第五章　留数及其应用

第三讲 留数定理在计算实积分中的应用

数学与统计学院
易媛

主要内容

1. 三角有理式的积分
2. 有理函数的无穷积分
3. 有理函数与三角函数乘积的积分

基本思路：利用留数理论，可以计算某些类型的定积分或广义积分，其基本思想是把实函数的积分化为复变函数沿某封闭路径的积分，然后根据留数基本定理，把它归结为该函数在曲线内孤立奇点处的留数计算问题，使得问题简化.

两个重要步骤:

(1) 被积函数的转化;

(2) 积分区域的转化.

主要内容

1. 三角有理式的积分
2. 有理函数的无穷积分
3. 有理函数与三角函数乘积的积分

1 三角有理式的积分

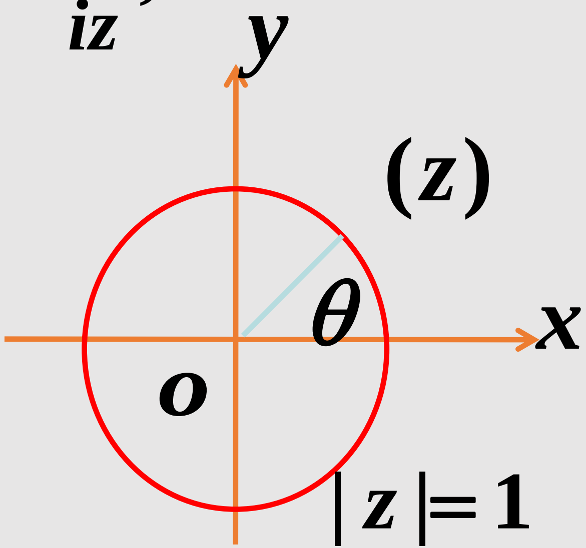
形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分，其中$R(\cos\theta,\sin\theta)$是 $\sin\theta,\cos\theta$ 的有理函数并且在$[0,2\pi]$上连续.

令 $z=e^{i\theta}$，　$\mathrm{d}z=ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ $\rightarrow$ $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$,

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\frac{z^2-1}{2iz},$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\frac{z^2+1}{2z}.$$

$$R(\cos\theta,\sin\theta)=R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right]$$

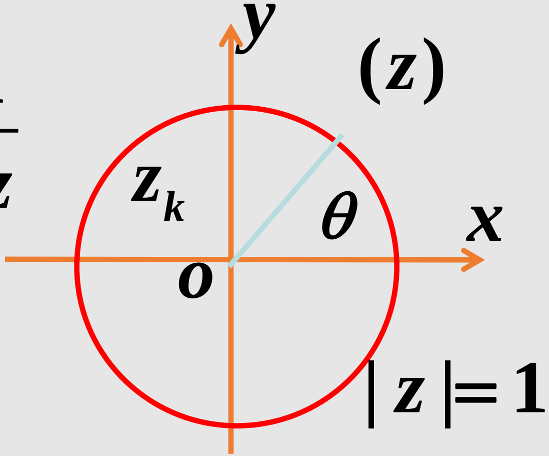


定理1： 设有理函数 $R(\cos\theta,\sin\theta)$ 分母不为零，则有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z),z_k\right].$$

其中： $f(z)=R\left[\dfrac{z^2+1}{2z},\dfrac{z^2-1}{2iz}\right]\dfrac{1}{iz}$



注： 1. 被积函数的转化

2. 积分区域的转化

$|z_k|<1$

例1： 计算积分 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta} \mathrm{d}\theta \ (a>b>0).$

解： $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta} \mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{a+b\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{iz}$

$= \oint_{|z|=1} \frac{-2i}{bz^2+2az+b} \mathrm{d}z$

$= 2\pi i \cdot \left.\frac{-2i}{2bz+2a}\right|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}$

$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$

$$z_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

$|z_1| < 1$

例2： 证明 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\frac{2\pi}{1-p^2}\ (0<p<1).$

解： 由于 $0<p<1$, $|p|<1$

$$1-2p\cos\theta+p^2=(1-p)^2+2p(1-\cos\theta)$$

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{1-2p\cdot\dfrac{z^2+1}{2z}+p^2}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{i(1-pz)(z-p)}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{i(1-pz)(z-p)},p\right]=\frac{2\pi}{1-p^2}.$$

例3： 计算积分 $I=\int_0^{\pi}\frac{\cos 3\theta \mathrm{d}\theta}{5-4\cos\theta}$.

解： 由于被积函数为偶函数，故 $I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 3\theta \mathrm{d}\theta}{5-4\cos\theta}$.

