高等数学 A1

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 下）

学校：____________________

专业：____________________

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

（此为 2021 年 第二版）

目录

说明：1 高数系列试卷见本书最后一页。如有其他需要，请加入 QQ 群获取其他资料；

2《高等数学 A1》中的期末 A 卷是学期末尾进行的统一考试试卷，B 卷是开学后一两周内进行的补考试卷。

资料说明

试卷整理人：张创琦
版次：2021 年 12 月 23 日 第二版 第 2 次发行
微信公众号：创琦杂谈
本人 QQ 号：1020238657
创琦杂谈学习交流群（QQ 群）：749060380
创琦杂谈大学数学学习交流群（QQ 群）：967276102

版权声明：试卷整理人：张创琦，试卷首发于 QQ 群“创琦杂谈学习交流群”和“创琦杂谈大学数学学习交流群”，转发前需经过本人同意，侵权后果自负。**本资料只用于学习交流使用，禁止进行售卖、二次转售等行为**，一旦发现，本人将追究法律责任。解释权归本人所有。

11 浙江理工大学 2011-2012 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题

1．D　2 A　3 D　4 B　5 C　6 D

二 填空题

1、-1； 2、 ± 1； 3、$f'(\xi)e^{f(\xi)}(b-a)$； 4、$-\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$； 5、2； 6 $y=Ce^{x^2}$

三 计算题

1、解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\cos(t^2)dt}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos(x^4)}{\sin x}=2$

2、解：$y'=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x+\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$，所以$dy=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$

3、解：设$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx\overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt$，则$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}dx=\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore\ I=\dfrac{\pi}{4}$

4、解：原式$=\int\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}dx=\dfrac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int\dfrac{d\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}$

$$\overset{\left(\frac{3}{2}\right)^x=t}{=}\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\ \frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C$$

5、解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arctan x-\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^p}$

$$\overset{L'}{=}\frac{2}{p}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1-x^2}}{x^{p-1}}=-\frac{4}{p}\lim_{x\to 0}\frac{x^{3-p}}{1-x^4}=c\neq 0\Rightarrow p=3\Rightarrow c=-\frac{4}{3}$$

四、解：

（1）$A=4\int_0^a ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t-\sin^6 tdt\overset{\text{华里士公式}}{=}\dfrac{3}{8}\pi a^2$

（2）$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\cos t\sin tdt=6a$

（3）$V=2\int_0^a \pi y^2 dx = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \pi a^2 \sin^6 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt = \frac{32}{105}\pi a^3$

五、解: 相应齐次方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x+1}$，可得 $y=C(x+1)^2$，将 $y=C(x)(x+1)^2$ 代入原方程，可得 $C'(x)=(x+1)^{\frac{1}{2}}$，则 $C(x)=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$，故原方程通解为 $y=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$。

六、（1）教材 P132，例 1。

（2）证明：$\because a,b$ 均为正数，$\therefore 0<\frac{a}{a+b}<1$，又 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由介值定理，存在 $\tau\in(0,1)$，使得 $f(\tau)=\frac{a}{a+b}$，$f(x)$ 在 $[0,\tau]$ 及 $[\tau,1]$ 上分别用拉格朗日中值定理，有

$f(\tau)-f(0)=(\tau-0)f'(\xi),\xi\in(0,\tau)$；$f(1)-f(\tau)=(1-\tau)f'(\eta),\eta\in(\tau,1)$；

$\tau=\frac{f(\tau)}{f'(\xi)}=\frac{a}{(a+b)f'(\xi)}$；$1-\tau=\frac{1-f(\tau)}{f'(\eta)}=\frac{b}{(a+b)f'(\eta)}$；即 $\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$。

12 浙江理工大学 2010-2011 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

CCADCB

二 填空题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、$\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$　2、$\sqrt{3}$　3、$\frac{\pi}{2}$　4、2　5、$(-1,0]$　6、$\frac{1}{3}$

三 计算题（共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1、解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\cos(t^2)dt}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cos(x^4)}{\sin x}\cdots\cdots 3'$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos(x^4)=2\cdots\cdots 6'$

