概率论与数理统计B

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册）

学校：________________________

专业：________________________

班级：________________________

姓名：________________________

学号：________________________

（此试卷为2022年第二版 第1次发行）

目 录

2022 年所有试卷版本见**试卷版**的尾页。如需资料获取请添加下方的 QQ 群获取。

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　微信公众号：创琦杂谈

试卷版次：2022 年 5 月 13 日 第二版 第 1 次发行

本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380

cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102

cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

送给大家一段文摘：

当欢笑淡成沉默，当信心变成失落，我走近梦想的脚步，是否依旧坚定执着；当笑颜流失在心的沙漠，当霜雪冰封了亲情承诺，我无奈的心中，是否依然碧绿鲜活。

有谁不渴望收获，有谁没有过苦涩，有谁不希望生命的枝头挂满丰硕，有谁愿意让希望变成梦中的花朵。现实和理想之间，不变的是跋涉，暗淡与辉煌之间，不变的是开拓。

甩掉世俗的羁绊，没谁愿意，让一生在碌碌无为中度过。整理你的行装，不同的起点，可以达到同样辉煌的终点。人生没有对错，成功永远属于奋斗者。

——汪曾祺《生活》

1　2018—2019 学年第 2 学期《概率论与数理统计 B》期末 A 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1 C　　2 B　　3 C　　4 D　　5 D

二 填空题（每题 4 分，共 16 分）

（1）0.3　0.6　　（2）1　　（3）6　0.4　　（4）9/2

三、计算题（10+6+10+16+12+10=64）

1 解：设 $A_i=\{所取产品为第i个车间生产的\}$，$B=\{所取产品为次品\}$，

(1)　次品率

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B/A_i)=45\%\cdot 0.03+35\%\cdot 0.04+20\%\cdot 0.05=0.0375$$ …….5 分

(2) 如果抽出的一个恰好是次品，则这个产品是由各个分厂生产的概率分别为：

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)}=\frac{45\%\cdot 0.03}{0.0375}=\frac{135}{375}$$

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)}=\frac{35\%\cdot 0.04}{0.0375}=\frac{140}{375}$$，所以答案为：乙车间.

$$P(A_3/B)=\frac{P(A_3)P(B/A_3)}{P(B)}=\frac{20\%\cdot 0.05}{0.0375}=\frac{100}{375}$$

…..　…10 分

2.（6 分）解：由 $\operatorname{cov}(X,Y)=\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}=0.4\cdot\sqrt{25*36}=12$　…….2 分

$\therefore D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)=25+36+2*12=85$　…….4 分

$\therefore D(X\text{-}Y)=D(X)+D(Y)\text{-}2\operatorname{cov}(X,Y)=25+36\text{-}2*12=37$ …….6 分

3.（16 分）解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=k\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx\int_0^{+\infty}e^{-2y}dy=\frac{k}{6}=1\Rightarrow k=6$ …………2 分

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}6e^{-(3x+2y)}dy=3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$　…………5 分

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}6e^{-(3x+2y)}dx=2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$　…………8 分

（3）$P(X\le Y)=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{y}6e^{-(3x+2y)}dx=\frac{3}{5}$　…………11 分

（4）因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 独立　…………13 分

（5）

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv=\begin{cases}6\int_0^x e^{-3u}du\int_0^y e^{-2v}dv, x>0,y>0\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-2y}), x>0,y>0\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

