线性代数A

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册）

学校：________________

专业：________________

班级：________________

姓名：________________

学号：________________

（此试卷为 2022 年第二版 第 1 次发行）

目 录

2022 年所有试卷版本见**试卷册**的尾页。如需资料获取请添加下方的 QQ 群获取。

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈
试卷版次：2022 年 5 月 8 日 第二版 第 1 次发行
本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）
创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380
cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102
cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

1 浙江理工大学 2019—2020 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一、选择题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. B 2. C 3. C 4. D 5. B 6. B

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 20 2. $A-E$ 3. 16 4. $(0,2,1)^T$ 5. -1 6. 1

三、计算题 (共 42 分)

1. 解: $D_n = [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$ (3分)

$= [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$ (5分)

$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$ (6分)

2. 解: $|2A+B| = \begin{vmatrix} 3x & 2a_1+b_1 & 3u \\ 3y & 2a_2+b_2 & 3v \\ 3z & 2a_3+b_3 & 3w \end{vmatrix}$ 2分 (2分)

$= 9(2|A|+|B|)$ 3分 (5分)

$= 36$ (6分)

1分

3. 解: 由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 2分 $\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2分)

得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为向量组的一个极大线性无关组. 1分 (3分)

进一步初等行变换 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 2分 (5分)

得 $\alpha_4 = 5\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3$. 1分 (6分)

其它情况请自行把握.

4. 解: $(A|\beta) = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & \lambda & 2 & 10 \\ 2 & 2\lambda+1 & \lambda & 5 \\ 1 & \lambda & \lambda & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & \lambda & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & (1-2\lambda)(\lambda+2) & 2(\lambda+2) \end{array}\right)$ 2分

(1) 方程组有唯一解 $\Longleftrightarrow R(A|\beta)=R(A)=3 \Longleftrightarrow (1-2\lambda)(\lambda+2)\neq 0$

$\Longleftrightarrow \lambda\neq\frac{1}{2}$ 且 $\lambda\neq -2$. (4分)

2分

(2) 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时, $(A|\beta)\to\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 2\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 5\end{pmatrix}$.

因为 $R(A|\beta)\neq R(A)$, 所以方程组无解. 2分 (6分)

(3) 当 $\lambda=-2$ 时, $(A|\beta)\to\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$.

因为 $R(A|\beta)=R(A)=2<3$, 所以方程组有无穷多解. 2分 (8分)

此时, 进一步初等行变换 $(A|\beta)\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & \vdots & 4\\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$,

得导出组的基础解系 $\xi=(-2,-2,1)^T$,

方程组的一个特解 $\eta^*=(4,1,0)^T$.

从而方程组的通解 $X=\eta^*+c\xi$, 其中 c 为任意常数. 4分 (12分)

5. 解: 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. (1分)

由 A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2(\lambda-2),$$

得 A 的特征值 $\lambda_{1,2}=-1,\lambda_3=2$. 2分 (3分)

当 $\lambda_{1,2}=-1$ 时, 解齐次线性方程组 $(A+E)X=0$,

得基础解系 $\xi_1=(-1,1,0)^T,\xi_2=(-1,0,1)^T$; 2分 (5分)

正交化得 $\beta_1=(-1,1,0)^T,\beta_2=\frac{1}{2}(-1,-1,2)^T$; 1分

单位化得 $\eta_1=(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0)^T,\eta_2=(-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6})^T$. (7分)

1分

当 $\lambda_3=2$ 时, 解齐次线性方程组 $(A-2E)X=0$,

得基础解系 $\xi_3=(1,1,1)^T$;

单位化得 $\eta_3=(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})^T$. 2分 (9分)

令正交矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$, 2分

于是由正交变换 $X=QY$,

$f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$

得二次型的标准形 $f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$. (12分)

四、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

1. 证: 设 $R(A)=r_1$ 且 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_1}$ 是向量组 A 的一个极大无关组;

设 $R(B)=r_2$ 且 $\beta_{i1},\cdots,\beta_{ir_2}$ 是向量组 B 的一个极大无关组. (1分)

因为 $C=A\cup B$, 所以向量组 C 可由 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_1},\beta_{i1},\cdots,\beta_{ir_2}$ 线性表示. (3分)

从而 $R(C)\le R(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_1},\beta_{i1},\cdots,\beta_{ir_2})\le r_1+r_2=R(A)+R(B)$. (5分)

2. 证: 反证法.

假设 $2\xi_1+3\xi_2$ 是 A 的特征向量, 则存在数 λ, 使得

$$A(2\xi_1+3\xi_2)=\lambda(2\xi_1+3\xi_2)=2\lambda\xi_1+3\lambda\xi_2.$$ 1分 (1分)

由题意, 得 $A(2\xi_1+3\xi_2)=2\lambda_1\xi_1+3\lambda_2\xi_2$.

进而 $2(\lambda_1-\lambda)\xi_1+3(\lambda_2-\lambda)\xi_2=0$. 2分 (3分)

因为 $\lambda_1\ne\lambda_2$, 所以 ξ_1,ξ_2 线性无关.

于是 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, 矛盾.

所以 $2\xi_1+3\xi_2$ 不是 A 的特征向量. 2分 (5分)

2 浙江理工大学 2018—2019 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. A　2. C　3. D　4. D　5. B

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1、1　2、$14^{k-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$　3、-4； $2,-4,-2$　4、$A-2E$　5、0

三、解答题（共 50 分）(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. 解　$(2C-E)A=CB$，$A=(2C-E)^{-1}(CB)$　………2分

$$A=\begin{pmatrix}1&-4&8\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&11\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1分

………6分

$(2C-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&4&-8\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$

2. 解：(1) $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$

设 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{X}$，则 $\boldsymbol{PX}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，………2 分

$X=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

因为 $\begin{pmatrix}1&-1&3&1\\1&-2&4&1\\-1&2&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&0&1&2\\0&1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}$，所以

$\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $(-3,2,2)^T$.　………~~4~~ 2 分

(2) 设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标都是 Y，则有 $\boldsymbol{PY}=\boldsymbol{Y}$，…~~6~~ 2 分

即 $(\boldsymbol{P}-E)\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$，由于

$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&-1&3\\1&-3&4\\-1&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}0&-1&3\\1&-3&4\\0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix},\ R(\boldsymbol{P}-E)=3$$

所以 $(\boldsymbol{P}-E)\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，因此 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.　………~~8~~ 2 分

3. 解　β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$ 有解.

$$\left[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T \vdots \beta^T\right]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&-1&2&\vdots&1\\2&3&a+2&4&\vdots&b+3\\3&5&1&a+8&\vdots&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&-1&2&\vdots&1\\0&0&a+1&0&\vdots&b\\0&0&0&a+1&\vdots&0\end{bmatrix}.$$ ……3分

(1)当 $a=-1,b\neq 0$ 时,线性方程组无解,β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示; ……3分

(2)当 $a\neq -1$ 时,线性方程组有惟一解,β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 惟一地线性表示.此时

$$\left[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T \vdots \beta^T\right]\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&0&0&\vdots&-\dfrac{2b}{a+1}\\0&1&0&0&\vdots&\dfrac{a+b+1}{a+1}\\0&0&1&0&\vdots&\dfrac{b}{a+1}\\0&0&0&1&\vdots&0\end{bmatrix}.$$ ……3分

