

LEARNING NOTES

Create by

CHEN HUANNENG

Update at
7 May 2025

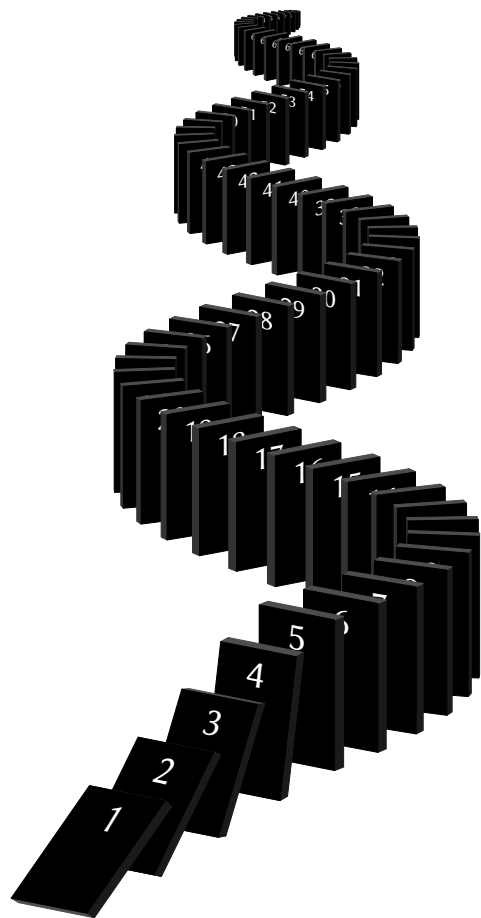


Final review by
Abel

Learning Notes

Mira hacia el cielo, eres infinito
Romperás el capullo, volarás tan alto
Sigue avanzando, has llegado lejos

Mira Hacia El Cielo
G.E.M.



Chen Huaneng (Abel)
Xiamen University
huanengchen@foxmail.com

Contents

<i>Preface</i>	iii
I Algorithm and Data Structure	1
1 Introduction to Algorithms and Data Structures	3
1.1 What is Algorithm	3
1.2 Analyzing Algorithms	3
1.2.1 Time Complexity	3
1.2.2 Space Complexity	4
1.3 What is Data Structures	4
1.4 Iteration and Recursion	5
1.4.1 Tail Recursion	5
II Traveling Salesman Problem	7
2 Symmetric Traveling Salesman Problem	9
2.1 Problem Definition	9
2.2 Solution Methods	10
2.2.1 Exact Methods	10
2.2.2 Heuristic Methods	11
III Vehicle Routing Problem	13
IV TDRP: Truck and Drone collaborative Routing Problem	17
3 Traveling Salesman Problem with Drone	19
3.1 Flying Sidekick Traveling Salesman Problem	19
3.1.1 Flying Sidekick Traveling Salesman Problem with Multiple Drops	24
3.2 Parallel Drone Scheduling Traveling Salesman Problem	30
4 Traveling Salesman Problem with multiple Drones	35
5 multiple Traveling Salesman Problem with Drones	37
6 Vehicle Routing Problem with Drones	39

V	TSDD: Truck Support Drone Delivery	41
VI	Datasets for Traveling Salesman Problem with Drone	45
7	Datasets used in FSTSP-MD	47
7.1	TSP-D Instances by Bouman et al. (2018)	47
7.2	TSPDroneLIB by Bogyrbayeva et al. (2023)	48
7.2.1	DPS algorithm and DRL algorithm implemented in TSPDrone.jl	48
7.3	TSPLIB by Reinelt (1991)	50
7.4	Amazon Delivery Dataset by Kaggle	52
VII	Appendix	53
	Appendix A Source Code	55
A.1	Amazon delivery data preprocessing code	55
	Appendix B Appendix B	59
	<i>Epilogue</i>	61
	References	63
	Index	65

Preface

Part

I

Algorithm and Data Structure

Introduction to Algorithms and Data Structures

1.1 What is Algorithm

算法 (Algorithm) 是一个有限的、明确的、可计算的步骤序列, 用于解决某类特定问题或执行特定计算任务^[1]。算法通常由输入、输出和一系列操作组成。它们可以用自然语言、伪代码或编程语言来描述。算法具有以下特性:

- 问题是明确的, 包含清晰的输入和输出定义。
- 具有可行性, 能够在有限步骤、时间和内存空间下完成。
- 各步骤都有确定的含义, 在相同的输入和运行条件下, 输出始终相同。

1.2 Analyzing Algorithms

分析算法通常指分析运行算法所需要耗费的资源, 虽然有时候需要分析内存、通信带宽或者计算机硬件这类资源, 但通常在算法分析中只考虑时间复杂度 (Time Complexity) 和空间复杂度 (Space Complexity)。由于实际测试需要耗费大量的计算资源且难以统一衡量, 因此通常采用理论估算的方法来评估算法的效率, 这种估算方法被称为渐近复杂度分析 (asymptotic complexity analysis), 简称复杂度分析。复杂度分析能够体现算法运行所需的时间和空间资源与输入数据大小之间的关系, 它描述了随着输入数据大小的增加, 算法执行所需时间和空间的增长趋势 (复杂度分析关注的不是运行时间或占用空间的具体值, 而是时间或空间增长的“快慢”)。

1.2.1 Time Complexity

时间复杂度是一个定性描述算法运行时间的有关输入数据规模大小的函数, 通常用基本操作数或步数来表示。基本操作是指在算法中执行的最小操作, 例如加法、乘法、赋值等, 通常假设每个基本操作的执行时间是相同且固定的 (尽管在实际中执行加法和乘法的时间可能不同)。算法的时间复杂度可能因为相同大小的不同输入数据而不同, 通常的做法是取最坏情况的时间复杂度来描述算法的性能。由于时间复杂度的函数通常难以精确计算, 且对于小规模输入数据来说, 运行时间通常并不重要, 因此通常关注当输入数据规模增大时算法的运行时间增长的趋势。因此, 通常用渐近上界 (asymptotic upper bound)¹ 符号 O (Big O Notation) 来表示算法的渐近时间复杂度 (简称时间复杂

函数渐近上界: 若存在正实数 c 和实数 n_0 , 使得对于所有的 $n > n_0$, 均有 $T(n) \leq c \cdot f(n)$, 则可以认为 $f(n)$ 给出了 $T(n)$ 的一个渐近上界, 记为 $T(n) = O(f(n))$ 。

¹时间复杂度分析本质上是计算“操作数量 $T(n)$ ”的渐近上界。

度)²，例如时间复杂度可以表示为 $O(n)$ 、 $O(n^2)$ 、 $O(\log n)$ 等。同样，除了渐近上界符号 O ，还有渐近下界符号 Ω （对应最佳时间复杂度）和渐近紧确界（asymptotically tight bound）符号 Θ （对应平均时间复杂度）³等也可以用于描述时间复杂度^[1]。

在选择算法时，时间复杂度并非越低越好，一方面是需要考虑其他的因素，例如空间复杂度、实现难度、可读性等，另一方面是时间复杂度低并不代表算法的运行时间就一定低（因为时间复杂度只考虑了最高阶的项，且忽略了常数项），例如 $O(n^2)$ 的算法在 $n = 10$ 时运行时间可能比 $O(n \log n)$ 的算法还要短，但当 n 增大时， $O(n^2)$ 的算法就会变得很慢。

时间复杂度中的 $O(\log n)$ 不一定是以 2 为底的对数，这是因为 $O(\log_i n) = O(\log_i j) \cdot O(\log_j n)$ ，而 $\log_i j$ 是一个常数，因此可以忽略不计。实际上， $O(\log n)$ 是忽略底数的表达方式。

1.2.2 Space Complexity

空间复杂度是一个定性描述算法运行所需要的有关输入数据规模大小的存储空间的函数，这里的存储空间包括存储输入数据所需要的空间（input space）和存储算法运行所需要的空间（auxiliary space）。算法在运行过程中使用的内存空间主要包括以下几种：

- 输入空间：用于存储算法的输入数据。
- 暂存空间：用于存储算法在运行过程中的变量、对象、函数上下文等数据。
- 输出空间：用于存储算法的输出数据。

一般情况下，空间复杂度的统计范围是“暂存空间”加上“输出空间”。暂存空间可以进一步划分为三个部分：

- 暂存数据：用于保存算法运行过程中产生的各种常量、变量、对象等。
- 栈帧空间：用于保存调用函数的上下文数据。系统在每次调用函数时都会在栈顶部创建一个栈帧，函数返回后，栈帧空间会被释放。
- 指令空间：用于保存编译后的程序指令，在实际统计中通常忽略不计。

在分析一段程序的空间复杂度时，通常统计暂存数据、栈帧空间和输出数据三部分。和时间复杂度一样，空间复杂度也通常用渐近上界符号 O 来表示，例如空间复杂度可以表示为 $O(n)$ 、 $O(n^\alpha)$ 、 $O(n \log n)$ 、 $O(2^n)$ 等。空间复杂度是考虑程序运行时占用内存的大小，而不是可执行文件（程序）的大小。与时间复杂度不同的是，通常空间复杂度只关注最差空间复杂度，因为内存空间是一项硬性要求，必须确保在所有输入数据下都有足够的内存空间预留。

1.3 What is Data Structures

数据结构（Data Structure）是组织和存储数据的方式，涵盖数据内容、数据之间关系和数据操作方法，它具有以下设计目标：

- 空间占用尽量少，以节省计算机内存。
- 数据操作尽可能快速，涵盖数据访问、添加、删除、修改等操作。

²一般说快速排序的时间复杂度为 $O(n \log n)$ 是指快速排序在一般情况下的时间复杂度，而不是最坏情况的时间复杂度，这是业内的一个默认规定。

³可能由于 O 符号过于朗朗上口，因此通常使用它来表示平均时间复杂度，但从严格意义上来讲，这种做法并不规范。因此遇到类似“平均时间复杂度 $O(n)$ ”的表述，直接理解为 $\Theta(n)$ 。

- 提供简洁的数据表示和逻辑信息，以便算法高效运行。

数据结构是计算机中组织和存储数据的方式，算法是在有限时间内解决特定问题的一组指令或操作步骤，算法与数据结构紧密相连，选择不同的数据结构会对同一个算法的性能产生很大的影响。

1.4 Iteration and Recursion

迭代（iteration）是一种重复执行某个任务的控制结构，在迭代中，程序会在满足一定的条件下重复执行某段代码，直到这个条件不再满足为止。迭代通常使用循环结构来实现，例如 `for`、`while` 等语句。

递归（recursion）是一种通过函数调用自身来解决问题的算法策略。迭代代表了一种“自下而上”地解决问题的思考范式，而递归则代表了一种“自上而下”地解决问题的思考范式（将问题分解为更小子问题的分治策略）。递归通常需要一个基准条件（base case）来终止递归调用，否则会导致无限递归。

递归函数每次调用自身时，系统都会为新开启的函数分配内存，以存储局部变量、调用地址和其他信息，这会导致两方面的结果：

- 函数的上下文数据都被存储在被称为“栈帧空间”的内存区域中，直至函数被返回后才会被释放。因此，递归通常比迭代更加耗费内存空间。（在实际中，编程语言允许的递归深度通常是有限的，过深的递归可能导致栈溢出错误。）
- 递归调用函数会产生额外的函数调用开销，例如参数传递、返回值处理等。因此递归通常比迭代的时间效率更低。

可以通过使用一个显式的栈来模拟调用栈的行为，从而将递归转化为迭代，但是这样转化可能会降低代码的可读性，并且在某些复杂问题中，模拟系统调用栈的行为可能会非常复杂，因此一般不值得做这样的转化。

1.4.1 Tail Recursion

如果函数在返回前的最后一步才进行递归调用，则该函数可以被编译器或解释器优化为迭代调用，使其在空间效率上与迭代相当，这种递归称为尾递归（tail recursion）。但是许多编译器或解释器并不支持尾递归优化，例如，Python 默认不支持尾递归优化，因此即时函数是尾递归形式，仍然可能会遇到栈溢出问题。

- 普通递归：当函数返回到上一层级的函数后，需要继续执行代码，因此系统需要保存上一层调用的上下文。
- 尾递归：递归调用是函数返回前的最后一个操作，这意味着函数返回到上一层级后，无需继续执行其他操作，因此系统无需保存上一层函数的上下文。

Part

II

Traveling Salesman Problem

Symmetric Traveling Salesman Problem

2.1 Problem Definition

旅行商问题（Traveling Salesman Problem, TSP）是组合优化领域的经典问题之一，其核心目标是给定城市列表和每对城市之间的距离，求恰好访问每个城市一次并返回起始城市的最短可能路线。该问题于 1930 年正式提出，是优化中研究最深入的问题之一，被用作许多优化方法的基准。自从该问题被正式提出以来，一直是运筹学、计算机科学和物流管理等领域的研究热点，尽管该问题在计算上很困难，但许多启发式方法和精确算法是已知的^[2-3]。

