第一章　复数与复变函数

第一讲 复数的概念及运算

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1. 复数及其代数运算
2. 复数的几何表示
3. 复数的乘幂与方根
4. 复数在几何上的应用举例
5. 复球面与无穷远点

主要内容

1 复数及其代数运算

复数　形如$x+iy$,其中 x 和 y 是任意两个实数.

x 和 y分别称为复数的**实部**和**虚部**，　记作

$$x=\mathrm{Re}\,z,\qquad y=\mathrm{Im}\,z.$$

i 叫虚单位，且满足 $i^2=-1.$

$x=0, y\neq 0 \Rightarrow\ z=iy$　称为纯虚数.

$x\neq 0, y=0 \Rightarrow\ z=x$　看做实数.　　　$R\subset C$

复数相等　实部和虚部分别相等.

复数为0　实部和虚部均为0.

注意：一般情况下，复数不能比较大小

复数的代数运算 设两复数 $z_1 = x_1 + iy_1$和 $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}$$

共轭复数　实部相同、虚部绝对值相同符号相反的一对复数

称为z的共轭复数，记作 $\overline{z}$

$$z = x + iy \Rightarrow \overline{z} = x - iy$$

共轭复数的性质

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$；　$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$；　$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

(2) $\overline{\overline{z}} = \overline{(\overline{z})} = z.$

(3) $z \cdot \overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$.

(4) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$,　$z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

例1 将下列复数表示成 $x+iy$ 的形式.

(1) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^7$; (2) $\dfrac{i}{1-i}+\dfrac{1-i}{i}$.

解 (1) $$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7=\frac{(1-i)^{14}}{(1+i)^7(1-i)^7}=\frac{[(1-i)^2]^7}{2^7}=\frac{(-2i)^7}{2^7}$$

$$=i.$$

(2) $$\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\frac{(1-i)i}{i\cdot i}$$

$$=\frac{i-1}{2}+\frac{i+1}{-1}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i.$$

例2 设 z_1, z_2 是两个复数，证明

$$\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z}_2\right)=\frac{1}{2}(z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1 z_2)$$

$$\mathrm{Im}\left(z_1\overline{z}_2\right)=\frac{1}{2i}(z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1 z_2)$$

分析 $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z), \quad z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z).$

解 $\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z}_2\right)=\dfrac{1}{2}(z_1\overline{z}_2+\overline{z_1\overline{z}_2})=\dfrac{1}{2}(z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1 z_2)$

同理可证第二个等式.

主要内容

1. 复数及其代数运算
2. 复数的几何表示
3. 复数的乘幂与方根
4. 复数在几何上的应用举例
5. 复球面与无穷远点

2 复数的几何表示

复平面　给定 $z = x + iy \longleftrightarrow (x, y)$

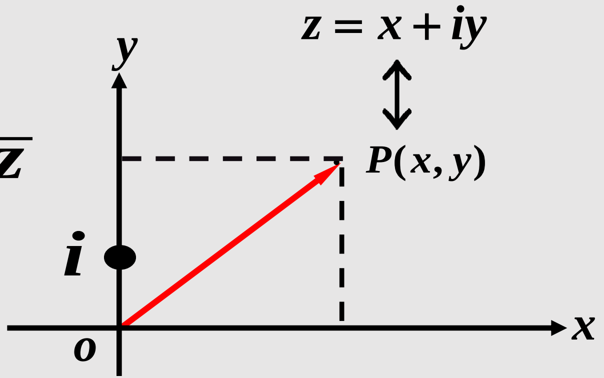
x 轴为实轴，　y 轴为虚轴

$$z = x + iy \longleftrightarrow P(x, y) \longleftrightarrow \overrightarrow{OP}$$

