高等数学 A2

浙江理工大学期中试题汇编

（答案册）

学校：______________________

专业：______________________

班级：______________________

姓名：______________________

学号：______________________

目 录

1. 浙江理工大学2005-2006学年第二学期《高等数学A2》期中试卷

参考答案与评分标准

一、选择题（每小题4分共28分）

1. C　2. A　3. A　4. B　5. C　6. C　7. D

二、填空题（每小题4分共20分）

1.（0，0）　2．$x+2y-4=0$　3．2　4．$\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,d\sigma$　5．2π

三、（本题满分6分）

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot y+g'\cdot 2x$，　………………2分

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot(-2y)+f_2'\cdot x+g'\cdot 2y$，　……………………4分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'+4xyg''$。　……………6分

四、计算下列二重积分（每小题6分，满分12分）

1．$I=\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)dxdy+\iint\limits_{D_2}-\cos(x+y)dxdy$　………………..2分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dy$　……………4分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1+\cos x)dx=\pi-2$.　……………6分

2．$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\ln(1+r^2)dr$　……………………2分

$=\dfrac{\pi}{4}\int_0^1\ln(1+r^2)d(r^2+1)$　……………………4分

$=\dfrac{\pi}{2}\ln 2-\dfrac{\pi}{4}\int_0^1 2rdr=\dfrac{\pi}{2}\ln 2-\dfrac{\pi}{4}$.　…………………………6分

五、计算下列三重积分（每小题7分，满分14分）

1．$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\cdot zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_0^{2-\rho\sin\theta}\rho\cdot z\rho dz$　………………………4分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\dfrac{1}{2}\rho^2(2-\rho\sin\theta)^2d\rho$

$=\int_0^{2\pi}(\dfrac{16}{3}-8\sin\theta+\dfrac{16}{5}\sin\theta)d\theta$　…………..6分

$=\dfrac{208}{15}\pi$.　………………………..7分

2. Ω 关于 xoz 平面对称，y 关于 y 是奇函数，知 $\iiint\limits_{\Omega} ydv=0$，故

$$\iiint\limits_{\Omega}(y+z)dv=\iiint\limits_{\Omega} ydv+\iiint\limits_{\Omega} zdv=\iiint\limits_{\Omega} zdv \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{ 分}$$

$$=\frac{\pi}{8}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 7\text{ 分}$$

六、（本题满分 6 分）

$D:(x-1)^2+y^2\le 1$， $\cdots\cdots\cdots$2 分

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}d\sigma=\sqrt{2}\iint\limits_D d\sigma \qquad \cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$=\sqrt{2}\pi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{ 分}$$

七、（本题满分 8 分）

$$I=\oint_L e^x(1-\cos y)dx-e^x(y-\sin y)dy$$

$$=\oint_L e^x(1-\cos y)dx+e^x\sin ydy+\oint_L -e^x ydy \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$$=\oint_L -e^x ydy=-\int_{\overline{OA}}e^x ydy-\int_{\overline{AB}}e^x ydy-\int_{\overline{BO}}e^x ydy \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^x\sqrt{\sin x}d(\sqrt{\sin x})-\int_{\frac{\pi}{4}}^0 e^x\sqrt{\cos x}d(\sqrt{\cos x})-\int_1^0 ydy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^x\cos xdx+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^0 e^x\sin xdx-\int_1^0 ydy=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{\pi}{4}}. \qquad \cdots\cdots\cdots 8\text{ 分}$$

八、（本题满分 6 分）

因为 $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(y)}dy=\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}dxdy$ $\cdots\cdots\cdots$2 分

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b f(y)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dy=\iint\limits_D\frac{f(y)}{f(x)}dxdy \qquad \cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

所以 $2\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\iint\limits_D(\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)})dxdy\ge 2\iint\limits_D dxdy=2(b-a)^2$，

因此 $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\ge(b-a)^2$. $\cdots\cdots$6 分

2. 浙江理工大学 2006-2007 学年第二学期《高等数学 A2》期中试卷

一、1、$e^{\sin xy}\cdot\cos xy\cdot\left(ydx+xdy\right)$； 2、$2z$； 3、$2x+y-4=0$； 4、$-18\pi$

二、DBDBC

三、1、$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\left[f_{11}''\cdot 2y+f_{12}''\cdot x\right]+\left[f_{21}''\cdot 2y+f_{22}''\cdot x\right]y+f_2'$$

$$=4xyf_{11}''+2\left(x^2+y^2\right)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$$

2、由 $x^2+y^2+z^2-xyz=0$ 确定 $z=z\left(x,y\right)$，方程两边同时对 x,y 求偏导，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz-2x}{2z-xy},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz-2y}{2z-xy}$.

四、1、$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=\int_0^2 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^2 ye^{-y^2}dy=\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$.

2、$\iint\limits_D ydxdy=\int_{-2}^0 dx\int_0^2 ydy-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho=4-\dfrac{\pi}{2}$.

3、取半球体的对称轴为 z 轴，原点取在球心，又设球半径为 a，则半径体所占的空间闭区域：$\Omega=\left\{\left(x,y,z\right):x^2+y^2+z^2\le a^2,z\ge 0\right\}$，显然，质心在 z 轴上，故 $\overline{x}=\overline{y}=0$，$\overline{z}=\dfrac{1}{M}\iiint\limits_\Omega z\rho dv=\dfrac{1}{V}\iiint\limits_\Omega zdv=\dfrac{2}{3}\pi a^3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^3dr=\dfrac{3}{8}a$，故质心为$\left(0,0,\dfrac{3}{8}a\right)$。

五、设水箱的长、宽、高分别为 x,y,z，则表面积为 $S=xy+2\left(x+y\right)z$ 且 $xyz=a^3$，知 $S=xy+2a^3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right),x>0,y>0$，令$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial x}=y-\dfrac{2a^3}{x^2}=0\\ \dfrac{\partial S}{\partial y}=x-\dfrac{2a^3}{y^2}=0\end{cases}$，解得唯一驻点$\left(\sqrt[3]{2}a,\sqrt[3]{2}a\right)$。

根据问题的实际意义，$S\left(x,y\right)$的最小值一定在区域 D 的内部取到，而函数在 D 内只有唯一驻点，故 $x=y=\sqrt[3]{2}a$ 也为最小值点，从而 $x=y=\sqrt[3]{2}a\left(m\right),z=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}a\left(m\right)$时，表面积最小。

六、$P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}, Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-4x^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},(x,y)\neq(0,0)$，作足够小的椭圆 $C:\begin{cases} x=\dfrac{\delta}{2}\cos\theta \\ y=\delta\sin\theta \end{cases},\theta\in[0,2\pi]$，取逆时针方向。由格林公式 $\int_{L-C}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0$，即得

$$I=\int_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_C\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\delta^2}{\delta^2}d\theta=\pi$$

