2. 二次曲面　　三元二次方程

- 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 抛物面: $(p,q$ 同号$)$
  - 椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$
  - *双曲抛物面 $-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$
- 双曲面:
  - 单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$
  - 双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$
- 椭圆锥面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

1. 空间曲面　　三元方程 $F(x,y,z)=0$

- 球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
- 旋转曲面

  如, 曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

  $$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$$

- 柱面

  如,曲面 $F(x,y)=0$ 表示母线平行 z 轴的柱面.

  又如,椭圆柱面, 双曲柱面, 抛物柱面等 .

(1) $(C)'=0$.

(2) $(x^a)'=ax^{a-1}$,特别地,有 $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$.

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$,特别地,有 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

(4) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$,特别地,有 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

(5) $(\sin x)'=\cos x$.

$(\cos x)'=-\sin x$.

$(\tan x)'=\sec^2 x$.

$(\cot x)'=-\csc^2 x$.

$(\sec x)'=\sec x\tan x$.

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

(6) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

(7) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$;

$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$;

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!\ a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

(1) $\int k\,\mathrm{d}x = kx + C.$

(2) $\int x^a\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a+1}x^{a+1} + C(a \neq -1)$；

$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$

(3) $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$，特别地，$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$

(4) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$；

$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$；

$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；

$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$；

$\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

$\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$；

$\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

$\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C$；

$\int \csc x\cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C.$

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$；

$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$；

$\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$；

$\int \dfrac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$；

$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$；

$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$；

$\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C.$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

公式 7. 分部积分法公式

$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u.$$

华里士公式

设 $f(x)\in C[0,1]$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$，特别地，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x=I_n，且\ I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}，I_0=\frac{\pi}{2}，I_1=1.$$

$$I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2k+1}=\frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

三重积分的对称性（二重积分思路一样的）

(1) 设 Ω 关于 xOy 平面对称，位于 xOy 平面上方的区域为 Ω_1，则

当 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$ 时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=0$；

当 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$ 时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v$.

(2) 设 Ω 关于 yOz 平面对称，位于 yOz 一侧的区域为 Ω_1，则

当 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$ 时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=0$；

当 $f(-x,y,z)=f(x,y,z)$ 时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v$.

(3) 设 Ω 关于 xOz 平面对称，位于 xOz 平面上方的区域为 Ω_1，则

当 $f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$ 时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=0$；

当 $f(x,-y,z)=f(x,y,z)$ 时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v$.

投影法（先一后二）、截面法（先二后一）

公式 38. 三重积分的计算方法：投影法

设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,\varphi_1(x,y)\leqslant z\leqslant\varphi_2(x,y)\}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z;$$

公式 39. 三重积分的计算方法：切片法

设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,c\leqslant z\leqslant d\}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_c^d\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

公式 40. 三重积分的计算方法:柱面坐标变换法

令$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$其中$\begin{cases} \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \\ r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta), \\ \varphi_1(r,\theta) \leqslant z \leqslant \varphi_2(r,\theta), \end{cases}$则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\mathrm{d}r\int_{\varphi_1(r,\theta)}^{\varphi_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}z.$$

公式 41. 三重积分的计算方法:球面坐标变换法

令$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$

其中 $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \delta_1 \leqslant \varphi \leqslant \delta_2, r_1(\theta,\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\theta,\varphi)$,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{\delta_1}^{\delta_2}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r.$$

公式 51. 对弧长的曲线积分的对称性

(1) 设 L 关于 x 轴对称,位于 x 轴上方部分为 L_1,

若 $f(x,-y) = -f(x,y)$,则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 0$;

若 $f(x,-y) = f(x,y)$,则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s$.

(2) 设 L 关于 y 轴对称,位于 y 轴右侧的部分为 L_1,

若 $f(-x,y) = -f(x,y)$,则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 0$;

若 $f(-x,y) = f(x,y)$,则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s$.

(3) 若 L 关于直线 $y = x$ 对称,则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_L f(y,x)\mathrm{d}s$.

(4) 若 L 关于直线 $y = -x$ 对称,则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_L f(-y,-x)\mathrm{d}s$.

