高等数学 A2

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 上）

学校：____________________

专业：____________________

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

（此试卷为 2022 年第二版 第 2 次发行）

目录

2022 年所有试卷版本见**试卷版**的尾页。如需资料请添加下方的 QQ 群获取。

第 2 次发行说明：

发行时间：2022 年 5 月 8 日

改版内容：将近十一年的 A 卷放在了试卷册上册中，将近几年的 B 卷和过早年份的 A 卷放在了试卷册下册中。A 卷为正式考卷，B 卷为补考卷。命题老师会将 A、B 卷命为平行卷，难度持平。

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈

试卷版次：2022 年 5 月 8 日 第二版 第 2 次发行

本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380

cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102

cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 C　　2 D　　3 A　　4 B　　5 C　　6 B

二 填空题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1　$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$　　2　$\frac{e}{\sqrt{2}}$　　3　$\frac{4}{3}$

4　$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$　　5　$2S$　　6　$\frac{3}{2}$

三 计算题（共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

1

解. 切线方程：

$$\begin{cases} (-2)(x-1)+2(y-1)+4(z-1)=0 \\ (x-1)-2(y-1)+3(z-1)=0 \end{cases}$$

…………………………………………………………………… *4'*

即：

$$\begin{cases} x-y-2z=-2 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$$

切线方向为 $(1,-1,-2)\times(1,-2,3)=(-7,-5,-1)$, ………………………… *1'*

故法平面为：

$$-7(x-1)-5(y-1)-(z-1)=0.$$

…………………………………………………………………… *1'*

□

2

解. 原问题等价于求函数 $g(x,y)=x^2+y^2$ 在约束 $x+y=1$ 下的条件极值。考虑 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$. ………………………… *2'*

极值点 (x,y) 必满足下面的方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = & 2x+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = & 2y+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = & x+y-1=0 \end{cases} \tag{1}$$

…………………………………………………………………… *2'*

由上面的方程组解得：$x=y=\frac{1}{2}$, 所以可能的极值点为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 由几何意义知，该问题存在最小值，而最小值点一定为极值点，而我们求得的可能的极值点只有一个，所以 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 就是最小值点。………………………………………… *2'*

□

3

解.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\cos(xy^2)\right)=2y\cos(xy^2)-y^2\sin(xy^2)2xy$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\cos(xy^2)\right)=2y\cos(xy^2)-2xy\sin(xy^2)y^2.$$

因此 $\frac{\partial}{\partial y}(y^2\cos(xy^2)) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy\cos(xy^2))$, $\cdots\cdots$ *2'*

又 $\mathbb{R}^2$ 单连通，$\cdots\cdots$ *1'*

所以这样的 f 是存在的。

固定 $(0,0)\in\mathbb{R}^2$, 取 $C_1^{x,y}$ 为从 $(0,0)$ 到 $(x,0)$ 的直线段，$C_2^{x,y}$ 为从 $(x,0)$ 到 (x,y) 的直线段，令 $f(x,y) = \int_{C_1^{x,y}} y^2\cos(xy^2)dx + 2xy\cos(xy^2)dy + \int_{C_2^{x,y}} y^2\cos(xy^2)dx + 2xy\cos(xy^2)dy$, 则 f 即为所求

$\cdots\cdots$ *1'*

下求之：

$$\begin{aligned}
f(x_1,y_1) &= \int_{C_1^{x_1,y_1}} y^2\cos(xy^2)dx + 2xy\cos(xy^2)dy + \int_{C_2^{x_1,y_1}} y^2\cos(xy^2)dx + 2xy\cos(xy^2)dy \\
&= \int_{C_2^{x_1,y_1}} y^2\cos(xy^2)dx + 2xy\cos(xy^2)dy \\
&= \int_{C_2^{x_1,y_1}} 2xy\cos(xy^2)dy = \sin(x_1y_1^2)
\end{aligned}$$

因此 $f(x,y) = \sin(xy^2)$. $\cdots\cdots$ *2'*

4

解. 记 $D = \{(x,y)|x^2+y^2\leqslant ay, x\geqslant 0\}$, 记 C 为从点 $(0,0)$ 到点 $(0,a)$ 的沿着 y 轴的线段，由格林公式：

$$\begin{aligned}
&\int_L (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy \\
=&\iint_D m dxdy + \int_C (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy \cdots \quad 3' \\
=&m\sigma(D) + \int_0^a (\cos y - m)dy \cdots\cdots \quad 2' \\
=&\frac{1}{2}m\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \sin a - ma. \cdots\cdots \quad 1'
\end{aligned}$$

5

证明. 记 D 为 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2\}$, 则所求的曲面可视为函数 $z = xy, (x,y)\in D$ 的函数图像，因此：

$$\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \cdots\cdots \quad 2' \\
&= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy \\
&= \iint_{0\leqslant r\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \sqrt{1+r^2}rdrd\theta \cdots\cdots \quad 2' \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1+r^2}rdr \\
&= \pi\int_0^a \sqrt{1+r^2}dr^2 \\
&= \pi\cdot\frac{2}{3}\left((1+a^2)^{3/2} - 1\right).
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ *2'*

6

解. 记该公共区域为 Ω, 使用平行于 xy 平面的平面截 Ω, 记 $\Omega_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|(x,y,z)\in\Omega\}$, 则 Ω_z 为一个圆盘，且其面积 $\sigma(\Omega_z)=\begin{cases}\pi(R^2-(R-z)^2), & \text{if } 0\leqslant z\leqslant \frac{R}{2}\\ \pi(R^2-z^2), & \text{if } \frac{R}{2}\leqslant z\leqslant R.\end{cases}$ $\cdots\cdots$ 1'

