高等数学 A2

浙江理工大学期中试题汇编

（答案册）

学校：____________________

专业：____________________

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

（此为 2022 年 第二版 ）

目 录

1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 D　2 A　3 D　4 B　5 A　6 C

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1　$(-7, -6, 8)$　2　$\frac{4}{\sqrt{29}}$　3　$\mathrm{d}x + 2\ln 2\mathrm{d}y$

4　$\frac{1}{\sqrt{4(ln2)^2+1}}(-2ln2+1)$　5　-2　6　$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y)dy$

三 计算题（本题共 6 小题，每小题 8 分，共 48 分。应写出必要的演算过程及文字说明，直接写答案零分）

1

解. 切线方程:

$$\begin{cases} (-2)(x-1)+4(y-1)+4(z-1)=0 \\ 2(x-1)-3(y-1)+5(z-1)=0 \end{cases}$$

即:

$$\begin{cases} -x+2y+2z=3 \\ 2x-3y+5z=4 \end{cases}$$

切线方向为 $(-1,2,2)\times(2,-3,5)=(16,9,-1)$,
故法平面为:

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0.$$

2

解. 令 $G(x,y,z)=F(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$, 由隐函数定理，$z_x=-\dfrac{G_x}{G_z}$, 又由复合函数求导法则，$G_x=F_1+2F_2x$, $G_z=F_1+2F_2z$. 故

$$z_x=-\frac{F_1+2F_2x}{F_1+2F_2z}.$$

3

解. 考虑 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$. L 的临界点由下面的方程组决定:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=-2+2\lambda y=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}=2+2\lambda z=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-1=0. \end{cases}$$

由前三个方程得: $x=-\frac{1}{2\lambda}, y=\frac{1}{\lambda}, z=-\frac{1}{\lambda}$. 代入最后一个方程得: $\frac{9}{4}\frac{1}{\lambda^2}=1$. 所以 $\lambda=\pm\frac{3}{2}$. 所以可能的极值点为: $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$, $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$. f 在这两点的取值分别为: -3 和 3. 注意该问题的几何意义是求使平面 $x-2y+2z=C$ 与单位球面相交的 C 的极值，由该几何意义知 C 有一个极大值，一个极小值，所以该条件极值问题的极大值为 3，极小值为 -3. □

4

解.

$$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy=\int_0^\pi\left(\int_{\pi-x}^\pi \frac{\sin x}{x}dy\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x dx$$
$$=2.$$

5

解. 用平行于 xOy 平面的平面截 Ω, 可知:

$$\begin{aligned}V&=\iiint_{\Omega}1dxdydz\\&=\int_1^2(\text{直角边边长为}z\text{的直角三角形的面积})\,dz\\&=\int_1^2\frac{1}{2}z^2dz\\&=\frac{7}{6}\end{aligned}$$

6

解. 记 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-ax\leqslant 0\}$, 则所求面积为:

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy\\&=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy\\&=\sqrt{2}\iint\limits_D dxdy\\&=\sqrt{2}\pi\cdot\frac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

四（本题 4 分）

证明. 对于任意一个方向 (u,v), 极限 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(tu,tv)-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{u^3}{u^2+v^2}=\dfrac{u^3}{u^2+v^2}$ 存在, 故沿 (u,v) 的方向导数存在, 第一个结论得证。特别地, 分别令 $(u,v)=(1,0)$,$(u,v)=(0,1)$ 得 $f_x(0,0)=1$,$f_y(0,0)=0$. 下证 f 在 $(0,0)$ 处不可微，若可微，由定义，必有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. 代入 f,f_x,f_y 表达式，得:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3/(x^2+y^2)-x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$$

又当 (x,y) 沿 $l=\{(x,y)|y=kx\}$ 趋近零时，有:

$$\lim_{l\ni(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\lim_{x\to0}\frac{-k^2x^3}{(1+k^2)^{3/2}|x|^3},$$

该极限当 $k\neq0$ 时显然不存在（左右极限不等），故矛盾，故 f 在 $(0,0)$ 处不可微。 □

2 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1 A　　2 A　　3 D　　4 B　　5 C

二 填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1　(1, 2, 3)　　2　$4f''_{11}+\frac{4}{y}f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22}$　　3　(1, 1, 2)

4　(1, 1, 1)　　5　$dz=(y+\frac{1}{y})dx+(x-\frac{x}{y^2})dy$

三 计算题（本题共 6 小题，每小题 8 分，共 48 分。应写出必要的演算过程及文字说明，直接写答案零分）

1、解 由题意知过 L_1 上的点 $(1,2,3)$　　（1 分）

L_1 的方向向量为 $\vec{s}_1=(1,0,-1)$，L_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=(2,1,1)$，设平面 π 的法向量为