2、解：两边同时求导得：$\cos(xy)(y+xy')-e^{x+y}(1+y')=0\cdots\cdots 3'$

所以：$y'=-\frac{e^{x+y}-y\cos(xy)}{e^{x+y}-x\cos(xy)}\cdots\cdots 6'$

3、解：$\int x\sec^2 xdx = \int xd\tan x = x\tan x - \int \tan xdx \cdots\cdots 3'$

$= x\tan x + \ln|\cos x| + C \cdots\cdots 6'$

4、解：令 $x=\tan t$， $x=1$ 时，$t=\dfrac{\pi}{4}$； $x=\sqrt{3}$ 时，$t=\dfrac{\pi}{3}$， $dx=\sec^2 tdt\cdots\cdots 2'$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2 t}{\tan^2 t\cdot\sec t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec t}{\tan^2 t}dt\cdots\cdots 3'$$

原式$=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cdots\cdots 5'$

$$=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdots\cdots 6'$$

5、解：原方程可变形为：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$，令：$\dfrac{y}{x}=u$，则：$y=xu,\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}\cdots\cdots 2'$

从而原微分方程变形为：$x\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{u^2+1}{u+1}$，分离变量得：$\dfrac{u+1}{u^2+1}du=-\dfrac{1}{x}dx$，

两边同时积分得：$-\dfrac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right)-\arctan u=\ln|x|+C\cdots\cdots 5'$

即：$\ln\sqrt{x^2+y^2}+\arctan\dfrac{y}{x}=C\cdots\cdots 6'$

四、解：（1）由题意知：$S_1=-\displaystyle\int_0^a\left(x^2-ax\right)dx=\frac{1}{6}a^3$，$S_2=\displaystyle\int_a^3\left(x^2-ax\right)dx=9-\frac{9}{2}a+\frac{1}{6}a^3$，

$\because S_1=S_2,\therefore a=2\cdots\cdots 3'$

（2）设 S_1,S_2 绕着 y 轴旋转一周而成的体积分别为：V_1,V_2，则：

$V_1=-\displaystyle\int_0^2 2\pi x\left(x^2-2x\right)dx=\frac{8}{3}\pi$， $V_2=\displaystyle\int_2^3 2\pi x\left(x^2-2x\right)dx=\frac{43}{6}\pi\cdots\cdots 7'$，

$\therefore V_1/V_2=16/43\cdots\cdots 8'$

五、解：$y=x^2-x+1$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为 $y'\big|_{x=0}=-1$，故应求 $y''-3y'+2y=2e^x$

满足 $y\big|_{x=0}=1$， $y'\big|_{x=0}=-1$ 的特解，$\cdots\cdots 2'$

特征方程为 $r^2-3r+2=0\Rightarrow r=1,r=2$，可令特解形式为 $y^*=Axe^x$ 代入得 $A=-2$

从而得到通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x\cdots\cdots 5'$

代入 $y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=-1$ 得 $C_1=1, C_2=0$，所求为 $y(x)=e^x-2xe^x \cdots\cdots 6'$

六、证明题（共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1、由于函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，令 $t=ax$，则 $\int_0^a f(t)dt = a\int_0^1 f(ax)dx \cdots\cdots 2'$

由于函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加，且 $a\in[0,1]$，则 $ax\le x$，从而 $\int_0^1 f(ax)dx \le \int_0^1 f(x)dx \cdots\cdots 3'$

则 $\int_0^a f(t)dt \le a\int_0^1 f(t)dt \cdots\cdots 4'$

2、证明：由中值定理知有一 $a\in\left(\frac{2}{3},1\right)$ 使 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx = f(a) \cdots\cdots 2'$

$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(a)=f(0)$，由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(0,a)\subset(0,1)$ 使 $f'(\xi)=0$

13 浙江理工大学 2008-2009 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1． (C)　2． (D)　3． (D)　4． (A)　5． (C)　6. (B)

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

1. $\frac{\pi}{3}$　2. ± 1　3. $\frac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}$　4． $\frac{\sqrt{2}}{2}$　5． $\sqrt{2}$　6． $\frac{\pi}{2}$

二、计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1．解：原式 $\overset{L'}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot x^2 e^{x^2}\sin x^2}{6x^5} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^5 e^{x^2}}{6x^5} = \frac{1}{3}$