由定义

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_\Omega 1dxdydz \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1' \\
&= \int_0^R dz\iint_{\Omega_z} 1dxdy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2' \\
&= \int_0^R \sigma(\Omega_z)dz \\
&= 2\int_0^{R/2}\pi(R^2-(R-z)^2)dz \\
&= \pi R^3 - 2\pi\int_{R/2}^R z^2dz \\
&= \pi R^3 - \frac{2\pi}{3}(R^3-R^3/8)
\end{aligned}
$$

$$
= \pi R^3(1-2/3+1/12) = \frac{5}{12}\pi R^3. \cdots\cdots\cdots 2'
$$

7

解. 记 S_1 为椭圆盘 $\{(x,y,0)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$ 的下侧，则 S 与 S_1 组成的封闭曲面，
记 Ω 为 S 所包围的上半椭球，由高斯公式，$\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy+\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iiint_\Omega 2(x+y+z)dxdydx$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'
由于在 S_1 上 $z\equiv 0$, 故 $\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=0$

由对称性知，$\iiint_\Omega 2(x+y)dxdydx$=0。
所以 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy = 2\iiint_\Omega zdxdydx$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'
又

$$
\begin{aligned}
2\iiint_\Omega zdxdydz &= 2\int_0^c zdz\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}} dxdy \\
&= 2\int_0^c z\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz \\
&= \pi abc^2 - \frac{\pi ab}{c^2}\frac{c^4}{2} \\
&= \frac{\pi abc^2}{2}
\end{aligned}
$$

故 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\frac{\pi abc^2}{2}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'

8

解. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1$, 收敛半径为 1, 又在 -1 与 1 处显然不收敛，故收敛区间为 $(-1,1)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'
记在 $(-1,1)$ 内收敛到的函数为 $S(x)$, 只需求 $\frac{1}{x}S(x)$, 又

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$
$$= \frac{x}{1-x}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'

故 $\frac{S(x)}{x} = \frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{)1-x)^2}$，故 $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'

四（本题 4 分）

证明. 不妨设 $\vec{l}$ 为单位向量，则 $\cos\theta(x,y) = \vec{n}\cdot\vec{l}$, 若记 $\vec{n}(x,y) = (n_1(x,y), n_2(x,y))$, 则 $(n_2(x,y), -n_1(x,y))$ 为 C 的光滑的单位切向量场，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'

不妨取 C 的方向为该切向量场所指的方向，则由第一型曲线积分与第二型曲线积分

之间的关系，有：

$$\oint_C \vec{n}\cdot\vec{l}ds = \oint_C (n_1l_1 + n_2l_2)ds$$
$$= \oint_C (l_2, -l_1)\cdot(n_2, -n_1)ds$$
$$= \oint_C l_2dx - l_1dy$$
$$= \iint_D 0dxdy$$
$$= 0.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'

2 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、单项选择题

1.B　2. A　3. C　4. B　5. A　6.C

评分标准说明：每题 4 分，错则扣全分。

二、填空题

1. $x-1=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$.

2. $\frac{y}{1+x^2y^2}dx+\frac{x}{1+x^2y^2}dy$.

3. $\frac{16\pi}{3}$.

4. -2π.

5. 7.

6. $2\le x<4$或$[2,4)$

评分标准说明：每空 4 分，第 6 小题写成 $2<x<4$或$(2,4)$ **扣 2 分；其余小题错则**

扣全分。

三 、计算题（本题共 6 题，满分 36 分）

1.**解：将** $z=1-2x$ 带入第一个方程 ------------ 1 分

得到 $5(x-\frac{2}{5})^2+y^2=\frac{4}{5}$ ------------ 2 分

引进参数 $\begin{cases} x=\frac{2}{5}(1+\cos t) \\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}\sin t \qquad t\in[0,2\pi]; \\ z=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\cos t \end{cases}$ ------------ 3 分

评分标准说明： t 的范围未给出扣 1 分。

2. **解：**方程两端同时对 y 求导可得

$\cos y+2z\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}=0,$ 则 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\cos y}{2(1-z)}$ ………… 2 分

方程两端同时对 x 求导可得

$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial x}=0,$ 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{1-z}$ ………………2 分

上式再对 x 求导

$2+2(\frac{\partial z}{\partial x})^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$ 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{1-z}+\frac{x^2}{(1-z)^3}$ …………2 分

评分标准说明：该题还可以用微分形式不变性求导，结果正确满分；

3. 解： 采用柱坐标

$\begin{cases} r^2\le z\le 2 \\ 0\le r\le\sqrt{2} \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$ ………………2 分

可得

原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{r^2}^2\frac{1}{1+r^2}dz=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{r(2-r^2)}{1+r^2}dr=3\pi\ln 3-2\pi$ ……4 分

评分标准说明：其他方法也可

4．解： $P(x,y)=x^2y, Q(x,y)=\frac{1}{3}x^3,$ 故 $\frac{\partial Q}{\partial x}=x^2=\frac{\partial P}{\partial y}$ …………2 分

则 $u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}du=(\int_{(0,0)}^{(x,0)}+\int_{(x,0)}^{(x,y)})x^2ydx+\frac{1}{3}x^3dy$ ……………………2 分

解得 $u(x,y)=\frac{1}{3}x^3y.$ ···2 分

评分标准说明：第二步中起点不在(0,0)也可

5. 解：补充 $\Sigma_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1,z=0\}$ 取下侧

可得 $\iint_{\Sigma}=\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$ ···1 分

$\iint_{\Sigma_1} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=0$ ···1 分

由高斯公式：$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}(x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy)=\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ ···2 分

采用球坐标

$\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 3\rho^2\rho^2 d\rho=\frac{6\pi}{5}$ ··················**2 分**

评分标准说明：出现高斯公式，最终结果错误，可给 2 分

6. 解：将 $f(x)$ 做奇周期延拓，计算傅里叶系数

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+2)\sin nxdx=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{\pi+4}{2k-1}, & n=2k-1\\ -\frac{1}{\kappa}, & n=2k\end{cases}$$ ··················**4 分**

得 $x+2=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{\pi}\frac{\pi+4}{2k-1}\sin(2k-1)x-\frac{1}{k}\sin 2kx),\ (0<x<\pi)$ ················**2 分**

