# 第三章　复变函数的积分

## 第五讲 解析函数与调和函数的关系

数学与统计学院
吴慧卓

## 主要内容

1 调和函数的定义及与解析函数的关系

2 利用柯西-黎曼方程求调和函数的共轭调和函数的方法举例

# 主要内容

1 调和函数的定义及与解析函数的关系

2 利用柯西-黎曼方程求调和函数的共轭调和函数的方法举例

# 1 调和函数的定义及与解析函数的关系

## 调和函数定义

如果二元实变函数 $\varphi(x,y)$在区域$D$内具有二阶连续偏导数，

且满足Lapalace方程，

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0}$$

则称 $\varphi(x,y)$为区域$D$内的调和函数.

## 定理1　解析函数与调和函数的关系　　逆不真

任何在区域$D$内的解析函数，其实部和虚部都是调和函数.

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0}$$

**证明**　$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$解析

$C-R$方程：$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x$

$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y$ 仍解析，

故也满足$C$-$R$方程　$u_{xx}=-u_{yy}$　　$u_{xx}+u_{yy}=0$

故实部是调和函数.　　同理可证，虚部也是调和函数.

# 主要内容

1 调和函数的定义及与解析函数的关系

2 利用柯西-黎曼方程求调和函数的共轭调和函数的方法举例

# 2　利用柯西-黎曼方程求调和函数的共轭调和函数的方法举例

## 共轭调和函数的定义

设$u(x,y)$为区域$D$内的调和函数，如果区域$D$内的另一函数$v(x,y)$使$u+iv$在$D$内构成解析函数，则称$v(x,y)$为$u(x,y)$的共轭调和函数.

**结论**　解析函数的虚部为实部的共轭调和函数.

如果已知一调和函数$u$，则可以利用$C$-$R$方程求其共轭调和函数$v$, 从而构成一解析函数$u+iv$.

**已知实部求虚部的方法：**

（1）偏积分法；

（2）线积分法；

（3）全微分法；

（4）不定积分法.

**例1** 证明 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，求其共轭调和函数 $v(x,y)$，使 $f(z)=u+iv$ 解析.

**解** (1) $u_x=3x^2-3y^2,\quad u_{xx}=6x,$

$u_y=-6xy,\quad u_{yy}=-6x,$ 故$u$为调和函数.

(2) **方法一：偏积分**

$$\because u_x=3x^2-3y^2=v_y,$$

$$\therefore v=\int(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y=3x^2y-y^3+C(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\because u_y=-v_x=-6xy \qquad v_x=6xy+C'(x)$$

**例1** 证明 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，求其共轭调和函数 $v(x,y)$，使 $f(z)=u+iv$ 解析.

**解** (2) **方法一：偏积分**

$$\because u_x=3x^2-3y^2=v_y,$$

$$\therefore v=\int(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y=3x^2y-y^3+C(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\because u_y=-v_x=-6xy \qquad v_x=6xy+C'(x)$$

$$\therefore C'(x)=0 \Rightarrow C(x)=C'$$

$$f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)+C \quad (C=iC')$$

已知$u(x,y)=x^3-3xy^2$，求$v(x,y)$.

**方法二 折线积分**

$$\mathrm{d}v=v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y$$

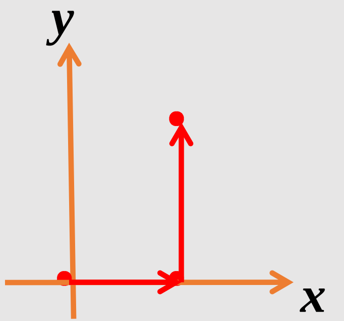
根据$C$-$R$方程，$u$决定了$v$的全微分

$$=-u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y$$

$$=-6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y$$

$$v=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y=3x^2y-y^3.$$



## 方法三 全微分法

$$\mathrm{d}v = 6xy\mathrm{d}x + (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y$$

$$= (6xy\mathrm{d}x + 3x^2\mathrm{d}y) - 3y^2\mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{d}(3x^2y) - \mathrm{d}y^3 \quad = \mathrm{d}(3x^2y - y^3 + C')$$

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) + C$$

其中$C = iC'$