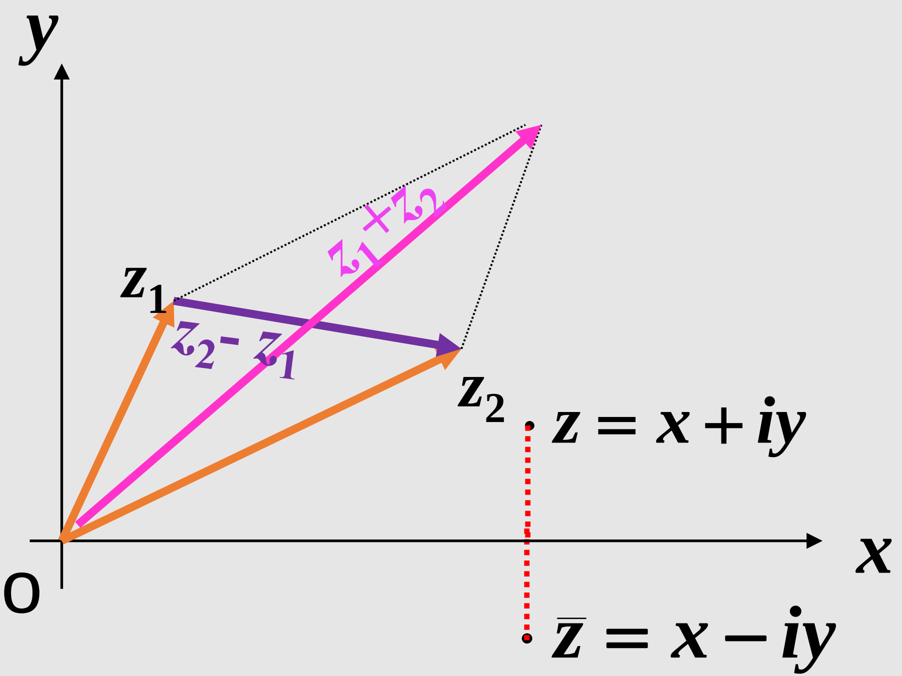
复数的模　$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},\ |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$$|x| \le |z|,\ |y| \le |z|$$

$$|z| \le |x| + |y|$$



复数模的不等式



$$|z_1|+|z_2|\geq|z_1+z_2|$$

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1-z_2|.$$

z 与 $\bar{z}$ 关于实轴对称

复数的辐角 以x轴的正向为始边，以向量$\overrightarrow{OP}$为终边的角θ称为 z 的辐角， 记做Argz.

$$\text{Arg}z = \theta + 2k\pi \ \left(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right)$$

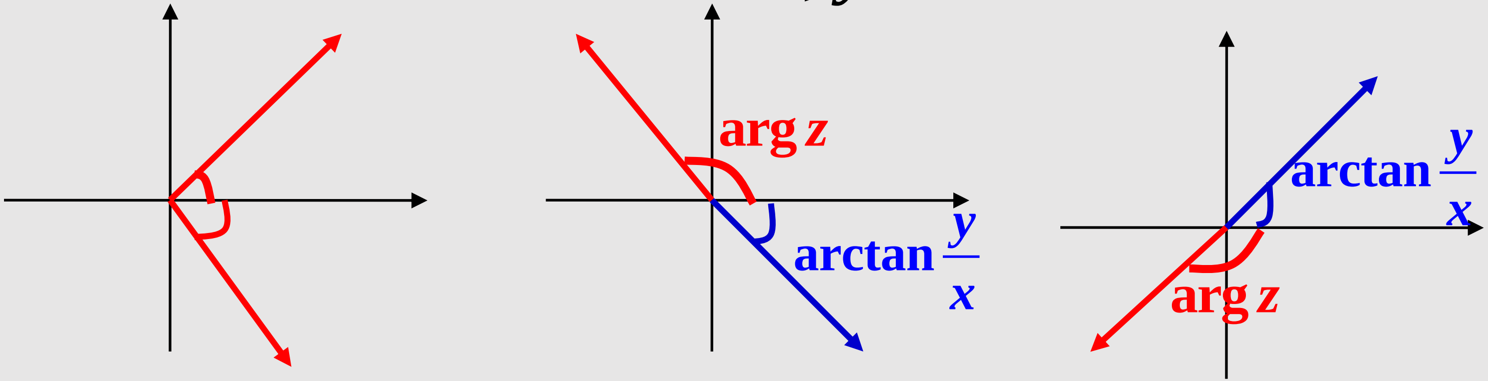
$z = 0$ 辐角不确定.

辐角的主值 满足 $-\pi < \theta \leq \pi$ 的复数z的辐角称为辐角的主值. 记做 $\theta_0 = \arg z$

$$\text{Arg}z = \arg z + 2k\pi \quad \left(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right).$$

$$-\pi < \arg z \le \pi, \quad \tan(\arg z) = \frac{y}{x}, -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & x > 0 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} & x = 0, y \ne 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} \pm \pi & x < 0, y \ne 0 \\ \pi & x < 0, y = 0 \end{cases}$$



复数的三角表示和指数表示

利用直角坐标与极坐标之间的关系

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta.$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$ 三角表示式

再利用Euler公式 $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

$$z = re^{i\theta}$$ 指数表示式

其中 $r = |z|,\ \theta = \mathrm{Arg}z$

例1 把复数 $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha, 0\le\alpha\le\pi.$

化为三角表示与指数表示并求辐角的主值.