评分标准说明：最后一步未给出 x 的范围，扣 1 分

四、综合题（本题 **8** 分）

解：

设 $C(x,y)$, 则 $\overrightarrow{AB}=(3,-1), \overrightarrow{AC}=(x-1,y-3)$ ······**1 分**

三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|3y+x-10|$$ ·················**2 分**

构造拉格朗日函数

$F(x,y,\lambda)=(3y+x-10)^2+\lambda(x^2+y^2-1)$ ·································**1 分**

求导可得

$$\begin{cases} F_x = 2(3y + x - 10) + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 6(3y + x - 10) + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$ ……………………………………3 分

解得 $x = \frac{1}{\sqrt{10}}, y = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ……………………………………………**1 分**

评分标准说明：直接转化为无条件极值方法也可；

五、证明题（**本题共两小题，满分 8 分**）

1 证明：当 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{\alpha}{n}}{(\frac{\alpha}{n})^2} = \frac{1}{2}$ ……………………………………………2 分

$\Sigma_{n=1}^{\infty}(\frac{\alpha}{n})^2$ **收敛，由比较判别法可知原级数绝对收敛。**

2 证明：在球坐标与极坐标下可得

$F(t)=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_1^t f(r^2) r^2 dr = 4\pi \int_1^t f(r^2) r^2 dr$

$G(t)=\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^t f(r^2) r dr = 2\pi \int_1^t f(r^2) r dr$ ………………………………2 分

$F'(t) - G'(t) = 4\pi f(t^2) t^2 - 2\pi f(t^2) t > 0$ 当t>1 ……………………1 分

由 F(1)=G(1)=0 可得结论………………………………………………1 分

评分标准说明：第 2 题，有极坐标或球坐标思想，可适当给分

3 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. A　　2. C　　3. B　　4. C　　5. B　　6. D

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $\frac{x}{-R} = \frac{y-R}{0} = \frac{z-\frac{k}{2}\pi}{k}$；　　2. $8\pi R^2$；　3. 4π；　　4. [4,6]；

5. $\frac{1}{\sqrt{13}}$;　　6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, (-\infty < x < \infty)$　　　　　　　.

三 、计算题

1、解：$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x+y} + (x^2 + y^2)e^{x+y} = (x^2 + 2x + y^2)e^{x+y}$.　　………………….（3 分）

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\mathrm{y}e^{x+y}+(\mathrm{x}^2+2x+y^2)e^{x+y}=(\mathrm{x}^2+2x+2y+y^2)e^{x+y}$. …………（7 分）

2、解：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n\cdot n!}{n^n}}{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot(-\frac{n}{n+1})}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1,$$

所以，由比值审敛法，该级数收敛。 ……………………（7 分）

3、解：曲面Σ的方程为$\Sigma:\mathrm{z}=\sqrt{9-\mathrm{x}^2-y^2}$，$(x,y)\in D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 8\}$。

∵ $\mathrm{z_x}=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，$\mathrm{z_y}=\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，

∴ $\sqrt{1+\mathrm{z_x^2}+z_y^2}=\frac{3}{\sqrt{9-\mathrm{x}^2-y^2}}$.

从而，$\mathrm{S}=\iint_D\sqrt{1+\mathrm{z_x^2}+z_y^2}dxdy=\iint_D\frac{3}{\sqrt{9-\mathrm{x}^2-y^2}}dxdy$ ……………（4 分）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{3}{\sqrt{9-r^2}}rdr=12\pi$ ……………（7 分）

4、解：添加辅助面$\Sigma:z=0,x^2+y^2\le a^2$，取下侧。记Ω 为曲面 S 和Σ所围成的空间区域，则由高斯公式，

$$\iint_{S\cup\Sigma}\mathrm{xdydz+ydzdx+zdxdy}=3\iiint_\Omega dv=3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3=2\pi a^3$$ ………（4 分）

而 $$\iint_\Sigma\mathrm{xdydz+ydzdx+zdxdy}=0$$

所以， $\iint_S\mathrm{xdydz+ydzdx+zdxdy}=2\pi\mathrm{a}^3$ ………..（7 分）

5、解：令$P=3x^2y+8xy^2$，$Q=x^3+8x^2y+12ye^y$。
因为

$$\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial y}=3x^2+16xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$(3\mathrm{x}^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$是某个函数的全微分。 ……..（3 分）

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$$
$$=\int_0^y(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$$
$$=x^3y+4x^2y^2+12(y-1)e^y+12$$ ……….（7 分）

6、解：f(x)满足 Dirichlet 定理条件，傅里叶系数计算如下：

$$\mathrm{a_0}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$\mathrm{a_n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\left[\frac{2}{n^2\pi}x\cos nx\right]_0^{\pi}=(-1)^n\frac{2}{n^2},\mathrm{n}=1,2,\cdots$$

$$\mathrm{b_n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x^2\cos nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$=(-1)^{\mathrm{n}+1}\frac{\pi}{n}+\frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n-1]\qquad n=1,2,\cdots$$ ………（5 分）

所以，

$$f(x)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^n\frac{2}{n^2}\cos nx+\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}+\frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n-1]\right]\sin nx\}$$

$$x\neq(2k+1)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$ ………（7 分）

四、证明题

1、证明：

$$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 dy\int_0^y f(x)f(y)dx=\int_0^1\left[f(y)\int_0^y f(x)dx\right]dy$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^y f(x)dx\right]d\left[\int_0^y f(x)dx\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^y f(x)dx\right]_0^1=\frac{A^2}{2}。$$ ………（5 分）

2、证明：由 Green 公式

左边 $=\iint_D e^{\sin y}+e^{-\sin x}dxdy$，右边 $=\iint_D e^{-\sin y}+e^{\sin x}dxdy$。

由二重积分的对称性，$\iint_D e^{\sin y}+e^{-\sin x}dxdy=\iint_D e^{-\sin y}+e^{\sin x}dxdy$。

