免责声明

文档源自各位高数老师，由浙理羊同学整理，勘误请联系 vx：HG450008,切忌抹水印上传，整理校对不易，烦请谅解

高数 AB 在上册相差不大，也可以拿 A 版的练习

浙江理工大学 2019— 2020 学年第一学期

《高等数学 B1》期中试卷

本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

座位号：_________ 承诺人签名：____________ 班级：_____________学号：___________

一、填空题：（4 分／题　共 24 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=$_______________

2、用定义叙述 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$：____

3、$\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}+x^2\sin\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\sin 3x}{x}\right]=$_______________

4、设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+7}{x-1}=5$，则 $f(1)=$_________________

5、已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arcsin x^2$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$_________________

6、设 $y=f(\cos x)\cdot\cos(f(x))$，且 f 可导，则 $y'=$_________________________________

二、选择题：（4 分／题　共 24 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$ 的值为：（　　　　　）

A．0　　B．-1　　C．1　　D．2

2、设 $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，当 $x\to 0$ 时，若 $P(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列选项错误的是（　　　　）

A．$a=0$　　B．$b=1$　　C．$c=0$　　D．$d=\dfrac{1}{6}$

3、设 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$，则下列说法中正确的是（　　　　　）

A．$f(x)$ 有 4 个间断点　　B．$x=0,x=1$ 是第一类间断点，$x=-1$ 是第二类间断点

C．$x=0,x=-1$ 是第二类间断点，$x=1$ 是第一类间断点

D． $x=0, x=1, x=-1$ 都是第一类间断点

4、设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ ，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　　　）

A．连续不可导　　B．极限不存在　　C．极限存在但不连续　　D．　可导

5、设 $\dfrac{df(x)}{dx}=g(x)$ ，$h(x)=x^2$ ，则 $df\left[h(x)\right]=$ （　　　　　）

A． $g(x^2)dx$　　B．　$x^2g(x^2)dx$　　C．　$2xg(x)dx$　　D．　$2xg(x^2)dx$

6、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(0)=0$ ，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$ ，则下列说法正确的是（　　　　）

A． $x=0$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点　　　B． $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点

C． $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点　　　D．无法判断

三、计算题：（6 分 / 题　共 30 分）

1、求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$

2、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

3、已知 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=\left[f(x)\right]^2$，求 $f^{(n)}(x)$。（其中 $n>2$ 的整数）

4、已知 $y=x\ln(\arctan\frac{1}{x+1})$，求 y'，　$dy\big|_{x=0}$。

5、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'(y)\neq 1$，

求 dy，　$\frac{d^2y}{dx^2}$。

四、求值：（6 分／题　共 12 分）

1、设 $f(x)=\begin{cases} ax^2+1, & x\geq 1 \\ -x^2+bx, & x<1 \end{cases}$，试求常数 a,b，使函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导。

2、求函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$ 在区间 $\left[-2,4\right]$ 上单调区间、极值、最值。

五、证明题：（第 1 小题 6 分，第 2 小题 4 分）

1、设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，在 $\left(0,1\right)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$， $f(\frac{1}{2})=1$

证明：（1）、存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $f(\eta)=\eta$。

（2）、对任意实数 λ，必存在 $\xi\in\left(0,\eta\right)$，使得 $f'(\xi)-\lambda\left[f(\xi)-\xi\right]=1$。

2、设 $e<a<b<e^2$，证明：$(b-a)\frac{2}{e^2}<\ln^2 b-\ln^2 a<\frac{4}{e}(b-a)$

答案：

一、填空题：（4 分 / 题　共 24 分）

1、 3　　2、见定义　　3、$3+e^6$　　4、-7　　5、$\frac{3}{2}\pi$

6、$-f'(\cos x)\cdot\sin x\cdot\cos(f(x))-f(\cos x)\cdot\sin(f(x))\cdot f'(x)$

二、选择题：（4 分 / 题　共 24 分）

1、C　2、D　3、B　4、A　5、D　6、B

三、计算题：（6 分 / 题　共 30 分）

1、分子有理化，得极限为 2。

2、应用等价替换和洛必达法则得极限为$-\frac{1}{2}$。

3、由有限次的导数计算中归纳得到 $f^{(n)}(x)=n!\left[f(x)\right]^{n+1}$

4、由复合函数求导法可得 $y'=\ln(\arctan\frac{1}{1+x})-\dfrac{x}{(x^2+2x+2)\arctan\frac{1}{1+x}}$

