浙江理工大学 2020-2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中试卷

参考答案与评分标准

一、 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设 $\vec{a}=(1,2,1), \vec{b}=(-2,3,2)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的两个向量，则下列说法中正确的是： (D)
   (A) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直。 (B) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行。
   (C) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角大于 90 度。 (D) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角小于 90 度。
2. 设 f 为一个一元函数，假设下面各选项中的方程决定的 $\mathbb{R}^3$ 中的点集均非空，问哪个方程决定的点集具有绕 y 轴的旋转对称性： (A)
   (A) $f(x^2+z^2)+y=0$ (B) $f(y^2+x^2)+z=0$
   (C) $f(y)+z=0$ (D) $f(z)+x=0$
3. 设 $z=f(x,y)$ 为定义在点 (x_0,y_0) 的一个开邻域上的函数，下列说法中正确的是：(D)
   (A) 若 f 在 (x_0,y_0) 处偏导数均存在，则 f 在 (x_0,y_0) 处极限存在。
   (B) 若 f 在 (x_0,y_0) 处偏导数均存在，则 f 在 (x_0,y_0) 处连续。
   (C) 若 f 在 (x_0,y_0) 处偏导数均存在，则 f 在 (x_0,y_0) 处可微。
   (D) 以上说法都不对。
4. 设 $z=f(x,y)$ 为定义在点 (x_0,y_0) 的一个开邻域上的所有二阶偏导函数均连续的函数，设 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$, $f_{xy}(x_0,y_0)=0$, $f_{xx}(x_0,y_0)=2$, $f_{yy}(x_0,y_0)=0$, 则下列说法中正确的是： (B)
   (A) (x_0,y_0) 必定为极小值点。 (B) (x_0,y_0) 可能为极小值点。
   (C) (x_0,y_0) 一定不是极值点。 (D) 以上说法都不对。
5. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\}$, 问下面哪个积分必为零： (A)
   (A) $\iiint\limits_{\Omega}(xe^y+ye^x)dxdydz$ (B) $\iiint\limits_{\Omega} 1dxdydz$
   (C) $\iiint\limits_{\Omega}\cos x dxdydz$ (D) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2-y^2)dxdydz$
6. 设 $\Omega=\{(x,y,z)|x+y+z\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$, f 为 Ω 上的连续函数，问下面哪个式子计算了 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$: (C)
   (A) $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$ (B) $\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_{x+y}^1 f(x,y,z)dz$
   (C) $\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dx\int_0^{1-x-y} f(x,y,z)dz$ (D) $\int_0^1 dy\int_{1-y}^1 dx\int_{1-x-y}^1 f(x,y,z)dz$

二、 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设直线 L 的方程为 $\begin{cases} 2x+3y+4z=1 \\ -2x+y-z=0 \end{cases}$,则一个与 L 的方向平行的向量为: $\underline{\quad(-7,-6,8)\quad}$
2. 设平面 Γ 的方程为 $2x-3y-4z=5$，则 Γ 与 xOy 坐标平面的夹角的余弦为: $\underline{\quad\frac{4}{\sqrt{29}}\quad}$.
3. 求函数 $f(x,y)=x^y$ 在点 $(2,1)$ 处的微分为: $\underline{\quad dx+2\ln 2dy\quad}$.

4. 求函数 $f(x,y)=x^y$ 在点 $(2,1)$ 处变化率为零的方向: $\underline{\frac{1}{\sqrt{4(\ln 2)^2+1}}(-2\ln 2,1)}$.

5. 设函数 $x=g(y)$, 是在点 $(-1,-1)$ 附近由方程 $x^4+2y^4=3$ 所决定的隐函数, 则 $g'(-1)=$ $\underline{-2}$.

6. 设 $f(x,y)$ 是定义在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数, 交换 $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$ 的积分顺序得到: $\underline{\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy}$.

