2020 级高等数学 I, II(上)复习资料

试卷结构

高等数学 I (上)试卷结构：

(1) 填空题、选择题各 4 个，每题 3 分，共 24 分；

(2) 解答题 5 个，共 59 分；

(2) 证明题 2 个，共 17 分.

高等数学 II (上)试卷结构：

(1) 填空题 5 个，选择题 3 个，每题 3 分，共 24 分；

(2) 解答题 5 个，共 59 分；

(2) 证明题 2 个，共 17 分.

第 1 章　函数、极限与连续 (I,II)

考点 1——无穷小的比较

例 1.1 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t,\ \beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t,\ \gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是(　　).

(A) α,β,γ　　(B) α,γ,β　　(C) β,α,γ　　(D) β,γ,α

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x^2}{kx^{k-1}}\overset{k=1}{=\!=}1$， $\alpha\sim x$；

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\beta}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x\cdot 2x}{kx^{k-1}}=\frac{2}{k}\lim_{x\to 0^+}x^{3-k}\overset{k=3}{=\!=}\frac{2}{3}，\quad \beta=O(x^3)；$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{kx^{k-1}}=\frac{1}{2k}\lim_{x\to 0^+}x^{2-k}\overset{k=2}{=\!=}\frac{1}{4}，\quad \gamma=O(x^2).$$

从而，按要求排列的顺序为 α,γ,β.

例 1.2 设 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^x$ 与 ax^n 是等价无穷小，求 a 和 n.

解 由题意，设 $x\to 0$ 时，$1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^x}{ax^n}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x\dfrac{\mathrm{e}^{\tan x-x}-1}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{anx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{anx^{n-1}}=\frac{1}{an}\lim_{x\to 0}x^{3-n}，$$

故 $n=3,a=\dfrac{1}{3}$.

练习 1.3 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $\mathrm{e}^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

考点 2——极限的计算(含洛必达法则)

例 1.4 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{\ln(1+x)(1-\cos\sqrt{x})}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{\ln(1+x)(1-\cos\sqrt{x})}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[1+(\cos 2x-1)]^{\frac{1}{2}}-1}{x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos 2x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=2$.

例 1.5 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\overset{1-x=t}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}t\tan\left[\dfrac{\pi}{2}(1-t)\right]=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\frac{\pi}{2}t}=\dfrac{2}{\pi}$.

例 1.6 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}\cdot\dfrac{\tan x+x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}=\frac{2}{3}.$$

例 1.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}=-\dfrac{1}{6}$.

例 1.8 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}\right)^{x^3}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}e^{-x^3\ln(1-\cos x)}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{x^{-3}}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{-3x^{-4}(1-\cos x)}}=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot x^4}{x^2/2}}=1$.

练习 1.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{\sin^2 x}}{x^4}$.

考点 3——极限存在准则

例 1.10 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解 因为

$$\frac{1}{2}\leftarrow\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}<\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}\to\frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 1.11 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

解 因为和 $\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ 共有 $2n+2$ 项，所以 $\dfrac{2n+2}{n+1}<\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}<\dfrac{2n+2}{n}$.

又 $\dfrac{2n+2}{n+1}\to 2,\ \dfrac{2n+2}{n}\to 2$，故原极限 $=2$.

例 1.12 设 $0<x_1<3$，且 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\ (n=1,2,\cdots)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

解 由 $0<x_1<3$ 知，x_1 和 $3-x_1$ 均为正数，故 $0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\dfrac{x_1+(3-x_1)}{2}=\dfrac{3}{2}$.

设 $0<x_k\leqslant\dfrac{3}{2}\ (k>1)$，则 $0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\dfrac{x_k+(3-x_k)}{2}=\dfrac{3}{2}$. 由归纳法，$0<x_n\leqslant\dfrac{3}{2}$.

又 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})=\dfrac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant 0$，即 $\{x_n\}$ 单增.

从而，数列 $\{x_n\}$ 有极限. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，在 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限，得 $a=\sqrt{a(3-a)}$，解得 $a=\dfrac{3}{2},0$ (舍去)，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$.

考点 4——间断点

例 1.13 求下列函数的间断点，并确定它们的类型：

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|\ln|x-1|}$；(2) $f(x)=\dfrac{(e^{1/x}+e)\tan x}{x(e^{1/x}-e)}$，$x\in[-\pi,\pi]$；(3) $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1-xe^{tx}}{x+e^{tx}}$.

解 (1) 因为 $f(x)$ 在 $x=0,1,2$ 处无定义，所以 $x=0,1,2$ 为 $f(x)$ 的间断点.