$\vec{n}$，则 $\vec{n}\perp\vec{s}_1$，$\vec{n}\perp\vec{s}_2$ 垂直　（3 分）

故可取

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1,-3,1)\qquad（6 分）$$

于是平面 π 的方程为 $x-3y+z+2=0$　　（8 分）

2、解：$\begin{cases}y^2-u_xv-uv_x=0\\ 2x-u_x+v_x=0\end{cases}$，　　（3 分）

$$u_x=\frac{y^2+2xu}{u+v}；\quad v_x=\frac{y^2-2xv}{u+v}；\qquad（3 分）$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=e^{u+v}\frac{2[x(u-v)+y^2]}{u+v}。\qquad（2 分）$$

3、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{1-e^{xy}}(\sqrt{2-e^{xy}}+1)=-1\cdot2=-2$　　（8 分）

4、解：　由题意，作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(xy+yz+xz-6),\qquad（3 分）$$

解方程组

$$\begin{cases}yz+\lambda(y+z)=0,\\ xz+\lambda(x+z)=0,\\ xy+\lambda(y+x)=0,\end{cases}\qquad（3 分）$$

得 $x=y=z=\sqrt{2}$，这是唯一可能的极值点.因由问题本身可知最大值一定存在，所以最大值就在这个可能的极值点处取得，f 的最大值为 $V=2\sqrt{2}$.　　　　（2 分）

5、

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot e^x\sin y+f_2'\cdot 2x$　　　　（3 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x\cos y\cdot f_1'+e^x\sin y(f_{11}''\cdot e^x\cos y+f_{12}''\cdot 2y)+2x(f_{21}''\cdot e^x\cos y+f_{22}''\cdot 2y)$$

$$=f_{11}''\cdot e^{2x}\sin y\cos y+2f_{12}''\cdot e^x(y\sin y+x\cos y)+4f_{22}''\cdot xy+f_1'\cdot e^x\cos y$$　　（8 分）

6、解 $x^2+y^2=2y\Rightarrow r=2\sin\theta$　　　　（2 分）

$x^2+y^2=4y\Rightarrow r=4\sin\theta$　　　　（2 分）

$y-\sqrt{3}x=0\Rightarrow\theta_2=\dfrac{\pi}{3}$

$x-\sqrt{3}y=0\Rightarrow\theta_1=\dfrac{\pi}{6}$　　　　（2 分）

$\therefore\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\cdot rdr=15(\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{3})$　　　　（2 分）

四、证明题

1、证 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x[y+F(u)+xF'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}]+y[x+xF'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}]$

$=x[y+F(u)-\dfrac{y}{x}F'(u)]+y[x+F'(u)]$

$=xy+xF(u)+xy=z+xy$

2、证 设 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$，则曲面在点（x,y,z）处的一个法向量

$$\vec{n}=(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}})$$

在曲面上任取一点 $M(x_0,y_0,z_0)$，则曲面在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$$

即 $\dfrac{x}{\sqrt{x_0}}+\dfrac{y}{\sqrt{y_0}}+\dfrac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$

化为截距式得

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1$$

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a$$

3 浙江理工大学 2017—2018 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 D　　2 A　　3 C　　4 C　　5 C　　6 B

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1　$(1,2,-3)$　　2　$(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$　　3　$y''-2y'+y=0$

4　$\dfrac{5}{4}$　　5　2　　6　$\dfrac{4}{3}$

三 计算题（本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分）

1 解：可得特征方程 $r^2+2r-3=0$，解得 $r_1=1, r_2=-3$

∵非齐次的通解 = 齐次的通解 + 非齐次的特解，

∵ $y''+2y'-3y=e^{-3x}$

∴ λ 为特征方程的一个根

∴设 $y^*=Axe^{-3x}$

$$y'=Ae^{-3x}-3Axe^{-3x}$$

$$y''=-3Ae^{-3x}-3Ae^{-3x}+9Axe^{-3x}=-6Ae^{-3x}+9Axe^{-3x}$$

$9Axe^{-3x}-6Ae^{-3x}+2(Ae^{-3x}-3Axe^{-3x})-3Axe^{-3x}=e^{-3x}$，解得 $A=-\dfrac{1}{4}$

∴ $y^*=-\dfrac{1}{4}xe^{-3x}$

∴ y 的通解为 $C_1e^{-3x}+C_2e^{x}-\dfrac{1}{4}xe^{-3x}$

2 解：设点 P 为 (x_0,y_0,z_0)

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$$

$$F_x=2x \quad F_y=2y \quad F_Z=2z$$

∴可取 $\vec{n}=(x_0,y_0,z_0)$

又∵ $\vec{n}\,/\!/\,(1,-2,3)$

$$\begin{cases}\dfrac{x_0}{1}=\dfrac{y_0}{-2}=\dfrac{z_0}{3}\\ x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}+z_0^{\ 2}=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=1\\ y_0=-2\\ z_0=3\end{cases} or \begin{cases}x_0=-1\\ y_0=2\\ z_0=-3\end{cases}$$

$\therefore P_1(1,-2,3)$ ，$\vec{n}=(1,-2,3)$

① 得?:$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)+3\cdot(z-3)=0$

即$x-2y+3z-14=0$

(?处填写为π_1)