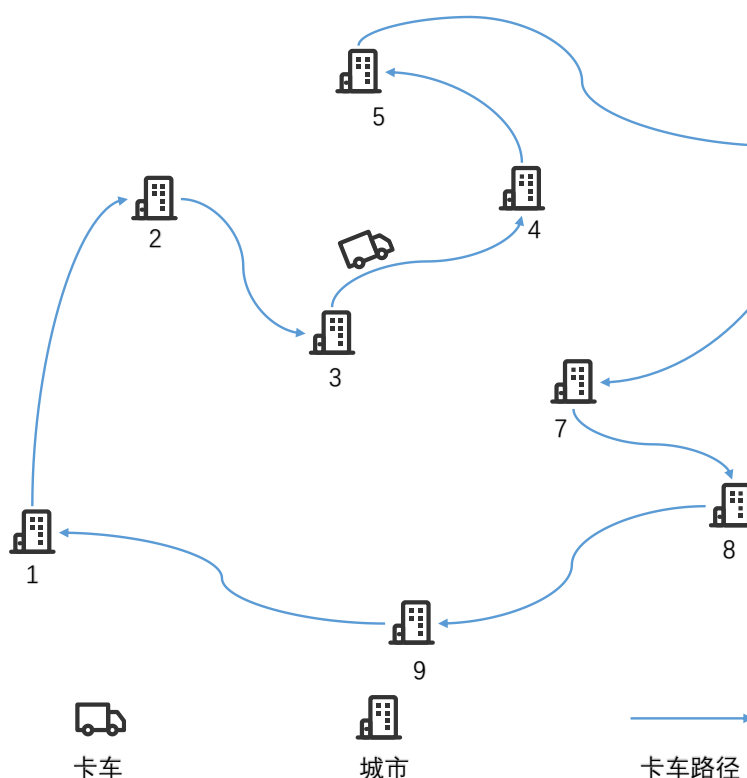


图 2-1: TSP 示意图

TSP 可以表述为整数线性规划模型^[4]：假设共有 N 个城市，每个城市的编号为 $1, \dots, N$ ，从城市 i

到城市 j 的旅行成本（距离）为 $c_{ij} > 0$ 。旅行商的目标是从任意一个城市出发访问完所有的城市，每个城市只能访问一次，最后回到最初的城市，目标是找到一条依次访问所有城市且访问城市不重复的最短路线。TSP 中的决策变量为 $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{存在从城市 } i \text{ 到城市 } j \text{ 的路径} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，城市节点集合表示

为 $V(|V| = N)$ 。由于可能存在子回路，所以在构建 TSP 模型时需要消除会产生子回路的情况，这里采用 Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) 约束进行子回路的消除^[5]，引入连续变量 $u_i (\forall i \in V, u_i \geq 0)$ ，其取值可以为任何非负实数（实数集合表示为 R ）。这里用 u_i 表示编号为 i 的城市的访问次序，比如当 $u_i = 5$ 时表示编号为 1 的城市是从出发点开始，第 5 个被访问到的点。因此，TSP 的数学模型可以表示为 MILP 2.1。

Model 2.1: TSP MILP

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, i \neq j} c_{ij} x_{ij} \quad (2-1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in V, i \neq j \quad (2-2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V, i \neq j \quad (2-3)$$

$$u_i - u_j + N x_{ij} \leq N - 1, \quad \forall i, j \in V; i \neq j \quad (2-4)$$

$$u_i \geq 0, \quad u_i \in R \quad (2-5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in V; i \neq j \quad (2-6)$$

目标函数2-1表示最小化访问所有城市的成本（距离），约束2-2和2-3保证每个城市节点的入度和出度为 1，即每个城市只进入一次和出去一次，保证了每个城市只访问一次，不会被重复访问，约束2-4消除子回路，约束2-5和2-6表示变量的取值范围。

2.2 Solution Methods

2.2.1 Exact Methods

Concorde是一个求解 TSP 的精确算法，由ANSI C编写。在Concorde Download页面可以下载到最新版本的 Concorde。下载后通过在命令行输入命令2.1进行解压，解压后会得到一个名为 **concorde** 的文件夹，编译的过程参考Ubuntu（Linux）安装 concorde 过程或者参考Installing Concorde。

Code 2.1: Concorde unzip

```
1 | gunzip co031219.tgz
2 | tar xvf co031219.tar
```

Concorde 需要 linear programming solver，常用的有QSOpt和IBM的CPLEX，由于 Concorde 自从 2003 年之后就没有更新过，因此当前 CPLEX 的版本已经不再合适，因此选用 QSOpt。QSOpt 的路径假设为 `path=/home/kaiyouhu/qsopt`，用命令2.2下载 QSOpt 的头文件，

Code 2.2: QSOpt download

```
1 | mkdir qsopt
2 | cd qsopt
3 | wget -O qsopt.a http://www.math.uwaterloo.ca/~bico/qsopt/beta/codes/PIC/qsopt.PIC.a #
   ↪ WSL 上的 Ubuntu 测试有效
```

Code 2.2 (continued)

```

4 wget http://www.math.uwaterloo.ca/~bico/qsopt/beta/codes/linux64/qsopt.h
5 wget http://www.math.uwaterloo.ca/~bico/qsopt/beta/codes/linux64/qsopt

```

然后在 **concorde** 文件夹下使用命令 2.3 编译 Concorde，编译完成后会在当前目录下生成一个名为 TSP 的文件。

Code 2.3: Concorde make

```

1 CFLAGS="-fPIC -O2 -g" ./configure --with-qsopt=/home/kaiyouhu/qsopt # 如果 QSOpt 的路径
  ↳ 不同记得修改
2 # continue
3 make
4 cd TSP
5 ./concorde -s 99 -k 100 # -s 99 表示使用随机种子 99, -k 100 表示使用 100 个城市的 TSP 实例
  ↳ 进行测试

```

在 Python 中使用 Concorde 可以参考 [pyconcorde](#)，该项目是 Concorde 的 Python 接口，需要注意的是这个 Python 接口不支持 Windows 系统，但是支持 WSL，具体的安装细节 [参考文档说明](#)。

2.2.2 Heuristic Methods

LKH 是解决 TSP 的 [Lin-Kernighan](#) 启发式算法的有效实现，基于 ANSI C 编写。除此之外，LKH 还有一个改进的 [LKH-3](#) 版本，支持多种约束条件 (Asymmetric capacitated vehicle routing problem, Multiple traveling salesmen problem, Sequential ordering problem...) 的 TSP 求解。在 [LKH](#) 页面可以下载到最新版本的 LKH 实现代码。下载后通过在命令行输入命令 2.4 进行解压，解压后会得到一个名为 **LKH-2.0.10** 的文件夹，然后在 Linux 或者 WSL 下输入命令 **make** 编译 LKH 代码，编译完成后会在当前目录下生成一个名为 LKH 的文件。

Code 2.4: LKH unzip and make

```

1 tar xvfz LKH-2.0.10.tgz
2 cd LKH-2.0.10
3 make

```

在 Python 中使用 LKH 可以参考 [LKH_TSP](#)，该项目是 LKH 的 Python 接口，需要注意的是这个 Python 接口不支持 Windows 系统，但是可以在 WSL 中运行。

Part

III

Vehicle Routing Problem

车辆路径规划问题 (Vehicle Routing Problem, VRP) 是物流配送领域中的核心优化问题之一, 由 George Dantzig 和 John Ramser 于 1959 年首次提出^[6]。其目的是为一组具有容量限制的车辆设计最优配送路线, 使得所有客户需求被满足且总运输成本 (如距离、时间或费用) 最小化。当车辆容量足够大时, VRP 退化为 TSP, 即当车辆容量足够时, 所有货物都可以在一次行驶中全部配送, 只需要经过一次配送中心。大多数情况下 VRP 的车辆容量总是小于需要配送的所有货物重量的总和, 所以与旅行商问题 (TSP) 不同, VRP 需要同时考虑多车辆协同、客户需求分配、车辆容量限制等复杂约束, 因此更具现实意义和研究挑战性。

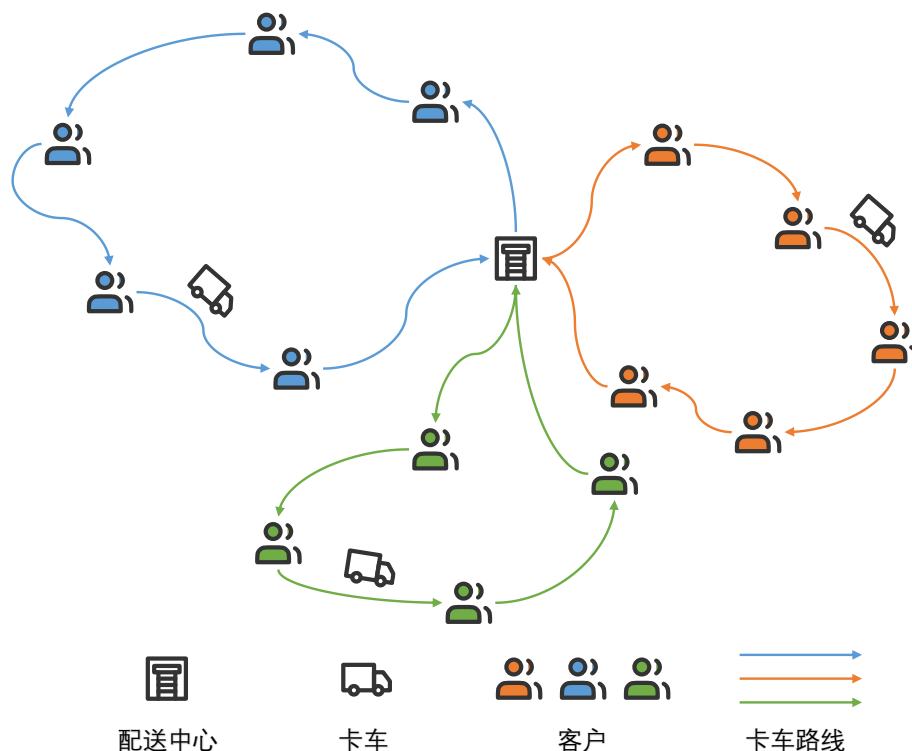


图 2-2: VRP 示意图

VRP 可以表述为整数规划问题^[7]: 假设存在一个配送中心 (仓库) 和若干顾客点, 顾客点需求为 $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 车辆载重上限为 Q , 每辆车从仓库出发并最终返回仓库。定义决策变量 $x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{车辆 } k \text{ 从 } i \text{ 行驶到 } j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 节点集合 $V = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, 其中 0 表示配送中心, $S = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示顾客节点, 车辆集合 $K = \{1, 2, \dots, m\}$, c_{ij} 表示从点 i 到点 j 的行驶成本 (距离或时间), 同样在 VRP 中为了消除子回路, 引入辅助变量 u_i 表示车辆访问顾客点 i 时的累计载重量。因此, VRP 的数学模型可以表示为 MILP 2.2。

Model 2.2: MILP VRP

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} c_{ij} x_{ijk} \quad (2-7)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in S} x_{0jk} = 1, \quad \forall k \in K \quad (2-8)$$

Model 2.2 (continued)

$$\sum_{i \in S} x_{i0k} = 1, \quad \forall k \in K \quad (2-9)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in V, i \neq j} x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in S \quad (2-10)$$

$$\sum_{i \in V, i \neq j} x_{ijk} = \sum_{i \in V, i \neq j} x_{jik}, \quad \forall j \in V, k \in K \quad (2-11)$$

$$u_j \geq u_i + q_j - Q(1 - x_{ijk}), \quad \forall i, j \in S, k \in K \quad (2-12)$$

$$q_j \leq u_j \leq Q, \quad \forall j \in S \quad (2-13)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V, k \in K \quad (2-14)$$

目标函数2-7表示最小化所有车辆的总行驶成本，约束2-8和2-9确保每辆车从配送中心出发并最终返回，约束2-10保证每个顾客点只被访问一次，约束2-11保证了流量守恒，即保证了路径的连续性，约束2-12和2-13通过 MTZ 方法消除子回路并满足车辆的容量限制，约束2-14对变量进行限制。

Part

IV

TDRP: Truck and Drone collaborative Routing Problem

Traveling Salesman Problem with Drone

3.1 Flying Sidekick Traveling Salesman Problem

Flying Sidekick Traveling Salesman Problem (FSTSP) 由 Murray(2015) 等^[8]提出。FSTSP 描述：假定有 c 个顾客需要服务，这个服务可以由无人机或者卡车来提供，但是有些顾客由于某些限制（比如包裹重量超过无人机的载重限制）只能由卡车提供服务。卡车和无人机必须从单一仓库出发，并且返回该仓库一次，即不能重复访问该仓库，无人机和卡车可以同时或者分别离开（返回）仓库。在无人机起飞前需要卡车司机装载包裹和更换电池的时间 s_L ，降落时需要给无人机装卸货物和充电的时间 s_R 。每次无人机的一次服务称为一次 sortie，一次 sortie 分为三个节点 $\langle i, j, k \rangle$ ，起飞点 i 可以是仓库也可以是顾客点，中间节点 j 是需要服务的顾客节点，节点 k 可以是仓库也可以是卡车所在的顾客节点，无人机在整个运输过程中可以进行多次 sortie 服务多个顾客，但是一次 sortie 的时间必须在无人机的续航时间内。FSTSP 的目标是最小化服务所有顾客并且返回仓库（无人机和卡车都返回）的时间。

