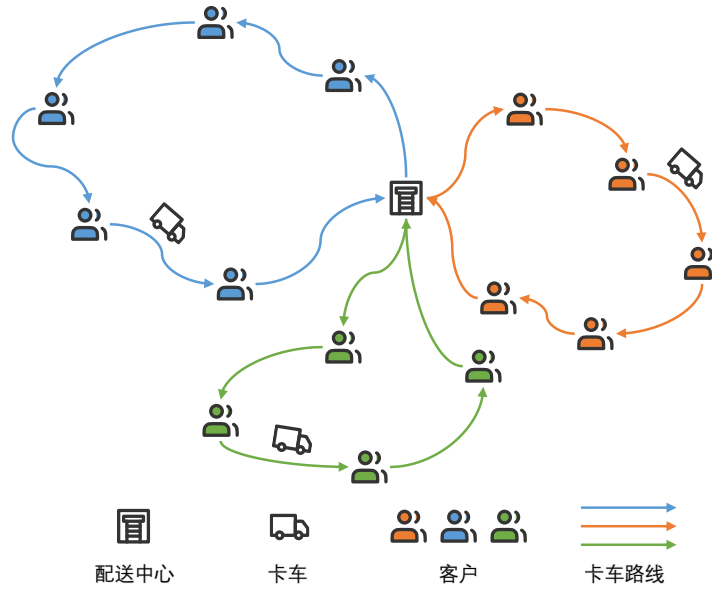


图 2: VRP 示意图

$$\sum_{i \in S} x_{i0k} = 1, \quad \forall k \in K \quad (9)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in V, i \neq j} x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in S \quad (10)$$

$$\sum_{i \in V, i \neq j} x_{ijk} = \sum_{i \in V, i \neq j} x_{jik}, \quad \forall j \in V, k \in K \quad (11)$$

$$u_j \geq u_i + q_j - Q(1 - x_{ijk}), \quad \forall i, j \in S, k \in K \quad (12)$$

$$q_j \leq u_j \leq Q, \quad \forall j \in S \quad (13)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V, k \in K \quad (14)$$

目标函数(7)表示最小化所有车辆的总行驶成本, 约束(8)和(9)确保每辆车从配送中心出发并最终返回, 约束(10)保证每个顾客点只被访问一次, 约束(11)保证了流量守恒, 即保证了路径的连续性, 约束(12)和(13)通过 MTZ 方法消除子回路并满足车辆的容量限制, 约束(14)对变量进行限制。

## 参考文献

- [1] OENCAN T, ALTINEL I K, LAPORTE G. A comparative analysis of several asymmetric traveling salesman problem formulations[J/OL]. Computers & Operations Research, 2009, 36(3): 637-654. DOI: [10.1016/j.cor.2007.11.008](https://doi.org/10.1016/j.cor.2007.11.008).
- [2] ROBERTI R, TOTH P. Models and algorithms for the asymmetric traveling salesman problem: an experimental comparison[J/OL]. Euro Journal on Transportation & Logistics, 2012, 1(1-2): 113-133. DOI: [10.1007/s13676-012-0010-0](https://doi.org/10.1007/s13676-012-0010-0).
- [3] PAPADIMITRIOU C H, STEIGLITZ K. Combinatorial optimization: algorithms and complexity[M].

Dover edition ed. Mineola, NY: Dover Publications, 1998: 308-309.

- [4] MILLER C E, TUCKER A W, ZEMLIN R A. Integer programming formulation of traveling salesman problems[J/OL]. Journal of the Acm, 1960, 7(4): 326-329. DOI: [10.1145/321043.321046](https://doi.org/10.1145/321043.321046).
- [5] DANTZIG G B, RAMSER J H. The truck dispatching problem[J/OL]. Management Science, 1959, 6 (1): 80-91. DOI: [10.1287/mnsc.6.1.80](https://doi.org/10.1287/mnsc.6.1.80).
- [6] TOTH P, VIGO D. Vehicle routing: problems, methods, and applications, second edition[J/OL]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014: 4-6. DOI: [10.1137/1.9781611973594.fm](https://doi.org/10.1137/1.9781611973594.fm).