第四章　复变函数项级数

第三讲 泰勒级数

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1 解析函数的泰勒展开定理

2 求解析函数泰勒展开式的方法

主要内容

1 解析函数的泰勒展开定理

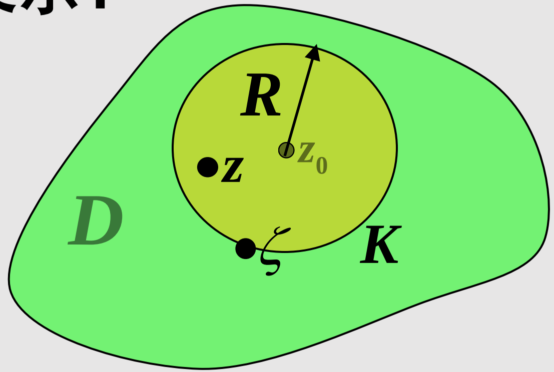
2 求解析函数泰勒展开式的方法

1 解析函数的泰勒展开定理

在收敛圆内，幂级数的和函数是解析函数；

反过来，一个解析函数能否用一个幂级数来表示？

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$



由柯西积分公式

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta}$$

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\quad\left(\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1\right)$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \left(\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1 \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right] \mathrm{d}\zeta$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]\mathrm{d}\zeta$$

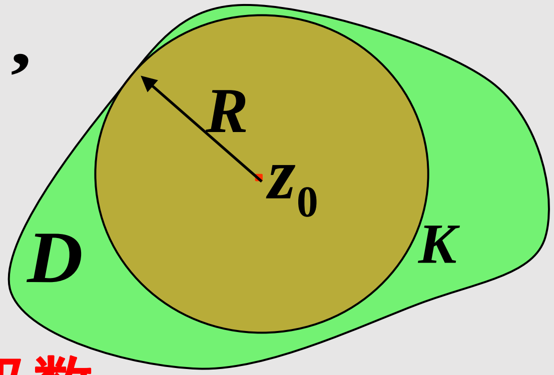
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\oint_K\left[\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad =\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0).$$

定理1（Taylor展开定理） 设 $f(z)$ 在区域D内解析，z_0 为 D内一点，R为 z_0 到D边界的最短距离，则 $f(z)$ 在$|z-z_0|<R$ 可以**唯一地**表示为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$



其中 $c_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\quad(n=0,1,2,\cdots)$.

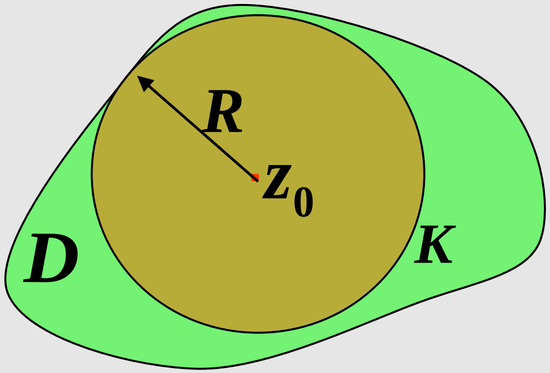
$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 称为$f(z)$在 z_0 点的**Taylor级数**.

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.}$$

定理1（Taylor展开定理） 设 $f(z)$ 在区域D内解析，z_0 为 D内一点，R为 z_0 到D边界的最短距离，则 $f(z)$ 在$|z-z_0|<R$

可以唯一地表示为

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.}$$



说明

（1）如果有奇点；（2）唯一性；

（3）函数在一点解析的充分必要条件是它在这点的邻域内可以展成泰勒级数，这是解析函数的本质.

主要内容

1 解析函数的泰勒展开定理

2 求解析函数泰勒展开式的方法

2 求解析函数泰勒展开式的方法

1. 直接方法 $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots).$

例1 求 $f(z) = e^z$ 在 $z = 0$ 的Taylor展开式.

解 $(e^z)^{(n)} = e^z, \quad (e^z)^{(n)}\big|_{z=0} = 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, |z| < +\infty.$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.}$$

2. 间接方法

$$e^{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n},$$

例2 将$\cos z$展开为z的泰勒级数.

解
$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iz)^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-iz)^{n}\right],$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}+\cdots,\quad |z|<+\infty$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}+\cdots,\ |z|<+\infty.$$

例3 将$\ln(1+z)$展开为z的泰勒级数.

解 $$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

$$(|z|<1)$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}+\cdots,\ (|z|<1)$$

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n},\quad (|z|<1)$$

$$\arctan z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1},\ (|z|<1).$$

例4 把$f(z)=\dfrac{1}{(1+z)^2}$展成z的泰勒级数.

解 $$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad (|z|<1)$$

$$\frac{-1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^{n-1},\quad (|z|<1)$$

$$\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} nz^{n-1},\quad (|z|<1).$$

例5 把$f(z)=(1+z)^{\alpha}$(α为复数)展成z的泰勒级数.

解 $f'(z)=\alpha(1+z)^{\alpha-1}$

$(1+z)f'(z)=\alpha f(z)$, $\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

$$(1+z)(c_1+2c_2 z+3c_3 z^2+\cdots)$$

$$=\alpha(c_0+c_1 z+c_2 z^2+c_3 z^3+\cdots)$$

$$c_0=f(0)=1,\quad c_1=\alpha,\quad c_2=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!},\cdots\cdots$$

$$c_n=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\cdots$$

例5 把$f(z)=(1+z)^{\alpha}$(α为复数)展成z的泰勒级数.

解

$$c_0 = f(0) = 1,\quad c_1 = \alpha,\quad c_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!},\cdots\cdots$$

$$c_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\cdots$$

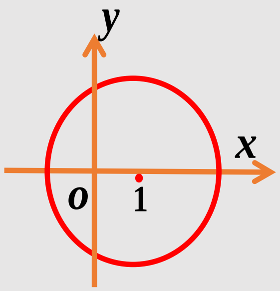
$$(1+z)^{\alpha} = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots,$$

$$(|z|<1).$$

例6 将 $f(z)=\dfrac{z}{1+z}$ 在 $z_0=1$ 处展开成泰勒级数.

并指出该级数的收敛范围.



解 $$\frac{z}{1+z}=1-\frac{1}{1+z}=1-\frac{1}{2+z-1}=1-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n \qquad |z-1|<2.$$

附：常见函数的Taylor展开式

$$(1)\ e^{z}=1+z+\frac{z^{2}}{2!}+\cdots+\frac{z^{n}}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!},\qquad (|z|<\infty)$$

$$(2)\ \frac{1}{1-z}=1+z+z^{2}+\cdots+z^{n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n},\quad (|z|<1)$$

$$(3)\ \frac{1}{1+z}=1-z+z^{2}-\cdots+(-1)^{n}z^{n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}z^{n},(|z|<1)$$

$$(4)\ \sin z=z-\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,(|z|<\infty)$$

$$(5)\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad (|z| < \infty)$$

$$(6)\ \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots, \ (|z| < 1)$$

$$(7)\ (1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 +$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \ (|z| < 1).$$

$$(1)\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (|z| < \infty)$$

$$(2)\ \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$