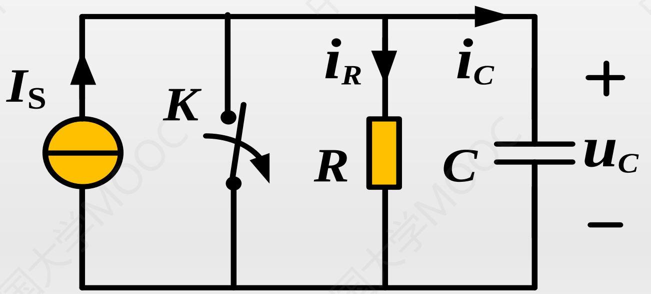
电路原理

一阶电路的零状态响应

零状态响应：储能元件初始值为零，电路在输入激励作用下产生的响应。

RC电路的零状态响应　$u_C(0_+)= u_C(0-)= 0$



根据KCL定律，　$I_S = i_R + i_C$

得到　$RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = RI_S$　一阶线性非齐次微分方程。

方程的通解 = 对应齐次方程的通解+方程的特解

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t)$$

齐次通解

非齐次通解

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t)$$

齐次通解

非齐次通解

$$u_{Ch}(t) = Ke^{pt} = Ke^{-\frac{t}{\tau}} = Ke^{-\frac{t}{RC}} \qquad (t \geq 0)$$

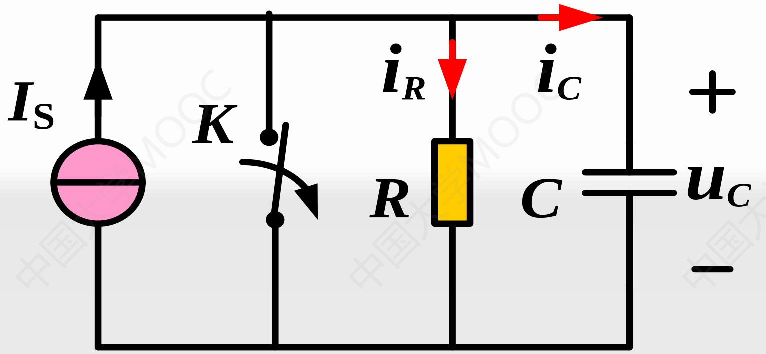
$$u_{Cp}(t) = Q \Rightarrow RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = RI_S \Rightarrow u_{Cp}(t) = Q = RI_S$$

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + RI_S$$

K由初始条件确定。

$$u_C(0_+) = K + RI_S = 0 \Rightarrow K = -RI_S$$

所以 $u_C(t) = RI_S - RI_S e^{-\frac{t}{RC}} = RI_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$



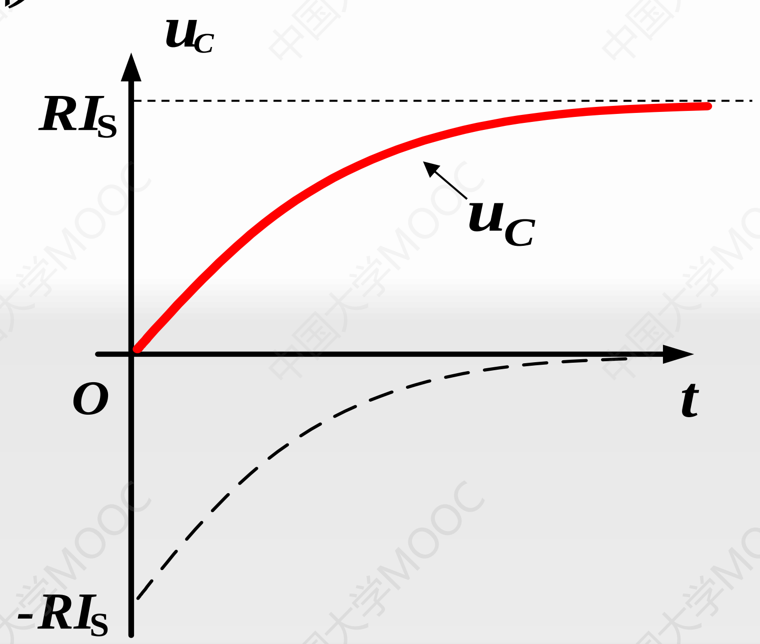
$$u_C(t) = RI_S - RI_S e^{-\frac{t}{\tau}}$$