从而，$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$。 ………（5 分）

4 浙江理工大学 2017—2018 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.B　2. B　3. B　4. B　5. C　6. A

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1　$2dx+dy$　　2　$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$　　3　$4x-2y-z-2=0$

4　6　　5　$(\frac{1}{2},+\infty)$　　6　$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{x}$

三 计算题。

1 解：$\overrightarrow{PQ}=(-1,1)$

$\vec{l}=\vec{e}_{\overrightarrow{PQ}}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=(\cos\alpha,\cos\beta)$

$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,-1)}=2x|_{(1,-1)}=2,\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,-1)}=-2y|_{(1,-1)}=2$

$\therefore\frac{\partial f}{\partial l}|_{(1,-1)}=\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,-1)}cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,-1)}cos\beta=2\times(-\frac{1}{\sqrt{2}})+2\times(\frac{1}{\sqrt{2}})=0.$

2 解：$\because f$具有二阶连续偏导数，　$\therefore\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'\cdot\sin x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial(f_2'\cdot \sin x)}{\partial x}=\cos x\cdot f_2'+\sin x\cdot\frac{\partial f_2'}{\partial x}$

$\frac{\partial f_2'}{\partial x}=f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot ycosx=f_{12}''+ycosx\cdot f_{22}''$

$\therefore\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\sin x\cdot f_{12}''+y\cdot sinx\cdot cosx\cdot f_{22}''+cosx\cdot f_{22}''+cosx\cdot f_2'$

3 解：

$\begin{cases}f_x'=3x^2-6x=0\\f_y'=3y^2-6y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,x=2\\y=0,y=2\end{cases}$，得驻点：$(0,0),(0,2),(2,0),(2,2)$

$$f_{xx}''=6x-6,f_{xy}''=0,f_{yy}''=6y-6$$

① $(0,0)$处：

$AC-B^2=(-6)\times(-6)-0=36>0$，有极值，$A=-6<0$，极大值，$f(0,0)=0$，

② $(0,2)$处：

$AC-B^2=(-6)\times 6-0=-36<0$，无极值，

③ $(2,0)$处：

$AC-B^2=6\times(-6)-0=-36<0$，无极值，

④ $(2,2)$处：

$AC-B^2=6\times 6-0=36>0$，有极值，$A=6>0$，极小值，$f(2,2)=-8$

4 解：

$$V=\iiint_\Omega 1\,dV=\iint_{D_{xy}}(6-2x^2-y^2-x^2-2y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\iint_{D_{xy}}(2-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=6\pi$$

5 解：计上Σ_1：$z=1,(x^2+y^2\le 1)$,取上侧

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=I_1-I_2$$

$I_1=\iiint_\Omega (2x+2z)dxdydz=2\iiint_\Omega zdV=2\int_0^1 z\cdot\pi\cdot z\ \ dz=\frac{2}{3}\pi$

$$I_2=\iint_\Sigma (z^2-x)dxdy=\iint_\Sigma (1-x)dxdy=\iint_{D_{xy}}1dxdy=\pi$$

$$\therefore I=\frac{2}{3}\pi-\pi=-\frac{\pi}{3}$$

四 （本题满分 12 分）

（1）解：$f(x,y)=Ax^2+Bxy-1$

$$A=\oint_L (Ax^2+Bxy-1)ds=A\oint_L x^2ds-\oint_L ds=\frac{A}{2}\oint_L 1ds-\oint_L 1ds=\frac{A}{2}\cdot 2\pi-2\pi$$

$$=(A-2)\pi \implies A=\frac{2\pi}{\pi-1}$$

$$B=\iint_D (Ax^2+Bxy-1)d\sigma=\iint_D (Ax^2-1)d\sigma=A\cdot\frac{\pi}{4}-\pi=\frac{2\pi-\pi^2}{2(1-\pi)}$$

$$\therefore f(x,y)=\frac{2\pi}{\pi-1}x^2+\frac{2\pi-\pi^2}{2(1-\pi)}xy-1$$

（2）解：左 $=$（格林公式）$\iint_D \left[\left(f+x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right)-(f+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y})\right]d\sigma=\iint_D \left[\left(x\left(\frac{4\pi x}{\pi-1}+\frac{2\pi-\pi^2}{2(\pi-1)}\cdot y\right)\right)-y\cdot(\frac{2\pi-\pi^2}{2(\pi-1)}\cdot x)\right]d\sigma=\iint_D \frac{4\pi x^2}{\pi-1}d\sigma=\frac{4\pi}{\pi-1}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{\pi-1}$

右$=\frac{\pi}{2}\cdot A=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\pi}{\pi-1}=\frac{\pi^2}{\pi-1}$

左=右，证毕。

五 证明题（本题满分 4 分）

解：$\because \Sigma\frac{1}{n^2}$收敛，又$\Sigma a_n^2$收敛。

又$\because \left|\frac{a_n}{n}\right|\le a_n^2+\frac{1}{n^2}$

由比较审敛法，

$\therefore \sum|\frac{a_n}{n}|$收敛，即：$\sum\frac{a_n}{n}$绝对审敛。

5 浙江理工大学 2016—2017 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1. D　　2. A　　3. C　　4. C　　5. D　　6. A

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1. -6　　2. 0　　3. 2

4. $\frac{1}{1+\ln\frac{z}{x}}$或$\frac{z}{y+z}$　　5. 1　　6. 2

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出文字说明及演算过程）

1.

把Ω投影到xOy面上得投影区域D_{xy}为由直线$x+2y=1$与两坐标轴围成的三角形 ....（2 分）

$\iiint_\Omega xdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}dy\int_0^{1-x-2y}xdz$ ....（4 分）

$=\frac{1}{48}$ . ...（6 分）

2.

解：$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$ ....（2 分）

$\frac{1}{1+x^2}=1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+\ldots$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ ....（4 分）

$x\in(-1,1)$ ....（6 分）

3.