公式 55. 格林公式

设 D 为平面单连通或多连通区域,$P(x,y)$,$Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数,其中 L 为其正向边界,则有

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

公式 61. 高斯公式

设 Σ 为封闭曲面的外侧,其所围成的几何体为 Ω,且 $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$ 在 Ω 上一阶连续可偏导,则有

$$\oiint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v.$$

运用格林公式或高斯公式注意曲线或曲面是封闭的！

公式 58. 对面积的曲面积分的对称性

(1) 设 Σ 关于 xOy 平面对称，其中 Σ_1 为 Σ 位于 xOy 平面上方的部分，

若 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$；

若 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

(2) 设 Σ 关于 xOz 平面对称，其中 Σ_1 为 Σ 位于 xOz 平面的右侧部分，

若 $f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$；

若 $f(x,-y,z)=f(x,y,z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

(3) 设 Σ 关于 yOz 平面对称，其中 Σ_1 为 Σ 位于 yOz 平面的前侧部分，

若 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$；

若 $f(-x,y,z)=f(x,y,z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

(3) $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$，

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为有侧曲面 Σ 上一点处法向量的方向余弦.

公式 60. 对坐标的曲面积分的对称性

设 Σ 关于 xOy 平面对称(Σ 的侧也是对称的)，其中 Σ_1 为 Σ 位于 xOy 平面上侧.

(1) 若 $R(x,y,-z)=-R(x,y,z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\Sigma_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(2) 若 $R(x,y,-z)=R(x,y,z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

公式 62. 梯度

设 $u=f(x,y,z)$ 连续可偏导，称 $\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\}$ 为函数 $u=f(x,y,z)$ 的梯度，记为 $\mathbf{grad}u$，即 $\mathbf{grad}u=\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\}$.

上述截自文都考研整理公式，特此感谢！

3. 几个重要级数的收敛性

（1） 等比级数（几何级数）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ $(a\neq 0)$ 当 $|q|<1$ 时收敛于 $\frac{a}{1-q}$；当 $|q|\geq 1$ 时发散。

（2） 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

（3）　p-级数当$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$　(p>0)　p>1 时收敛，当 0<$p\leq 1$时发散。

4．**收敛级数的必要条件**　若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim_{n\to 0}u_n=0$．反之不然。

5．常数项级数敛散性判别法

（1）正项级数敛散性判别法：

①比较判别法及其极限形式：

比较判别法：正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，且$\exists N$，当 n>N 时，有$u_n\leq kv_n$，（k>0）

i）　若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

ii）　若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散

极限形式：正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l(v_n\neq 0)$则

i）当$0<l<+\infty$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$同敛散

ii）当$l=0$时，若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

iii）当$l=+\infty$，若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散

②比值判别法（达朗贝尔判别法）

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，则$\lim_{n\to 0}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

i）当$\rho<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

ii）当$\rho>1$或$\rho=+\infty$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散

iii）当ρ=1时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$敛散性不能确定

③极限判别法（柯西判别法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

i）当 $\rho < 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 ii）当 $\rho > 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

iii）当 $\rho = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性不能确定

（2）交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ （$u_n > 0$）敛散性判别法：

莱布尼兹定理：若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足：

i） $u_n \geq u_{n+1}$（n=1，2，3 ……）

ii）$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

则级数收敛，且和 $s \leq u_1$，余项绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$

（3）任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ （u_n 为任意实数）敛散性判别法

1）　若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

2）　若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛

（2）敛散半径 R 的求法

设 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ 其中 a_n，a_{n+1} 为级数（II）相邻两项系数，则 $R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \rho \neq 0 \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$

① **常用函数的幂级数展开式**

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad x \in (-1,1)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in R$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in R$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in R$

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad x \in (-1,1]$

- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots.$

=1+$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n$. $\qquad x \in (-1,1)$

1. 傅里叶级数

（1）　傅立叶级数与傅立叶系数

- 设 $f(x)$ 是周期为 2 π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，称三角级数

  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin x)$　（IV）为 $f(x)$ 的傅立叶级数，其中

  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$　*n*=0,1,2…，$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$　*n*=1,2…

  称为 $f(x)$ 的傅立叶系数

- 当 $f(x)$ 是奇函数时，a_n=0（*n*=0,1,2…），$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$　*n*=1,2..

  此时，（IV）变为正弦函数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin nx$

- 当 $f(x)$ 是偶函数时，b_n=0（*n*=1,2…），$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$　*n*=1,2..

  此时，（IV）变为余弦函数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$

（2）　收敛定理：设 $f(x)$ 是周期为 2 π 的函数，若满足：

①　$f(x)$ 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点

②　$f(x)$ 在一个周期内只有有限个极值点

则 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛，并且

1)　当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$

2)　当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$