高等数学 A1

浙江理工大学期中试题汇编

（答案册 上）

学校：____________________

专业：____________________

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

（此试卷为 2022 年第三版）

目录

（注：第 1 套试题答案在最后）

资料说明：

此资料为高数 A1 答案册，如需试卷册或者高等数学 A1 期末历年试题、高等数学 A2 期中和期末试题、线性代数试题、概率论试题、物理部分题库以及专业课知识相关试题等等，欢迎加入创琦杂谈学习交流群（QQ 群号：749060380）

如需讨论本试卷试题内容，请加入 cq 数学物理学习群（QQ 群号：967276102），群里讨论氛围浓厚，希望可以帮到你。

本题目准备在 B 站上讲解部分经典题目（后期会在 www.cqtalk.cn 网站和相应 app 上发布，网站正在开发中）（本人 B 站名称为“张创琦”，头像为一朵白色的花），讲解视频预计 10 月 26 号（周三）发布，大家可以进行学习哈。感谢叶同学、王同学、丁同学、郑同学的大力帮助。

2013 年和 2015 年的高数 A1 期中试卷缺失，在这里表示抱歉哈。

本资料还有试卷册下，可移步创琦杂谈学习交流群或者 cq 数学物理学习群下载。

2 浙江理工大学 2020—2021 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题

1. A　2. B　3. A　4. D　5. C　6. D

二、填空题

1. $x=0, y=1$；　2. 1/2；　3. y=x-1；

4. $\left(x^2+20x+90\right)e^x$；　5. $3e^x(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$；　6. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

三、计算题

1. 解：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x\ \frac{1}{3}x^2} \text{……………………………………2 分}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2} \text{……………………………………………4 分}$$

$$=1 \text{……………………………………………………6 分}$$

2.解：　$f(1)=0$.

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2-1)=0 \text{………………………………1 分}$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b \text{……………………………2 分}$$

可导一定连续，由 x=1 处的连续性知 $a+b=0$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$
$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)+a+b}{x-1}=a \text{………………4 分}$$

由可导性知：a=2。所以 b=-2……………………………………………………………6 分

3. 解：$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{1+t^2}$　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-1}{1+t^2}$…………………………………… 2 分

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-1}{2t} \text{……………………… 3 分}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+t^2}{4t^3} \text{……………………… 6 分}$$

4. 解：当 x=0 时，带入原方程可得 y=1，…………………………………………………… 1 分

方程的两边同时对 x 求导，得：

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)'}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(x^2+y^2\right)' \text{……………….... 2 分}$$

整理得， $y'=\dfrac{y-x}{x+y}$ ……………………………………………………………4 分

将（0，1）带入上式 $y'(0)=1$……………………………………………………… 6 分

5. 解：函数表达式两边取对数 ，$\ln y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ ………………………………. 2 分

上式两边求导，得到， 即 $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$， $y'=y\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$ . . 4 分

因此， $\mathrm{d}y=\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}(1+x)^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ ……………………………………6 分

四、综合题

1. 解：若 k=0 时，则 y=0, 它是一条直线，没有拐点，因此 $k\neq0$；

$f'(x)=4k(x^3-3x), f''(x)=12k(x^2-1)$,..…………………………..1 分

令 $f''(x)=0$, 得 x=±1……………………………………………………………2 分

当 x<-1 时，$ky''>0$；当-1<x<1 时，$ky''<0$；当 x>1 时，$ky''>0$。所以

(±1，4k)为拐点……………………………………………………………………3 分

所以在点(1, 4k)处的法线方程：$y-4k=\dfrac{1}{8k}(x-1)$，

在点(-1, 4k)处的法线方程：$y-4k=\dfrac{1}{-8k}(x+1)$ …………………………………….4 分

如果它们通过原点，得 $-4k=\dfrac{1}{-8k}\Rightarrow k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ ……………………………..…...6 分

2. 解：$f'(2)=3(x^2-a)\big|_{x=2}=0\Rightarrow a=4$， ……………………………………………….2 分

又 $f(2)=8-6a+b=8$，解方程组得，$a=4$，$b=24$ …………………………4 分

故 $f(x)=x^3-12x+24$。令 $f'(x)=3(x+2)(x-2)=0$，得 $x=2$，或 $x=-2$。

从而可得下表，

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
f'	+	0	-		+
f	增	极大值 40	减	极小值 8	增

……..6 分

所以， $(-\infty,-2)$，$(2,+\infty)$ 是增区间, $(-2,2)$ 为减区间，极大值为 40，极小值为 8….8 分

五、证明题

1.证：

设 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3, x\in[0,\frac{\pi}{2})$,则 $f(0)=0$, ………………………………………....1 分

$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2>0, x\in(0,\frac{\pi}{2})$.…………………………………...…..2 分

所以，$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，所以当 $0<x<\frac{\pi}{2}$， $f(x)>f(0)=0$.

即 $\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$.……………………………………………………………………..…..4 分

2. 令 $F(x)=f(x)\sin x$，则 $F'(x)=f'\sin x+f\cos x$. ……………………..........................1 分

则 $F(x)$在[0, 1]上连续，在(0, 1)内可导，且 F(0)=F(1)=0。……………………………..…...2 分

由罗尔中值定理, 存在 ξ ∈(0, 1)，使得 $F'(\xi)=0$. 即 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.…………...4 分

3 浙江理工大学 2019—2020 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题

1.B 2.C 3.C 4.B 5.B 6.D

二、填空题

1). $\sqrt{1+4x^2}dx$ 2   2). $(-1)^{n-1}(n-1)!$ 3). 2 1

4). $\left(x^2+40x+380\right)e^x$ 5). $3e^x(\cos x-\sin x)dx$ 6). $\sqrt{3}$

一、1. B

(1) ∵ $a_n>0$. ∴ $S_n = S_{n-1}+a_n > S_{n-1}$ ∴ $\{S_n\}$单调递增.

又$\{S_n\}$有界 ∴ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A$ (存在) (∵单调有界数列必收敛)

∵ $a_n = S_n - S_{n-1}$ ∴ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$.