设L_1为单位圆位于第一象限的部分。

$\int_L |y|ds=2\int_{L_1}|y|ds=2\int_{L_1}yds$ ....（2 分）

设$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

则$ds=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}d\theta=d\theta$ ....（4 分）

原式$=2\int_{L_1}yds$=$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=2$ ....（6 分）

4.

方法一：

把圆柱体表面分为三个部分：上半部分和侧面， ....（2 分）

分别则上下在xOy面上投影相同，侧面在xOy面上投影为零， ....（4 分）

在上半部分的积分互为相反数，侧面的积分为 0，所以积分值为 0. ....（6 分）

方法二：

设Ω为圆柱体闭域， ....（2 分）

由高斯公式：$\oiint_\Sigma (x-y)dxdy=\iiint_\Omega \frac{\partial(x-y)}{\partial z}dv$ ....（4 分）

$=\iiint_\Omega 0dv=0.$ ....（6 分）

5.

$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$ ....（2 分）

解得驻点为$(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$ ....（3 分）

再求二阶偏导数，

$f_{xx}(x,y)=6x+6, f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=-6y+6.$ ....（4 分）

在点(1,0)处，$AC-B^2=72>0$，且 $A>0$，故(1,0)为极小值点。

类似地，$(-3,2)$为极大值点，$(1,2),(-3,0)$都不是极值点。 ………………………（6 分）

四、证明题（本题共 2 小题，第 1 题 4 分，第 2 题 6 分，满分 10 分，应写出详细证明和计算过程）

1.

令$a_n=\frac{n}{3^{n-1}}$，

则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1$， ………………………（2 分）

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{3^{n-1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$ 收敛， ………………………（3 分）

故原级数绝对收敛。 ………………………（4 分）

2.

令$P(x,y)=2xy-y^4+3$，$Q(x,y)=x^2-4xy^3$，

则$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以曲线积分与路径无关。 ………………………（2 分）

$\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$

$=\int_{(1,0)}^{(2,0)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy+\int_{(2,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$

$=\int_1^2 3dx+\int_0^1(4-8y^3)dy$ ………………………（4 分）

$=5$ ………………………（6 分）

6 浙江理工大学 2015—2016 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1-6 B C C D C B

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1 $-\frac{2}{(x^2+y^2)^2}(x,y)$或$-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\vec{i}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}$ 2 $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$

3 $\frac{4}{15}\pi$ 4 0 5 $\frac{\sqrt{3}}{12}$ 6 $-\frac{1}{4}$

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出演算过程及文字说明）

1.（1）（比值）

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}=\frac{2}{3}<1$，故收敛。

（2）（加绝对值，比值）

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n+1}{3^n}}{\sin\frac{n}{3^{n-1}}}=\frac{1}{3}<1$，故绝对收敛（必收敛）。

2. $\begin{cases} f_x=(x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \\ f_y=(1+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \end{cases}$

得极值点$(1,-\frac{4}{3}),(-1,-\frac{2}{3})$.

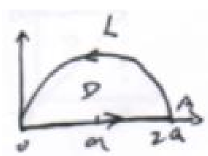
又$A=f_{xx}=(\frac{x^3}{3}+2x^2+2x+y)e^{x+y}$

$B=f_{xy}=(\frac{x^3}{3}+x^2+y+1)e^{x+y}$

$C=f_{yy}=(\frac{x^3}{3}+y+2)e^{x+y}$

① $(1,-\frac{4}{3})$，$AC-B^2>0, A>0.$ 故$(1,-\frac{4}{3})$为极小值点，极小值为$-e^{-\frac{1}{3}}$.

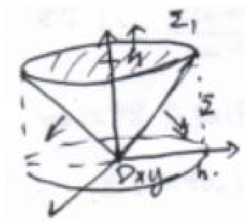
② $(-1,-\frac{2}{3})$，$AC-B^2<0$, 故$(-1,-\frac{2}{3})$不是极值点。



3. $I=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(3x+2y)dy=\frac{20}{3}$

4. $I=\oint_L \overrightarrow{OA}-\int\overrightarrow{OA}=\iint_D 2dxdy-0=\pi a^2$

5.计：Σ_1：$z=h$，上侧。



$I=\oiint_{\Sigma_1+\Sigma}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_\Omega(0+0+0)dv-\iint_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy$

$=-\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\rho^2\cdot\rho d\rho$

$=-\frac{1}{2}\times 2\pi\times\frac{h^4}{4}=-\frac{\pi}{4}h^4$

6. $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)dx=2(\pi^2+1)$，

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n\cdot 12}{n^2}$，$b_n=0$

$\because n$是从 1 到$+\infty$，$\therefore$ 由公式得，$f(x)=\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad x\in(-\infty,+\infty)$

（因为f连续，所以f的傅里叶级数处处收敛到f）（此处只做简要步骤说明）

四、综合题（本题 8 分）

（1）$P=x+2y$，$Q=2x+y$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=2=\frac{\partial P}{\partial y}$

$u(x,y)=\int_0^x xdx+\int_0^y(2x+y)dy=\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}$

（2）令$F(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}-z$.

则 $\vec{n}|_{(1,1,4)} = (3, 3, -1)$.

$\therefore$ 切平面方程为 $3(x-1)+3(y-1)-(z-3)=0$.

即 $3x+3y-z-3=0$

法线方程为 $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}$.

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1.

左$=\int_0^a dx\int_x^a e^{m(a-x)}f(x)dy=\int_0^a (a-x)\cdot e^{m(a-x)}f(x)dx=$右 .

2.

法一：$\because \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 也收敛（且为正项级数）， $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$.

又$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(u_n+v_n)^2}{(u_n+v_n)}=\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$

由比较审敛法极限形式知，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$也收敛。

法二：$\because \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛， $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$.

即 $\exists N>0$，当$n\ge N$时，有$u_n+v_n<1$.

从而$(u_n+v_n)^2<u_n+v_n$ $(n\ge N)$.