…….16 分

4 (12 分) 解：显然 Z 为离散型随机变量，其可能取值：1,2,3,4，则 Z 的分布律为

$$P(Z=1)=P(\min\{X,Y\}=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3)+P(X=1,Y=4)$$
$$+P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=1)+P(X=4,Y=1)=\frac{7}{16}$$

$$P(Z=2)=P(\min\{X,Y\}=2)=P(X=2,Y=2)+P(X=2,Y=3)+P(X=2,Y=4)+P(X=3,Y=2)+P(X=4,Y=2)$$
$$=P(X=2)P(Y=2)+P(X=2)P(Y=3)+P(X=2)P(Y=4)=\frac{5}{16}$$

$$P(Z=3)=P(\min\{X,Y\}=3)=P(X=3,Y=3)+P(X=3,Y=4)+P(X=4,Y=3)=\frac{3}{16}$$

$$P(Z=4)=P(\min\{X,Y\}=4)=P(X=4,Y=4)=P(X=4)P(Y=4)=\frac{1}{16}$$

即：

Z	**1,**	**2**	3,	4
p_i	$\frac{7}{16}$,	$\frac{5}{16}$,	$\frac{3}{16}$,	$\frac{1}{16}$

5．（10 分）解：(1) 若随机变量 $X\sim B(n,p)$，则对任意的实数 x，总有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right)=\Phi(x)$$ ……………………….3 分

（2）：

$$X=\sum_{k=1}^{20000}X_k\sim B(200,0.8)$$

$E(X)=20000\times0.8=16000; D(X)=20000\times0.8\times0.2=3200$ 设需要 n 个位置，于是

$P(X\le n)=0.99$ 由德莫佛-拉普拉斯定理，有

$\Phi\left(\frac{n-16000}{\sqrt{3200}}\right)=0.99$查表得$\frac{n-16000}{\sqrt{3200}}=2.33$得$n=16131.78$, 故要16132条

……………………….10 分

2　2016—2017 学年第 1 学期《概率论与数理统计 B》期末 A 卷

一：选择题 （每小题 3 分，共 15 分；在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前面的字母填在题后的括号内。）

C, A, B, D, D

二：填空题（每小题 3 分，共 21 分，把答案写在题中横线上。）

1、0, 1，　　2、0.14，　　3、0.14（或 0.24），0.24（或 0.14），

4、$B(n_1+n_1,p)$，　$(n_1+n_1)\,p$　，　5、1　　6、3，2　　7、-1.

三：计算题（每题 8 分，共 64 分）

1、解：Y 取值为-1， 0， 1　　……………（2 分）

$$P(Y=-1)=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^7}+\cdots+\frac{1}{2^{3+4k}}+\cdots=\frac{2}{15}$$

$$P(Y=0)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2k}}+\cdots=\frac{1}{3}$$ ……………（8 分）

$$P(Y=1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{1+4k}}+\cdots=\frac{8}{15}$$

2、 解：设 A_i 为第一支箱子中取出的次品数，$(i=0,1,2)$，A 为取出次品　……（2 分）

$$P(A)=P(A_0)P(A|A_0)+P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)$$

$$=\frac{C_{12}^2}{C_{14}^2}\frac{1}{12}+\frac{C_{12}^1C_2^1}{C_{14}^2}\frac{2}{12}+\frac{C_2^2}{C_{14}^2}\frac{3}{12}$$ ……………（8 分）

$$=\frac{3}{28}$$

1、 解：$1=\int_{-1}^{1}k|x|dx=k$　……………（4 分）

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2), & -1\le x<0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2, & 0\le x<1\\ 1, & x\le 1\end{cases}$$ ……………（8 分）

2、 解：

X	0	2
p	0.75	0.25

Y	0	1	2
p	0.2	0.43	0.37

——————— 3 分

不独立　　——————— 6 分

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
$=0.145$ ———————— 8 分

3、解：

$$f_X(x)=\begin{cases}2.4x^2(2-x), & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$$ ———————— 3 分

$$f_Y(y)=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2), & 0<y<1\\ 0, & else\end{cases}$$

不独立 ———————— 6 分

$P(X+Y<1)=0.3$ ———————— 8 分

4、解：

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ z, & 0<z<1\\ 1, & z\ge 1\end{cases} \qquad f_Z(z)=\begin{cases}1, & 0<z<1\\ 0, & else\end{cases}$$ ———————— 4 分