2. 解：利用参数方程求导公式：$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}$

由第一个方程易得：$x_t' = -\tan t$

由第二个方程两边对 t 求导后，得 $y_t' = t\sin t$

故 $\dfrac{dy}{dx}=-t\cos t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/dt}{dx/dt}=\frac{\cos t-t\sin t}{\tan t}$$

3．解：$\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\int\ln x d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$

4. 解：令 $t=\sqrt{5-4x}$，则 $x=\dfrac{5-t^2}{4}$， $dx=-\dfrac{t}{2}dt$，

于是 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx=\int_{3}^{1}\frac{\frac{5-t^2}{4}}{t}\left(-\frac{t}{2}\right)dt=\frac{1}{8}\int_{1}^{3}\left(5-t^2\right)dt=\frac{1}{8}\left(5t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^3=\frac{1}{6}$

5．原式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\times\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\left[\ln\left(1+x\right)\right]_0^1=\ln 2$

三、解：$S_1=\displaystyle\int_0^t\left(t^2-x^2\right)dx=\frac{2}{3}t^3$

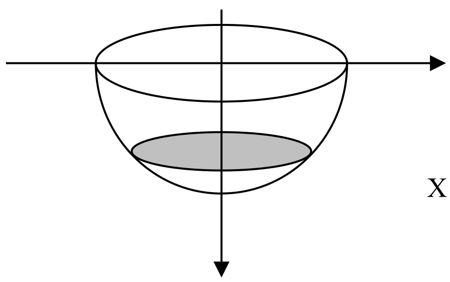
$S_2=\displaystyle\int_t^1\left(x^2-t^2\right)dx=\frac{1}{3}-t^2+\frac{2}{3}t^3$

$\left(S_1+S_2\right)'=\left(\dfrac{1}{3}-t^2+\dfrac{4}{3}t^3\right)'=4t^2-2t$，驻点 $t=0,t=\dfrac{1}{2}$

$\left(S_1+S_2\right)''=8t-2$，$\left(S_1+S_2\right)''\big|_{t=0}=-2$，$\left(S_1+S_2\right)''\Big|_{t=\frac{1}{2}}=2$

所以，当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，S_1+S_2 最小。

四、解：如图建立直角坐标系



相应于 $[0,R]$ 上任一小区间 $[y,y+dy]$ 的一薄层水的高度 dy，这薄层水的重力为 $\rho g\pi x^2dy=\rho g\pi\left(R^2-y^2\right)dy$

把这层水吸出桶外所需的功为 $dW=\rho g\pi\left(R^2-y^2\right)ydy$

$$W=\int_0^R \rho g\pi\left(R^2-y^2\right)ydy=\rho g\pi\int_0^R\left(R^2y-y^3\right)dy=2450\pi R^4\left(\text{焦耳}\right)$$

六、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1 证明：$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx\overset{x=\pi-t}{=}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n\left(\pi-t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$

$$\int_0^{\pi}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$$

2 证明：$\forall\lambda\in\left[0,1\right]$，$\int_0^1 f\left(x\right)dx=\int_0^{\lambda}f\left(x\right)dx+\int_{\lambda}^1 f\left(x\right)dx$

由积分中值定理$\int_0^{\lambda}f\left(x\right)dx=f\left(\xi_1\right)\lambda,0\le\xi_1\le\lambda$

$$\int_{\lambda}^1 f\left(x\right)dx=f\left(\xi_2\right)\left(1-\lambda\right),\lambda\le\xi_2\le 1$$

再由 $f\left(x\right)$ 单调不增，$\xi_1\le\xi_2$，$f\left(\xi_1\right)\ge f\left(\xi_2\right)$

$$\int_0^1 f\left(x\right)dx=f\left(\xi_1\right)\lambda+f\left(\xi_2\right)\left(1-\lambda\right)\le f\left(\xi_1\right)\lambda+f\left(\xi_1\right)\left(1-\lambda\right)=f\left(\xi_1\right)$$

$$\lambda\int_0^1 f\left(x\right)dx\le f\left(\xi_1\right)\lambda=\int_0^{\lambda}f\left(x\right)dx$$ 。

14 浙江理工大学 2006-2007 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.D (4 分) 2.D (4 分) 3.D (4 分) 4.A (4 分) 5.A (4 分) 6.C (4 分)