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\ln(1-x)}=-1,\quad f(0-0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{-\ln(1-x)}=1,$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{\ln|1-x|}=0$，故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类可去间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{\ln(x-1)}=\infty$，故 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第二类无穷间断点.

(2) $f(x)$ 的间断点显然为 $x=0,1,\pm\dfrac{\pi}{2}$.

$$x\to0^-,\frac{1}{x}\to-\infty,e^{\frac{1}{x}}\to0;\quad x\to0^+,\frac{1}{x}\to+\infty,e^{\frac{1}{x}}\to+\infty,$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{(e^{1/x}+e)\tan x}{x(e^{1/x}-e)}=-1,$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(e^{1/x}+e)\tan x}{x(e^{1/x}-e)}=\lim_{x\to0^+}\frac{1+e^{1-1/x}}{1-e^{1-1/x}}=1,$$

故 $x=0$ 是第一类跳跃间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(e^{1/x}+e)\tan x}{x(e^{1/x}-e)}=\infty$，故 $x=1$ 是第二类无穷间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to\pm\pi/2}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\pi/2}\dfrac{(e^{1/x}+e)\tan x}{x(e^{1/x}-e)}=\infty$，故 $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 为第二类无穷间断点.

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},x<0,\\ 1,\ \ x=0,\\ -x,x>0.\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$，故 $x=0$ 是第二类无穷间断点.

练习 1.14 求 $f(x)=e^{\frac{x}{\tan x}}$ 的间断点及类型.

考点 5——连续的概念与连续函数的性质

例 1.15 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______.

解 $a=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

例 1.16 设 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left[xf(x)\right]}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$_____.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left[xf(x)\right]}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\left[xf(x)\right]^2}{x^2f(x)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，所以有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$.
又 $f(x)$ 连续，故 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$.

例 1.17 设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，$f(0)=f(2a)$，证明：在 $[0,a]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

证 令 $F(x)=f(x+a)-f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $F(0)=f(a)-f(0)$，$F(a)=f(2a)-f(a)=f(0)-f(a)$.

若 $F(0)=0$ 或 $F(a)=0$，则 $\xi=0$ 或 a，得证. 否则，$F(0)$ 与 $F(a)$ 异号，由零点定理，有 $\xi\in(0,a)$，使 $F(\xi)=0$. 从而，在 $[0,a]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

例 1.18 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)=0,\ f(1)=1$. 证明：

(1) 存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=1-2c$；

(2) 存在 $\xi\in[0,2]$，使得 $2f(0)+f(1)+3f(2)=6f(\xi)$.

证 (1) 令 $F(x)=f(x)+2x-1$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-1,\ F(1)=2$.
根据零点定理，存在 $c\in(0,1)$，使得 $F(c)=0$，即 $f(c)=1-2c$.

(2) 因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有最大值 M 和最小值 m. 从而

$$m\leqslant f(0), f(1), f(2)\leqslant M,\quad 6m\leqslant 2f(0)+f(1)+3f(2)\leqslant 6M,$$

$$m\leqslant \frac{2f(0)+f(1)+3f(2)}{6}\leqslant M.$$

由介值定理，存在 $\xi\in[0,2]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{2f(0)+f(1)+3f(2)}{6}$，即 $2f(0)+f(1)+3f(2)=6f(\xi)$.

第 2 章　一元函数微分学 (I,II)

考点 1——导数的定义与可导性

例 2.1 (1) 设 $f'(a)$ 存在，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$；

(2) 若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ 存在，问 $f(x)$ 在 $x=a$ 处是否可导？

解 (1)
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot 2+\frac{f[a+(-h)]-f(a)}{(-h)}\right\}\\&=2\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f[a+(-h)]-f(a)}{(-h)}\\&=2f'(a)+f'(a)=3f'(a).\end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ 存在， $f(x)$ 在 $x=a$ 处不一定可导.

例如，对 $f(x)=\begin{cases}x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $a=0$，有 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}=3$. 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处显然不连续，更不可导.

可见，极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ 与 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的可导性及导数值没有必然联系.

例 2.2 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

解 因为 $x=0$ 为 $f(x)$ 的分段点，所以需用定义讨论可导性.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}.$$

由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=0$，得 $f'_-(0)=0$；由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=1$，得 $f'_+(0)=1$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

例 2.3 设 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x\leqslant 1,\\ x^3, & x>1\end{cases}$ 可导，求 a,b.

解 本题要求根据连续、可导的条件确定函数中的参数，属常见的典型问题.