关键假设如下：

- 无人机每次 sortie 的过程中只能服务一个顾客节点，但是在这期间卡车可以服务多个顾客节点。
- 无人机被假定为匀速飞行，如果无人机比卡车提前到达会合点则无人机不能在中途停下休息以节省电量。
- 无人机可以在降落点重新发射，但是无人机不能返回上一次的发射点。
- 无人机和卡车的会合点必须在顾客节点，而不能在中间的任何位置会合，并且卡车不会重新访问已经服务过的顾客节点来回收无人机。
- 无人机和卡车都不能访问除了仓库以外的非顾客节点（即只考虑简化过后的实际情况），并且无人机和卡车都不能重新访问已经服务过的顾客节点。
- 如果无人机返回仓库则不能再次进行服务，这是基于大多顾客节点都离仓库较远（大于无人机的续航里程）的假设，在无人机可以直接起飞服务顾客节点的假设下，PDSTSP 会更加适合。

FSTSP 数学模型的符号含义如表3-1所示。

FSTSP 数学模型可以表示为 MILP 3.1。

表 3-1: FSTSP 模型符号及含义

符号	含义
0	起点仓库
$c + 1$	终点仓库（和起点仓库相同，只是为了建模方便的另一个记号）
$C = \{1, 2, \dots, c\}$	全部客户集合
$C' \subseteq C$	无人机可访问的客户集合
$N_0 = \{0, 1, 2, \dots, c\}$	流出节点集合
$N_+ = \{1, 2, \dots, c + 1\}$	流入节点集合
$N = \{0, 1, 2, \dots, c, c + 1\}$	全部节点集合
$\langle i, j, k \rangle \in P, i \in N_0, j \in \{C' : j \neq i\},$ $k \in \{N_+ : k \neq i, k \neq j, \tau'_{ij} + \tau'_{jk} \leq e\}$	无人机飞行路径集合
$\tau'_{ij}/\tau_{ij}, i \in N_0, j \in N_+, i \neq j, \tau_{0,c+1} \equiv 0^a$	弧 $\langle i, j \rangle$ 的飞行/行驶时间成本
s_L/s_R	无人机发射/回收耗时
e	无人机续航时长，以单位时间来衡量
$x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in N_0, j \in N_+, i \neq j$	卡车路由决策变量
$y_{ijk} \in \{0, 1\}, i \in N_0, j \in C, k \in \{N_+ : \langle i, j, k \rangle \in P\}$	无人机路由决策变量
$t'_i/t_i \geq 0, i \in N_+, t'_0 = t_0 = 0$	无人机/卡车有效到达时间戳辅助变量
$p_{ij} \in \{0, 1\}^b, p_{0j} = 1, \forall j \in C$	卡车访问次序先后辅助变量（为了确保无人机连续的 sortie 和卡车访问的顺序一致 ^c ）
$1 \leq u_i \leq c + 2, i \in N_+$	卡车破子圈辅助变量（和标准 TSP 的 MTZ 形式破子圈辅助变量类似 ^d ）

^a 出于完备性的考虑，当只有一个顾客节点的时候，这个顾客将由无人机从仓库直接起飞进行服务。

^b 当卡车访问顾客节点 $j \in \{C : j \neq i\}$ 时，顾客节点 $i \in C$ 已经在之前的某个时间点被卡车访问过了，则 $p_{ij} = 1$ 。

^c 当顾客节点 i 或者 j 仅被无人机服务时， p_{ij} 的取值就不重要。

^d u_i 表示顾客点 i 在卡车访问的路径中的次序，比如 $u_5 = 1$ 表示顾客点 $i = 5$ 是卡车访问路径中的第 1 个节点，但是不同于 TSP，在 FSTSP 中需要通过约束将无人机服务的顾客点 i 排除在外。

Model 3.1: FSTSP MILP

$$\min \quad t_{c+1} \quad (3-1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} x_{ij} + \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} = 1, \quad \forall j \in C \quad (3-2)$$

$$\sum_{j \in N_+} x_{0j} = 1 \quad (3-3)$$

$$\sum_{i \in N_0} x_{i,c+1} = 1 \quad (3-4)$$

$$u_i - u_j + 1 \leq (c+2)(1 - x_{ij}), \quad \forall i \in C, j \in \{N_+ : j \neq i\} \quad (3-5)$$

$$\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} x_{ij} = \sum_{\substack{k \in N_+ \\ k \neq j}} x_{jk}, \quad \forall j \in C \quad (3-6)$$

$$\sum_{j \in C} \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \leq 1, \quad \forall i \in N_0 \quad (3-7)$$

$$\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq k}} \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \leq 1, \quad \forall k \in N_+ \quad (3-8)$$

$$2y_{ijk} \leq \sum_{\substack{h \in N_0 \\ h \neq i}} x_{hi} + \sum_{\substack{l \in C \\ l \neq k}} x_{lk}, \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\}, k \in \{N_+ : \langle i,j,k \rangle \in P\} \quad (3-9)$$

$$y_{0jk} \leq \sum_{\substack{h \in N_0 \\ h \neq k}} x_{hk}, \quad \forall j \in C, k \in \{N_+ : \langle 0,j,k \rangle \in P\} \quad (3-10)$$

$$u_k - u_i \geq 1 - (c+2) \left(1 - \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall i \in C, k \in \{N_+ : k \neq i\} \quad (3-11)$$

$$t'_i \geq t_i - M \left(1 - \sum_{\substack{j \in C \\ j \neq i}} \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall i \in C \quad (3-12)$$

$$t'_i \leq t_i + M \left(1 - \sum_{\substack{j \in C \\ j \neq i}} \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall i \in C \quad (3-13)$$

$$t'_k \geq t_k - M \left(1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq k}} \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall k \in N_+ \quad (3-14)$$

$$t'_k \leq t_k + M \left(1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq k}} \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i,j,k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall k \in N_+ \quad (3-15)$$

Model 3.1 (continued)

$$t_k \geq t_h + \tau_{hk} + s_L \left(\sum_{\substack{l \in C \\ l \neq k}} \sum_{\substack{m \in N_+ \\ \langle k, l, m \rangle \in P}} y_{klm} \right) + s_R \left(\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq k}} \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i, j, k \rangle \in P}} y_{ijk} \right) - M(1 - x_{hk}),$$

$$\forall h \in N_0, k \in \{N_+ : k \neq h\} \quad (3-16)$$

$$t'_j \geq t'_i + \tau'_{ij} - M \left(1 - \sum_{\substack{k \in N_+ \\ \langle i, j, k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall j \in C', i \in \{N_0 : i \neq j\} \quad (3-17)$$

$$t'_k \geq t'_j + \tau'_{jk} + s_R - M \left(1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ \langle i, j, k \rangle \in P}} y_{ijk} \right), \quad \forall j \in C', k \in \{N_+ : k \neq j\} \quad (3-18)$$

$$t'_k - (t'_j - \tau'_{ij}) \leq e + M(1 - y_{ijk}), \quad \forall k \in N_+, j \in \{C : j \neq k\}, i \in \{N_0 : \langle i, j, k \rangle \in P\} \quad (3-19)$$

$$u_i - u_j \geq 1 - (c + 2)p_{ij}, \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\} \quad (3-20)$$

$$u_i - u_j \leq -1 + (c + 2)(1 - p_{ij}), \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\} \quad (3-21)$$

$$p_{ij} + p_{ji} = 1, \quad \forall i \in C, j \in \{C : j \neq i\} \quad (3-22)$$

$$t'_l \geq t'_k - M \left(3 - \sum_{\substack{j \in C \\ \langle i, j, k \rangle \in P \\ j \neq l}} y_{ijk} - \sum_{\substack{m \in C \\ m \neq i \\ m \neq k \\ m \neq l}} \sum_{\substack{n \in N_+ \\ \langle l, m, n \rangle \in P \\ n \neq i \\ n \neq k}} y_{lmn} - p_{il} \right) \quad (3-23)$$

$$\forall i \in N_0, k \in \{N_+ : k \neq i\}, l \in \{C : l \neq i, l \neq k\}$$

$$t_0 = 0 \quad (3-24)$$

$$t'_0 = 0 \quad (3-25)$$

$$p_{0j} = 1, \quad \forall j \in C \quad (3-26)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N_0, j \in \{N_+ : j \neq i\} \quad (3-27)$$

$$y_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N_0, j \in \{C : j \neq i\}, k \in \{N_+ : \langle i, j, k \rangle \in P\} \quad (3-28)$$

$$1 \leq u_i \leq c + 2, \quad \forall i \in N_+ \quad (3-29)$$

$$t_i \geq 0, \quad \forall i \in N \quad (3-30)$$

$$t'_i \geq 0, \quad \forall i \in N \quad (3-31)$$

$$p_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N_0, j \in \{C : j \neq i\} \quad (3-32)$$

目标函数3-1追求最小化卡车到达终点仓库 $c + 1$ 的有效时间 t_{c+1} ，通过约束 3-14 和 3-15 来对齐无人机和卡车最晚到达终点仓库的时间，所以目标函数相当于 $\min\{\max\{t_{c+1}, t'_{c+1}\}\}$ 。

参考[知乎解读文章](#)，可以将约束条件可以分为四类：

- 客户有关的约束：约束 3-2 要求对于任何一位顾客 j ，必须且只能被卡车（或无人机）服务一次。
- 卡车有关的约束：

- 卡车流平衡约束：约束 3-3 要求卡车必须从起点仓库流出一次，约束 3-4 要求卡车必须从终点仓库流入一次，约束 3-6 要求卡车在中间节点满足流入和流出相等的流平衡约束。
- 卡车破子圈约束：约束 3-5 是 MTZ 形式的破子圈约束¹，去除了子圈存在的可能，这里 M 取到了 $u_i - u_j + 1$ 的上界 $c + 2$ ， u_i 可以理解为点 i 的访问次序，比如 $u_1 = 5$ 可以理解点 1 是从出发点开始，第五个被访问到的点。
- 无人机有关的约束：
 - 无人机发射、回收节点流约束：约束 3-7 表示无人机可以从非终点仓库流出，约束 3-8 表示无人机可以从非起点仓库流入。
 - 无人机访问、回收节点时间戳约束：约束 3-17 表示无人机访问顾客的时间戳应该符合时间逻辑，即不早于起飞时间戳 t'_i + 前往服务顾客点的飞行时长 τ'_{ij} ²，约束 3-18 表示无人机回到卡车的时间戳应该符合时间逻辑，即不早于访问顾客点的 t'_j + 返回卡车的飞行时长 τ'_{jk} + 回收无人机用时 s_R ³。
 - 无人机电量续航约束：约束 3-19 表示无人机的飞行时间不能超过其续航时间，即到达会合点 t'_k 的有效时间 - 无人机从节点 i 的起飞时间 $(t'_j - \tau'_{ij})$ （不直接使用 t'_i 是因为 t'_i 不是起飞的时间戳而是无人机到达 i 点的时间戳）要在无人机的续航时间 e 之内。
 - 无人机飞行次序约束：约束 3-23 要求无人机对于任意两条路径 $\langle i, j, k \rangle$ 和 $\langle l, m, n \rangle$ 而言，如果无人机先从节点 i 起飞之后的某个时间才从节点 l ($p_{il} = 1$) 起飞，则无人机必须先完成上一次飞行才能继续下一次飞行 ($t'_l \geq t'_k$)，并且任意两条路径之间无交叉。
- 无人机和卡车同步有关的约束：
 - 无人机发射、回收点卡车访问约束：约束 3-9 要求对于非起点发射的无人机 ($\forall i \in C$)，卡车必须经过无人机的起飞点 i 和降落点 k ，约束 3-10 要求对于从起点仓库起飞的无人机来说，卡车必须经过无人机的降落点。
 - 无人机访问顾客时卡车访问次序约束：约束 3-11 要求卡车必须先访问无人机的起飞点再访问无人机的降落点。
 - 无人机发射点时间戳约束：约束 3-12 和 3-13 为无人机发射点的有效时间约束，要求无人机在发射节点的有效时间等于卡车在该点的有效时间，共同实现了卡车和无人机在发射节点时间上的对齐。
 - 无人机回收点时间戳约束：约束 3-14 和 3-15 为无人机回收点的有效时间约束，要求无人机在回收节点的有效时间等于卡车在该点的有效时间，共同实现了卡车和无人机在回收节点时间上的对齐。
 - 卡车访问顾客节点时间戳约束：约束 3-16 要求卡车访问当前顾客点 k 时必须要先将需要起飞的无人机 s_L 发射或者需要降落的无人机 s_R 回收，并且要大于到达顾客点 h 的有效时间戳 t_h + 路径 $\langle h, k \rangle$ 所花费的时间 τ_{hk} ⁴。

