高等数学 A2

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 五套精装版）

学校：________________________

专业：________________________

班级：________________________

姓名：________________________

学号：________________________

（此试卷为 2022 年第二版 第 1 次发行）

目录

高等数学 A2 期末数学试卷所有版本：

（本人会在 5 月份发布试卷的第二次发行版本，之后大家可以直接访问网站下载，此网站目前正在开发中……）

高等数学 A2 期末试题册上 2022 第二版第 1 次发行.pdf

高等数学 A2 期末答案册上 2022 第二版第 1 次发行.pdf

高等数学 A2 期末试题册下 2022 第二版第 1 次发行.pdf

高等数学 A2 期末试题册下 2022 第二版第 1 次发行.pdf

高等数学 A2 期末试题册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

高等数学 A2 期末试题册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈

试卷版次：2022 年 4 月 30 日 第二版 第 1 次发行

本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380

cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102

cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 C　　2 D　　3 A　　4 B　　5 C　　6 B

二 填空题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1　$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$　　2　$\frac{e}{\sqrt{2}}$　　3　$\frac{4}{3}$

4　$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$　　5　$2S$　　6　$\frac{3}{2}$

三 计算题（共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

1

解. 切线方程：

$$\begin{cases} (-2)(x-1)+2(y-1)+4(z-1)=0 \\ (x-1)-2(y-1)+3(z-1)=0 \end{cases}$$

…………………………………………………………… *4'*

即：

$$\begin{cases} x-y-2z=-2 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$$

切线方向为 $(1,-1,-2)\times(1,-2,3)=(-7,-5,-1)$, ………………………… *1'*

故法平面为：

$$-7(x-1)-5(y-1)-(z-1)=0.$$

…………………………………………………………… *1'*

□

2

解. 原问题等价于求函数 $g(x,y)=x^2+y^2$ 在约束 $x+y=1$ 下的条件极值。考虑 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$. ………………………… *2'*

极值点 (x,y) 必满足下面的方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x+y-1=0 \end{cases} \tag{1}$$

…………………………………………………………… *2'*

由上面的方程组解得：$x=y=\frac{1}{2}$, 所以可能的极值点为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 由几何意义知，该问题存在最小值，而最小值点一定为极值点，而我们求得的可能的极值点只有一个，所以 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 就是最小值点。………………………… *2'*

□

3

解.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\cos(xy^2)\right)=2y\cos(xy^2)-y^2\sin(xy^2)2xy$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\cos(xy^2)\right)=2y\cos(xy^2)-2xy\sin(xy^2)y^2.$$

因此 $\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\cos(xy^2)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\cos(xy^2)\right)$, · 2'
又 $\mathbb{R}^2$ 单连通, · 1'
所以这样的 f 是存在的。
固定 $(0,0)\in\mathbb{R}^2$, 取 $C_1^{x,y}$ 为从 $(0,0)$ 到 $(x,0)$ 的直线段, $C_2^{x,y}$ 为从 $(x,0)$ 到 (x,y) 的直线段, 令 $f(x,y)=\int_{C_1^{x,y}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy+\int_{C_2^{x,y}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy$, 则 f 即为所求
· 1'
下求之:

$$\begin{aligned}
f(x_1,y_1)&=\int_{C_1^{x_1,y_1}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy+\int_{C_2^{x_1,y_1}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy\\
&=\int_{C_2^{x_1,y_1}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy\\
&=\int_{C_2^{x_1,y_1}}2xy\cos(xy^2)dy=\sin(x_1y_1^2)
\end{aligned}$$

因此 $f(x,y)=\sin(xy^2)$. · 2'

4

解. 记 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant ay,x\geqslant 0\}$, 记 C 为从点 $(0,0)$ 到点 $(0,a)$ 的沿着 y 轴的线段, 由格林公式:

$$\begin{aligned}
&\int_L(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy\\
=&\iint_D mdxdy+\int_C(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy\cdots\ 3'\\
=&m\sigma(D)+\int_0^a(\cos y-m)dy\cdots\cdots\cdots\ 2'\\
=&\frac{1}{2}m\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\sin a-ma.\cdots\cdots\cdots\ 1'
\end{aligned}$$

