第三章　复变函数的积分

第三讲 原函数与不定积分

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1 原函数的概念

2 不定积分的定义及计算

主要内容

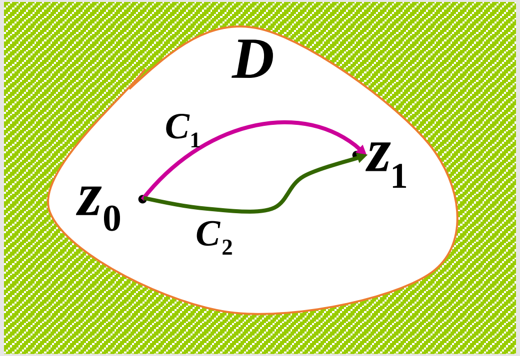
1 原函数的概念

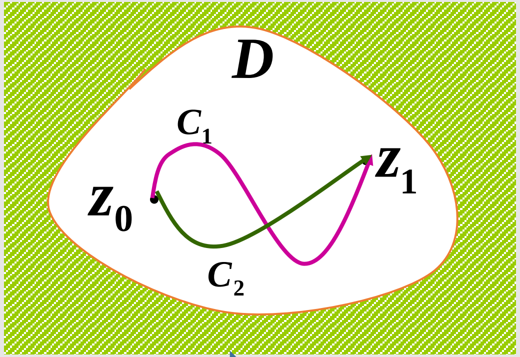
2 不定积分的定义及计算

1 原函数的概念

沿封闭曲线积分为0与积分与路径无关的等价性

设$f(z)$在**单连通**区域D内处处**解析**，z_0,z_1是B内给定的两个点，则积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与连接起点z_0与终点z的路径C无关.





变上限的积分 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 猜想 $F'(z)=f(z)$

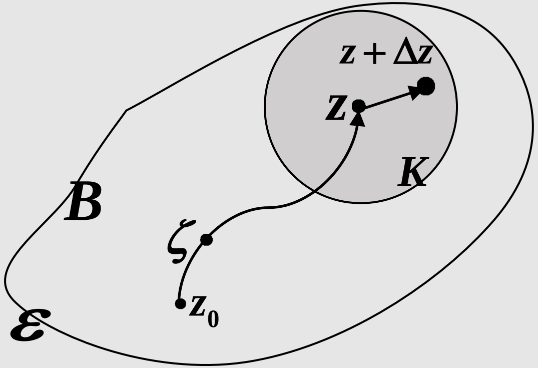
$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \quad \Rightarrow \quad F'(z)=f(z)$$

即证 $$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)$$

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta}{\Delta z}$$

$$=\frac{\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta}{\Delta z}$$

中值定理不成立



$|\Delta z|<\delta$时，$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| \overset{?}{<} \varepsilon$

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta}{\Delta z}-f(z)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-f(z)\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\right|\left|\int_{z}^{z+\Delta z}\left[f(\zeta)-f(z)\right]d\zeta\right|$$

$$\leq\frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z|=\varepsilon.$$

$$\boxed{F'(z)=f(z)}$$

$\because f(z)$在B解析，

从而在B内连续，

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta,$

当 $|\zeta-z|<\delta,$

$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$

定理1 如果函数$f(z)$在单连通域D内处处解析，则

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

必为D内的一个解析函数，且 $F'(z)=f(z)$.

定义1 如果 $\varphi'(z)=f(z)$，且$f(z)$在D内连续，则$\varphi(z)$称为$f(z)$在D内的一个**原函数**.

结论：(1) 变上限积分 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是解析函数$f(z)$在单连域D内的一个原函数；

(2) $f(z)$的任意两个原函数之间相差一个常数.

主要内容

1 原函数的概念

2 不定积分的定义及计算

2 不定积分的定义及计算

不定积分 如果$F(z)$是 $f(z)$在区域D上的一个原函数，

那么它就有无穷多个原函数，则一般表达式为

$$\int f(z)\mathrm{d}z = F(z) + C \text{（C是任意复常数）.}$$

定理2（N-L公式） 设$f(z)$在单连通区域D内处处解析，

$G(z)$是 $f(z)$在D上的一个原函数，则

$$\boxed{\int_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z = G(z_2) - G(z_1)}$$

例1 计算积分$\int_{z_0}^{z_1} z\,dz$的值.

解 $$\int_{z_0}^{z_1} z\,dz = \frac{1}{2}z^2\Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2}\left(z_1^2 - z_0^2\right).$$

例2 计算积分$\int_0^i z\cos z\,dz$ 的值.

解 $$\int_0^i z\cos z\,dz = \int_0^i z\,d\sin z = z\sin z\Big|_0^i - \int_0^i \sin z\,dz$$

$$= i\sin i + \cos z\Big|_0^i = i\sin i + \cos i - 1$$

$$= \frac{1}{e} - 1.$$

例3 计算积分 $\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos^2 z\,dz$ 的值.

解 $$\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos^2 z\,dz = 2\int_0^{\pi i} \frac{1+\cos 2z}{2}\,dz = \left[z + \frac{1}{2}\sin 2z\right]_0^{\pi i}$$

$$= \pi i + \frac{1}{2}\sin(2\pi i) = \pi i + \frac{1}{2}\frac{e^{-2\pi} - e^{2\pi}}{2i}$$

$$= (\pi - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\pi)i.$$

例4 沿区域 $\mathrm{Im}(z) \geq 0, \mathrm{Re}(z) \geq 0$的圆弧 $|z| = 1$，计算积分

$$\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} \mathrm{d}z$$ 的值.

解 由题设条件知，被积函数在所给区域是解析的，故

$$\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) \Big|_1^i$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} i \right)^2 - \ln^2 2 \right]$$

$$= -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8} \ln^2 2 + \frac{\pi}{8} \ln 2 i.$$