$P_2(-1,2,-3)$ ，$\vec{n}=(1,-2,3)$

② 得？:$1\cdot(x+1)-2\cdot(y-2)+3\cdot(z+3)=0$

即$x-2y+3+14=0$

(?处填写为π_2)

3、解：法一：方程两边同关于 x 求偏导，z 看作 x 的函数，y 看作常数。

$$2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$$

同理可得：$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{2-z}$

法二：令 $\begin{array}{l}F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z\\F_x=2x,F_y=2y,F_z=2z-4\end{array}$

$$\therefore\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{2-z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{y}{2-z}$$

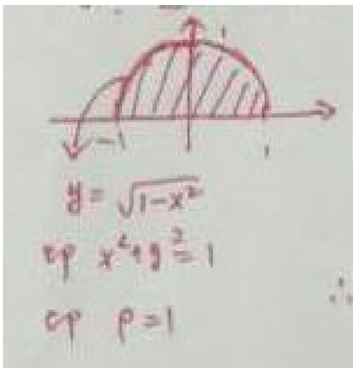
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{x}{2-z})}{\partial y}=\frac{0-x\cdot(-\frac{\partial z}{\partial y})}{(2-z)^2}=\frac{xy}{(2-z)^3}$$

4、解：选用极坐标（$\because\ln(x^2+y^2+1)$无论关于 x 还是 y 都积不出）

①$\ln(x^2+y^2+1)=\ln(\rho^2+1)$

②$dxdy=\rho d\rho d\theta$

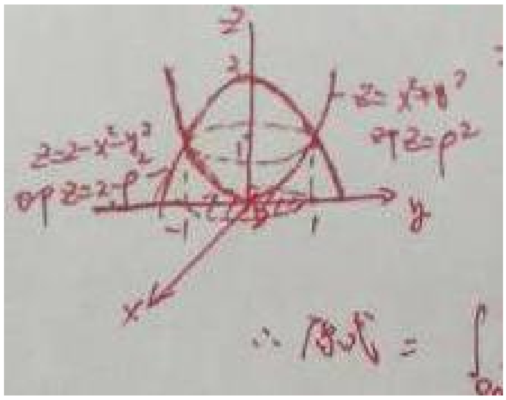
③D,$\begin{cases}0\le\theta\le\pi\\0\le\rho\le1\end{cases}$



$$\therefore\boxed{\begin{aligned}&I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\ln(\rho^2+1)\rho d\rho\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\ln(\rho^2+1)d(\rho^2+1)\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\left[(\rho^2+1)\cdot\ln(\rho^2+1)\Big|_0^1-\int_0^1 1d(\rho^2+1)\right]\\&=\frac{\pi}{2}(2\ln2-1)\end{aligned}}$$

5、解：$\left.\begin{matrix} z=x^2 \rightarrow 绕z轴 \rightarrow z=x^2+y^2 \\ z=2-x^2 \rightarrow 绕z轴 \rightarrow z=2-x^2-y^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=y$面投影区域：$x^2+y^2\le 1$

选用柱面坐标法，$(\sqrt{x^2+y^2}=\rho, dv=\rho d\rho d\theta dz)$



①投影：得 $D_{\rho\theta}:\rho\le 1$即$\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\rho\le 1\end{cases}$

②投影：得 z 从 $z=\rho^2$进，从$z=2-\rho^2$出

$\therefore \rho^2\le z\le 2-\rho^2$

$\therefore$ 原式$=\iint\limits_{D\rho\theta}(\int_{\rho^2}^{2-\rho^2}\rho dz)\rho d\rho dv$

$=\int_{D\rho\theta}\int \rho^2\cdot(2-\rho^2-\rho^2)d\rho d\theta$

$=\int_0^{\partial\pi} d\theta\int_0^1(2\rho^2-2\rho^4)d\rho$

$=2\pi\cdot(\frac{2}{3}-\frac{2}{5})$

$=\frac{8}{15}\pi$

四 应用题（本题满分 6 分）

解：设$L(x,y,z)=8x^2+4yz-16z+600+\lambda(4x^2+y^2+4z^2-16)$

令$\begin{cases} L_x=16x+8x\lambda=0 & \Rightarrow ①x=0；②\lambda=-2 \\ L_y=4z+2\lambda y=0 & \Rightarrow \lambda=\frac{-2z}{y} \\ L_z=4y-16+8\lambda z=0 & \Rightarrow \lambda=\frac{4-y}{2z} \\ L_\lambda=4x^2+y^2+4z^2-16=0 & \end{cases}$

由$\lambda=\frac{-2z}{y}=\frac{4-y}{2z}\Rightarrow 4z^2=y^2-4y$

①$x=0$，$4z^2=y^2-4y$　　代入$4x^2+y^2+4z^2-16=0\Rightarrow y=4, y=-2$

$\Rightarrow z=0, z=\pm\sqrt{3}$　　$\Rightarrow$ 拐点$(0,4,0),(0,-2,\sqrt{3}),(0,-2,-\sqrt{3})$