即$\{a_n\}$收敛(到0)

∴当$a_n>0$时, $\{S_n\}$有界 $\Rightarrow$ $\{a_n\}$收敛

(2) 反之不成立. 举反例

如 $a_n=1$, 则$\{a_n\}$收敛, 但 $S_n=1+1+\cdots+1=n$, $\{S_n\}$无界.

2. C

A. (1, 0): $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4 \triangleq (x-1)\cdot f_1(x)$. 则

$y' = f_1(x) + (x-1)f_1'(x)$. $y'' = f_1'(x) + f_1'(x) + (x-1)f_1''(x)$, $y''|_{x=1} \neq 0$. 排除A选项

B. (2, 0): 令 $y=(x-2)^2 f_2(x)$. 则 $y' = 2(x-2)f_2(x) + (x-2)^2 f_2'(x)$

$y'' = 2f_2(x) + 2(x-2)f_2'(x) + 2(x-2)f_2'(x) + (x-2)^2 f_2''(x)$, $y''|_{x=2} \neq 0$. 排除B

C (3, 0) 令 $y=(x-3)^3 f_3(x)$. 则 $y' = 3(x-3)^2\cdot f_3(x) + (x-3)^3 f_3'(x)$

$y'' = 6(x-3)f_3(x) + 3(x-3)^2\cdot f_3'(x) + 3(x-3)^2 f_3'(x) + (x-3)^3 f_3''(x)$

$= (x-3)[6f_3(x) + 6(x-3)f_3'(x) + (x-3)^2 f_3''(x)]$. $y''|_{x=3}=0$. 且异号两侧. 选C

D. (4, 0) 令 $y=(x-4)^4 f_4(x)$. 则 $y' = 4(x-4)^3\cdot f_4(x) + (x-4)^4 f_4'(x)$

$y'' = 12(x-4)^2\cdot f_4(x) + 4(x-4)^3\cdot f_4'(x) + 4(x-4)^3 f_4'(x) + (x-4)^4\cdot f_4''(x)$

$= (x-4)^2\cdot[12f_4(x) + 8(x-4)f_4'(x) + (x-4)^2 f_4''(x)]$. $y''|_{x=4}=0$ 但两侧不异号

排除D.

3. C

∵ $f(x)$在$x=0$处连续, ∴ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(mx)}{x}=3$ 而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(mx)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{mx}{x} = m$. ∴ $m=3$

4. B

∵ $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(3x)}{x} = 3\lim\limits_{x\to0}\frac{f(3x)}{3x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{3x\to0}\frac{f(3x)}{3x} = \frac{1}{6}$ 即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{6}$.

∴ $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)}{x} = 2\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)}{2x} = 2\lim\limits_{2x\to0}\frac{f(2x)}{2x} = 2\times\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$\boxed{5 \quad B.}$

$\because$ A. $e^x-1 \sim x$.　B. $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$.　C. $\tan x \sim x$　D. $\ln(1+x) \sim x$.（当 $x \to 0$ 时）

$\therefore$ B入选.

$\boxed{6 \quad D.}$

A 函数在某点连续、一定在该点可导. ×　$\because$ 可导 $\Rightarrow$ 连续、

B. 函数在某点不可导一定在该点不连续　×　$\because$ 如 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导但连续

C 函数在某点不可导一定在该点连续、×　$\because$ 如 $y=sgn(x)$ 在 $x=0$ 处.

D. 函数在某点可导一定在该点连续. ✓

二、1　$ds = \sqrt{1+4x^2}\,dx$.　$K = 2$.

$\because y = -x^2+1$.　$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+(-2x)^2}\,dx = \sqrt{1+4x^2}\,dx$.

$K = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$.　顶点 $(0,1)$.

$\therefore K|_{顶点} = \frac{2}{(1+4\times 0^2)^{3/2}} = 2$.

2.　$f'(0) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$

$\because f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\cdot(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\underbrace{(e^x-1)}_{\sim x}\cdot(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$

$= (e^0-2)(e^0-3)\cdots(e^0-n) = (-1)(-2)\cdots(-n+1) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$

3. 渐近线条数为 __2__ 条，无穷间断点有 __1__ 个.

$\because$ 水平：$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1} = 1$. $\therefore y=1$ 是水平渐近线.

铅直：疑似有 $x=\pm 1$. $\begin{cases} x\to 1 \text{时}. \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1} = \infty. & \therefore x=1 \text{是铅直渐近线} \\ & \text{也是无穷间断点} \\ x\to -1 \text{时}. \lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^2-1} = \lim_{x\to -1}\frac{x}{x-1} = 2 & \therefore x=-1 \text{不是铅直渐近线}. \end{cases}$

斜：$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x}{(x^2-1)x} = 0$. $\therefore$ 无斜渐近线.

4　$y^{(20)} = (x^2e^x)^{(20)} = C_{20}^0(x^2)^{(0)}(e^x)^{(20)} + C_{20}^1(x^2)'(e^x)^{(19)} + C_{20}^2(x^2)''(e^x)^{(18)}$

$= x^2\cdot e^x + 20\times 2x\times e^x + \frac{20\times 19}{2}\times 2\times e^x$

$= (x^2+40x+380)e^x$

5.　$dy = y'\,dx = (3e^x\cos x)'\,dx = (3e^x\cos x - 3e^x\sin x)\,dx = 3e^x(\cos x - \sin x)\,dx$

6. $\because f(x)$ 在 $[0,3]$ 上满足罗尔定理条件. $\therefore$ 至少 $\exists\,\xi\in(0,3)$. s.t. $f'(\xi)=0$

而 $f'(x) = (x^3-9x+2)' = 3x^2-9$. 要使 $f'(\xi)=0$. $\xi = \pm\sqrt{3}$.（$\xi\in(0,3)$. 负值舍去）