3. 浙江理工大学2009-2010学年第二学期《高等数学A2》期中试卷

一、选择题（每小题4分，共28分）

1.D　2.C　3.D　4.C　5.A　6.A　7.C

二、填空题（每小题4分，共20分）

1. $-e^{\cos xy}\sin xy\left(ydx+xdy\right)$　2. $(0,0)$　3. $3x+z-1=0$　4. $\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$　5. -4

三、计算题（每小题8分，共24分）

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'$　　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xyf_{11}''+2\left(x^2+y^2\right)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$

2. $I=\int_{-6}^{4}dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}\left(x+y\right)dx-\int_{-4}^{2}dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y}\left(x+y\right)dx=\dfrac{8156}{15}$

3. $$I=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2dz\iint_{D_{z_1}}dxdy+\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2dz\iint_{D_{z_2}}dxdy=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2\pi\left(2Rz-z^2\right)dz+\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2\pi\left(R^2-z^2\right)dz$$
$$=\frac{59}{480}\pi R^5$$

四、（9分）

添加辅助线L'：$y=0$，x从π到0

因为$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=\left[2y\sin\left(x+y^2\right)+3\right]-\left[2y\sin\left(x+y^2\right)+2\right]=1$

由格林公式，则原式

$$=\int_{L+L'}-\int_{L'}=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\int_\pi^0\cos xdx=-\iint_D dxdy-0=-\int_0^\pi\sin xdx=-2$$

五、（9 分）

设 $S':\begin{cases} z=h \\ x^2+y^2\le h^2\end{cases}$ 取上侧，运用高斯公式，

$$I=\iint_{S+S'}\left(y^2-z\right)dydz+\left(z^2-x\right)dzdx+\left(x^2-y\right)dxdy-\iint_{S'}\left(y^2-z\right)dydz+\left(z^2-x\right)dzdx+\left(x^2-y\right)dxdy$$

$$=\iiint_\Omega(0+0+0)dv-\left(\iint_{D_{xy}}\left(x^2-y\right)dxdy\right)=-\iint_{D_{xy}}x^2dxdy=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^h(\rho\cos\theta)^2\rho d\rho$$

$$=-\frac{\pi}{4}h^4$$

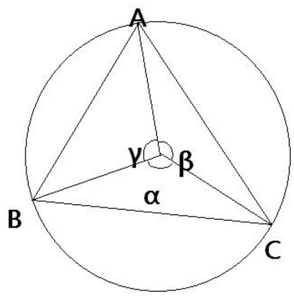
六、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\dfrac{x}{r}$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(r)\dfrac{y}{r}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\frac{y^2}{r^3}\right)+\left(f''(r)\frac{y^2}{r^2}+f'(r)\frac{x^2}{r^3}\right)=f''(r)+f'(r)\frac{1}{r}$$

$$\iint_{s^2+t^2\le x^2+y^2}\frac{1}{1+s^2+t^2}dsdt=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r\frac{1}{1+\rho^2}\rho d\rho=\pi\ln\left(1+r^2\right)$$

2.



$\alpha+\beta+\gamma=2\pi,0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$，半径为 R

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}R^2\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)$$

构造拉格朗日函数：$L(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=\dfrac{1}{2}R^2\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)+\lambda\left(\alpha+\beta+\gamma-2\pi\right)$

由 $\begin{cases} L'_\alpha=0 \\ L'_\beta=0 \\ L'_\gamma=0 \\ L'_\lambda=0\end{cases}$ 可得唯一驻点：$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{2}{3}\pi$，即为所求。

4. 浙江理工大学 2010-2011 学年第二学期《高等数学 A2》期中试卷

一、DBACCCD

二、1、$yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy$；2、$\frac{1}{2}$；3、$\frac{1}{3}$；4、-5；5、$\frac{\pi}{3}$

三、1、$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y^2,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6y$

2、$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{xz-z},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}(xz-x)-z\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)}{(xz-x)^2}=\frac{2z(z-1)-z^3}{x^2(z-1)^3}$

3、$\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\ln\left(1+\rho^2\right)\rho d\rho=\frac{\pi}{4}[2\ln 2-1]$

4、$\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf_1'+x^2f_2',\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4x^2y^2f_{11}''+4x^3yf_{12}''+x^4f_{22}''+2xf_1'$

5、$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\cdot\rho d\rho=\frac{32}{9}$

四、（1）因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，所以连续。

（2）$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，同理 $f_y'(0,0)=0$

$\Delta z=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，若可微，

$\Delta z=f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y+o(\rho)$，而

$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\rho}=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$不存在，所以不可微。

六、1、Q $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^{y}\ln x \Rightarrow \dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$

2 、 Q $z=f\left(\xi,\eta\right),\xi=x^{2}-y^{2},\eta=2xy$ ，

$\therefore \dfrac{\partial f}{\partial x}=2x\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+2y\dfrac{\partial f}{\partial \eta},\dfrac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}}=4x^{2}\dfrac{\partial^{2} f}{\partial \xi^{2}}+8xy\dfrac{\partial^{2} f}{\partial \xi\partial \eta}+4y^{2}\dfrac{\partial^{2} f}{\partial \eta^{2}}+2\dfrac{\partial f}{\partial \xi}$

同理 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+2x\dfrac{\partial f}{\partial \eta},\dfrac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}}=4y^{2}\dfrac{\partial^{2} f}{\partial \xi^{2}}-8xy\dfrac{\partial^{2} f}{\partial \xi\partial \eta}+4x^{2}\dfrac{\partial^{2} f}{\partial \eta^{2}}-2\dfrac{\partial f}{\partial \xi}$，所以 $\dfrac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}}+\dfrac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}}=0$

5. 浙江理工大学 2011-2012 学年第二学期《高等数学 A2》期中试卷

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1．B; 2．C； 3．A; 4．D; 5．B． 6. A.

二、填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1． $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$； **2**．-5； **3**． $\dfrac{1}{3};\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ **4**．$-2 or 3, 3 or -2$； **5**． $\int_{1}^{2}dy\int_{y}^{y^{2}}f(x,y)dx$； **6.**.$\dfrac{1}{3}$

三、计算题（本题共 5 小题，前 4 小题每题 6 分，第五题 12 分，满分 36 分）

1． $u_{x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$, ……(1 分), $u_{y}=\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, ……(2 分), $u_{z}=-\dfrac{y}{z^{2}}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, ……(3 分)

$du=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}dx+\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x dy-\dfrac{y}{z^{2}}x^{\frac{y}{z}}\ln x dz$. ……(6 分)

2. $z_{x}=2xf_{1}'+yf_{2}'+2xg'$ ………(2 分)

$z_{xy}=2x\left[f_{11}''(-2y)+f_{12}''x\right]+\left[f_{21}''(-2y)+f_{22}''x\right]y+f_{2}'+2xg''2y$ ………(4 分)

$=-4xyf_{11}''+2(x^{2}-y^{2})f_{12}''+xyf_{22}''+f_{2}'+4xyg''$ ………(6 分)