则 $x_1=-\dfrac{2b}{a+1},x_2=\dfrac{a+b+1}{a+1},x_3=\dfrac{b}{a+1},x_4=0$,所以

$$\beta=-\frac{2b}{a+1}\alpha_1+\frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2+\frac{b}{a+1}\alpha_3+0\alpha_4.$$

而 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=2$, 所以 $a=2, b=5$. ……10分

4. 解：增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&\lambda&4\\-1&\lambda&\lambda&\lambda^2\\1&-\lambda&2&-4\end{pmatrix}$ ……1分

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&4\\0&\lambda+1&2\lambda&\lambda^2+4\\0&-\lambda-1&2-\lambda&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&4\\0&\lambda+1&2\lambda&\lambda^2+4\\0&0&2+\lambda&\lambda^2-4\end{pmatrix}$$ ……2分

当 $\lambda+1\neq 0$ 且 $\lambda+2\neq 0$ 时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有唯一解; ……2分

当 $\lambda=-1$ 时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$，

因为 $R(A)=2, R(B)=3$，所以方程组无解； ……………………2分

2分

当 $\lambda=-2$ 时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

因为 $R(A)=R(B)=2<3$，所以方程组有无穷多个解，且通解为 ………2分

3分

$$X=(12,-8,0)^T+c(6,-4,1)^T, c \text{ 为任意常数.}$$ ………3分

5. **解** (1)写出二次型的矩阵: $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$. 2分. ……………2分

5分

(2)求 A 的特征值: $|A-\lambda E|=\lambda^2(9-\lambda) \Rightarrow A$ 的特征值为 $\lambda_{1,2}=0, \lambda_3=9$ ………3分

(3)求 A 的两两正交且单位化的特征向量:对应于特征值 $\lambda_{1,2}=0$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\xi_2=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 正交化得 $\eta_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\eta_2=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, 单位化得

$$p_1=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, p_2=\begin{bmatrix} -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$ 2分 ……~~7~~分

对应于特征值 $\cancel{\lambda_{1,2}=0}$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_3=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, 单位化得 $p_3=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$. ~~9分~~ 2分

$\lambda_3=9$

(4)构造正交变换:令正交矩阵 $P=[p_1,p_2,p_3]=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{3\sqrt5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$,则所求正交变换为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{3\sqrt5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

3分 ……12 分

(5)写出二次型的标准形:二次型的标准形为 $f=9y_3^2$. 2分 ……14 分

四、证明题。(**本题 10 分,每题 5 分**)

1、证明,设有数 k_1,k_2,k_3,使得

$$k_1(2\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+5\alpha_3)+k_3(2\alpha_3+3\alpha_1)=0$$

……1 分

整理得

$$(2k_1+3k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(5k_2+2k_3)\alpha_3=0$$

……1 分

由于向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,必有 $\begin{cases} 2k_1+3k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ 5k_2+2k_3=0 \end{cases}$, ……1 分

而 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}=19\neq 0$, ……1 分

从而 $k_1=k_2=k_3=0$。 ……1 分

2、证明 由于 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵,故 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$,从而由 $|\mathbf{A}^T|=|\mathbf{A}|\Rightarrow|\mathbf{A}|^2=|\mathbf{A}^T\mathbf{A}|=1$,因此 $|\mathbf{A}|=\pm1$,故 $\mathbf{A}$ 可逆,由于可逆矩阵的特征值不能为零,所以 $\lambda\neq0$。 ……2 分

因 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵,则 $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}^{-1}$,所以,当 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值时,$\frac{1}{\lambda}$ 就是 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$ 的一个特征值,但 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^T$ 有相同的特征值,故 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 $\mathbf{A}$ 的特征值。……3 分

3 浙江理工大学 2014—2015 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1. B　2. C　3. B　4. B　5. D　6. D

二、填空题（每空格 4 分，共 24 分）

1. $a^n+(-1)^{n+1}b^n$；　2. -3　3. $\begin{pmatrix}0 & 21\\ 4 & 22\end{pmatrix}$；4. $0<t<2$；5. 1；

6. $(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)(\lambda_3-1)(\lambda_4-1)$

三、**解答题**（12+10+10+12=44 分）

1. 解：线性方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2,\qquad \text{………………………4 分}$$

（1）当 $|A|\neq 0$，即 $\lambda\neq 2$ 且 $\lambda\neq -1$ 时，方程组有惟一解；　………………………6 分

（2）当 $\lambda=2$ 时，$R(A)=2\neq R(A|b)=3$，方程组无解；　………………………8 分

（3）当 $\lambda=-1$ 时，

$$\overline{A}=(A|\ b)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因为 $R(A)=R(\overline{A})=1<3$，所以方程组有无穷多解，且通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ k_1,k_2\text{ 为任意实数.}\qquad \text{……………………12 分}$$

2. 解：由 $X=AX+B$，得

$$(E-A)X=B$$

$$X=(E-A)^{-1}B,\qquad \text{………………..................2 分}$$

为此对矩阵 $(E-A,B)$ 施行初等行变换化为行最简形矩阵，

$$(E-A,B)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3\end{pmatrix}\qquad \text{……………..................4 分}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1&2&0\\0&-1&1&-1&-1\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}$$ ……..………......................6 分

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&3&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}$$ ……..….. ....7 分

所以 $X=(E-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}$. ………. ....10 分

3. 解：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$ ……………………2 分

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ……………………4 分

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ……………………6 分

所以 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个最大无关组，并且

$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_5=-\alpha_2+\alpha_3$ ……...…………10 分

4. 解：（1）设对应于 2 的一个特征向量为 $p=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$，则 p 与 ξ_1 正交，即 $c_1+c_2+c_3=0$，

其基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，这是对应于 2 的两个线性无关的特征向量. …..4 分

（2）令 $p_1=\frac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$， $p_2=\frac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$， $p_3=\frac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，

令 $P=(p_1,p_2,p_3)$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$ …………………..9 分

所以， $$A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\end{pmatrix}.$$ …………………………12 分

四、证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1. 证：根据伴随矩阵的性质有

$$AA^*=|A|E$$

又 $A^2=|A|E$，所以 $AA^*=A^2$，再由于 A 可逆，便有 $A^*=A$.

2. 证：假设 P_1+P_2 是 A 的对应于 λ 的特征向量，则 $A(P_1+P_2)=\lambda(P_1+P_2)$

因为 $AP_1=\lambda_1P_1$， $AP_2=\lambda_2P_2$， 所以 $(\lambda_1-\lambda)P_1+(\lambda_2-\lambda)P_2=0$， 由于 P_1,P_2 是对应于不同特征值的特征向量，所以它们线性无关，从而

$$\lambda_1-\lambda=\lambda_2-\lambda=0,\quad \lambda_1=\lambda_2$$，矛盾！

4　2013—2014 学年第 2 学期《线性代数 A》12 级期末 A 卷

一选择题（每小题 4 分共 24 分）

1-6 题 A，C，B，B，C，B

二填空题（每小题 4 分共 24 分）

1、$-\frac{5}{2}$；2、-46000；3、$x=-1$；3、$a=\frac{1}{3}$；5、2；6、$-\frac{4}{5}<a<0$.

