第三章　复变函数的积分

第一讲 复变函数积分的概念、性质及运算

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1. 复变函数积分的定义
2. 积分的存在条件及计算方法
3. 积分的基本性质及积分举例

主要内容

1. 复变函数积分的定义
2. 积分的存在条件及计算方法
3. 积分的基本性质及积分举例

1 复变函数积分的定义

回顾实变函数的积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

两个要素：被积函数、积分区间

推广： $(1)\ f(x) \to f(z)$

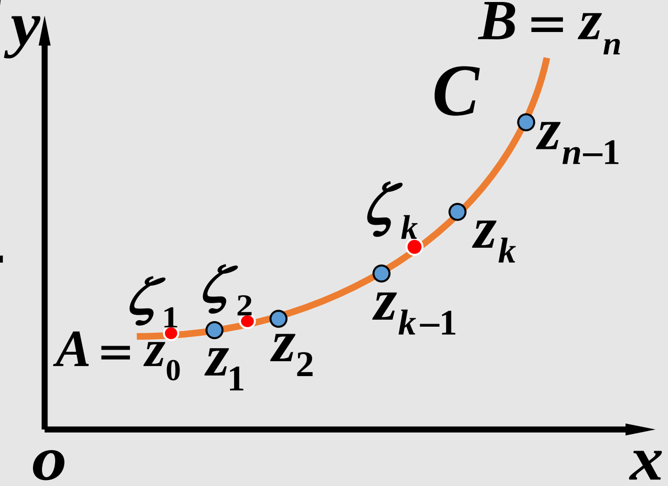
$(2)[a,b] \to C$

有向曲线　非封闭有向曲线、封闭有向曲线.

积分定义　设C是复平面上以A为起点，B为终点光滑有向曲线，把曲线C任意划分成n个弧段，分点依次为

$$A = z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n = B$$

在每个小弧段 $z_{k-1}z_k\,(k = 1,2,\cdots,n)$上任取一点 $\zeta_k\,(k = 1,2,\cdots,n)$，做和数



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$ 其中，$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}\,(k = 1,2,\cdots)$

记 Δs_k 为弧段 $z_{k-1}z_k$ 的弧长，$\delta = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$

如果当 n 无限增大且 δ 趋于零时，无论 C 的分法如何，无论 ζ_k 怎样取，S_n都趋于同一复常数，即

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = C_0$$

则把该极限值叫做复变函数 $f(z)$在曲线 C 上的积分，

并记作$\int_C f(z)\mathrm{d}z$，即 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim\limits_{\delta\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$.

如果 C 是闭曲线，经常记作 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$.

主要内容

1. 复变函数积分的定义
2. 积分的存在条件及计算方法
3. 积分的基本性质及积分举例

2 积分的存在条件及计算方法 从定义出发来探讨.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,\quad \zeta_k = a_k + ib_k,\ \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[u\left(a_k, b_k\right) + iv\left(a_k, b_k\right)\right]\left[\Delta x_k + i\Delta y_k\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[u\left(a_k, b_k\right)\Delta x_k - v\left(a_k, b_k\right)\Delta y_k\right]$$

$$+ i\left[v\left(a_k, b_k\right)\Delta x_k + u\left(a_k, b_k\right)\Delta y_k\right]$$

若$u(x,y), v(x,y)$均连续，极限存在

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy.$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \underline{\underline{\int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y}} + i\underline{\underline{\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y}}.$$

特殊的， $C: z = z(t) = x(t) + iy(t)\ (\alpha \le t \le \beta)$,

如果 $z(\alpha)$ 是起点， $z(\beta)$ 是终点，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$+i\int_\alpha^\beta \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t.$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\{u\left[x(t), y(t)\right] + iv\left[x(t), y(t)\right]\right\}\left\{x'(t) + iy'(t)\right\}dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$$

定理 1 设 C 是分段光滑(或可求长)的有向曲线 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 C 上连续，则 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在，并且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y \ +i\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y.$$

上式表明，计算复变函数的积分可以转化为计算二元实变函数的线积分.

主要内容

1 复变函数积分的定义

2 积分的存在条件及计算方法

3 积分的基本性质及积分举例

3 积分的基本性质及积分举例

性质1 $$\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z;$$

性质2 $$\int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

性质3 $$\int_C [f(z)\pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z;$$

性质4 设C_1的终点是C_2的起点，$C=C_1+C_2$, 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z;$$

性质5 设曲线C的长度为L，函数$f(z)$在C上满足$|f(z)| \le M$,则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML.$$

证明

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta s_k$$

取极限，得 $$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML.$$

注意：实变函数中的积分中值定理，不能直接推广到复积分上来.

