第五章　留数及其应用

第二讲 留数与留数定理

数学与统计学院
易媛

主要内容

1 留数的定义

2 留数定理

3 留数的计算方法

4 函数在无穷远点的留数

主要内容

1 留数的定义

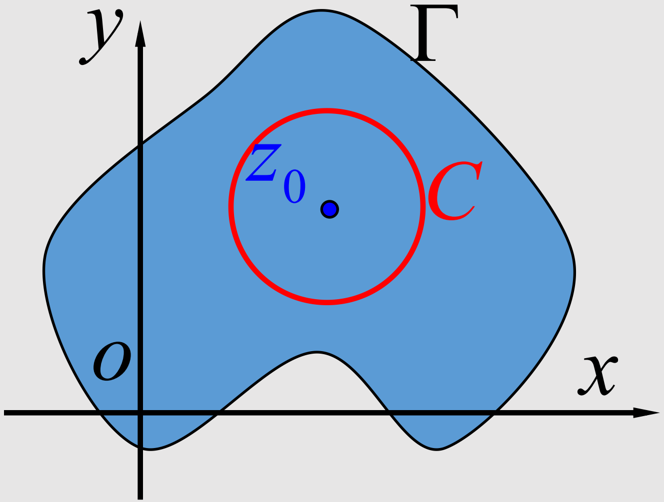
2 留数定理

3 留数的计算方法

4 函数在无穷远点的留数

1 留数的定义

回顾：复变函数的积分



柯西-古萨基本定理： $\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = 0.$

柯西积分公式： $\oint_{C} \dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0).$

高阶导数公式： $\oint_{C} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \dfrac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).\quad (n=0,1,2,\cdots)$

闭路变形原理：

$$\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z.$$

$$\oint_{C} \frac{1}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n\neq 1 \end{cases}$$

进一步： 若 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点， 此时 $f(z)$ 在圆环域

$0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，展开为**Laurent级数**

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

C 是 z_0 为中心，半径小于 δ 的正向圆周.

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

根据复合闭路定理，

积分与曲线 C 的选取无关

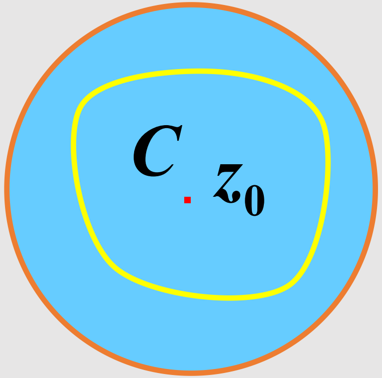
$$=\cdots+\underline{c_{-n}\oint_C (z-z_0)^{-n}\mathrm{d}z}+\cdots+\underline{c_{-1}\oint_C (z-z_0)^{-1}\mathrm{d}z}+$$

$2\pi i$

$$+\underline{\oint_C c_0\mathrm{d}z}+\underline{\oint_C c_1(z-z_0)\mathrm{d}z}+\cdots+\underline{\oint_C c_n(z-z_0)^n\mathrm{d}z}+\cdots$$

$$=2\pi i c_{-1}$$

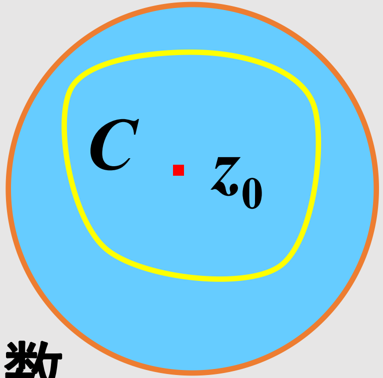
Laurent级数中负幂项 $\dfrac{c_{-1}}{z-z_0}$ 的系数



定义： 设 z_0是 $f(z)$的孤立奇点，我们把 $f(z)$在 z_0 的去心邻域内Laurent展式两端沿C逐项积分留下的积分值除以 $2\pi i$后得到的数，称为$f(z)$ 在 z_0 点的**留数(Residue)**，记做

$$\boxed{\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right]}$$

即 $$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}[f(z), z_0].$$



函数 $f(z)$ 在孤立奇点z_0 点的留数即是其在以 z_0 为中心的圆环域内Laurent级数-1次幂项的系数.