$E(XY)=E(X)=E(Y)=0$
$\rho_{XY}=0$ ———————— 8 分

5、解：设 $Z=\max(X,Y)$ ———————— 1 分

Z 取值为 0，1， ———————— 2 分

$P(Z=0)=0.1+0.2=0.3$
$P(Z=1)=0.3+0.2+0.1+0.1=0.7$ ———————— 5 分

$E(Z)=0.7$ ———————— 8 分

6、设 X 为不发芽的粒数，X ~ B(400, 0.05) ……………（3 分）

$$P(X\le 25)=P\left(\frac{X-400\times 0.05}{\sqrt{400\times 0.95\times 0.05}}\le\frac{25-400\times 0.05}{\sqrt{400\times 0.95\times 0.05}}\right)$$ ……………（8 分）

$$=P\left(\frac{X-400\times 0.05}{\sqrt{400\times 0.95\times 0.05}}\le 1.147\right)\approx 0.8749$$

3　2014—2015 学年第 2 学期《概率论与数理统计 B》期末 A 卷

一、

题号	1	2	3	4	5	6	7
答案	C	B	C	D	B	A	C

二、

1、　6/7

2、 38.4

3、 N(0,1)

4、 1/8

5、 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ 0, & 其他,\end{cases}$

6、 2/9

7、 -1

三、1、设 B 表示“第一次取到的是新球”，

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\frac{4}{6}\frac{C_3^2}{C_6^2}+\frac{2}{6}\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{4}{15}$$ ……… 8 分

2、(1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^2(ax+b)dx=2(a+b)=1$$ …… 2 分

$$P(X\geq 1)=\int_1^2(ax+b)dx=0.25,$$

解得 a=-0.5,b=1 …… 4 分

(2)

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ -\frac{x^2}{4}+x, & 0\leq x<2\\ 1, & x\geq 2\end{cases}$$ …… 8 分

(3) *E(X)=2/3* …… 10 分

3、

X	-3	0	3
p	0. 2	0.6	0.2

………… 2 分

Y	-3	0	3
p	0. 2	0.6	0.2

………… 4 分

E(X)=E(Y)=0，D(X)=D(Y)=3.6， ………… 8 分

E(XY)=0，COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0 ………… 10 分

4、

解： (1). Z_1 的所有可能取值为：0，1，2，3，4；分布列为：

Z_1	0	1	2	3	4
p	0.3	0.18	0.32	0.12	0.08

……5 分

(2). Z_2的所有可能取值为：0，2， 4；分布列为：

ζ_2	0	2	4
p	0.8	0.2	0.08

……10 分

5、（1） $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{5\times10^5}e^{-(\frac{x}{500}+\frac{y}{1000})}, & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$ ……… 5 分

（2） $P(X>500,Y>500)=e^{-\frac{12}{5}}$

……… 10 分

5、解：$E(\sum X_i)$ =100 ∗ 4 ＝ 400, ………… 3 分

$D(\sum X_i)$ =100 ∗ 4 ∗ 4 ＝ 1600 ………… .6 分

$$P(320<\sum X_i<480)=\Phi(\frac{480-400}{40})-\Phi(\frac{320-400}{40})=2\Phi(2)-1$$

………… 10 分

4 2014—2015 学年第 2 学期《概率论与数理统计 B》期末 B 卷

一、填空题

1. $\frac{3}{7}$ 2. A=$\frac{1}{2}$， $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, x\geq 0\end{cases}$ 3. 39/56. 4、0.3 5、25/12

6. 6 7. $\frac{4}{9}$

二、选择题

1. C 2. B 3. C 4. D 5. C

三、计算题

1. 设 A_1，A_2，A_3 分别表示任取一件为甲、乙、丙三个车间生产。B 为取到产品为不合格品。

$$P(B)=\frac{3}{6}\times 0.08+\frac{2}{6}\times 0.09+\frac{1}{6}\times 0.12=0.09$$ ……………………(5 分)

$$P(A_1|B)=\frac{\frac{3}{6}\times 0.08}{0.09}=\frac{4}{9}$$ ……………………(12 分)