5

证明. 记 D 为 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2\}$, 则所求的曲面可视为函数 $z=xy,(x,y)\in D$ 的函数图像, 因此:

$$\begin{aligned}
S&=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy\cdots\cdots\ 2'\\
&=\iint_D\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy\\
&=\iint_{0\leqslant r\leqslant a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\sqrt{1+r^2}rdrd\theta\cdots\cdots\ 2'\\
&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{1+r^2}rdr\\
&=\pi\int_0^a\sqrt{1+r^2}dr^2\\
&=\pi\cdot\frac{2}{3}\left((1+a^2)^{3/2}-1\right).
\end{aligned}$$

· 2'

6

解. 记该公共区域为 Ω, 使用平行于 xy 平面的平面截 Ω, 记 $\Omega_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | (x,y,z)\in\Omega\}$, 则 Ω_z 为一个圆盘，且其面积 $\sigma(\Omega_z) = \begin{cases}\pi(R^2-(R-z)^2), & \text{if } 0\leqslant z\leqslant \frac{R}{2}\\ \pi(R^2-z^2), & \text{if } \frac{R}{2}\leqslant z\leqslant R.\end{cases}$ $\cdots\cdots 1'$

由定义

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_\Omega 1dxdydz \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1' \\
&= \int_0^R dz \iint_{\Omega_z} 1dxdy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2' \\
&= \int_0^R \sigma(\Omega_z)dz \\
&= 2\int_0^{R/2} \pi(R^2-(R-z)^2)dz \\
&= \pi R^3 - 2\pi\int_{R/2}^R z^2dz \\
&= \pi R^3 - \frac{2\pi}{3}(R^3-R^3/8)
\end{aligned}
$$

$$
= \pi R^3(1-2/3+1/12) = \frac{5}{12}\pi R^3. \cdots\cdots\cdots 2'
$$

7

解. 记 S_1 为椭圆盘 $\{(x,y,0)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$ 的下侧，则 S 与 S_1 组成的封闭曲面，记 Ω 为 S 所包围的上半椭球，由高斯公式，$\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy+\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy = \iiint_\Omega 2(x+y+z)dxdydx$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

由于在 S_1 上 $z\equiv 0$, 故 $\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=0$

由对称性知，$\iiint_\Omega 2(x+y)dxdydx$=0。

所以 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy = 2\iiint_\Omega zdxdydx$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

又

$$
\begin{aligned}
2\iiint_\Omega zdxdydz &= 2\int_0^c zdz \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}} dxdy \\
&= 2\int_0^c z\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz \\
&= \pi abc^2 - \frac{\pi ab}{c^2}\frac{c^4}{2} \\
&= \frac{\pi abc^2}{2}
\end{aligned}
$$

故 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy = \frac{\pi abc^2}{2}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

8

解. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1$, 收敛半径为 1, 又在 -1 与 1 处显然不收敛，故收敛区间为 $(-1,1)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

记在 $(-1,1)$ 内收敛到的函数为 $S(x)$, 只需求 $\frac{1}{x}S(x)$, 又

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{S(t)}{t}dt &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \\ &= \frac{x}{1-x}.\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

故 $\frac{S(x)}{x} = \frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{)1-x)^2}$，故 $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

四（本题 4 分）

证明. 不妨设 $\vec{l}$ 为单位向量，则 $\cos\theta(x,y) = \vec{n}\cdot\vec{l}$，若记 $\vec{n}(x,y) = (n_1(x,y), n_2(x,y))$，则 $(n_2(x,y), -n_1(x,y))$ 为 C 的光滑的单位切向量场，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$
不妨取 C 的方向为该切向量场所指的方向，则由第一型曲线积分与第二型曲线积分

之间的关系，有：

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{n}\cdot\vec{l}ds &= \oint_C (n_1l_1 + n_2l_2)ds \\ &= \oint_C (l_2, -l_1)\cdot(n_2, -n_1)ds \\ &= \oint_C l_2dx - l_1dy \\ &= \iint_D 0dxdy \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

2 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、单项选择题

1.B　2. A　3. C　4. B　5. A　6.C

评分标准说明：每题 4 分，错则扣全分。

二、填空题

1. $x-1=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$.　　2. $\frac{y}{1+x^2y^2}dx+\frac{x}{1+x^2y^2}dy$.

3. $\frac{16\pi}{3}$.　　4. -2π.