二 填空题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $a=\frac{1}{3}$(4 分) 2. -1(4 分) 3. $-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^2+C$ (4 分)

4. $\frac{3\pi^2}{16}$(4 分) 5. $\int_a^b\pi\left(f^2\left(x\right)-g^2\left(x\right)\right)dx$ (4 分) 6. $\frac{\pi}{3}$(4 分)

三 计算题（共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1．解：令 $x=\frac{1}{t}$，$x\to+\infty$ 时，$t\to 0^+$ -------------2 分

则原式$=\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{t}-\frac{\ln\left(1+t\right)}{t^2}\right]$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t-\ln\left(1+t\right)}{t^2}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$ ------------------4 分

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}$$ ----------------6 分

2. 解：利用参数方程求导公式：$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}$ -----------------1 分

由第一个方程易得：$x_t'=-2t\sin\left(t^2\right)$ -----------------2 分

由第二个方程两边对 t 求导后，得 $y_t'=\cos\left(t^2\right)+2t^2\sin\left(t^2\right)-\cos\left(t^2\right)=2t^2\sin\left(t^2\right)$--3 分

故 $\frac{dy}{dx}=-t$ -------------------4 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/dt}{dx/dt}=\frac{\csc\left(t^2\right)}{2t}$$ -----------------6 分

3. 解：原式=$\frac{1}{2}\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx^2$ -----------------2 分

$=-\int\arcsin x d\sqrt{1-x^2}$ -----------------4 分

$=-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x+x+C$ -----------------6 分

4．解：原式=$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$ -----------------1 分

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 x}d\cos x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos 2x}d\cos 2x$ -----------------3 分

$=-\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\ln|\cos 2x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ -----------------5 分

$=\frac{\pi}{4}$ -----------------6 分

5．解：令 $A=\int_0^1 f(x)dx$ -----------------2 分

则 $f(x)=x+2A$ -----------------3 分

两边对 x 在 $[0,1]$ 上积分，得

$A=\int_0^1 (x+2A)dx=\frac{1}{2}+2A$ -----------------5 分

$\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=x-1$ -----------------6 分

四、解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow \varphi(0)=0$ -----------------1 分

$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt \overset{xt=u}{=} \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$ -----------------3 分

$\varphi'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}$ $x\neq 0$ -----------------4 分

$\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{A}{2}$ -----7 分

$\lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}=\varphi'(0)$

$\therefore \varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。 -----------------8 分

五、解：如图选取直角坐标系，则端面圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$ -----------------1 分

则压力的元素为 $dP=2\rho gx\sqrt{R^2-x^2}dx$ -----------------5 分

故桶的一个端面上所受到的压力为

$P=\int_0^R 2\rho gx\sqrt{R^2-x^2}dx$ -----------------6 分

$=\rho g\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}d(x^2)$

$=-\frac{2}{3}\rho g(R^2-x^2)^{3/2}\Big|_0^R=\frac{2}{3}\rho gR^3$ -----------------8 分

六、证明：$\because A(x)=f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt$ ，$B(x)=\int_x^b f(t)dt-f(x)(b-x)$

$\therefore$ 令 $F(x)=f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt-2007\left[\int_x^b f(t)dt-f(x)(b-x)\right]$ -----2 分

$F'(x)=f'(x)(x-a)+2007f'(x)(b-x)>0\ (\because f'(x)>0)$

故 $F(x)$ 在 (a,b) 内至多有一个零点。 -----------------4 分

又 $F(a)=-2007\left[\int_a^b f(t)dt-f(a)(b-a)\right]=-2007\int_a^b [f(t)-f(a)]dt<0$

$F(b)=f(b)(b-a)-\int_a^b f(t)dt=\int_a^b [f(b)-f(t)]dt>0$

故由零点定理知，$F(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点。　　-----------------6 分

综上所述，可知 $F(x)$ 在 (a,b) 内有唯一的零点 ξ，使得 $F(\xi)=0$，即 $\frac{A(\xi)}{B(\xi)}=2007$。

15 浙江理工大学 2006-2007 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 B 卷

一 选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.A (4 分)　2.B (4 分)　3.C (4 分)　4.C (4 分)　5.B (4 分)　6.C (4 分)