主要内容

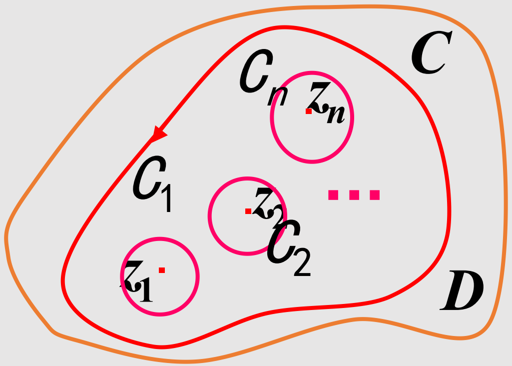
1. 留数的定义
2. 留数定理
3. 留数的计算方法
4. 函数在无穷远点的留数

2 留数定理

如果函数$f(z)$在某区域 D 内除有限个孤立奇点外处处解析，则利用复合闭路定理可以得到留数的一个基本定理.

定理： 设$f(z)$ 在区域内D 除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析，C 是D内包含所有奇点在其内部的分段光滑正向曲线，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right].$$



注： 留数定理将求沿封闭曲线C积分的整体问题转化为求被积函数$f(z)$在C内各孤立奇点处留数的局部问题.

主要内容

3 留数的计算方法

（1）基本方法：求出Laurent级数中负幂项 $c_{-1}(z-z_0)^{-1}$ 的系数c_{-1}.

（2）如果 z_0是$f(z)$的可去奇点：则 $\text{Res}\left[f(z),z_0\right]=0$

例1： 求 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $z=0$ 处的留数.

解： 因为

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)\ \left(0<|z|<+\infty\right).$$

$$=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots \Longrightarrow \text{Res}\left[f(z),0\right]=0.$$

（3）如果 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点：则需将 $f(z)$ 展开为 Laurent级数，求 c_{-1} .

例2：求 $f(z)=z^2 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 处的留数，并求 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$，其中 C 是 $|z|=1$，取正向.

解：因为

$$f(z)=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\cdots\quad(0<|z|<+\infty).$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{3!}.\qquad \oint_C f(z)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}i.$$

（4）如果 z_0 是 $f(z)$ 的极点：则有如下计算规则.

规则1：如果 z_0 是 $f(z)$ 的 1 级极点，那么

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0}[(z - z_0) f(z)].$$

分析：因为 $f(z) = \dfrac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$

$$(z - z_0) f(z) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \cdots$$

例3：求 $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)(z-2)}$ 在孤立奇点处的留数.

规则2： 如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则当 $n>m$ 时

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)].$$

分析： 因为 $f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+$

$$+\boxed{c_{-1}(z-z_0)^{-1}}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots,$$

$$(z-z_0)^n f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{n-m}+\cdots+\boxed{c_{-1}(z-z_0)^{n-1}}+\cdots$$

$$+c_0(z-z_0)^n+c_1(z-z_0)^{n+1}+\cdots.$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]=(n-1)!c_{-1}+$$(含有 $z-z_0$ 正幂的项).

例4： 求 $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(z+1)^n}$ 在$z=-1$处的留数.

解： 显然 $z=-1$ 是 $f(z)$ 的 n 级极点，所以

$$\mathrm{Res}\left[f(z),-1\right]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\left[z^{2n}\right]^{(n-1)}$$

$$=\lim_{z\to-1}\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+2)}{(n-1)!}z^{2n-n+1}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+2)}{(n-1)!}=(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}.$$

例5： 求 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 处的留数.