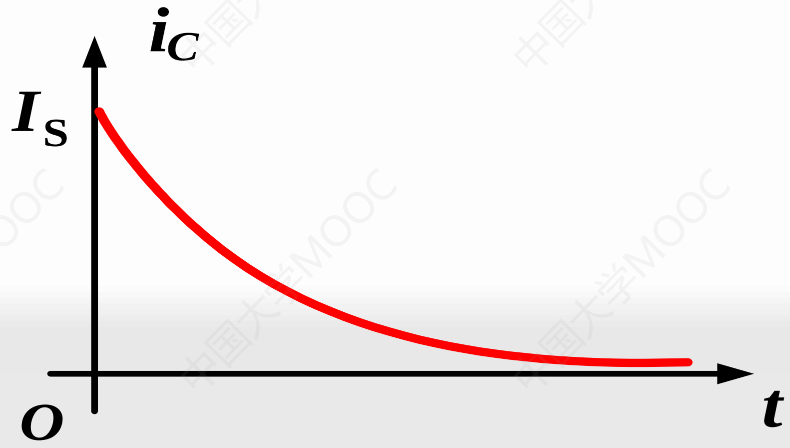
强制分量(稳态)

自由分量(暂态)

$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = I_S e^{-\frac{t}{\tau}}$$

波形





*RC*充电电路的响应曲线

$$u_C(t) = RI_S - RI_S e^{-\frac{t}{RC}} = RI_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

由于 $u_{Cp}(t) = RI_S$

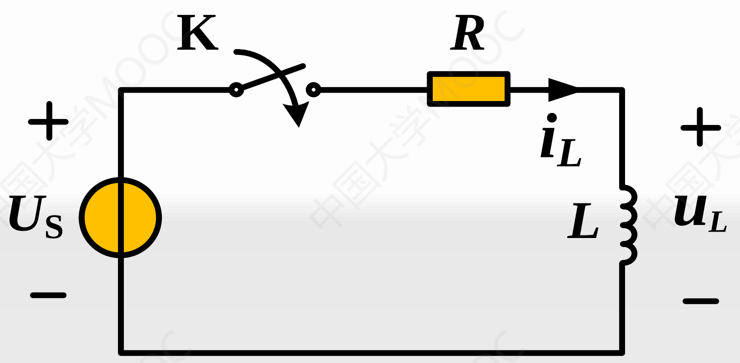
即特解为RI_S，而从$u_C(t)$的波形可以看出，RI_S是$u_C(t)$的最终稳态解。

记 $u_C(\infty) = RI_S$

RC电路的零状态响应为：

$$\boxed{u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad (t \geq 0)}$$

RL电路的零状态响应



RL充电电路

换路前，$i_L(0_-)=0$。

换路后，根据KVL有

$$Ri_L + u_L = U_S$$

又 $$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

所以 $$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L = \frac{U_S}{R} \quad (t \geq 0)$$ ——一阶常系数非齐次微分方程

其解答为：

$$i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{Lp}(t)$$

$$= Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_S}{R} = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_S}{R}$$

$$i_L(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_S}{R}$$

式中$\tau=L/R$。K由初始条件确定 $K = -\frac{U_S}{R}$

由此求得 $i_L(t) = \frac{U_S}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

*RL*电路的零状态响应为：

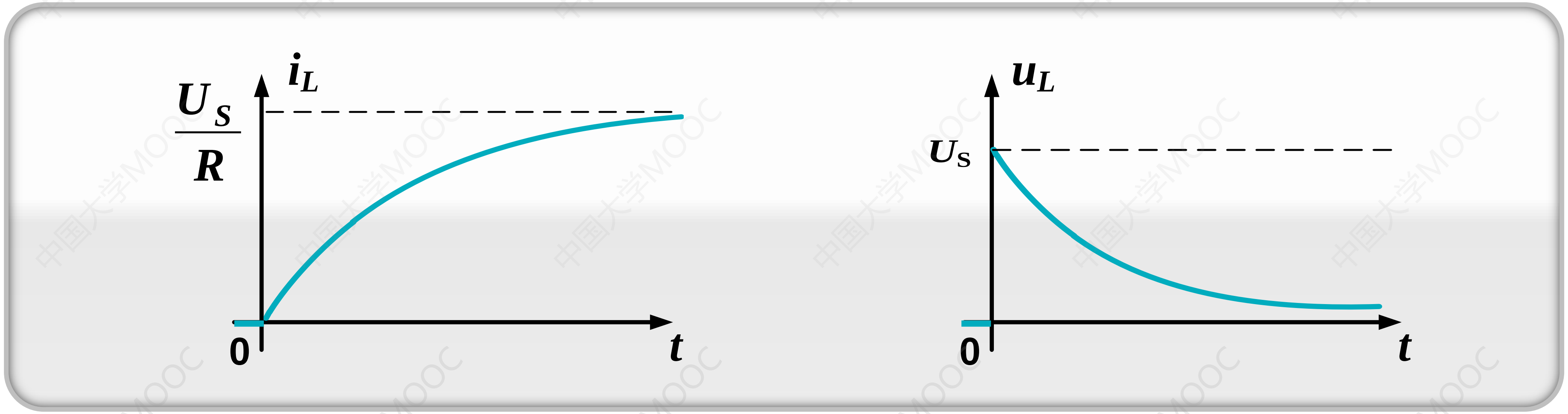
$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad (t \geq 0)$$