②$\lambda=-2\Rightarrow z=y, y-4-4z=0$　　$\Rightarrow y=z=-\frac{4}{3}$ ，$x=\pm\frac{4}{3}$

$\Rightarrow$ 拐点$\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right),\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$

$$T_1(0,4,0)=600$$

$$\min:T_2\left(0,-2,+\sqrt{3}\right)=600-24\sqrt{3} \qquad T_4\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)=614.2$$

$$\max:T_3\left(0,-2,-\sqrt{3}\right)=600+24\sqrt{3} \qquad T_5\left(+\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)=614.2$$

（勘误：将 614.2 改为为 $614.\dot{2}$，即循环小数，两个都要改）

五 证明题（本题满分 6 分）

$$(1)\text{解:设}F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\varphi\left(\frac{y}{z}\right)$$

$$F_x=\frac{1}{z} \qquad F_y=-\varphi'\frac{1}{z} \qquad F_z=-\frac{x}{z^2}+\varphi'\frac{y}{z^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{-z}{\varphi' y-x} \qquad \frac{\varphi z}{\varphi y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z\varphi'}{\varphi' y-x}$$

$$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$$

（勘误：将“2”改为“z”）

解(2):在(1)的基础上同时对x求偏导

$$\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial z\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

在(1)的基础上同时对y求偏导

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial z}=\frac{\partial z}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$$

4 浙江理工大学 2016—2017 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 C　2 C　3 D　4 C　5 D　6 D

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 e^2dx+2e^2dy；

2 $\begin{cases}x=-2t+1\\y=t+1\\z=3t+1\end{cases}$ (点不唯一)；

3 $2\sqrt{3}$

4 $\boxed{\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}},\cos\beta=\frac{-4}{\sqrt{21}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{21}}}$

5 $(1,2,2)$

6 $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1

解:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot(-1)+f_2'\cdot ye^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-(f_{11}''\cdot 1+f_{12}''\cdot e^x)+e^x\cdot f_2'+ye^x\cdot(f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot e^x)$$

$$=-f_{11}''+(y-1)e^xf_{12}''+ye^{2x}f_{22}''+e^xf_2'$$

2

解：$I=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)d\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\Theta\int_0^2\rho^2\rho d\rho$

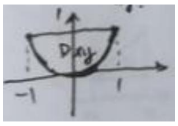
$$=\pi\frac{\rho^4}{4}|_0^2=4\pi$$

3 联立 $z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z^2=2x$,消去 z 得: $(x-1)^2+y^2=1$ 或 $\rho=2\cos\theta$.

围成区域D_{xy}，$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$

所以面积 $A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}S_{D_{xy}}=\sqrt{2}\pi$.

4 作图如下：



$\Longrightarrow\quad I=\int_{-1}^1dx\int_{x^2}^1dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\,dz$

5 即$\frac{x}{z}=\ln z-\ln y$.

令$F(x,y,z)=\frac{x}{z}-lnz\;+\;lny$，得：$F_x=\frac{1}{z},F_y=\frac{1}{y},F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}$.

$\therefore\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{\frac{1}{z}}{\frac{x}{z^2}+\frac{1}{z}}=\frac{z}{x+z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{\frac{1}{y}}{\frac{x}{z^2}+\frac{1}{z}}=\frac{z^2}{xy+yz}$

四 综合题（第 1、2 题每题 7 分，第 3、4 题每题 4 分，共 22 分）

1 设切点$(x_0,y_0,\frac{x_0^2+y_0^2}{2})$.

令$F(x,y,z)=x^2+y^2-2z$，得：$F_x=2x,F_y=2y,F_z=-2$. 取$\vec{n}=(x_0,y_0,-1)$.

$$\begin{cases}6x+2y\cdot\frac{dy}{dx}+2z\cdot\frac{dz}{dx}=0\\4x+2y\cdot\frac{dy}{dx}-4\cdot\frac{dz}{dx}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dy}{dx}=4\\\frac{dz}{dx}=-1\end{cases}\Longrightarrow\vec{T}=(1,-4,1).$$

$\because\vec{n}\cdot\vec{T}=0,\quad\therefore x_0=-1-4y_0.$①

又$\because$切平面方程：$x_0\cdot(x-x_0)+y_0\cdot(y-y_0)-(z-\frac{x_0^2+y_0^2}{2})=0$, 且过$(1,-1,-1)$

$\therefore x_0 - x_0^2 - y_0 - y_0^2 + 1 + \frac{x_0^2+y_0^2}{2} = 0$ ②

由①和②解得：$\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0 = -\frac{13}{17} \\ y_0 = -\frac{1}{17} \end{cases}$

$\therefore$ 切平面方程为：$3x - y - z - 5 = 0$ 或 $13x + y + 7z + 5 = 0$

（拓展题说明：将拓展题部分的“曲线”二字改为“曲面”）

拓展题解答：

根据上面给的思路可解得：$\vec{n} = (x_0, y_0, -1)$, $\vec{T} = (1, 1, 2)$.