• 辅助变量和决策变量：

¹关于破子圈约束可以参考 TSP 中两种不同消除子环路的方法和浅谈旅行商问题 (TSP) 的七种整数规划模型

²起飞时间 s_L 没有被包含进来的原因是，当无人机从顾客点 i 起飞时，约束 3-12 和 3-13 会使得 $t'_i = t_i$ ，然后约束 3-14 和 3-15 会将起飞的时间 s_L 包含在飞行到顾客点 j 的时间内。

³这里降落的时间 s_R 必须被包含进来的原因是，卡车可能比无人机更快到达会合点 k （原文中举出了一个例子以助于理解^[8]）。

⁴这里假设卡车从 $h \in N_0$ 行驶到 $k \in N_+$ 。

- 卡车访问次序约束：约束3-20, 3-21和3-22决定了卡车访问次序 p_{ij} 取值的合理性, u_i 和 p_{ij} 主要用于约束被卡车访问的节点之间的次序, 对于被无人机服务的顾客点 i 或者 j 来说, u_i 和 p_{ij} 的取值并不重要。
- 辅助变量及决策变量的初始值和取值范围：约束3-24和3-25给定了卡车和无人机有效时间的初始值, 约束3-26规定了起点仓库的访问次序一定在其他所有顾客节点之前, 约束3-27和3-28给定了决策变量的取值范围, 约束3-29规定了卡车破子圈辅助变量的取值范围, 约束3-30和3-31规定了卡车和无人机的有效时间必须是非负实数, 约束3-32给定了卡车访问次序辅助变量的取值范围。

在约束 equations (3-12) to (3-19) 中, $M \geq \max\{t_{c+1}, t'_{c+1}\}$ 取一个非常大的数, 需要大于等于最后到达终点仓库的卡车 (无人机) 的有效时间。由于无法事先确定最小可接受的 M 值, 因此一种方法是用 nearest neighbor heuristic 来计算一个访问所有顾客节点并返回仓库的时间上限。算法的大致过程: 初始化 $M = 0$, 然后从仓库开始构建卡车路径 ($i = 0$), 找到最近的还未访问过的顾客节点 j , 让 $M \leftarrow M + \tau_{ij}$, 更新 $i = j$ 然后重复这个过程, 即不断添加距离最近的未访问过的顾客节点直到所有的顾客都被访问一遍, 最终让 $M \leftarrow M + \tau_{i,c+1}$, 即让卡车返回仓库。

3.1.1 Flying Sidekick Traveling Salesman Problem with Multiple Drops

Gonzalez-R 等 (2020)^[9] 最早提出了类型为 Flying Sidekick Traveling Salesman Problem with Multiple Drops (FSTSP-MD) 的 MILP 数学模型, 在文章中, 作者称之为 truck-drone team logistic (TDTL)。该问题聚焦于 FSTSP 问题的延伸, 即考虑无人机可以在单次起飞降落的过程 (在 Murray 等 (2015)^[8] 中被称为 sortie) 服务多个顾客节点的情况, 但是不同于 FSTSP, TDTL 的起始节点和终止节点不是同一个节点。

关键假设如下:

- 不考虑卡车的最大航行里程, 即卡车在整个运输过程中不需要补充燃料。
- 无人机和卡车只能在顾客节点会合, 而不能够在任意的中间路程中进行会合。无人机和卡车在会合点通过更换电池使无人机充满电。无人机和卡车在会合点需要进行时间对齐, 即如果无人机先到达会合点则需要等待卡车到达, 反之亦然。
- 对于无人机更换电池的次数没有限制, 无人机更换电池的服务时间相对于总体的时间而言可以忽略不计, 因此不考虑更换电池的时间。由于无人机在每次和卡车会合时是通过更换电池来达到充电的目的, 所以每次无人机在和卡车会合后起飞时, 无人机的电池是满的。
- 只要无人机有充足的电量, 无人机就会在服务过程中访问多个顾客直到下一次和卡车在顾客节点会合。
- 当无人机搭载在卡车上进行访问顾客节点时, 无人机不消耗电量。
- 节点之间的距离用欧几里得距离来衡量, 无人机和卡车都以恒定的速度行驶。
- 为了简化模型, 假定无人机的电量消耗是线性的, 即无人机的电量不会随着起飞降落或者携带的货物重量而进行非线性的变化。
- 每个顾客必须被无人机或者卡车服务一次。

TDTL 数学模型的符号含义如表3-3所示。

TDTL 数学模型可以表示为 MILP 3.2。

表 3-3: TDTL 模型符号及含义

符号	含义
$G = \{N, A\}$	定义了要访问的节点集合和连接它们的有向链接集合的图。
N	图 G 的节点集合。
$o \in N$	任务的起始节点。
$e \in N$	任务的结束节点。
A	图 G 中的有向链接集合。
$\delta^+(i)$	可以从节点 $i \in N$ 通过链接 A 到达的节点集合。
$\delta^-(i)$	可以通过链接 A 到达节点 $i \in N$ 的节点集合。
Q	无人机电池的最大充电水平（以时间单位表示），即电池更换时的电量。
t_{ij}^T	链接 $(i, j) \in A$ 上卡车的行驶时间。
t_{ij}^D	链接 $(i, j) \in A$ 上无人机的行驶时间。
M	一个足够大的常数。
u_{ij}	二元变量，如果链接 $(i, j) \in A$ 被卡车遍历，则等于 1。
v_{ij}	二元变量，如果链接 $(i, j) \in A$ 被无人机遍历，则等于 1。
s_i	连续变量，衡量节点 $i \in N$ 被卡车或无人机服务后的最早出发时间。
b_i^-	连续变量，衡量无人机到达节点 $i \in N$ 时的电池电量。
b_i^+	连续变量，衡量无人机离开节点 $i \in N$ 时的电池电量。

Model 3.2: TDTL MILP

$$\min \quad s_e \quad (3-33)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in \delta^-(i)} u_{ji} \leq 1, \quad \forall i \in N \setminus \{o, e\} \quad (3-34)$$

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} u_{ij} - \sum_{j \in \delta^-(i)} u_{ji} = 0, \quad \forall i \in N \setminus \{o, e\} \quad (3-35)$$

$$\sum_{j \in \delta^+(o)} u_{oj} = 1 \quad (3-36)$$

$$\sum_{i \in \delta^-(e)} u_{ie} = 1 \quad (3-37)$$

$$\sum_{j \in \delta^-(i)} v_{ji} \leq 1, \quad \forall i \in N \setminus \{o, e\} \quad (3-38)$$

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} v_{ij} - \sum_{j \in \delta^-(i)} v_{ji} = 0, \quad \forall i \in N \setminus \{o, e\} \quad (3-39)$$

$$\sum_{j \in \delta^+(o)} v_{oj} = 1 \quad (3-40)$$

$$\sum_{i \in \delta^-(e)} v_{ie} = 1 \quad (3-41)$$

$$\sum_{i \in \delta^-(j)} u_{ij} + \sum_{i \in \delta^-(j)} v_{ij} \geq 1, \quad \forall j \in N \setminus \{o\} \quad (3-42)$$

$$s_j \geq s_i + t_{ij}^T \cdot u_{ij} - M \cdot (1 - u_{ij}), \quad \forall (i, j) \in A \quad (3-43)$$

$$s_j \geq s_i + t_{ij}^D \cdot v_{ij} - M \cdot (1 - v_{ij} + u_{ij}), \quad \forall (i, j) \in A \quad (3-44)$$

Model 3.2 (continued)

$$s_o = 0 \quad (3-45)$$

$$b_j^- \leq Q + M \cdot (2 - v_{ij} - u_{ij}), \quad \forall (i, j) \in A \quad (3-46)$$

$$b_j^- \geq Q - M \cdot (2 - v_{ij} - u_{ij}), \quad \forall (i, j) \in A \quad (3-47)$$

$$b_j^+ \leq Q + M \cdot (2 - v_{ij} - u_{ij}), \quad \forall (i, j) \in A \quad (3-48)$$

$$b_j^+ \geq Q - M \cdot (2 - v_{ij} - u_{ij}), \quad \forall (i, j) \in A \quad (3-49)$$

$$b_j^- \leq b_i^+ - t_{ij}^D + M \cdot \left(1 - v_{ij} + u_{ij} + \sum_{k \neq i} u_{kj} \right), \quad \forall (i, j) \in A \quad (3-50)$$

$$b_j^- \geq b_i^+ - t_{ij}^D - M \cdot \left(1 - v_{ij} + u_{ij} + \sum_{k \neq i} u_{kj} \right), \quad \forall (i, j) \in A \quad (3-51)$$

$$b_j^+ \leq b_j^- + M \cdot \left(1 - v_{ij} + u_{ij} + \sum_{k \neq i} u_{kj} \right), \quad (i, j) \in A \quad (3-52)$$

$$b_j^+ \geq b_j^- - M \cdot \left(1 - v_{ij} + u_{ij} + \sum_{k \neq i} u_{kj} \right), \quad (i, j) \in A \quad (3-53)$$

$$b_j^- \leq b_j^+ - t_{ij}^D + M \cdot \left(1 - v_{ij} + u_{ij} + 1 - \sum_{k \neq i} u_{kj} \right), \quad (i, j) \in A \quad (3-54)$$

$$b_j^- \geq b_j^+ - t_{ij}^D - M \cdot \left(1 - v_{ij} + u_{ij} + 1 - \sum_{k \neq i} u_{kj} \right), \quad (i, j) \in A \quad (3-55)$$

$$b_j^+ \leq Q + M \cdot \left(1 - v_{ij} + u_{ij} + 1 - \sum_{k \neq i} u_{kj} \right), \quad (i, j) \in A \quad (3-56)$$

$$b_j^+ \geq Q - M \cdot \left(1 - v_{ij} + u_{ij} + 1 - \sum_{k \neq i} u_{kj} \right), \quad (i, j) \in A \quad (3-57)$$

$$b_0^+ = Q \quad (3-58)$$

目标函数3-33追求最小化服务完所有顾客并到达终止节点的时间 s_e 。

- 卡车相关的路径约束：约束 3-34 限制每个顾客节点最多只能被卡车服务一次；约束 3-35 要求卡车在顾客节点满足流入和流出相等的流平衡；约束 3-36 和 3-37 分别要求卡车只能在起始节点流出一次，只能在终止节点流入一次。
- 无人机相关的路径约束：约束 3-38 限制每个顾客节点最多只能被无人机服务一次；约束 3-39 要求无人机在顾客节点满足流入和流出相等的流平衡；约束 3-40 和 3-41 分别要求无人机只能在起始节点流出一次，只能在终止节点流入一次。
- 节点访问约束：约束 3-42 要求每个节点都必须被卡车或无人机（或者两者一起）访问过一次。
- 同步相关的约束：约束 3-43 和 3-44 计算了每个节点的离开时间；约束 3-45 规定了离开起始节点的时间。
- 无人机电量相关约束：约束 3-58 表示无人机离开起始节点 o 时的电量为 Q 。与无人机电量相关的约束根据无人机的状态不同可以分为三种类型，如图3-1所示。

a) 卡车搭载无人机：约束 equations (3-46) to (3-49) 表示当无人机和卡车同时访问节点 j 时，

即卡车搭载无人机进行服务，无人机在到达节点 j 和离开节点 j 时的状态都是充满电的状态 ($b_j^- = b_j^+ = Q$)，即卡车搭载无人机访问时无人机不消耗电量。

- b) 无人机单独服务节点：约束 equations (3-50) to (3-53) 表示当无人机单独访问节点 j 时，无人机在到达节点 j 的电量应该是无人机在离开节点 i 的电量减去路径 (i, j) 所消耗的电量 ($b_j^- = b_i^+ - T_{ij}^D$)，当无人机离开节点 j 时的电量应该等于无人机到达节点 j 的电量 ($b_j^+ = b_j^-$)，因为假设无人机在降落和起飞过程中不消耗电量。
- c) 无人机与卡车会合：约束 equations (3-54) to (3-57) 表示当无人机与卡车在节点 j 会合时，无人机到达节点 j 时的电量应该是 $b_j^- = b_i^+ - T_{ij}^D$ ，当无人机与卡车会合时，无人机会在卡车上通过替换电池来将电量充满，因此当无人机离开节点 j 时的电量应该是 $b_j^+ = Q$ 。