三、计算题(共 40 分)

1.（6 分）解　$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=0$；…………………………………………(2 分)

$$M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}=\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&2&5\\-3&1&3&3\\5&1&1&1\end{vmatrix}$$ ……….(4 分)

$$=\begin{vmatrix}0&-1&0&0\\2&1&3&4\\-2&1&4&2\\6&1&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&4\\-2&4&2\\6&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&-5&0\\-2&4&2\\6&2&0\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}6&-5\\6&2\end{vmatrix}=-84$$ ……… (6 分)

2、(6 分) 解 由 $X=AX+B$，得 $(E-A)X=B$．又

$$E-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix},|E-A|=3\neq 0,$$

则 $E-A$ 可逆，且 $X=(E-A)^{-1}B$．…………………………………… (2 分)

经计算，得

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{|E-A|}(E-A)^{*}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$ …………………………… (4 分)

所以 $X=(E-A)^{-1}B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ………………………… (6 分)

3.(8 分) 解 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$．…………………………… (1 分)

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\mid\beta)=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{array}\right),$$ …… (4 分)

得 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\mid\beta)=4$，所以 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，……………………………… (6 分)

且 $x_1=\frac{5}{4},x_2=\frac{1}{4},x_3=-\frac{1}{4},x_4=-\frac{1}{4}$，得表达式 $\beta=\frac{1}{4}(5\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)$．……… (8 分)

4.（10 分）解 设$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$. ……（2 分）

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\,|\,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&2&3&\vdots&3&5&1\\2&3&7&\vdots&1&2&1\\1&3&1&\vdots&4&1&-6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&-27&-71&-41\\0&1&0&\vdots&9&20&9\\0&0&1&\vdots&4&12&8\end{pmatrix}=(E\,|\,P)\text{，}\quad \text{……（6 分）}$$

得（1）由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵$P=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}$. ……（8 分）

（2）γ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$X=PY=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-139\\38\\24\end{pmatrix}$. ……（10 分）

5.**（10 分）解** 设对应$\lambda_{2,3}=1$的特征向量为$(x_1,x_2,x_3)^T$，有$x_2+x_3=0$. ……（2 分）

所以属于特征值$\lambda_{2,3}=1$的线性无关的特征向量为$\alpha_2=(1,0,0)^T,\alpha_3=(0,1,-1)^T$. ……（4 分）

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$，$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ……（6 分）

则$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$. ……（8 分）

所以$A=P\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ ……（10 分）

四、证明题（共 12 分）

1.（6 分）证 必要性：A与B相似，则存在可逆阵P，使得$P^{-1}AP=B$. 有

$$|B-\lambda E|=|P^{-1}AP-\lambda E|=|P^{-1}(A-\lambda E)P|=|P^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|P|=|A-\lambda E|,$$

所以A与B有相同的特征多项式，即有相同的特征值. ……（3 分）

充分性：若实对称矩阵A与B有相同的特征值，设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$为它们的特征值. 令

$$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

则 A 与 Λ 相似，B 与 Λ 相似，所以 A 与 B 相似. . . . . (6 分)

2.（6分）证 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$，（1 式）. (1 分)

（1 式）式两边左乘以 A，得 $-x_1\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$．（2 式）. . . . . . (2 分)

（1 式）-（2 式），得 $2x_1\alpha_1-x_3\alpha_2=0$．显然 α_1,α_2 线性无关，则 $x_1=0,x_3=0$． . . . . (4 分)

5　2013—2014 学年第 1 学期《线性代数 A》12 级期末 A 卷

一．选择题

1 D　2 B　3　B　4 C　5 B

二．填空题

1. $\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}$

2. $X=\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

3. $x=$___0__，$y=$_____1_。

4. $k=0$

三．计算题

1、解:设**齐次线性方程组为** $Ax=0,$ 有 $A\xi_1=0,A\xi_2=0$

有 $A(\xi_1,\xi_2)=0,\Rightarrow(\xi_1,\xi_2)^T A^T=0,$ A^T 的列向量是 $(\xi_1,\xi_2)^T y=0,$ 的解

解得 $(\xi_1,\xi_2)^T y=0,$ 基础解系为 $y_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},y_2=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$

得一个方程组为: $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1-\frac{1}{2}x_2+x_4=0 \end{cases}$ -------------------------------------8 分

2、解．$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\-1&3&0&1&-1\\2&1&7&5&2\\4&2&14&6&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&3&0&-1\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

所以$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为一个极大无关组，且

$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$．-----------------------------------8 分

3、

解 方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_3+r_2}{=}\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\0&1-\kappa&1-\lambda\end{vmatrix}=-(10-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

当$|A|\neq 0$，即$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq 10$时，方程组有唯一解．

当$\lambda=10$时，

$$B=\begin{pmatrix}A&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&2&-2&\vdots&1\\2&-5&-4&\vdots&2\\-2&-4&-5&\vdots&-11\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}2&-5&-4&\vdots&2\\0&1&1&\vdots&1\\0&0&0&\vdots&1\end{pmatrix}.$$

因为$R(A)=2\neq R(B)=3$，所以方程组无解．

当$\lambda=1$时，

$$B=\begin{pmatrix}A&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-2&\vdots&1\\2&4&-4&\vdots&2\\-2&-4&4&\vdots&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&-2&\vdots&1\\0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}.$$

因为$R(A)=R(B)=1<3$，所以方程组有无穷多解．--------------------------8 分

特解$x_0=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}^T$,,

对应齐次线性方程组的基础解系$\zeta_1=\begin{bmatrix}-2&1&0\end{bmatrix}^T$,, $\zeta_2=\begin{bmatrix}2&0&1\end{bmatrix}^T$,,

通解．$x=x_0+k_1\zeta_1+k_2\zeta_2$--12 分

4、**解** 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$．$A$的特征多项式

$$|A-\lambda E|=-(3+\lambda)(3-\lambda)^2,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=3,\lambda_3=-3$． ---4 分

属于 $\lambda_{1,2}=3$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(-1,0,1)^T$；正交化，得

$$\beta_1=(-1,1,0)^T,\beta_2=\frac{1}{2}(-1,-1,2)^T;$$

单位化，得 $\gamma_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\gamma_2=(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T$．

属于 $\lambda_3=-3$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_3=(1,1,1)^T$；单位化，得 $\gamma_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$．

令正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，得正交变换 $X=QY$，二次型的标准形为

$f=3y_1^2+3y_2^2-3y_2^2$． ----------------------------------12 分

四． 证明题

1. 证：分两种情况：

（1）$A=0$，则 $R(A)=0$，此时有 $R(A)+R(B)=R(B)\le n$

（2）$A\ne 0$， 有已知 $AB=0$ 可知：

矩阵 B 的列向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 中每一个向量均为方程组 $AX=0$ 的解向量。………3 分

若 $R(A)=n$，则方程组 $AX=0$ 仅有零解，即 $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n=0$，

也就是说 $B=0$，此时 $R(A)+R(B)=n$

若 $R(A)<n$，令方程组 $AX=0$ 的基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$，这里 $r=n-R(A)$

此时向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可由向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性表示。

则 $R(B)\le r=n-R(A)$，因此有 $R(A)+R(B)\le n$ ………6 分

2 证 先证 $R(A+B)\le R(A\,|\,B)$．显然 $A+B$ 的列向量组可由 A 的列向量组和 B 的列向量组线性表示，则 $R(A+B)\le R(A\,|\,B)$． -----------------------3 分