$\therefore \xi = \sqrt{3}$

三、计算题

1. 解：.原式 $= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-cosx}$　　　　2 分

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sinx}$$　　　　3 分

$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{cosx}$　　　　4 分

$=2$　　　　5 分

2. 解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots\left(\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}\right)\right]$ 3 分

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]$ 4 分

$=1$ 5 分

3.解：可导一定连续，由连续性知：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}b(1-x^2)=b$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{ax}=1\therefore b=1$

--2 分

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{b(1-x^2)-b}{x-0}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}-b}{x-0}=a$$

--------------4 分

由可导性知：$a=0$ --5 分

4. 解：$\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{1+t^2}$ $\frac{dy}{dt}=\frac{-1}{1+t^2}$ 2 分

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-1}{2t}$ 3 分

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+t^2}{4t^3}$ 5 分

5. 解：当 x=0 时，带入原方程可得 y=1， 1 分

方程的两边同时对 x 求导，得：$\cos(y+xy')\cos(xy)+\frac{y'-1}{y-x}=1$ 4 分

将（0，1）带入上式 $y'(0)=1$ 5 分

6. 解：函数表达式两边取对数 ，$lny=sinx\cdot lnx$ 2 分

上式两边求导，得到$\frac{y'}{y}=cosx\ lnx+\frac{sinx}{x}$， 即 $y=y'\left(cosx\ lnx+\frac{sinx}{x}\right)$ 4 分

$dy=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)dx$ 5 分

四、综合题

1. 解：$f'(x)=nx^{n-1}$,在（1，1）处$k=f'(1)=n$， 2 分

切线方程为：$y-1=n(x-1)$， 3 分

令 y=0,可得切线与 x 轴交点$x_n=1-\frac{1}{n}$, 4 分

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$ 6 分

2. 解：由于 $f(x)$ 为可导函数，且在 $x=1$ 处有极值，故 $f'(1)=(3x^2+2ax+b)\big|_{x=1}=0$，

即$3+2a+b=0$。又 $f(1)=1+a+b=-2$，解方程组得，$a=0$，$b=-3$。

故 $f(x)=x^3-3x$。令$f'(x)=3x^2-3=0$，得$x=1$，或$x=-1$。

令$f''(0)=6x=0$，解得$x=0$。从而可得下表，

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	+	0	-		-	0	+
f''	-		-	0	+		+
f	增，凸	极大值 2	减，凸	拐点(0，0)	减，凹	极小值-2	增，凹

所以，(1) $(-\infty,-1)$，$(1,\infty)$是增区间, $(-1,1)$为减区间，极大值为 2，极小值为 -2；

(2) $(-\infty,0)$是凸区间，$(0,\infty)$为凹区间，拐点为 (0，0)。

五、证明题

1.证：函数 $f(x)=lnx$,定义域$(0，+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}$ ，$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$,在定义域上为凸函数，根据凸函数定义知：$\ln\frac{x+y}{2}>\frac{lnx+lny}{2}=ln\sqrt{xy}$ 得证

2. 原式等价于$\frac{f'(\xi)}{a+b}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$，即 $\frac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$。因为函数在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件，故有$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$。

又因为$f(x)$和x^2在$[a,b]$上满足柯西中值定理的条件，所以有$\frac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$，化简可得原命题成立。

4 浙江理工大学 2018—2019 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题.1. D 2.B 3.B 4 .D 5 .B 6. C

二、填空

1. $a=-2,b=1$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. 2

4. 1 5. $(-1)^n 2\cdot n!(1+x)^{-(n+1)}$ 6. $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$

三 1.解：

$$\lim_{x\to1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]\overset{x-1=t}{=}\lim_{t\to0}\left[\frac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t\ln(1+t)}\right]------------------2分$$

$$=\lim_{t\to0}\left[\frac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t\cdot t}\right]=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)+1-1}{2t}-----------------------------------4分$$

$$=\frac{1}{2}---5分$$

2. 解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\left(e^x-1\right)\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x\cdot\frac{1}{3}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{\frac{x^3}{3}}---------3 分$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{x^2}=1--5分$$

3.解：

$$y'=1\cdot\arcsin\frac{x}{2}+x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=\arcsin\frac{x}{2}------------3分$$

$$dy=y'dx=\arcsin\frac{x}{2}dx-------------------------------------5分$$

4．解：可导一定连续

（1）由连续性知

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{-x}{2}}{x}=\frac{1}{2}---------------------------2分$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(ax+b)=b,\ f(0)=b,\therefore b=\frac{1}{2}---3分$$（2）

由可导性知

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2-2\sqrt{1-x}-x}{2x^2}$$

$$\overset{L'}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1}{4x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1-\sqrt{1-x}}{4x\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x}{2}}{4x}=\frac{1}{8}------------------------4分$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=a,\therefore a=\frac{1}{8}-----------------------------------5分$$

5. 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t-\cos t+t\sin t}{\frac{1}{\cos t}(-\sin t)}=-t\cos t$，--2 分

$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=\left.\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=\left.\dfrac{-\cos t+t\sin t}{\frac{1}{\cos t}(-\sin t)}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-\pi}{6}$ ---------------------------------------5 分

四、1 **解：** $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$，$\therefore x=0,x=2$ 是所有可能的极值点----------------1 分

$y''=6x-6$　　$\therefore x=0$ 是所有可能的凹凸性改变的点____2 分

x	(-∞，0)	0	(0,1)	1	(1,2)	2	(2,+∞)
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y	增、凸	极大值 9	减、凸	拐点（1,7）	减、凹	极小值 5	增、凹

单调增加区间：$(-\infty,0]$、$[2,+\infty)$，单调减少区间：$[0,1]$、$[1,2]$，极大值：9，极小值：5___4 分

凸区间：$(-\infty,1]$，凹区间：$[1,+\infty)$，拐点：（1,7）____6 分

2 解：　$f(x)=\begin{cases}x^3,x\geq 0\\ x,x<0\end{cases}$ --3分

2.