三、 计算题(本题共 6 小题,每小题 8 分,满分 48 分,应写出必要的演算过程及文字说明,直接写答案零分)

1. 求由方程组 $\begin{cases} x^2+y^4+2z^2-4x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 所决定的曲线在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程与法平面方程。

解. 切线方程:

$$\begin{cases} (-2)(x-1)+4(y-1)+4(z-1)=0 \\ 2(x-1)-3(y-1)+5(z-1)=0 \end{cases}$$

即:

$$\begin{cases} -x+2y+2z=3 \\ 2x-3y+5z=4 \end{cases}$$

切线方向为 $(-1,2,2)\times(2,-3,5)=(16,9,-1)$,
故法平面为:

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0.$$

□

2. 设 $z=z(x,y)$ 为由方程 $F(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$ 所局部决定的隐函数,其中 F 为连续可微函数,试求: $\frac{\partial z}{\partial x}$.

解. 令 $G(x,y,z)=F(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$, 由隐函数定理, $z_x=-\dfrac{G_x}{G_z}$, 又由复合函数求导法则, $G_x=F_1+2F_2x$, $G_z=F_1+2F_2z$. 故

$$z_x=-\frac{F_1+2F_2x}{F_1+2F_2z}.$$

□

3. 用 Lagrange 乘数法求函数 $f(x,y,z)=x-2y+2z$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的极大值与极小值。

解. 考虑 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$. L 的临界点由下面的方程组决定:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=-2+2\lambda y=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}=2+2\lambda z=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-1=0. \end{cases}$$

由前三个方程得: $x=-\frac{1}{2\lambda}, y=\frac{1}{\lambda}, z=-\frac{1}{\lambda}$. 代入最后一个方程得: $\frac{9}{4}\frac{1}{\lambda^2}=1$. 所以 $\lambda=\pm\frac{3}{2}$. 所以可能的极值点为: $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$, $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$. f 在这两点的取值分别为: -3 和 3. 注意该问题的几何意义是求使平面 $x-2y+2z=C$ 与单位球面相交的 C 的极值，由该几何意义知 C 有一个极大值，一个极小值，所以该条件极值问题的极大值为 3，极小值为 -3. □

4. 设 D 为 xOy 平面上由 $y=\pi-x, x=\pi, y=\pi$ 所围成的区域，试求 $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy$.

解.

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy &= \int_0^\pi \left(\int_{\pi-x}^\pi \frac{\sin x}{x}dy\right)dx \\ &= \int_0^\pi \sin x dx \\ &=2.\end{aligned}$$

□

5. 设 Ω 是以点 $(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(0,0,2),(0,2,2),(2,2,2)$ 为顶点的棱台，试求 Ω 的体积 V。

解. 用平行于 xOy 平面的平面截 Ω, 可知:

$$\begin{aligned}V &= \iiint_\Omega 1dxdydz \\ &= \int_1^2 (\text{直角边边长为}z\text{的直角三角形的面积})\,dz \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2}z^2dz \\ &= \frac{7}{6}\end{aligned}$$

□

6. 设 $a>0$, 试求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 所截下的部分的曲面的面积。

解. 记 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-ax\leqslant 0\}$, 则所求面积为:

$$\begin{aligned}S &= \iint\limits_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \\ &= \iint\limits_D \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy \\ &= \sqrt{2}\iint\limits_D dxdy \\ &= \sqrt{2}\pi\cdot\frac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

□

四、（本题 4 分）考虑函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2}, & 若(x,y)\neq(0,0)\\ 0, & 若(x,y)=(0,0).\end{cases}$ 证明：f 在 $(0,0)$ 处不可微。

证明. 对于任意一个方向 (u,v), 极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(tu,tv)-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{u^3}{u^2+v^2}=\dfrac{u^3}{u^2+v^2}$ 存在，故沿 (u,v) 的方向导数存在，第一个结论得证。特别地，分别令 $(u,v)=(1,0)$,$(u,v)=(0,1)$ 得 $f_x(0,0)=1$,$f_y(0,0)=0$. 下证 f 在 $(0,0)$ 处不可微，若可微，由定义，必有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. 代入 f,f_x,f_y 表达式，得:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3/(x^2+y^2)-x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$$

又当 (x,y) 沿 $l=\{(x,y)|y=kx\}$ 趋近零时，有:

$$\lim_{l\ni(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-k^2x^3}{(1+k^2)^{3/2}|x|^3},$$

该极限当 $k\neq 0$ 时显然不存在（左右极限不等），故矛盾，故 f 在 $(0,0)$ 处不可微。 □