第三章　复变函数的积分

第二讲 柯西-古萨基本定理及其推广

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1 柯西-古萨基本定理

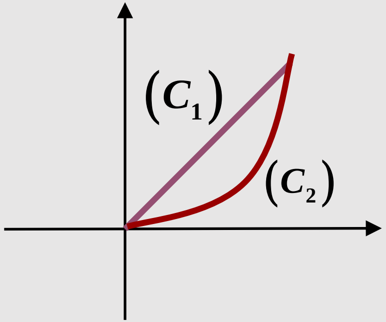
2 基本定理的推广

主要内容

1. 柯西-古萨基本定理
2. 基本定理的推广

1 柯西-古萨基本定理

回顾　第三章第一讲例2



例2　计算积分 $\int_C z\mathrm{d}z$ 与 $\int_C \bar{z}\mathrm{d}z$ 其中C为

（1）　从原点到 $1+i$ 的直线段；

（2）　抛物线 $y=x^2$ 上从原点到 $1+i$ 的弧段.

解　$$\int_{C_1} z\mathrm{d}z = \int_{C_2} z\mathrm{d}z = i$$

$$\int_{C_1} \bar{z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2} \qquad \int_{C_2} \bar{z}\mathrm{d}z = 1+\frac{1}{3}i$$

观察：
积分与路径无关似乎与解析性有关.

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y \; + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

复积分与路径无关 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 线积分与路径无关 $\Longleftrightarrow$ 沿任意封闭曲线的积分为0

1851年，黎曼证明：

如果 $f(z)$在闭曲线C所包围的**单连通域**B内**解析**，且$f'(z)$连续，

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\oint_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{(\sigma)} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) d\sigma + i\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) d\sigma = 0.$$

定理1 柯西-古萨基本定理（1900年，古萨证明）

设 $f(z)$在**单连通域**B内解析，则沿B内任一封闭曲线C，有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

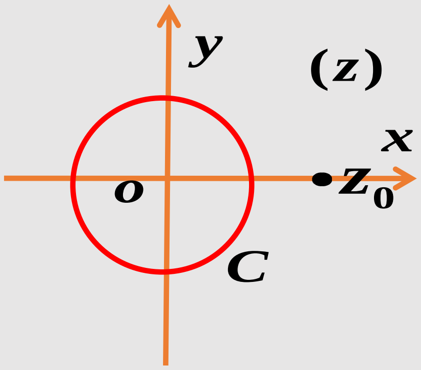
又叫**柯西积分定理.**

注意： 单连通域不能去掉. $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i \neq 0.$

定理2 $f(z)$如果在简单闭曲线C上连续，在其所围的区域内解析，则

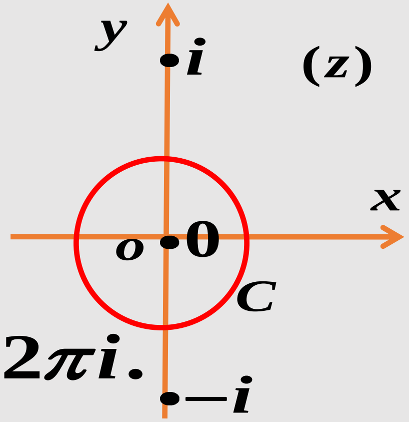
$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

例1 计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3}\,dz.$



解 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3}\,dz = 0.$

例2 计算积分 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\,dz.$



解 $\frac{1+z^2-z^2}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1}$

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\,dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z}\,dz - \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{z^2+1}\,dz = 2\pi i.$$

主要内容

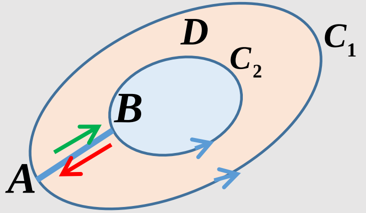
1 柯西-古萨基本定理

2 基本定理的推广

2 基本定理的推广

定理3 闭路变形原理

设C_1与C_2是两条简单闭曲线，C_2在C_1的内部，$f(z)$在C_1与C_2之间所围的区域D内解析，在C_1和C_2上连续，C_1与C_2同向，则 $\boxed{\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.}$



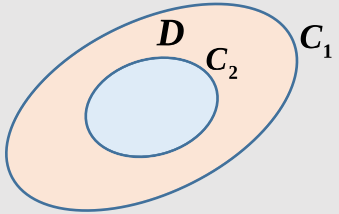
证明 $\Gamma^+ = C_1^+ + C_2^-$

$$\oint_{C_1^+ + AB + C_2^- + BA} f(z)\mathrm{d}z = 0 \Rightarrow \oint_{C_1^+ + C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = 0 \Rightarrow \oint_{C_1^+} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2^+} f(z)\mathrm{d}z.$$