当 $x>0$ 时，$f(x)$连续；当 $x<0$ 时，$f(x)$连续；---4 分

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0$，$f(x)$在 $x=0$ 处连续。

所以 $f(x)$处处连续。--6 分

3. 法一：令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，则---2 分

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2},x=e$ 是可导区间内的唯一驻点--3 分

$x<e$时，$f'(x)>0;x>e$时，$f'(x)<0\Rightarrow f_{\max}=f(e)=\dfrac{1}{e}$ --------------------------------4 分

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ---5 分

$\therefore$ 当$0<a<\dfrac{1}{e}$时，有2个实根；当$a=\dfrac{1}{e}$时，有1个实根；当$a>\dfrac{1}{e}$时，有0个实根。6 分

4. 法二：令 $f(x)=\ln x-ax(x>0)$，则--2 分

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a, x=\dfrac{1}{a}$ 是可导区间内的唯一驻点--3 分

$0<x<\dfrac{1}{a}$时，$f'(x)>0; x>\dfrac{1}{a}$时，$f'(x)<0\Rightarrow f_{\max}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}-1$ ------------------4 分

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ---5 分

$\therefore$ 当$\ln\dfrac{1}{a}-1>0$时，即$0<a<\dfrac{1}{e}$时，有2个实根；---6 分

当$\ln\dfrac{1}{a}-1=0$时，即$a=\dfrac{1}{e}$时，有1个实根；

当$\ln\dfrac{1}{a}-1<0$时，即$a>\dfrac{1}{e}$时，有0个实根。

五、1.证明： 要证$\left(1+\xi^2\right)f'(\xi)=1$，只需证$f'(\xi)-\dfrac{1}{1+\xi^2}=0$，

令 $F(x)=f(x)-\arctan x$ ---2 分

$\because F(x)$在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导,$F(0)=0, F(1)=0$

$\therefore$由罗尔定理知：至少$\exists\xi\in(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$

即$\exists\xi\in(0,1)$,使得$\left(1+\xi^2\right)f'(\xi)=1$.--4 分

2. 证明：令 $f(x)=(1+x)\ln x-2(x-1)$，即证 $f(x)>0,(x>1)$ -----------------------------2 分

因为 $f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1$， --3 分

$f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}>0,(x>1)\Rightarrow f'(x)$在$x\geq 1$时单增$\Rightarrow f'(x)>f'(1)=0(\forall x>1)$ ---------4 分

$\Rightarrow f(x)$在$x\geq 1$时单增$\Rightarrow f(x)>f(1)=0,(\forall x>1)$，得证。----------------------------------5 分

5 浙江理工大学 2017—2018 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题.1. C　　2.D　　3.A　　4 .D　　5 .A　　6. C

二、填空

1. $a=3,b=0$　　2. $1<a<2$　　3. $e^{-\frac{2}{e}}$（$x=e^{-1}$）

4、　3 ，　5.　-1，　6. $x=0,y=1$

三 1.解：

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right]$$ ----------------2分

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$$ ----------------4分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}$$ ----------------5分

2. 解：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\ln(\sin x)^{\tan x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\tan x\ln(\sin x)}$$ ----------------2分

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x\ln(\sin x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\cot x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\csc^2 x}=0$$ ----------------4分

$\therefore$ 原式$=e^0=1$ ----------------5分

3.解：

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+2n}=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}$$

----------------2 分

$$\because\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$$ ----------------4 分

由夹逼准则知所求极限为$\frac{1}{2}$ ---5 分

4．解：方程两边同时求导

$e^{x+y}(1+y')-\sin xy(y+xy')=0$ ----------------------3 分

$\therefore\ y'=\dfrac{y\sin xy-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin xy}$ --5分

5. 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$，----------------------------------2 分

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(t)}{dx}=\dfrac{1}{f''(t)}$ ---5 分

6. 解：可导一定连续，由连续性知：

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}b(1-x^2)=b$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{ax}=1$

$\therefore b=1$ --2 分

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{b(1-x^2)-b}{x-0}=0$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{ax}-b}{x-0}=a$ ---------------4 分

由可导性知：$a=0$ --5 分

四、1 **解：** $f(x)$的间断点为：$x_1=0,x_2=2,x_3=-2$ --------------------------1 分

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x-2)x}{-x(x^2-4)}=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x-2)x}{x(x^2-4)}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=0$是第一类跳跃间断点；-----3 分

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)x}{x(x^2-4)}=\dfrac{1}{4}$　　$\therefore x=2$是第一类可去间断点-------------5 分

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)x}{-x(x^2-4)}=\infty$　　$\therefore x=-2$是第二类无穷间断点------------6 分

2. 解：由条件可得

$$\begin{cases} y(-2)=44 \\ y'(-2)=0 \\ y(1)=-10 \\ y''(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=-24 \\ d=16 \end{cases}$$ --4 分

$\therefore y=x^3-3x^2-24x+16$

单调增加区间：$(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$ ---5 分

单调减少区间：$(-2,4)$ --6 分

凸区间：$(-\infty,1)$ --7 分

凹区间：$(1,+\infty)$ --8 分

五、1.证明： 要证 $a^b>b^a$，只需证 $b\ln a>a\ln b$，令 $f(x)=x\ln a-a\ln x\ (x\ge a)$ -----2 分

$\because f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}>1-\dfrac{a}{x}\ge 0(x\ge a)$，

$\therefore f(x)在x\ge a$ 时单调增加，

$\therefore b>a$ 时，$f(b)>f(a)=0$

即 $b\ln a>a\ln b$，所以 $a^b>b^a$.---4 分

2

证 先证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$. 用反证法.

若不存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$，则在 (a,b) 内恒有 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$，不妨设 $f(x)>0$（对 $f(x)<0$，类似可证），则

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geqslant 0,$$

$$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leqslant 0.$$

从而 $f'(a)f'(b)\leqslant 0$，与已知条件矛盾. 所以在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

再证存在 $\eta\in(a,b)$，使 $f''(\eta)=0$.