3. 在等式两边同时在 D 上取二重积分，即

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D}\sqrt{1-x^{2}-y^{2}}dxdy-\iint\limits_{D}\left(\frac{8}{\pi}\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy\right)dxdy \quad \cdots\cdots(3\text{ 分})$$

因此，$\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{9}$ ………（5 分）

所以，$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{8}{9\pi}-\frac{2}{3}$. ………(6 分)

4. 旋转曲面的方程为：$y^2+z^2=2x$，……(2 分)

$$\iiint_\Omega (y^2+z^2)dv=\int_0^8 dx\iint_D (y^2+z^2)d\sigma \quad \text{D: } y^2+z^2\le 2x，$$ ……(4 分)

$$=\int_0^8 dx\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{2x}} \rho^3 d\rho =336\pi$$ ……(6 分)

5. （1）消去 z 得 $2x^2+2y^2+x+y-2=0.$ …………………………(1 分)

故所求投影直线为 $\begin{cases}2x^2+2y^2+x+y-2=0\\ z=0\end{cases}$ ……………………（3 分）

（2）在 $(-1,-1,2)$ 处切向量为 $\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2x & 2y & -1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}_{(-1,-1,2)}=(-3,3,0)$ …………………（2 分）

则切线方程为：$\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{0}$ …………………（3 分）

法平面方程为：$x-y=0$ …………………（4 分）

（3）原点到 Γ 上任一点 (x,y,z) 的距离为: $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ …………………（1 分）

引入拉格朗日函数 $L=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+2z-2)$ ………（2 分）

解方程组 $\begin{cases}L_x=2x+2\lambda x+\mu=0\\ L_y=2y+2\lambda y+\mu=0\\ L_z=2z-\lambda+2\mu=0\\ x^2+y^2-z=0\\ x+y+2z-2=0\end{cases}$ …………………（3 分）

得 $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$ …………………（4 分）

代入目标函数，比较得最大值与最小值分别为 $\sqrt{6}$ 和 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………（5 分）

四、（本题满分 6 分）解：（1）点（0，0）连续。…………2 分

（2） $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta x)-f(0,0)}{\Delta y}=0$ ，…………4 分

但不可微。 …………6 分

五、（1）令 $F(x,y,z)=f(x-ay,z-by)$，则

$F'_x(x,y,z)=f'_1, F'_y(x,y,z)=-af'_1-bf'_2, F'_z(x,y,z)=f'_2$ ………………………2 分

由于 $aF'_x+F'_y+bF'_z=0$， 因此曲面的切平面恒与方向数为 $(l,m,n)=(a,1,b)$ 的直线相平行。……………………4 分

（2） $\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2=\iint\limits_D f(x)f(y)dxdy$ （D: $0\le x\le a, 0\le y\le a$） ………1 分

$=\iint\limits_{D_1} f(x)f(y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x)f(y)dxdy$ ………3 分

$=2\iint\limits_{D_1} f(x)f(y)dxdy$ …………4 分

(D_1: $0\le x\le a, x\le y\le a$, D_2: $0\le y\le a, y\le x\le a$)

6. 浙江理工大学 2012-2013 学年第二学期《高等数学 A2》期中试卷

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1．B;　2．B；　3．C;　4．D;　5．D;　6. A.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1．$2\sqrt{3}$；　　**2**．$\frac{1}{3};\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$；　　**3**．$z+xy$；　　**4**．$-\frac{1}{2}$；　　**5**．$2$；　**6.** $\frac{64}{3}\pi$.

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1．$du=f_x dx+f_z dz$ ……(2 分)，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \text{ ……(3 分)}，\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1-y\varphi'},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi}{1-y\varphi'} \text{ ……(5 分)}$$

$$du=\left(f_x+\frac{f_z}{1-y\varphi'}\right)dx+\frac{f_z\cdot\varphi'}{1-y\varphi'}dy \quad \text{……(6 分)}$$

2. $\frac{\partial z}{\partial y}=x^4\cdot f_1'+x^2\cdot f_2'$ ……(2 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=4x^3\cdot f_1'+2x\cdot f_2'+x^4\cdot y\cdot f_{11}''-y\cdot f_{22}'' \text{ ……(6 分)}$$

3. $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2\theta\rho d\rho d\theta=\frac{3}{64}\pi^2$ ……(6 分)

4. 在等式两边同时在 D 上取二重积分，即

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D xydxdy-\iint\limits_D\left(\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right)dxdy \quad \text{……(3 分)}$$

因此，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{8}$　　　　　　　　………（5 分）

所以，$f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$.　………(6 分)

5. 旋转曲面的方程为：$y^2+z^2=2x$，……(2 分)

$$\iiint\limits_\Omega(y^2+z^2)dv=\int_0^8 dx\iint\limits_D(y^2+z^2)d\sigma \quad \text{D: } y^2+z^2\le 2x \text{，……(4 分)}$$

$$=\int_0^8 dx\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2x}}\rho^3 d\rho=\frac{1024}{3}\pi \text{ ……(6 分)}$$

四、综合题（本题满分 8 分）

解：设切平面的切点为$\left(x_0,y_0,\frac{{x_0}^2+{y_0}^2}{2}\right)$……（1 分），则$\vec{n}=(x_0,y_0,-1)$……（2 分），有切平面方

程为：$x_0x+y_0y-z-\dfrac{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}{2}=0$；………（3 分）

曲线方程组两边关于 x 求导，有 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{5x^4-3x}{z+2}$， $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{6x+5x^4z}{2y+yz}$…（4 分）

于是有切向量 $\vec{T}=(1,1,2)$ ；……（5 分）

因为 $\vec{n}\cdot\vec{T}=0$，即 $x_0+y_0-2=0$………（6 分）

且 $(1,-1,-1)$ 位于切平面上，即 $x_0-y_0+1-\dfrac{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}{2}=0$，解得 $x_0=1,y_0=1$ 或 $x_0=3,y_0=-1$………（7 分）

因此所求切平面方程为：$x+y-z-1=0$ 或 $3x-y-z-5=0$………（8 分）

五、五、建模题（本题满分 7 分）

见书本 P117，例 9

六、证明题（本题共 2 小题，第 1 小题 4 分，第 2 小题 3 分，满分 7 分）

（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-a\dfrac{\partial z}{\partial u}+a\dfrac{\partial z}{\partial v}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$

$\Rightarrow a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$，因为 $a\neq 0$，所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$…………………（4 分）

（2）
$$\begin{aligned}\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2}f(y)dy&=\int_a^b dy\int_y^b (x-y)^{n-2}f(y)dx\\&=\frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)dy\end{aligned}$$
…………（3 分）

7. 浙江理工大学 2013-2014 学年第二学期《高等数学 A2》期中试卷

一、选择题　B A D B C C

二、填空题　1、$(\pm1,2,2)$　2、$(1,1,2)$　3、$\int_0^2 dy\int_{y/2}^{y} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

4、$4dx-2dy$ 　5、$f(x+t)-f(x-t)$ 　6、0

三、计算题

（1）解：设 $u=y-x, v=ye^x$， 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-f_u'+ye^x f_v'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-f_u'+ye^x f_v'\right)$$
$$=-f_{uu}''-e^x f_{uv}''+ye^x(f_{vu}''+e^x f_{vv}'')+e^x f_v'$$
$$=-f_{uu}''+e^x\left(y-1\right)f_{uv}''+ye^{2x}f_{vv}''+e^x f_v'$$

（2）解：方程两边对 x 变量求偏导，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$；对 y 变量求偏导，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{x}{z})=\frac{xz_y}{z^2}=-\frac{xy}{z^3}$，故 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1,1)}=-1$.