5. 7.　　6. $2\le x<4$或$[2,4)$

评分标准说明：每空 4 分，第 6 小题写成 $2<x<4$或$(2,4)$ **扣 2 分；其余小题错则**

扣全分。

三 、计算题（本题共 6 题，满分 36 分）

1.解：将 $z=1-2x$ 带入第一个方程 ------------ 1 分

得到 $5(x-\frac{2}{5})^2+y^2=\frac{4}{5}$ ------------ 2 分

引进参数 $\begin{cases} x=\frac{2}{5}(1+\cos t) \\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}\sin t \qquad t\in[0,2\pi]; \\ z=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\cos t \end{cases}$ ------------ 3 分

评分标准说明： t 的范围未给出扣 1 分。

2. **解**：方程两端同时对 y 求导可得

$\cos y+2z\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\cos y}{2(1-z)}$ ………… 2 分

方程两端同时对 x 求导可得

$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial x}=0$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{1-z}$ ………………2 分

上式再对 x 求导

$2+2(\frac{\partial z}{\partial x})^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{1-z}+\frac{x^2}{(1-z)^3}$ …………2 分

评分标准说明：该题还可以用微分形式不变性求导，结果正确满分；

3.解： 采用柱坐标

$\begin{cases} r^2\le z\le 2 \\ 0\le r\le\sqrt{2} \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$ ………………2 分

可得

原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{r^2}^{2}\frac{1}{1+r^2}dz=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{r(2-r^2)}{1+r^2}dr=3\pi\ln 3-2\pi$ ……4 分

评分标准说明：其他方法也可

4. 解：$P(x,y)=x^2y, Q(x,y)=\frac{1}{3}x^3$, 故 $\frac{\partial Q}{\partial x}=x^2=\frac{\partial P}{\partial y}$ …………2 分

则 $u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}du=(\int_{(0,0)}^{(x,0)}+\int_{(x,0)}^{(x,y)})x^2ydx+\frac{1}{3}x^3dy$ ……………………2 分

解得$u(x,y)=\frac{1}{3}x^3y.$ ……………………………………………………2 分

评分标准说明：第二步中起点不在(0,0)也可

5. 解：补充$\Sigma_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1,z=0\}$取下侧

可得$\iint_{\Sigma}=\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$ ……………………………………………………1 分

$\iint_{\Sigma_1}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=0$ ……………………………………………1 分

由高斯公式：$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}(x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy)=\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ …2 分

采用球坐标

$\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 3\rho^2\rho^2d\rho=\frac{6\pi}{5}$ ………………**2 分**

评分标准说明：出现高斯公式，最终结果错误，可给 2 分

6. 解：将$\mathrm{f}(x)$做奇周期延拓，计算傅里叶系数

$$\mathrm{b}_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+2)\sin nxdx=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\pi+4}{2k-1}, & n=2k-1\\ -\dfrac{1}{\kappa}, & n=2k\end{cases}$$ ………………**4 分**

得$\mathrm{x}+2=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{\pi}\frac{\pi+4}{2k-1}\sin(2k-1)x-\frac{1}{k}\sin 2kx),\ (0<x<\pi)$ ………………**2 分**

评分标准说明：最后一步未给出 x 的范围, 扣 1 分

四、综合题（本题 **8** 分）

解：

设$\mathrm{C}(x,y)$, 则$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(x-1,y-3)$ ……**1 分**

三角形面积为

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|3y+x-10|$$ ………………**2 分**

构造拉格朗日函数

$\mathrm{F}(x,y,\lambda)=(3y+x-10)^2+\lambda(x^2+y^2-1)$ ………………………………**1 分**

求导可得

$$\begin{cases} F_x = 2(3y+x-10)+2\lambda x = 0 \\ F_y = 6(3y+x-10)+2\lambda y = 0 \\ F_\lambda = x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$ ……………………………3 分

解得 $x=\frac{1}{\sqrt{10}}, y=\frac{3}{\sqrt{10}}$ ……………………………………1 分

评分标准说明：直接转化为无条件极值方法也可；

五、证明题（本题共两小题，满分 8 分）

1 证明：当 $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\alpha}{n}}{(\frac{\alpha}{n})^2}=\frac{1}{2}$ ……………………………………2 分

$\Sigma_{n=1}^{\infty}(\frac{\alpha}{n})^2$ 收敛，由比较判别法可知原级数绝对收敛。

2 证明：在球坐标与极坐标下可得

$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_1^t f(r^2)r^2dr=4\pi\int_1^t f(r^2)r^2dr$

$G(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^t f(r^2)rdr=2\pi\int_1^t f(r^2)rdr$ ……………………………2 分

$F'(t)-G'(t)=4\pi f(t^2)t^2-2\pi f(t^2)t>0$ 当 $t>1$ ……………………1 分

由 $F(1)=G(1)=0$ 可得结论………………………………………………1 分

评分标准说明：第 2 题，有极坐标或球坐标思想，可适当给分

3 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. A　2. C　3. B　4. C　5. B　6. D

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $\frac{x}{-R}=\frac{y-R}{0}=\frac{z-\frac{k}{2}\pi}{k}$;　2. $8\pi R^2$；3. 4π；　4. [4,6]；

5. $\frac{1}{\sqrt{13}}$;　6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(-\infty<x<\infty)$　.

