高等数学 A2

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 下）

学校：________________________

专业：________________________

班级：________________________

姓名：________________________

学号：________________________

（此试卷为 2022 年第二版 第 2 次发行）

目 录

2022 年所有试卷版本见**试卷版**的尾页。如需资料请添加下方的 QQ 群获取。

第 2 次发行说明：

发行时间：2022 年 5 月 8 日

改版内容：将近十一年的 A 卷放在了试卷册上册中，将近几年的 B 卷和过早年份的 A 卷放在了试卷册下册中。A 卷为正式考卷，B 卷为补考卷。命题老师会将 A、B 卷命为平行卷，难度持平。

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈

试卷版次：2022 年 5 月 8 日 第二版 第 2 次发行

本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380

cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102

cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

12 浙江理工大学 2020-2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一 选择题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 D　　2 B　　3 A　　4 C　　5 A　　6 B

二 填空题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 $\sqrt{2}$　　2 $\frac{1}{\sqrt{4(ln2)^2+1}}(1,2ln2)$　　3 $\frac{1}{2}$

4 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt[3]{x}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$　　5 $\int_0^\pi d\theta \int_0^{a\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$　　6 $\frac{1}{(1-z)^2}$

三 计算题（共 8 小题，每小题 6 分，满分 48 分，应写出演算过程与说明，否则零分）

1

解. 切线方程：

$$\begin{cases} 4(y-1)+4(z-1)=0 \\ (x-1)-2(y-1)+3(z-1)=0 \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *3'*

即：

$$\begin{cases} y+z=2 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$$

切线方向为 $(0,1,1)\times(1,-2,3)=(5,1,-1)$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *2'*

故法平面为：

$$5(x-1)+(y-1)-(z-1)=0.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *1'*

□

2

解. 由对称性，只需计算 $\iint_D xdxdy$, 下算之：

$$\begin{aligned} \iint_D xdxdy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xdy \cdots\cdots\cdots\cdots \text{ 2'} \\ &= \int_0^1 (x^{3/2}-x^3)dx \\ &= \frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}. \end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *3'*

因此，原积分值为 $\frac{3}{10}$.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *1'*

□

3

解. 问题等价于考虑函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 在条件 $\phi(x,y,z)=(x-y)^2+z^2-1=0$ 下的条件极值问题。考虑 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\phi(x,y,z)$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *2'*

由 Lagrange 乘子法，对于可能的极值点 (x,y,z) 必存在 λ, 使 (x,y,z,λ) 满足方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda(x-y)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y-2\lambda(x-y)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}=2z+2\lambda z=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=(x-y)^2+z^2-1=0. \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'

将第一个方程减去第二个方程，得 $2(x-y)(1+2\lambda)=0$, 故或者 $x=y$, 或者 $\lambda=-\frac{1}{2}$.

情况一：$x=y$, 代入第一个方程立得 $x=y=0$, 再代入第四个方程立得 $z=\pm1$, 故可能的极值点为 $(0,0,\pm1)$;

情况二：$\lambda=-\frac{1}{2}$, 代入第一个方程立得 $x=-y$, 代入第三个方程得 $z=0$, 再代入第四个方程立得 $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\mp\frac{1}{2}$, 故可能的极值点为 $(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)$.

综上：可能的极值点为 $(0,0,\pm1)$, $(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)$. 注意 $f(0,0,\pm1)=1$, $f(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)=\frac{1}{2}$. 而 S 为由柱面 $x^2+z^2=0$ 绕 z 轴旋转并伸缩得到，由几何意义知 f 必能取到最小值点，故 f 的最小值点必为 $(0,0,\pm1)$,$(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)$ 这四个点之一，故所求的最短距离为 $\sqrt{f(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'

□

4

解. 记 C_1 为从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的线段，C_2 为从 $(1,1)$ 到 $(0,2)$ 的折线段，取 C_1 的参数化为 $\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$,$0\leqslant t\leqslant1$. 取 C_2 的参数化为 $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \end{cases}$,$0\leqslant t\leqslant1$. 则这两个参数化均与曲线的方向相容。$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'

因此，

$$\begin{aligned}
\int_C ydx+x^2dy &= \int_{C_1} ydx+x^2dy+\int_{C_2} ydx+x^2dy \\
&= \int_0^1 tdt+t^2dt+\int_0^1 (1+t)d(1-t)+(1-t)^2d(1+t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2' \\
&= \int_0^1 (t+t^2)dt+\int_0^1 (t^2-3t)dt \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{3}. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'
\end{aligned}$$

5

解. 记 D 的面积为 $\sigma(D)$, 由格林公式：

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\oint_{\partial D} xdy-ydx,$$

其中 ∂D 取正向。$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'

取 ∂D 的参数化为 $x=a\cos t, y=b\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$, 则有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\oint_{\partial D} xdy-ydx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos td(b\sin t)-b\sin td(a\cos t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2' \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abdt \\
&= \pi ab
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'