2. $$1=\int_0^2 kx^2dx=\frac{8}{3}k,\quad k=\frac{3}{8}$$ ……………………(2 分)

$$P(1<X<3)=\int_1^2 \frac{3}{8}x^2dx=\frac{7}{8}$$ ……………………(5 分)

$$E(X)=\int_0^2 x\times\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{2}$$ ……………………(10 分)

3、

解：（1）A＝1/8 ……2 分

(2) $$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{4} & 0\le x\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y+1}{4}, & 0\le y\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$$ ……6 分

（3）$$E(X)=\int_0^2 dx\int_0^2 x\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6},\qquad E(Y)=\int_0^2 dx\int_0^2 y\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$$

$$E(X^2)=\int_0^2 dx\int_0^2 x^2\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{5}{3},\qquad D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{11}{36}$$

$$E(Y^2)=\int_0^2 dx\int_0^2 y^2\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{5}{3}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{11}{36}$$ ……12 分

(4) $$E(XY)=\int_0^2 dx\int_0^2 xy\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{4}{3},\ COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{36}$$

$$r=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{1}{11}$$ ……16 分

4、

解：(1). Z_1 的所有可能取值为：0，1，2，3，4；分布列为：

Z_1	0	1	2	3	4
p	0.3	0.18	0.32	0.12	0.08

……4 分

(2). Z_2 的所有可能取值为：0，2， 4；分布列为：

ζ_2	0	2	4
p	0.8	0.2	0.08

……10 分

5、解：$P(\sum_{i=1}^{100} X_i < 240) = \Phi(2) = 0.9772$ ……10 分

5　2010—2011 学年第 2 学期《概率论与数理统计 B》期末 B 卷

一 选择题

D D A A D D

二 填空题

1. 0.7　2. 5/16　3. $A = \frac{1}{2}, F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$　4. 0.1323　5. 7

三 计算题

1 解：设 $A = \{甲击中目标\}$，$B = \{乙击中目标\}$，$C = \{击中目标\}$

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.6 + 0.5 - 0.6 \cdot 0.5 = 0.8$$

$$P(A/C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4}$$

2 解：（1）$P(X = k) = \left(\frac{3}{13}\right)^k \cdot \frac{10}{13}, k = 1, 2, 3, \cdots$ ……………….5'

（2）

X	1	2	3	4
P	$\frac{10}{13}$	$\frac{3}{13} \cdot \frac{10}{12} = \frac{5}{26}$	$\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} = \frac{5}{143}$	$\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{286}$

……………….5'

3 解：（1）由切比雪夫不等式的标准形式：$P\left(\left|X-E\left(X\right)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\dfrac{D\left(X\right)}{\varepsilon^2}$

已知 $E\left(X\right)=2,E\left(Y\right)=2,D\left(X\right)=1,D\left(Y\right)=4,\ \rho_{XY}=0.5$

$E(X-Y)=E\left(X\right)-E\left(Y\right)=2-2=0$ $\cdots\cdots2'$

$D(X-Y)=D\left(X\right)+D\left(Y\right)-2Cov(X,Y)=D\left(X\right)+D\left(Y\right)-2\,\rho_{XY}\sqrt{DX}\,\sqrt{DY}=3$ $\cdots\cdots2'$

$\therefore P\left\{|\,X-Y\,|\geq6\right\}=P\left\{|\,(X-Y)-E(X-Y)\,|\geq6\right\}\leq\dfrac{D(X-Y)}{36}=\dfrac{1}{12}$ $\cdots\cdots3'$

4 解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dxdy=\int_0^1\int_0^x kdxdy=1\Rightarrow k=2$ …………3’

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dy=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ …………2’

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dx=\begin{cases}2\left(1-y\right) & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ …………2’

（3）$P\left(X+Y<1\right)=\iint\limits_{x+y<1}f\left(x,y\right)dxdy=\int_0^{1/2}dy\int_y^{1-y}2dx=\dfrac{1}{2}$ …………3’

