第四章　复变函数项级数

第一讲 复数项级数与复变函数项级数

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1. 复数列的极限
2. 复数项级数的概念及收敛准则
3. 复数项级数审敛法应用举例
4. 复变函数项级数的概念

主要内容

1. 复数列的极限
2. 复数项级数的概念及收敛准则
3. 复数项级数审敛法应用举例
4. 复变函数项级数的概念

1 复数列的极限

定义 设$\{\alpha_n\}(n=1,2,\cdots)$为一复数列，$\alpha$为一确定的复数，

若$\forall\varepsilon>0,\exists N$，使得$n>N$时，恒有

$$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon,$$

则称复数列$\{\alpha_n\}$收敛于α，并称α为当$n\to\infty$时复数列$\{a_n\}$的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha,\quad \text{或}\quad \alpha_n\to\alpha(n\to\infty).$$

定理1（复数列收敛的充要条件）

复数列 $\{\alpha_n\}=\{a_n+ib_n\}$ 收敛于复数 $\alpha=a+ib$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

证明（必要性） 设 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha,$

即 $\forall\varepsilon>0,\exists N$，s.t $n>N$ 时，总有

$$|\alpha_n-\alpha|=|a_n-a+i(b_n-b)|<\varepsilon.$$

从而有
$$|a_n-a|<\varepsilon,|b_n-b|<\varepsilon.$$

即
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

定理1（复数列收敛的充要条件）

复数列 $\{\alpha_n\}=\{a_n+ib_n\}$ 收敛于复数 $\alpha=a+ib$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

证明（充分性）设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$

即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$，s.t $n > N$ 时，总有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\alpha_n - \alpha| = |a_n - a + i(b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha.$

定理1（复数列收敛的充要条件）

复数列 $\{\alpha_n\}=\{a_n+ib_n\}$ 收敛于复数 $\alpha=a+ib$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=a, \lim_{n\to\infty} b_n=b.$$

说明

（1）回答了复数列极限存在的条件；

（2）解决了复数列极限的计算方法；

（3）把复数列的敛散性问题的研究**转化为实数列**的敛散性问题的研究，这是复变函数中非常重要的思想方法.

例1 下列复数列是否收敛，如果收敛，求出极限.

$$(1)\ \alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}};\qquad (2)\ \alpha_n = n\cos in$$

解 $$(1)\ \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right) = 1.$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty} n\cos in = \lim_{n\to\infty} n\frac{e^{n}+e^{-n}}{2} = \infty.$$

主要内容

1 复数列的极限

2 复数项级数的概念及收敛准则

3 复数项级数审敛法应用举例

4 复变函数项级数的概念

2 复数项级数的概念及审敛法则

定义（复数项级数）$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$

$$s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$ 部分和

级数收敛的定义 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ 记作 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = s$

否则，称级数发散.

定理2（级数收敛的充要条件）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(\alpha_n=a_n+ib_n\right) \text{ 收敛 } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{和} \sum_{n=1}^{\infty}b_n \text{均收敛.}$$

证明 设 $s_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$

$$\sigma_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$$\tau_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

$$\because \alpha_n=a_n+ib_n \quad \therefore s_n=\sigma_n+i\tau_n$$

由定理1知，$\{s_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{\sigma_n\}$和$\{\tau_n\}$ 均收敛

说明：复数项级数的审敛问题转化为实数项级数的审敛问题.

例2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)$ 是否收敛?

解 $\alpha_n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}i$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)$ 发散.

推论1（复数项级数收敛的必要条件）$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$

证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛 $\Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0 \\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n\text{收敛} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}b_n=0 \end{cases}$

$$\alpha_n=a_n+ib_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$$

注意：逆不真，但逆否命题成立.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)$$

绝对收敛与条件收敛

如果$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ **绝对收敛.**

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ **条件收敛.**

定理3 （复数项级数的绝对收敛准则）

如果$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛，且$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$.

定理3 （复数项级数的绝对收敛准则）

如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，且$\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$.

证明 设$\alpha_n = a_n + ib_n$，从而 $|a_n| \leq |\alpha_n|, |b_n| \leq |\alpha_n|$

由实变函数中正项级数的比较审敛法知，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均绝对收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)$ 收敛

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_n\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|\alpha_n| \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_n\right| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_n| \Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|.$$

主要内容

1 复数列的极限

2 复数项级数的概念及收敛准则

3 复数项级数审敛法应用举例

4 复变函数项级数的概念

3 复数项级数的审敛法应用举例

例3 下列复数项级数是否收敛？

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n} \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{3^n}\right]$$

解 $$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n}i\right)$$

因为实部项级数发散，故该级数发散.

（2）因为实部项级数与虚部项级数均收敛，故该级数收敛.

例4 证明复数项等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n$，当 $|\alpha|<1$时，绝对收敛，

其和为 $\dfrac{1}{1-\alpha}$；当 $|\alpha|\geq 1$ 时，发散.

证明 $\alpha=re^{i\theta}$, $s_n=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k=\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\lim_{n\to\infty}r^n e^{in\theta}=\lim_{n\to\infty}r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\begin{cases}0, & r<1\\ \text{不存在}, & r\geq 1\end{cases}$$

$|\alpha|=r<1$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n$ 收敛且绝对收敛，$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\dfrac{1}{1-\alpha}$

当 $|\alpha|\geq 1$时，级数发散.

例5 判断下列级数是否绝对收敛？

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^n}{n!} \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right]$$

解

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(2i)^n}{n!}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

由正项级数检比法知该级数收敛

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^n}{n!}$ 绝对收敛.

例5 判断下列级数是否绝对收敛？

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^n}{n!} \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right]$$

解 $$(2)\left|\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right|=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\left(\frac{1}{2^n}\right)^2}\geq\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right]$$ 为条件收敛.

主要内容

1 复数列的极限

2 复数项级数的概念及收敛准则

3 复数项级数审敛法应用举例

4 复变函数项级数的概念

4 复数函数项级数的概念

定义 设 $\{f_n(z)\}(n=1,2,\cdots)$ 为一复变函数列，其中各项在区域D内有定义，表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

称为复变函数项级数，其前n项和

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

称为级数的部分和.

若对于 $z_0 \in D, \lim\limits_{n\to\infty} s_n(z_0) = s(z_0)$

则称函数项级数在z_0处收敛，$s(z_0)$称为它的**和**. 即

$$s(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0) = f_1(z_0) + f_2(z_0) + \cdots + f_n(z_0) + \cdots$$

D中所有使级数收敛的点构成的集合，称为级数的**收敛域**.

若D是收敛域，则对于D中的每一点z, 都对应一个级数的和，从而

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n(z) = s(z)$ **和函数**，即 $s(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad z \in D.$

例6 求函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛域及和函数. 函数项等比级数

解 由前例3知，当 $|z|<1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 绝对收敛；

其和为 $\dfrac{1}{1-z}$； 当 $|z|\geq 1$时，$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 发散.

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛域为 $|z|<1$， 和函数为 $\dfrac{1}{1-z}$.