□

6

解. 由对称性立知 $\iint\limits_S (x+y)^{2021} dS = 0.$ $\cdots\cdots$ 2'

所以只需计算 $\iint\limits_S zdS$, 注意 S 为函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, x^2+y^2 \leqslant R^2$ 的函数图像，故有：

$$\iint_S zdS = \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \cdots\cdots \text{2'}$$

$$\begin{aligned} &= \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} Rdxdy = \pi R^3. \end{aligned}$$

因此原积分等于 πR^3. $\cdots\cdots$ 2'

□

7

解. 记 S_1 为圆盘 $\{(x,y,h)|x^2+y^2\leqslant h\}$ 的下侧，则 S 与 S_1 组成封闭曲面，
记 Ω 为 S 与 S_1 所包围的立体，由高斯公式，$-\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy-\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iiint_\Omega 2(x+y+z)dxdydz$, $\cdots\cdots$ 2'
由第一型曲面积分与第二型曲面积分之关系，S_1 上 $\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx=\iint_{S_1} 0dS=0$, 故 $\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iint_{S_1} h^2dxdy=-h^2\cdot\pi h.$
由对称性知，$\iiint_\Omega 2(x+y)dxdydz=0$。
所以 $-\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy+\pi h^3=2\iiint_\Omega zdxdydx.$ $\cdots\cdots$ 2'
又

$$\begin{aligned} 2\iiint_\Omega zdxdydz &= 2\int_0^h zdz\iint_{x^2+y^2\leqslant z} dxdy \\ &= 2\int_0^h \pi z^2 dz \\ &= \frac{2}{3}\pi h^3. \end{aligned}$$

故 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\frac{1}{3}\pi h^3$. $\cdots\cdots$ 2'

8

解. 令

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x, \qquad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x.$$

$\cdots\cdots$ 2'

由于 f 为偶函数，所以 $b_k=0, \forall k=1,2,\cdots$. ································· 1'

而对于 $k\neq 0$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos kx\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos kx\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{k\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\mathrm{d}\sin kx \\ &= -\frac{4}{k\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin kx\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{k^2\pi}\int_{0}^{\pi} x\mathrm{d}\cos kx = \frac{4}{k^2}(-1)^k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

··· 2'

所以 f 的 Fourier 级数为:

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx.$$

··· 1'

□

四 （本题 4 分）

证明. 记 $a_n=\frac{\ln n}{(n+1)^2}$ 注意 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{3/2}}}=0$, ································· 2'

又 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，由比较判则立知原级数收敛。······························ 2'

□

13 浙江理工大学 2019-2020 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、单项选择题

1.C　2. A　3. D　4. C　5.C　6. A

评分标准说明：　每题 4 分，错则扣全分

二、填空题

1. $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{15}}$. 2. $(2x\sin xy+y(x^2+y^2)\cos xy)dx+(2y\sin xy+x(x^2+y^2)\cos xy)dy$.

3. 0 .　　4. $4-\pi$.　　5. (-2 ,2,-2)　　6. 3

评分标准说明： 每空 4 分

三 、计算题（本题共六题，满分 36 分）

1.解：该级数为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n^2\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$$ ……………………………………………………4 分

根据比值判别法可知该级数收敛……………………………………………2 分

评分标准说明： 结果正确给 2 分。

2. **解：**

$$f_x=(x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0,\ f_y=(1+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0$$ …………2 分

解得驻点 $(1,-\frac{4}{3})$ 及 $(-1,-\frac{2}{3})$ ………………………………1 分

$$A(1,-\frac{4}{3})=f_{xx}=(2x+x^2+x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=3e^{-\frac{1}{3}},$$

$$B(1,-\frac{4}{3})=f_{xy}=(1+x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=e^{-\frac{1}{3}},$$

$$C(1,-\frac{4}{3})=f_{yy}=(1+1+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=e^{-\frac{1}{3}}$$

可得 $AC-B^2>0,A>0$,则 $(1,-\frac{4}{3})$ 为极小值………………2 分

我们也可以得到 $A(-1,-\frac{2}{3})=-e^{-\frac{5}{3}},B(-1,-\frac{2}{3})=e^{-\frac{5}{3}},C(-1,-\frac{2}{3})=e^{-\frac{5}{3}}$

由于 $AC-B^2<0$，则 $(-1,-\frac{2}{3})$ 不是极值点……………………1 分

评分标准说明：该题还可以用微分形式不变性求导，结果正确满分；

3. 解：由奇偶性及对称性可知

$$\iint_D(x^2+xye^{x^2+y^2})dxdy=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy$$ …………………………4 分

由极坐标可得

$$\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2 rdr=\frac{\pi}{4}$$ ………………………2 分

评分标准说明：奇偶性占 2 分

4．解： $P(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2},Q(x,y)=\frac{y-x}{x^2+y^2},$

计算得当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时， $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$ …………2 分