（4）X 与 Y 不独立 …………3’

5 解：由题设知 $P(A)=P(B),P(AB)=P(A)P(B)$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2P(A)-[P(A)]^2=\frac{3}{4}\ \ldots\ldots3'$$

从而 $\dfrac{1}{2}=P(A)=\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^2\dfrac{3}{8}x^2dx=\dfrac{(8-a^3)}{8}$ …………………… 3’

由此得 $a=\sqrt[3]{4}$ …………………… 1’

6 解：　每小题 3 分

（1）

Y \ X	-1	1
-1	1/4	1/2
1	0	1/4

（2）$E\left(X\right)=1/2,E\left(X^2\right)=1,D\left(X\right)=3/4$；$E\left(Y\right)=-1/2,E\left(Y^2\right)=1,D\left(Y\right)=3/4$；

$$E(XY)=0,\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-(EX)(EY)=\frac{1}{4},\ \rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{1}{3}$$

(3)

Z	-1	1
p	0.25	0.75

7 解：(1)p=$P(X\le\frac{\sqrt{5}}{5})=0.2$， 所以 $Y\sim B(n,0.2)$ ……………….4’

(2)

$$P(14\le Y\le 30)=P\left(\frac{14-100*0.2}{\sqrt{100*0.2*0.8}}\le\frac{Y-100*0.2}{\sqrt{100*0.2*0.8}}\le\frac{30-100*0.2}{\sqrt{100*0.2*0.8}}\right)$$ ……6’

$$=\Phi\left(\frac{10}{4}\right)-\Phi\left(-\frac{6}{4}\right)=0.994-1+0.932=0.926$$

6 2007—2008 学年第 1 学期《概率论与数理统计 B》期末 B 卷

一、选择题（每题 3 分，共 21 分）

1. （ **C** ） .2. （ **B** ） 3.（ **C** ） 4.（ **D** ）

5. （ **B** ） 6. （ **C** ） 7.（ **D** ）.

二、填空题（每题 3 分，共 21 分）

1. **0.7** .

2. **0.2** .

3. **1/3** .

4. ***5/18*** ； **2/9** ，***1/9***

5. 无偏 ， d_2 比 d_1.

6. （39.51，40.49） .

7. 当 H_0 为真时，根据样本值作出了拒绝 H_0 的判断；当 H_0 为假时，根据样本值作出了接受 H_0 的判断

三、计算及应用题(54 分)

1.（**6 分**）

解：{A，B，C 恰好发生一个}= $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$，

……………………2 分

而 $P(A\overline{B}\,\overline{C})=P(A-AB\cup AC)=P(A)-P(AB\cup AC)$

$=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$，

同理得 $P(\overline{A}B\overline{C})=P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)$，

$P(\overline{A}\,\overline{B}C)=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$，故

$P(A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C)=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-2P(AB)-2P(AC)-2P(BC)+3P(ABC)$，

……………………4 分

因为 $ABC\subset AB$, 故 $P(ABC)\le P(AB)$，由 $P(AB)=0$ 及 $P(ABC)\ge 0$，得

$P(ABC)=0$，从而 $P(A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C)=0.5$。

……………………………………………………6 分

2. （**6 分**）

解： 设 B={所取的产品为次品}，A_i={所取的产品为第 i 条生产线生产}，i=1,2,3，则 A_1，A_2，A_3 两两互斥且 $B=A_1B\cup A_2B\cup A_3B$，

……………2 分

故（1）

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\,|\,A_i)=\frac{3}{9}\times 0.02+\frac{2}{9}\times 0.03+\frac{4}{9}\times 0.04=\frac{7}{225}\approx 0.0311；$$