解 $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}i$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right]$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$z=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad \arg z=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

例2 证明 $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$

并由此证明 $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

证明 $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$

由第一部分例2知，$\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=\dfrac{1}{2}(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\le|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z_2}|$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|=(|z_1|+|z_2|)^2$$

主要内容

3 复数的乘幂与方根

复数乘积和商的模与辐角

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

$$|z_1 z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)},$$

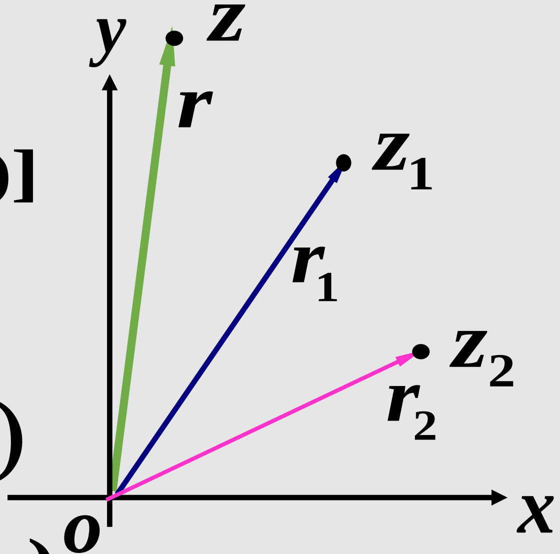
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$$

注意：集合意义下的相等

两个复数相乘的几何意义

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$



复数的乘幂

$$z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)\ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)].$$

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$ r=1,De Movie公式

复数的n次方根　对给定的复数z，方程 $w^n = z$ 的解 w 称为

z的n次方根，记作 $\sqrt[n]{z}$ or $z^{\frac{1}{n}}$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

$$\rho^n = r,\ \cos n\varphi = \cos\theta,\quad \sin n\varphi = \sin\theta,$$

$$\rho = r^{\frac{1}{n}},$$

$$n\varphi = \theta + 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

$$w_k = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$w_k=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

当取 $k=0,1,2,\cdots;n-1$ 时，可得n个相异根如下

$$w_0,w_1,\cdots,w_{n-1}\qquad w_k=r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$$

一般情况下，非零复数 z 的 n 次方根几何上就是以原点为中心,$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的正 n 边形的 n 个顶点.

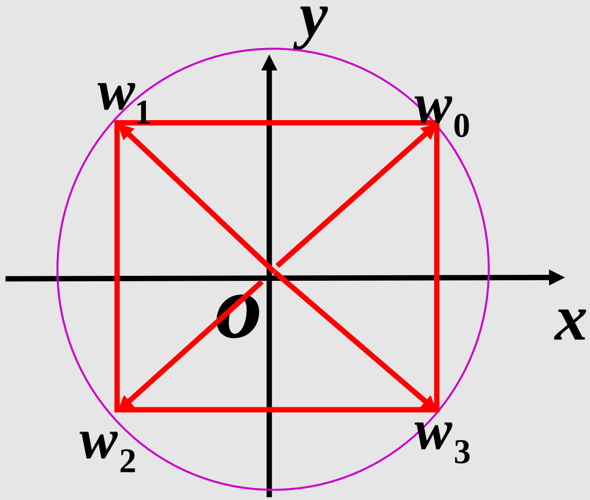
例1 求方程 $w^4+16=0$ 的四个根.

解 $w_k=\sqrt[4]{z}=16^{\frac{1}{4}}\left(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{4}\right)$

$k=0,1,2,3$

$w_0=\sqrt{2}(1+i),\quad w_1=\sqrt{2}(-1+i),$

$w_2=-\sqrt{2}(1+i),\ w_3=\sqrt{2}(1-i).$



主要内容

1 复数及其代数运算

2 复数的几何表示

3 复数的乘幂与方根

4 复数在几何上的应用举例

5 复球面与无穷远点

4 复数在几何上的应用

利用复数及其运算的几何意义

（1）可以把很多平面图形用复数形式的方程（或不等式）来表示；

（2）可由给定的复数形式的方程（或不等式）来确定其表示的平面图形.

从而，可以利用复数来研究一些平面几何问题.

例1 用复数形式的方程来表示连接两点的直线和直线段.