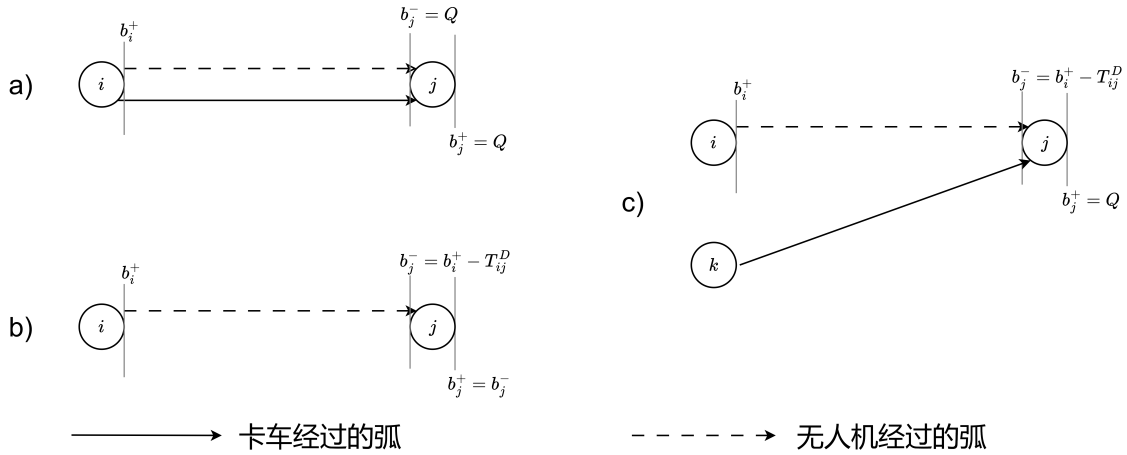


图 3-1: TDTL 模型无人机电量约束类型示意图

Liu 等 (2021)^[10] 同样提出了类型为 FSTSP-MD 的 MILP 数学模型。在文章中作者称之为 Two-Echelon Routing Problem for the Truck and Drone (2E-RP-T&D)。但是不同于 Gonzalez-R 等 (2020)^[9] 提出的 TDTL 模型，该问题考虑了不同重量的包裹对于无人机飞行消耗能源的影响。和 FSTSP 及 TDTL 一样，同样假设一辆卡车搭载一架无人机进行包裹递送，卡车的载重和续航没有进行限制，即卡车能够运送所有的包裹。该问题同样假设无人机和卡车在顾客点（或仓库）会合，但是该问题要求卡车必须先于无人机到达会合点（出于安全考虑）。2E-RP-T&D 的目标是最小化无人机和卡车的总成本。

Windras Mara 等 (2022)^[11] 在 Gonzalez-R 等 (2020)^[9] 的基础上提出了 multi-drop FSTS，但是不同于 Gonzalez-R 等 (2020)^[9] 的假设，该模型考虑了起飞和降落的服务时间。

multi-drop FSTSP 数学模型的符号含义如表3-5所示。

表 3-5: multi-drop FSTSP 数学模型符号及含义

符号	含义
n	顾客的数量
k	操作的索引
$G = (V, A)$	定义了要访问的节点集合 V 和连接它们的弧集合 A 的图
V	图 G 的节点集合, 包括一个仓库节点 $\{0\}$ 和 n 个客户节点 $N = \{1, 2, \dots, n\}$
A	图 G 中的弧集合, 连接节点对 (i, j) , 其中 $i, j \in V$
$V_d \subseteq V$	可以由无人机服务的节点子集
N	客户节点集合, 即 $N = \{1, 2, \dots, n\}$
$K = [OP_1, \dots, OP_k]$	所有可行操作的集合
C	卡车路径的非负节点数组
D	无人机路径的非负节点数组
$S \subseteq V$	节点的子集
$OP_k = \{\mathcal{T}_k, \mathcal{D}_k\}$	第 k 次递送的顺序, 也被称为 operation, 其中 \mathcal{T}_k 是卡车在 OP_k 时必须访问的节点序列, \mathcal{D}_k 是无人机在 OP_k 时必须访问的节点序列
$K(v)$	包含了节点 v 的所有可行操作集合
$K^-(v)$	包含了以节点 v 为起始点或发射点的所有可行操作集合
$K^+(v)$	包含了以节点 v 为终止点或会合点的所有可行操作集合
$K^{\mathcal{T}}(v)$	包含了以卡车访问节点 v 的所有可行操作集合
$K^{\mathcal{D}}(v)$	包含了以无人机访问节点 v 的所有可行操作集合
c_n	顾客的需求
$d_{i \rightarrow j}^{\mathcal{T}}$	卡车从节点 i 行驶到 j 的距离
$d_{i \rightarrow j}^{\mathcal{D}}$	无人机从节点 i 行驶到 j 的距离
$\tau_{i \rightarrow j}^{\mathcal{T}}$	弧 $(i, j) \in A$ 上卡车的行驶时间
$\tau_{i \rightarrow j}^{\mathcal{D}}$	弧 $(i, j) \in A$ 上无人机的行驶时间
s^L	无人机的启动时间
s^R	无人机的回收时间
ϵ	无人机的续航时间
$w_r^{\mathcal{T}}$	卡车在节点 j 的等待时间
$w_r^{\mathcal{D}}$	无人机在节点 j 的等待时间
$t(\mathcal{T}_k)$	卡车在 OP_k 中完成其对应任务所需的时间, 计算公式为3-60
$t(\mathcal{D}_k)$	无人机在 OP_k 中完成其对应任务所需的时间, 计算公式为3-61
$t_k = t(OP_k)$	OP_k 的完成时间 (OP_k 的成本函数), 计算公式为3-59
x_k	二元决策变量, 如果选择操作 k , 则等于 1, 否则等于 0
Y_v	二元辅助决策变量, 如果节点 v 被选为至少一个操作的起始节点, 则等于 1, 否则等于 0

Definition 3.1: time for operations

$$t(OP_k) = \begin{cases} \max\{t(\mathcal{T}_k), t(\mathcal{D}_k)\}, & \text{当 } OP_k \text{ 包含至少一个无人机访问的节点时} \\ t(\mathcal{T}_k), & \text{其他} \end{cases} \quad (3-59)$$

$$t(\mathcal{T}_k) = \begin{cases} s^L + \tau_{i \rightarrow C_1}^{\mathcal{T}} + \sum_{i=1}^{|C|-1} \tau_{C_i \rightarrow C_{i+1}}^{\mathcal{T}} + \tau_{C_{|C|} \rightarrow j}^{\mathcal{T}} + s^R, & \text{当 } D \neq \emptyset \text{ 且 } |C| > 1 \\ s^L + \tau_{i \rightarrow C_1}^{\mathcal{T}} + \tau_{C_1 \rightarrow j}^{\mathcal{T}} + s^R, & \text{当 } D \neq \emptyset \text{ 且 } |C| = 1 \\ \tau_{i \rightarrow j}^{\mathcal{T}}, & \text{其他} \end{cases} \quad (3-60)$$

$$t(\mathcal{D}_k) = \begin{cases} s^L + \tau_{i \rightarrow D_1}^{\mathcal{D}} + \sum_{i=1}^{|D|-1} \tau_{D_i \rightarrow D_{i+1}}^{\mathcal{D}} + \tau_{D_{|D|} \rightarrow j}^{\mathcal{D}} + s^R, & \text{当 } |D| > 1 \\ s^L + \tau_{i \rightarrow D_1}^{\mathcal{D}} + \tau_{D_1 \rightarrow j}^{\mathcal{D}} + s^R, & \text{其他} \end{cases} \quad (3-61)$$

multi-drop FSTSP 数学模型可以表示为 MILP 3.3。

Model 3.3: multi-drop FSTSP MILP

$$\min \quad M = \sum_{k \in K} t_k x_k \quad (3-62)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k \in K(v)} x_k \geq 1, \quad \forall v \in V \setminus \{0\} \quad (3-63)$$

$$\sum_{k \in K^{\mathcal{D}}(v)} x_k \leq 1, \quad \forall v \in Vd \setminus \{0\} \quad (3-64)$$

$$\sum_{k \in K^{\mathcal{T}}(v)} x_k \leq 2 \left(1 - \sum_{k \in K^{\mathcal{D}}(v)} x_k \right), \quad \forall v \in Vd \setminus \{0\} \quad (3-65)$$

$$\sum_{k \in K^+(v)} x_k \leq nY_v, \quad \forall v \in V \quad (3-66)$$

$$\sum_{k \in K^+(v)} x_k = \sum_{k \in K^-(v)} x_k, \quad \forall v \in V \quad (3-67)$$

$$\sum_{k \in K^+(S)} x_k \geq Y_v, \quad \forall S \subset V \setminus \{0\}, v \in S \quad (3-68)$$

$$\sum_{k \in K^+(0)} x_k \geq 1 \quad (3-69)$$

$$\tau_{i \rightarrow D_1}^{\mathcal{D}} + \sum_{i=1}^{|D|-1} \tau_{D_i \rightarrow D_{i+1}}^{\mathcal{D}} + \tau_{D_{|D|} \rightarrow j}^{\mathcal{D}} + w_r^{\mathcal{D}} \leq \epsilon \quad (3-70)$$

$$Y_0 = 1 \quad (3-71)$$

$$x_k \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K \quad (3-72)$$

$$Y_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V \quad (3-73)$$

目标函数3-62旨在最小化总路径的完成时间。

- 顾客相关的约束：约束 3-63 确保所有的节点都被至少访问过一次；约束 3-64 确保所有可以被无人机服务的顾客点最多被无人机服务一次；约束 3-65 确保被无人机服务过的节点不会被卡车服务，反之亦然，系数 2 是由于当无人机没有服务过节点 v 时，节点 v 可以作为卡车某个操作的终点及另一个操作的起点（即在节点 v 最多在两个操作中存在，一次作为操作的起点，一次作为操作的终点）；约束 3-66 表示如果节点 v 是某个操作的终止节点，那么节点 v 一定要是某

个操作的起始节点。

- **Hamilton Graph约束:** 约束 3-67 确保以节点 v 为终止点的操作接下来的操作会以节点 v 为起始点（流量平衡约束）；约束 3-68 确保任何非空的客户子集 S 必须至少有一个操作从外部进入，即如果节点 v 被选为某个操作的起始节点 ($Y_v = 1$)，则必须存在至少一个操作进入包含 v 的子集 S ，避免子回路的产生（消除子回路约束）；约束 3-69 确保终止点为仓库的操作只有一次，这是因为如果终止点为仓库的操作大于 1 次，由于约束 3-65 限制了卡车和无人机服务节点的次数，并且约束 3-63 确保每个节点都被访问过至少一次，而目标函数是最小化时间成本，如果多次以仓库为终止点的操作存在，则会增加成本，因此终止节点为仓库的操作大于 1 次的情况会被过滤掉。
- **无人机相关的约束:** 约束 3-70 要求无人机在一次 sortie 过程中消耗的电量不能超过其续航限制。
- **决策变量和辅助决策变量及初始值:** 约束 3-71 通过确保仓库被作为起点访问使得仓库作为路径的起始点；约束 3-72 和 3-73 定义了决策变量 x_k 和辅助决策变量 Y_v 的取值范围。

Windras Mara 等 (2022)^[11] 用 Adaptive Large Neighborhood Search (ALNS) 来解决该问题，文章中使用到的 ALNS 算法符号及含义如 3-7 所示。

Definition 3.2: acceptance criterion

$$\Pr = \begin{cases} \exp\left(\frac{-(M' - M)}{BZxT_c}\right), & \text{for } M' - M > 0 \\ 1, & \text{for } M' - M \leq 0 \end{cases} \quad (3-74)$$

$$\Pr(c^-) = \frac{\omega_c^-}{\sum_{q \in Q} \omega_q^-}, \quad \forall c \in Q \quad (3-75)$$

$$\Pr(c^+) = \frac{\omega_c^+}{\sum_{r \in R} \omega_r^+}, \quad \forall c \in R \quad (3-76)$$

$$\omega_{i+1}^- = \lambda(\omega_i^-) + (1 - \lambda)(\eta_i) \quad (3-77)$$

$$\eta_i = \begin{cases} \Omega_1, & \text{if } M_i \leq M^* \\ \Omega_2, & \text{if } M_i \leq M_{i-1} \\ \Omega_3, & \text{if } M_i > M_{i-1} \wedge U(0, 1) < \Pr \\ \Omega_4, & \text{if } M_i > M_{i-1} \end{cases} \quad (3-78)$$

$$f_c = f_1 - (f_1 - f_0) \left(\frac{i_c}{I} \right), \quad \forall c \in \{1, \dots, I\} \quad (3-79)$$

$$ND_c = n(f_c), \quad \forall c \in \{1, \dots, I\} \quad (3-80)$$

$$(3-81)$$

3.2 Parallel Drone Scheduling Traveling Salesman Problem

Parallel Drone Scheduling Traveling Salesman Problem (PDSTSP) 同样由 Murray 等 (2015)^[8] 提出。PDSTSP 适用于大量的顾客节点在无人机直接从仓库起飞的续航里程范围内。PDSTSP 描述：一辆卡车和一群（单个或者多个都可以）完全相同的无人机从单个仓库出发分别服务顾客，每个顾客只能被服务一次，卡车遵循 TSP 路径服务，无人机直接从仓库起飞服务顾客，不同于 FSTSP，PDSTSP 中的无人机不需