当 $x\neq 1$ 时， $f(x)$ 为初等函数，既连续又可导.

当 $x=1$ 时，

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b,\ f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}x^3=1.$$

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，所以连续，故有 $f(1-0)=f(1+0)=f(1)$，即 $a+b=1$.

又 $$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(ax+b)-1}{x-1}\overset{a+b=1}{=\!=\!=}\lim_{x\to 1^-}\frac{ax-a}{x-1}=a,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x^2+x+1)=3.$$

由题意， $f'_-(1)=f'_+(1)$，得 $a=3$，从而 $b=-2$.

综上，当 $a=3,\ b=-2$ 时， $f(x)$ 可导.

考点 2——隐函数求导

例 2.4 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 所确定，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$____________.

解 两边求导， $\mathrm{e}^{2x+y}(2+y')+\sin(xy)(y+xy')=0$.

当 $x=0$ 时， $y=1$，代入上式得 $y'(0)=-2$，故 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=-2\mathrm{d}x$.

例 2.5 设 $y=y(x)$ 由 $x-\int_1^{y+x}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=0$ 所确定，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$____________.

解 两边求导，$1-\mathrm{e}^{-(y+x)^2}(y'+1)=0,\ y'=\mathrm{e}^{(y+x)^2}-1$.

当 $x=0$ 时， $y=1$，代入上式得 $y'=\mathrm{e}-1$，故 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=(\mathrm{e}-1)\mathrm{d}x$.

例 2.6 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+\mathrm{e}^y=x+1$ 确定的隐函数，计算 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}$.

解 在 $xy+e^y=x+1$ 两边关于 x 求导，得 $y+xy'+e^y y'=1$.

再求导，得 $y'+y'+xy''+e^y y''+e^y y'^2=0$.

当 $x=0$ 时， $y=0, y'=1$. 代入前式得 $1+1+y''+1=0$，故 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=-3$.

例 2.7 证明曲线弧 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(x\geqslant 0, y\geqslant 0, a>0)$ 上各点的切线界于两坐标轴之间的长度恒为一常数.

证 设切点为 (x_0,y_0)，两边求导得 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$，斜率为 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}$，切线方程为

$$y-y_0=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x-x_0).$$

切线在坐标轴上的截距为 $X=x_0+\sqrt[3]{x_0y_0^2}=x_0^{1/3}a^{2/3}$, $Y=y_0+\sqrt[3]{x_0^2y_0}=y_0^{1/3}a^{2/3}$，故切线界于两坐标轴之间的长度为

$$\sqrt{X^2+Y^2}=a^{2/3}\sqrt{x_0^{2/3}+y_0^{2/3}}=a^{2/3}\cdot a^{1/3}=a.$$

考点 3——参数方程求导

例 2.8 设 $\begin{cases}x=te^t,\\ e^{ty}=y+t^2+1,\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 本题中，因为 x 是 t 的显函数，而 y 是 t 的隐函数，所以要首先用隐函数求导法求出 $\dfrac{dy}{dt}$，然后再代入参数方程求导公式.

在 $e^{ty}=y+t^2+1$ 两边关于 t 求导，得 $e^{ty}\left(y+t\dfrac{dy}{dt}\right)=\dfrac{dy}{dt}+2t$， $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t-ye^{ty}}{te^{ty}-1}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{2t-ye^{ty}}{te^{ty}-1}}{(t+1)e^t}=\frac{2t-ye^{ty}}{(t+1)e^t(te^{ty}-1)}.$$

例 2.9 设(1) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\ln(1+e^{2t}),\\ y=t-\arctan e^t,\end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy'/dt}{dx/dt}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{4t}$.

(2) $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{1-\frac{e^t}{1+e^{2t}}}{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}=\frac{1+e^{2t}-e^t}{2e^{2t}}=\frac{1}{2}(e^{-2t}+1-e^{-t}),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{1}{2}(-2e^{-2t}+e^{-t})}{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}=\frac{(e^t-2)(e^{2t}+1)}{4e^{4t}}.$$

例 2.10 在 $t=2$ 处曲线 $\begin{cases}x=t^3-4,\\ y=2t^2+1\end{cases}$ 对应点的切线方程是(　　).

(A) $2x-3y-19=0$　　(B) $2x-3y+19=0$

(C) $3x-2y-6=0$　　(D) $3x+2y-6=0$

解 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}=\left.\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}\right|_{t=2}=\left.\dfrac{4t}{3t^2}\right|_{t=2}=\dfrac{2}{3},\ y-9=\dfrac{2}{3}(x-4),\ 2x-3y+19=0$.