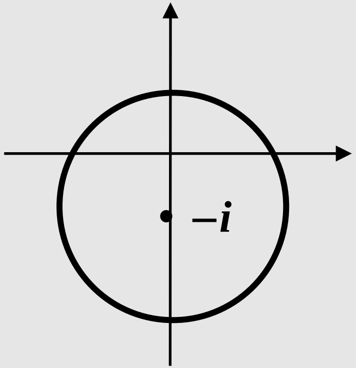
解 $z_1 = x_1 + iy_1$与$z_2 = x_2 + iy_2$

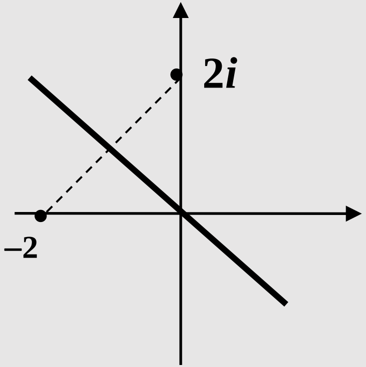
$$z - z_1 = t(z_2 - z_1), t \in (-\infty, +\infty)$$

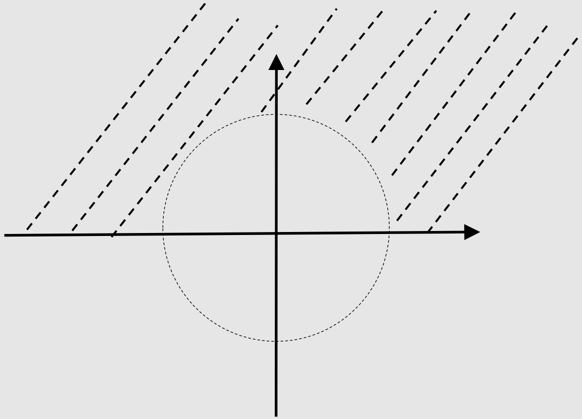
$$z - z_1 = t(z_2 - z_1), t \in [0, 1]$$

例2 说明下列方程所表示的平面图形.

$$(1)|z+i|=2;\ (2)|z-2i|=|z+2|;\ (3)|z|>1,\mathrm{Im}(z)>0.$$







例3 如果复数 z_1, z_2, z_3 满足等式 $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$,

证明 $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

证明 $$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \Rightarrow \left|\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right| = \left|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right|$$

$$\Rightarrow |z_2 - z_1| = \frac{|z_1 - z_3|^2}{|z_2 - z_3|} \quad (1)$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} - 1 = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - 1 \Rightarrow \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$$

$$|z_2 - z_1| = \frac{|z_2 - z_3|^2}{|z_3 - z_1|} \quad (2)$$

例3 如果复数 z_1, z_2, z_3 满足等式 $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$,

证明 $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

证明 $$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \Rightarrow \left|\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right| = \left|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right|$$

$$\Rightarrow |z_2 - z_1| = \frac{|z_1 - z_3|^2}{|z_2 - z_3|} \quad (1)$$

$$|z_2 - z_1| = \frac{|z_2 - z_3|^2}{|z_3 - z_1|} \quad (2)$$

(1)/(2), 得 $|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$.

代入（1），得 $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1|$　　$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