由 $\vec{n} \perp \vec{T}$ 且切平面过点 $(1, -1, -1)$ 得：$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -1 \end{cases}$

$\therefore$ 切平面方程为：$x + y - z - 1 = 0$ 或 $3x - y - z - 5 = 0$

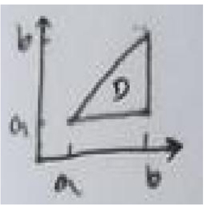
2 利润 $R = px - cx = (p - c_0 + k\ln x) \cdot x = [(1 - ak)p + k\ln M - c_0] \cdot M \cdot e^{-ap}$

令 $\frac{dR}{dp} = (1 - ak) \cdot M \cdot e^{-ap} - aM[(1 - ak)p + k\ln M - c_0] \cdot e^{-ap} = 0$

得唯一驻点：$p = \frac{-ak\ln M + ak - 1 - ac_0}{a(1-ak)}$ 即为所求。

（说明：本题与第 8 套试题 2012-2013 学年的第五道建模题一样。页数为 P29）

3 作图如下： 处理左式：想到交换积分次序 $\Longrightarrow \int_a^b dy \int_y^b f(y)dx$



$$= \int_a^b f(y)(b - y)dy$$

$$= \int_a^b f(x)(b - x)dx$$

4 任意取曲面上一点(x_0, y_0, z_0)

令$F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$..

则 $F_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}, F_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}, F_z = \frac{1}{2\sqrt{z}}$.

法向量：$\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{x_0}}, \frac{1}{\sqrt{y_0}}, \frac{1}{\sqrt{z_0}})$,

点向式写出切平面：$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0$.

即 $\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} - \sqrt{a} = 0$

x轴上截距：$p = \sqrt{ax_0}$，y轴上截距：$q = \sqrt{ay_0}$，z轴上截距：$r = \sqrt{az_0}$，

则$p + q + r = \sqrt{a} \cdot (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$，

得证。

5 浙江理工大学 2015—2016 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一、选择题（本题共 **6** 小题，每小题 **4** 分，满分 **24** 分）

1．A;　　2．C;　　3．A;　　4．D;　　5．A;　　6.A

二、填空题（本题共 **5** 小题，每小题 **4** 分，满分 **20** 分）

1. $x-3y+z+2=0$；　2'

2. $\cancel{\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$；　$\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$

3. 51;

4. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}(dx-dy)$；

5. $\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$　2　-1'

三、解答题（本题共 **7** 小题，每小题 **6** 分，满分 **42** 分）

1. 解　将直线 l 的方程改写成一般式：$\begin{cases} x-y-1=0, \\ y+z-1=0. \end{cases}$ 过 l 的平面束方程为

$$(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0, \text{即} x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$

由向量$(1,\lambda-1,\lambda)$与（1，-1,2）垂直得 $\lambda=-2$. 从而 l_0 的方程为

$$\begin{cases} x-3y-2z+1=0, \\ x-y+2z-1=0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x=2y, \\ z=-\dfrac{1}{2}(y-1). \end{cases}$$

设 l_0 绕 y 轴旋转一周所得的曲面为 S，(x,y,z)为 S 上的任意一点，则改点由 l_0 上的一点 (x_0,y_0,z_0) 绕 y 轴旋而得，于是有关系：$y=y_0$,

$$x^2+z^2=x_0{}^2+z_0{}^2=(2y_0)^2+[-\frac{1}{2}(y_0-1)]^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2,$$

从而得 S 的方程为 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$

2. 解　$u_x=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}, v_x=\dfrac{uy-xv}{x^2+y^2}, u_y=\dfrac{xv-yu}{x^2+y^2}, v_y=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$.（书 90 页例 3.）

3. 解　切线方程：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$,

法平面方程：$(x-1)-(z-1)=0$, 或 $x-z=0$.（书 99 页例 5）

4. 解　设 $D_1=\{0\le x\le 1, 0\le y\le x\}, D_2=\{0\le x\le 1, x\le y\le 1\}$，则

$$\iint_{D} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy=\iint_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy+\iint_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$$

$$=\iint_{D_1} e^{x^2}dxdy+\iint_{D_2} e^{y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy+\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx+\int_0^1 ye^{y^2}dy=e-1.$$

5.解 投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$. 柱面坐标

$\Omega=\{\rho^2\le z\le\sqrt{2-\rho^2},0\le\rho\le 1,0\le\theta\le 2\pi\}$, 于是

$$\iiint_{\Omega} zdv=\iiint_{\Omega} z\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}zdz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho^4)d\rho=\frac{7}{12}\pi.$$

6. 解 $z_x=z_u+z_v, z_y=-2z_u+az_v, z_{xx}=z_{uu}+2z_{uv}+z_{vv}, z_{yy}=4z_{uu}-4az_{uv}+a^2z_{vv}$,

$z_{xy}=-2z_{uu}+(a-2)z_{uv}+az_{vv}$. 将上述结果代入原方程，整理的

$$(10+5a)\ z_{uv}+(6+a-a^2)z_{vv}=0.$$

依题意 a 应满足：$,10+5a\ne 0,6+a-a^2=0$, 解得 $a=3$.