（3）解：函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 A（1，0，1）处可微，且

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}$； $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=0$；

$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}$

而 $\vec{l}=\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, 所以 $\vec{l}^{\circ}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, 故在 A 点沿 $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$ 方向导数为：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A\cdot\cos\gamma=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+0\cdot(-\frac{2}{3})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

（4）$D:\ 0\le\theta\le 2\pi\quad 0\le r\le 2$，

$\therefore\ \iint_D x^2dxdy=\iint_D r^3\cos^2\theta drd\theta=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^2 r^3dr=4\pi$

（5）$I\overset{\text{柱面坐标}}{=}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}dr\int_1^2 r^3dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{2}}^2 dr\int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^3dz=\frac{14}{3}\pi$

(6) 解： $I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1++x+y+z)^3}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}]dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4})dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$$

四、应用题

解：（1）z 在点 $M(x,y)$ 处梯度方向 gradz=$(-4x,-2y)$ 处增长率最大，最大增长率为

$\left|\text{grad } z\right|_{\text{M}}=2\sqrt{4x^2+y^2}$

（2）若记 $f(x,y)=4x^2+y^2$，则题意要求 $f(x,y)$ 在条件 $2x^2+y^2=1000$ 约束下的最大值，为此做拉格朗日函数

$$F(x,y)=4x^2+y^2+\lambda(2x^2+y^2-1000)$$

$$\begin{cases} F_x=8x+4\lambda x=0 \\ F_y=2y+2\lambda y=0 \\ 2x^2+y^2=1000 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=10\sqrt{10} \end{cases} \begin{cases} x_2=0 \\ y_2=-10\sqrt{10} \end{cases} \begin{cases} x_3=10\sqrt{5} \\ y_3=0 \end{cases} \begin{cases} x_4=-10\sqrt{5} \\ y_4=0 \end{cases}$$

$F(x_1,y_1)=F(x_2,y_2)=1000$，$F(x_3,y_3)=F(x_4,y_4)=2000$，故所求点为 $(\pm 10\sqrt{5},0)$

五、证明题

（1）$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot 1+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot 1=\frac{y-x}{x^2+y^2}=-\frac{v}{u^2+v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot 1+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot(-1)=\frac{y+x}{x^2+y^2}=\frac{u}{u^2+v^2}$$

所以，$\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{u-v}{u^2+v^2}$ 等式成立。

（2）证明：$\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy=\int_a^b dy\int_y^b f(y)dx=\int_a^b f(y)(b-y)dy=\int_a^b f(x)(b-x)dx$

8. 浙江理工大学 2015-2016 学年第二学期《高等数学 A2》期中试卷

2015~2016 学年第二学期《高等数学 A2》期中试题卷参考答案

一、选择题（本题共 **6** 小题，每小题 **4** 分，满分 **24** 分）

1．A;　　2．C；　　3．A;　　4．D;　　5．A;　　6.A

二、填空题（本题共 **5** 小题，每小题 **4** 分，满分 **20** 分）

2′

1. $x-3y+z+2=0$；　　2. ~~$\frac{x-2}{0}=\frac{y-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$~~；$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}$　　3. 51;

4. $\frac{\sqrt{6}}{2}(dx-dy)$；　　5. $\int^{2}dx\int_{0}^{1-x}2f(x,y)dy$　4′

三、解答题（本题共 **7** 小题，每小题 **6** 分，满分 **42** 分）

1.解　将直线 l 的方程改写成一般式：$\begin{cases}x-y-1=0,\\ y+z-1=0.\end{cases}$ 过 l 的平面束方程为

$$(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0,\text{即}x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$

由向量$(1,\lambda-1,\lambda)$与（1，-1,2）垂直得$\lambda=-2$.从而l_0的方程为

$$\begin{cases}x-3y-2z+1=0,\\ x-y+2z-1=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x=2y,\\ z=-\frac{1}{2}(y-1).\end{cases}$$

设l_0绕 y 轴旋转一周所得的曲面为 S，(x,y,z)为 S 上的任意一点，则改点由l_0上的一点(x_0,y_0,z_0)绕 y 轴旋而得，于是有关系：$y=y_0$,

$$x^2+z^2={x_0}^2+{z_0}^2=(2y_0)^2+[-\frac{1}{2}(y_0-1)]^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2,$$

从而得 S 的方程为$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

2.解　$u_x=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2},v_x=\frac{uy-xv}{x^2+y^2},u_y=\frac{xv-yu}{x^2+y^2},v_y=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$.（书 90 页例 3.）

3.解　切线方程：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$,

法平面方程：$(x-1)-(z-1)=0,\text{或}x-z=0$.（书 99 页例 5）

4.解　设$D_1=\{0\le x\le 1,0\le y\le x\},D_2=\{0\le x\le 1,x\le y\le 1\}$，则

$$\iint\limits_{D} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy = \iint\limits_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy + \iint\limits_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_1} e^{x^2}dxdy + \iint\limits_{D_2} e^{y^2}dxdy = \int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy + \int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx + \int_0^1 ye^{y^2}dy = e-1.$$

5.解 投影区域为$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$. 柱面坐标

$\Omega=\{\rho^2\le z\le\sqrt{2-\rho^2},0\le\rho\le 1,0\le\theta\le 2\pi\}$, 于是

$$\iiint\limits_{\Omega} zdv = \iiint\limits_{\Omega} z\rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}zdz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho^4)d\rho = \frac{7}{12}\pi.$$

6. 解 $z_x=z_u+z_v, z_y=-2z_u+az_v$, $z_{xx}=z_{uu}+2z_{uv}+z_{vv}, z_{yy}=4z_{uu}-4az_{uv}+a^2z_{vv}$,

$z_{xy}=-2z_{uu}+(a-2)z_{uv}+az_{vv}$. 将上述结果代入原方程，整理的

$$(10+5a)\,z_{uv}+(6+a-a^2)z_{vv}=0.$$

依题意a应满足：$,10+5a\ne 0,6+a-a^2=0$, 解得$a=3$.