例 2.11 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是(　　).

(A) $\dfrac{1}{8}\ln 2+3$　　(B) $-\dfrac{1}{8}\ln 2+3$　　(C) $-8\ln 2+3$　　(D) $8\ln 2+3$

解 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}\right|_{t=1}=\dfrac{1}{8}$，法线方程为 $y-\ln 2=-8(x-3)$.

令 $y=0$，得法线与 x 轴交点的横坐标为 $\dfrac{1}{8}\ln 2+3$.

第 3 章　中值定理与导数应用 (I,II)

考点 1——中值定理

例 3.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)-3f(\xi)=0$.

证 令 $F(x)=\mathrm{e}^{-3x}f(x)$ 时，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)\ =0$.

由罗尔定理，有 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=\mathrm{e}^{-3\xi}f'(\xi)-3\mathrm{e}^{-3\xi}f(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-3f(\xi)=0.$$

例 3.2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=1$. 证明：

(1) 存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=\dfrac{1}{3}$；(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{2}{f'(\eta)}=3$.

证 (1) 令 $F(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-\dfrac{1}{3},\ F(1)=\dfrac{2}{3}$，故有 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=\dfrac{1}{3}$.

(2) 在 $(0,c),(c,1)$ 上分别应用拉格朗日定理，

$$\frac{f(c)-f(0)}{c}=f'(\xi),\ \frac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(\eta).$$

$$\frac{c}{f(c)-f(0)}=3c=\frac{1}{f'(\xi)},\ \frac{1-c}{f(1)-f(c)}=\frac{3(1-c)}{2}=\frac{1}{f'(\eta)},$$

故 $\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{2}{f'(\eta)}=3$.

例 3.3 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=1$. 证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(2) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

证 (1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)\in C[a,b]$，且 $F(0)=-1,F(1)=1$，由零点定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 在 $[0,\xi]$, $[\xi,1]$ 上应用 Lagrange 中值定理，存在不同的点 $\eta\in(0,\xi),\zeta\in(\xi,1)$，使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0},\ f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi},$$

故 $f'(\eta)f'(\zeta)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}\cdot\dfrac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{1-\xi}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{1-\xi}=1$.

考点 2——不等式证明

例 3.4 $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$，$\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

证 令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\dfrac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0$，$f(x)$ 单减，故当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}$，即 $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$.

或 令 $f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$，$f'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}$，唯一驻点 $x_0=\arccos\dfrac{2}{\pi}$.

当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)>f(0)=0$；当 $x_0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)>f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，从而当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>0$，即 $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$.

例 3.5 证明：$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$.

证 令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

因为 $f'(0)=0$，且当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点，也是最小值点，最小值为 $f(0)=0$，故 $f(x)\geqslant0$，即 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$.

例 3.6 证明：当 $x>0$ 时，$\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$.

证 令 $f(x)=\arctan x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{2}$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}<0$，即 $f(x)$ 单减.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\arctan x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，故 $f(x)>0$，即 $\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$.

考点 3——极值、最值、凹凸性、拐点、渐近线

例 3.7 设 $f(x)$ 一阶导数连续，且 $f(0)=0,\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)+f(x)}{x}=2$，判断 $x=0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)+f(x)}{x}$ 存在，所以 $\lim\limits_{x\to0}[f'(x)+f(x)]=0$.

由 $f'(x),f(x)$ 连续性得 $f'(0)+f(0)=0$，故 $f'(0)=0$.

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)+f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}+\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right]=f''(0)+f'(0)=2$，得 $f''(0)=2$.

根据第 2 判别法，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

例 3.8 设 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. (1) 求 $f(x)$ 的单调区间与极值；(2) 求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间与拐点；(3) 求曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

解 $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-1}$，函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

由 $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0$ 得 $x_1=0\ x_2=2$；$f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+		–	–		+
y''	–		–	+		+
y	单增凸	极大	单降凸	单降凹	极小	单增凹

(1) 单增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$；单减区间为 $(0,1)$,和 $(1,2)$.

极大值点为 $x=0$，极大值为 $f(0)=-2$；极小值点为 $x=2$，极小值为 $f(2)=2$.

(2) 凹区间为 $(1,+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,1)$，没有拐点.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$，所以函数没有水平渐近线，有垂直渐近线 $x=1$.

由 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x(x-1)}\right]=1,\ b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x-1}\right)=-1$，得函数的斜渐近线 $y=x-1$.

练习 3.9 求函数 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 的单调区间、极值、凹凸区间、拐点、渐近线. 在此基础上，做出该函数曲线的图形.

