离散数学概论

第二章 一阶逻辑 —命题逻辑推理

课程QQ号： **689423416**
金耀 数字媒体技术系
fool1025@163.com
13857104418

前束范式

定义 设 A 为一个一阶逻辑公式，若 A 具有如下形式 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$, 则称 A 为**前束范式**, 其中 $Q_i\,(1\leq i\leq k)$ 为 $\forall$ 或 $\exists$, B 为不含量词的公式。

所有的量词都非否定的在公式前面，没有括号分割，使得它们的辖域延伸至整个公式。

前束范式

例如， $\forall x\exists y(F(x)\to(G(y)\wedge H(x,y)))$

$\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$

是前束范式

$\forall x(F(x)\to\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$

$\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

不是前束范式。

公式的前束范式

定理（前束范式存在定理）一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式.

注意：

公式的前束范式**不唯一**

求公式的前束范式的方法：利用重要等值式、置换规则、换名规则、代替规则进行等值演算。

计算公式前束范式的步骤

1) 消除多余量词；

2) 消去公式中的联结词→和↔（为了便于量词辖域的扩充）；

3) ¬后移：如果量词前有“¬”，则用量词否定公式将“¬”后移。再用德摩根定律或求公式的否定公式，将“¬”后移到原子谓词公式之前。

4) 变元换名：用约束变元的**改名**规则或自由变元的**代入**规则对变元换名（为量词辖域扩充作准备）；

5) 提取量词：用量词辖域扩充公式提取量词，使之成为前束范式形式。

公式的前束范式(续)

例　求下列公式的前束范式

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

解　$\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))$　（量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

两步结果都是前束范式，说明前束范式不唯一。

例(续)

(2) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解 $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$ （量词分配等值式）

另有一种形式

$\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$ (量词辖域扩张)

两种形式是等值的

例(续)

(3) $\exists xF(x)\lor\neg\forall xG(x)$

解 $\exists xF(x)\lor\neg\forall xG(x)$

$\Leftrightarrow\exists xF(x)\lor\exists x\neg G(x)$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\lor\neg G(x))$

或 $\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x)\lor\neg G(y))$

(4) $\forall xF(x)\to\exists y(G(x,y)\land\neg H(y))$

解 $\forall xF(x)\to\exists y(G(x,y)\land\neg H(y))$

$\Leftrightarrow\forall zF(z)\to\exists y(G(x,y)\land\neg H(y))$ （换名规则）

$\Leftrightarrow\exists z\exists y(F(z)\to(G(x,y)\land\neg H(y)))$

例(续)

或 $\Leftrightarrow \forall x F(x) \to \exists y(G(z, y) \wedge \neg H(y))$　　（代替规则）

$\Leftrightarrow \exists x \exists y(F(x) \to (G(z, y) \wedge \neg H(y)))$

(5) $\forall x(F(x, y) \to \exists y(G(x, y) \wedge H(x, z)))$

解 $\forall x(F(x, y) \to \exists y(G(x, y) \wedge H(x, z)))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x, u) \to \exists y(G(x, y) \wedge H(x, z)))$

$\Leftrightarrow \forall x \exists y(F(x, u) \to G(x, y) \wedge H(x, z)))$

注意：x与y不能颠倒

例题

- 求$(\forall x)A(x)\rightarrow(\exists x)B(x)$的前束范式
- 求$\forall x\, A(x, y) \rightarrow \forall y\, B(y)$的前束范式

$$\Leftrightarrow \forall x\, A(x, y) \rightarrow \forall z\, B(z)$$
$$\Leftrightarrow \neg\forall x\, A(x, y) \vee \forall z\, B(z)$$
$$\Leftrightarrow \exists x\, \neg A(x, y) \vee \forall z\, B(z)$$
$$\Leftrightarrow \exists x\, \forall z(\neg A(x, y) \vee B(z))$$
$$\Leftrightarrow \exists x\, \forall z(A(x, y) \rightarrow B(z))$$

1.一阶逻辑的基本概念

2.一阶逻辑合式公式及解释

3.一阶逻辑等值式

4. 逻辑推理理论

人工智能的三大学派

- **符号主义**：在用数学和物理学中的逻辑符号来表达思维的形成，通过大量的“如果-就”规则定义，产生像人一样的智能。
- **连接主义**：主张智能来自神经元之间的连接，它让计算机模拟人类大脑中的神经网络及其连接机制，如人工神经网络。
- **行为主义**：基于感知行为的控制系统，使每个基本单元实现自我优化和适应，这也是一个自下而上的过程，典型的代表有进化算法、多智能体等。

本讲主要内容

- 命题逻辑推理理论
- 一阶逻辑推理理论

推理形式

推理的形式结构为：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_K \rightarrow B$$

若该式是逻辑有效式,则称推理正确,

B是$A_1, A_2, \ldots, A_K$的逻辑结论。

此时将该式记为：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_K \Rightarrow B$$

命题逻辑推理理论

- 真值表法
- 等值演算法

判断推理是否正确

- 构造证明法

证明推理正确

说明：用前3个方法时采用形式结构

“ $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$ ”.