三 、计算题

1、解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x+y}+(x^2+y^2)e^{x+y}=(x^2+2x+y^2)e^{x+y}$.　…………………（3 分）

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\mathrm{y}\mathrm{e}^{\mathrm{x}+\mathrm{y}} + (\mathrm{x}^2 + 2x + y^2)e^{x+y} = (\mathrm{x}^2 + 2x + 2y + y^2)e^{x+y}$. …………（7 分）

2、解：因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}}{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\left(-\frac{n}{n+1}\right)} = \frac{2}{\mathrm{e}} < 1,$$

所以，由比值审敛法，该级数收敛。 ……………………..（7 分）

3、解：曲面Σ的方程为$\Sigma: \mathrm{z} = \sqrt{9 - \mathrm{x}^2 - y^2}$，$(x, y) \in D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 8\}$。

$\because$ $\mathrm{z_x} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，$\mathrm{z_y} = \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，

$\therefore$ $\sqrt{1 + \mathrm{z_x^2} + z_y^2} = \frac{3}{\sqrt{9-\mathrm{x}^2-y^2}}$.

从而，$\mathrm{S} = \iint_D \sqrt{1 + \mathrm{z_x^2} + z_y^2}\, dxdy = \iint_D \frac{3}{\sqrt{9-\mathrm{x}^2-y^2}} dxdy$ ……………（4 分）

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{3}{\sqrt{9-r^2}} r dr = 12\pi$ ……………（7 分）

4、解：添加辅助面$\Sigma: z = 0, x^2 + y^2 \le a^2$，取下侧。记Ω 为曲面 S 和Σ所围成的空间区域，则由高斯公式，

$$\iint_{S\cup\Sigma} \mathrm{xdydz + ydzdx + zdxdy} = 3\iiint_{\Omega} dv = 3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3 = 2\pi a^3$$ ………（4 分）

而 $\iint_{\Sigma} \mathrm{xdydz + ydzdx + zdxdy} = 0$

所以， $\iint_{S} \mathrm{xdydz + ydzdx + zdxdy} = 2\pi a^3$ ………..（7 分）

5、解：令$P = 3x^2y + 8xy^2$，$Q = x^3 + 8x^2y + 12ye^y$。

因为

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = 3x^2 + 16xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$(3\mathrm{x}^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$是某个函数的全微分。 ……..（3 分）

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$$

$$= \int_0^y (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$$

$$= x^3y + 4x^2y^2 + 12(y-1)e^y + 12$$ ……….（7 分）

6、解：f(x)满足 Dirichlet 定理条件，傅里叶系数计算如下：

$$\mathrm{a_0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx == \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\mathrm{a_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx == \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \left[\frac{2}{n^2\pi} x\cos nx\right]_0^{\pi} = (-1)^n\frac{2}{n^2}, \mathrm{n} = 1,2,\cdots$$

$$\mathrm{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx == \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x^2\cos nx + \frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$= (-1)^{\mathrm{n}+1}\frac{\pi}{n} + \frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n - 1] \qquad n = 1,2,\cdots$$ ………（5 分）

所以，

$$f(x)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^n\frac{2}{n^2}\cos nx+\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}+\frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n-1]\right]\sin nx\}$$

$x\neq(2k+1)\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ ………（7 分）

四、证明题

1、证明：

$$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 dy\int_0^y f(x)f(y)dx=\int_0^1\left[f(y)\int_0^y f(x)dx\right]dy$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^y f(x)dx\right]d\left[\int_0^y f(x)dx\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^y f(x)dx\right]_0^1=\frac{A^2}{2}。$$ ………（5 分）

2、证明：由 Green 公式

左边 $=\iint_D e^{\sin y}+e^{-\sin x}dxdy$，右边 $=\iint_D e^{-\sin y}+e^{\sin x}dxdy$。

