第三章　复变函数的积分

第四讲 柯西积分公式
与高阶导数公式

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1 柯西积分公式

2 高阶导数公式

主要内容

1 柯西积分公式

2 高阶导数公式

1 柯西积分公式

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

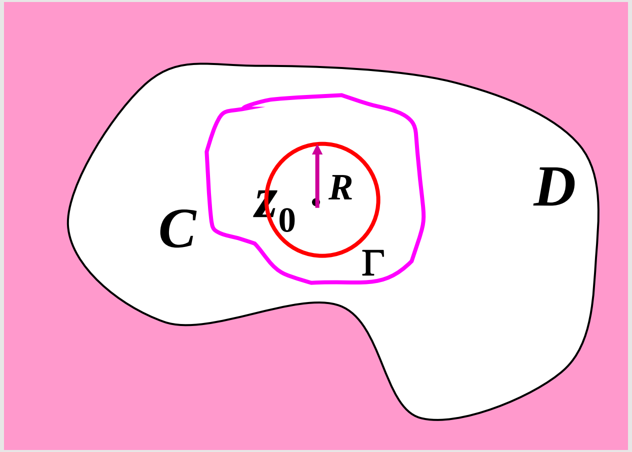
这个积分值与ρ的取值无关，当ρ充分小时，猜测

$$= f(z_0)\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0).$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

定理1（Cauchy积分公式） 设$f(z)$在区域D内处处解析，C为D内任意一条**正向**简单闭曲线，它的内部完全含于D，z_0为C内任意一点，则

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.}$$



$$\left|f(z_0)-\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right|$$

$$=\left|f(z_0)\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma:|z-z_0|=R}\frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma:|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right|$$

$$\left| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z \right|$$

$$= \left| f(z_0) \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma:|z-z_0|=R} \frac{1}{z - z_0} \mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma:|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma:|z-z_0|=R} \frac{f(z) - f\left(z_0\right)}{z - z_0} \mathrm{d}z \right|$$

$$< \frac{1}{|2\pi i|} \oint_{\Gamma:|z-z_0|=R} \frac{\left| f(z) - f\left(z_0\right)\right|}{\left|z - z_0\right|} \mathrm{d}s$$

$$\left| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z \right|$$

$$< \frac{1}{|2\pi i|}\oint_{\Gamma:|z-z_0|=R} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}\mathrm{d}s$$

$$< \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{R}2\pi R = \varepsilon$$

因为$f(z)$在z_0连续，所以

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - z_0| < \delta,$

有$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

说明：

（1）函数在C内部任一点的值可用它在边界上的值通过积分来表示.

（这是解析函数的一个重要特征）

解析函数的积分表达式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi i f(z_0)$$

注：如无特殊说明，今后的封闭曲线均指正向.

（2）提供了计算某些复变函数沿闭曲线积分的一种方法.

例1 计算下列积分

$$(1)\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}\,dz; \qquad (2)\ \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z(z^2+1)}\,dz.$$

解

$$(1)\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}\,dz$$

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\sin z\Big|_{z=0}$$

$$=0.$$

例1 计算下列积分

(1) $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\dfrac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$; (2) $\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\dfrac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z.$

解 (2) $\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\dfrac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$

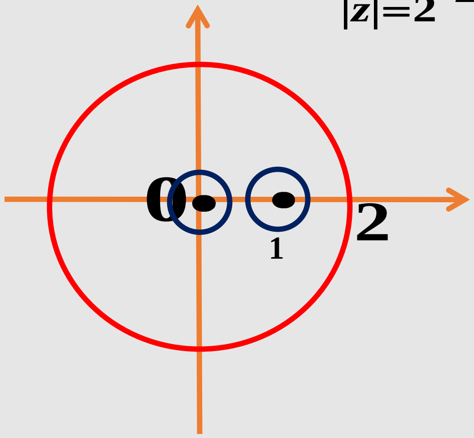
$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

$$=\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{\dfrac{1}{z(z+i)}}{z-i}\mathrm{d}z=2\pi i\left.\frac{1}{z(z+i)}\right|_{z=i}=-\pi i.$$

例2 计算积分 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{2z-1}{z^2-z}dz.$

解 方法一 见第三章第二讲例3.

方法二 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{2z-1}{z^2-z}dz = \oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \dfrac{\frac{2z-1}{z-1}}{z}dz + \oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{3}} \dfrac{\frac{2z-1}{z}}{z-1}dz$



$= 2\pi i\left[\dfrac{2z-1}{z-1}\Big|_{z=0} + \dfrac{2z-1}{z}\Big|_{z=1}\right]$

$= 4\pi i.$

例3 已知$f(z)=\oint\limits_{|\zeta-z|=1}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$，求 $f'(1+i)$.

解 设 $g(\zeta)=3\zeta^2+7\zeta+1$

$$f(z)=\oint\limits_{|\xi-z|=1}\frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=2\pi i g(\zeta)\Big|_{\zeta=z}$$

$$=2\pi i(3z^2+7z+1)$$

$$\therefore\ f'(1+i)=2\pi i\left(3z^2+7z+1\right)'\Big|_{z=1+i}=2\pi i(13+6i).$$

主要内容

1 柯西积分公式

2 高阶导数公式

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.}$$

如果各阶导数存在，并且导数运算可在积分号下进行，则有

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta,$$

$$f''(z)=\frac{2\times 1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\mathrm{d}\zeta,$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$\boxed{f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta.}$$

（1）解析函数是否存在各阶导数?

（2）导数运算可否在积分号下进行?

定理2（高阶导数公式） 解析函数$f(z)$的导数仍为解析函数，且

$$\boxed{f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta.}\quad (n=1,2,3,\cdots),$$

其中C是在函数$f(z)$解析的区域D内围绕点z的任何一条正向简单闭曲线，并且它的内部完全含于D.

说明：（1）解析函数的导数仍解析，从而有任意阶导数.

（2）公式的作用不在于通过积分来求导，而是通过求导求积分.

$$\boxed{f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z} \Longrightarrow \boxed{\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)}$$

例5 求积分 $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^{-z}\cos z}{z^2}\mathrm{d}z.$

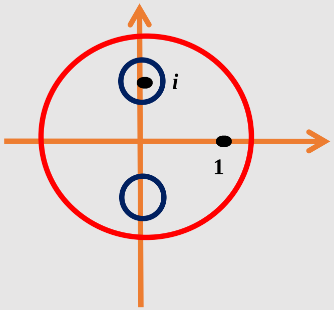
解 $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^{-z}\cos z}{z^2}\mathrm{d}z = 2\pi i\left(e^{-z}\cos z\right)'\Big|_{z=0} = -2\pi i.$

例6 求积分 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z^3+1}{(z+1)^4}\mathrm{d}z.$

解 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z^3+1}{(z+1)^4}\mathrm{d}z = \dfrac{2\pi i}{3!}\left(z^3+1\right)^{(3)}\Big|_{z=-1} = 2\pi i.$

例7 计算下列积分，其中C是正向圆周 $|z| = r > 1.$

(1) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz$; (2) $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz.$



解 (1) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{4!}(\cos \pi z)^{(4)}\Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5}{12} i.$

(2) $$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{e^z}{(z-i)^2}}{(z+i)^2} dz$$

$$= 2\pi i[\frac{e^z}{(z+i)^2}]'\Big|_{z=i} + 2\pi i[\frac{e^z}{(z-i)^2}]'\Big|_{z=-i} = (\sin 1 - \cos 1)\pi i.$$

例8 求积分 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\mathrm{d}z$，其中$n$为整数.

解 $$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\left(e^z\right)^{(n-1)}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$