解1： 令 $p(z)=z-\sin z,\ Q(z)=z^6$ ．由于

$$P(0)=0, P'(0)=0, p''(0)=0, P'''(0)=1\neq 0$$

则 $z=0$是 $P(z)$的三级零点，因此$z=0$是$f(z)$

的三级极点. 根据规则2,

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right]$$

注： 当极点的级数高（三级或者三级以上），则计算繁杂.

解2： 利用Laurent展式：

$$\frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{z^6}[z-(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots)]=\frac{1}{3!z^3}-\frac{1}{5!z}+\cdots$$

因此 $$\operatorname{Res}[f(z),0]=-\frac{1}{5!}$$

解3： 利用规则2时，可以将极点的实际级数取得比实际级数高，使得计算简便：

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}z^5}\left[z^6\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right]$$

$$=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(-\cos z)=-\frac{1}{5!}$$

规则3： 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$， $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 z_0 都解析.

如果 $P(z_0)\neq 0$，$Q(z_0)=0$，$Q'(z_0)\neq 0$，那么 z_0 为 $f(z)$ 的1级极点，并且

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

分析: 由条件易知 z_0 是 $f(z)$ 的1级极点．于是

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}$$

$$=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

例6： 求 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ 在孤立奇点处的留数.

解： 显然 $P(z)=e^{iz}$ 和 $Q(z)=1+z^2$ 都在 $z=\pm i$ 处解析，

且 $P(\pm i)=e^{\mp 1}\neq 0$, $Q(\pm i)=0$, $Q'(\pm i)=\pm 2i\neq 0$.

所以 $z=\pm i$ 是 $f(z)$的1级极点，并且

$$\mathrm{Res}[f(z),\ i]=\left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=i}=-\frac{i}{2e},\quad \mathrm{Res}[f(z),-i]=\left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=-i}=\frac{e}{2}i.$$

主要内容

1 留数的定义

2 留数定理

3 留数的计算方法

4 函数在无穷远点的留数

4 函数在无穷远点处的留数

定义: 设 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，即 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的去心邻域 $0<R<|z|<+\infty$ 内解析，称积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$$

为 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的留数，并记做 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$，其中 C^- 表示圆周 $|z|=r\ (r>R)$ 的负向（即顺时针方向）.

易见 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\boxed{c_{-1}}$

$f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内Laurent展开式 $c_{-1}z^{-1}$ 项的系数

由定义可知： 如果函数$f(z)$在扩充复平面内只有有限个孤立奇点，设为 $z_1, z_2, \cdots, z_{N-1}, z_N = \infty$，做任意一条绕原点的正向简单闭曲线 C，使得 $z_k(k=1,\cdots,N-1)$包含在 C 的内部，则由留数定理可得

$$-2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\infty] = \oint_{|z|=r} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{N-1}\mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

定理： 设函数 $f(z)$ 在扩充复平面上只有包括无穷远点在内的有限个孤立奇点，则函数 $f(z)$ 在所有各奇点处的留数总和为零.

规则4： 设 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right].$$

分析： 设 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内的Laurent展开式为：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n=\cdots+\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-1}}{z}+c_0+c_1 z+\cdots$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n t^{-n-2}=\cdots c_{-2}+\frac{c_{-1}}{t}+c_0\frac{1}{t^2}+\cdots$$

$$\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]=c_{-1}=-\operatorname{Res}[f(z),\infty].$$

例7： 计算积分 $I=\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\mathrm{d}z.$

解：

记 $f(z)=\dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}.$ 则

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(z^2+1)^2(1+2z^4)^3},0\right]=-1.$$

因此，$\oint\limits_{|z|=4}f(z)\mathrm{d}z=-2\pi i\operatorname{Res}[f(z),\infty]=2\pi i.$

规则5： 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 是有理分式，且多项式 $Q(z)$ 的次数比 $P(z)$ 的次数至少高2次，则

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0.$$

分析： 存在 $R>0, M>0$，使得当 $|z|>R$ 时，$|f(z)|\le \dfrac{M}{|z|^2}$.