此证 $R(A\,|\,B)\le R(A)+R(B)$．设 $R(A)=r,R(B)=s$， $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 分别为 A 与 B 的列向量组的一个极大无关组，则 $(A\,|\,B)$ 的列向量组可由 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 线性表示，有

$$R(A\,|\,B)\le r+s=R(A)+R(B),$$

即 $R(A\,|\,B)\le R(A)+R(B)$． ---------------------7 分

3 **证：设有** $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0\Rightarrow$

$(k_1+k_s)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots+(k_{s-1}+k_s)\alpha_s=0\Rightarrow$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关得

$$\begin{array}{l} k_1+k_s=0 \\ k_1+k_2=0 \\ \cdots \\ k_{s-1}+k_s=0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \\ k_s \end{pmatrix}=0\Rightarrow Ak=0 \because |A|=1+(-1)^{S-1}$$

$\therefore s$为奇数时$|A|=2\Rightarrow \mathrm{k}=0,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性无关.

$\therefore s$为偶数时$|A|=0\Rightarrow A\mathrm{k}=0$有非零解$,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性相关. ----------7 分

6　2013—2014 学年第 1 学期《线性代数 A》12 级期末 B 卷

一 选择题。

1 D　2 A　3　B　4 C　5 B

二 填空题。

1. $(4a+x)x^3$

2. $X=\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

3. -1

4. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

三 计算题。

1.解　由 $AX=2X+\beta$，得 $(A-2E)X=\beta$.（注意 $|A-2E|=0$ ）又

$$\left(A-2E\quad\beta\right)=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2} & 0 & \vdots & 0\\ 2 & -1 & 0 & \vdots & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & \vdots & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \vdots & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix},$$

得方程组的解为$\begin{cases}x_1=x_3+\frac{1}{2},\\ x_2=2x_3+1.\end{cases}$令 $x_3=c$，得 $X=\begin{pmatrix}c+\frac{1}{2}\\ 2c+1\\ c\end{pmatrix}$, c 为任意常数．--------------8 分

2.

解 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -3 & 0\\ 1 & -5 & -4 & 2\\ 3 & -6 & -7 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{11}{9} & -\frac{2}{9}\\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

所以 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，$\alpha_1,\alpha_2$ 为一个极大无关组，且

$\alpha_3=-\frac{11}{9}\alpha_1+\frac{5}{9}\alpha_2$，$\alpha_4=-\frac{2}{9}\alpha_1-\frac{4}{9}\alpha_2$---------------8 分

3. **解** 方程组的增广矩阵

$$B=\left(A\quad\beta\right)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & -1\\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & \vdots & -5\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 2\\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & \vdots & -7\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -3\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix},$$

因为 $R(A)=R(B)=2<5$，所以方程组有无穷多解，且

$$\begin{cases}x_1=\quad x_3+\quad x_4+5x_5-3,\\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+2.\end{cases}$$

令 $x_3=c_1,x_4=c_2,x_5=c_3$，得通解为

$$X=(-3,2,0,0,0)^T+c_1(1,-2,1,0,0)^T+c_2(1,-2,0,1,0)^T+c_3(5,-6,0,0,1)^T$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数．--------------------14 分

4. **解** 二次型 $f=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$，其矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A 的特征多项式 $|A-\lambda E|=-\lambda(3-\lambda)^2$，得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=3$． ------4 分

属于 $\lambda_1=0$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_1=(1,1,1)^T$；单位化，得 $\gamma_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$．

属于 $\lambda_{2,3}=3$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_2=(-1,1,0)^T,\alpha_3=(-1,0,1)^T$；正交化，得

$$\beta_2=(-1,1,0)^T,\beta_3=\frac{1}{2}(-1,-1,2)^T;$$

单位化，得 $\gamma_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\gamma_3=(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T$．

令正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，得正交变换 $X=QY$，二次型的标准形为 $f=3y_2^2+3y_3^2$．

． ------------------------14 分

四 证明题

1. **证** 分两种情况：

（1） $A=0$，则 $R(A)=0$，此时有 $R(A)+R(B)=R(B)\le n$

（2） $A\ne 0$， 有已知 $AB=0$ 可知：

矩阵 B 的列向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 中每一个向量均为方程组 $AX=0$ 的解向量。若 $R(A)=n$，

则方程组 $AX=0$ 仅有零解，即 $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n=0$，

也就是说 $B=0$，此时 $R(A)+R(B)=n$

若 $R(A)<n$，令方程组 $AX=0$ 的基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$，这里 $r=n-R(A)$

此时向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可由向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性表示。

则 $R(B)\le r=n-R(A)$，因此有 $R(A)+R(B)\le n$ --------------5 分

又 $R(A)+R(A-E)=R(A)+R(-A+E)\ge R(E)=n$，

所以 $R(A)+R(A-E)=n$． -----------------------8 分

2. **证** 显然 $\xi_1+\xi_2,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 是 $AX=0$ 的解，只需证明它们线性无关.

$$(\xi_1+\xi_2,\xi_2,\cdots,\xi_m)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)K_{m\times m}\ .$$

由$|K|=1\neq 0$，得 $R(\xi_1+\xi_2,\xi_2,\cdots,\xi_m)=R(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)=m$，所以$\xi_1+\xi_2,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 线性无关．------------------------8 分

7 2011—2012 学年第 1 学期《线性代数 A》11 级期末 A 卷

一、**选择题**（每小题 4 分，共 24 分）

1. C 2. C 3. A 4. B 5. D 6. C

二、 **填空题**（每小题 4 分，共 24 分）

1. $\underline{m-n}$ 2. $\underline{-\dfrac{16}{27}}$ 3. $a=\underline{4}$，$b=\underline{5}$.

4. $\underline{15}$ 5. $\lambda=-1$，$a=-3$， $b=0$. 6. $\underline{-\dfrac{4}{5}<\lambda<0}$

三、**计算题**（共 42 分）

1（5 分）解：由 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，得

$(A-B)X(A-B)=E$ ………1 分

因为$A-B=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 可知$|A-B|=1\neq 0$

所以$A-B$可逆………2 分

且$(A-B)^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ ………3 分

可得$X=\left[(A-B)^{-1}\right]^2=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ ………5 分

2（6 分）解：对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换变成行最简形，

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&2\\-2&-5&1&-1\\0&-3&3&4\\3&6&0&7\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ ………3 分

所以 $R(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{A}$ 的前三列 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的最大无关组， ………5 分

且 $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$， ………6 分

3（10 分）解：用初等行变换将增广矩阵 $\widetilde{A}$ 化成阶梯型为

$$\widetilde{A}=[A\vdots b]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{bmatrix}$$ ………4 分

由阶梯型矩阵可以看出

（1）当 $a\neq -1$ 时，$R\left(\widetilde{A}\right)=R\left(A\right)=4$，此时方程组有唯一解；………6 分

（2）当 $a=1$ 但 $b\neq -1$ 时，$R(\widetilde{A})=3$，$R(A)=2$，故此时方程组无解；……7 分

（3）当 $a=1$ 但 $b=-1$ 时，$R\left(\widetilde{A}\right)=R\left(A\right)=2<4$ 故此时方程组有无穷多组解。此时增广矩阵可以进一步化为