做辅助线：$L_1: x^2+y^2=\varepsilon^2$，逆时针方向 ……………………………1 分

则原式$=\int_{L+L_1}-\int_{L_1} \quad =-\int_{L_1} \quad =-\int_0^{2\pi}(-1)\,d\theta=2\pi$ …………………………3 分

评分标准说明：直接用曲线参数方程求解，结果正确给分

5. 解：由对称性可知

$\iint_\Sigma z\,dxdy=2\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$ ……**2 分**

利用极坐标计算二重积分可得

$2\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,rdr=\dfrac{\pi}{3}$ ……………………………**4 分**

评分标准说明：极坐标给出，答案错误扣 2 分

6. 解：利用间接法，由于

$\dfrac{1}{1\text{-}x}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots$ ……………………………**3 分**

用 x^2 代替 x

$\dfrac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n},\ x\in(-1,1)$ ……………………………………**3 分**

评分标准说明：最后一步未给出 x 的范围, 扣 1 分

四、综合题 （**本题共 8 分**）

解：

设切点处坐标为(x_0,y_0,z_0)则该点处法向量为

$(4x_0,y_0,-1)$ ……………………………………………**2 分**

法向量满足

$$\begin{cases} z_0=2{x_0}^2+\dfrac{{y_0}^2}{2} \\ \dfrac{4x_0}{-4}=\dfrac{y_0}{2}=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$$ …………………………………………**2 分**

解得 $(\frac{1}{2},-1,1)$ ……………………………………**2 分**

故法线方程为

$\dfrac{x-\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$ ………………………………**2 分**

评分标准说明：坐标算错不给分

五、证明题（**本题满分 8 分**）

解： $P(x,y)=\frac{1}{y}(1+y^2f(xy)),\ Q(x,y)=\frac{x}{y^2}(y^2f(xy)-1)$

直接计算可得

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2f(xy)+xy^3f'(xy)-1}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ ……………………………………4 分，

故与积分路径无关

$I=\int_2^1\frac{1}{y^2}[y^2f(y)-1]dy+\int_1^2[1+f(x)]dx=\int_1^2(1+\frac{1}{y^2})dy=\frac{3}{2}$ ………………4 分

评分标准说明：前 4 分中，导数求错扣 2 分，

14 浙江理工大学 2018-2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. A　2. C　3. D　4. B　5. D　6. D

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $(0,\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{15}})$；　2. $8\pi R^2$；　3. $2\sqrt{2}$；　4. $\frac{64}{3}\pi$；　5. [4,6]；　6. 0 .

三 、计算题

1、 解：$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{1+x^3}dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{1+x^3}dy.$

$=\int_0^1\sqrt{1+x^3}\cdot x^2dx=\left[\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$ …………………（7 分）

2、 解：令$f_x(x,y)=2x(2+y^2)=0,\ f_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0,$
得 f(x,y)的驻点为$(0,e^{-1})$。 …………………（3 分）
在$(0,e^{-1})$点，

$$A=f_{xx}(0,e^{-1})=2(2+y^2)|_{(0,e^{-1})}=2(2+e^{-2})$$

$$B=f_{xy}(0,e^{-1})=4xy|_{(0,e^{-1})}=0$$

$$C=f_{yy}(0,e^{-1})=(2x^2+\frac{1}{y})|_{(0,e^{-1})}=e$$

由于$AC-B^2>0,A>0$，所以 f(x,y)在$(0,e^{-1})$取到极小值$-e^{-1}$。……..（7 分）

3、 解：设$A=\iint_D f(x,y)dxdy$，则$f(x,y)=xy+A$。由题意，

$$A=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D (xy+A)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(xy+A)dy=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^5+Ax^2\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^6+\frac{1}{3}Ax^3\right]_0^1=\frac{1}{8}$$

从而，$f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$。 ……..（7 分）

4、 解：有向曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=3\sin\theta\end{cases}\quad \theta:0\to\pi$$

则 $$\int_L (x^2+xy)dy=\int_0^{\pi}(4\cos^2\theta+6\cos\theta\sin\theta)\cdot 3\cos\theta\, d\theta$$ ……（4 分）

$$=12\int_0^{\pi}\cos^3\theta\, d\theta+18\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta$$
$$=12\int_0^{\pi}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta+18\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, d\sin\theta$$
$$=12\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\pi}-18\cdot\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}$$
$$=12$$ ……………..（7 分）

5、解：添加辅助面$\Sigma: z=0, x^2+y^2\le a^2$，取下侧。记$\Omega$ 为曲面 S 和Σ所围成的空间区域，则由高斯公式，

$$\iint_{S\cup\Sigma}\mathrm{xdydz+ydzdx+zdxdy}=3\iiint_{\Omega}dv=3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3=2\pi a^3$$ ………（4 分）