二 填空题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $x\le 0$ (4 分)　2. $n!$ (4 分)　3. $x=0$ (4 分)　4. $\frac{e^{x^2}}{2}+C$ (4 分)　5. 0 (4 分)　6. $\int_1^2 ydx-\int_0^1 ydx$ (4 分)

三 计算题（共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1．解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t\ln(1+t)dt-x^3}{x-\sin x}$　　-------------1 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\ln(1+x)-3x^2}{1-\cos x}$$　　-------------3 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\ln(1+x)}{1-\cos x}-\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}$$　　------------------4 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2/2}-\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2/2}=-4$$　　------------------6 分

2. 解：利用参数方程求导公式：$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}$　　-----------------1 分

由第一个方程易得：$x_t'=\frac{1}{1+t^2}$　　-----------------3 分

由第二个方程两边对 t 求导后，得 $y_t'=1+e^{ty}\left(y+ty_t'\right)\Rightarrow y_t'=\frac{1+ye^{ty}}{1-te^{ty}}$ ----------------5 分

故 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\frac{1+ye^{ty}}{1-te^{ty}}\cdot\left(1+t^2\right)\right|_{t=0}=2$　　-------------------6 分

3．解：原式$=\int \frac{\sec^4 x}{\tan x}dx$ ----------------2 分

$$=\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} d\tan x$$ ----------------4 分

$$=\ln|\tan x|+\frac{\tan^2 x}{2}+C$$ ----------------6 分

4．解：原式$=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$ ----------------1 分

$$=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$$ ----------------3 分

$$=4\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}dx.$$ ----------------5 分

$$=4\int_0^1 dx-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=4-\pi$$ ----------------6 分

5．解：左$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{-2a}{x+a}\right)\right]^{\frac{x+a}{-2a}\cdot\frac{-2ax}{x+a}}=e^{-2a}$ ----------------2 分

右

$$=\int_a^{+\infty}2xe^{-2x}dx=-\int_a^{+\infty}xde^{-2x}=-xe^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}e^{-2x}dx=ae^{-2a}-\frac{e^{-2x}}{2}\Big|_a^{+\infty}=\frac{3a}{2}e^{-2a}$$ -----5 分

$\therefore a=\frac{2}{3}$ ----------------6 分

四 解：$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow\varphi(0)=0$ ----------------1 分

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt\overset{xt=u}{=}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$$ ----------------3 分

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}\quad x\neq 0$$ ----------------4 分

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

----------------7 分

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0)$$

$\therefore \varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。 -----------------8 分

五 解：$V_{\Delta OPA}=\frac{1}{3}\pi\left[c\left(c-a\right)\right]^2\cdot c=\frac{c^3\left(c-a\right)^2\pi}{3}$ -----------------2 分

记弧 OP 与直线 PA 及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转的旋转体体积为 V

则 $V=\int_0^c \pi\left(x\left(x-a\right)\right)^2 dx$ -----------------5 分

$=\pi\left(\frac{c^5}{5}-\frac{ac^4}{2}+\frac{a^2c^3}{3}\right)$ -----------------6 分

$\frac{c^3\left(c-a\right)^2\pi}{3}=\pi\left(\frac{c^5}{5}-\frac{ac^4}{2}+\frac{a^2c^3}{3}\right)\Rightarrow c=\frac{5}{4}a$ -----------------8 分

六 证明：令 $F(x)=(\int_0^x f(t)dt)^2-\int_0^x f^3(t)dt,\ \ 0\le x\le 1,$ -----------------2 分

则 $F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)dt-f^3(x)=f(x)[2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)].$

记 $G(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)$，$0\le x\le 1.$

$G'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)],$ -----------------4 分

因为 $f(0)=0,0<f'(x)\le 1$，所以当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)\ge 0$，$1-f'(x)\ge 0$，

$G'(x)\ge 0$，又 $G(0)=0$，故 $G(x)\ge 0,$ 从而 $F'(x)\ge 0$，又 $F(0)=0$，故当

$0\le x\le 1$ 时，$F(x)\ge 0$，也有 $F(1)\ge 0$，即 $(\int_0^1 f(x)dx)^2\ge\int_0^1 f^3(x)dx.$

-----------------6 分

16 浙江理工大学 2003-2004 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 C 卷

一. 1.A (4 分) 2.B (4 分) 3.B (4 分) 4.D (4 分) 5.D (4 分)