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$，由此得方程组的解为 $\begin{cases}x_1=-1+x_3+x_4\\x_2=1-2x_3-2x_4\end{cases}$，

$\left(x_3,x_4\text{为自由未知量}\right)$。………9 分

即方程组的解为：$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$ k_1,k_2 为任意常数。

………10 分

4（11 分）解：（1）二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{bmatrix}$………1 分

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，

则由题意得 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1=a+2+(-2)$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-12=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4a-2b^2$$

因此有 $a=1, b=2$ ………3 分;

(2) 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3) \quad ;$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$， $\lambda_{,3}=-3$ ………5 分

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解方程组 $(2\mathbf{E}-A)X=\mathbf{0}$，得基础解系 $\xi_{11}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\xi_{12}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3=3$ 时，解方程组 $(3E-\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{0}$，得基础解系 $\xi_{21}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ………7 分

由于 $\xi_{11},\xi_{12},\xi_{21}$ 已经是正交向量组，只需将其单位化可得

$$\eta_1=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \eta_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{………9 分}$$

则 $U=\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{bmatrix}$ 为正交矩阵，在正交变换 $x=Uy$ 下有

$U^TAU=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ 且二次型的标准型为 $f=2y_1+2y_2-3y_3$ ………11 分

5（10 分）解：（1）因为 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，所以有 $|A|=0$ 设另一个特征值为 λ_3，则 $\lambda_3=0$ 2 分

设对应于 $\lambda_3=0$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$,

因为 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征值，则属于特征值 6 的线性无关的特征向量只有两个，设

ξ_1, ξ_2 为属于特征值 6 的线性无关的特征向量。

因为 A 为实对称矩阵，则 $\boldsymbol{p}$ 与 ξ_1, ξ_2 均正交，

即 $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$，其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$ ………4 分，

所以对应于 $\lambda_3 = 0$ 的特征向量是 $k\xi_3 = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ………5 分

（2）取 $\mathbf{P} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，则 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ………6 分

则 $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ………8 分

所以，$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$ ………10 分

四、证明题（6+4=10 分）

1. 证：分两种情况：

（1） $A = 0$，则 $R(A) = 0$，此时有 $R(A) + R(B) = R(B) \leq n$ ………2 分

（2） $A \neq 0$， 有已知 $AB = 0$ 可知：

矩阵 B 的列向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 中每一个向量均为方程组 $AX = 0$ 的解向量。………3 分

若 $R(A) = n$，则方程组 $AX = 0$ 仅有零解，即 $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$，

也就是说 $B = 0$，此时 $R(A) + R(B) = n$ ………4 分

若 $R(A) < n$，令方程组 $AX = 0$ 的基础解系为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$，这里 $r = n - R(A)$

此时向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 可由向量组 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ 线性表示。

则 $R(B) \leq r = n - R(A)$，因此有 $R(A) + R(B) \leq n$ ………6 分

2. 证：因为$\mathbf{A}$, B均为n阶正交矩阵

则 $A^{-1}=A^T, B^{-1}=B^T$ ………2 分

因此有$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=B^TA^T=(AB)^T$

所以，AB也为正交矩阵. ………4 分

8 2011—2012 学年第 1 学期《线性代数 A》11 级期末 B 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1. B 2. B 3. A 4. C 5. D 6. C

二 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1.$\underline{\lambda \neq 1}$ 2. $\underline{0}$ 3. $\underline{R(AB)=2}$ 4. $\underline{2}$ 5. $\underline{637}$ 6. $\underline{4<\lambda<5}$

三 计算题（共 42 分）

1（6 分）解：由$BA=B+2E$，得$B(A-E)=2E$………1 分

因为$A-E=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ 可知$|A-E|=2\neq 0$的$A-E$可逆………3 分

由$B(A-E)=2E$可得$B=2E(A-E)^{-1}=2(A-E)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ………6 分

2（8 分）解：设有线性关系式$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

有$\begin{cases}k_1+k_2+5k_3=0\\ k_1+3k_2+3k_3=0\\ \quad -k_2+tk_3=0\end{cases}$ 则 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 3\\ 0 & -1 & t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & -1 & t\end{vmatrix}=2t-2$ ………2 分

因此，当$t\neq 1$时，有$D\neq 0$，方程组仅有零解$k_1=k_2=k_3=0$，此时$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关 ………3 分

当$t=1$时，有$D=0$，方程组有非零解，此时$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关 ………4 分

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 6\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ ………6 分

所以$R(\mathbf{A})=2$，$\boldsymbol{A}$的前两列$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{A}$的列向量组的极大线性无关组， ………7 分

且$\boldsymbol{\alpha}_3=6\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$， ………8 分

3（10 分）解：用初等行变换将增广矩阵$\widetilde{A}$化成阶梯型为

$$\widetilde{A}=[A\vdots b]=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -(\lambda+2)(\lambda-1) & 3(\lambda-1)\end{bmatrix}$$ ………4 分

由阶梯型矩阵可以看出

（1）当$\lambda=-2$时，$R(\widetilde{A})=3>R(A)=2$，故此时方程组无解；………6 分

（2）当$\lambda\neq-2$且 $\lambda\neq1$时，$R(\widetilde{A})=R(A)=3$，此时方程组有唯一解；……7 分

（3）当$\lambda=1$时，$R(\widetilde{A})=R(A)=1<3$，故此时方程组有无穷多组解。此时增广矩阵可以进一步化为

$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，由此得方程组的解为 $x_1=-2-x_2-x_3$，

$(x_2,x_3$为自由未知量$)$。………9 分

即方程组的解为：$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ k_1,k_2为任意常数。………10 分

4（10 分）解：（1）二次型的矩阵为$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$………1 分

A的特征多项式 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$

所以A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\quad \lambda_3=2.$ ………3 分

当$\lambda_1=\lambda_2=-1$时，解方程组 $(-E-A)X=0$

又 $A+E=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，得基础解系为：

$\xi_{11}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\xi_{12}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, 正交化得 $\alpha_{11}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_{12}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$,

单位化后得： $\eta_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\eta_{12}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$. ………6 分

当 $\lambda_3=2$ 时，解方程组 $(2E-A)X=0$，因为

$2E-A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$，得基础解系为 $\xi_{21}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$,

单位化后得： $\eta_{21}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. ………7 分

因此所求的正交变换为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$ ………9 分

f 的标准形为：$f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$ ………10 分

5（8 分）解：因为 A 与 Λ 相似，所以 A 的特征值为 $5,-4,y$. ………1 分

由特征值的性质可知：$\begin{cases}5+(-4)+y=1+x+1\\5\times(-4)y=|A|=-15x-40\end{cases}$ ………2 分

即：$\begin{cases}x-y=-1\\15x-20y=-40\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$ ………3 分

下面求正交矩阵 P，因为 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=5,\lambda_3=-4$.