四、应用题（本题 10 分）

解 记雪堆体积为 V，侧面积为 S，则

$$V=\int_0^{h(t)}dz\iint_{D_z}dxdy=\frac{\pi}{4}h^3(t),\text{其中}D_z:x^2+y^2\le\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z],$$

$$S=\iint_{D_0}\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}dxdy=\iint_{D_0}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}dxdy$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{13\pi}{12}h^2(t),\text{其中}D_0:x^2+y^2\le\frac{1}{2}h^2(t),$$

由题意知 $\dfrac{dV}{dt}=-0.9S$, 从而 $\begin{cases}\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{13}{10}\\ h(0)=130\end{cases}\Rightarrow h(t)=-\dfrac{13}{10}t+130$, 令 $h(t)\to 0$, 得 $t=100(h)$,

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需的时间为 100 小时.

五、证明题（本题共 **2** 小题，第 **1** 小题 **4** 分，第 **2** 小题 **6** 分，满分 **10** 分）

1. $\min\{f(x,y)\}\iint\limits_D g(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma \le \max\{f(x,y)\}\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$，

即 $\min\{f(x,y)\} \le \dfrac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)d\sigma} \le \max\{f(x,y)\}$

从而至少存在 (ξ,η)，使得 $f(\xi,\eta)=\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)d\sigma}$.

2.证明 （1）因 $|xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}|\le|\mathrm{xy}|$，所以 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}f(x,y)=0=f(0,0)$，从而 f(x,y)在

（0,0）处连续.因为 f(x,0)=f(0,y)=0,所以 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

（1）当 $(x,y)\ne(0,0)$ 时，$f_x(x,y)=y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

当点 P（x,y）沿射线 $\mathrm{y}=|x|$ 趋于(0,0)时，

$$\lim_{(x,|x|)\to(0,0)}f_x(x,y)=\lim_{x\to0}(|x|\sin\frac{1}{\sqrt{2}|x|}-\frac{|x|^3}{2\sqrt{2}|x|^3}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|})$$

极限不存在，所以 $f_x(x,y)$ 在点(0,0)处不连续.同样可得 $f_y(x,y)$ 在点(0,0)处不连续.

（2）令 $\rho=\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}$，则

$$\left|\frac{\Delta\mathrm{f}-\mathrm{f_x}(x,y)\Delta x-\mathrm{f_y}(x,y)\Delta y}{\rho}\right|=\left|\frac{\Delta\mathrm{x}\Delta\mathrm{y}}{\rho}\sin\frac{1}{\rho}\right|\le|\Delta\mathrm{x}|\xrightarrow{\rho\to0}0,$$

所以 f(x,y)在（0,0）处可微.

6 浙江理工大学 2014—2015 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 C　　2 D　　3 B　　4 B　　5 C　　6 A

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 $\begin{cases}9x+8y-7z-21=0\\5x-3y+3z-9=0\end{cases}$　　2　$x+y+z-3=0$　　3　$4dx+4dy$

4　$\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}},0\right)$　　5　$\frac{\pi}{4}$　　6　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 f\left(r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi\right)r^2dr$

三 计算题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分。应写出必要的演算过程及文字说明，直接写答案零分）

1 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f-\frac{y}{x}f'-\frac{y}{x^2}\varphi'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'+\frac{1}{x}\varphi'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2}{x^3}f''+\frac{2y}{x^3}\varphi'+\frac{y^2}{x^4}\varphi''，\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{x^2}f''-\frac{1}{x^2}\varphi'-\frac{y}{x^3}\varphi''，\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x}f''+\frac{1}{x^2}\varphi''$$

$$\therefore x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

2 解法一：方程组两边关于 x 求导，把 y、z 看作 x 的函数

$\begin{cases}\frac{dz}{dx}=1\cdot f+x\cdot f'\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right)\\F_x\cdot 1+F_y\cdot\frac{dy}{dx}+F_z\cdot\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$ 解得：$\frac{dz}{dx}=\frac{f\cdot F_y+xf'\cdot F_y-xf'\cdot F_x}{F_y+xf'\cdot F_z}$.

解法二：$z=xf\left(x+y\right)\Rightarrow dz=\left(f+xf'\right)dx+xf'dy$　　（f 可微）

$F(x,y,z)=0\Rightarrow F_xdx+F_ydy+F_zdz=0$　　（F 可微）

解得：$\frac{dz}{dx}=\frac{f\cdot F_y+xf'\cdot F_y-xf'\cdot F_x}{F_y+xf'\cdot F_z}$.

3 解：$\vec{n}=\left(4,6,2\right)\Rightarrow\vec{e}_{\vec{n}}=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

$$\nabla u\left(1,1,1\right)=\left(\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}},\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}},-\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right)\Bigg|_{(1,1,1)}=\left(\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{8}{\sqrt{14}},-\sqrt{14}\right)$$

$$\therefore\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big|_{(1,1,1)}=\nabla u\left(1,1,1\right)\cdot\vec{e}_{\vec{n}}=\frac{11}{7}.$$

4 书本 P146，例 4　　$V=\frac{16}{3}R^3$.

