

浙江理工大学 2023—2024 学年第一学期

《高等数学 A1》期中试卷

本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

承诺人签名：_____ 学号：_____ 班级：_____ 任课教师：_____

题号	一	二	三					四		五		总分	复核教师签名
			1	2	3	4	5	1	2	1	2		
得分													
阅卷教师签名													

(本试卷共 4 页)

一、选择题 (本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分)

1. 设有数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ ，下列结论正确的是 ()

A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ ，则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

B. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \infty$ ，则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$.

C. 若 $x_n y_n$ 有界，则必有 x_n 与 y_n 都有界.

D. 若 $x_n y_n$ 无界，则必有 x_n 或 y_n 无界.

2. 函数 $y = \frac{2+e^x}{1+e^x} + \frac{\sin x}{|x|}$ 在 $x=0$ 处为 () 间断点.

A. 可去

B. 跳跃

C. 无穷

D. 振荡

3. 已知直线 $y=x$ 与 $y=\log_a x$ 相切，则 $a =$ ()

A. e

B. e^{-1}

C. $e^{e^{-1}}$

D. e^e

4. 设 $y = x^2 + 2x - 1 (x > 0)$ ，则其反函数 $x = \varphi(y)$ 在 $y=2$ 处的导数为 ()

A. 4

B. $\frac{1}{4}$

C. 6

D. $\frac{1}{6}$

5. 下列极限求解中，正确的是 ()

A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

6. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 则下列命题正确的是 ()

A. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导且单调增加, 则对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $f'(x) > 0$.

B. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$.

C. 若 $f''(x_0) = 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点坐标.

D. 若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$, 则 x_0 一定不是 $f(x)$ 的极值点.

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 3x + ax + bx^3$ 是 x^3 的高阶无穷小, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

2. 设 $f(0) = 0, f'(0) = 6$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x - \sin x)}{x^3} =$ _____.

3. 设 $y = \lim_{t \rightarrow 0} x(1 + t^2)^{\frac{x}{\sin t^2}}$, 则 $dy =$ _____.

4. 若函数 $y = \frac{2-x}{2+x}$, 则 $y^{(n)} =$ _____.

5. 设 $f(u)$ 可导, $y = f(x^2)$ 在 $x_0 = -1$ 处取得增量 $\Delta x = 0.05$ 时, 函数增量 Δy 的线性部分为 0.15, 则 $f'(1) =$ _____.

6. 函数 $y = x\sqrt{5-x}$ 在 $[0, 5]$ 上满足拉格朗日中值定理的 $\xi =$ _____.

三、解答题 (本题共 5 小题, 每小题 6 分, 满分 30 分)

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$.

2. 讨论 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} - x}{x^{2n} + 1}$ 的连续性.

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x < 1 \\ 1 + xe^x, & x \geq 1 \end{cases}$ 在定义域上处处可导, 求 a, b .

4. 已知函数 $y = y(x)$ 是由方程 $(\cos y)^x = (\sin x)^y$ 所确定的隐函数, 求 dy .

5. 设函数 $x = x(y)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{d^2x}{dy^2}$.

四、综合题 (本题共 2 小题, 每小题 7 分, 满分 14 分)

1. 求函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ 的单调区间、极值、凹凸区间、拐点及渐近线.

2. 讨论 k 的不同取值, 确定方程 $\ln x - \frac{x}{e} + k = 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内根的个数.

五、证明题 (本题共 2 小题, 每小题 4 分, 满分 8 分)

1. 求证: 当 $0 < x < 2$ 时, $\ln x \geq \frac{x}{4} - \frac{3}{4x} + \frac{1}{2}$.

2. 设函数在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3$, $f(3) = 1$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 3)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.