当当 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 时，解方程组 $(5E-A)X=0$，

$5E-A=\begin{bmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，得基础解系为：

$\xi_{11}=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$, $\xi_{12}=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$, 正交化得 $\alpha_{11}=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_{12}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-4\\-2\\5\end{bmatrix}$,

单位化后得： $\eta_{11}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$, $\eta_{12}=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-4\\-2\\5\end{bmatrix}$. ………5 分

当 $\lambda_3=-4$ 时，解方程组 $(-4E-A)X=0$，因为

$-4E-A=\begin{bmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，得基础解系为 $\xi_{21}=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$,

单位化后得： $\eta_{21}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$. ………6 分

令 $U=[\eta_{11}\ \ \eta_{12}\ \ \eta_{21}]$，则 U 为所求的矩阵，使得 $U^{-1}AU=\Lambda$ ………8 分

四 证明题（5+5=10 分）

1 证：（1）因为 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，因此有 $A^T=A$ $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$

即 A^{-1} 也是实对称矩阵 ………1 分

且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值相同且均大于 0 即 $\lambda_i>0$ 故 A^{-1} 的特征值 $\lambda_i^{-1}>0$

所以 A^{-1} 也为正定矩阵………3 分

（2）因为 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，则 $|A|>0$

因为 $A^*=|A|A^{-1}$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值相同且均大于 0 即 $\lambda_i>0$ 故 A^* 的特征值 $|A|\lambda_i^{-1}>0$

所以 A^* 也为正定矩阵………5 分

2 证：设 λ 是矩阵 A 的特征值，ξ 是矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量

则 $A\xi=\lambda\xi$ $(\xi\neq 0)$ ………2 分

用 A 左乘等式两边得： $A^2\xi=A\lambda\xi=\lambda A\xi=\lambda^2\xi$ ………3 分

因为 $A^2=A$，因此有 $A^2\xi=A\xi$。

所以有 $\lambda^2\xi=\lambda\xi$ ………4 分

因此有 $(\lambda^2-\lambda)\xi=0\ \ (\xi\neq 0)$

所以，$\lambda(\lambda-1)=0$，即 A 的特征值只能是 1 和 0． ………5 分

9 浙江理工大学 2009—2010 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一、选择题

1、A;　2、C;　3、D;　4、C;　5、B.

二、填空题

1、100；　2、A;　3、0;　4、$\frac{1}{2}$；　5、$k=-8$.

三、计算题

1 解：记 $B=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$、$C=\begin{pmatrix}1&4\\0&-1\end{pmatrix}$则：$B^{-1}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$、………2 分

$C^{-1}=\begin{pmatrix}1&4\\0&-1\end{pmatrix}$，$|B|=25$、$|C|=-1$ ………4 分

故：$A^{-1}=\begin{pmatrix}B^{-1}&\\&C^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{25}&\frac{4}{25}&0&0\\\frac{4}{25}&-\frac{3}{25}&0&0\\0&0&1&4\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$， ………6 分

$|A|^8=(|B||C|)^8=25^8$ ………8 分

2 解：$\because\ (2C-E)A=CB$，$A=(2C-E)^{-1}(CB)$ ………2 分

$$(2C-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&4&8\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$$ ………4 分

$$CB=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ ………6 分

$$A=\begin{pmatrix}1&-4&8\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&11\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

………8 分

3.解：β_3 可由 α_1,α_2 线性表示，即 β_3 ，α_1,α_2 线性相关

所以 $|\beta_3,\alpha_1,\alpha_2|=0$，解得 n =1 . ………4 分

又由 β_1,β_2,β_3 与 α_1,α_2 有相同的秩，即 β_1,β_2,β_3 的秩为 2

所以 $|\beta_3,\beta_1,\beta_2|=0$ ，解得 m=2 . ………8 分

4 解：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\2&1&a&1\\3&2&4&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&1&4-a&-1\\0&0&2-a&b-1\end{pmatrix}$$

当 $a\neq 2$ 时，方程组有唯一解； ………3 分

当 $a=2$，$b\neq 1$ 时，方程组无解 ………6 分

当 $a=2$，$b=1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，方程组有无穷多解, ………9 分

其通解为 $\alpha=(1,-1,0)^T+k(0,-2,1)^T$，$k$ 为任意常数。 ………12 分

5 解：(1) 二次型 f 所对应的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$, ………2 分

(2)可求得 $\det(A-\lambda E)=-\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$,

于是 A 的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$, ………5 分

特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. ………8 分

将其单位化得

$$q_1=\frac{p_1}{\|p_1\|}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix},q_2=\frac{p_2}{\|p_2\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},$$

$$q_3=\frac{p_3}{\|p_3\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$ ………11 分

故正交变换为：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$ 标准型： $f=4y_2^2+9y_3^2.$ ………12 分

四 证明题

1 由于 $AA^T=E$ 、$BB^T=E$， ………2 分

所以 $(AB)(AB)^T=ABB^TA^T=AA^T=E$

$\therefore$ AB 也是正交矩阵。 ………6 分

2 $|A+E|=|A+AA^T|=|A||E+A^T|=-|(E+A)^T|=-|E+A|$ ………4 分

$\therefore 2|E+A|=0,即|E+A|=0.$ ………6 分

10 浙江理工大学 2007-2008 学年第 2 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一．单项选择题（每小题 3 分，共 3×8 分=24 分）

1．A 2．D 3．C 4．C 5．B 6．A 7．B 8．C

二．填空题（每小题 3 分，共 3×7 分=21 分）

1． $\begin{pmatrix}5&-1&7\\8&0&8\end{pmatrix}$ 2． $x=0$ 3． $\lambda_3=2$ 4．2

5．4 6． $a=-2$ 7．6

三．计算题(前 4 题各 6 分，第 5 题 10 分，第 6 题 11 分，满分 45 分)

1．解：$D=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1&1-x\\1&1&1+x&1\end{vmatrix}\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,4}{=}}\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\-x&-x&0&0\\-x&0&0&-x\\-x&0&x&0\end{vmatrix}$ ………3 分

$$=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & 0 \end{vmatrix}=-x^4$$ ………6 分

2．解： $\boldsymbol{AX}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，

$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$， ……………………1 分

$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$ ………………3 分

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\quad \text{所以 } X=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$ ……6 分

3．解：由题设知，$\boldsymbol{A}$ 有两个特征值 $\lambda_1=5,\lambda_2=2$， $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$是分别对应于特征

值 5，2 的特征向量，即 $\boldsymbol{A\xi}_1=5\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A\xi}_2=2\boldsymbol{\xi}_2$， …………2 分

又 $\boldsymbol{\xi}=-\boldsymbol{\xi}_1+5\boldsymbol{\xi}_2$， …………3 分

所以 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}^n(-\boldsymbol{\xi}_1+5\boldsymbol{\xi}_2)=-\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1+5\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_2$

$$=-5^n\xi_1+5\cdot 2^n\xi_2=\begin{pmatrix} -2\cdot 5^n+5\cdot 2^n \\ -3\cdot 5^n+5\cdot 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$ …………6 分

4．解：$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ …………1 分

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ …………4 分

由此可见 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 就是一个所求的极大线性无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$ …………6 分

5．解：对增广矩阵作初等行变换，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1 & 2 & -\lambda & 1\\ -1 & -1 & 1 & -2\lambda-1\\ 1 & \lambda+3 & -1 & -\lambda^2-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 2 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1-\lambda & -2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 & \lambda^2+2\lambda-3\end{pmatrix}$$

…………4 分

(1) 当$\lambda^2+\lambda-2\neq 0$，即$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时，$R(\boldsymbol{A})=3=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，有惟一解；