又因为 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin 3\theta \mathrm{d}\theta}{5-4\cos\theta}=0$ （被积函数为奇函数），所以

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{3i\theta}\mathrm{d}\theta}{5-4\cos\theta}\overset{z=e^{i\theta}}{=}\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{z^3\mathrm{d}z}{5z-2(z^2+1)}$$

$$=\frac{i}{4}\oint_{|z|=1}\frac{z^3\mathrm{d}z}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}=\frac{i}{4}\bullet 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\frac{1}{2}]=\frac{\pi}{24}.$$

主要内容

1 三角有理式的积分

2 有理函数的无穷积分

3 有理函数与三角函数乘积的积分

2 有理函数的无穷积分

形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 的积分，其中 $R(x)$ 是 x 的有理函数.

定理2： 设函数 $f(z)$ 在实轴上处处解析, 在上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 内, 除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$，处处解析,且存在常数 $R_0 > 0,\ M > 0,\ \delta > 0,$ 使得当 $|z| > R_0$，且 $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ 时，

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}},$$ 则

$\mathrm{Im}\, z_k > 0$

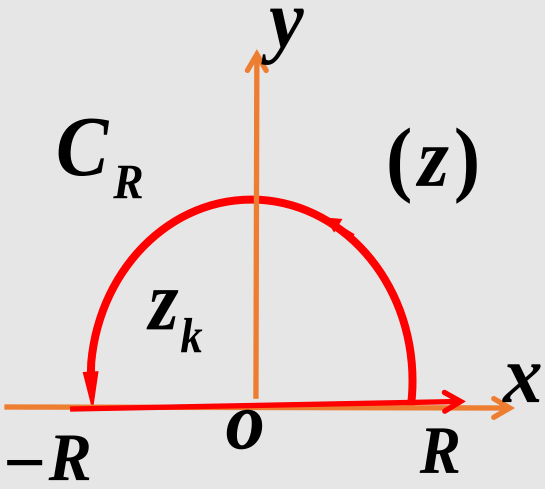
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

证明： $\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$

当 $|x| > R_0$ 时， $|f(x)| \le \dfrac{M}{|x|^{1+\delta}}$，

$$\left| \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z \right| \le \int_{C_R} |f(z)|\mathrm{d}s$$

$$\le \int_{C_R} \frac{M}{R^{1+\delta}}\mathrm{d}s = \frac{\pi M}{R^{\delta}} \to 0$$



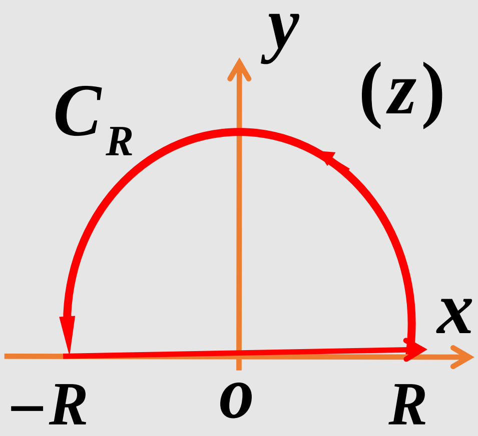
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

$\mathrm{Im}\, z_k > 0$

1. 被积函数的转化:

$$f(x) \longrightarrow f(z)$$

当 z 在实轴上时, $f(z) = f(x)$



2. 积分区域的转化:

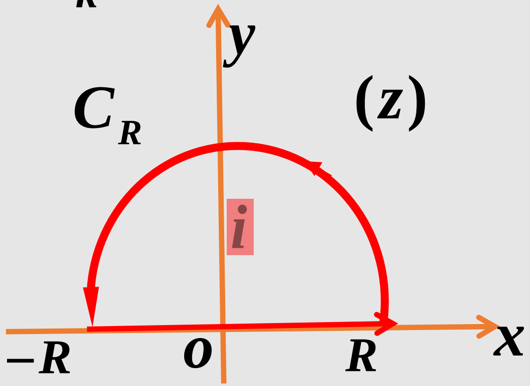
取一条分段光滑的曲线, 使其与实轴的一部分构成一条简单闭曲线, 并使 $f(z)$ 在其内部除有限孤立奇点外处处解析. 这种方法称为**围道积分法**.