由二重积分的对称性，$\iint_D e^{\sin y}+e^{-\sin x}dxdy=\iint_D e^{-\sin y}+e^{\sin x}dxdy$。

从而，$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$。 ………（5 分）

4 浙江理工大学 2017—2018 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.B　2. B　3. B　4. B　5. C　6. A

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1　$2dx+dy$　　2　$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$　　3　$4x-2y-z-2=0$

4　6　　5　$(\frac{1}{2},+\infty)$　　6　$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{x}$

三 计算题。

1 解：$\overrightarrow{PQ}=(-1,1)$

$\vec{l}=\vec{e}_{\overrightarrow{PQ}}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=(\cos\alpha,\cos\beta)$

$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,-1)}=2x|_{(1,-1)}=2,\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,-1)}=-2y|_{(1,-1)}=2$

$\therefore\frac{\partial f}{\partial l}|_{(1,-1)}=\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,-1)}cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,-1)}cos\beta=2\times(-\frac{1}{\sqrt{2}})+2\times(\frac{1}{\sqrt{2}})=0.$

2 解：$\because f$具有二阶连续偏导数，　$\therefore\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'\cdot\sin x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial (f_2' \cdot \sin x)}{\partial x} = \cos x \cdot f_2' + \sin x \cdot \frac{\partial f_2'}{\partial x}$

$\frac{\partial f_2'}{\partial x} = f_{21}'' \cdot 1 + f_{22}'' \cdot ycosx = f_{12}'' + ycosx \cdot f_{22}''$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin x \cdot f_{12}'' + y \cdot sinx \cdot cosx \cdot f_{22}'' + cosx \cdot f_{22}'' + cosx \cdot f_2'$

3 解：

$\begin{cases} f_x' = 3x^2 - 6x = 0 \\ f_y' = 3y^2 - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, x = 2 \\ y = 0, y = 2 \end{cases}$，得驻点：$(0,0), (0,2), (2,0), (2,2)$

$$f_{xx}'' = 6x - 6, f_{xy}'' = 0, f_{yy}'' = 6y - 6$$

① $(0,0)$处：

$AC - B^2 = (-6) \times (-6) - 0 = 36 > 0$，有极值，$A = -6 < 0$，极大值，$f(0,0) = 0$，

② $(0,2)$处：

$AC - B^2 = (-6) \times 6 - 0 = -36 < 0$，无极值，

③ $(2,0)$处：

$AC - B^2 = 6 \times (-6) - 0 = -36 < 0$，无极值，

④ $(2,2)$处：

$AC - B^2 = 6 \times 6 - 0 = 36 > 0$，有极值，$A = 6 > 0$，极小值，$f(2,2) = -8$

4 解：

$$V = \iiint_\Omega 1\, dV = \iint_{D_{xy}} (6 - 2x^2 - y^2 - x^2 - 2y^2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\iint_{D_{xy}} (2 - x^2 - y^2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2)\rho \mathrm{d}\rho$$

$$= 6\pi$$

5 解：计上Σ_1：$z = 1, (x^2 + y^2 \le 1)$，取上侧

$$I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = I_1 - I_2$$

$I_1 = \iiint_\Omega (2x + 2z) dxdydz = 2\iiint_\Omega zdV = 2\int_0^1 z \cdot \pi \cdot z\ \ dz = \frac{2}{3}\pi$

$$I_2 = \iint_\Sigma (z^2 - x) dxdy = \iint_\Sigma (1 - x) dxdy = \iint_{D_{xy}} 1 dxdy = \pi$$

$$\therefore I = \frac{2}{3}\pi - \pi = -\frac{\pi}{3}$$

四 （本题满分 12 分）

（1）解：$f(x,y) = Ax^2 + Bxy - 1$

$$A=\oint_L (Ax^2+Bxy-1)ds=A\oint_L x^2ds-\oint_L ds=\frac{A}{2}\oint_L 1ds-\oint_L 1ds=\frac{A}{2}\cdot 2\pi-2\pi$$
$$=(A-2)\pi \implies A=\frac{2\pi}{\pi-1}$$
$$B=\iint_D (Ax^2+Bxy-1)d\sigma=\iint_D (Ax^2-1)d\sigma=A\cdot\frac{\pi}{4}-\pi=\frac{2\pi-\pi^2}{2(1-\pi)}$$
$$\therefore f(x,y)=\frac{2\pi}{\pi-1}x^2+\frac{2\pi-\pi^2}{2(1-\pi)}xy-1$$