二. 1. $\ln 2$ (4 分) 2. $n!$ (4 分) 3. $-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^2+c$ (4 分) 4. 0 (4 分) 5. $\frac{\pi}{3}$ (4 分)

三. 1. 解：令 $x=\frac{1}{t}$， $x\to+\infty$ 时， $t\to 0^{+}$ -------------2 分

则原式$=\lim\limits_{t\to 0^{+}}\left[\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^{2}}\right]$

$$=\lim_{t\to 0^{+}}\frac{t-\ln(1+t)}{t^{2}}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{t\to 0^{+}}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$ ------------------4 分

$$=\lim_{t\to 0^{+}}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}$$ ----------------6 分

2. 解：利用参数方程求导公式： $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}$ -----------------1 分

由第一个方程易得： $x'_t=\frac{1}{1+t^{2}}$ -----------------3 分

由第二个方程两边对 t 求导后，得 $2y'-y^{2}-2ty\cdot y'_t+e^{t}=0$

$\therefore y'_t=\frac{y^{2}-e^{t}}{2(1-ty)}$ -----------------5 分

故 $\frac{dy}{dx}=\frac{(y^{2}-e^{t})(1+t^{2})}{2(1-ty)}$ -------------------6 分

3. 解：原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^{2}x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^{2}x}dx=I_1+I_2$

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-d\cos x}{1+\cos^{2}x}dx$ -----------------------1 分

$$=-\arctan\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$ --------------------2 分

$$=\frac{\pi}{4}$$

$I_2=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\cos^{2}x}d\cos x$ --------------------3 分

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\cos^{2}x+1)}{1+\cos^{2}x}$$ -----------------------4 分

$$=-\ln(1+\cos^{2}x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$ ---------------------5 分

$= \ln 2$

$\therefore$ 原式 $= \dfrac{\pi}{4} + \ln 2$ -------------------------6 分

4. 解：令 $t = \arctan x$，则 $x = \tan t$， $dx = \sec^2 tdt$ ------------------2 分

原式 $= \int \dfrac{\tan t \cdot e^t}{\sec^3 t} \cdot \sec^2 tdt$

$= \int e^t \sin tdt$ ---------------------3 分

$= \int \sin tde^t$

$= e^t \sin t - \int e^t \cos tdt$

$= e^t \sin t - e^t \cos t - \int e^t \sin tdt$ -----------------5 分

于是，原式 $= \dfrac{1}{2}(\sin t - \cos t)e^t + c = \dfrac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} + c$ -----------6 分

5. 解： $y' = 2k(x^2 - 3) \cdot 2x = 4kx^3 - 12kx$ ----------------------1 分

$y'' = 12kx^2 - 12k = 12k(x-1)(x+1)$ -----------------------2 分

令 $y'' = 0$ 得可能拐点的横坐标为： $x_{1,2} = \pm 1$

由于在 $x_{1,2} = \pm 1$ 的领域内 y'' 在 $x_{1,2} = \pm 1$ 的两侧变号，

所以 $x_{1,2} = \pm 1$ 均为拐点的横坐标。 ---------------------------3 分

当 $x_1 = 1$ 时， $y_1 = 4k$，过拐点 (x_1, y_1) 处的切线斜率 $k_1 = y'(1) = -8k$，

过 (x_1, y_1) 的法线方程为 $y - 4k = \dfrac{-1}{-8k}(x-1)$，即 $y - 4k = \dfrac{1}{8k}(x-1)$ ---4 分

若要拐点处的法线过原点，则 $(0,0)$ 应满足这个方程，即

$-4k = \dfrac{-1}{8k}$， $k^2 = \dfrac{1}{32}$， $k = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{8}$ ----------------5 分

同理，当 $x_2 = -1$ 时， $y_2 = 4k$，要使拐点 (x_2, y_2) 处的法线过原点，

亦可得 $k = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{8}$

$\therefore$ 当 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ 时，该曲线上拐点处的法线通过原点。