例 3.10 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 渐近线的条数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

解

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=\infty,\ \lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=0；$$

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\ln(1+\mathrm{e}^{-x})-x\right]=0,$$

所以曲线有垂直渐近线 $x=0$，水平渐近线 $y=0$，斜渐近线 $y=x$.

例 3.11 曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

解

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{3/2}}{x\sqrt{x}}=1；$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3/2}-1\right]}{\sqrt{x}}=\frac{3}{2},$$

故斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{3}{2}$.

例 3.12 设 $0<a<1$，证明：方程 $\arctan x=ax$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个实根.

解 令 $f(x)=\arctan x-ax$，由 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-a=0$，得 $x_0=\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$.

因为 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单增，在 $(x_0,+\infty)$ 内单减，而 $f(0)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，所以在 $(0,x_0)$ 内

$f(x)>0$. 根据零点定理， $f(x)$ 有唯一零点在 $(x_0,+\infty)$ 内.

第 4 章　一元函数积分学 (I,II)

考点 1——变上限积分及其导数

例 4.1 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的任一个原函数，则必有(　　).

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数　　(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数　　(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

解 由相关结论易知(A)正确，(B)错误.

C,D 也均不正确，反例分别为 $f(x)=\cos x+1, F(x)=\sin x+x$； $f(x)=3x^2, F(x)=x^3$.

例 4.2 曲线 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u, \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

解 点 $(0,0)$ 对应 $t=1$.

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\left.\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=\left.\frac{2t\ln(2-t^2)-t^2\cdot\dfrac{2t}{2-t^2}}{\mathrm{e}^{-(1-t)^2}\cdot(-1)}\right|_{t=1}=2,$$

故所求切线方程为 $y=2x$.

例 4.3 设 $f(x)$ 具有一阶导数， $F(x)=x\int_0^{\frac{1}{x}}f(t)\mathrm{d}t\ (x\neq 0)$，求 $F''(x)$.

解
$$F'(x)=\int_0^{\frac{1}{x}}f(t)\mathrm{d}t+xf\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\int_0^{\frac{1}{x}}f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$F''(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\left(-\frac{1}{x^2}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

例 4.4 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=1-\cos x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

解 因为 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t\overset{x-t=u}{=\!=\!=}\int_0^x(x-u)f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$，所以

$$x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u=1-\cos x.$$

两边求导，得 $\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)=\sin x$，即 $\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\sin x$，故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=1$.

例 4.5 设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

解 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\overset{x-t=u}{=\!=\!=}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf(\xi_1)}{xf(\xi_2)+xf(x)}=\lim_{x,\xi_i\to 0}\frac{f(\xi_1)}{f(\xi_2)+f(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

或 $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}}{\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}+f(x)}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0),$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

考点 2——换元积分法

3. 换元积分法

例 4.6 $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

解 原式 $=2\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}\sqrt{x}=2\int\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\arcsin\sqrt{x}=\arcsin^2\sqrt{x}+C$.

练习 4.7 $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

例 4.8 $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2 x+\cos^2 x}$.

解 原式 $=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+1}=\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2 x+\sec^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{2\tan^2 x+1}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\tan x)}{(\sqrt{2}\tan x)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C.$$

例 4.9 $\int_0^1\frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 原式 $\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{2-\sin^2 t}\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\cos t}{1+\cos^2 t}=-\arctan(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

练习 4.10 $\int\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

例 4.11 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解 原式 $\xlongequal{x=\tan t}\int\frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{(2\tan^2 t+1)\sec t}=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{1+\sin^2 t}=\arctan(\sin t)+C=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C.$$

例 4.12 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解 原式 $\xlongequal{\sqrt[6]{x}=t}\int\frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=2t^3-3t^2+6t-6\ln(1+t)+C$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$$

例 4.13 (1) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$；

(2) 设 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

解 (1) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\pi-t} \int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi} tf(\sin x)\mathrm{d}x$，故

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$，$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\pi-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\mathrm{d}t$，故

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

(2) 令 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x=A$，则 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+A$，$f(x)\sin x=\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+A\sin x$.
两边在 $[-\pi,\pi]$ 上积分，得

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi} A\sin x\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$
$$=-\pi\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2 x}=-\pi\arctan\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2},$$

故 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\frac{\pi^2}{2}$.

考点 3——分部积分法

例 4.14 $\int xe^{-2x}\mathrm{d}x$.

解 原式 $=-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}e^{-2x}=-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$.

例 4.15 $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{\sqrt{x}=t} \int_0^{+\infty} 2te^{-t}\mathrm{d}t=-2(t+1)e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=2$.

