Contents

Part

1

TDRP: Truck-Drone collaborative Routing Problem

1

Traveling Salesman Problem with Drone

1.1 Flying Sidekick Traveling Salesman Problem

Flying Sidekick Traveling Salesman Problem (FSTSP) 由 Murray(2015) 等[1]提出。

FSTSP 数学模型的符号含义如表1-1。

表 1-1: FSTSP 模型符号及含义

符号	含义
0	起点仓库
$c+1$	终点仓库
$\mathbf{C}=\{1,2,\cdots,c\}$	全部客户集合
$\mathbf{C}'\subseteq\mathbf{C}$	无人机可访问的客户集合
$N_0=\{0,1,2,\cdots,c\}$	流出节点集合
$N_+=\{1,2,\cdots,c+1\}$	流入节点集合
$N=\{0,1,2,\cdots,c,c+1\}$	全部节点集合
$\langle i,j,k\rangle\in P, i\in N_0, j\in\mathbf{C}', j\neq i, k\in N_+, k\neq i, k\neq j$	无人机飞行路径集合（符合模型约束的路径）
τ'_{ij}/τ_{ij}	弧 (i,j) 的飞行/行驶时间成本
S_L/S_R	无人机发射/回收耗时
e	无人机续航时长
$x_{ij}\in\{0,1\}$	卡车路由决策变量
$y_{ijk}\in\{0,1\}$	无人机路由决策变量
$1\leq u_i\leq c+2$	卡车破子圈辅助变量
t'_i/t_i	无人机/卡车有效到达时间戳辅助变量
$p_{ij}\in\{0,1\}$	无人机架次先后辅助变量

FSTSP 数学模型可以表示为 MILP 1.1。

Model 1.1: FSTSP MILP

$$\min \quad t_{c+1} \tag{1-1}$$

continued

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} x_{ij} + \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} = 1, \quad \forall j \in C \tag{1-2}$$

$$\sum_{j \in N_+} x_{0j} = 1 \tag{1-3}$$

$$\sum_{i \in N_0} x_{i,c+1} = 1 \tag{1-4}$$

$$u_i - u_j + 1 \leq (c+2)(1 - x_{ij}), \quad \forall i \in C, j \in \{N_+ : j \neq i\} \tag{1-5}$$

$$\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} x_{ij} = \sum_{\substack{k \in N_+ \\ k \neq j}} x_{jk}, \quad \forall j \in C \tag{1-6}$$

$$\sum_{\substack{j \in C \\ j \neq i}} \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \leq 1, \quad \forall i \in N_0 \tag{1-7}$$

$$\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq k}} \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \leq 1, \quad \forall k \in N_+ \tag{1-8}$$

$$2y_{ijk} \leq \sum_{\substack{h \in N_0 \\ h \neq i}} x_{hi} + \sum_{\substack{l \in C \\ l \neq k}} x_{lk}, \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\}, k \in \{N_+ : \langle i,j,k \rangle \in P\} \tag{1-9}$$

$$y_{0jk} \leq \sum_{\substack{h \in N_0 \\ h \neq k}} x_{hk}, \quad \forall j \in C, k \in \{N_+ : \langle 0,j,k \rangle \in P\} \tag{1-10}$$

$$u_k - u_i \geq 1 - (c+2)\left(1 - \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk}\right), \quad \forall i \in C, k \in \{N_+ : k \neq i\} \tag{1-11}$$

$$t'_i \geq t_i - M\left(1 - \sum_{\substack{j \in C \\ j \neq i}} \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk}\right), \quad \forall i \in C \tag{1-12}$$

$$t'_i \leq t_i + M\left(1 - \sum_{\substack{j \in C \\ j \neq i}} \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk}\right), \quad \forall i \in C \tag{1-13}$$

$$t'_k \geq t_k - M\left(1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq k}} \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk}\right), \quad \forall k \in N_+ \tag{1-14}$$