(2) 当$\lambda=-2$时，$R(\boldsymbol{A})=2, R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，方程组无解；　　…………7 分

(3) 当$\lambda=1$时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<3$，方程组有无穷多个解，通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$，k为任意常数.　　…………10 分

6．解：二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix},$$　　…………2 分

(1) 因为正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{Y}$可将$f$化为标准形$f=-y_1^2+2y_2^2+by_3^2$，所以矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$-1, 2, b$，　　…………4 分

由$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0, |\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0,$得$a=1$，

由$tr(\boldsymbol{A})=-1+2+b$，得$b=-4$；　　…………6 分

(2) 当$a=1$时，对应特征值-1，解方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0$，可得$\boldsymbol{\eta}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$，

对应特征值 2，解方程组$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0$，可得$\boldsymbol{\eta}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$，

对应特征值-4，解方程组$(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0$，可得$\boldsymbol{\eta}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T$，……..9 分

因此，所求的正交矩阵为$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}$.　　…………….11 分

四、证明题(每小题 5 分，满分 10 分)

1．证：设$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_t$是方程组$\boldsymbol{AX}=0$的基础解系，因为$\boldsymbol{AB}=0$，所以$\boldsymbol{B}$的每一个列向量都是$\boldsymbol{AX}=0$的解，…………….2 分

因而，$\boldsymbol{B}$的列向量组能由$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_t$线性表示，因此

$R(\boldsymbol{B}) \le t = n - R(\boldsymbol{A})$，即 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) \le n$.　　　……………5 分

2．证：设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以 $\forall \lambda_i > 0$，…2 分

而 $t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $t+\lambda_1, t+\lambda_2, \cdots, t+\lambda_n$，有 $\forall t+\lambda_i > t$，因此

$\left|t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}\right| = (t+\lambda_1)(t+\lambda_2)\cdots(t+\lambda_n) > t^n$.　　　……………5 分

11 浙江理工大学 2006-2007 学年第 2 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一 选择题(4 分×6)

1. C　　2. C　　3. B　　4. D　　5. C　　6.A

二 填空题(4 分×6)

1.　16；2.-1; $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$；3. $\begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 2/10 & 2/10 & 0 \\ 3/10 & 4/10 & 5/10 \end{pmatrix}$；4. 0; 6,3,2

5. t=-3；　6. $|k| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

三 计算题(6+6+6+12+12)

1．解：　$M_{42} - M_{43} + 7M_{44} = A_{42} + A_{43} + 7A_{44} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$……...................(2 分)

$$\overset{c_2 - c_3}{\underset{c_4 - 7c_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix} \times (-1)^{4+3}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 10 & 3 & 14 \end{vmatrix} \overset{c_2 + c_3}{\underset{c_1 + \frac{1}{2}c_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \\ 17 & 17 & 14 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$ ………..……….............……..…..(6 分)

2. 解：由 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 有 $B = 6(A^{-1} - E)^{-1}$, …………………...................................(2 分)

且$A^{-1}-E=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$ ……………...............…………...(4分)

则B=$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ………………..…...(6 分)

3. 解.因$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$不成比例，故它们线性无关，从而其秩为 2，................(2 分)

因为向量组 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2,$ 则

$|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4|=2-a=0,$且$|\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=5-b=0,$

所以$a=2,$且$b=5.$ ....(6 分)

4 解 (1) $\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}\neq 0$,即$\lambda\neq 1,-2$时方程组有唯一解. ....(4 分)

(2) $R(A)<R(B)$

$$B=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda(1-\lambda)\\0&0&(1-\lambda)(2+\lambda)&(1-\lambda)(\lambda+1)^2\end{pmatrix}$$

由$(1-\lambda)(2+\lambda)=0,(1-\lambda)(1+\lambda)^2\neq 0$

得$\lambda=-2$时,方程组无解. ....(8 分)

(3) $R(A)=R(B)<3$,由$(1-\lambda)(2+\lambda)=(1-\lambda)(1+\lambda)^2=0$,

得$\lambda=1$时,方程组有无穷多个解. ....(12 分)

5. 解 (1) 二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)$$

故$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=5,\lambda_3=1$. …………………....……..……(4 分)

当 $\lambda_1 = 2$ 时，解方程 $(A-2E)x=0$，由

$$A-2E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. 取 $P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ……………………..........……..........……(6 分)

当 $\lambda_2 = 5$ 时，解方程 $(A-5E)x=0$，由

$$A-5E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 取 $P_2=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$. …………………....……...….........(8 分)

当 $\lambda_3 = 1$ 时，解方程 $(A-E)x=0$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ 取 $P_3=\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$，………………...…...........………(10 分)

于是正交矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

且有 $f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$. ………………………...……(12 分)

四 证明题(3+4+3)

证明：1.由于 $|A^*|=|A|^{n-1}$, 于是 $R(A)=n$, 即 $|A|\neq 0$, 故 $|A^*|\neq 0$. 所以 $R(A^*)=n$; ….......(3 分)

2．$R(A)=n-1$ 时，由矩阵秩的定义，A中至少有一个（n−1）阶子式不为零，

即 A^* 中至少有一个元素不为零，故 $R(A^*)\geq 1$；...……(5 分)

反过来，因 $R(A)=n-1$, 于是 $|A|=0$, 所以 $AA^*=|A|E=0,\ R(A)+R(A^*)\le n$,

因为 $R(A)=n-1$, 因此 $R(A^*)\le 1$, 故 $R(A^*)=1$. ....……(7 分)

3．$R(A)<n-1$ 时，由矩阵秩的定义，A中至少有一个（n-1）阶子式为零，

即 A^* 中至少有一个元素为零，于是 $A^*=0$, 故 $R(A^*)=0$. ....……(10 分)

12 浙江理工大学 2006-2007 学年第 2 学期《线性代数 A》期末 B 卷

一 选择题(4 分×6)

1. B　　2. C　　3. D　　4. D　　5.D　　6.A

二 填空题(4 分×6)

1. 40；2.1; $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$；3. $\begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 2/10 & 2/10 & 0 \\ 3/10 & 4/10 & 5/10 \end{pmatrix}$；4. 0; 6,3,2

5. k=3；　6.|k|<1。

三 计算题(6+6+6+12+12)

1.解：$-5M_{41}-6M_{43}+2M_{44}=5A_{41}+6A_{43}+2A_{44}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$................(2 分)

$$\xlongequal{c_4-c_2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\mathbf{0}$$ ………...(6 分)

2. 解：由 $X=AX+B$ 有… $X=(E-A)^{-1}B$ ……………...................................(2 分)

$$(E-A,B)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ …........……....(4 分)

则 x= $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ………..…...(6 分)

3. 解.因$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$不成比例，故它们线性无关，从而其秩为 2，.......(2 分)

因为向量组$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2, |\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4|=2-a=0,$且$|\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=5-b=0,$

所以$a=2,$且$b=5.$ ....(6 分)

4. 解：$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&(a-3)(a+1)&a-3\end{pmatrix}.$

所以（1）当$a\neq 3$且$a\neq -1$时，$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})=3$，方程组有惟一解，.............(4 分)

（2）当$a=-1$时，$3=R(\boldsymbol{B})\neq R(\boldsymbol{A})=3$，方程组无解，................................ (8 分)