而 $$\iint_{\Sigma}\mathrm{xdydz+ydzdx+zdxdy}=0$$

所以， $$\iint_S \mathrm{xdydz+ydzdx+zdxdy}=2\pi a^3$$ ………..（7 分）

6、解：

$$\mathrm{f(x)}=\frac{\mathrm{x}}{2+\mathrm{x}-\mathrm{x}^2}=\frac{\mathrm{x}}{-(x-2)(x+1)}$$
$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}+\frac{2}{3}\frac{1}{2-x}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$
$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-(-1)^n\right)x^n\quad x\in(-1,1)$$ ……….（7 分）

四、证明题

1、证明：令 $\mathrm{P}=2\mathrm{xy}^3-y^2\cos x$，$\mathrm{Q}=1-2y\sin x+3x^2y^2$。

因为

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}=6\mathrm{xy}^2-2y\cos y=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以，由 Green 公式，

$$\oint_L (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{dxdy} = 0$$

.........（5 分）

2、证明：因为正项级数$\{x_n\}$单调增加且有上界，所以，存在一个常数 C，使得

$$x_n < x_{n+1} < C。$$

从而，$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}})$是正项系数。 …………（2 分）

又因为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x_k}{x_{k+1}}\right) = \frac{x_2 - x_1}{x_2} + \frac{x_3 - x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}$$

$$\le \frac{x_{n+1} - x_1}{x_2} \le \frac{C - x_1}{x_2}$$

所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}})$收敛。 ……………（5 分）

15 浙江理工大学 2016-2017 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1-6 B A A B B D

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

-1； 0； 2； $\frac{y}{1-z}$； $\sqrt{2}$； $\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}$

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出演算过程及文字说明）

1、$\mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$

2、原式$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 zdz = \frac{64}{3}\pi$

3、设 D 为xOy面上的圆盘$x^2 + y^2 \le 1$，Σ_1是圆盘 D 下侧

原式$=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \iiint_\Omega 3dv - \iint_D x^2dxdy = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$

4、原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2 \theta\rho d\rho d\theta = \frac{3}{64}\pi^2$

5、幂函数的收敛区域为(-1,1)，则$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2}$，所以$s(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x^2}dx + s(0) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，$x \in (-1,1)$

四、证明题（本题共 2 小题，每题 5 分，满分 10 分，应写出详细证明和计算过程）

1、

令 $F(x,y,z)=f(x-ay,z-by)$，则$F'_x(x,y,z)=f_1'$，$F'_y(x,y,z)=-af'_1-bf_2'$，$F'_z(x,y,z)=f_2'$，由于$aF'_x+F'_y+bF'_z=0$，因此曲面的切平面与方向向量为(a,1,b)的直线平行。

2、

因为正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$也为正项级数且收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)\quad=0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)^2}{(a_n+b_n)}$，由比较审敛法的极限形式可知$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛

16 浙江理工大学 2013-2014 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1-6　　B D A B C D

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、1　2、$x+y-2=0$　3、$\int_1^2 dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy$　4、$12a$　5、$(-2,0)$　6、$\frac{3}{2}$

三、计算题（本题共 6 小题，每题 6 分，满分 36 分）

（1）解：$dz\big|_{(1,2)}=\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}dx+\frac{2y}{1+x^2+y^2}dy\right)\Bigg|_{(1,2)}=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$　　（6 分）

（2）解：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_{\frac{r^2}{2}}^{2}r^3dz$（3 分）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3(2-\frac{r^2}{2})dr$（5 分）$=2\pi\cdot[\frac{r^4}{2}-\frac{r^6}{12}]\Big|_0^2=\frac{16}{3}\pi$　（6 分）

（3）解：$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}\left(2z+z-2z\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\cdot\frac{1}{4}r^4\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2}$。（6 分）

（4）解：幂级数的收敛半径 $\boldsymbol{R=1}$，令 $\boldsymbol{s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}}$，$\boldsymbol{x\in(-1,1)}$（2 分）

则有$\int_0^x s(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}(\int_0^x nx^{n-1}dx)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$，$\boldsymbol{x\in(-1,1)}$，（4 分）

在上式两端对 $\boldsymbol{x}$ 求导得，$\boldsymbol{s(x)=\frac{1}{(1-x)^2}}$，$\boldsymbol{x\in(-1,1)}$　（5 分）

又$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 在 $\boldsymbol{x=\pm1}$ 处发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$，$\boldsymbol{x\in(-1,1)}$（6 分）

（5）解：$f(x)=\frac{1}{x-1}=\frac{1}{3+x-4}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-4}{3}}$ （3 分）

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^n}{3^n},\boldsymbol{x\in(1,7)}$$ （6 分）

(6) 解：函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\pi,\pi\right)-\left\{0\right\}$ 是奇函数，有 $\boldsymbol{a_n=0}$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx$$
$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)=\frac{2}{n\pi}\left[1-\left(-1\right)^n\right]$$
$$=\begin{cases}0, & n\text{是偶数，}\\ \frac{4}{n\pi}, & n\text{是奇数.}\end{cases}$$

于是，$f\left(x\right)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)$，$0<|x|<\pi$.