四．解：$\int_0^1 x^2 f''(2x)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2 df'(2x)$ ------------------2 分

$$=\frac{1}{2}\left[x^2 f'(2x)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 2xf'(2x)dx \quad \text{----------------3 分}$$

$$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{2}\int_0^1 xdf(2x) \quad \text{----------------------4 分}$$

$$=0-\frac{xf(2x)}{2}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)dx \quad \text{---------------------5 分}$$

$$=-\frac{f(2)}{2}+\frac{1}{4}\int_0^1 f(2x)d(2x) \quad \text{----------------------6 分}$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\int_0^2 f(t)dt \quad \text{-------------------------7 分}$$

$$=0 \quad \text{------------------------8 分}$$

五．解：（1）① 当 $0<a<1$ 时，

$$S=S_1+S_2=\int_0^a\left(ax-x^2\right)dx+\int_a^1\left(x^2-ax\right)dx \quad \text{-----------------1 分}$$

$$=\left[\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^a+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}\right]_a^1$$

$$=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$

令 $S'_a=a^2-\dfrac{1}{2}=0$，得 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ （唯一驻点） ---------------2 分

又 $S''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}>0$，则 $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ 是极小值，也是最小值。---3 分

② 当 $a\le 0$ 时，

$$S=S_1+S_2=\int_a^0\left(ax-x^2\right)dx+\int_0^1\left(x^2-ax\right)dx \quad \text{---------------4 分}$$

$$=-\frac{a^3}{6}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$

$S'_a=-\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{2}<0$，故 $a=0$ 时，S 取得最小值，--------------5 分

此时 $S=\dfrac{1}{3}>\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

$\therefore$ 当 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ 为所求的最小值。 -----------------6 分

（2）$V_x=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi\left(\dfrac{1}{2}x^2-x^4\right)dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\pi\left(x^4-\dfrac{1}{2}x^2\right)dx$ ----------------------9 分

$$=\pi\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{6}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$

$=\dfrac{\sqrt{2}+1}{30}\pi$ --------------------------10 分

六．解：（1）先求 $f'(x)$

①当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=\frac{x\left[g'(x)+e^{-x}\right]-\left[g(x)-e^{-x}\right]}{x^2}$$

$=\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}$ ---------------------2 分

②当 $x=0$ 时，

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}-0}{x}$ --------------------3 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}$$

$=\dfrac{g''(0)-1}{2}$ ----------------------4 分

$\therefore f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}, x\neq 0\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}, x=0\end{cases}$ -----------------5 分

（2）再讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性

$$\because \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}$$ --------------------6 分

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{xg''(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}}{2x}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)+xg'''(x)-e^{-x}+xe^{-x}}{2}$$

$$=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0)$$ -------------------7 分

$\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。 ------------------8 分

七.（1）证明：$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

$$=\int_0^a f(x)dx - \int_0^{-a} f(x)dx$$ -----------------1 分

令 $x=-t$，则 $dx=-dt$，当 $x=0$ 时，$t=0$；$x=-a$ 时，$t=a$

$$\int_0^{-a} f(x)dx = \int_0^a f(-t)d(-t) = -\int_0^a f(-x)dx$$ ----------------2 分

故得 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-x)dx$

$$=\int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$$

（2）由上述结论

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right]dx$$ -------------------3 分

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin^2 x}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x dx$$

$$=2$$ ---------------------4 分

17 浙江理工大学《高等数学 A1》期末模拟 A 卷

一 选择题。

1 D　　2 B　　3 D　　4 D　　5 C　　6 A　　7 B　　8 D

二 计算题。

1 解：令 $x=\frac{1}{t}$，$x\to+\infty$ 时，$t\to 0^+$

则原式$=\lim\limits_{t\to0^+}\left[\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}\right]=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\overset{洛}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}$

2

解 ： $x_t'=-2t\sin\left(t^2\right)$ ， $y_t'=\cos\left(t^2\right)+2t^2\sin\left(t^2\right)-\cos\left(t^2\right)=2t^2\sin\left(t^2\right)$ ，

$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=-t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/dt}{dx/dt}=\frac{\csc\left(t^2\right)}{2t}$$

3 解：原式

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2x}d\cos x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos 2x}d\cos 2x$$

$$=-\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\ln|\cos 2x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

4.

