偏微分方程的有限差分

陈競雄

2025 年 4 月 8 日

1 常微分方程

1.1 方程

代码 (General_ODE_FDM.py) 求解二阶常微分方程 (ODE)：

$$u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

带有混合边界条件：

$$au'(0) + bu(0) = u_1(0), \quad u(1) = u_2(1). \tag{2}$$

1.2 数值例子

具体问题为：

$$u''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

边界条件：

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = -1, \tag{4}$$

精确解为：

$$u(x) = \cos(\pi x). \tag{5}$$

2 一般椭圆方程方程

2.1 方程

代码 (2D_general_elliptic_Neumann_FDM.py) 求解二维泊松方程：

$$u_{xx} + u_{yy} + b\,(x, y)\,u_x + b\,(x, y)\,u_y + c\,(x, y)\,u = f(x, y), \quad a < x < b, \quad c < y < d, \tag{6}$$

带有 Neumann 边界条件：

$$u_x(x, c) = u_1, \quad u_x(x, d) = u_2, \quad u_y(a, y) = u_3, \quad u_y(d, y) = u_4. \tag{7}$$

2.2 数值例子

$$u_{xx} + u_{yy} + (x + y)u_x + (x - y)u_y + (1 + x^2 + y^2)u = f(x, y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \tag{8}$$

边界条件：

$$u_x(x, 0) = x, \quad u_x(x, 1) = -x, \quad u_y(0, y) = y, \quad u_y(1, y) = -y. \tag{9}$$

精确解为：

$$u(x, y) = x^2 + y^2. \tag{10}$$

3 一维抛物型方程

3.1 方程

代码 (1D_general_Parabolic_Neumann_FDM.py) 求解一维一般抛物型偏微分方程：

$$u_t - u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u(x,t) = f(x,t), \quad a < x < b, \quad t > 0, \tag{11}$$

带有 Neumann 边界条件：

$$u_x(a,t) = g_1(t), \quad u_x(b,t) = g_2(t), \tag{12}$$

和初始条件：

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{13}$$

3.2 数值例子

具体问题为：

$$u_t - u_{xx} + 2xu_x - u(x,t) = e^t(4x^2 - 2), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{14}$$

边界条件：

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 2e^t, \tag{15}$$

初始条件：

$$u(x,0) = x^2. \tag{16}$$

精确解为：

$$u(x,t) = x^2 e^t. \tag{17}$$

4 二维抛物型方程

4.1 方程

代码 (2D_general_Parabolic_Dirichlet_FDM.py) 求解二维抛物型偏微分方程：

$$u_t - u_{xx} - u_{yy} + b(x,y,t)u_x + c(x,y,t)u_y + d(x,y,t)u(x,y,t) = f(x,y,t), \tag{18}$$

定义域为 $a < x < b$, $c < y < d$, $t > 0$，带有 Dirichlet 边界条件：

$$u(a,y,t) = g_1(t), \quad u(b,y,t) = g_2(t), \quad u(x,c,t) = g_3(t), \quad u(x,d,t) = g_4(t), \tag{19}$$

和初始条件：

$$u(x,y,0) = u_0(x,y). \tag{20}$$

4.2 数值例子

具体问题为：

$$u_t - u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y + u(x,y,t) = e^{-3t}\sin(x+y), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \quad t > 0, \tag{21}$$

边界条件：

$$u(0,y,t) = 0, \quad u(\pi,y,t) = 0, \quad u(x,0,t) = 0, \quad u(x,\pi,t) = 0, \tag{22}$$

初始条件：

$$u(x,y,0) = \sin(x)\sin(y). \tag{23}$$

精确解为：

$$u(x,y,t) = e^{-3t}\sin(x)\sin(y). \tag{24}$$

代码采用 Crank-Nicolson 方法。