$$t'_k \leq t_k + M\left(1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq k}} \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk}\right), \quad \forall k \in N_+ \tag{1-15}$$

$$t_k \geq t_h + \tau_{hk} + s_L\left(\sum_{\substack{l \in C \\ l \neq k}} \sum_{\substack{m \in N_+ \\ \langle k,l,m \rangle \in P}} y_{klm}\right) + s_R\left(\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq k}} \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk}\right) - M(1 - x_{hk}), \quad \forall h \in N_0, k \in \{N_+ : k \neq h\} \tag{1-16}$$

continued

$$t'_j \geq t'_i + \tau'_{ij} - M\left(1 - \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i,j,k\rangle \in P}} y_{ijk}\right), \quad \forall j \in C', i \in \{N_0 : i \neq j\} \tag{1-17}$$

$$t'_k \geq t'_j + \tau'_{jk} + s_R - M\left(1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ \langle i,j,k\rangle \in P}} y_{ijk}\right), \quad \forall j \in C', k \in \{N_+ : k \neq j\} \tag{1-18}$$

$$t'_k - (t'_j - \tau'_{ij}) \leq e + M(1 - y_{ijk}), \quad \forall k \in N_+, j \in \{C : j \neq k\}, i \in \{N_0 : \langle i,j,k\rangle \in P\} \tag{1-19}$$

$$u_i - u_j \geq 1 - (c+2)p_{ij}, \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\} \tag{1-20}$$

$$u_i - u_j \leq -1 + (c+2)(1 - p_{ij}), \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\} \tag{1-21}$$

$$p_{ij} + p_{ji} = 1, \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\} \tag{1-22}$$

$$t'_l \geq t'_k - M\left(3 - \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k\rangle \in P \\ j \neq l}} y_{ijk} - \sum_{\substack{m \in C \\ m \neq i \\ m \neq k \\ m \neq l}} \sum_{\substack{n \in N_+ \\ \langle l,m,n\rangle \in P \\ n \neq i \\ n \neq k}} y_{lmn} - p_{il}\right) \tag{1-23}$$

$$\forall i \in N_0, k \in \{N_+ : k \neq i\}, l \in \{C : l \neq i, l \neq k\}$$

$$t_0 = 0 \tag{1-24}$$

$$t'_0 = 0 \tag{1-25}$$

$$p_{0j} = 1, \quad \forall j \in C \tag{1-26}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N_0, j \in \{N_+ : j \neq i\} \tag{1-27}$$

$$y_{ijk} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N_0, j \in \{C : j \neq i\}, k \in \{N_+ : \langle i,j,k\rangle \in P\} \tag{1-28}$$

$$1 \leq u_i \leq c+2, \quad \forall i \in N_+ \tag{1-29}$$

$$t_i \geq 0, \quad \forall i \in N \tag{1-30}$$

$$t'_i \geq 0, \quad \forall i \in N \tag{1-31}$$

$$p_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N_0, j \in \{C : j \neq i\} \tag{1-32}$$

约束1-1追求最小化卡车到达终点仓库 $c+1$ 的有效时间 t_{c+1}，通过约束

约束条件可以分为四类[2]：

- 客户有关的约束：约束 1-2 要求对于任何一位顾客 j，必须且只能被卡车（或无人机）服务一次。
- 卡车有关的约束：
  - 卡车流平衡约束：约束 1-3 要求卡车从起点仓库流出，约束 1-4 要求卡车从终点仓库流入，约束 1-6 要求卡车在中间节点满足流入和流出相等的流平衡约束。
  - 卡车破子圈约束：约束 1-5 是 MTZ 形式的破子圈约束[3-4]，去除了子圈存在的可能，这里 M 取到了 $u_i - u_j + 1$ 的上界 $c+2$，u_i 可以理解为点 i 的访问次序，比如 $u_1 = 5$ 可以理解为点 1 是从出发点开始，第五个被访问到的点。
- 无人机有关的约束：