（2）解：左$=$(格林公式) $\iint_D \left[\left(f+x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\left(f+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]d\sigma=\iint_D \left[\left(x\left(\frac{4\pi x}{\pi-1}+\frac{2\pi-\pi^2}{2(\pi-1)}\cdot y\right)\right)-y\cdot\left(\frac{2\pi-\pi^2}{2(\pi-1)}\cdot x\right)\right]d\sigma=\iint_D \frac{4\pi x^2}{\pi-1}d\sigma=\frac{4\pi}{\pi-1}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{\pi-1}$

右$=\frac{\pi}{2}\cdot A=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\pi}{\pi-1}=\frac{\pi^2}{\pi-1}$

左=右，证毕。

五 证明题（本题满分 4 分）

解：$\because \Sigma\frac{1}{n^2}$收敛，又$\Sigma a_n^2$收敛。

又$\because \left|\frac{a_n}{n}\right|\le a_n^2+\frac{1}{n^2}$

由比较审敛法，

$\therefore \sum\left|\frac{a_n}{n}\right|$收敛，即：$\sum\frac{a_n}{n}$绝对审敛。

5 浙江理工大学 2016—2017 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1. D　2. A　3. C　4. C　5. D　6. A

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1. -6　2. 0　3. 2

4. $\frac{1}{1+\ln\frac{z}{x}}$或$\frac{z}{y+z}$　5. 1　6. 2

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出文字说明及演算过程）

1.

把Ω投影到xOy面上得投影区域D_{xy}为由直线$x+2y=1$与两坐标轴围成的三角形 ....（2 分）

$\iiint_\Omega xdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}dy\int_0^{1-x-2y}xdz$ ....（4 分）

$=\frac{1}{48}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　........................（6 分）

2.

解：$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$　　　　　　　　　　　　　　　　　........................（2 分）

$\frac{1}{1+x^2}=1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+\ldots$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　........................（4 分）

$\mathrm{x}\in(-1,1)$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　........................（6 分）

3.

设L_1为单位圆位于第一象限的部分。

$\int_L |y|ds=2\int_{L_1}|y|ds=2\int_{L_1}yds$　　　　　　　　　　　　　........................（2 分）

设$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

则$ds=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}d\theta=d\theta$　　　　　　　　　　　　........................（4 分）

原式$=2\int_{L_1}yds$=$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\, d\theta=2$　　　　　　　　　　　........................（6 分）

4.

方法一：

把圆柱体表面分为三个部分：上半部分和侧面，　　　　　　　　........................（2 分）

分别则上下在xOy面上投影相同，侧面在xOy面上投影为零，　　　........................（4 分）

在上半部分的积分互为相反数，侧面的积分为 0，所以积分值为 0.　......................（6 分）

方法二：

设Ω为圆柱体闭域，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　........................（2 分）

由高斯公式：$\oiint_{\Sigma}(x-y)dxdy=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(x-y)}{\partial z}dv$　　　　　　　........................（4 分）

$=\iiint_{\Omega}0dv=0.$　　　　　　　　　　　........................（6 分）

5.

$\begin{cases}f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0\\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0\end{cases}$　　　　　　　　　　　　........................（2 分）

解得驻点为$(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$　　　　　　　　　　　　　........................（3 分）

再求二阶偏导数，

$f_{xx}(x,y)=6x+6, f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=-6y+6.$　　　　　　　　........................（4 分）

在点(1,0)处，$\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2=72>0$，且 $\mathrm{A}>0$，故(1,0)为极小值点。

类似地，$(-3,2)$为极大值点，$(1,2),(-3,0)$都不是极值点。 ....（6 分）

四、证明题（本题共 2 小题，第 1 题 4 分，第 2 题 6 分，满分 10 分，应写出详细证明和计算过程）

1.

令$a_n=\frac{n}{3^{n-1}}$,

则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1$， ....（2 分）

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{3^{n-1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$ 收敛， ....（3 分）

故原级数绝对收敛。 ....（4 分）

2.

令$P(x,y)=2xy-y^4+3$，$Q(x,y)=x^2-4xy^3$，

则$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以曲线积分与路径无关。 ....（2 分）

$\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$

$=\int_{(1,0)}^{(2,0)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy+\int_{(2,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$

$=\int_1^2 3dx+\int_0^1(4-8y^3)dy$ ....（4 分）

$=5$ ....（6 分）