表 3-7: ALNS 算法使用到的符号及含义

符号	含义
s^*	最佳可行解
s'	新的可行解
M	目标函数值
M'	新的目标函数值
M^*	最优目标函数值
Q	destroy operators 集合
R	repair operators 集合
ω^-	destroy operator 权重
ω^+	repair operator 权重
η_I	destroy/repair operators 在当前迭代 I 中的表现
Pr	选择的概率, 计算公式为3-74
T_c	当前的温度
T_1	初始的温度
T_0	最终的温度
α	冷却系数
BZ	Boltzmann 常数
$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$	权重调整参数
λ	衰减参数
f_1	初始的 destroy ratio
f_0	最终的 destroy ratio
I_T	在某一温度下的迭代次数
P	概率
f_c	递减线性函数
ND_c	被 destroyed 的顾客节点数量, 由3-79和3-80决定
AR_s	Archive of solutions for archive repair
RD	Destroy operator - Random removal
WTD	Destroy operator - Worst truck distance removal
WDD	Destroy operator - Worst drone distance removal
BD	Destroy operator - Block destroy removal
RR	Repair operator - Random repair
AR	Repair operator - Archive repair
LDR-1	Repair operator - Least distance repair $d_{i-1 \rightarrow i}$
LDR-2	Repair operator - Least distance repair $d_{i \rightarrow i+1}$
HR	Repair operator - Hill climbing

要和卡车进行会合。PDSTSP 的目标是最小化最终到达仓库的卡车（无人机）的时间。

PDSTSP 数学模型的符号含义如表3-9，基本上沿用了 FSTSP 的符号。

表 3-9: PDSTSP 模型符号及含义

符号	含义
0	起点仓库
$c + 1$	终点仓库
$C = \{1, 2, \dots, c\}$	全部客户集合
$C' \subseteq C$	可以接受无人机访问的客户集合 ^a
$C'' \subseteq C'$	在无人机的航行范围内可以接受无人机服务的顾客集合 ^b
$N_0 = \{0, 1, 2, \dots, c\}$	流出节点集合
$N_+ = \{1, 2, \dots, c + 1\}$	流入节点集合
$N = \{0, 1, 2, \dots, c, c + 1\}$	全部节点集合
$v \in V$	无人机集合
$\tau'_{i,j} / \tau_{i,j}$	弧 $\langle i, j \rangle$ 的飞行/行驶时间成本
$1 \leq \hat{u}_i \leq c + 2$	卡车破子圈辅助变量
$\hat{y}_{i,v} \in \{0, 1\}, i \in C'', v \in V$	无人机访问决策变量
$\hat{x}_{i,j} \in \{0, 1\}, i \in N_0, j \in \{N_+ : j \neq i\}$	卡车路由决策变量

^a 指包裹重量没有超过无人机的载重限制，不需要顾客签收，顾客的位置允许无人机起降等限制。

^b 当 $\tau'_{0,i} + \tau'_{i,c+1} \leq e$ 时，顾客 $i \in C'$ 属于集合 C'' 。

PDSTSP 数学模型可以表示为 MILP 3.4。

Model 3.4: PDSTSP MILP

$$\min \quad z \quad (3-82)$$

$$\text{s.t.} \quad z \geq \sum_{i \in N_0} \sum_{\substack{j \in N_+ \\ j \neq i}} \tau_{i,j} \hat{x}_{i,j} \quad (3-83)$$

$$z \geq \sum_{i \in C''} (\tau'_{0,i} + \tau'_{i,c+1}) \hat{y}_{i,v}, \quad \forall v \in V \quad (3-84)$$

$$\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} \hat{x}_{i,j} + \sum_{\substack{v \in V \\ j \in C''}} \hat{y}_{j,v} = 1, \quad \forall j \in C \quad (3-85)$$

$$\sum_{j \in N_+} \hat{x}_{0,j} = 1 \quad (3-86)$$

$$\sum_{i \in N_0} \hat{x}_{i,c+1} = 1 \quad (3-87)$$

$$\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} \hat{x}_{i,j} = \sum_{\substack{k \in N_+ \\ k \neq j}} \hat{x}_{j,k}, \quad \forall j \in C \quad (3-88)$$

$$\hat{u}_i - \hat{u}_j + 1 \leq (c + 2)(1 - \hat{x}_{i,j}), \quad \forall i \in C, j \in \{N_+ : j \neq i\} \quad (3-89)$$

$$1 \leq \hat{u}_i \leq c + 2, \quad \forall i \in N_+ \quad (3-90)$$

$$\hat{x}_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N_0, j \in \{N_+ : j \neq i\} \quad (3-91)$$

Model 3.4 (continued)

$$\hat{y}_{i,v} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in C'', v \in V \quad (3-92)$$

目标函数3-82追求最小化完工时间 z ，即无人机和卡车最晚到达终点仓库的时间，通过约束3-83和3-84分别限制卡车和无人机最晚到达终点仓库的时间来实现；约束3-85确保了每个顾客能且只能被服务一次，服务可以由无人机或者卡车提供；约束3-86和3-87要求卡车必须从起点仓库 0 出发并返回终点仓库 $c+1$ 一次，约束3-88要求卡车在中间的顾客节点满足流入和流出相等的流约束；约束3-89是 MTZ 形式的破子圈约束；约束3-90，3-91和3-92给出了决策变量和辅助决策变量的取值范围。

Ham(2018)^[12]在 PDSTSP 的基础上提出了 multi-truck, multi-drone, and multi-depot scheduling problem constrained by time-window, drop-pickup synchronization, and multi-visit, with the objective to minimize the maximum completion time over all tasks (PDSTSP^{+DP})，不同于 PDSTSP，该问题考虑了无人机递送和收回货物的情况，即当无人机递送货物到顾客返回时，可以飞行到另一个需要退货的顾客节点进行回收货物以使无人机满载，从而满足退货的需求。另外，该问题还考虑了服务顾客的时间窗问题，即顾客需求有时间限制，并且可以在不同的时间段为同一个顾客服务。

4

Traveling Salesman Problem with multiple Drones

5

multiple Traveling Salesman Problem with Drones

Ventresca 等 (2019)^[13] 提出了 multiple Traveling Salesman Problem with Drones (mTSPD) 的 mixed integer programming (MIP) 公式，目标函数是最小化所有卡车和无人机返回仓库的最终时间。该文章没有考虑无人机的降落和起飞等服务时间，一个创新点在于无人机降落时不需要降落在原来搭载该无人机的卡车上，而是可以选择降落在附近的其他卡车上。

6

Vehicle Routing Problem with Drones

Wang 等 (2019)^[14] 提出了 Vehicle Routing Problem with Drones (VRPD), 目标是最小化无人机和卡车的总物流成本, 在这个问题中, 每辆卡车可以搭载 N 架无人机, 因此是一个 $M : N$ 的多对多 VRP。在这个问题中, 无人机能够和卡车一起行驶, 当卡车停在服务中心 (service hub) 时, 如果顾客货物需求和距离都在无人机的载重和续航范围内, 则无人机可以从服务中心 (或仓库) 起飞进行服务, 文章中限制了无人机不能在顾客节点进行降落, 而是采用类似空投的方式进行服务 (parachute airdrop), 但是无人机可以和不同的卡车会合一起行驶。针对 VRPD, 作者提出了 arc-based mixed integer programming model, 并且采用 branch-and-price 算法进行解决。

Part

V

TSDD: Truck Support Drone Delivery

Liu 等 (2017)^[15]提出了 two echelon cooperated ground vehicle and its carried unmanned aerial vehicle routing problem (2E-GU-RP)。该问题主要研究如何合理安排无人机及其路线和车辆路线来最小化总服务时间，即无人机和车辆从仓库出发服务所有顾客后返回仓库的总时间，无人机可以在一次起飞降落中服务多个顾客节点，但是所有的顾客节点都无法被车辆直接进行服务。车辆在无人机进行服务顾客的过程中充当临时仓库和充电站的角色。

Part

VI

*Datasets for Traveling Salesman
Problem with Drone*

Datasets used in FSTSP-MD

Traveling Salesman Problem with Drones (TSP-D) 是经典的 TSP 问题的拓展，它在 TSP 问题的基础上增加了无人机。无人机可以和车辆一起工作，或者自主起飞服务。根据无人机单次起飞降落过程中服务的顾客点数量的不同可以将问题分为单次起飞服务单个顾客点的和单次起飞服务多个顾客点。同样对无人机和车辆的会合点也有限制，即无人机只能在顾客节点或者仓库节点会合，因此会产生无人机和车辆之间互相等待的时间。接下来的部分将会介绍一些用于 TSP-D 问题的数据集。

7.1 TSP-D Instances by Bouman et al. (2018)

TSP-D-Instances 仓库包含了用于 TSP-D 问题的二维数据集，即只有仓库和顾客节点的横纵坐标。在数据集中以符号 `/*` 开始，以符号 `*/` 结束的行是注释行，在读取数据时需要忽略。该数据集包含了 Agatz 等 (2018)^[16] 和 Bouman 等 (2018)^[17] 所用的数据集。相关的解决代码 (Java 实现) 可以在 **Drones-TSP** 仓库中找到。在这个数据集中，两点之间的距离是欧几里得距离 (Euclidean distance)，即两点之间的距离是两点之间的直线距离。有关数据集字段说明可以参考数据集的注释和 [数据集仓库的说明](#)。该数据集分类如下 (在所有的情况中，生成的第一个节点位置被选作仓库节点)：

- **uniform**: 每个节点的 x 和 y 坐标都是从取值范围为 $\{0, 1, \dots, 100\}$ 的独立均匀分布中随机生成的。
- **singlecenter**: 对于每个位置，首先均匀地从区间 $[0, 2\pi]$ 中抽取一个角度 α ，然后从一个均值为 0，标准差为 50 的正态分布中抽取一个距离 r ，坐标 $(x, y) = (r \cdot \cos \alpha, r \cdot \sin \alpha)$ ，用这种方法生成的节点位置更有可能集中在中心点 $(0, 0)$ 附近，比 **uniform** 的数据集更能模拟圆形城市中心的情况。
- **doublecenter**: 生成方式和 **singlecenter** 类似，但在生成每个位置后，有 50% 的概率将其沿 x 轴平移 200 个距离单位，这种方法生成的节点位置更有可能集中在两个中心点 $(0, 0)$ 和 $(200, 0)$ 附近，模拟了一个具有两个中心的城市的情况。
- **restricted**: 在原有限制的基础上增加了一些额外的限制。
 - **maxradius**: 增加了无人机不能飞行超过一定半径的限制。
 - **novisit**: 增加了无人机不能访问的顾客节点，比如以 `-novisit-20-rep_2.txt` 为后缀的文件表示有 20% 的顾客节点被随机选中用于表示无法被无人机访问的顾客节点，由于对于同一个数据来说，不同次数的随机生成会影响选中的顾客节点，因此 **rep_2** 表示第二次随机生成的数据。具体的不能被无人机访问的顾客节点由字段 **#NOVISIT** 表示，例如数据文件中的 **#NOVISIT 1** 表示第一个顾客节点不能被无人机访问，也即生成的节点数据中的第二行数据 (因为默认生成的第一行数据是仓库节点)。

7.2 TSPDroneLIB by Bogrybayeva et al. (2023)

TSPDroneLIB仓库包含了用于 TSP-D 问题和 FSTSP 问题的数据集和相关的链接。该仓库提到了7.1的数据集，另外包括了 Bogrybayeva 等 (2023)^[18] 使用的数据集。相关的算法可以在TSPDrone.jl仓库中找到。有关数据集的字段说明可以在TSPDroneLIB/data/Bogrybayeva/description.md中找到。该数据集分类如下：

- **Random**: 包含了三个不同节点数量大小的数据集，分别为 $n = 20, 50, 100$ ，每个数据集包含了 100 个算例，每行表示包含横纵坐标的一个算例，遵循格式 $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ ，即每行的每两个数一组组成一个节点的横纵坐标，同时 x_1, y_1 表示仓库节点的横纵坐标。该数据集的生成方法为：在 $[1100] \times [1100]$ 的范围内，从均匀分布中随机抽取每个节点的横纵坐标，唯一的例外是仓库节点，其位置分布在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 范围内，这意味着仓库总是位于角落。这种数据集的生成方法和 Agatz 等 (2018)^[16] 使用的数据集生成方法是一致的。
- **Amsterdam**: 该数据集的数据格式和 Random 数据集相同，共有四种不同大小的算例，分别为 $n = 10, 20, 50, 100$ 。该数据集基于 Haider 等 (2019)^[19] 研究中使用的电动汽车 (electric vehicle, EV) 停车位置数据集。这些位置反映了潜在顾客的位置，因为电动汽车通常停放在城市街道的路边充电器旁。为了适应 Bogrybayeva 等 (2023)^[18] 的研究，该文章从整个 Amsterdam 数据集中随机选取仓库和客户节点来创建不同的问题算例。