四、应用题（本题 10 分）

解 记雪堆体积为 V, 侧面积为 S ，则

$$V=\int_0^{h(t)}dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\frac{\pi}{4}h^3(t), \text{其中} D_z: x^2+y^2\le\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z],$$

$$S=\iint\limits_{D_0}\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,dxdy=\iint\limits_{D_0}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,dxdy$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{13\pi}{12}h^2(t), \text{其中} D_0: x^2+y^2\le\frac{1}{2}h^2(t),$$

由题意知$\frac{dV}{dt}=-0.9S$, 从而$\begin{cases}\frac{dh}{dt}=-\frac{13}{10}\\ h(0)=130\end{cases}\Rightarrow h(t)=-\frac{13}{10}t+130$, 令$h(t)\to 0$, 得$t=100(h)$,

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需的时间为 100 小时.

五、证明题（本题共 2 小题，第 1 小题 4 分，第 2 小题 6 分，满分 10 分）

1. $\min\{f(x,y)\}\iint\limits_D g(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma \le \max\{f(x,y)\}\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$，

即 $\min\{f(x,y)\} \le \dfrac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)d\sigma} \le \max\{f(x,y)\}$

从而至少存在 (ξ,η)，使得 $f(\xi,\eta)=\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)d\sigma}$.

2.证明 （1）因 $|xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}|\le|\mathrm{xy}|$，所以 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}f(x,y)=0=f(0,0)$，从而 f(x,y)在（0,0）处连续.因为 f(x,0)=f(0,y)=0,所以 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

（1）当 $(x,y)\ne(0,0)$ 时，$f_x(x,y)=y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

当点 P（x,y）沿射线 $\mathrm{y}=|x|$ 趋于(0,0)时，

$$\lim_{(x,|x|)\to(0,0)}f_x(x,y)=\lim_{x\to 0}(|x|\sin\frac{1}{\sqrt{2}|x|}-\frac{|x|^3}{2\sqrt{2}|x|^3}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|})$$

极限不存在，所以 $f_x(x,y)$ 在点(0,0)处不连续.同样可得 $f_{\mathrm{y}}(x,y)$ 在点(0,0)处不连续.

（2）令 $\rho=\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}$，则

$$\left|\frac{\Delta\mathrm{f}-\mathrm{f_x}(x,y)\Delta x-\mathrm{f_y}(x,y)\Delta y}{\rho}\right|=\left|\frac{\Delta\mathrm{x}\Delta\mathrm{y}}{\rho}\sin\frac{1}{\rho}\right|\le|\Delta\mathrm{x}|\xrightarrow{\rho\to 0}0,$$

所以 f(x,y)在（0,0）处可微.

9. 浙江理工大学 2016-2017 学年第二学期《高等数学 A2》期中试卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设直线 L 为 $\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ $\vec{s}=-7(4,-2,1)$，平面 π 为 $4x-2y+z-2=0$，则（ C ）

(A) L 平行于 π　(B) L 在 π 上　(C) L 垂直于 π　D L 与 π 斜交

2. 下列说法正确的是（ C ）

(A) 两非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行的充要条件是存在唯一的实数 λ，使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$；

(B) 函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 在区域 D 内连续，则在该区域内两个二阶混合偏导数必相等；
混合

(C) 函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数在点 (x_0,y_0) 处连续是函数在该点可微的充分条件；

(D) 函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数在点 (x_0,y_0) 处存在是函数在该点可微的充分条件.
必要.

3. 对函数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$，点 $(0,3)$（ D ）

(A) 不是驻点　(B) 是驻点但非极值点　(C) 是极大值点　(D) 是极小值点

4. 将三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$，化为球面坐标下的三次积分为（ C ）

(A) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 dr$　(B) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r\,dr$

(C) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\, dr$　(D) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi\, dr$

5. 旋转抛物面 $z=x^2+2y^2-4$ 在点 $(1,-1,-1)$ 处的切平面方程为（ D ）

(A) $2x+4y-z=0$　(B) $2x-4y-z=4$

(C) $2x+4y-z=4$　(D) $2x-4y-z=7$

6. 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\, d\rho$ 可写成（ D ）

(A) $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$　(B) $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$　(D) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 已知函数 $z=e^{xy}$，则在(2,1)处处的全微分 $dz=$ e^2dx+2e^2dy；

2. 设直线 L 的方程为 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$，则 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=t+1 \\ z=3t+1 \end{cases}$；（答不唯一）

3. 设函数 $u=x^2+y^2+z^2$，O 为坐标原点，则函数 u 在点 $P(1,1,1)$ 沿 $\overrightarrow{OP}$ 方向的方向导数为 $\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$；

导数为 $\sqrt{3}$;

4. 函数 $u = xy^2z$ 在(1,-1,2)处增长最快的方向为 $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}}, \cos\beta=-\frac{4}{\sqrt{21}}, \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{21}}$; (grad u(1,-1,2) = (2, -4

5. 已知向量 a 位于第一卦限内，其方向余弦中 $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{2}{3}$, 且 $|a|=3$, 则 $a=$ (1, 2, 2) ;

6. 交换积分次序 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy =$ $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$ 。

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出演算过程及文字说明）

1. 设函数 $z=f\left(y-x,\ ye^x\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

$z\ (f_1\ f_2)$ — 1, 2 — x y x y

$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'\cdot(-1) + f_2'\cdot ye^x.$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -(f_{11}''\cdot 1 + f_{12}''\cdot e^x) + e^x\cdot f_2' + ye^x\cdot(f_{21}''\cdot 1 + f_{22}''\cdot e^x)$

$= -f_{11}'' + (y-1)e^x f_{12}'' + ye^{2x} f_{22}'' + e^x f_2'$

2. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$，利用极坐标求 $I=\iint\limits_D x^2dxdy$；

$I=\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma$

$\overset{极}{=}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 \rho^2\cdot\rho\, d\rho$

$=\pi\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2$

$=4\pi$

3. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积；

$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases} \Rightarrow 2x=x^2+y^2$ 即 $(x-1)^2+y^2=1$ 或 $\rho=2\cos\theta$. 围成 D_{xy}

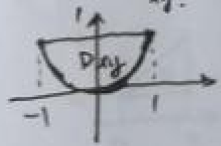
$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$

$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}\,dxdy=\sqrt{2}\cdot S_{D_{xy}}=\sqrt{2}\pi.$

4. 把积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ 化为三次积分，其中积分区域Ω是由曲面 $z=x^2+y^2$，
x

$y=x^2$ 及平面 $y=1, z=0$ 所围成的区域；

D_{xy}. F



$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\int_{0}^{x^2+y^2}f(x,y,z)\,dz.$$

5. 设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

即 $\dfrac{x}{z}=\ln z-\ln y$. 令 $F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\ln z+\ln y$.

$F_x=\dfrac{1}{z}$. $F_y=\dfrac{1}{y}$. $F_z=-\dfrac{x}{z^2}-\dfrac{1}{z}$.