$dy\big|_{x=0}=\ln\frac{\pi}{4}dx$

5、利用对数求导法得 $y'=\dfrac{1}{x\left[1-f'(y)\right]}$，所以 $dy=\dfrac{dx}{x\left[1-f'(y)\right]}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{\left[1-f'(y)\right]^2-f''(y)}{x^2\left[1-f'(y)\right]^2}$。

四、求值：（6 分 / 题　共 12 分）

1、利用连续的定义和可导的充要条件，得 $a=0,b=2$。

2、单调递增区间$\left[-2,-1\right)\cup\left(3,4\right]$，单调递减区间$\left(-1,1\right)\cup\left(1,3\right)$；

极大值 $f(-1)=-1$，极小值 $f(3)=7$；　最大值 $f(4)=\frac{22}{3}$，最小值 $f(-2)=-\frac{4}{3}$。

五、证明题：（第 1 小题 6 分，第 2 小题 4 分）

1、证明：（1）、设 $G(x)=f(x)-x$，在区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$上应用零点存在定理即可。

（2）、设 $F(x)=e^{-\lambda x}\left[f(x)-x\right]$，在区间$\left[0,\eta\right]$上应用罗尔定理即可。

2、证明：令 $f(x)=\ln^2 x$，在区间$\left[a,b\right]$上应用拉格朗日定理即可。

浙江理工大学2015-2016学年第二学期

高等数学B 期中试卷

一、选择题

1. 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，C_1, C_2 是任意常数，则该非齐次方程的通解为（ ）

A. $C_1y_1+C_2y_2+y_3$　　B. $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

C. $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$　D. $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

2. 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$ 则 $f(x)$ 等于（ ）

A. $e^x\ln 2$　　B. $e^{2x}\ln 2$

C. $e^x+\ln 2$　　D. $e^{2x}+\ln 2$

3. 差分方程 $\Delta^3 y_t-y_{t+3}+y_t+1=0$ 的阶为（ ）阶

A. 一　B. 二　C. 三　D. 四

4. 考虑二元函数的下面四条性质

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质P推出性质Q，则有（ ）

A. ②⇒③⇒①　　B. ③⇒②⇒①

C. ③⇒④⇒①　　D. ③⇒①⇒④

5. 设 ~~[illegible]~~ $x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$，$z=z(x,y)$ 都是由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数，则下列等式中不正确的是（ ）

A. $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=1$　B. $\frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=1$　C. $\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=1$

D. $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$

6. 可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是（ ）

A. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零

B. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零

C. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零

D. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在

二、填空题

1. 微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y|_{x=1}=\frac{6}{5}$ 的特解为 ____

2. 设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$（$C_1$ C_2 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为 ____

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，则 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$ ____

4. 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $dz|_{(1,0)}=$ ____

5. 设 $u=e^{-x}\sin\frac{x}{y}$，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $(2,\frac{1}{\pi})$ 处的值为 ____

6. 设 $z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$，其中 f,g 均可微，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ____

三 计算题

1. 求微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 的通解.

$$y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+\frac{C}{x^2}$$

2. 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$，试确定常数 α,β,γ，并求出该方程的通解.

$\alpha=-3\quad \beta=2\quad \gamma=-1$

通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^{2x}+(1+x)e^x$

3. 已知 $f(x,y)=x^2\arctan\frac{y}{x}-y^2\arctan\frac{x}{y}$，求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

4. 设变换 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，且 $z=z(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求常数 a

解. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial f_1'}{\partial x}+\frac{\partial f_2'}{\partial x}$$

$$=\left(\frac{\partial f_1'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_1'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f_2'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_2'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=f_{11}''+2f_{12}''+f_{22}''=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)=-2f_{11}''+(a-2)f_{12}''+af_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}\right)=4f_{11}''-4af_{12}''+a^2f_{22}''$$

$$=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(6-2-4)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(12+a-2+4a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

$$\begin{cases}12+a-2+4a\neq 0\\ 6+a-a^2=0\end{cases}$$

得 $a=3$

5. 设函数 $u=f(x,y,z)$ 具有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，求 du $\left(u=f\begin{smallmatrix}x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)$