由 $f(a)=f(b)=f(\xi)$ 及罗尔定理知，存在 $\eta_1\in(a,\xi)$ 和 $\eta_2\in(\xi,b)$，使 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$，再在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上对函数 $f'(x)$ 运用罗尔定理，知存在 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使 $f''(\eta)=0$.

6 浙江理工大学 2016—2017 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题。

1-6 C D A B B C

二、填空题。

1 2　　2 $x=\pm\sqrt{2},\ y=0$　　3 $\frac{1}{2}$

4 $(-1,0)$或$(-1,0]$　　5 $2e^{x^2}(2x\cos x-\sin x)dx$　　6 $\ln2$ 或 $\frac{1}{3}\ln\xi$

三、计算题

1. 解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sin2x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{x}{4}}-1}{\sin2x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(\frac{x}{4})}{2x}=\dfrac{1}{8}$

2. 解：

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\frac{1}{1-x}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{(1-x)e^x-1}{x^2}\frac{1+x^2}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-x)e^x-1}{x^2}\lim_{x\to0}\frac{1+x^2}{1-x}=\lim_{x\to0}\frac{-xe^x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

3. 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

4. 解：方程两边对 x 求导得 $y+xy'=(1+y')e^{x+y}$，所以 $y'=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$

5. 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d\frac{dy}{dx}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$

6. 解：由于 $x>0,x<0$ 时 $f(x)$ 是初等函数，故可导，所以只需 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导即可。

若函数在 $x=0$ 可导，则必在 $x=0$ 连续。又

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)=0, f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}(ax+b)=b$

所以由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续可得 $f(0^+)=f(0^-)=f(0)=0$，得 $b=0$。

又 $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)-0}{x-0}=1$，$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{ax-0}{x-0}=a$

故由 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，只需要 $f_+'(0)=f_-'(0)$，即 $a=1$

四、

1. 解：$y'=-\dfrac{1}{x^2}+2x$，$y''=\dfrac{2}{x^3}+2=0$，$x=-1$，拐点 $(-1,0)$，$y'(-1)=-3$，

$\therefore$ 所求切线方程为：$y=-3(x+1)$，即 $3x+y+3=0$。

7 浙江理工大学 2014—2015 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题（6 小题×4 分=24 分）

1-6　C　D　A　D　B　D

二、填空题（6 小题×4 分=24 分）

1　0　e　　2　$\frac{1}{2}$　　3　$-\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}dx$

4　$-\sqrt{2}$　　5　$-2^n(n-1)!$　　6　0　27

三、计算题（5 小题×5 分=25 分）

1（提示：分子有理化，等价代换，答案：$-\frac{1}{4}$）

2（提示：重要极限 II 求出 $y=xe^{3x}$，因此 $\dfrac{dy}{dx}=(1+3x)e^{3x}$）

3（提示：夹逼定理，答案：1）

4（提示：隐函数求导法，答案：$y'=\dfrac{1}{2+\ln y}, y''=-\dfrac{1}{y(2+\ln y)^3}$）

5（提示：先设切点，答案：$x+25y=0, x+y=0$）

四、解答题（2 小题×6 分=12 分）

1（提示：用洛必达法则，（1）$a=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=f'(0)$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{f''(0)}{2}$，$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\dfrac{f''(0)}{2}$）

2（答案：（1）$(-\infty,-1),(1,+\infty)$是增区间，$(-1,1)$为减区间，极大值为 2，极小值为-2；（2）$(-\infty,0)$是凸区间，$(0,+\infty)$为凹区间，拐点为（0,0））

五、数学建模题（本题 7 分）

（提示：漏斗中现存水的容量为$V_1=\dfrac{\pi x^3}{27}$，桶中现有水的容量为$V_2=25\pi y$，$\dfrac{dV_1}{dt}=-\dfrac{dV_2}{dt}$，

所以$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{x^2}{225}\dfrac{dx}{dt}=0.64$。）

六、证明题（2 小题×4 分=8 分）

1（提示：作辅助函数 $F(x)=\ln x$，在$[a,b]$上使用柯西中值定理。）

2（提示：令 $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$，在$\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right],\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上分别使用零点定理，证明至少有两个零点。再用罗尔定理反证，不可能有更多的零点。）

8 浙江理工大学 2012—2013 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一 选择题

1. A　2. B　3. B　4. C　5. D　6. A

二 填空题

1. 2；　2. 0；　3. e^2；　4. $\left(x^2+40x+380\right)e^x$；　5. $2xdx$；　6. $x=1$

三 计算题

1 解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+e^x\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{x}{e^x}+1}}=e$

2 解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f\left(x\right)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f\left(x\right)\sin x}{2}}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(x\right)}{6}=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)=12$

3 解：$y'=\left(x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}\right)'=\arcsin\dfrac{x}{2}+x\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\dfrac{1}{2}+\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{2}$

4 解：方程两边关于 x 求导，$\dfrac{1}{y}y'=-ye^x-e^xy'\Rightarrow y'=-\dfrac{y^2e^x}{1+e^x}$

5 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$，

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(t)}{dx}=\dfrac{1}{f''(t)}$。

四 1 解：设 $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，由 $f\left(-1\right)=-11$，$f'\left(-1\right)=0$，$f\left(0\right)=0$，$f''\left(0\right)=0$，$f\left(2\right)=16$，$f'\left(2\right)=0$，有 $a-b+c-d+e=-11$①，$-4a+3b-2c+d=0$②，$e=0$③，$2c=0$④，$16a+8b+4c+2d+e=16$⑤，$32a+12b+4c+d=0$⑥，解得 $a=1,b=-4,c=0,d=16,e=0$，即 $f\left(x\right)=x^4-4x^3+16x$。

四 2 解：连续：$a+b+2=0$；可导：$b=a\ \Rightarrow\ b=-1$，$a=-1$

$$f'(x)=\begin{cases}-\cos x\ , & x>0\\ -e^{-x}\ , & x\le 0\end{cases}$$

五 解：$y=\left(7\times\left(5+\dfrac{x}{700}\right)+29\right)\cdot\dfrac{200}{x}=\dfrac{12800}{x}+2x,\left(50\le x\le100\right)$