由比较审敛法知，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$收敛。

7 浙江理工大学 2014—2015 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1-6 A D D C A B

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、$-(x-1)+16(y-2)+10(z+1)=0$ 2、3 3、$(4,6)$

4、± 2 5、$2a^2$ 6、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$

三、计算题（本题共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分，应写出演算过程及文字说明）

1、$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(2+4x^2\right)e^{x^2+y^2}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xye^{x^2+y^2}$

2、选用极坐标计算，$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho\cdot\rho d\rho=\dfrac{14\pi}{3}$

3、$I=\int_0^{\pi}\dfrac{(a\cos t-a\sin t)\cdot a\cos t+(a\cos t+a\sin t)\cdot a\sin t}{a^2}dt=\pi$（注：不能用格林公式）

4、补上$\sum_1$:　$x=e^a$.　$\left(其中，y^2+z^2\le a^2\right)$ 取前侧

$$I=\iint\limits_{\sum+\sum_1}-\iint\limits_{\sum_1}\overset{高斯公式}{=}\iiint\limits_{\Omega}(-4x+8x-4x)dv-\iint\limits_{y^2+z^2\le a^2}2\left(1-e^{2a}\right)dydz$$
$$=2\pi a^2\left(e^{2a}-1\right)$$

5、设和函数为$S(x)$

$$\because x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{x}{1-x},\quad x\in(-1,1)$$

$$\therefore 1+2x+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}=x^2\left(1+2x+\cdots+nx^{n-1}+\cdots\right)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2,\quad x\in(-1,1)$$

6、(1) 将$f(x)$周期延拓成$F(x)$，因为$F(x)$处处连续，所以其傅里叶级数处处收敛到它。

（2）

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=(-1)^n\frac{4}{n^2},\quad n=1,2,\cdots$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nxdx=0,\quad n=1,2,\cdots$$

$$\therefore F(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\therefore f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi]$$

四、证明题（本题共 2 小题，每题 4 分，满分 8 分）

1、因为 xOy 平面是一个单连通域，Γ 是 xOy 平面上一条分段光滑闭曲线，且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xyf\left(x^2+y^2\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以等式成立。

2、$\because e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in R$

$$\therefore \frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots,\qquad x\in R$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\cdots+\frac{n-1}{n!}x^{n-2}+\cdots,\qquad x\in R$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}+\cdots=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\Big|_{x=1}=\frac{e^x x-e^x+1}{x^2}\Big|_{x=1}=1$$

五、数学建模题（本题 8 分，应写出具体建模和求解过程）

解 记雪堆体积为 V，侧面积为 S ，则

$$V=\int_0^{h(t)}dz\iint_{D_z}dxdy=\frac{\pi}{4}h^3(t),\text{其中}D_z:x^2+y^2\le\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z],$$

$$S=\iint_{D_0}\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,dxdy=\iint_{D_0}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,dxdy$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{13\pi}{12}h^2(t),\text{其中}D_0:x^2+y^2\le\frac{1}{2}h^2(t),$$

由题意知 $\dfrac{dV}{dt}=-0.9S$，从而 $\begin{cases}\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{13}{10}\\ h(0)=130\end{cases}\Rightarrow h(t)=-\dfrac{13}{10}t+130$，令 $h(t)\to 0$，得 $t=100(h)$，

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需的时间为 100 小时.

8 浙江理工大学 2013—2014 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1-6　C　C　A　B　A　D

二、填空题（本题共 7 小题，每小题 4 分，满分 28 分）

1、$2x-8y+16z-1=0$　2、$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{2\sec\theta}f(\rho)\rho d\rho$　3、3, 0

4、$\sqrt{2}$　5、1　6、$(-\frac{1}{5},\frac{1}{5})$　7、$\frac{1}{2}$

三、计算题（本题共 6 小题，每题 6 分，满分 36 分）

（1）解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_u e^y+f_x,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=xe^{2y}f_{uu}+e^y f_{uy}+xe^y f_{xu}+f_{xy}+e^y f_u$

（2）解：令 $u_n=n^2\sin\dfrac{\pi}{2^n}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n^2\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$，

所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛。

（3）解： 设 D 为 L 所围的三角形区域，则由格林公式有

$$\int_L(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy=\iint_D(3-(-1))dxdy=12$$

（4）解 添加辅助面 $\Sigma':\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le 1,z=1\right\}$，取上侧，则由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma'}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(1+2+3)dv=6\iiint\limits_{\Omega}dv=6\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 1^2\cdot 1=2\pi$$

$$\iint\limits_{\Sigma'}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=\iint\limits_{\Sigma'}3(z-1)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}3(1-1)dxdy=0$$

故原式$=2\pi-0=2\pi$.

（5）解 易知 $\frac{1+x}{(1-x)^2}=\frac{2-(1-x)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}$

又 $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\qquad(-1<x<1)$

$\therefore\frac{1}{(1-x)^2}=(\frac{1}{1-x})'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

$\therefore\frac{1+x}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{n-1}$ ， 其中 $(-1<x<1)$

(6) 解： 幂函数的收敛区域为$\left(-1,1\right)$，

则 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$,， $(x\ne -1)$

所以 $s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx+s(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ x\in\left(-1,1\right)$

四、应用题（本题满分 7 分）

解：Σ_2 所在半球面含在 Σ_1 球面中部分面积为

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\mathrm{d}\,r=4\pi(2-\sqrt{3}\,)$$

因此，屋顶的面积为

$$\frac{1}{2}(4\pi\cdot 2^2)-4\pi(2-\sqrt{3})+\frac{1}{2}4\pi=2\pi(1+2\sqrt{3})$$

五、证明题（本题满分 5 分）证明： $\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'(\frac{y}{x})+f'(\frac{x}{y})$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^4}f''(\frac{y}{x})+\frac{1}{y}f''(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})+f(\frac{x}{y})-\frac{x}{y}f'(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y})+\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y})+\frac{x^2}{y^3}f''(\frac{x}{y})=\frac{1}{x^2}f''(\frac{y}{x})+\frac{x^2}{y^3}f''(\frac{x}{y})$$