用构造证明时， 采用

“前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$, 结论: B”.

实例

例 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号．今天是1号．所以明天是5号。

解 设 p：今天是1号，q：明天是5号．

推理的形式结构为:

$$(p \to q) \land p \to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p \lor q) \land p) \lor q$$

$$\Leftrightarrow \neg p \lor \neg q \lor q \Leftrightarrow 1$$

得证推理正确

实例 (续)

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以今天是1号.

解 设p：今天是1号，q：明天是5号.

推理的形式结构为：$(p\to q)\wedge q\to p$

证明（用主析取范式法）

$$(p\to q)\wedge q\to p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge q\to p$$

$$\Leftrightarrow \neg\,((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q\vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确.

推理定律——重言蕴涵式

重要的推理定律

$A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	化简律
$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	假言推理
$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$	假言三段论
$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难

推理定律 (续)

$(A\rightarrow B)\wedge(\neg A\rightarrow B) \Rightarrow B$ 构造性二难（特殊形式）

$(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(\neg B\vee\neg D) \Rightarrow (\neg A\vee\neg C)$ 破坏性二难

证明：描述推理过程的命题公式序列，其中每个命题公式或者是已知的前提，或者是由前面的命题公式应用推理规则得到的结论。

关于“二难”

- 二难：若有两个命题A和B，其对应推论C和D都让人“为难”，但A和B至少需成立其一，因此无论如何都将令人“为难”。

例：往届采用答题派系统提交习题。答题派试用的第一年，我没有退回作业的权限。经常有同学在答题派提交0分作业，要求我退回，这使我左右为难：如果退回，则我得经常向维护者提出请求，会打扰他；如果不退回，则同学将有意见。因此，无论我选择退回还是不退回，都将陷于二难境地。

推理规则

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{\begin{matrix} A \to B \\ A \end{matrix}}{\therefore\ B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{\begin{matrix} A \to B \\ \neg B \end{matrix}}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{\begin{matrix} A \to B \\ B \to C \end{matrix}}{\therefore A \to C}$$

推理规则(续)

(9) 析取三段论规则

$$\frac{A \lor B \qquad \neg B}{\therefore A}$$

(10)构造性二难推理规则

$$\frac{A \to B \qquad C \to D \qquad A \lor C}{\therefore B \lor D}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\frac{A \to B \qquad C \to D \qquad \neg B \lor \neg D}{\therefore \neg A \lor \neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{A \qquad B}{\therefore A \land B}$$

构造证明之一——直接证明法

例 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我就有课．若有课，今天必备课．我今天下午没备课．所以，

明天不是星期一和星期三．

解 设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我有课，s：我备课

推理的形式结构为

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

直接证明法 (续)

证明

① $r \to s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg r$	①②拒取式
④ $(p \vee q) \to r$	前提引入
⑤ $\neg(p \vee q)$	③④拒取式
⑥ $\neg p \wedge \neg q$	⑤置换

构造证明之二——附加前提证明法

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C \to B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

理由：

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k) \to (C \to B)\\
\Leftrightarrow\ &\neg(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k) \lor (\neg C \lor B)\\
\Leftrightarrow\ &\neg(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k \land C) \lor B\\
\Leftrightarrow\ &(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k \land C) \to B
\end{aligned}
$$

附加前提证明法 (续)

例 构造下面推理的证明：

2是素数或合数。若2是素数，则$\sqrt{2}$是无理数. 若$\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数。所以，如果4是素数，则2是合数.

用附加前提证明法构造证明

解 设 p：2是素数， q：2是合数，
r：$\sqrt{2}$是无理数， s：4是素数

推理的形式结构

前提：$p \lor q$, $p \to r$, $r \to \neg s$

结论：$s \to q$

附加前提证明法 (续)

证明

① s	附加前提引入
② $p \rightarrow r$	前提引入
③ $r \rightarrow \neg s$	前提引入
④ $p \rightarrow \neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p \vee q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论

请用直接证明法证明之

构造证明之三——归谬法(反证法)

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

将$\neg B$加入前提，若推出矛盾，则得证推理正确.