解：令 $F(x,y,z)=xe^x-ye^y-ze^z=0$，则

$F_x'=e^x+xe^x\quad F_y'=-e^y-ye^y\quad F_z'=-e^z-ze^z$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z}$

$$du=\left(f_x'+f_z'\cdot\frac{x+1}{z+1}\cdot e^{x-z}\right)dx+\left[f_y'+f_z'\cdot\left(-\frac{y+1}{z+1}\right)\cdot e^{y-z}\right]dy$$

6. 设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$ 确定 u 是 x,y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微，$p(t),\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，求 $p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}$

解. $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{p(x)}{1-\varphi'(u)}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}-p(y)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{p(y)}{1-\varphi'(u)}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$

$$p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}=p(y)\cdot f'(u)\cdot\frac{p(x)}{1-\varphi'(u)}-p(x)\cdot f'(u)\cdot\frac{p(y)}{1-\varphi'(u)}$$

$$=0$$

7. 求函数 $z=x^2+y^2+2x+y$ 在区域 $D: x^2+y^2\le 1$ 上的最大值与最小值

$$z_{max}=\sqrt{5}+1 \quad (x=\frac{2\sqrt{5}}{5}, y=\frac{\sqrt{5}}{5})$$

$$z_{min}=1-\sqrt{5} \quad (x=-\frac{2\sqrt{5}}{5}, y=-\frac{\sqrt{5}}{5})$$

8. 设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

(1) 验证 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$

(2) 若 $f(1)=0$, $f'(1)=1$，求函数 $f(u)$ 的表达式

证明 (1) 令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(u)\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}f'(u)+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot f''(u)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}f'(u)+\frac{x^2}{x^2+y^2}f''(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}f'(u)+\frac{y^2}{x^2+y^2}f''(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(u)+f''(u)=0$$

即 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$

(2) 令 $f'(u)=p$，则 $f''(u)=\frac{dp}{du}$，则 $\frac{dp}{du}+\frac{p}{u}=0$

则 $\frac{dp}{p}=-\frac{du}{u}$

$\ln|p|=-\ln|u|+\ln C_1$

$p=\frac{C_1}{u}$

两端积分 $\int p\,du=\int\frac{C_1}{u}du$

得 $f(u)=C_1\ln|u|+C_2$

$\begin{cases} f(1)=C_2=0 \\ f'(1)=C_1=1 \end{cases}$

$\therefore f(u)=\ln|u|$

9. 设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$，其中 f 为连续函数，求 $f(x)$

解 化简得 $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(u)dt+\int_0^x t f(t)dt$

$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt$

$f''(x)=-\sin x-f(x)$

即 $y''+y=-\sin x$

得 $y=f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$

选择题

1. D　2. B　3. A　4. A　5. C

6. A

填空题

1. $y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}$　2. $y''-2y'+2y=0$　3. 2

4. $2e\,dx+(e+2)dy$　5. $(\frac{\pi}{e})^2$　6. $f_1'(xy,\frac{x}{y})y+\frac{f_2'(xy,\frac{x}{y})}{y}-\frac{y}{x^2}$

浙江理工大学 2020—2021 学年第 1 学期

《高等数学 B|》期中试卷

本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

承诺人签名：________ 学号：________ 班级：________ 座位号____

一、 选择题（共 24 分，每题 4 分）

1. $x=2$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{\sin \pi x}$ 的（　　）

A 无穷间断点　　B 可去间断点　　C 连续点　　D 跳跃间断点

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x(x-3)}=3$，则 k 的值为（　　）

A. -1　　B. 9　　C. -9　　D. 3

3. 下列说法正确的是（　　）

A. 若 $x\to x_0$ 时 $f(x)$、$g(x)$ 都是 $h(x)$ 的高阶无穷小，则 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小。

B. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$；

C. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 内可导且 $f(a)=f(b)$，则存在唯一 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$；

D. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，则 $f(x)$ 在该点连续；

4. 设 $f'(2)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(4-x)-f(2)}{x-2}=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. -2　　D. 2

5. 如果 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, x\le 0, \\ b(1-x), x>0 \end{cases}$ 处处可导，那么（　　）

A. $a=-1,b=1$　B. $a=0,b=-1$　C. $a=b=1$　D. $a=-1,b=-1$

6. 设在 $[1,2]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(1)$，$f'(2)$，$f(2)-f(1)$ 或 $f(1)-f(2)$ 几个数的大小顺序为（　　）

A. $f'(2)>f'(1)>f(2)-f(1)$　　B. $f'(2)>f(2)-f(1)>f'(1)$

B. $f'(1) > f(2) - f(1) > f'(2)$　　　　D. $f'(1) > f(1) - f(2) > f'(2)$

二、 填空题（共 24 分，每题 4 分）

1. 函数 $f(x)=\dfrac{3}{1-x^2}$ 的水平渐近线是________，铅直渐近线是________.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=$________.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{n^2+\pi}+\dfrac{2\pi}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n\pi}{n^2+n\pi}\right)=$________.

