浙江理工大学 2009 – 2010 学年 第二学期

《高等数学 B》期末试卷 (B) 卷标准答案和评分标准

一. 选择题（本题共 5 小题, 每小题 5 分，满分 25 分）

(1) B　(2) D　(3) B　(4) C　(5) D

二. 填空题（本题共 5 小题, 每小题 4 分，满分 20 分）

(1) $[-1,1)$　(2) $-x\ln(1-x)$　(3) $\frac{ye^{-xy}}{e^z-2}$

(4) $1-\sin 1$　(5) $(1+x)(1-y)=1$

三. 解答题（55 分）

(1) 由于绝对值, 把积分区域分成两部分 $D_1=\{(x,y)|0\le y\le x^2,-1\le x\le 1\}$,$D_2=\{(x,y)|x^2\le y\le 2,-1\le x\le 1\}$,$\cdots\cdots\cdots\cdots$(2分)

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D_1}|y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}|y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^2(y-x^2)\mathrm{d}y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5分)\\
&=-\int_{-1}^1\frac12(x^2-y)^2|_0^{x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^1\frac12(y-x^2)^2|_{x^2}^2\mathrm{d}x\\
&=\int_{-1}^1\frac12(x^2)^2\mathrm{d}x+\int_{-1}^1\frac12(2-x^2)^2\mathrm{d}x\\
&=\int_{-1}^1(2-2x^2+x^4)\mathrm{d}x\\
&=(2x-\frac23x^3+\frac15x^5)|_{-1}^1=\frac{46}{15}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8分)
\end{aligned}$$

(2) 由以上曲面所围成的形体在 oxy 平面的投影为 $x+y=1$ 及 x 轴、y 轴所围成的三角形, 因为 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$, 因此 $x+y\ge xy$. 所以所求体积的积分区域为 $D=\{(x,y)|0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$, 所求体积为

$$\begin{aligned}
V &= \iint\limits_D(x+y-xy)\mathrm{d}\sigma \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5分)\\
&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x+y-xy)\mathrm{d}y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7分)\\
&=\int_0^1[x(1-x)+\frac12(1-x)^3]\mathrm{d}x=\frac{7}{24} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8分)
\end{aligned}$$

(3)

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x}{n^x}=x\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^x},\cdots\cdots\cdots\cdots(2分)$$

当 $x>1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^x}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{x}{n^x}$ 收敛;$\cdots\cdots\cdots\cdots$(4分)

当 $x\le 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^x}$ 发散，只要 $x\ne 0$,$\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{x}{n^x}$ 发散;$\cdots\cdots\cdots\cdots$(6分)

当 $x=0$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{x}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}0$ 收敛. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (7分)

故 $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{x}{n^x}$ 的收敛域为 $x=0$ 及 $(1,+\infty)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (8分)

(4)

$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}, \cdots\cdots\cdots\cdots (2分)$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{x+1} &= \tfrac{1}{2+(x-1)}=\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\tfrac{x-1}{2})^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{(x-1)^n}{2^{n+1}}, x\in(-1,3), \cdots\cdots\cdots\cdots (5分)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{x+2} &= \tfrac{1}{3+(x-1)}=\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{1+\frac{x-1}{3}}=\tfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\tfrac{x-1}{3})^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{(x-1)^n}{3^{n+1}}, x\in(-2,4), \cdots\cdots\cdots\cdots (8分)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{(x-1)^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{(x-1)^n}{3^{n+1}}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\tfrac{1}{2^{n+1}}-\tfrac{1}{3^{n+1}})(x-1)^n, x\in(-3,3). \cdots\cdots\cdots\cdots (9分)\end{aligned}$$

(5) 对应的特征方程为

$$r^2-8r+16=0, \Longrightarrow\ r_1=r_2=4, \cdots\cdots\cdots\cdots (2分)$$

则对应的齐次方程的通解为 $\bar{y}(x)=(C_1+C_2x)e^{4x}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (4分)

因为 $\alpha=4$ 是特征方程的重根, 设方程的特解为 $y^*(x)=Ax^2e^{4x}$，则 $(y^*)'=2Ax(1+2x)e^{4x}, (y^*)''=2A(1+8x+8x^2)e^{4x}$，代入原方程得

$$2Ae^{4x}=e^{4x}, \Longrightarrow A=\frac{1}{2},$$

所以方程的一个特解为 $y^*(x)=\frac{1}{2}x^2e^{4x}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (7分).

方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x+e^{-3x}+\frac{1}{2}x^2)e^{4x}. \cdots\cdots\cdots\cdots (8分)$$

(6)

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial z}{\partial y} &= 2ye^{-\arctan\frac{y}{x}}+(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}(-\tfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\tfrac{1}{x})\\ &=e^{-\arctan\frac{y}{x}}(2y-x), \cdots\cdots\cdots\cdots (2分)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= 2xe^{-\arctan\frac{y}{x}} + (x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}(\tfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\tfrac{y}{x^2}) \\
&= e^{-\arctan\frac{y}{x}}(2x+y), \cdots\cdots\cdots\cdots (4分)
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{d}z = e^{-\arctan\frac{y}{x}}[(2x+y)\mathrm{d}x + (2y-x)\mathrm{d}y] \cdots\cdots\cdots\cdots (6分)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= e^{-\arctan\frac{y}{x}}((\tfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\tfrac{y}{x^2}) - 1) \\
&= \tfrac{y-x^2-y^2}{x^2+y^2}e^{-\arctan\frac{y}{x}} \cdots\cdots\cdots\cdots (8分)
\end{aligned}
$$

(7)

$$
\begin{aligned}
|u_{n+1}-u_n| &= |f(u_n)-f(u_{n-1})| \\
&= |f'(\xi_1)||u_n-u_{n-1}| \\
&\le q|u_n-u_{n-1}| && \cdots\cdots\cdots\cdots (2分) \\
&= q|f(u_{n-1})-f(u_{n-2})| \\
&= q|f'(\xi_2)||u_{n-1}-u_{n-2}| \\
&\le q^2|u_{n-1}-u_{n-2}| \\
&\le \cdots \le q^n|u_1-u_0| && \cdots\cdots\cdots\cdots (4分)
\end{aligned}
$$

其中 $\xi_1, \xi_2 \in [a,b]$, 又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛, 所以, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 绝对收敛. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (6分)