（3）当$a=3$时，$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})=2<3$，方程组有无穷多个解，且

$$\boldsymbol{B}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&7&3\\0&1&-3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以此时方程组的通解为$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-7\\3\\1\end{pmatrix}, k\in R$。..................................... (12 分)

5. 解: （1）$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}-2-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&2\\0&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(2+\lambda)(3-\lambda)(1+\lambda)$，

所以$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=-1,\lambda_3=3$；.. (4 分) （2）

当$\lambda_1=-2$时，对应的单位特征向量为$\boldsymbol{p}_1=(1,\ 0,\ 0)^T$；....... (6 分)

当$\lambda_2=-1$时，对应的单位特征向量为$\boldsymbol{p}_2=\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$；....................... .(8 分)

当$\lambda_3=3$时， 对应的单位特征向量为；$\boldsymbol{p}_2=\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$.............................(10 分)

(3) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$ ， $\boldsymbol{P}$ 即为所求的正交矩阵，且

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-2&&\\&-1&\\&&3\end{pmatrix}$...(12 分)

四、证明题（5+5=10 分）

1. 证： $A^k=0, E-A^k=E, (E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E$

所以，$E-A$ 可逆，并且 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$ ....(5 分)

2. 证：假设 P_1+P_2 是 A 的对应于 λ 的特征向量，则 $A(P_1+P_2)=\lambda(P_1+P_2)$

因为 $AP_1=\lambda_1P_1$， $AP_2=\lambda_2P_2$， 所以 $(\lambda_1-\lambda)P_1+(\lambda_2-\lambda)P_2=0$， 由于 P_1,P_2 是对应于不同特征值的特征向量，所以它们线性无关，从而

$\lambda_1-\lambda=\lambda_2-\lambda=0,\quad \lambda_1=\lambda_2$，矛盾！ ....(10 分)

13 浙江理工大学 2004-2005 学年第 2 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一.填空题 1. 2,1; 2. 2bc-2ad; 3.1; 4. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

5. $\sqrt[n]{2}$； 6.1 or -2; 7.-6; 8.2.

二. 选择题

B B B B C D C

三. 简答题: 略。

四.计算题:

1.|A|= -9;

2. $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3. C=2; 极大线性无关组.$\alpha_1\alpha_2$ $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$ $\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$

4. 当 a=2，b<>-1 时,方程组无解；当 a<>2 时,方程组唯一解；

当 a=2，b= -1 时,方程组有无穷解；

通解:

$$X=k\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5．λ=*1*，*6*，*-6,*

$$P=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad f=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2$$

五．证明题：（10 分）

1.$A^*=|A|A^{-1}$, $AA^*=|A|E$, $A^2=|A|E=AA^*$;

2. $k\alpha+k_1\alpha+\ldots+k_{n-1}\alpha=0$,

$A^{n-1}(k\alpha+k_1\alpha+\ldots+k_{n-1}\alpha)=0$,

$KA^{n-1}\alpha=0$, $k=0$ 同理 $k_i=0$, 所以线性无关。

14 浙江理工大学 2003-2004 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 B 卷

一、1．A^2-2A+E; 2. 4; 3. -1,1,2; 4. 2; 5. 相;

二、1. Y 2. N 3.N 4. Y 5. N

三、1. B 2. C 3.D 4. C 5. C

四. 1．==0

2．A=，且$A^{-1}XA=6A+2XA$, 求矩阵X

$A^{-1}XA-2XA=6A$, $(A^{-1}-2E)XA=6A$, $(A^{-1}-2E)X=6E$, $X=6(A^{-1}-2E)^{-1}=$

3. 求向量组$A^T=(1,0,1,2)$, $B^T=(2,1,1,3)$, $C^T=(5,1,4,9)$, $D^T=(3,2,1,2)$, 的秩及写出一个极大线性无关组.

(A B C D)=

向量组的秩为3.

一个极大线性无关组为ABD.

五、综合题

1. 试问a,b分别取何值时，下面线性方程组有唯一解？无解？有无穷多解？并求出有无穷多解时的通解.

$a\neq-5$时,R(Ab)=R(A)=3, 有唯一解;

a= -5, b≠4时, R(Ab)=3, R(A)=2, 无解;

a= -5, b=4时, R(Ab)= R(A)=2, 有无穷多解;

(k为任意常数)

2. 试求一个正交变换P, 把下列二次型化为标准形.

$f(x_1, x_2, x_3)=3x_1^2+3x_2^2+x_3^2-2x_1x_2$

解：$|A-\mu E|==(1-\mu)(2-\mu)(4-\mu)=0$

特征值为：$\mu_1=1$，$\mu_2=2$，$\mu_3=4$

$\mu_1=1$ 时，$(A-\mu E)=$

$\mu_2=2$时，$(A-\mu E)=$

$\mu_3=4$时，$(A-\mu E)=$

单位化，$p_1=$,, $p_2=$, $p_3=$,

令$P=(p_1\ p_2\ p_3)$ $y=y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$

六、简答题

1. 试叙述方阵可逆的各种等价说法(设A是n阶方阵,至少五种说法)

1) A可逆$\leftrightarrow$$A=P_1P_2\ldots P_s$

2) A可逆$\leftrightarrow$$|A|\neq 0$

3) A可逆$\leftrightarrow$A满秩

4) A可逆$\leftrightarrow$$AX=0$只有零解

5) A可逆$\leftrightarrow$A的行向量线性无关

6) A可逆A^TA正定

2. 试写出判断向量组线性相关性的方法(至少五种)

1) 由定义$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=0$ 有无非零解

2) 当S>n, S个n维向量线性相关

3) 线性相关的向量组扩充向量后仍线性相关

4) $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_s$线性相关 $\leftrightarrow$ 某α_i可用其余向量$\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_s$线性表示.

5) $\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_s$线性相关 $\leftrightarrow$ $R(\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_s)<S$.

6) n个n维向量$\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_n$线性相关 $\leftrightarrow$ 行列式$|(\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_n)|=0$.

7) α_1,α_2线性相关 $\leftrightarrow$ α_1,α_2的各分量对应成比例

8) 含0向量的向量组线性相关..

七. 论证题

1. 设A为n阶方阵,ξ为n维列向量. 若$A^2\xi\neq 0$, $A^3\xi=0$,

试证明:向量组ξ,$A\xi$,$A^2\xi$线性无关.

证:设$k_1\xi+k_2A\xi+k_3A^2\xi=0$

左乘A^2, $k_1A^2\xi=0$, 因$A^2\xi\neq 0$, $k_1=0$,

而由 $k_2A\xi+k_3A^2\xi=0$,左乘A,$k_2A^2\xi=0$,因$A^2\xi\neq$ (

$k_2=0$,

由 $k_3A^2\xi=0$ 因$A^2\xi\neq 0$, $k_3=0$,

所以向量组ξ,$A\xi$,$A^2\xi$线性无关.

2. 已知3 阶实对称矩阵A满足$A^3-3A^2+3A-E=0$,证明:A是正定矩阵。

证:设μ是A的特征值,则μ满足 $\mu^3-3\mu^2+3\mu-1=0$

$(\mu-1)^3=0$,$\mu_1=\mu_2=\mu_3=1$

A的一切可能特征值全为正数,所以A正定。