$y' = 2 - \dfrac{12800}{x^2} = 0$，解得取值范围内的唯一驻点 $x = 80$，即为所求，此时 $y(80) = 320$。

六 1 证：设 $f(x) = \ln x + x - \dfrac{1}{2}$，在 $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$ 上连续，且 $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} - \dfrac{3}{2} < 0$，$f(1) = \dfrac{1}{2} > 0$，

由零点定理知至少存在一点 $\xi \in \left(\dfrac{1}{e}, 1\right) \subset (0,1)$，使得 $f(\xi) = 0$，即方程 $\ln x = \dfrac{1}{2} - x$ 至少有一个不超过 1 的正根。

六 2 证：令 $F(x) = e^x f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，故存在 $\eta \in (a,b)$，使 $e^{\eta}\left[f(\eta) + f'(\eta)\right] = \dfrac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b-a} \overset{\because f(a)=f(b)=1}{=} \dfrac{e^b - e^a}{b-a}$，又因为函数 $\varphi(x) = e^x$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，故存在 $\xi \in (a,b)$，使 $e^{\xi} = \dfrac{e^b - e^a}{b-a}$，

从而得 $e^{\eta}\left[f(\eta) + f'(\eta)\right] = e^{\xi}$，即 $e^{\eta-\xi}\left[f(\eta) + f'(\eta)\right] = 1$。

9 浙江理工大学 2011—2012 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一 选择题

1．D　　2 B　　3 C　　4 C　5 C　　6 D

二 填空题

1 $a = -7, b = 6$；2 $c = \ln 2$；3 $x = -2$；4 $k = \dfrac{1}{3}$；5 $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$,

$K = \dfrac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$；6 $(\sin x + x\cos x) f'(x\sin x)dx$；

三 简答题

1 解：由 $\dfrac{n(3n+1)}{2(n^2+n)} \le x_n \le \dfrac{n(3n+1)}{2(n^2+1)}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(3n+1)}{2(n^2+n)} = \dfrac{3}{2}$ 和 $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} \dfrac{n(3n+1)}{2(n^2+1)} = \dfrac{3}{2}$，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n}\right) = \frac{3}{2}$$

2 解：$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{(-\frac{1}{2x})(\frac{3}{\sin x})(-2x)} = e^{-6}$

3 解：两边取对数，$\frac{1}{y}\ln x=\frac{1}{x}\ln y$，或$x\ln x=y\ln y$，

两边关于x求导，$\ln x+1=y'\ln y+y'$，

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1+\ln x}{1+\ln y}$，$\frac{dx}{dy}=\frac{1+\ln y}{1+\ln x}$

4 解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}$

5 解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{t}{2})}{\frac{d}{dt}(\ln(1+t^2))}=\frac{1+t^2}{4t}$$ 。

6. 解：$y'=-\frac{1}{x^2}+2x$，$y''=\frac{2}{x^3}+2=0$，$x=-1$，左右二阶导异号，拐点$(-1,0)$，$y'(-1)=-3$，

$\therefore$ 所求切线方程为：$y=-3(x+1)$，即$3x+y+3=0$。

四 解：连续：$a+b=4$；可导：$2b=-4\ \Rightarrow\ b=-2$，$a=6$

$$f'(x)=\begin{cases}-4x\ , & x\le 1\\ -\frac{4}{x^2}\ , & x>1\end{cases}$$

五 解: 莱布尼茨公式:

$$(u\cdot v)^{(n)}=C_n^0u^{(n)}\cdot v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots C_n^nu\cdot v^{(n)}$$

$$y^{(n)}=e^x(x^2+2x+2)+C_n^1(2x+2)e^x+C_n^2 2e^x$$

$$=\boldsymbol{e^x\left[x^2+2(n+1)x+n^2+n+2\right]}$$

六 解：教材 P168，例 3。

七 证明：不妨设$x_1<x_2$，记$x_0=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，则 $x_1<x_0<x_2$。

$\Rightarrow x_0-x_1=(1-\lambda)(x_2-x_1)$, $x_2-x_0=\lambda(x_2-x_1)$，由 Lagrange 定理，有

$$f(x_0)-f(x_1)=f'(\xi_1)(1-\lambda)(x_2-x_1)\qquad(1)$$

$$f(x_2)-f(x_0)=f'(\xi_2)\lambda(x_2-x_1) \qquad (2) \qquad (x_1<\xi_1<x_0<\xi_2<x_2)$$

$f''(x)>0 \Rightarrow f'(x)\uparrow$，$\Rightarrow$ $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，$(1)\times\lambda-(2)(1-\lambda)$，得：

$$f(x_0)-[\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)]=[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)\le 0$$

$\Rightarrow f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 。

10 浙江理工大学 2010-2011 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题。

1-6　　B　A　B　B　B　C

二、1、2　2、$\dfrac{1}{\pi-1}$　3、-2009×2008　4、4 -6　5、$(e,1)$　6、$x=0$

三、1、不存在　2、1（提示：等价代换、洛必达法则）

3、$y'=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$　4、$y''=-2\left(y^{-3}+y^{-5}\right)$　5、$a=b=-2$

四、定义域：$x\neq\pm1$，奇函数，渐近线：$x=\pm1$，$y=x$，图略。

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	+	0	—	null	—	0	—	null	—	0	+
y''	—	—	—	null	+	0	—	null	+	+	+
y		极大值 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$		间断		拐点（0，0）		间断		极小值 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	

五、$(1,3)$

六、1、提示：令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，利用单调性证明

2、提示：构造函数 $F(x)=e^{-\lambda x}f(x)$，在 $[a,b]$ 上利用罗尔定理证明

11 浙江理工大学 2008-2009 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一 选择题（每小题 4 分，共 28 分）

1. B. 2. A. 3. D. 4. D. 5. C. 6. A. 7. C.

二 填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1、x^2-3　2、$-\frac{1}{3}$　3、$a=3$，$b=-2$　4、1　5、-1