四、应用题（本题满分 8 分）

点 $\left(x,y,z\right)$ 到平面的距离为 $d=\frac{|x+y+z+1|}{\sqrt{3}}$。 （2 分）

先求 d^2 在条件 $z=x^2+y^2$ 下的最小值，设

$$F\left(x,y,z\right)=\frac{1}{3}\left(x+y+z+1\right)^2+\lambda\left(z-x^2-y^2\right),$$ （4 分）

则

$$\begin{cases}F_x=\frac{2}{3}\left(x+y+z+1\right)-2\lambda x=0\\ F_y=\frac{2}{3}\left(x+y+z+1\right)-2\lambda y=0\\ F_z=\frac{2}{3}\left(x+y+z+1\right)+\lambda=0\end{cases}$$ （6 分）

并与条件 $z=x^2+y^2$ 联立解得唯一可能极值点 $x=y=-\frac{1}{2},z=\frac{1}{2}.$ （8 分）

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1、证明：因为 $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x},\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y},\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},$

所以 $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1.$

2、$a_n + a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d\tan x = \dfrac{1}{n+1}$,

$\dfrac{a_n}{n^\lambda} < \dfrac{a_n + a_{n+2}}{n^\lambda} = \dfrac{1}{n^\lambda(n+1)} < \dfrac{1}{n^{\lambda+1}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\lambda+1}}$收敛，由比较审敛法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$收敛。

17 浙江理工大学 2012-2013 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1．C;　2．B；　3．D;　4．A;　5．A;　6.B

二、填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1. (-1,2,-2);　2. 0;　3. $\left(f_1' + yf_2'\right)dx + \left(f_1' + xf_2'\right)dy$；　4. $2\sqrt{2}$；　5. 2　6. $-\dfrac{\pi}{4}$

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分）

1. 已知$e^z + x^2 + y^2 = 2$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2x}{e^z}$　………… 3 分，　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{4xy}{e^{2z}}$　…… …… 6 分

2. 计算$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D：　$x^2 + y^2 \le 1$。

解：$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \cdot \rho d\rho = \dfrac{2\pi}{3}$　…… 6 分（也可用直角坐标做，列式对给 4 分，计算 2 分）

3. 计算三重积分$\iiint\limits_\Omega z\ dxdydz$，其中闭区域$\Omega$为半球体：$x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z \ge 0.$

解：用柱面坐标得，$I = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^{\sqrt{1-\rho^2}} z dz = \dfrac{\pi}{4}$（也可用球面坐标、截面法等做，列式对给 4 分，计算 2 分）

4. 将函数$chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$展开成$x$的幂级数。

解：因为$e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$　………3 分

所以$chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$　………6 分

四、解答题（本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分）

1. 求曲线积分 $\int_L (x-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是沿曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 由点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 的弧段。

解：令 $P=x-2y$，$Q=-(x+\sin^2 y)$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1,$ ………2 分

选择 $BA: y=0$ 由 $B(-1,0)$ 到 $A(1,0)$，则由格林公式得

原式 $=\int_{L+BA}(x-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy+\int_{AB}(x-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$ ………4 分

$=\iint\limits_D 1dxdy+\int_{AB}(x-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$ ………6 分

$=\dfrac{\pi}{2}+\int_{-1}^{1}xdx=\dfrac{\pi}{2}.$ ………8 分

2. 求 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的下侧。

解：设 Σ_1 是 $x^2+y^2\le R^2$ 的上侧 ……………2 分

原式 $=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$ ……………4 分

$=-\iiint\limits_{\Omega}3dv-0$ ……………6 分

$=-2\pi R^3$ ……………8 分

3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^{n-1}$ 的收敛域、和函数以及数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 的和。

解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}\right|=\dfrac{1}{2}\Rightarrow R=2\Rightarrow$ 收敛区间为 $(-2,2)$， ………2 分

当 $x=\pm 2$ 时，原级数发散，因此得收敛域为 $(-2,2)$ ……………3 分

设和函数为 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^{n-1}=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x\dfrac{n}{2^n}t^{n-1}dt\right)'=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right)'$

$=\left(\dfrac{x}{2-x}\right)'=\dfrac{2}{(2-x)^2}$ …………7 分

于是 $s(1)=2$ ………8 分

五、（本题满分 4 分） 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln^p\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ 的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

解：当 $p\le 0$ 时，$(-1)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)\not\to 0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 发散　　……………1 分

当 $0<p\le 1$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n^p}}=1$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散（p 级数），由比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)\right|$ 也发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 收敛（莱布尼茨定理），所以原级数条件收敛　　…………3 分

当 $p>1$ 时，同理因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛（p 级数），由比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)\right|$ 也收敛，所以原级数绝对收敛。　　……………4 分