原命题成立。

9 浙江理工大学 2012—2013 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1、C； 2、B； 3、B； 4、C； 5、A； 6、D。

二、填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1、$\left(2,-1,0\right)$； 2、0； 3、0； 4、3π； 5、4π； 6、$\left[0,4\right)$

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分）

1．设 $z=f(xy,\frac{x}{y})+\sin y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y})+0=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'$ …………3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]$$ ………6 分

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$ ………7 分

2.计算 $\iint\limits_{D} \arctan\frac{y}{x} dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4, x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0, y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域。

解：$\iint\limits_{D} \arctan\frac{y}{x} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2 \theta\rho d\rho d\theta = \frac{3}{64}\pi^2$ ……………7 分

3. 求 $\iint\limits_{\Sigma}\left(x-y^2\right)dydz+\left(y-z^2\right)dzdx+\left(z-x^2\right)dxdy$，其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧。

解：设 Σ_1 是 $x^2+y^2\le 1$ 的下侧 ……………1 分

原式= $\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1}$ ……………2 分

$= \iiint\limits_{\Omega} 3dv - \iint\limits_{\Sigma_1}\left(x-y^2\right)dydz+\left(y-z^2\right)dzdx+\left(z-x^2\right)dxdy$ ……………4 分

$= 2\pi - \iint\limits_{D} x^2 dxdy$ ……………6 分

$= 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$ ……………7 分

4.将函数 $f(x)=\frac{1}{2-x}$ 展开为 x 的幂级数（注明收敛域）。

解：$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$ ……………2 分

$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{x}{2}+\cdots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots\right]=\frac{1}{2}+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^3}+\cdots+\frac{x^n}{2^{n+1}}+\cdots$ ……………5 分

$x\in(-2,2)$ ……………7 分

四、解答题（本题共 2 小题，第 1 小题 10 分，第 2 小题 8 分，满分 18 分）

1.（1）验证 $\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$ 在整个 xoy 平面内为某个函数 $F(x,y)$ 的全微分，并求 $F(x,y)$；

（2）计算 $I=\int_C\left(2xy^3-y^2\cos x+y\right)dx+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$，其中 C 为单位圆 $x^2+y^2=1$ 的正向。

解:（1）设 $P=2xy^3-y^2\cos x, Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$，因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=6xy^2-2y\cos x$

$(x,y)\in xoy$ 平面，所以 $\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$ 在整个 xoy 平面内

为某个函数的全微分。 ……………2 分

于 是 $F(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy=y-y^2\sin x+x^2y^3$

（也可用凑微分法求） ……………5 分

（2）$I=\int_C Pdx+Qdy+\int_C ydx$ ……………6 分

$=0+\int_C ydx$ ……………8 分

$\overset{Green}{=}\iint\limits_D(-1)d\sigma\left(D:x^2+y^2\le 1\right)=-\pi$ ……………10 分

2. 将函数 $f(x)=x$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成余弦级数。

解：对 $f(x)$ 进行偶延拓，则有 ……………2 分

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cdot\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, n=2,4,6,\cdots\\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$ ……………4 分

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi$， $b_n=0\quad n=1,2,\cdots$ ……………6 分

故 $x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right),x\in[0,\pi]$ ……………8 分

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，证明：$\int_0^a dy\int_0^y f(x)dx=\int_0^a(a-x)f(x)dx$ 。

证：交换积分次序 ……………1 分

$\int_0^a dy\int_0^y f(x)dx=\int_0^a dx\int_x^a f(x)dx=\int_0^a(a-x)f(x)dx$ ……………3 分

2. 试证明定理：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛。.

证：令 $v_n=\frac{1}{2}\left(u_n+|u_n|\right)\quad(n=1,2,...)$， ……………1 分

显然 $v_n\ge 0, v_n\le u_n\quad(n=1,2,...)$，因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，故由比较审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 ……………2 分

从 而 级 数 $\sum_{n=1}^{\infty}2v_n$ 也 收 敛 ， 而 $u_n=2v_n-|u_n|$ ， 由 收 敛 级 数 的 基 本 性 质 可 知

$\sum u_n = \sum 2v_n - \sum |u_n|$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。 ……………3 分

10 浙江理工大学 2011-2012 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1．A; 2．D ; 3．A; 4．C; 5．B; 6.B

二、填空题（本题共 5 小题, 每小题 4 分，满分 20 分）

1. (-1,2,-2); 2. $2\sqrt{6}$; 3. $\int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{1} f(x, \quad y) dy + \int_{0}^{1} dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x, \quad y) dy$;

4. $12l$; 5. $\frac{3}{2}$

三、解答题（本题共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分）

1. $\vec{s}_1 = (6, 2, -3)$, $\vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, -1, -4)$, ………2 分

取平面的法向量为 $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (-11, 30, -2)$ ………2 分

所以平面方程为：$-11(x-4) + 30(y+3) - (z-1) = 0$ ，即 $11x - 30y + z - 135 = 0$. …2 分

2. $\frac{\partial z}{\partial x} = (f_1' \cdot y + f_2' \cdot \frac{1}{y}) + 0 = y f_1' + \frac{1}{y} f_2'$, ……………2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1' + y[f_{11}'' \cdot x + f_{12}'' \cdot (-\frac{x}{y^2})] - \frac{1}{y^2} f_2' + \frac{1}{y}[f_{21}'' \cdot x + f_{22}'' \cdot (-\frac{x}{y^2})]$$

$$= f_1' + xy f_{11}'' - \frac{1}{y^2} f_2' - \frac{x}{y^3} f_{22}''.$$ ……….4 分

3. 解：$f(x) = \frac{1}{3 + (x-3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{x-3}{3})}$, ……………2 分

因为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$， $x \in (-1, 1)$，

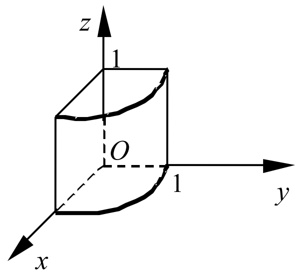
所以$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+(\frac{x-3}{3})} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3} \cdot (\frac{x-3}{3})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (\frac{1}{3})^{n+1}(x-3)^n$，