三 试解下列各题（每小题 6 分，共 24 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left[\ln\left(1+x\right)\right]\tan 3x}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot 3x}{x\cdot 2x}=\frac{3}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{3}{x-2}(2x-1)}=e^6$

3.设$\begin{cases}x=a\left(\sin t-t\cos t\right)\\ y=a\left(\cos t+t\sin t\right)\end{cases}$，求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$

解：$\frac{dx}{dt}=at\sin t$，$\frac{dy}{dt}=at\cos t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\cot t$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}=-\csc^2 t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/dt}{dx/dt}=-\frac{\csc^3 t}{at}$$

4．已知 $y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$，求 dy

解：$\frac{dy}{dx}=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\arctan x$

$\therefore dy=\arctan xdx$

四 证明题

（1）（4 分）当 $x>0$ 时，则 $e^x>1+x$

证：令 $f\left(x\right)=e^x-1-x$，则当 $x>0$ 时，$f'\left(x\right)=e^x-1>0$，因此 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调增加。

则 $x>0$ 时，$f\left(x\right)>f\left(0\right)=0$，即 $e^x>1+x$

（2）（4 分）设$\varphi(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=1$。证明：对任意正整数a,b，必存在$(0,1)$内的两个数ξ与η，使$\frac{a}{\varphi'(\xi)}+\frac{b}{\varphi'(\eta)}=a+b$

证：因为$\varphi(x)$在$[0,1]$上连续，且$\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=1$，则由介值定理知，对任意正整数a,b，

$\varphi(0)<\frac{a}{a+b}<\varphi(1)$，至少$\exists x_0\in(0,1)$，使得$\varphi(x_0)=\frac{a}{a+b}$。

又因为$\varphi(x)$在$[0,x_0]$上连续，在$(0,x_0)$内可导，由拉格朗日中值定理知，

至少$\exists\xi\in(0,x_0)$，使得$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(x_0)-\varphi(0)}{x_0-0}=\frac{a}{(a+b)x_0}$ $\cdots$①

同理，$\varphi(x)$在$(x_0,1)$上也满足拉格朗日中值定理，

所以至少$\exists\eta\in(x_0,1)$，使得$\varphi'(\eta)=\frac{\varphi(x_0)-\varphi(1)}{x_0-1}=\frac{b}{(a+b)(1-x_0)}$ $\cdots$②

$\therefore\frac{a}{\varphi'(\xi)}+\frac{b}{\varphi'(\eta)}=a+b$

五（5 分）设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上具有连续导数，对于$[0,1]$上的每一个x，函数$f(x)$的值都在开区间$(0,1)$内，且$f'(x)\neq1$，证明在开区间$(0,1)$内有且仅有一个x，使$f(x)=x$

证：令$F(x)=f(x)-x$

（1）存在性

显然$F(x)$在$[0,1]$上连续，且$F(0)=f(0)-0>0$，$F(1)=f(1)-1<0$，

由零点定理知，至少$\exists\xi\in(0,1)$，使得$F(\xi)=0$即$f(\xi)=\xi$。

（2）唯一性（反证法）

假设$(0,1)$内还有一个异于ξ的点η，使得$F(\eta)=0$即$f(\eta)=\eta$，不妨设$\xi<\eta$

因为$F(x)$在$[\xi,\eta](\subset[0,1])$上可导，又$F(\xi)=F(\eta)=0$

由罗尔定理知，至少$\exists\zeta\in(\xi,\eta)$，使得$F'(\zeta)=0$即$f'(\zeta)=1$，与条件$f'(x)\neq1$矛盾。

综合（1）（2），所以在开区间$(0,1)$内有且仅有一个x，使$f(x)=x$

六（10 分）求函数 $y=\dfrac{(x+1)^2}{x}$ 的定义域、单调区间、极值、曲线的凹凸区间以及渐近线并作图。

解：

（1） $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

（2） $y'=1-\dfrac{1}{x^2}$， $x=0$ 时， y' 不存在， $x=\pm1$ 时， $y'=0$

$y''=\dfrac{2}{x^3}$， $x=0$ 时， y'' 不存在

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	不存在	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	不存在	$+$	$+$	$+$
y	$\cap$	极大值 0	$\cap$	间断	$\cup$	极小值 4	$\cup$

（3） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x}=\infty$，所以无水平渐近线

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)^2}{x}=\infty$，所以有一条铅直渐近线： $x=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{(x+1)^2}{x}}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{(x+1)^2}{x}-x\right]=2$，所以有一条斜渐近线： $y=x+2$

（4）做图：略

浙江理工大学 2021—2022 学年第 1 学期

《高等数学 A1》期中试卷标准答案和评分标准

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1. A;　　2. B;　　3. D;　　4. A;　　5. A;　　6. D.

评分标准：每小题 4 分，错则扣全分.

二、填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1. e^{-6};　　2. $x=1$，可去;　　3. $-f'(0)$;　　4. $(1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x\ln(1+x^2)+\dfrac{2x}{1+x^2}\sin x\right]\mathrm{d}x$;

5. 1，-8;　　6. 0.

评分标准：第 4 小题导数计算正确但无 dx 的扣 2 分；其余小题错则扣全分.

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1.解：$\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}<\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}<\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$ ······(2 分)

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}$ ······(4 分)

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\dfrac{1}{2}$ ······(6 分)

评分标准：只写出正确答案但无演算过程的, 扣 4 分.

2.解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x](\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$ (分子有理化)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x[\ln(1+x)-x](\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$ (等价无穷小) ······(2 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{4[\ln(1+x)-x]}$ (极限运算及分式化简)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{4\left[\frac{1}{1+x}-1\right]}$ (洛必达法则)······ (4 分)

$=-\dfrac{1}{2}$ ······(6 分)

评分标准：只写出正确答案但无演算过程的, 扣 4 分.

3.解: 由题意知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+bx)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{x}=b=-1$.