理由：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

括号内部为矛盾式当且仅当 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B)$为重言式 。

归谬法 (续)

例 构造下面推理的证明

前提：$\neg(p \wedge q) \vee r$，$r \rightarrow s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明 （用归缪法）

① q 结论否定引入

② $r \rightarrow s$ 前提引入

③ $\neg s$ 前提引入

④ $\neg r$ ②③拒取式

归谬法 (续)

⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p\vee\neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨合取

请用直接证明法证明之

构造证明之四—归结证明法(*)

归结规则

$$\begin{array}{r} A \vee B \\ \neg A \vee C \\ \hline \therefore B \vee C \end{array}$$

理由：$(p\vee q)\wedge(\neg p\vee r) \rightarrow (q\vee r)$

$\Leftrightarrow \neg((p\vee q) \wedge(\neg p\vee r)) \vee (q\vee r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q) \vee(p\wedge\neg r) \vee q\vee r$

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q) \vee q) \vee ((p\wedge\neg r) \vee r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q) \vee(p\vee r)$

$\Leftrightarrow 1$

归结证明法的基本步骤

1. 将每一个前提化成等值的合取范式，设所有合取范式的全部简单析取式为$A_1, A_2, \ldots, A_t$

2. 将结论的否定化成等值的合取范式$B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_s$，其中每个$B_j$是简单析取式

3. 以$A_1, A_2, \ldots, A_t$和$B_1, B_2, \ldots, B_s$为前提，使用归结规则推出0 除前提引入规则外，只使用归结规则

实例

例6 用归结证明法构造下面推理的证明：

前提： $(p \to q) \to r,\ r \to s,\ \neg s$

结论： $p \wedge \neg q$

解 $(p \to q) \to r \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r \Leftrightarrow$

$(p \wedge \neg q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

$r \to s \Leftrightarrow \neg r \vee s$

$\neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$

把推理的前提改写成

前提： $p \vee r,\ \neg q \vee r,\ \neg r \vee s,\ \neg s,\ \neg p \vee q$

(结论均为0，不必写出)

实例(续)

前提: $p\vee r, \neg q\vee r, \neg r\vee s, \neg s$, $\neg p\vee q$

证明

① $p\vee r$	前提引入
② $\neg p\vee q$	前提引入
③ $q\vee r$	①②归结
④ $\neg q\vee r$	前提引入
⑤ r	③④归结
⑥ $\neg r\vee s$	前提引入
⑦ s	⑤⑥归结
⑧ $\neg s$	前提引入
⑨ 0	⑦⑧合取

(2) 请根据下面事实，找出凶手：

1. 清洁工或者秘书谋害了经理。

2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。

3.如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。

4.如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。

5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。

6.经理有钱且清洁工不富裕。

7.午夜时屋里灯灭了。

命题符号为：

$A \vee B, A \to \neg C, D \to C, \neg D \to \neg E, H \to \neg A, G \wedge \neg H, E \Rightarrow ?$

令A:清洁工谋害了经理。 B:秘书谋害了经理。

C:谋害发生在午夜前。 D:秘书的证词是正确的.

E:午夜时屋里灯光灭了。 H:清洁工富裕.

G:经理有钱.

$A \vee B$, $A \to \neg C$, $B \to C$, $D \to C$ $\neg D \to \neg E$, $H \to \neg A$, $G \wedge \neg H$, $E \Rightarrow ?$

(1) E	
(2) $\neg D \to \neg E$	前提
(3) $\neg\neg D$	拒取式
(4) D	
(5) $D \to C$	前提
(6) C	假言推理
(7) $A \to \neg C$	前提
(8) $\neg A$	拒取式
(9) $A \vee B$	前提
(10) B	拒取式

结果是秘书谋害了经理。

实例

例 符号化下面的命题，并用演绎法证明结论是否有效。

有红、黄、蓝、白四队参加足球联赛。如果红队第三，则当黄队第二时，蓝队第四；或者白队不是第一，或者红队第三；事实上，黄队第二。因此，如果白队第一，那么蓝队第四。

解 设 P：红队第三；Q：黄队第二；R：蓝队第四；S：白队第一，

则上述命题可符号化为：$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$，$\neg S\vee P$，$Q \Rightarrow S\rightarrow R$。

推理如下： （CP规则推理）

① $\neg S\vee P$	P	⑤ $Q\rightarrow R$	T，③，④，I
② S	P (附加前提)	⑥ Q	P
③ P	T，①，②，I	⑦ R	T，⑤，⑥，I
④ $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$	P	⑧ $S\rightarrow R$	CP，②，⑦