练习 4.16 $\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

例 4.17 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{2\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\mathrm{d}\cot x=-\frac{1}{2}x\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot x\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{18}\right)\pi+\frac{1}{2}\ln\left|\sin x\right|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\left(\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{18}\right)\pi+\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}.$$

练习 4.18 设 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4,\ f(2)=1,\ f'(2)=0$，计算 $\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x$.

考点 4——广义积分法

例 4.19 下列反常积分发散的是(　　).

(A) $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x$　　　　(B) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}e^x}\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$ (D) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\ln^2(x+2)}$

解 判别反常积分敛散性通常有“用审敛法”和“直接计算”两种方法.

(A) 此积分为无穷限广义积分.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2 f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot x^2\mathrm{e}^{-x^2}=0$，故 $\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

(B) 首先，此积分为无穷限广义积分. 又 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}=+\infty$，故 $x=0$ 为瑕点，即此积分也为瑕积分. 此时，应将原积分分为两个积分，一个仅为无穷限广义积分，另一个仅为瑕积分.

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x.$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2 f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{e}^x}=0$，而 $m=2>1$； $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-x}=1$，而 $m=\frac{1}{2}<1$，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ 均收敛，从而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ 收敛.

(C) 此广义积分无法用审敛法进行判别. 此时，可考虑用定义即计算的方法.

因为此积分不仅为无穷限广义积分，而且为瑕积分，瑕点为 $x=0$ 和 $x=1$，所以要将其分为若干个广义积分.

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}\ln x=-\frac{1}{\ln x}\bigg|_0^{\frac{1}{2}}=-\ln 2,$$

$$\int_1^2\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}\ln x=-\frac{1}{\ln x}\bigg|_1^2=+\infty,$$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$ 发散.

(D) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\ln^2(x+2)}=-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln(x+2)}{\ln^2(x+2)}=-\frac{1}{\ln(x+2)}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$，收敛.

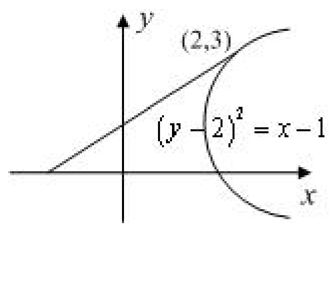
练习 4.20 判断下列反常积分的敛散性

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{3x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$；(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$；(3) $\int_0^1\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$.

第 5 章 定积分的应用 (I)

考点 1——平面图形的面积

例 5.1 求由抛物线 $(y-2)^2=x-1$ 和抛物线相切于纵坐标 $y_0=3$ 处的切线以及 x 轴所围成的图形的面积.



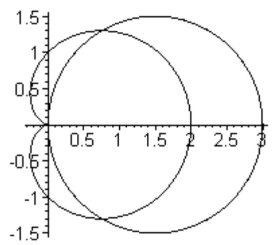
解 在 $(y-2)^2=x-1$ 两边对 x 求导，得 $2(y-2)y'=1$. 代入 $y_0=3$，得

切线斜率 $k = y' = \dfrac{1}{2}$，切线方程为 $y-3=\dfrac{1}{2}(x-2)$，即 $x = 2y-4$.

从而，所求图形面积为

$$S=\int_0^3\Big[(y-2)^2+1-(2y-4)\Big]\mathrm{d}y=\int_0^3(y^2-6y+9)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(y-3)^3=9\,.$$

例 5.2 求曲线 $r=3\cos\theta, r=1+\cos\theta$ 所围成图形公共部分的面积.



解 由 $\begin{cases} r=3\cos\theta, \\ r=1+\cos\theta, \end{cases}$ 得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}r^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{6}+\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}+\frac{1}{8}\sin2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{16}\,,$$

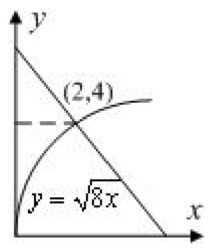
$$S_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}r^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{9}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}\pi+\frac{9}{8}\sin2\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{8}\pi-\frac{9\sqrt{3}}{16}\,,$$

故所求面积为

$$S=2(S_1+S_2)=\frac{5}{4}\pi\,.$$

考点 2——旋转体的体积

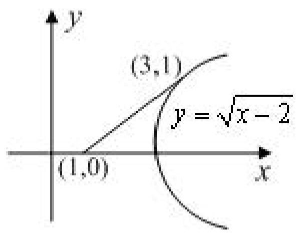
例 5.3 求抛物线 $y=\sqrt{8x}$ 与其在点 $(2,4)$ 处的法线和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转而成的旋转体体积.