因此 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$. ……………………………………………………………(2 分)

当 $x\neq 0$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$，此时 $f'(x)=\dfrac{-\dfrac{1}{1-x}x-\ln(1-x)}{x^2}=-\dfrac{1}{x(1-x)}-\dfrac{\ln(1-x)}{x^2}$.

当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln(1-x)}{x}+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$$ ……………………………………(4 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-1}{1-x}+1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1-x)}=-\frac{1}{2}$$

综上可得 $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x(1-x)}-\dfrac{\ln(1-x)}{x^2} & x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ …………………………………………………… (6 分)

评分标准：只写出正确答案但无演算过程的，扣 4 分.

4.解：由题意知，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)=1+e^x$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f''(x)=e^x$，因此，有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{1}{1+e^x}$，…… (2 分)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

$$=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot\frac{1}{1+e^x}$$ ……………………………………………………………………(4 分)

$$=-\frac{e^x}{(1+e^x)^3}$$

由于当 $y=1$ 时，$x=0$，从而有 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{y=1}=-\dfrac{e^x}{(1+e^x)^3}=-\dfrac{1}{8}$ ……………………………………(6 分)

评分标准：只写出正确答案但无演算过程的，扣 4 分.

5.解法一：由题意知，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{t}{1+t}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3t^2+2t$ …………………………………… (2 分)

从而 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{3t^2+2t}{\dfrac{t}{1+t}}=(3t+2)(1+t)$ ……………………………………………(4 分)

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((3t+2)(1+t)\big)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$ …………………………………………………… (6 分)

$$=(6t+5)\cdot\frac{1+t}{t}=\frac{(6t+5)(1+t)}{t}$$

解法二：由题意知，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{t}{1+t}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3t^2+2t$ …………………………………………… (2 分)

从而 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{1+t-t}{(1+t)^2}=\dfrac{1}{(1+t)^2}$， $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=6t+2$ ……………………………………………………(4 分)

因此,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)\Big/\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3$$

$$=\left((6t+2)\cdot\frac{t}{1+t}-(3t^2+2t)\cdot\frac{1}{(1+t)^2}\right)\Big/\left(\frac{t}{1+t}\right)^3$$ …………………………………………… (6 分)

$$=\frac{(6t+2)t(1+t)-(3t^2+2t)}{(1+t)^2}\cdot\frac{(1+t)^3}{t^3}$$

$$=\frac{5t^2+6t^3}{(1+t)^2}\cdot\frac{(1+t)^3}{t^3}=\frac{(6t+5)(1+t)}{t}$$

评分标准：只写出正确答案但无演算过程的，扣 4 分.

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 7 分，满分 14 分）

1.解：由 $y-xe^{y-1}=1$，知 $xe^{y-1}=y-1$；且当 $x=0$ 时，$y=1$. 将等式 $y-xe^{y-1}=1$ 两边对 x 求导，得

$y'-e^{y-1}-xy'e^{y-1}=0$，即 $y'=\dfrac{e^{y-1}}{2-y}$，且 $y'\big|_{x=0}=1$，即 $f'(0)=1$ ……………………………(3 分)

因此 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f'(\ln y-\sin x)\left(\dfrac{y'}{y}-\cos x\right)$,…………………………………………………………(5 分)

从而 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$ ……………………………………………………………………… (7 分)

评分标准：只写出正确答案但无解答步骤的，扣 5 分.

2.解: 定义域: $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

当 $x\neq0$ 时，$y'=\dfrac{4x^2-8x(x+1)}{x^4}=-\dfrac{4(x+2)}{x^3}$， $y''=-\dfrac{(8x+8)x^4-16x^4(x+2)}{x^8}=\dfrac{8(x+3)}{x^4}$.

令 $y'=0$，得 $x=-2$；令 $y''=0$，得 $x=-3$. ……………………………………………………………(2 分)

列表如下:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$		$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		$+$
$f(x)$		拐点		极小值点			

由表可知，单调递增区间为 $(-2,0)$，单调递减区间为 $(-\infty,-2)$ 和 $(0,+\infty)$；当 $x=-2$ 时，$y=-3$ 为函数极小值. 凹区间为 $(-3,0)$ 和 $(0,+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,-3)$；当 $x=-3$ 时，$y=-\dfrac{26}{9}$，拐点为 $\left(-3,-\dfrac{26}{9}\right)$.…………………………………………………………………… (5 分)

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=-2$，得水平渐近线为直线 $y=-2$；由 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=\infty$，得铅直渐近线为直线 $x=0$；由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{4(x+1)}{x^2}-2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4(x+1)-2x^2}{x^3}=0$，可知函数无斜渐近线. ……………………………………………………………………………………………(7 分)

评分标准：只写出正确答案但无解答步骤的，扣 5 分.

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1.证：令 $f(x)=e^{-x}+\sin x-1-\dfrac{x^2}{2}$，则 $f'(x)=-e^{-x}+\cos x-x$ ， $f''(x)=e^{-x}-\sin x-1$. ………… (2 分)

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $f''(x)<0$ ，可知 $f'(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，于是 $f'(x)<f'(0)=0$ ，从而 $f(x)$ 也在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减.………………………………………………………………………………… (3 分)

因此，当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $f(x)<f(0)=0$，即 $e^{-x}+\sin x<1+\dfrac{x^2}{2}$. 结论得证.…………………… (4 分)

评分标准：只写出正确结论但无证明过程的，扣 4 分.

2.证：令 $F(x)=f(x)-x$. 由题设知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导.…………………… (1 分)

由 $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$ ， $F(1)=f(1)-1=0-1=-1<0$ ，有 $F\left(\dfrac{1}{2}\right)F(1)<0$. 由零点定理知，存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使 $F(\eta)=0$，即 $f(\eta)=\eta$.…………………………………………………… (3 分)

由拉格朗日定理知，存在 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$ ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\eta)-f(0)}{\eta-0}=\dfrac{\eta}{\eta}=1$. 结论得证.……………………………………………………………………………………………(4 分)

评分标准：只写出正确结论但无证明过程的，扣 4 分.