18 浙江理工大学 2009-2010 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，满分 24 分）

1.B　2.C　3.A　4.D　5.C　6.B

二、填空题（每小题 4 分，满分 24 分）

1. $y=\frac{\sin 2x+C}{2x}$　　2. $\frac{12\pi R^5}{5}$　　3. $\frac{1}{2}$　　4. $\frac{32}{9}$

5. $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$　　6. $[2,4)$

三、解答题（每小题 6 分，共 30 分）

1.解：$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y^2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6y$

2.解：$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-\rho^2}\cdot\rho d\rho=\pi\left(1-e^{-1}\right)$

3. 证明：$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，代入左边即得证明

4.解：$\iint_D xyd\sigma=\int_1^2 dx\int_1^x xydy=\frac{9}{8}$

5.解：由对称性，则

$$I=\iint_S \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}=4\iint_D \frac{1}{R^2+z^2}\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz$$

$$=4\iint_D \frac{1}{R^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz=4\int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}dy\int_0^H \frac{R}{R^2+z^2}dz$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$

四、解：由于 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{3}$，故该技术的收敛区间为 $(-3,3)$；又当 $x=-3$ 时，原级数转化为 $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，收敛；当 $x=3$ 时，原级数转化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$，发散。所以原级数的收敛域为 $[-3,3)$。

由 $xs(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$，得 $(xs(x))'=\frac{1}{3-x}$，故 $s(x)=\begin{cases}\frac{-\ln(3-x)+\ln 3}{x}, x\in[-3,0)\cup(0,3)\\ \frac{1}{3}, x=0\end{cases}$

五、对 $f(x)$ 进行偶延拓，则有

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, n=2,4,6,\cdots\\ -\frac{4}{n^2\pi}, n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\pi+2$$

故 $x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right), x\in[0,\pi]$

六、（1）证明交叉求偏导数相等，计算结果为 5

（2）证 $0\le|u_n|=1-\cos\frac{\alpha}{n}=2\sin^2\frac{\alpha}{2n}\le\frac{\alpha^2}{2n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{2n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$ 绝对收敛。

19 浙江理工大学 2008-2009 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，满分 28 分）

1．D; 2．A ; 3．D; 4．B; 5．C．6．B 7．D

二、填空题（每小题 4 分，满分 20 分）

1．$y=\frac{1}{x}\left(e^{x}+C\right)$； 2．$18\pi$；3．$\left(0,6\right)$； 4．$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}+2$； 5．$\frac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$．

三、计算下列积分（本题 5 分）

解：$I=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\rho^2 d\rho$ ……………4 分

$=\frac{\pi}{6}a^3$ ………………1 分

四、1.解：由高斯公式，原积分$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^2 3r^2\cdot r^2 dr=\frac{384}{5}\pi$ …………6 分

2.解：$P=y\sin 2x-yf\left(x\right)\tan x$，$Q=f\left(x\right)$，

$\Rightarrow f'\left(x\right)=\sin 2x-f\left(x\right)\tan x\Rightarrow f'\left(x\right)+\tan x\cdot f\left(x\right)=\sin 2x$ （5 分）

$\Rightarrow f\left(x\right)=-2\cos^2 x+C\cos x$，由 $f\left(0\right)=-2\Rightarrow C=0\Rightarrow f\left(x\right)=-2\cos^2 x$ （3 分）

3.解：用柱面坐标，$\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2}\rho^2 dz=\frac{16}{3}\pi$ ………8 分

五、（本题满分 8 分）

解：易求得收敛域为$\left(-2,2\right)$………2 分

设和函数为$s\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{2^n}t^{n-1}dt\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)'$

$=\left(\frac{x}{2-x}\right)'=\frac{2}{\left(2-x\right)^2}$ …………5 分

于是$s\left(1\right)=2$ …………1 分

六、（本题满分 12 分）

1.解：$shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\left(-\infty,\infty\right)$ （展开 5 分，收敛区间 1 分）

2.解：对 $f(x)=x+1$进行偶延拓，

$b_n=0,\left(n=1,2,\cdots\right)$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\pi+2$， ……(1 分)

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}\left(\cos n\pi-1\right)=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots\\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$ …3 分

所以 $f(x)=x+1$ 的余弦级数为

$$x+1=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right),(0\le x\le\pi)$$ 2 分

七、（本题满分 5 分）

证明：令 $F\left(x,y,z\right)=f(x-ay,z-by)$，则

$F_x'\left(x,y,z\right)=f_1',\quad F_y'\left(x,y,z\right)=-af_1'-bf_2',\quad F_z'\left(x,y,z\right)=f_2'$ ……………………2 分

由于 $aF_x'+F_y'+bF_z'=0$，因此曲面的切平面恒与方向向量为 $\left(a,1,b\right)$ 的直线平行。……3 分

20 浙江理工大学 2008-2009 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、选择题（每小题 4 分，满分 28 分）