$\therefore \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{\frac{1}{z}}{\frac{x}{z^2}+\frac{1}{z}}=\dfrac{z}{x+z}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{\frac{1}{y}}{\frac{x}{z^2}+\frac{1}{z}}=\dfrac{z^2}{xy+yz}$

四、综合题（第1、2题分别为7分，第3、4题分别为4分，满分为22分）

1. 试求曲面 $x^2+y^2=2z$ 的切平面，使之经过曲线 $\begin{cases}3x^2+y^2+z^2=5,\\2x^2+y^2-4z=7\end{cases}$ 在点 $(1,-1,-1)$ 处的切线。 法方程 → 切向

设切点 $\left(x_0, y_0, \dfrac{x_0^2+y_0^2}{2}\right)$ 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-2z$.

$F_x=2x$. $F_y=2y$ $F_z=-2$. 则 $\vec{n}=(x_0, y_0, -1)$ ①

$\begin{cases}6x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0.\\4x+2y\dfrac{dy}{dx}-4\dfrac{dz}{dx}=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=4\\\dfrac{dz}{dx}=-1\end{cases}\Rightarrow \vec{T}=(1.4.-1)$ ②

$\because \vec{n}\cdot\vec{T}=0.$

$\therefore x_0=-1-4y_0.$ ③

$x_0^2+y_0^2$

表示以原题：$\vec{n}=(x_0, y_0, -1)$，$\vec{T}=(1, 1, 2)$，

由 $\vec{n}\perp\vec{T}$ 且切平面过 $(1,-1,-1)$ 点 得 $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0=3 \\ y_0=-1 \end{cases}$

∴切平面方程为：$x+y-z-1=0$

或 $3x-y-z-5=0$

又∵切平面方程：$x_0\cdot(x-x_0)+y_0\cdot(y-y_0)-(z-\frac{x_0^2+y_0^2}{2})=0$，过 $(1,-1,-1)$

∴ $x_0-x_0^2-y_0-y_0^2+1+\frac{x_0^2+y_0^2}{2}=0$。 ④

③④ 解得 $\begin{cases} x_0=3 \\ y_0=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0=-\frac{13}{17} \\ y_0=-\frac{1}{17} \end{cases}$

∴切平面方程为：$3x-y-z-5=0$

或 $13x+y+17z+5=0$

2. 建模题

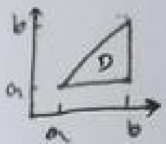
设某电视机厂生产一台电视机的成本为 c，每台电视机的销售价格为 p，销售量为 x。假设该厂的生产处于平衡状态，即电视机的生产量等于销售量。根据市场预测，销售量 x 与销售价格 p 之间有下面的关系：$x=Me^{-ap}$ $(M>0,a>0)$，其中 M 为市场最大需求量，a 是价格系数。同时，生产部门根据对生产环节的分析，对每台电视机的生产成本 c 有如下测算：$c=c_0-k\ln x$ $(k>0,x>1)$，其中 c_0 是只生产一台电视机时的成本，k 是规模系数。根据上述条件，应如何确定电视机的售价 p，才能使该厂获得最大利润？

利润 $R=px-cx=(p-c_0+k\ln x)x=[(1-ak)p+k\ln M-c_0]\cdot M\cdot e^{-ap}$

令 $\frac{dR}{dp}=(1-ak)M\cdot e^{-ap}-aM((1-ak)p+k\ln M-c_0)\cdot e^{-ap}=0$

得 $p=\frac{aMk\ln M+aMk-M-aMc_0}{aM(1-ak)}$ 唯一驻点，即为所求。

3. 设 $f(x)$ 连续，证明 $\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy=\int_a^b f(x)(b-x)dx$；



左 交换积分次序 $\int_a^b dy\int_y^b f(y)dx$

$=\int_a^b f(y)(b-y)dy$

$=\int_a^b f(x)(b-x)dx$

4.证明曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a。

任取曲面上一点 (x_0, y_0, z_0).

令 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$.

$F_x=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$F_y=\frac{1}{2\sqrt{y}}$. $F_z=\frac{1}{2\sqrt{z}}$.

$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{x_0}},\frac{1}{\sqrt{y_0}},\frac{1}{\sqrt{z_0}}\right)$.

切平面：$\frac{1}{\sqrt{x_0}}\cdot(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}\cdot(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}\cdot(z-z_0)=0$.

即 $\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}-\sqrt{a}=0$.

x轴上截距：$p=\sqrt{ax_0}$，y轴上截距：$q=\sqrt{ay_0}$，z轴上截距：$r=\sqrt{az_0}$.

$p+q+r=\sqrt{a}\cdot(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$.

10.浙江理工大学 2017-2018 学年第二学期《高等数学 A2》期中试卷

本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

承诺人签名：__________ 学号：____________ 班级：____________ 座位号：_____

题号	一	二	三					四	五	总分	复核教师签名
			1	2	3	4	5				
得分											
阅卷教师签名											

（本试卷共四页）

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

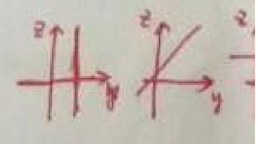
$r^2+4=0$ $r=\pm 2i$ $\lambda=0, \omega=2$ $k=1$

1. 微分方程 $y''+4y=\cos 2x$ 的一个特解具有形式（ D ）

（A）$a\cos 2x$　　（B）$a\cos 2x+b\sin 2x$

（C）$ax\cos 2x$　　（D）$x(a\cos 2x+b\sin 2x)$

2. 在 yOz 平面内的一条直线绕 z 轴旋转一周所得曲面的图形不可能是（ A ）



（A）旋转单叶双曲面　（B）圆柱面　（C）圆锥面　（D）平面

$f_x=2x+y-3$　$f_y=x+2y-6$　$A=2,\ B=1,\ C=2,\ AC-B^2=3>0$

3. 对函数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$，点 $(0,3)$（ C ）

×（A）不是驻点　（B）是驻点但非极值点　（C）是极小值点　（D）是极大值点

4. 在下列命题中，不正确的是（ C ）

√（A）若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，$\Rightarrow$ 则它在该点连续；

√（B）若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，$\Rightarrow$ 则它在该点沿任何方向的方向导数存在；

×（C）若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，$\Leftarrow$ 则它在该点的偏导数连续；

√（D）若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微 $\Rightarrow$ 这曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切平面存在。

$\vec{n}=(f_x,f_y,-1)$

5. 设 D 是由曲线 $y=x^2-1, y=\sqrt{1-x^2}$ 所围成的平面区域，则 $\iint\limits_D (axy+by^2)dxdy$ 的（ C ）

左右对称

（A）值等于 0　　（B）符号与 a 有关，与 b 无关

（C）符号与 a 无关，与 b 有关　　（D）符号与 a，b 都有关

1

6. 设Ω是由球面$x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$所围成的闭区域，则三重积分

$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV$ 的值为（ B ）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^{R} r^2\cdot r^2 dr = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{R^5}{5}$

(A) $\frac{4}{3}\pi R^5$ (B) $\frac{4}{5}\pi R^5$ (C) $\frac{2}{5}\pi R^5$ (D) 0

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.点 P(1,-2,3)关于 x 轴的对称点 Q 的坐标为 $(1,\ 2,\ -3)$；