7.2.1 DPS algorithm and DRL algorithm implemented in TSPDrone.jl

TSPDrone.jl仓库如前所述，解决了单车辆配备单架无人机的 TSP-D 问题，实现了 Bogrybayeva 等 (2023)^[18] 提出的 Divide-Partition-and-Search (DPS) 算法和 Deep Reinforcement Learning (DRL) 算法，其中 DPS 算法是基于 Agatz 等 (2018)^[16] 的 TSP-ep-all 算法和 Poikonen 等 (2019)^[20] 的 divide-and-conquer 启发式算法开发的。

DPS 算法是 Bogrybayeva 等 (2023)^[18] 提出的一种基于分治策略的启发式算法，用于解决 TSP-D 问题。其核心思想是将大规模问题分解为较小的子问题，并通过组合子问题的解来获得全局解。DPS 算法的主要步骤如下：

1. **Divide**: 将全部节点划分为多个子组，每个子组包含固定数量（由参数 g 控制）的节点。例如， $g = 10$ 表示每个子组有 10 个节点。
2. **Partition & Search**: 在每个子组内，采用 TSP-ep-all 算法^[16] 进行分区。TSP-ep-all 算法通过如下步骤优化子组内的路径：
 - (a) 生成初始 TSP 路径：使用 Concorde TSP Solver 得到卡车单独服务的初始路径。
 - (b) 动态规划分区：将路径中的节点划分为由卡车和无人机协同服务的子集，以最小化总时间。
 - (c) 局部搜索优化：进一步调整分区以提升解的质量。
3. **合并与全局优化**: 将所有子组的解合并为完整的路径，并进行全局优化（如调整子组边界或路径顺序）以消除局部最优的局限性。

在 DPS 算法中，较大的子组 g （如 $g = 25$ ）会提升解的质量，但增加计算时间；较小的子组 g （如 $g = 10$ ）则相反。当 $g = N$ （总节点数）时，DPS 退化为直接应用 TSP-ep-all 算法，不再划分子组。

TSPDrone.jl 用 Julia¹ 实现，初始 TSP 路径由 Concorde TSP Solver 生成，分区过程基于动态规划和局部搜索，使用该仓库 DPS 算法的步骤如下：

¹学习 Julia 的课程参考 MIT 的 [Introduction to Computational Thinking](#)。

1. 安装Julia, 在命令行中输入 `julia` 进入 Julia 环境, 输入命令安装必要的依赖:

```
1 ] add https://github.com/chkwon/TSPDrone.jl
```

2. 使用 DPS 算法需要提供顾客节点的 x 和 y 坐标, 仓库的 (x, y) 坐标需要是第一个元素, 参数 `truck_cost_factor` 和参数 `drone_cost_factor` 分别代表卡车和无人机的成本因子, 会乘以从纵横坐标中计算出来的欧氏距离来得到卡车和无人机的行驶成本。

Code 7.1: DPS algorithm usage example (a)

```
1 using TSPDrone
2 n = 10
3 x = rand(n); y = rand(n);
4 truck_cost_factor = 1.0
5 drone_cost_factor = 0.5
6 result = solve_tspd(x, y, truck_cost_factor, drone_cost_factor)
7 @show result.total_cost;
8 @show result.truck_route;
9 @show result.drone_route;
```

如果正常运行, 会输出如下结果 (根据随机数生成的结果可能会有所不同), 其中节点 11 作为终止节点表示仓库节点 (即终止节点的代号会在总的节点数量上 +1):

```
1 result.total_cost = 1.6022013835206805
2 result.truck_route = [1, 4, 5, 2, 8, 6, 11]
3 result.drone_route = [1, 9, 4, 10, 5, 7, 8, 3, 11]
```

3. 或者也可以直接提供卡车和无人机的成本矩阵 (即原本根据欧氏距离矩阵乘以成本因子得到的矩阵), 同样, 仓库节点被标记为节点 1:

Code 7.2: DPS algorithm usage example (b)

```
1 using TSPDrone
2 n = 10
3 dist_mtx = rand(n, n)
4 dist_mtx = dist_mtx + dist_mtx' # symmetric distance only
5 truck_cost_mtx = dist_mtx .* 1.0
6 drone_cost_mtx = truck_cost_mtx .* 0.5
7 result = solve_tspd(truck_cost_mtx, drone_cost_mtx)
8 @assert size(truck_cost_mtx) == size(drone_cost_mtx) == (n, n)
```

4. 使用命令 `print_summary(result)` 可以输出结果总结:

```
1 julia> print_summary(result)
2 Operation #1:
3   - Truck      = 0.17988883875173492 : [1, 3]
4   - Drone      = 0.11900891950265155 : [1, 4, 3]
5   - Length     = 0.17988883875173492
6 Operation #2:
7   - Truck      = 0.4784476248243221 : [3, 9]
8   - Drone      = 0.27587675362585756 : [3, 7, 9]
9   - Length     = 0.4784476248243221
10 Operation #3:
11  - Truck      = 0.445749847855226 : [9, 6]
12  - Drone      = 0.48831605249544785 : [9, 10, 6]
13  - Length     = 0.48831605249544785
14 Operation #4:
15  - Truck      = 0.9269158918021541 : [6, 5, 8, 11]
16  - Drone      = 0.8714473929102112 : [6, 2, 11]
```

```

17 | - Length          = 0.9269158918021541
18 | Total Cost = 2.073568407873659

```

5. 函数 `solve_tspd` 的可选参数包括:

Code 7.3: DPS algorithm optional keyword arguments

```

1 | n_groups::Int = 1,
2 | method::String = "TSP-ep-all",
3 | flying_range::Float64 = MAX_DRONE_RANGE,
4 | time_limit::Float64 = MAX_TIME_LIMIT

```

- **n_groups**: 用于分治法的子组数量。例如, 如果 $n = 100$ 且 **n_groups** = 4, 则每组将有 25 个节点, 然后将方法 **method** 应用于每个组。
- **method**: 可以是以下几种方法之一, **TSP-ep** 及其衍生方法 (**TSP-ep-1p**、**TSP-ep-2p**、**TSP-ep-2opt** 和 **TSP-ep-all**) 是基于 route-first, cluster-second 框架的启发式算法, 由 Agatz 等 (2018)^[16] 提出, 用于解决 TSP-D:
 - **TSP-ep** (Exact Partition): 使用 TSP 求解器 (如 Concorde) 生成最优 TSP 路径, 然后以初始 TSP 路径为基础, 通过精确划分算法 (动态规划, 时间复杂度为 $O(n^3)$) 将 TSP 路径分割为卡车和无人机的协同路径。
 - **TSP-ep-1p**: 在 **TSP-ep** 的基础上, 引入单点移动领域搜索 (One-Point Move), 通过调整单个节点的位置优化路径。即先对初始路径进行 Exact Partition, 然后遍历每个节点, 尝试将其移动到路径中的其他位置, 计算目标函数改进, 然后接受最大的移动, 迭代直至无法进一步优化。
 - **TSP-ep-2p**: 在 **TSP-ep** 的基础上, 引入两点交换领域搜索 (Two-Point Swap), 通过交换两个节点的位置优化路径。即先对初始路径进行 Exact Partition, 然后遍历所有节点对, 尝试交换两者的位置, 计算目标函数改进, 然后接受最大的交换, 迭代直至无法进一步优化。
 - **TSP-ep-2opt**: 在 **TSP-ep** 的基础上, 引入 2-opt 领域搜索, 通过反转路径中的子段优化路径。即先对初始路径进行 Exact Partition, 然后遍历所有可能的路径子段, 尝试反转子段并重新计算总时间, 接受改进最大的反转操作, 迭代直至无法进一步优化。
 - **TSP-ep-all**: 在 **TSP-ep** 的基础上, 综合应用所有领域搜索策略 (**1p**、**2p**、**2opt**), 通过多策略组合优化路径。即先对初始路径进行 Exact Partition, 然后在每轮迭代中, 尝试所有领域操作 (One-Point Move, Two-Point Swap, 2-opt), 选择改进最大的操作, 迭代直至无法进一步优化。(表现最佳, 但运行时间较长 $O(n^5)$)
- **flying_range**: 无人机的飞行范围, 默认值为 **Inf**。飞行范围与无人机成本矩阵中的值进行比较, 即 **drone_cost_mtx** 或欧氏距离乘以 **drone_cost_factor**。
- **time_limit**: 算法运行的总时间限制, 以秒为单位。对于每个组, 时间限制平均分配。例如, 如果 **time_limit** = 3600.0 且 **n_groups** = 5, 则每组的时间限制为 $3600/5 = 720$ 秒。

7.3 TSPLIB by Reinelt (1991)

TSPLIB 是一个用于和 TSP 问题相关的数据集, 包含了 Symmetric Traveling Salesman Problem (STSP)、Asymmetric Traveling Salesman Problem (ATSP)、Hamiltonian Cycle Problem (HCP)、Sequential Ordering

Problem (SOP)、Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP)的数据集，可以在[tsp95.pdf](#)中查看有关数据集的完整说明文档。除了 HCP 以外，其他的问题都是定义在完全图上，且所有的距离都是以整数表示的。每个文件都包括说明部分和数据部分，说明部分包含了有关文件的格式和内容的信息。

部分 STSP 数据集如表7-1所示。

表 7-1: Symmetric Traveling Salesman Problem Examples

数据名称	城市数量	距离计算方式	最优值
a280	280	EUC_2D	2579
berlin52	52	EUC_2D	7542
bier127	127	EUC_2D	118282
ch130	130	EUC_2D	6110
ch150	150	EUC_2D	6528
d198	198	EUC_2D	15780
d493	493	EUC_2D	35002
d657	657	EUC_2D	48912
eil51	51	EUC_2D	426
eil76	76	EUC_2D	538
eil101	101	EUC_2D	629
fl417	417	EUC_2D	11861
gil262	262	EUC_2D	2378
kroA100	100	EUC_2D	21282
kroB100	100	EUC_2D	22141
kroC100	100	EUC_2D	20749
kroD100	100	EUC_2D	21294
kroE100	100	EUC_2D	22068
kroA150	150	EUC_2D	26524
kroB150	150	EUC_2D	26130
kroA200	200	EUC_2D	29368
kroB200	200	EUC_2D	29437
lin105	105	EUC_2D	14379
lin318	318	EUC_2D	42029
linhp318	318	EUC_2D	41345
p654	654	EUC_2D	34643
pcb442	442	EUC_2D	50778
pr76	76	EUC_2D	108159
pr107	107	EUC_2D	44303
pr124	124	EUC_2D	59030
pr136	136	EUC_2D	96772
pr144	144	EUC_2D	58537
pr152	152	EUC_2D	73682
pr226	226	EUC_2D	80369
pr264	264	EUC_2D	49135
pr299	299	EUC_2D	48191
pr439	439	EUC_2D	107217
rat99	99	EUC_2D	1211

表 7-1(续)

数据名称	城市数量	距离计算方式	最优值
rat195	195	EUC_2D	2323
rat575	575	EUC_2D	6773
rat783	783	EUC_2D	8806
rd100	100	EUC_2D	7910
rd400	400	EUC_2D	15281
st70	70	EUC_2D	675
ts225	225	EUC_2D	126643
tsp225	225	EUC_2D	3919
u159	159	EUC_2D	42080
u574	574	EUC_2D	36905
u724	724	EUC_2D	41910

7.4 Amazon Delivery Dataset by Kaggle

[Amazon Delivery Dataset](#)是一个 Amazon 公司最后一公里物流运营情况的数据集，包含了超过 43632 次配送的多城市数据，数据字段包括订单详情、配送人员、天气、交通情况、配送仓库和配送地点的经纬度等信息。要将数据集转换为可以用于 TSP-D 问题的数据集，需要将数据集中的经纬度转换为欧几里得距离，即两点之间的直线距离，当然在此之前需要对原始数据集进行一些数据的预处理工作，详细的代码在附录A.1中。

Part

VII

Appendix



Source Code

A.1 Amazon delivery data preprocessing code

关于已知两点经纬度计算两点之间距离的方法，这里使用了[Haversine formula](#)¹，但是要注意这个公式只是一个近似值，即假设地球是一个球体，而实际上地球是一个椭球体，不过对于不是精确到亚米级别的应用来说，这个公式的精度是足够的，误差在 0.5% 以内。如果需要更精确的方法可以参考[Vincenty's formulae](#)和[Geographical distance](#)。根据经纬度判断这个点是否在陆地的方法可以参考 Python 的库[global-land-mask](#)。