最后得到一阶*RL*电路的零状态响应为

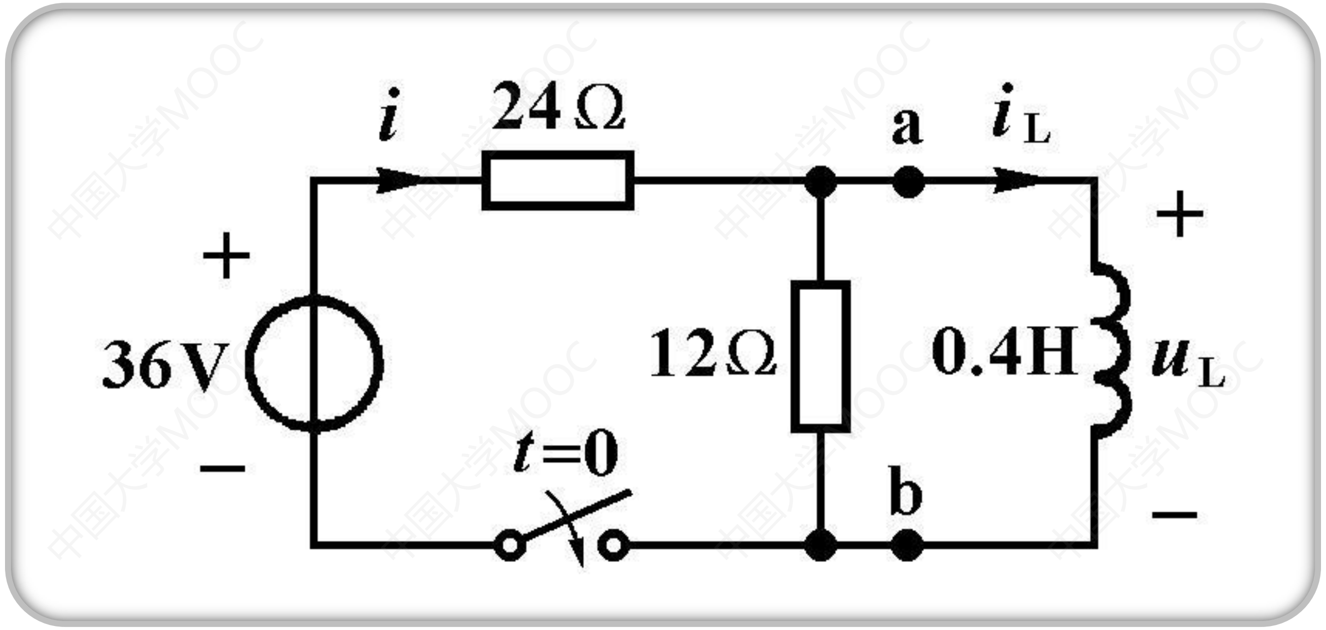
$$i_L(t)=i_L(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=\frac{U_S}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t}) \qquad (t\geq 0)$$

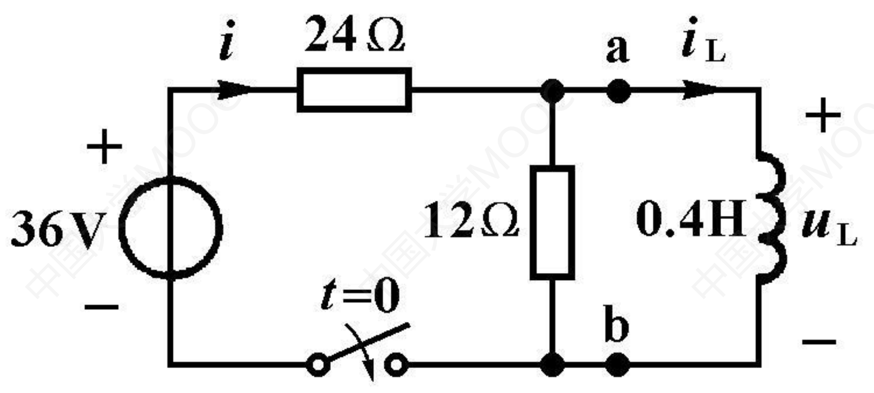
$$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=U_S e^{-\frac{R}{L}t}=U_S e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t>0)$$

其波形曲线



例 电路如图所示，已知电感电 $i_L(0_-)=0$。$t=0$闭合开关，求$t\geq0$的电感电流和电感电压。





解 由换路定律有:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

最终稳态值为

$$i_L(\infty) = 1.5\text{A}$$

求时间常数 $R_0 = \dfrac{24\times 12}{24+12} = 8\Omega$ ➡ $\tau = \dfrac{L}{R_0} = \dfrac{0.4}{8}\text{s} = 0.05\,\text{s}$

电感电流和电感电压为：

$$i_L(t) = 1.5(1-\text{e}^{-20t})\text{A} \qquad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = L\frac{\text{d}i_L}{\text{d}t} = 0.4\times 1.5\times 20\text{e}^{-20t}\text{V} = 12\text{e}^{-20t}\text{V}$$

谢谢