- 无人机发射、回收节点流约束：约束 1-7 表示无人机可以从非终点仓库流出，约束 1-8 表示无人机可以从非起点仓库流入。
- 无人机访问、回收节点时间戳约束：约束 1-17 表示无人机访问顾客的时间戳应该符合时间逻辑，即不早于起飞时间戳 t'_i+ 前往服务顾客点的飞行时长 τ'_{ij}，约束 1-18 表示无人机回到卡车的时间戳应该符合时间逻辑，即不早于访问顾客点的 t'_j+ 返回卡车的飞行时长 τ'_{jk}+ 回收无人机用时 s_R。
- 无人机电量续航约束：约束 1-19 表示无人机的飞行时间不能超过其续航时间，即到达汇合点 t'_k 的有效时间-无人机的起飞时间 $t'_j - \tau'_{ij}$（不直接使用 t'_i 是因为 t'_i 不是起飞的时间戳而是无人机到达 i 点的时间戳）要在无人机的续航时间 e 之内。
- 无人机飞行次序约束：约束 1-23 要求无人机对于任意两条路径 $\langle i,j,k\rangle$ 和 $\langle l,m,n\rangle$ 而言，如果无人机先访问顾客点 i 之后的某个时间才访问顾客点 l（$p_{il}=1$），则无人机必须先完成上一次飞行才能继续下一次飞行（$t'_l \geq t'_k$），并且任意两条路径之间无交叉。

• 无人机和卡车同步有关的约束：

  - 无人机发射、回收点卡车访问约束：约束 1-9 要求对于非起点发射的无人机（$\forall i \in C$），卡车必须经过无人机的起飞点 i 和降落点 k，约束 1-10 要求对于从起点仓库起飞的无人机来说，卡车必须经过无人机的降落点。
  - 无人机访问顾客时卡车访问次序约束：约束 1-11 要求卡车必须先访问无人机的起飞点再访问无人机的降落点。
  - 无人机发射点时间戳约束：约束 1-12 和 1-13 为无人机发射点的有效时间约束，要求无人机在发射节点的有效时间等于卡车在该点的有效时间，共同实现了卡车和无人机在发射节点时间上的对齐。
  - 无人机回收点时间戳约束：约束 1-14 和 1-15 为无人机回收点的有效时间约束，要求无人机在回收节点的有效时间等于卡车在该点的有效时间，共同实现了卡车和无人机在回收节点时间上的对齐。
  - 卡车访问顾客节点时间戳约束：约束 1-16 要求卡车访问当前顾客点 k 时必须要先将需要起飞的无人机 s_L 发射或者需要降落的无人机 s_R 回收，并且要大于到达顾客点 h 的有效时间戳 + 路径 $\langle h,k\rangle$ 所花费的时间 τ_{hk}。

• 辅助决策变量：

  - 卡车访问次序和无人机访问次序约束：约束1-20和1-21要求无人机访问次序和卡车访问次序的一致性。
  - 无人机访问顺序约束：约束1-22限制了无人机访问任意两个顾客点之间的次序，即不能同时访问不同的顾客点。
  - 辅助变量初始值和取值范围：约束1-24和1-25给定了卡车和无人机有效时间的初始值，约束1-26规定了无人机的起点仓库的访问次序一定在其他所有顾客节点之前，约束1-27和1-28给定了决策变量的取值范围，约束1-29规定了卡车辅助变量的取值范围，约束1-30和1-31规定了卡车和无人机的有效时间必须是非负实数，约束1-32给定了无人机次序辅助变量的取值范围。

1.1.1 Flying Sidekick Traveling Salesman Problem with Multiple Drops

1.2 Parallel Drone Scheduling Traveling Salesman Problem

Parallel Drone Scheduling Traveling Salesman Problem (PDSTSP) 同样由 Murray(2015) 等[1]提出。