5 解：$\iint_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy\overset{\text{极坐标}}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{\rho}{1+\rho^2}d\rho=\frac{\ln 2}{2}$.

6 解：原式 $\overset{\text{截面法}}{=}\int_1^2 dz\iint_{D_z}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdy=\int_1^2\left[\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\rho^2\cdot\rho d\rho\right]dz+\int_1^2 z^2\cdot S_{D_z}dz$

$$=\int_1^2 \frac{\pi}{2} z^2 dz+\int_1^2 \pi z^3 dz=\frac{59}{12}\pi .$$

四 数学建模题（8 分）

（1）解：令$\begin{cases} R_x = 14-8y-4x=0 \\ R_y = 32-8x-20y=0 \end{cases}$解得唯一驻点：$\left(\frac{3}{2},1\right)$

$$R_{xx}=-4, R_{xy}=-8, R_{yy}=-20 \Rightarrow AC-B^2>0, A<0$$

所以$\left(\frac{3}{2},1\right)$为极大值点，也是最大值点，即电台广告 1.5 万元，报纸广告 1 万元。

（2）构造$L(x,y,\lambda)=15+14x+32y-8xy-2x^2-10y^2+\lambda(x+y-15)$

令$\begin{cases} L_x = 14-8y-4x+\lambda \\ L_y = 32-8x-20y+\lambda \\ L_\lambda = x+y-1.5=0 \end{cases}$ 解得唯一驻点：$\left(0,\frac{3}{2}\right)$即为所求，即电台广告 0 万元，报纸广告 1.5 万元。

五 证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，共 8 分）

（1）证：设$F(x,y,z)=xy-xf(z)-yg(z)$

$$F_x=y-f(z), F_y=x-g(z), F_z=-xf'-yg' \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{y-f(z)}{xf'+yg'}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{x-g(z)}{xf'+yg'}$$

$$\therefore \left[x-g(z)\right]\frac{\partial z}{\partial x}=\left[y-f(z)\right]\frac{\partial z}{\partial y}.$$

（2）证：左$=\int_0^a f(x)dx\cdot\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(x)dx\cdot\int_0^a f(y)dy=\int_0^a\int_0^a f(x)f(y)dxdy$

$$=\int_0^a dx\int_x^a f(x)f(y)dy+\int_0^a dy\int_y^a f(x)f(y)dx=\int_0^a\left[f(x)\int_x^a f(y)dy\right]dx+\int_0^a\left[f(y)\int_y^a f(x)dx\right]dy$$

=右.

7 浙江理工大学 2013—2014 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

（说明：本套试卷解答题及以后的题目解析有两个版本的答案）

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 B　　2 A　　3 D　　4 B　　5 C　　6 C

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 $(\pm1,2,2)$；　　2 $(1,1,2)$；　　3 $\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx$；

4　$4dx-2dy$；　　　　　5　$f(x+t)-f(x-t)$；　　　　　6　0

三 计算题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分。应写出必要的演算过程及文字说明，直接写答案零分）

1 版本一：解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot(-1)+f_2'\cdot ye^x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\left(f_{11}''\cdot 1+f_{12}''\cdot e^x\right)+f_2'\cdot e^x+ye^x\left(f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot e^x\right)$$
$$=-f_{11}''+(y-1)e^x f_{12}''+ye^{2x}f_{22}''+f_2'\cdot e^x$$

版本二：解：设 $u=y-x,v=ye^x$， 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-f_u{}'+ye^x f_v{}'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-f_u{}'+ye^x f_v{}'\right)$$
$$=-f_{uu}''-e^x f_{uv}''+ye^x(f_{vu}''+e^x f_{vv}'')+e^x f_v{}'$$
$$=-f_{uu}''+e^x\left(y-1\right)f_{uv}''+ye^{2x}f_{vv}''+e^x f_v{}'$$

2 版本一：解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3$，则 $F_x=2x,F_y=2y,F_z=2z$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{y}{z},\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)}=-1,\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)}=-1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1,1)}=\frac{x}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)}=-1$$

版本二：解：方程两边对 x 变量求偏导，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$；对 y 变量求偏导，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{x}{z})=\frac{xz_y}{z^2}=-\frac{xy}{z^3}$，故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1,1)}=-1$.