2. 函数$z=x^4+\frac{y^2}{2}$在点 A(1，-3) 处其函数值增加最快的单位方向向量为 $(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$；

$z_x=4x^3,\ z_y=y$ $\text{grad}z(1,-3)=(4,-3)$ $e_{\text{grad}z}=(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$

3. 设$y=e^x(C_1+C_2x)(C_1,C_2$为任意常数$)$是某二阶常系数齐次线性微分方程的通解，则该方程为 $y''-2y'+y=0$；

$r_1=r_2=1 \Rightarrow r^2-2r+1=0 \Rightarrow y''-2y'+y=0$

4. 如果直线$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$与直线$L_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$相交，那么常数$\lambda$的值为 $\frac{5}{4}$；

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,0)-(1,-1,1)=(-2,2,-1)$

$\begin{vmatrix}1&2&\lambda\\1&1&1\\-2&2&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -3-2+\lambda\cdot 4=0 \Rightarrow \lambda=\frac{5}{4}$

5. 已知$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=\sqrt{2}$,且$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$,则$|\vec{a}\times\vec{b}|=$ 2 ；

$=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\Rightarrow \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2$

6. 设$D:-1\le x\le 1,0\le y\le 2$,则$\iint\limits_{D}x^2ydxdy=$ $4/3$.

$=2\int_0^1x^2dx\int_0^2ydy=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{2}=\frac{4}{3}$

三、计算题（本题共 5 小题，每题 8 分，满分 40 分）

1. 求微分方程$y''+2y'-3y=e^{-3x}$的通解.

解：(1) 先求对应齐次方程通解.

ch.E. $r^2+2r-3=0$

$(r+3)(r-1)=0$

$r_1=-3,\ r_2=1$

$\therefore Y(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^{x}$

(2) 再求非齐次方程的特解.

$\because \lambda=-3,\ m=0.\ \therefore k=1$

设特解形式为，$y^*(x)=axe^{-3x}$

$y^{*\prime}(x)=ae^{-3x}-3axe^{-3x}=(a-3ax)e^{-3x}$

$y^{*\prime\prime}(x)=-3ae^{-3x}-3(a-3ax)e^{-3x}=(-6a+9ax)e^{-3x}$

代入原方程

$-6a+9ax+2a-6ax-3ax=1\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$

$\therefore y^*(x)=-\frac{1}{4}xe^{-3x}$

$\therefore$原方程通解为 $y(x)=Y(x)+y^*(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^{x}-\frac{1}{4}xe^{-3x}$

2. 已知在球面$x^2+y^2+z^2=14$上点 P 处的切平面与平面$x-2y+3z=0$平行，求点 P 的坐标及该平面的方程.

解：设点P为(x_0,y_0,z_0)

$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$

$F_x=2x\quad F_y=2y\quad F_z=2z$

$\therefore$切向量$\vec{n}=(x_0,y_0,z_0)$

又$\because \vec{n}\,//\,(1,-2,3)$

$\therefore \left.\begin{array}{l}\frac{x_0}{1}=\frac{y_0}{-2}=\frac{z_0}{3}\\ 且x_0^2+y_0^2+z_0^2=14\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x_0=1\\y_0=-2\\z_0=3\end{cases}$ or $\begin{cases}x_0=-1\\y_0=2\\z_0=-3\end{cases}$

① $\therefore P_1(1,-2,3),\ \vec{n}=(1,-2,3)$

得$\Pi_{切1}$：$1\cdot(x-1)-2(y+2)+3\cdot(z-3)=0$

即 $x-2y+3z-14=0$

② $P_2(-1,2,-3),\ \vec{n}=(1,-2,3)$

得$\Pi_{切2}$：$1\cdot(x+1)-2(y-2)+3\cdot(z+3)=0$

即 $x-2y+3z+14=0$.

隐函数的求导

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0$ 所确定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：法一：方程两边同时关于x求偏导，把z看作x的函数，y看作常数。

$2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$

同理可得：$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{2-z}$

法二：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$

F
x y z

$F_x=2x,\ F_y=2y,\ F_z=2z-4$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{2-z}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{y}{2-z}$

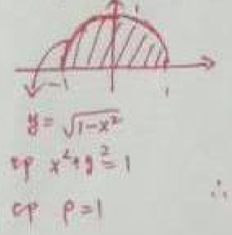
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{x}{2-z}\right)}{\partial y}$

$=\frac{0-x\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(2-z)^2}$

$=\frac{xy}{(2-z)^3}$

4.计算二次积分 $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\ln(x^2+y^2+1)dy$.

解：选用极坐标（∵ $\ln(x^2+y^2+1)$ 无论先对x，还是y积分都不好积）



$y=\sqrt{1-x^2}$

即 $x^2+y^2=1$

即 $\rho=1$

① $\ln(x^2+y^2+1)=\ln(\rho^2+1)$

② $dxdy=\rho d\rho d\theta$

③ D: $\begin{cases}0\le\theta\le\pi\\0\le\rho\le1\end{cases}$

$\therefore I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\ln(\rho^2+1)\rho\, d\rho$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\ln(\rho^2+1)\,d(\rho^2+1)$

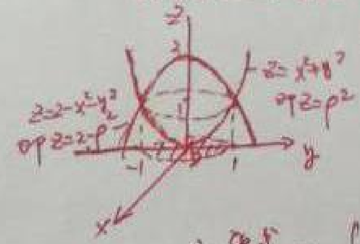
$=\frac{\pi}{2}\cdot\left[(\rho^2+1)\cdot\ln(\rho^2+1)\Big|_0^1-\int_0^1 1\,d(\rho^2+1)\right]$

$=\frac{\pi}{2}(2\ln2-1)$

5. 求 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dV$ 其中 Ω 是 xoz 平面上两条曲线 $z=x^2$ 与 $z=2-x^2$ 绕 z 轴旋转而成的闭区域.

解：$z=x^2 \xrightarrow{\text{绕z轴}} z=x^2+y^2$

$z=2-x^2 \xrightarrow{\text{绕z轴}} z=2-x^2-y^2$ $\Big\}\xRightarrow{\text{x=y相}}$ 投影区域：$x^2+y^2\le1$



选用柱面坐标法（$\sqrt{x^2+y^2}=\rho$，$dV=\rho d\rho d\theta dz$）

① 投影，得 $D_{\rho\theta}$：$\rho\le1$ 即 $\begin{cases}0\le\theta\le2\pi\\0\le\rho\le1\end{cases}$

② ↑：得 z 从 $z=\rho^2$ 进，从 $z=2-\rho^2$ 出

$\therefore\ \rho^2\le z\le2-\rho^2$

$\therefore$ 原式 $=\iint\limits_{D_{\rho\theta}}\left(\int_{\rho^2}^{2-\rho^2}\rho\,dz\right)\rho d\rho d\theta$

$=\iint\limits_{D_{\rho\theta}}\rho^2\cdot(2-\rho^2-\rho^2)\,d\rho d\theta$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(2\rho^2-2\rho^4)\,d\rho$