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{i} e^{i\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \text{但} e^{i\bar{\theta}}(2\pi - 0) \ne 0.$$

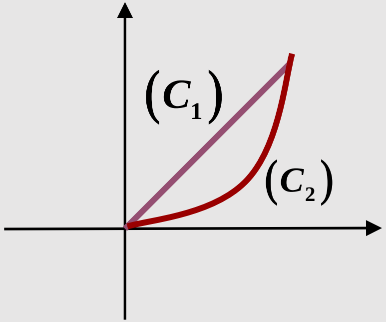
例1 试证 $\left|\oint_{|z|=r}\frac{\mathrm{d}z}{(z-i)(z+i)}\right|<\frac{2\pi r}{|r^2-1|}\quad (r\neq 1)$

证 $\left|\oint_{|z|=r}\frac{\mathrm{d}z}{(z-i)(z+i)}\right|\leq ML$

$$|(z-i)(z+i)|=|z^2+1|>\left||z|^2-1\right|$$

$$\therefore \left|\oint_{|z|=r}\frac{\mathrm{d}z}{(z-i)(z+i)}\right|<\frac{2\pi r}{r^2-1}$$

例2 计算积分 $\int_C z\,dz$ 与 $\int_C \bar{z}\,dz$ 其中C为



(1) 从原点到 $1+i$ 的直线段；

(2) 抛物线 $y=x^2$ 上从原点到 $1+i$ 的弧段.

解

$$\int_{C_1} z\,dz = \int_0^1 (t+it)\,d(t+it) = (1+i)^2\int_0^1 t\,dt = i$$

$$\int_{C_2} z\,dz = \int_0^1 (t+t^2 i)\,d(t+t^2 i) = i$$

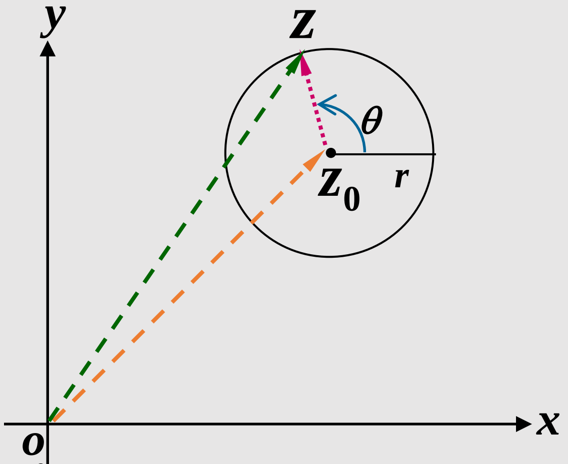
$$\int_{C_1} \bar{z}\,dz = \int_0^1 (t-it)\,d(t+it) = 2\int_0^1 t\,dt = 1$$

$$\int_{C_2} \bar{z}\,dz = \int_0^1 (t-it^2)\,d(t+it^2) = 1+\frac{1}{3}i$$

观察：
积分与路径无关似乎与解析性有关.

例3 计算积分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$（$n$是整数），

其中C是圆周： $|z-z_0| = r\ (r>0)$ 的正向.



解 令 $z = z_0 + re^{i\theta}$

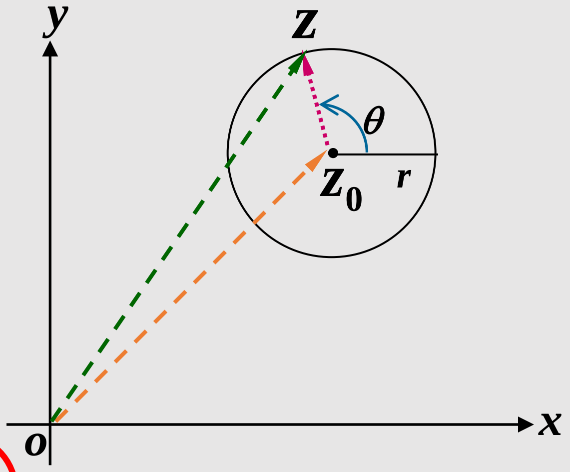
$$n=0,\quad \oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-i\theta} d\left(z_0 + re^{i\theta}\right) = 2\pi i$$

$$n\neq 0,\quad \oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} e^{-i(n+1)\theta} d\left(z_0 + re^{i\theta}\right)$$

$$= \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta = 0$$

例3 计算积分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$（$n$是整数），

其中C是圆周：$|z-z_0|=r\ (r>0)$ 的正向.



解 令 $z=z_0+re^{i\theta}$

$$\boxed{\oint_{|z-z_0|=r}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi i, & n=0,\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}}$$

（明星公式）

结论： 积分值与圆周的中心、半径无关.