实例（续）

推理如下：　（直接推理）

①	$\neg S \vee P$	P
②	$S \to P$	T，①，E
③	$P \to (Q \to R)$	P
④	$S \to (Q \to R)$	T，②，③，I
⑤	$\neg S \vee \neg Q \vee R$	T，④，E
⑥	$\neg Q \vee \neg S \vee R$	T，⑤，E
⑦	$Q \to (S \to R)$	T，⑥，E
⑧	Q	P
⑨	$S \to R$	T，⑦，⑧，I

课堂练习

- 前提：$p \vee q, \neg p \vee r, \neg r \vee s$， 结论： $q \vee s$
- 前提：$\neg p \vee q \vee r, \neg p, \neg r$， 结论：$q$

证明方法总结

直接证明法： 当A为真时B为真，则$A \to B$为真.

间接证明法： $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$.

归谬法(反证法)： 设A成立，假设B不成立，推出矛盾.

归结法： 若A或B成立， 且非A或C成立， 则B或C成立.

分情况证明法： 待证明的命题形式为$A = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k \vee B$，

证明$A_1 \to B, A_2 \to B, \ldots, A_k \to B$均为真 .

构造性证明法： 在A为真的条件下，构造具有这种性质的客体.

数学归纳法： 命题形式：$\forall x(x \in N \wedge x \geq n_0), P(x)$

(1)**归纳基础** 证$P(n_0)$为真

(2)**归纳步骤** $\forall x(x \geq n_0)$，假设$P(x)$为真，证$P(x+1)$为真.

构造性证明

- 源自希腊的西方数学主要遵循“公理化”的原则来搭建理论大厦；而中国古代数学的传统却着重于构造性算法化的证明，因而适合现代计算机科学发展的脉络。　　　　——吴文俊

- 例：罗尔定理、拉格朗日中值定理
- 例：水仙花数（153,370,371,407）

一个非构造性证明的例子

- 证明存在无理数x, y使得x^y是有理数.

证：对于无理数$\sqrt{2}$，考察 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$。

若它是有理数，则x =y=$\sqrt{2}$ 都是无理数；

若它是无理数，令x=$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, y=$\sqrt{2}$, 则x^y=2

是有理数。

应用：吴氏几何定理机器证明

基于吴方法的自动几何定理定理证明大致步骤如下：

1. 将几何问题代数化，将给定的几何条件翻译成多项式方程，（hypothesis polynormials）$f_1, f_2, \cdots, f_r$，将几何结论也翻译成多项式$g_1, g_2, \cdots, g_s$（conclusion polynormials）

2. 用伪除方法（pseudodivision）将条件多项式变换成三角列形式，

$$\begin{cases} f_1 & = & f_1(u_1, \cdots, u_d, x_1) \\ f_2 & = & f_2(u_1, \cdots, u_d, x_1, x_2) \\ \vdots & & \vdots \\ f_r & = & f_r(u_1, \cdots, u_d, x_1, \cdots, x_r) \end{cases}$$

代数簇$V(f_1, \cdots, f_r)$包含条件多项式生成的代数簇的不可约分支（irreducible components）

吴文俊（1919-2017）

3. 用三角列中的多项式伪除结论多项式，如果余式非0，则我们说命题不成立；

4. 检查非退化条件，如果非退化条件满足（所有初式的乘积非零），则我们说结论多项式由条件多项式生成。

例：三角形垂心定理

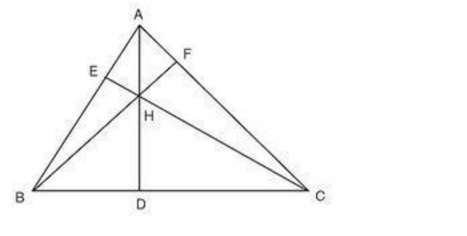

图2. 三角形垂心定理。

例如我们来证明三角形垂心定理：如图2所示，三角形的顶点坐标是

$$A=(u_2,u_3),B=(0,0),C=(u_1,0),$$

三个垂足为

$$D=(u_2,0),E=(x_1,x_2),F=(x_3,x_4),$$

由垂直条件得到多项式方程

$$\begin{aligned}
x_2u_2-x_1u_3 &= 0\\
x_4(u_2-u_1)-u_3(x_3-u_1) &= 0\\
x_2u_3+u_2(x_1-u_1) &= 0\\
x_4u_3+x_3(u_2-u_1) &= 0,
\end{aligned}$$