解 由 $y=\sqrt{8x}$，得 $y^2=8x$. 两边求导，得 $2yy'=8$. 代入点 $(2,4)$，得此点处切线斜率为 $y'=1$. 从而，法线斜率为 $k=-1$，法线方程为 $y-2=-(x-4)$，即 $y=6-x$，故所求体积为

$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^4(6-y)^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^4\left(\frac{y^2}{8}\right)^2\mathrm{d}y=-\pi\left[\frac{1}{3}(6-y)^3+\frac{1}{320}y^5\right]_0^4=\frac{992}{15}\pi\,.$$

例 5.4 过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形，求此图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积.



解 设切点为 (x_0, y_0)，则该点处的切线斜率为

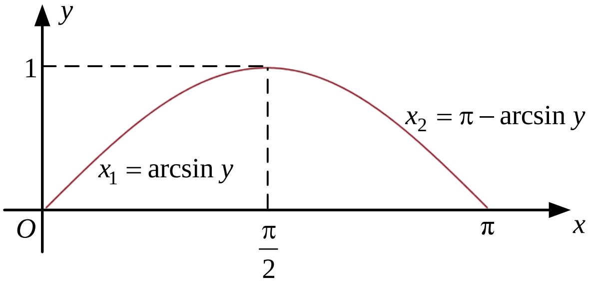
$$\frac{\sqrt{x_0-2}-0}{x_0-1}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}\,,$$

得 $x_0=3, y_0=1$，故切线方程为 $y-1=\dfrac{1}{2}(x-3)$，即 $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$. 从而，所求体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot2-\pi\int_2^3(x-2)\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}(x-2)^2\Big|_2^3=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}\,.$$

例 5.5 求由正弦曲线 $y=\sin x\ \ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解 如图，下面分别用转换法和柱壳法计算.



转换法 因为 $y=\sin x$ 的反函数 $x=\arcsin y$ 的主值区间为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $y=\sin x\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 的反函数分别为 $x_1=\arcsin y, y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 和 $x_2=\pi-\arcsin y, y\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

做辅助线 $y=1$，记曲线 x_2、直线 $y=1$、x 和 y 轴所围曲边梯形的图形为 V_2，曲线 x_1、直线 $y=1$、x 和 y 轴所围曲边梯形的图形为 V_1，则

$$V=V_2-V_1=\pi\int_0^1 x_2^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^1 x_1^2\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(\pi-\arcsin y)^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^1(\arcsin y)^2\mathrm{d}y$$

$$=\pi^3-2\pi^2\int_0^1\arcsin y\mathrm{d}y=\pi^3-2\pi^2\arcsin y\Big|_0^1+2\pi^2\int_0^1\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$$

$$=-2\pi^2\sqrt{1-y^2}\Big|_0^1=2\pi^2.$$

柱壳法 根据利用柱壳法得出的公式

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^\pi x\cdot\sin x\mathrm{d}x=-2\pi\int_0^\pi x\mathrm{d}\cos x$$

$$=-2\pi x\cos x\big|_0^\pi+2\pi\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}x=2\pi^2.$$

显然，在本题中，柱壳法的计算过程远较转换法简单.

练习 5.6 求曲线 $y=\cos x\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴围成的平面图形分别绕 x 轴、y 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

第 6 章　常微分方程 (I)

考点 1——一阶方程

例 6.1 求下列微分方程的通解：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$；

(2) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y\ (x>0)$；

(3) $y'=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$.

解 (1) 本题可用代换化为可分离变量型.

令 $z=x+y$，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 代入方程，得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1+z^2$.

分离变量，$\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\mathrm{d}x$，两边积分可得 $\arctan z=x+C$，故原方程通解为 $y=\tan(x+C)-x$.

(2) 将方程写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}+\dfrac{y}{x}$，显然属齐次微分方程.

令 $\dfrac{y}{x}=u$，即 $y=xu$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 代入方程，得 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-u^2}$.

分离变量，有 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，再积分，得 $\arcsin u=\ln C_1|x|$.

令 $C=\pm C_1$，则原方程通解为 $\arcsin\dfrac{y}{x}=\ln Cx$.