Code A.1: Amazon delivery data preprocessing code to filter data

```
1 import pandas as pd
2 from math import radians, sin, cos, sqrt, atan2
3 from global_land_mask import globe
4
5 # Haversine 公式计算距离
6 def haversine(lat1, lon1, lat2, lon2):
7     R = 6371.393 # 地球半径近似值
8     lat1_rad, lon1_rad = radians(lat1), radians(lon1)
9     lat2_rad, lon2_rad = radians(lat2), radians(lon2)
10    dlon = lon2_rad - lon1_rad
11    dlat = lat2_rad - lat1_rad
12    a = sin(dlat/2)**2 + cos(lat1_rad)*cos(lat2_rad)*sin(dlon/2)**2
13    return R * 2 * atan2(sqrt(a), sqrt(1-a))
14
15 # 读取数据
16 df = pd.read_csv('amazon_delivery.csv')
17
18 # 步骤 1: 筛选顾客节点 >=10 的仓库
19 valid_warehouses = df.groupby(['Store_Latitude', 'Store_Longitude']).filter(lambda x:
    ↳ len(x) >= 10)
20
21 # 步骤 2: 剔除顾客-仓库经纬度差 >=1 的订单
22 valid_warehouses = valid_warehouses[
23     (abs(valid_warehouses['Store_Latitude'] - valid_warehouses['Drop_Latitude']) < 1)
    ↳ &
24     (abs(valid_warehouses['Store_Longitude'] - valid_warehouses['Drop_Longitude']) <
    ↳ 1)
25 ]
26
27 # 步骤 3: 计算距离并筛选 <=50 公里的订单
```

¹在代码中使用的不是 arcsin 而是 arctan，这是因为当 sin 值接近 1 时，直接使用 arcsin 可能导致精度问题，而 arctan 通过显式分离分子分母，可以使得计算更加稳定。arcsin 和 arctan 之间的转换可以参考：[实用反三角函数运算公式](#)。

Code A.1 (continued)

```

28 valid_warehouses['Distance'] = valid_warehouses.apply(
29     lambda row: haversine(row['Store_Latitude'], row['Store_Longitude'],
30                             row['Drop_Latitude'], row['Drop_Longitude']),
31     axis=1
32 )
33 valid_warehouses = valid_warehouses[valid_warehouses['Distance'] <= 50]
34
35 # 步骤 4: 去重同一仓库下的重复顾客
36 valid_warehouses = valid_warehouses.drop_duplicates(
37     subset=['Store_Latitude', 'Store_Longitude', 'Drop_Latitude', 'Drop_Longitude']
38 )
39
40 # 步骤 5: 检查仓库是否在陆地
41 # 提取唯一仓库坐标
42 warehouse_coords = valid_warehouses[['Store_Latitude',
43     ↪ 'Store_Longitude']].drop_duplicates()
44
45 # 使用 global_land_mask 检查陆地
46 warehouse_coords['Is_Land'] = warehouse_coords.apply(
47     lambda row: globe.is_land(row['Store_Latitude'], row['Store_Longitude']),
48     axis=1
49 )
50
51 # 合并陆地标记到原始数据
52 valid_warehouses = valid_warehouses.merge(
53     warehouse_coords[['Store_Latitude', 'Store_Longitude', 'Is_Land']],
54     on=['Store_Latitude', 'Store_Longitude'],
55     how='left'
56 )
57
58 # 步骤 6: 剔除位于海里的仓库数据
59 final_data = valid_warehouses[valid_warehouses['Is_Land']]
60
61 # 输出结果
62 final_data.to_excel('amazon_delivery_filtered_data.xlsx', index=False)
63 warehouse_stats = final_data.groupby(['Store_Latitude',
64     ↪ 'Store_Longitude']).size().reset_index(name='Count')
65 warehouse_stats.sort_values(by='Count',
66     ↪ ascending=False).to_excel('warehouse_stats.xlsx', index=False)

```

首先删除不需要的数据列。接着通过将前面得到的数据导入到[Google Maps](#)中，可以看到仓库数据大致可以聚类成 22 个簇，因此聚类时设置聚类数量为 22。然后将同一聚类的仓库节点和配送节点合并到同一个 Excel 文件中，因此总共会生成 22 个不同聚类的 Excel 文件。

Code A.2: Amazon delivery data preprocessing code to sort data

```

1 import pandas as pd
2 import numpy as np
3 from sklearn.cluster import KMeans
4 import os
5
6 # 1. 读取 Excel 文件并提取需要的列
7 df = pd.read_excel("amazon_delivery_filtered_data.xlsx")
8 filtered_df = df[["Store_Latitude", "Store_Longitude", "Drop_Latitude",
9     ↪ "Drop_Longitude"]]
10
11 # 2. 提取唯一的仓库坐标用于聚类

```


Code A.2 (continued)

```

11 store_coords = filtered_df[["Store_Latitude", "Store_Longitude"]].drop_duplicates()
12
13 # 3. 使用 KMeans 进行聚类 (已知聚类数 =22)
14 kmeans = KMeans(n_clusters=22, random_state=42, n_init=10)
15 store_coords["Cluster"] = kmeans.fit_predict(store_coords[["Store_Latitude",
16     ↳ "Store_Longitude"]])
17
18 # 4. 将聚类标签合并回原始数据
19 merged_df = filtered_df.merge(
20     store_coords,
21     how="left",
22     on=["Store_Latitude", "Store_Longitude"]
23 )
24
25 # 5. 创建保存结果的文件夹
26 output_dir = "clustered_nodes"
27 os.makedirs(output_dir, exist_ok=True)
28
29 # 6. 按聚类分组处理数据
30 for cluster_id in range(22):
31     # 提取当前聚类的数据
32     cluster_data = merged_df[merged_df["Cluster"] == cluster_id]
33
34     # 分离仓库节点和顾客节点
35     store_nodes = cluster_data[["Store_Latitude",
36     ↳ "Store_Longitude"]].drop_duplicates()
37     customer_nodes = cluster_data[["Drop_Latitude",
38     ↳ "Drop_Longitude"]].drop_duplicates()
39
40     # 生成唯一 ID
41     store_nodes["ID"] = ["store_" + str(i) for i in range(len(store_nodes))]
42     customer_nodes["ID"] = ["customer_" + str(i) for i in range(len(customer_nodes))]
43
44     # 重命名列以匹配
45     store_nodes.rename(columns={"Store_Latitude": "latitude", "Store_Longitude":
46     ↳ "longitude"}, inplace=True)
47     customer_nodes.rename(columns={"Drop_Latitude": "latitude", "Drop_Longitude":
48     ↳ "longitude"}, inplace=True)
49
50     # 合并节点并整理列顺序
51     combined_nodes = pd.concat([store_nodes, customer_nodes], ignore_index=True)
52     combined_nodes = combined_nodes[["ID", "latitude", "longitude"]]
53
54     # 输出每个聚类的节点数量
55     total_nodes = len(store_nodes) + len(customer_nodes)
56     print(f"聚类 {cluster_id} 有 {total_nodes} 个节点 (仓库节点: {len(store_nodes)}, 顾客
57     ↳ 节点: {len(customer_nodes)}) ")
58
59     # 保存到 Excel 文件
60     output_path = os.path.join(output_dir, f"cluster_{cluster_id}.xlsx")
61     combined_nodes.to_excel(output_path, index=False)

```


B

Appendix B

Epilogue

References

- [1] CORMEN T H, LEISERSON C E, RIVEST R L, et al. Introduction to algorithms[M]. Third edition ed. Cambridge, Massachusetts London, England: MIT Press, 2009.
- [2] OENCAN T, ALTINEL I K, LAPORTE G. A comparative analysis of several asymmetric traveling salesman problem formulations[J/OL]. Computers & Operations Research, 2009, 36(3): 637-654. DOI: [10.1016/j.cor.2007.11.008](https://doi.org/10.1016/j.cor.2007.11.008).
- [3] ROBERTI R, TOTH P. Models and algorithms for the asymmetric traveling salesman problem: an experimental comparison[J/OL]. Euro Journal on Transportation & Logistics, 2012, 1(1-2): 113-133. DOI: [10.1007/s13676-012-0010-0](https://doi.org/10.1007/s13676-012-0010-0).
- [4] PAPADIMITRIOU C H, STEIGLITZ K. Combinatorial optimization: algorithms and complexity[M]. Dover edition ed. Mineola, NY: Dover Publications, 1998: 308-309.
- [5] MILLER C E, TUCKER A W, ZEMLIN R A. Integer programming formulation of traveling salesman problems[J/OL]. Journal of the Acm, 1960, 7(4): 326-329. DOI: [10.1145/321043.321046](https://doi.org/10.1145/321043.321046).
- [6] DANTZIG G B, RAMSER J H. The truck dispatching problem[J/OL]. Management Science, 1959, 6(1): 80-91. DOI: [10.1287/mnsc.6.1.80](https://doi.org/10.1287/mnsc.6.1.80).
- [7] TOTH P, VIGO D. Vehicle routing: Problems, methods, and applications, second edition[J/OL]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014: 4-6. DOI: [10.1137/1.9781611973594.fm](https://doi.org/10.1137/1.9781611973594.fm).
- [8] MURRAY C C, CHU A G. The flying sidekick traveling salesman problem: Optimization of drone-assisted parcel delivery[J/OL]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2015, 54: 86-109. DOI: [10.1016/j.trc.2015.03.005](https://doi.org/10.1016/j.trc.2015.03.005).
- [9] GONZALEZ-R P L, CANCA D, ANDRADE-PINEDA J L, et al. Truck-drone team logistics: A heuristic approach to multi-drop route planning[J/OL]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2020, 114: 657-680. DOI: [10.1016/j.trc.2020.02.030](https://doi.org/10.1016/j.trc.2020.02.030).
- [10] LIU Y, LIU Z, SHI J, et al. Two-echelon routing problem for parcel delivery by cooperated truck and drone[J/OL]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(12): 7450-7465. DOI: [10.1109/TSMC.2020.2968839](https://doi.org/10.1109/TSMC.2020.2968839).
- [11] WINDRAS MARA S T, RIFAI A P, SOPHA B M. An adaptive large neighborhood search heuristic for the flying sidekick traveling salesman problem with multiple drops[J/OL]. Expert Systems with Applications, 2022, 205: 117647. DOI: [10.1016/j.eswa.2022.117647](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.117647).
- [12] HAM A M. Integrated scheduling of m-truck, m-drone, and m-depot constrained by time-window, drop-pickup, and m-visit using constraint programming[J/OL]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2018, 91: 1-14. DOI: [10.1016/j.trc.2018.03.025](https://doi.org/10.1016/j.trc.2018.03.025).
- [13] KITJACHAROENCHAI P, VENTRESCA M, MOSHREF-JAVADI M, et al. Multiple traveling salesman problem with drones: Mathematical model and heuristic approach[J/OL]. Computers & Industrial Engineering, 2019, 129: 14-30. DOI: [10.1016/j.cie.2019.01.020](https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.01.020).

- [14] WANG Z, SHEU J B. Vehicle routing problem with drones[J/OL]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2019, 122: 350-364. DOI: [10.1016/j.trb.2019.03.005](https://doi.org/10.1016/j.trb.2019.03.005).
- [15] LUO Z, LIU Z, SHI J. A two-echelon cooperated routing problem for a ground vehicle and its carried unmanned aerial vehicle[J/OL]. *Sensors*, 2017, 17(5): 1144. DOI: [10.3390/s17051144](https://doi.org/10.3390/s17051144).
- [16] AGATZ N, BOUMAN P, SCHMIDT M. Optimization approaches for the traveling salesman problem with drone[J/OL]. *Transportation Science*, 2018, 52(4): 965-981. DOI: [10.1287/trsc.2017.0791](https://doi.org/10.1287/trsc.2017.0791).
- [17] BOUMAN P, AGATZ N, SCHMIDT M. Dynamic programming approaches for the traveling salesman problem with drone[J/OL]. *Networks*, 2018, 72(4): 528-542. DOI: [10.1002/net.21864](https://doi.org/10.1002/net.21864).
- [18] BOGYRBAYEVA A, YOON T, KO H, et al. A deep reinforcement learning approach for solving the traveling salesman problem with drone[J/OL]. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2023, 148: 103981. DOI: [10.1016/j.trc.2022.103981](https://doi.org/10.1016/j.trc.2022.103981).
- [19] HAIDER Z, CHARKHGARD H, KIM S W, et al. Optimizing the relocation operations of free-floating electric vehicle sharing systems[J/OL]. *SSRN Electronic Journal*, 2019. DOI: [10.2139/ssrn.3480725](https://doi.org/10.2139/ssrn.3480725).
- [20] POIKONEN S, GOLDEN B, WASIL E A. A branch-and-bound approach to the traveling salesman problem with a drone[J/OL]. *INFORMS Journal on Computing*, 2019, 31(2): 335-346. DOI: [10.1287/ijoc.2018.0826](https://doi.org/10.1287/ijoc.2018.0826).

Index

A

ALNS, 30

ATSP, 50

C

CVRP, 51

D

DPS, 48

DRL, 48

E

Euclidean distance, 47

F

FSTSP, 19

FSTSP-MD, 24

H

HCP, 50

J

Julia, 48

M

MIP, 37

mTSPD, 37

MTZ, 10

P

PDSTSP, 30

PDSTSP^{+DP}, 33

S

SOP, 51

STSP, 50

T

TDTL, 24

TSP, 9

TSP-D, 47

2E-GU-RP, 43

2E-RP-T&D, 27

V

VRP, 15

VRPD, 39