因此，当 $r>R$ 时，利用估值不等式

$$\left|\operatorname{Res}[f(z),\infty]\right|=\left|-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} f(z)\mathrm{d}z\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{M}{r^2}\mathrm{d}s=\frac{M}{r}\to 0\ (r\to\infty),$$

例8： 计算积分 $I=\oint_{C}\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}\mathrm{d}z$，其中$C^+:|z|=2$

解： 设 $f(z)=\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}$. 在扩充复平面内

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=0.$$

$$\mathrm{Res}[f(z),3]=\lim_{z\to 3}\frac{1}{z^5-1}=\frac{1}{242},$$

$$I=-2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\}=-\frac{\pi i}{121}.$$

例9： 计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z$，其中 C 是 $|z|=2$，取正向.

解1： 显然 $z_1=1,\ z_2=i,\ z_3=-1,\ z_4=-i$ 是函数 $f(z)=\frac{z}{z^4-1}$ 的1级极点，并且都在 C 的内部. 所以

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{4}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

$$= 2\pi i\sum_{k=1}^{4}\left.\frac{z}{(z^4-1)'}\right|_{z=z_k} = 2\pi i\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{4z_k^{\ 3}} = 0.$$

解2： $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = -2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\infty] = 0$

例10： 计算 $\oint_C \frac{z-2}{z^3(z-1)(z-3)}\mathrm{d}z$，其中 C 是 $|z|=2$，取正向.

解1：

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[\frac{z-2}{(z-1)(z-3)}\right]''$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-3}\right)''=-\frac{14}{27}.$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}[(z-1)f(z)]=\frac{1}{2}.$$

$$\oint_{|z|=2}\frac{z-2}{z^3(z-1)(z-3)}\mathrm{d}z=2\pi i\left(-\frac{14}{27}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{27}i.$$

例10： 计算 $\oint_C \frac{z-2}{z^3(z-1)(z-3)}\mathrm{d}z$，其中 C 是 $|z|=2$，取正向.

解2： $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=0$

$$\mathrm{Res}[f(z),3]=\lim_{z\to 1}[(z-3)f(z)]=\frac{1}{54}.$$

$$\oint_{|z|=2}\frac{z-2}{z^3(z-1)(z-3)}\mathrm{d}z=-2\pi i\left(0+\frac{1}{54}\right)=-\frac{\pi}{27}i.$$

$$\mathrm{Re}\,s[f,1]+\mathrm{Re}\,s[f(z),0]+\mathrm{Re}\,s[f,3]+\mathrm{Re}\,s[f,\infty]=0$$

例11： 求函数 $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 处的留数.

解： $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}=e^{z}e^{\frac{1}{z}}$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n!}\right)\quad\left(0<|z|<+\infty\right),$$

$$=\left(\frac{1}{0!}+\frac{z}{1!}+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{3}}{3!}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^{2}}+\frac{1}{3!\,z^{3}}+\cdots\right)$$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=c_{-1}=\frac{1}{0!1!}+\frac{1}{1!2!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}.$$

注： 若 ∞ 为函数 $f(z)$ 的可去奇点，则 $f(z)$ 在 ∞ 处的留数不一定为零.

例11： $z=\infty$ 为函数 $f(z)=1+\dfrac{1}{z}$ 的可去奇点，但是

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-1\neq 0.$$

这与 z_0 为 $f(z)$ 的有限可去奇点时留数必定为零不同.

思考题： 求函数 $f(z)=ze^{-\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 处的留数.

解1： 因为当 $z\to 0$ 时，$\dfrac{1}{z}\to\infty$，从而 $f(z)\to 0$

故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，即 $\mathrm{Res}[f(z),0]=0$

解2： 将函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心领域 $0<|z|<1$ 内

展开为Laurent：

$$f(z)=z\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\bullet\frac{1}{z^2}-\cdots\right)$$

即 $\mathrm{Res}[f(z),0]=C_{-1}=\dfrac{1}{2}$

为什么

？？？