解：令 $t=\arctan x$，则 $x=\tan t$， $dx=\sec^2 tdt$

原式

$$=\int\frac{\tan t\cdot e^t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 tdt\qquad=\int e^t\sin tdt\qquad=\int\sin tde^t\qquad=e^t\sin t-\int e^t\cos tdt$$

$$=e^t\sin t-e^t\cos t-\int e^t\sin tdt$$

所以原式$=\frac{1}{2}(\sin t-\cos t)e^t+c=\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+c$

5.

解：令 $A=\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=x+2A$，两边对 x 在 $[0,1]$ 上积分，得

$$A=\int_0^1(x+2A)dx=\frac{1}{2}+2A\Rightarrow A=-\frac{1}{2}，\ \therefore f(x)=x-1$$

6.

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow\varphi(0)=0$，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt\overset{xt=u}{=}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}\qquad x\neq0$$

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0)$$

$\therefore \varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

7.书本 P285 例 4

8 解：（1）① 当 $0<a<1$ 时，

$$S=S_1+S_2=\int_0^a\left(ax-x^2\right)dx+\int_a^1\left(x^2-ax\right)dx=\left[\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^a+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}\right]_a^1=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$

令 $S_a'=a^2-\frac{1}{2}=0$，得 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ （唯一驻点）又 $S''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}>0$，则 $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

是极小值，也是最小值。

② 当 $a\le 0$ 时，

$$S=S_1+S_2=\int_a^0\left(ax-x^2\right)dx+\int_0^1\left(x^2-ax\right)dx=-\frac{a^3}{6}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$

$S_a'=-\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}<0$，故 $a=0$ 时，S 取得最小值，此时 $S=\frac{1}{3}>\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

$\therefore$ 当 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$ 为所求的最小值。

（2）

$$V_x=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi\left(\frac{1}{2}x^2-x^4\right)dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\pi\left(x^4-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{6}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi$$

18 浙江理工大学《高等数学 A1》期末模拟 B 卷

一、（每小题 4 分 共 20 分）

1、B 2、D 3、B 4、C 5、B

二、（每小题 4 分 共 20 分）

1、1　2、2　3、$-3x^{-\frac{1}{3}}+C$　4、$\frac{1}{6}$　5、$-\frac{3}{2}$

三、

1、解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}$　（3 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\frac{x^2}{2}}$　（2 分）

=2　（1 分）

2、解：两边关于 x 求导，得：

$1+2y''+\sin y\cdot y'=0$

则　$y'=-\frac{1}{2+\sin y}$　（2 分）

两边再关于 x 求导，得：

$2y''+\cos y\cdot(y')^2+\sin y\cdot y''=0$　（2 分）

则　$y''=-\frac{\cos y\cdot(y')^2}{2+\sin y}$

$=-\frac{\cos y}{(2+\sin y)^3}$　（2 分）

3、解：原式=$\frac{1}{2}\int\arctan x dx^2$　（1 分）

$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$　（2 分）

$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$　（1 分）

$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int 1-\frac{1}{x^2+1}dx$　（1 分）

$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C$

$=\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+C$　（1 分）

4、 解：原式$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\cdot f(\xi)\cdot(x-a)$ （4 分）

$=\lim\limits_{x\to a}x\cdot f(\xi)$

$=af(a)$ （2 分）

5、 解：原式$=\dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3x+\cos x)dx$ （2 分）

$=\dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{1}{3}d(\sin 3x)+d(\sin x)\right]$ （2 分）

$=\dfrac{2}{3}$ （2 分）

四、证明：因为 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin tdt$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt$ （4 分）

$\int_0^{\pi}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx$ （2 分）

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$

五、证明：（1） $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geq 2$ （5 分）

（2）$\because$ 由（1） $F'(x)>0$

$\therefore F(x)$ 单调递增 （2 分）

又 $F(a)=\int_b^a\dfrac{dt}{f(x)}<0$ （2 分）

$F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$ （2 分）

$\therefore$ 由零点存在定理知，结论成立 （1 分）

六、解： AB 方程为： $y=-\dfrac{x}{10}+5$ （2 分）

压力元素为：$dp=1\cdot x\cdot ydx$

$$= x\left(5-\frac{x}{10}\right)dx$$ （2 分）

$$P = 2\int_0^{20} dp$$ （2 分）

$$= 2\int_0^{20} x\left(5-\frac{x}{10}\right)dx$$ （2 分）

=14373 （KN） （2 分）

高等数学试题资料目录