主要内容

1 复数及其代数运算

2 复数的几何表示

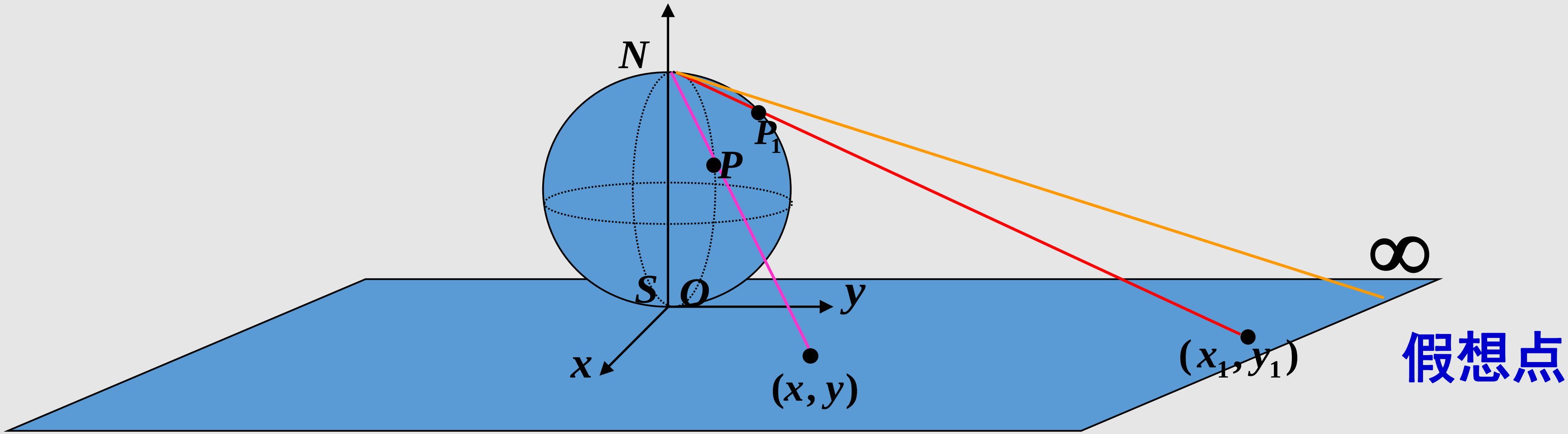
3 复数的乘幂与方根

4 复数在几何上的应用举例

5 复球面与无穷远点

5 复球面及无穷远点

复数可以用平面上的点表示，这是复数的几何表示法的一种，另外还可以用球面上的点表示复数.



扩充复平面　（包含无穷远点的复平面）

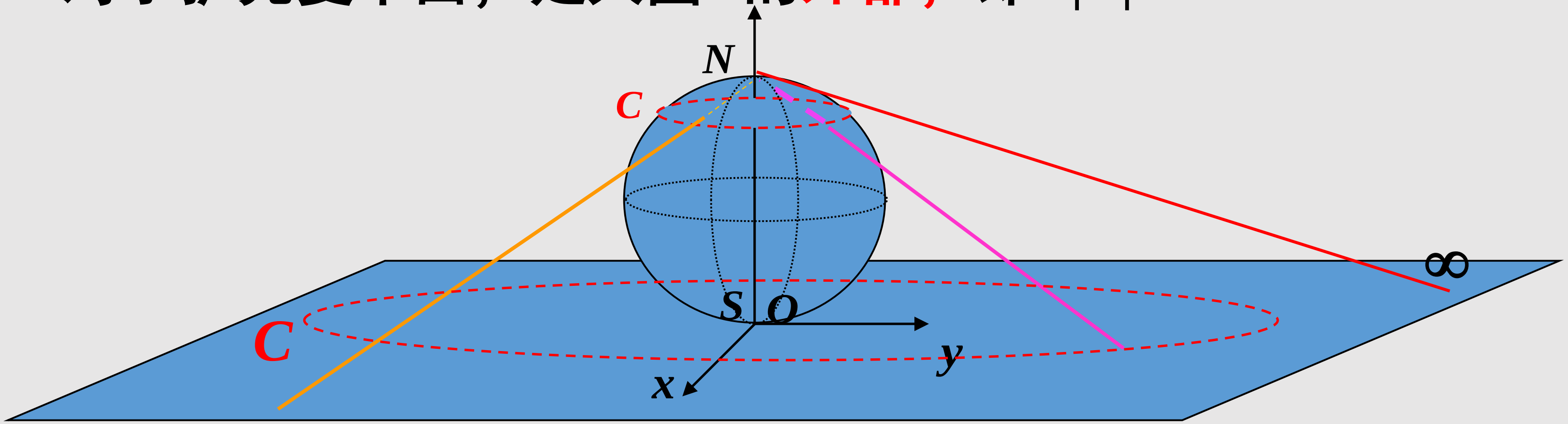
邻域 $U(z_0,\delta)=\{z\in C \,\|\, z-z_0| < \delta\}$

$\mathring{U}(z_0,\delta)=\{z\in C \,|\, 0<|z-z_0|<\delta\}$

无穷远点的邻域

对于复球面，是一绕北极点N的小圆C的内部

对于扩充复平面，是大圆C的**外部**，即 $|z|>R$



对于复数的无穷远点而言，它的实部、虚部，辐角等概念均无意义，规定它的模为正无穷大.

关于 ∞ 的四则运算法则如下：

(1) 加法 $\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty \quad (\alpha\neq\infty)$;

(2) 减法 $\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty \quad (\alpha\neq\infty)$;

(3) 乘法 $\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty \quad (\alpha\neq 0)$;

(4) 除法 $\dfrac{\alpha}{\infty}=0, \quad \dfrac{\infty}{\alpha}=\infty\ (\alpha\neq\infty), \quad \dfrac{\alpha}{0}=\infty(\alpha\neq 0)$.