1．C; 2．D ; 3．C; 4．C; 5．A．6．D 7．B

二、填空题（每小题 4 分，满分 20 分）

1．$\frac{1}{2x}\left(-\cos 2x+C\right)$； 2．$2\pi$；3．$\left(-6,0\right)$； 4．$-5$； 5．$\frac{x^2y^2}{2}$．

三、计算下列积分（每小题 6 分，共 18 分）

1.$\frac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$

2.$\frac{12\pi}{5}a^4$

$$\iiint_{\Omega}\left(x+y+z\right)dv=\iiint_{\Omega}xdv+\iiint_{\Omega}ydv+\iiint_{\Omega}zdv=\iiint_{\Omega}xdv+\iiint_{\Omega}zdv$$

3. $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a}\rho\sin\varphi\cos\theta\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a}\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$

$=\frac{\pi a^4}{8}$

四、（本题满分 8 分）

$y=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$

五、（本题满分 7 分）

解：方程两边分别对 x 求导，联立解出 z_x, z_y，代入即可得证。

六、（本题满分 14 分）

1.解：设和函数为 $s(x)$，则 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$， $s(0)=0$

逐项求导，得 $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^{n-1}=\frac{1}{1+x^2},(-1<x<1)$

积分，得

$$s(x)-s(0)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x$$

即 $s(x)=\arctan x, x\in[-1,1]$

2.解：对 $f(x)=x$ 进行偶延拓，

$b_n=0,(n=1,2,\cdots)$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots\\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots\end{cases}$

所以 $f(x)=x$ 的余弦级数为

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right),(0\le x\le\pi)$

七、（本题满分 5 分）

证明：因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^2}{a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=0$， $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛

同理可证， $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，因而 $\sum_{n=1}^{\infty}2\left(a_n^2+b_n^2\right)$ 收敛，

又因为 $\left(a_n+b_n\right)^2=a_n^2+b_n^2+2a_nb_n\le 2\left(a_n^2+b_n^2\right)$，所以由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)^2$ 收敛

21 浙江理工大学 2007-2008 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 7 小题, 每小题 4 分，满分 28 分）

1．C; 2．A ; 3．D; 4．B; 5．D．6．C 7．A

二、填空题（本题共 5 小题, 每小题 4 分，满分 20 分）

1．-5； 2．$\frac{2}{3}\pi R^3$；3．2π； 4．$y=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$； 5．$a=-2,b=2$．

三（每小题 6 分，共 18 分） 1．解：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{e^z},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4xy}{e^{2z}}$.（每个 3 分）

2．通解为 $y=c_1e^{-2x}+c_2e^x-x-\frac{1}{2}$（求出齐次方程通解给 4 分，特解给 2 分）

3．用柱面坐标得，$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}}zdz=\frac{\pi}{4}$（也可用球面坐标、截面法等做，列式对给 4 分，计算 2 分）

四（本题满分 8 分） 解：解答：$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{y^2-3x^2}{(3x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},(x,y)\neq(0,0)$，……….3 分，

作足够小的椭圆 $C:x=\frac{\delta}{\sqrt{3}}\cos\theta,y=\delta\sin\theta,\theta\in[0,2\pi]$. ………54 分

C 取逆时针方向，由格林公式得 $\oint_{L+C^-}\frac{xdy-ydx}{3x^2+y^2}=0$，……….6 分

即得 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{3x^2+y^2}=\oint_C\frac{xdy-ydx}{3x^2+y^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\frac{\delta^2}{\delta^2}d\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ ………8 分

五（本题满分 7 分） 方程 $f(x)=e^x+\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt$ 两边对 x 求导得

$f'(x)=e^x+xf(x)-\int_0^x f(t)dt-xf(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt$，（2 分）再对 x 求导得

$f''(x)=e^x-f(x)$（4 分）…初始条件为 $f(0)=f'(0)=1$，（5 分）解此方程可得特解为

$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$（7 分）

六（本题满分 14 分）（1）解：先求幂级数的收敛半径

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[3^n+(-2)^n]\cdot n}{[3^{n+1}+(-2)^{n+1}]\cdot(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[1+\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n]}{3-2\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n} = \dfrac{1}{3}$，（4 分）

故收敛半径为 3，收敛区间为（-3，3）.（5 分）当 $x=3$ 时，幂级数通项与 $\dfrac{1}{n}$ 之比的极限为 1，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，因此原级数在 $x=3$ 处发散（6 分）. 当 $x=-3$ 时，幂级数通项为

$\dfrac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n} = \dfrac{(-1)^n}{1+\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n}\cdot\dfrac{1}{n}$,，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛，故级数在 $x=-3$ 处收敛，综上所得，原级数的收敛域为 $[-3,3)$.（7 分）

六（2）解：对 $f(x)$ 进行奇延拓，…………(1 分) 则有

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi-x}{2})\sin nxdx = -\frac{2}{n\pi}[\frac{\pi-x}{2}\cos nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx(-\frac{1}{2})dx] = \frac{1}{n} \text{……(5 分)}$$