PDSTSP 数学模型的符号含义如表1-2。

表 1-2: PDSTSP 模型符号及含义

符号	含义
0	起点仓库
$c+1$	终点仓库
$\mathbf{C} = \{1, 2, \cdots, c\}$	全部客户集合
$\mathbf{C}' \subseteq \mathbf{C}$	无人机可访问的客户集合
$N_0 = \{0, 1, 2, \cdots, c\}$	流出节点集合
$N_+ = \{1, 2, \cdots, c+1\}$	流入节点集合
$N = \{0, 1, 2, \cdots, c, c+1\}$	全部节点集合
$\langle i, j, k \rangle \in P, i \in N_0, j \in \mathbf{C}', j \neq i, k \in N_+, k \neq i, k \neq j$	无人机飞行路径集合（符合模型约束的路径）
$\tau'_{i,j} / \tau_{i,j}$	弧 (i, j) 的飞行/行驶时间成本
S_L / S_R	无人机发射/回收耗时
e	无人机续航时长
$x_{ij} \in \{0, 1\}$	卡车路由决策变量
$y_{ijk} \in \{0, 1\}$	无人机路由决策变量
$1 \leq \hat{u}_i \leq c+2$	卡车破子圈辅助变量
t'_i / t_i	无人机/卡车有效到达时间戳辅助变量
$p_{ij} \in \{0, 1\}$	无人机架次先后辅助变量
$\hat{y}_{i,v} \in \{0, 1\}$	无人机访问决策变量
$\hat{x}_{i,j} \in \{0, 1\}$	卡车路由决策变量

PDSTSP 数学模型可以表示为 MILP 1.2。

Model 1.2: PDSTSP MILP

$$\min \quad z \tag{1-33}$$

$$\text{s.t.} \quad z \geq \sum_{i \in N_0} \sum_{\substack{j \in N_+ \\ j \neq i}} \tau_{i,j} \hat{x}_{i,j} \tag{1-34}$$

$$z \geq \sum_{i \in C''} (\tau'_{0,i} + \tau'_{i,c+1}) \hat{y}_{i,v}, \quad \forall v \in V \tag{1-35}$$

$$\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} \hat{x}_{i,j} + \sum_{\substack{v \in V \\ j \in C''}} \hat{y}_{j,v} = 1, \quad \forall j \in C \tag{1-36}$$

$$\sum_{j \in N_+} \hat{x}_{0,j} = 1 \tag{1-37}$$

约束1-33追求最小化完工时间 z，即无人机和卡车最晚到达终点仓库的时间，通过约束1-34和1-35分别限制卡车和无人机最晚到达终点仓库的时间来实现；约束1-36确保了每个顾客能且只能被服务一次，服务可以由无人机或者卡车提供；

References

[1] MURRAY C C, CHU A G. The flying sidekick traveling salesman problem: Optimization of drone-assisted parcel delivery[J/OL]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2015, 54: 86-109. DOI: 10.1016/j.trc.2015.03.005.

[2] 运筹 OR 帷幄. 交通 | 带飞行助手的旅行商问题：无人机协助的配送优化建模及求解（附代码）[EB/OL]. 2024[2025-02-21]. https://zhuanlan.zhihu.com/p/3235861366.

[3] 运筹 OR 帷幄. 优化 | 浅谈旅行商问题（TSP）的七种整数规划模型[EB/OL]. 2022 年 01 月 19 日 20:37[2025-02-23]. https://mp.weixin.qq.com/s/tDYOxlSQHKRJkf5EcaBJ1A.

[4] 运筹 OR 帷幄. 优化 | TSP 中两种不同消除子环路的方法及 callback 实现（Python 调用 Gurobi 求解）[EB/OL]. 2020 年 09 月 26 日 20:30[2025-02-23]. https://mp.weixin.qq.com/s/i7I-o0LiC_JP3vVOQw2AIw.