第五章　留数及其应用

单元小结

数学与统计学院
易媛

教学基本要求

1. 理解孤立奇点的分类.

2. 掌握留数概念、掌握极点处留数的求法.

3. 掌握留数定理.

4. 掌握用留数求围道积分的方法，会用留数计算一些实积分.

内容框架

孤立奇点

- 可去奇点
- 极点 ⟷ 函数的零点与极点的关系
- 本性奇点

留数

- 计算方法
- 留数定理

→ 计算 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$

零点的分布

留数在定积分计算中的应用

1. $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{imx}\mathrm{d}x$

例1： 计算下列函数奇点处的留数

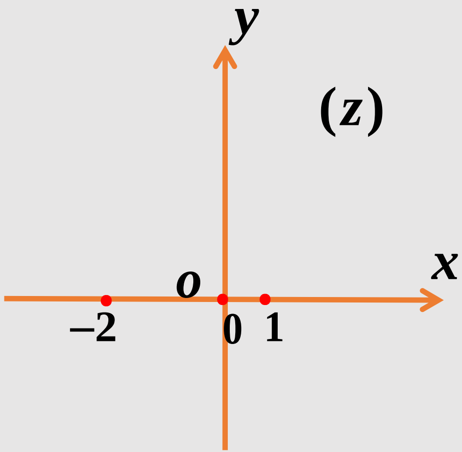
1) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+2z}$; 2) $f(z)=\dfrac{z^4}{(z-1)^3}$.

解：

1) $\operatorname{Res}[\dfrac{z+1}{z^2+2z},0]=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z+1}{z+2}=\dfrac{1}{2}$

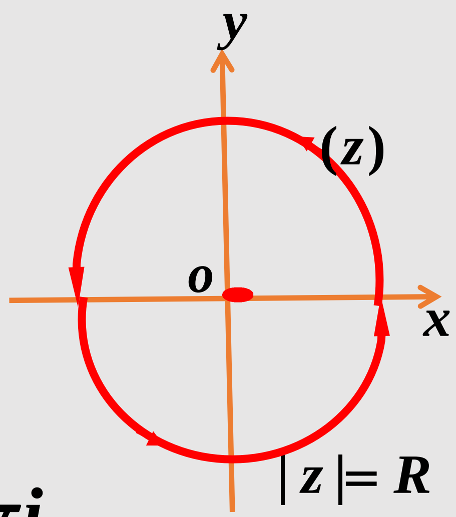
$\operatorname{Res}[\dfrac{z+1}{z^2+2z},-2]=\lim\limits_{z\to -2}\dfrac{z+1}{z}=\dfrac{1}{2}$

2) $\operatorname{Res}[\dfrac{z^4}{(z-1)^3},1]=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{1}{2}(z^4)''=6$



例2：计算下列积分

$$1)\ \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz; \qquad 2)\ \oint_{|z|=1} \frac{1-\cos z}{z^5} dz.$$



解：

$$1)\ \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}[\frac{\sin z}{z}, 0] = 0$$

$$2)\ \oint_{|z|=1} \frac{1-\cos z}{z^5} dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}[\frac{1-\cos z}{z^5}, 0] = -\frac{\pi i}{12}$$

$$\mathrm{Res}[\frac{1-\cos z}{z^5}, 0] = \frac{1}{4!}(1-\cos z)^{(4)}\Big|_{z=0} = \frac{-1}{4!}$$

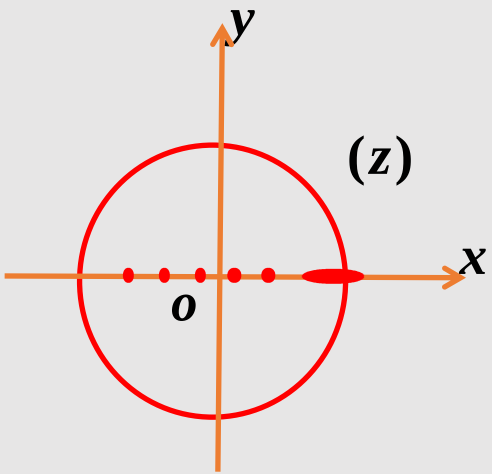
例3： 计算下列积分 1) $\oint\limits_{|z|=3} \tan\pi z\mathrm{d}z$; 2) $\oint\limits_{|z|=3} \sin\dfrac{1}{1-z}\mathrm{d}z$

解： 1) $\mathrm{Res}[\tan\pi z, \pm\dfrac{2k+1}{2}] = \left.\dfrac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\right|_{z=\pm\frac{2k+1}{2}} = \dfrac{-1}{\pi}$

$$\oint\limits_{|z|=3} \tan\pi z\mathrm{d}z = 2\pi i \times 6 \times (\frac{-1}{\pi}) = -12i$$