故 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(0\le x\le\pi)$ 展开成正弦级数为

$\dfrac{\pi-x}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}(0<x\le\pi)$, 当 $x=0$ 时级数收敛到 0 (7 分)

七（本题满分 5 分）证明　由已知条件可得 $\dfrac{\partial g}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}f'(\dfrac{y}{x}) + f'(\dfrac{x}{y})$，（1 分）

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \dfrac{2y}{x^3}f'(\dfrac{y}{x}) + \dfrac{y^2}{x^4}f''(\dfrac{x}{y}) + \dfrac{1}{y}f''(\dfrac{x}{y})$（2 分）$\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{1}{x}f'(\dfrac{y}{x}) + f(\dfrac{x}{y}) - \dfrac{x}{y}f'(\dfrac{x}{y})$（3 分）

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \dfrac{1}{x^2}f''(\dfrac{y}{x}) - \dfrac{x}{y^2}f'(\dfrac{x}{y}) + \dfrac{x}{y^2}f'(\dfrac{x}{y}) + \dfrac{x^2}{y^3}f''(\dfrac{x}{y})$，（4 分）

所以 $x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \dfrac{2y}{x}f'(\dfrac{y}{x}) + \dfrac{y^2}{x^2}f''(\dfrac{x}{y}) + \dfrac{x^2}{y}f''(\dfrac{x}{y}) - \dfrac{y^2}{x^2}f''(\dfrac{y}{x}) - \dfrac{x^2}{y}f''(\dfrac{x}{y})$

$= \dfrac{2y}{x}f'(\dfrac{y}{x})$.（5 分）

22 浙江理工大学 2004-2005 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（4×7 分）

1．D 2. A 3.D 4 B 5 D 6 D 7 A

二 填空题（4×7 分）

1. 0 2. ($(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 3. $\frac{3}{8}$ 4. 30; 5 $\frac{-y^2}{x^2(1+y^2)}$ 6 12; 7 $-\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{2x}$

三（**本题满分 10 分**）

解：设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则曲面 $z=2x^2+\frac{y^2}{2}$ 在 M_0 的法向量为

$\vec{n}_1=(4x_0,y_0,-1)$ ………(2 分)

又平面 $2z+2y-4x+1=0$ 的法向量为 $\vec{n}_2=(-2,1,1)$． ………(4 分)

于是 $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$，由此得 $x_0=\frac{1}{2}, y_0=-1$，所以 $z_0=2x_0^2+\frac{1}{2}y_0^2=1$，即曲面 $z=2x^2+\frac{y^2}{2}$ 上

点 $M_0\left(\frac{1}{2},-1,1\right)$ 处的切平面平行于平面 $2z+2y-4x+1=0$，………(6 分)

且所求的切平面方程为 $2\left(x-\frac{1}{2}\right)-(y+1)-(z-1)=0$，即 $2x-y-z-1=0$． ……(8 分)

曲面 $z=2x^2+\frac{y^2}{2}$ 上点 $M_0\left(\frac{1}{2},-1,1\right)$ 处的法线方程为 $\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$． ……(10 分)

四（本题满分 8 分）、

解：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr\int_0^a dz$ ………… (4 分)

$$=\frac{\pi aR^4}{2}$$ ……………………(8 分)

五（本题满分 8 分）、

解：$\because a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=2(\pi+1),$ ………(2 分)

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x+1)\cos nxdx$$

当 n=2k 时，$a_n = 0$

当 n=(2k-1) 时，$a_n = \dfrac{-8}{n^2\pi}$ ························ 4 分

因此，

$$f(x) = -\frac{8}{\pi}(\cos x + \cos 3x + \cdots\cdots) \qquad (0 \le x \le \pi) \quad \cdots\cdots \ 8 \text{ 分}$$

六（本题满分 8 分）

解 设Σ_1：$x^2 + y^2 \le R^2$ 的上侧 ······ 1 分

$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdxdy \cdots\cdots \ 3 \text{ 分}$$

$$= -2\pi R^3 \qquad \cdots\cdots \ 8 \text{ 分}$$

七（本题满分 8 分）

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = x^4$ 因此，收敛域为（$-1,1$) ······ 3 分

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} = \frac{x^4}{x^4+1} \qquad \cdots\cdots \ 5 \text{ 分}$$

$$s(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\arctan x - x \qquad (-1 < x < 1) \cdots\cdots 8 \text{ 分}$$

八（本题满分 4 分）

证 由于$\displaystyle\iint_D \frac{f(x)}{f(y)} = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}$ ······ 4 分

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)} = \frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right]dxdy \qquad \cdots\cdots \ 6 \text{ 分}$$

$$\ge \iint_D dxdy = (b-a)^2 \qquad \cdots\cdots \ 8 \text{ 分}$$