$=2\pi\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)=\frac{8}{15}\pi$

四、应用题（本题满分 6 分）

形状为椭球：$4x^2+y^2+4z^2=16$ 的空间探测器进入地球大气层，其表面开始受热，1 小时后在探测器表面点(x,y,z)的温度为

$$T(x,y,z)=8x^2+4yz-16z+600,$$

求探测器表面温度最高的点和温度最低的点。

解：设 $L(x,y,z,\lambda)=8x^2+4yz-16z+600+\lambda(4x^2+y^2+4z^2-16)$

令
$$\begin{cases} L_x=16x+8x\lambda=0 \Rightarrow ①\ x=0 \text{ or } ②\ \lambda=-2 \\ L_y=4z+2\lambda y=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-2z}{y} \\ L_z=4y-16+8\lambda z=0 \Rightarrow \lambda=\frac{4-y}{2z} \\ L_\lambda=4x^2+y^2+4z^2-16=0 \end{cases}$$
$\Rightarrow -\frac{2z}{y}=\frac{4-y}{2z} \Rightarrow 4z^2=y^2-4y$

① $x=0$，$4z^2=y^2-4y$ 代入 $4x^2+y^2+4z^2-16=0 \Rightarrow y^2-2y-8=0 \Rightarrow$ a. $y=4$，b. $y=-2$

$\Rightarrow$ a. $z=0$，b. $z=\pm\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ 驻点：$(0,4,0)$，$(0,-2,\sqrt{3})$，$(0,-2,-\sqrt{3})$

② $\lambda=-2 \Rightarrow z=y$，$y-4-4z=0 \Rightarrow y=-\frac{4}{3}$，$z=-\frac{4}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{4}{3} \Rightarrow$ 驻点：$(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$ $(+\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$

$T_1(0,4,0)=600$

min $T_2(0,-2,\sqrt{3})=600-24\sqrt{3}$ $T_4(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})=614.2$

max $T_3(0,-2,-\sqrt{3})=600+24\sqrt{3}$ $T_5(+\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})=614.2$

五、证明题（本题满分 6 分）

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\frac{x}{z}=\varphi(\frac{y}{z})$ 所确定，其中 $\varphi(u)$ 具有二阶连续导数.试证明：

(1) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$;

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})^2$.

(1) 设 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\varphi(\frac{y}{z})$

$F_x=\frac{1}{z}$，$F_y=-\varphi'\cdot\frac{1}{z}$，$F_z=-\frac{x}{z^2}+\varphi'\cdot\frac{y}{z^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2}+\varphi'\cdot\frac{y}{z^2}}=\frac{z}{\varphi' y-x}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-\varphi'\cdot\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2}+\varphi'\cdot\frac{y}{z^2}}=\frac{z\varphi'}{y\varphi'-x}$

$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

(2) 在(1)两边同时关于x求偏导：

$\cancel{\frac{\partial z}{\partial x}}+x\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\cancel{\frac{\partial z}{\partial x}}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ①

在(1)两边同时关于y求偏导：

$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\cancel{\frac{\partial z}{\partial y}}+y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\cancel{\frac{\partial z}{\partial y}}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ②

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(-\frac{y}{x})\cdot(-\frac{x}{y})\cdot(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})^2$

$=(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})^2$

11.浙江理工大学2018-2019学年第二学期《高等数学A2》期中试卷

一、选择题

1.A 2.A 3.D 4.B 5.C

二、填空题

1、(1, 2, 3)

2、 $4f''_{11}+\frac{4}{y}f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22}$

3、(1, 1, 2)

4、(1, 1, 1)

5、 $dz=(y+\frac{1}{y})dx+(x-\frac{x}{y^2})dy$

三、计算题

1、解 由题意知过 L_1 上的点 $(1,2,3)$ （1 分）

L_1 的方向向量为 $\vec{s}_1=(1,0,-1)$，L_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=(2,1,1)$，设平面 π 的法向量为 $\vec{n}$，则 $\vec{n}\perp\vec{s}_1$，$\vec{n}\perp\vec{s}_2$ 垂直 （3 分）

故可取

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1,-3,1) \quad （6 分）$$

于是平面 π 的方程为 $x-3y+z+2=0$ （8 分）

2、解：$\begin{cases}y^2-u_xv-uv_x=0\\ 2x-u_x+v_x=0\end{cases}$， （3 分）

$$u_x=\frac{y^2+2xu}{u+v}；\ v_x=\frac{y^2-2xv}{u+v}； \quad （3 分）$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=e^{u+v}\frac{2[x(u-v)+y^2]}{u+v}。\qquad（2 分）$$

3、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{1-e^{xy}}(\sqrt{2-e^{xy}}+1)=-1\cdot 2=-2$　　（8 分）

4、解：　由题意，作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(xy+yz+xz-6),\qquad（3 分）$$

解方程组

$$\begin{cases} yz+\lambda(y+z)=0,\\ xz+\lambda(x+z)=0,\\ xy+\lambda(y+x)=0,\end{cases}\qquad（3 分）$$

得 $x=y=z=\sqrt{2}$，这是唯一可能的极值点.因由问题本身可知最大值一定存在，所以最大值就在这个可能的极值点处取得，f 的最大值为 $V=2\sqrt{2}$.　　（2 分）

5、

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot \mathrm{e}^x\sin y+f_2'\cdot 2x$　　（3 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y\cdot f_1'+\mathrm{e}^x\sin y(f_{11}''\cdot \mathrm{e}^x\cos y+f_{12}''\cdot 2y)+2x(f_{21}''\cdot \mathrm{e}^x\cos y+f_{22}''\cdot 2y)$$

$$=f_{11}''\cdot \mathrm{e}^{2x}\sin y\cos y+2f_{12}''\cdot \mathrm{e}^x(y\sin y+x\cos y)+4f_{22}''\cdot xy+f_1'\cdot \mathrm{e}^x\cos y\qquad（8 分）$$

6、解 $x^2+y^2=2y\Rightarrow r=2\sin\theta$　　（2 分）

$x^2+y^2=4y\Rightarrow r=4\sin\theta$　　（2 分）

$y-\sqrt{3}x=0\Rightarrow \theta_2=\dfrac{\pi}{3}$

$x-\sqrt{3}y=0\Rightarrow \theta_1=\dfrac{\pi}{6}$　　（2 分）

$\therefore \iint_D(x^2+y^2)dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\cdot rdr=15(\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{3})$　　（2 分）

四、证明题

1、证 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x[y+F(u)+xF'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}]+y[x+xF'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}]$

=x[y+F(u)-$\dfrac{y}{x}$F'(u)]+y[x+F'(u)]

=xy+xF(u)+xy=z+xy

2、证 设 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$，则曲面在点（$x,y,z$）处的一个法向量

$$\vec{n}=(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}})$$

在曲面上任取一点 $M(x_0,y_0,z_0)$，则曲面在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$$

即 $\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$

化为截距式得

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1$$

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a$$