4. 设 $y=5^{\sin 2x}$，则 $dy=$________.

5. 函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{x^2}$ 的单调递增区间为________.

6. 函数 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 在 x 轴交点处的切线方程为________.

三、 计算及简答（共 30 分，每题 5 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；　　2.确定常 a,b，使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=1$.

3.设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数，求 y'；　　4. 已知 $y=\ln\cos\dfrac{1}{x^2}$，求 y'；

5. 已知 $y=x^2e^{2x}$，求 $y^{(10)}$.　　6. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

四. 设 $a>0$，数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_0>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．（6 分）

五. 求由参数方程 $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=1-t^3; \end{cases}$ 所确定的函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.（5 分）

六. 证明：当 $x>0$ 时，$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$.　（6 分）

七. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(a)=0$．证明 存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.　（5 分）

浙江理工大学 2020—2021 学年第 1 学期

《 高等数学 B》期中试卷参考答案和评分标准

一 选择题

1 B　2 C　3 D　4 C　5 A　6 B

二 填空题

1. y=0,　x=±1 ;　2. e^6 ;　3. $\frac{\pi}{2}$;　4. $2\ln 5\cdot 5^{\sin 2x}\cos 2xdx$;　5. [-2,0]; 6. $y=2(x\pm 1)$.

三 计算

1 解 原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{\sin x^2}=\frac{1}{2}$;　……5 分

2 解 由洛必达法则

原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-(a+2bx)}{2x}$ ，　因此　a=1　……3 分

$=\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-2b}{2}$

$=\frac{-1-2b}{2}$

所以，　$b=-\frac{3}{2}$.　……2 分

3 解　两边取对数，得

$\ln x=y\ln y$　…… 1 分

两边同时对 x 求导数，得 $\frac{1}{x}=y'\ln y+y'$　……3 分

因此，　$y'=\frac{1}{x(1+\ln y)}$,　……1 分

4 解　$y'=\frac{2}{x^3}\tan\frac{1}{x^2}$　……5 分

5 解　$y^{(10)}=C_{10}^0x^2(e^{2x})^{(10)}+C_{10}^1(x^2)'(e^{2x})^{(9)}+C_{10}^2(x^2)''(e^{2x})^{(8)}$　……3 分

$=2^{10}x^2e^{2x}+10\cdot 2^{10}xe^{2x}+90\cdot 2^8e^{2x}$　……2 分

6 解 原式=3 $e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+(\frac{1}{3})^n+(\frac{2}{3})^n)}{n}}$　……3 分

$=3\,e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{3})^n+(\frac{2}{3})^n}{n}}$ ……1 分

$=3$ ……1 分

四 解 由于 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geq\sqrt{\mathrm{a}}$， ……2 分

因此，$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n}-x_n\right)=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leq 0$，

所以，数列 $\{x_n\}$ 单调递减有界。 ……2 分

设 $\lim\limits_{n\to}x_n=k$ ，得 $k=\frac{1}{2}\left(k+\frac{k}{a}\right)$，解方程得

$k=\pm\sqrt{a}$，

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$. ……2 分

五 解 $\frac{dy}{dt}=\frac{3t}{2}$， …… 3 分

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{3}{4t}$ ……2 分

六　证 设 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$， …… 1 分

$f'(x)=\frac{x^2}{1+x}>0$，因此 $f(x)$ 单调递增，又由于 $f(0)=0$，

所以，当 $x>0$ 时，$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$ ……2 分

设 $g(x)=x-\ln(1+x)$， ……1 分

$g'(x)=\frac{x}{1+x}>0$，且 $g(0)=0$

所以，$\ln(1+x)<x$ ……2 分

七 证 设 $F(x)=xf(x)$，$F(x)$ 满足罗尔定理的条件 ……3 分

由罗尔定理得 结论成立 ……2 分