我们假设AD和CE交于G点，AD和BF交于H点，$G=(u_2,x_5)$, $H=(u_2,x_6)$。由G、E、C三点共线，H、B、F三点共线，增加方程

$$\begin{aligned}
(x_2-x_5)(x_1-u_1)-x_2(x_1-u_2) &= 0\\
x_6x_3-x_4u_2 &= 0
\end{aligned}$$

我们需要证明G和H重合，即 $x_5-x_6=0$。

例：机器人路径规划

吴方法可以用来求解多项式方程组。将一般的多项式方程组化解为三角列形式，非常类似于线性方程组的高斯消元法（Gauss elimination）。我们通过数值方法求解单变元多项式$f_1(u_1,\cdots,u_d,x_1)=0$，求得$x_1$；然后将$x_1$代入第二个方程$f_2(u_1,\cdots,u_d,x_1,x_2)=0$，求得$x_2$；再将$x_1$，$x_2$代入第三个方程
$f_3(u_1,\cdots,u_d,x_1,x_2,x_3)=0$，求得$x_3$；以此类推，逐步求得所有的未知变量
$(x_1,x_2,\cdots,x_r)$。

在机器人（robotics）领域，机械臂路径规划是一个经典问题。一条机械臂有多个关节，每个关节有旋转自由度或者伸缩自由度，我们将这些自由度由变元
$(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r,d_1,d_2,\cdots,d_s)$表示。机械手的位置和朝向由这些变元控制，同时它们可以表示成多项式函数:
$f(\cos\theta_1,\sin\theta_1,\cos\theta_2,\sin\theta_2\cdots,\cos\theta_r,\sin\theta_r,d_1,d_2,\cdots,d_s)$
同时我们有限制 $\cos\theta_i^2+\sin\theta_i^2=1$。在机器人应用中，机器人通过三维扫描获得物体的三维几何位置信息，从而得到最终机械手的位置和朝向，通过反解各个关节的旋转角度，和机械臂的伸缩，使得机械手达到目标位置，从而可以实现抓取。这被称为是逆向运动学问题（inverse kinematics），需要求解多项式方程组，而吴方法正是解多项式方程组的有力武器。

图3. 机械臂逆向运动学。

例：图形渲染

在计算机图形学中，光线跟踪法（Ray Tracing）提供了高质量真实感绘制效果，因而在电影动漫中被广泛应用。许多曲面被表示成带参数的样条曲面（Spline Surface），即为分片多项式或者有理多项式，其一般表示形式为

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases},$$

这里(f,g,h)是分片多项式，如图5所示的犹他壶模型（Utah Teapot）。在光线跟踪法中，每条光形被表示成一条射线$\mathbf{r}(t)=\mathbf{b}+t\mathbf{d}, t\geq 0$，我们需要计算射线和曲面的交点，这占据了整个计算时间的95%以上。直接用曲面的参数形式计算交点比较困难，我们需要将曲面变换成隐式形式，即为$F(x,y,z)=0$，这一过程被称为是参数曲面的隐式化。将射线方程代入隐式曲面，求解关于t的一元多项式方程，可以求解交点。参数曲面的隐式化可以直接应用吴方法，消去变元u,v，即得隐式曲面。

图5. 光线跟踪法渲染的犹他壶。（Ray Tracing Utah Teapot）

习题

- 课后习题：**12, 14, 16, 18**；
- 答题派：右图

1. 1.19 构造下面推理的证明。 (40)

（1）前提：$\neg(p \wedge \neg q), \neg q \vee r, \neg r$.

结论：$\neg p$.

（2）前提：$p \rightarrow (q \rightarrow s), q, p \vee \neg r$.

结论：$r \rightarrow s$.

（3）前提：$p \rightarrow q$.

结论：$p \rightarrow (p \wedge q)$.

（4）前提：$q \rightarrow p, q \leftrightarrow s, s \leftrightarrow t, t \wedge r$.

结论：$p \wedge q \wedge s \wedge r$.

（5）前提：$(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee s, \neg s, p$.

结论：$\neg q$.

2. 2.15 求下列各式的前束范式。 (20)

（1）$\forall x F(x) \vee \exists y G(x, y)$.

（2）$\exists x(F(x) \wedge \forall y G(x, y, z)) \rightarrow \exists z H(x, y, z)$.

3. 2.14 求下列各式的前束范式。 (20)

（1）$\neg \exists x F(x) \rightarrow \forall y G(x, y)$.

（2）$\neg(\forall x F(x, y) \vee \exists y G(x, y))$.

4. 1.20 判断下列推理是否正确，并证明你的结论。如果他是理科学生，他必学好数学。如果他不是文科学生，他必是理科学生。他没学好数学，所以他是文科学生。 (20)