(3) 视 y 为自变量，x 为未知函数，并改变方程形式，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x\cos y+\sin 2y，即 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x\cos y=\sin 2y.$$

这是一阶线性微分方程，通解为

$$x=\mathrm{e}^{-\int(-\cos y)\mathrm{d}y}\left[\int\sin 2y\mathrm{e}^{\int(-\cos y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=\mathrm{e}^{\sin y}\left[\int\sin 2y\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y+C\right]$$

$$\overset{t=\sin y}{=\!=\!=}\mathrm{e}^t\left[2\int t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+C\right]=\mathrm{e}^t\left[-(t+1)\mathrm{e}^{-t}+C\right]=C\mathrm{e}^{\sin y}-2(\sin y+1).$$

例 6.2 已知 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^1 f(ux)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}f(x)+1$，求 $f(x)$.

解 当 $x\neq 0$ 时，令 $t=ux$，得 $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}f(x)+1$，$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}xf(x)+x$.

两边求导得 $f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=-\dfrac{2}{x}$，通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\left[\int\left(-\frac{2}{x}\right)\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=Cx+2.$$

当 $x=0$ 时，上式也成立，故 $f(x)=Cx+2$.

考点 2——可降阶的二阶方程

例 6.3 求下列微分方程的通解：

(1) $xy''+y'=\ln x$；

(2) $yy''-y'^2=0$.

解 (1) 方程不显含 y，可令 $y'=p$，则 $y''=p'$，方程化为

$$xp'+p=\ln x，即 (xp)'=\ln x.$$

两边积分，得

$$xp=x\ln x-x+C_1，即 y'=\ln x-1+\frac{C_1}{x}.$$

再积分，即得原方程通解为

$$y=x\ln x-2x+C_1\ln x+C_2.$$

(2) 令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程为 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$.

积分得 $\ln p=\ln y+\ln C_1$，即 $y'=C_1y$.

再分离变量，积分得 $\ln y=C_1x+\ln C_2$，即通解为 $y=C_2\mathrm{e}^{C_1x}$.

例 6.4 求微分方程 $y''\left[x+(y')^2\right]=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

解 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，则方程为 $p'(x+p^2)=p$，可写为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}-\dfrac{1}{p}x=p$.

$$x=\mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{1}{p}\right)\mathrm{d}x}\left(\int p\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{1}{p}\right)\mathrm{d}x}+C_1\right)=p(p+C_1).$$

由 $p(1)=1$，得 $C_1=0$，故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{x}$. 又 $y'(1)=1$，取 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{x}$，得 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2$.

由 $y(1)=1$，得 $C_2=\dfrac{1}{3}$，故所求特解为 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}$.

考点 3——二阶线性方程

例 6.5 设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的解，求该方程的通解.

解 由 y_1,y_2,y_3 线性无关易证 y_2-y_1 与 y_3-y_1 也线性无关. 又 y_1,y_2,y_3 是非齐次方程的解，所以 y_2-y_1 和 y_3-y_1 是对应齐次方程的解. 从而，原方程对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1(y_2-y_1)+C_2(y_3-y_1).$$

因此，原方程的通解为

$$y=C_1(y_2-y_1)+C_2(y_3-y_1)+y_1.$$

例 6.6 设 $y=\mathrm{e}^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$ 是二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解，其中 C_1,C_2 为任意常数，试确定此微分方程.

解 由齐次方程的通解可知，这个微分方程对应的特征根为 $r_{1,2}=1\pm i$，特征方程为

$$[r-(1+i)][r-(1-i)]=r^2-2r+2=0.$$

从而，所求的微分方程为 $y''-2y'+2y=0$.

例 6.7 微分方程 $y''+4y=\cos 2x$ 的特解形式可设为(　　).

(A) $y^*=a\cos 2x$　　(B) $y^*=ax\cos 2x$

(C) $y^*=a\sin 2x+b\cos 2x$　　(D) $y^*=ax\sin 2x+bx\cos 2x$

解 对应齐次方程 $y''+4y=0$ 的特征方程为 $r^2+4=0$，特征根 $r=\pm 2i$.

因为 $\lambda+i\omega=2i$ 是特征根，所以 $y^*=x(a\sin 2x+b\cos 2x)$.

例 6.8 微分方程 $y''+y=3x^2+2x+1+2\cos x$ 的特解形式可设为(　　).

(A) $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$　　(B) $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$

(C) $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$　　(D) $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$

解 对应齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为 $r^2+1=0$，特征根 $r=\pm i$。

对 $y''+y=3x^2+2x+1$，$\lambda=0$ 不是特征根，$y_1^*=ax^2+bx+c$；

对 $y''+y=2\cos x$，$\lambda+i\omega=i$ 是特征根，$y_2^*=x\left(A\sin x+B\cos x\right)$.

根据解的叠加定理，原方程的特解形式可设为 $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.