其中$-1 < \frac{x-3}{3} < 1$ ，即$0 < x < 6$.　　　　　　……………3 分

当 $x=0$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}$ 发散；当 $x=6$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{3}$ 发散，故

$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (\frac{1}{3})^{n+1}(x-3)^n$， $x \in (0, 6)$.　………1 分

4. 解：如图，选取柱面坐标系,此时 $\Omega : \begin{cases} 0 \le z \le 1, \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le 1, \end{cases}$



所以$\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^1 r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot r\mathrm{d}z$　………3 分

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = (-\frac{\cos 2\theta}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$.　………3 分

5. 解：令 $P = x^2 - 2y$， $Q = -(x + \sin^2 y)$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2, \frac{\partial Q}{\partial x} = -1, \qquad ………2 分$$

选择 $BA: y = 1$ 由 B（2，1）到 A（0，1），则由格林公式得

原式$= \int_{L+BA}(x^2-2y)dx - (x+\sin^2 y)dy + \int_{AB}(x^2-2y)dx - (x+\sin^2 y)dy$　………2 分

$= -\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy + \int_{AB}(x^2-2y)dx - (x+\sin^2 y)dy$

$= -\iint\limits_D dxdy + \int_0^2 (x^2-2)dx = -\iint\limits_D dxdy + \int_0^2 (x^2-2)dx = -\frac{\pi}{2} + \frac{8}{3} - 4$.………2 分

6. 解：补上 $\Sigma_1 : z = 0 \ \ (x^2 + y^2 \le 4)$ 下侧。

$$\iint_{\Sigma} y^2dzdx+zdxdy=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} y^2dzdx+zdxdy-\iint_{\Sigma_1} y^2dzdx+zdxdy \text{.............}2\text{分}$$

$$=\iiint_{\Omega}(2y+1)dxdydz-0 \text{...}3\text{分}$$

$$=\iiint_{\Omega}2ydxdydz+\iiint_{\Omega}dxdydz$$

$$\overset{\text{对称性}}{=} 0+\frac{16\pi}{3}=\frac{16\pi}{3} \text{.........................}3\text{分}$$

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分）

1. 证明：$P=3x^2y+8xy^2$，　　$Q=x^3+8x^2y+12ye^y$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+16xy$，故 $Pdx+Qdy$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分．　……3 分

所以 $u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$

$$=0+\int_0^y(x^3+8x^2y+12ye^y)dy=x^3y+4x^2y^2+12ye^y-12e^y+12$$

…………5 分

2. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)5^n}{n5^{n+1}}=\dfrac{1}{5}\Rightarrow R=5$，收敛区间为(-5,5). ………2 分

又当 $x=5$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5}$ 发散；当 $x=-5$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{5}$ 发散;

所以收敛域为 $(-5,5)$；　　　　　　　　　　………2 分

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}x^{n-1}=(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{5^n}t^{n-1}dt)'=[\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{5})^n]'=(\frac{x}{5-x})'=\frac{5}{(5-x)^2} \quad \text{………}2\text{ 分}$$

于是 $s(1)=\dfrac{5}{16}$.　……….2 分

五、证明题（4 分）

$\because (a_n-\dfrac{1}{n})^2\geq 0$，$a_n{}^2-2\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{1}{n^2}\geq 0 \therefore 2\left|\dfrac{a_n}{n}\right|\leq a_n{}^2+\dfrac{1}{n^2}$　　　　………2 分

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 都收敛，由比较法及其性质知：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{a_n}{n}\right|$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 绝对收敛。　　　　………2 分

11 浙江理工大学 2010-2011 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题

1、C　　2、B　　3、C　　4、D　　5、A　　6、B　　7、A

二、填空题

1、0；　　2、$\frac{12}{5}\pi a^5$；　　3、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-\infty<x<+\infty)$　　4、$\frac{1}{2}$　　5、$x+2y-4=0$

三、简答题

1、解：$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{\pi}{2n}$，因为 $2\sin^2\frac{\pi}{2n}<2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2=\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以由比较审敛法知，原级数收敛。

2、解：Σ 的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，它在 xoy 面上的投影区域 D_{xy} 为圆形闭区域 $\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le a^2-h^2\right\}$，又 $\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，所以

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{adxdy}{a^2-x^2-y^2}=2\pi a\ln\frac{a}{h}。$$

3、解：由高斯公式得，$\oiint_S(x+2y+3z)dxdy+(y+2z)dydz+(z^2-1)dxdz=\iiint_{\Omega}3dxdydz=\frac{1}{2}$。

4、解：$\iiint_{\Omega}zdxdydz=\int_1^2dx\int_0^xdy\int_0^{\frac{y}{2}}zdz=\frac{5}{32}$。

5、解：$\int_L xydx+(y-x)dy=\int_0^1\left[x\cdot x^2+(x^2-x)\cdot 2x\right]dx=\frac{1}{12}$

四、解：（1）连续

（2）$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但不可微。

五、解：在等式两边同时在 D 上取二重积分，即 $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint_D\left(\frac{8}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy\right)dxdy$

因此 $\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{9}$，所以 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{8}{9\pi}-\frac{2}{3}$。

六、解：幂级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$，则 $s\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\int_0^x s(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \frac{n+1}{n!}t^n dt=xe^x \Rightarrow s(x)=\left(xe^x\right)'=(x+1)e^x$$ ，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n=s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{e}$$ 。

七、证明：

$$\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2=\iint_D f(x)f(y)dxdy\left(D:0\le x\le a,0\le y\le a\right)=\iint_{D_1} f(x)f(y)dxdy+\iint_{D_2} f(x)f(y)dxdy$$

$$=2\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy\left(D_1:0\le x\le a,x\le y\le a;D_2:0\le y\le a,y\le x\le a\right)$$