2) $\sin\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{-1}{z-1} + \dfrac{1}{3!(z-1)^3} - \cdots,$

$$\oint\limits_{|z|=3} \sin\frac{1}{1-z}\mathrm{d}z = -2\pi i$$



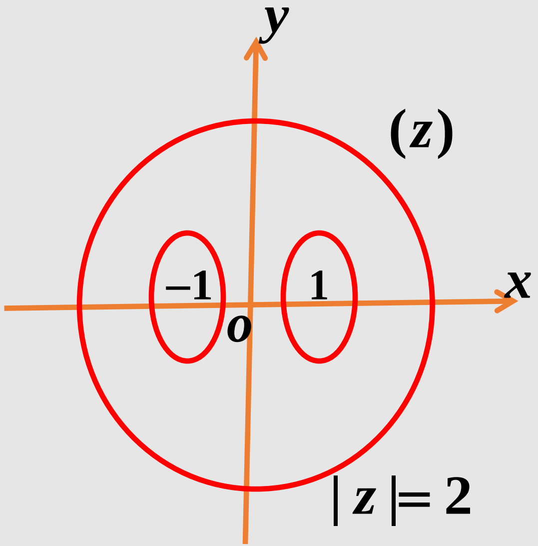
例4： 计算积分 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{ze^z}{z^2-1}\mathrm{d}z$

解：

$$\mathrm{Res}\left[\frac{ze^z}{z^2-1},-1\right]=\left.\frac{e^z}{2}\right|_{z=-1}=\frac{1}{2e}$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{ze^z}{z^2-1},1\right]=\left.\frac{e^z}{2}\right|_{z=1}=\frac{e}{2}$$

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{ze^z}{z^2-1}\mathrm{d}z=2\pi i\left[\frac{1}{2e}+\frac{e}{2}\right]$$



例5： 计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^3}\mathrm{d}z$，其中 $C: z = 2\cos t + i4\sin t$,

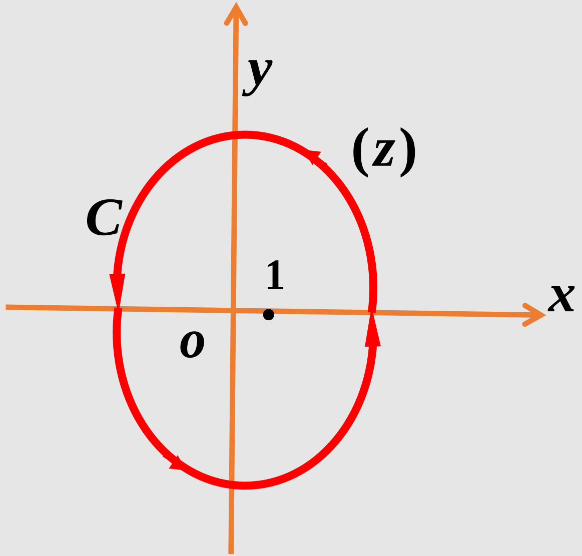
$0 \le t \le 2\pi$

解：

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^3}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{(z-1)^3}, 1\right]$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1}\frac{(e^z)''}{2} = \pi e i$$



例6： 计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$，其中 C 是 $|z|=2$ 的正向.

解1：

$$\oint_C f dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f,1)+\mathrm{Res}(f,-1)+\mathrm{Res}(f,i]+\mathrm{Res}[f,-i)]$$

$$= 2\pi i\sum_{k=1}^{4}\frac{z}{(z^4-1)'}\bigg|_{z=z_k} = 2\pi i\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{4z_k{}^2} = 0.$$

解2：

$$\oint_C f(z)dz = -2\pi i[\mathrm{Res}[f,\infty]$$

$$= 2\pi i[\mathrm{Res}[f(\frac{1}{t})\frac{1}{t^2},0] = 2\pi i[\mathrm{Res}[\frac{t}{1-t^4},0] = 0$$

例7： 计算积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$.

解：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ze^{2zi}}{z^2+2z+5}\mathrm{d}z=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{2zi}}{z^2+2z+5},-1+2i\right]$$

$$=2\pi i\left.\frac{ze^{2zi}}{2z+2}\right|_{z=-1+2i}=\frac{\pi i(-1+2i)e^{2i(-1+2i)}}{2i}$$

$$=\frac{\pi(-1+2i)(\cos 2+i\sin 2)}{2e^4}$$

$$I=\frac{\pi(2\cos 2-\sin 2)}{2e^4}$$