2 基本定理的推广

定理3 闭路变形原理

设C_1与C_2是两条简单闭曲线，C_2在C_1的内部，$f(z)$在C_1与C_2之间所围的区域D内解析，在C_1和C_2上连续，C_1与C_2同向，则 $\boxed{\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.}$

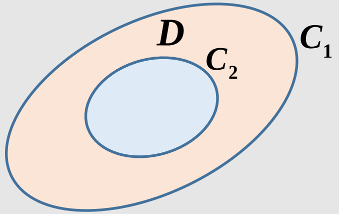


$$\boxed{\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}}$$

2 基本定理的推广

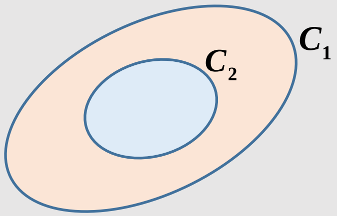
定理3 闭路变形原理

设C_1与C_2是两条简单闭曲线，C_2在C_1的内部，$f(z)$在C_1与C_2之间所围的区域D内解析，在C_1和C_2上连续，C_1与C_2同向，则 $\boxed{\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.}$



$$\boxed{\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}}$$

$$\boxed{\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.}$$



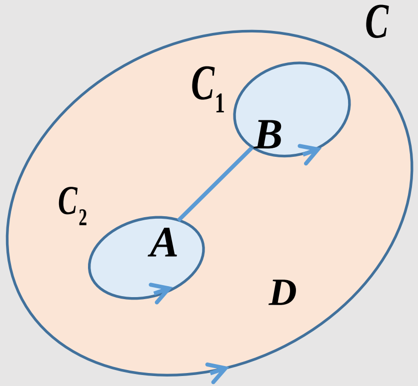
$$\Gamma^+ = C^+ + C_1^- + C_2^-$$

$$L^+ = AB + C_1^+ + BA + C_2^+$$

$$\oint_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{L^+} f(z)\mathrm{d}z.$$

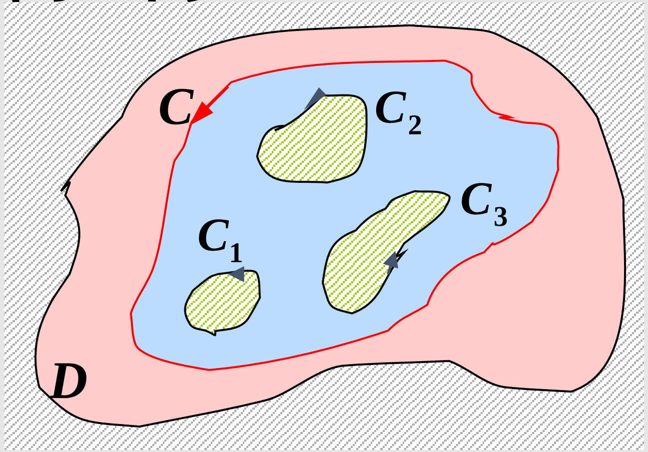
$$\oint_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1^+ + C_2^+} f(z)\mathrm{d}z.$$

$$\oint_{C^+ + C_1^- + C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma^+} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$



定理4 复合闭路定理 设C是多连通区域D内一条简单闭曲线，$C_1,C_2,\cdots,C_n$在C内部的n条简单闭曲线，它们互不包含，也不相交，$C,C_1,C_2,\cdots,C_n$为边界的闭区域含于D内.

若f在D内解析，则

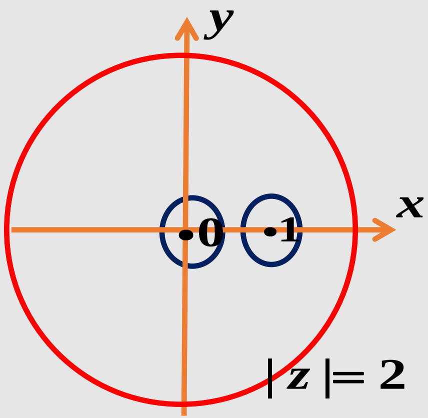


$$(1)\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

$$\Gamma^+ = C^+ + C_1^{-1} + C_2^{-1} + \cdots + C_n^{-1}$$

$$(2)\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z.$$（C及C_k均取正向）

例3 计算积分$I = \oint\limits_{|z|=2} \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z.$



解

$$\frac{z+(z-1)}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

$$I = \oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z + \oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i.$$