推论： 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 是有理函数，多项式 $Q(z)$ 的次数比 $P(z)$ 至少高 2次，$Q(z)$ 在实轴上没有零点，且 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 $f(z)$ 在上半平面的全体孤立奇点，

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

例4： 计算广义积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$$



例5： 计算广义积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x\ \ (a>b>0).$$

解：

$$\mathrm{Res}[f(z),ai]=\lim_{z\to ai}\frac{z^2}{(z+ai)(z^2+b^2)}=\frac{a}{2i(a^2-b^2)}.$$

$$\mathrm{Res}[f(z),bi]=\lim_{z\to bi}\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z+bi)}=\frac{b}{2i(b^2-a^2)}.$$

$$I=2\pi i\left[\frac{a}{2i(a^2-b^2)}-\frac{b}{2i(a^2-b^2)}\right]=\frac{\pi(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{\pi}{a+b}.$$

主要内容

1 三角有理式的积分

2 有理函数的无穷积分

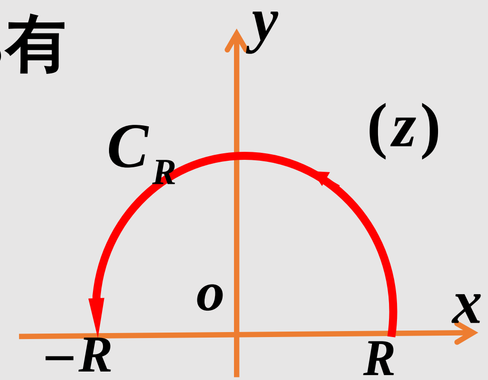
3 有理函数与三角函数乘积的积分

3 有理函数与三角函数乘积的积分

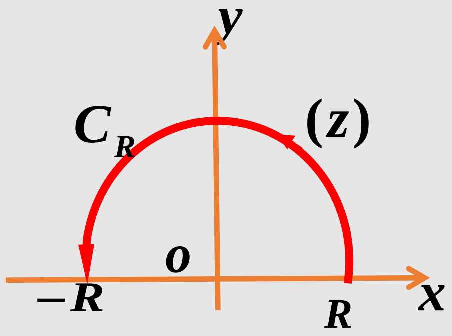
考虑积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\beta x\mathrm{d}x,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\beta x\mathrm{d}x(\beta>0).$

Jordan引理： 设 $f(z)$ 在区域 $|z|\geq R_0$, $\mathrm{Im}\,z\geq 0$ 上解析，且当 $|z|\geq R_0$ 时, $|f(z)|\leq M(|z|)$, $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r)=0$, $R>R_0$ 为半径的逆时针方向上半圆周 C_R ，都有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)e^{i\beta z}\mathrm{d}z=0.$$



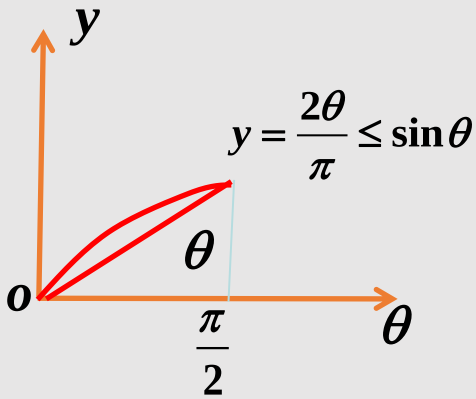
证明： $\left|\int_{C_R} f(z)e^{i\beta z}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{C_R} f(z)e^{i\beta(x+iy)}\mathrm{d}z\right|$



$$\leq \int_{C_R} |f(z)| e^{-\beta y}\mathrm{d}s \leq M(R)\int_0^{\pi} e^{-\beta R\sin\theta} R\mathrm{d}\theta$$

$$= 2RM(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta R\sin\theta}\mathrm{d}\theta \leq 2RM(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\beta R}{\pi}\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= -\frac{\pi M(R)}{\beta R} e^{-\frac{2\beta R}{\pi}\theta}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi M(R)}{\beta R}(1-e^{-\beta R}),$$



$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)e^{i\beta z}\mathrm{d}z = 0.$$

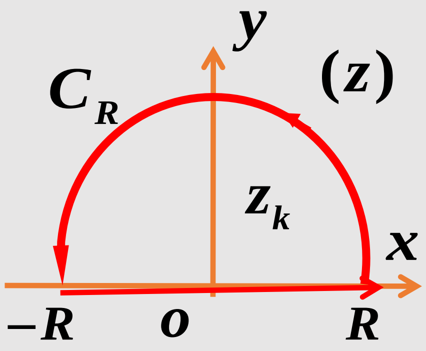
定理3： 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 是有理函数，$Q(z)$ 在实轴上没有零点，多项式 $Q(z)$ 的次数至少比 $P(z)$ 的次数高1次，$z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 $f(z)$ 在上半平面内的所有孤立奇点，则对任何实数 $\beta>0$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\beta x}\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z)e^{i\beta z},z_k].$$