…………………………4 分

（2）$P(A_2\,|\,B)=P(A_2)P(B\,|\,A_2)/P(B)=\dfrac{3}{14}\approx 0.2143$

…………………………6 分

3. （**12 分**）

解： ① 由概率密度函数的归一性，$\iint\limits_{R^2}f(x,y)d\sigma=1$ ……………………1 分

$$\iint\limits_{\substack{x>0\\y>0}}ke^{-(3x+4y)}d\sigma=1,$$

$k=12.$ ………………………………………3 分

②

$$P\{0<X\le 1, 0<Y\le 2) = \iint\limits_{\substack{0<X\le 1\\ 0<Y\le 2}} 12e^{-(3x+4y)}dxdy = (1-e^{-3})(1-e^{-8}).$$

……………………………5 分

③ $f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ……………………………7 分

$f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ ………………………………………9 分

③$\because f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(x)$ ………………………………………10 分

$\therefore X$ 与 Y 相互独立. ………………………………………12 分

4. （6 分）

解：$E(X)=1.9,\ E(X^2)=4.3,\ D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.69$；

………………………………………2 分

$E(Y)=1.5,\ E(Y^2)=2.5,\ D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=0.25$；

………………………………………4 分

$E(XY)=2.7,$

$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.15$，

$\rho_{X,Y}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\sqrt{\dfrac{3}{23}}$。 ………………………………………6 分

5. （8 分）

解：设 400 件产品中的次品数为 X，则 $X\sim B(400,0.3)$，

由中心极限定理得 X 近似服从 $N(120,84)$，

………………………………………3 分

故所求概率为

$$P\{110\le X\le 125\}$$
$$=P\{\frac{-10}{\sqrt{84}}\le\frac{X-120}{\sqrt{84}}\le\frac{5}{\sqrt{84}}\}$$ ………………………5 分

$$\approx \Phi(\frac{5}{\sqrt{84}}) - \Phi(\frac{-10}{\sqrt{84}})$$

$$= \Phi(\frac{5}{\sqrt{84}}) + \Phi(\frac{10}{\sqrt{84}}) - 1 \approx \Phi(0.55) + \Phi(1.09) - 1$$ 。

$$= 0.5709$$

……………………………………8 分

6.（**8 分**）

解：矩估计：$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot \theta x^{\theta-1} \mathrm{d}x = \frac{\theta}{\theta+1}$，

……………………………………2 分

解得 $\theta = \frac{E(X)}{1-E(X)}$，

从而得 θ 的矩估计 $\hat{\theta} = \frac{\overline{x}}{1-\overline{x}}$；

……………………………………4 分

最大似然估计：

似然函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta) = \begin{cases} \theta^n (x_1 \cdots x_n)^{\theta-1},\ 0 < x_1, \cdots, x_n < 1, \\ 0,\ \text{其它}. \end{cases}$$

……………………………………6 分

当 $0 \le x_1, x_2, \cdots, x_n \le 1$ 时， $L(\theta) > 0$，取对数得

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta + (\theta - 1) \ln(x_1 x_2 \cdots x_n),$$

从而令 $\frac{d}{dx}(\ln L) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$，

得 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = -n \Big/ \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$

……………………………………8 分

7. （**8 分**）

解：未知 σ ，检验 $H_0: \mu = 1650$，$H_1: \mu \ne 1650$，

……………………………2 分

取统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S\ /\sqrt{n}}$，……………………………4 分

$t_{\alpha/2}(24)=t_{0.025}(24)=2.0639$，……………………………5 分

在显著水平α=0.05 下 H_0 的拒绝域为$\{|t|>2.0639\}$；

……………………………6 分

而 t 的取值为 $t=\dfrac{1691-1650}{169/\sqrt{25}}=1.213$，

……………………………7 分

落在接受域中，所以在α=0.05 下接受 H_0，即认为整批元件的平均寿命没有显著差异。……………………………8 分

四、证明题（4 分）

证明：$Y=4X$ 的分布函数

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(4X\le y)$$
$$=P(X\le \frac{y}{4})=F_X(\frac{y}{4})$$ ，

……………………………2 分

所以 $Y=4X$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{4}f_X(\frac{y}{4})=\begin{cases} y/8, & 0\le y\le 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$ 。

……………………………4 分