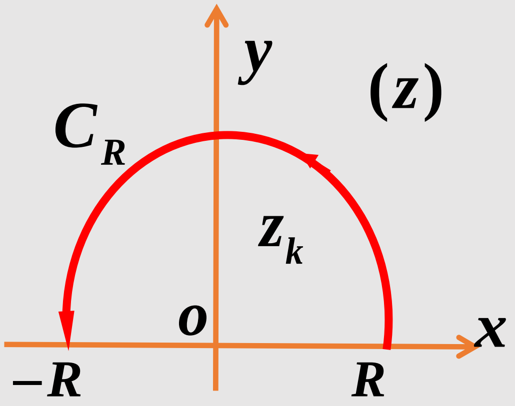
$\mathrm{Im}\,z_k>0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\beta x\mathrm{d}x=\text{实部}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\beta x\mathrm{d}x=\text{虚部}$$



证明： $$\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\beta x}dx + \int_{C_R} f(z)e^{i\beta z}\mathrm{d}z$$



$$= 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z)e^{i\beta z}, z_k].$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)e^{i\beta z}\mathrm{d}z = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{-\infty} f(x)e^{i\beta x}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z)e^{i\beta z}, z_k].$$

$$\int_{-\infty}^{-\infty} f(x)[\cos\beta x + i\sin\beta x]\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z)e^{imz}, z_k].$$

例6： 计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

解：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}\mathrm{d}x=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{1}{1+z^2}e^{iz},i]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i}\left[\frac{e^{iz}}{z+i}\right]$$

$$=2\pi i\left(\frac{e^{-1}}{2i}\right)=\frac{\pi}{e}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{e}.\qquad\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x=0.$$

例7： 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}\mathrm{d}x.$

解： $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+9)}\mathrm{d}x$

$$=\mathrm{Re}(2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},i]+\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},3i]\})$$

$$=\mathrm{Re}\left(2\pi i\left[\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{(z+i)(z^2+9)}+\lim_{z\to 3i}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z+3i)}\right]\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(2\pi i\left(\frac{e^{-1}}{16i}-\frac{e^{-3}}{48i}\right)\right)=\frac{\pi}{24e^3}\left(3e^2-1\right).$$

例8： 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}\ (a>0).$

解： $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}$

$$=\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4+a^4},z_0\right]+\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4+a^4},z_1\right]$$

$$=\pi i\left(-\frac{ae^{\frac{\pi}{4}i}}{4a^4}-\frac{ae^{\frac{3\pi}{4}i}}{4a^4}\right)$$

$$=-\frac{\pi i}{4a^3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}.$$

$z_0=ae^{\frac{\pi}{4}i}$,

$z_1=ae^{\frac{3\pi}{4}i}$,

$z_2=ae^{\frac{5\pi}{4}i}$,

$z_3=ae^{\frac{7\pi}{4}i}$

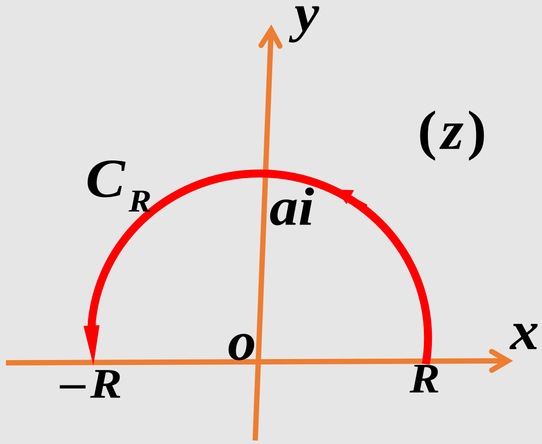
例9： 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\quad(a>0).$

解： 记 $f(z)=\frac{z}{z^2+a^2}$，则 $z_0=ai$ 是上半平面的奇点

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f(z)e^{iz},ai\right]\right)=\frac{\pi}{2}e^{-a}.$$



例10： 设 $z=z_0$ 是解析函数 $f(z)$ 的 m 级零点，则

$z=z_0$ 是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的 1 级极点，且

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},\ z_0\right]=m.$$

证明： 因为 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 级零点，则

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z),\ \varphi(z_0)\neq 0,$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-z_0}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.\qquad \operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},\ z_0\right]=m.$$

例11： 设函数 $f(z)$ 在分段光滑曲线 C 及其内部解析，且在 C 上无零点，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = N,$$

其中 N 表示 $f(z)$ 在 C 的内部零点的总数.

(约定k级零点按k个零点计算).

证明： $f(z)$ 在 C 的内部只有有限个零点， 记为 $z_1, z_2, \cdots, z_n$，它们的重数分别是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = N.$$