3 版本一：解：

$$gradu(1,0,1)=\left(\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}},\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)\Bigg|_{(1,0,1)}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{e}_{\overrightarrow{AB}}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{AB}}\Big|_{(1,0,1)}=gradu(1,0,1)\cdot\vec{e}_{\overrightarrow{AB}}=\frac{1}{2}$$

版本二：解：函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 A（1，0，1）处可微，且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_{(1,0,1)}=0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}$$

而 $\vec{l}=\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, 所以 $\vec{l}^\circ=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, 故在 A 点沿 $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$ 方向导数为：

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_A=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A\cdot\cos\gamma=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+0\cdot(-\frac{2}{3})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

4 版本一：解：$I\overset{\text{轮换对称性}}{=}\iint_D y^2dxdy=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy\overset{\text{极坐标}}{=}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^2\cdot\rho d\rho=4\pi$

版本二：$D:\ 0\le\theta\le 2\pi\quad 0\le r\le 2$，

$$\therefore\ \iint_D x^2dxdy=\iint_D r^3\cos^2\theta drd\theta=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^2 r^3dr=4\pi$$

5 版本一：解：$I=\iiint_\Omega(x^2+y^2)dV\overset{\text{截面法}}{=}\int_1^2\left(\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^2\cdot\rho d\rho\right)dz=\frac{14}{3}\pi$

版本二：$I\overset{\text{柱面坐标}}{=}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}dr\int_1^2 r^3dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{2}}^2dr\int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^3dz=\frac{14}{3}\pi$

6 版本一：解：$I=\iiint_\Omega\frac{dV}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$

版本二：$I=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1++x+y+z)^3}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1dx\int_0^{1-x}[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}]dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4})dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$$

四 应用题（8 分）

版本一：

（1）z 在点 $M(x,y)$ 处梯度方向 gradz=$(-4x,-2y)$ 处增长率最大，最大增长率为

$|\text{grad } z|_M=2\sqrt{4x^2+y^2}$

（2）若记 $f(x,y)=4x^2+y^2$，则题意要求 $f(x,y)$ 在条件 $2x^2+y^2=1000$ 约束下的最大

值，为此做拉格朗日函数

$$F(x,y)=4x^2+y^2+\lambda(2x^2+y^2-1000)$$

$$\begin{cases} F_x=8x+4\lambda x=0 \\ F_y=2y+2\lambda y=0 \\ 2x^2+y^2=1000 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=10\sqrt{10} \end{cases} \begin{cases} x_2=0 \\ y_2=-10\sqrt{10} \end{cases} \begin{cases} x_3=10\sqrt{5} \\ y_3=0 \end{cases} \begin{cases} x_4=-10\sqrt{5} \\ y_4=0 \end{cases}$$

$F(x_1,y_1)=F(x_2,y_2)=1000$，$F(x_3,y_3)=F(x_4,y_4)=2000$，故所求点为$(\pm10\sqrt{5},0)$

版本二：

解：（1）函数沿梯度方向(-4x,-2y)增长率最大，最大增长率为梯度的模 $2\sqrt{4x^2+y^2}$.

(2) 构造 $L(x,y,\lambda)=4x^2+y^2+\lambda(2x^2+y^2-1000)$

$$\begin{cases} L_x=8x+4\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_\lambda=2x^2+y^2-1000=0 \end{cases} \quad 解得 \begin{matrix} (0,\pm10\sqrt{10})\to L=1000 \\ (\pm10\sqrt{5},0)\to L=2000 \quad \surd \end{matrix}$$

所以该点为$(\pm10\sqrt{5},0)$

五 证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，共 8 分）

（1）

版本一：

证：$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{y}{x^2+y^2}\cdot1-\frac{x}{x^2+y^2}\cdot1=\frac{y-x}{x^2+y^2}=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{y}{x^2+y^2}\cdot1-\frac{x}{x^2+y^2}\cdot(-1)=\frac{y+x}{x^2+y^2}=\frac{u}{u^2+v^2}$$

$$\therefore\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$$

版本二：

（1）$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot1+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot1=\frac{y-x}{x^2+y^2}=-\frac{v}{u^2+v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot 1+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot(-1)=\frac{y+x}{x^2+y^2}=\frac{u}{u^2+v^2}$$

所以，$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$ 等式成立。

（2）两个答案给的解法一模一样，故在此只选择一个保留。

证：$\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy \overset{\text{交换积分次序}}{=} \int_a^b dy\int_y^b f(y)dx=\int_a^b f(y)(b-y)dy=\int_a^b f(x)(b-x)dx$

8 浙江理工大学 2012—2013 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1 B; 2 B ; 3 C; 4 D; 5 D; 6 A.

二 填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1 $2\sqrt{3}$； **2** $\frac{1}{3};\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$； **3** $z+xy$； **4** $-\frac{1}{2}$； **5** 2； **6** $\frac{64}{3}\pi$.

三 计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1 $du=f_x dx+f_z dz$ ……(2 分)，

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ ……(3 分)，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1-y\varphi'},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi}{1-y\varphi'}$ ……(5 分)

$du=\left(f_x+\frac{f_z}{1-y\varphi'}\right)dx+\frac{f_z\cdot\varphi'}{1-y\varphi'}dy$ ……(6 分)

2 $\frac{\partial z}{\partial y}=x^4\cdot f_1'+x^2\cdot f_2'$ ……(2 分)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=4x^3\cdot f_1'+2x\cdot f_2'+x^4\cdot y\cdot f_{11}''-y\cdot f_{22}''$ ……(6 分)

3 $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2\theta\rho d\rho d\theta=\frac{3}{64}\pi^2$ ……(6 分)

4 在等式两边同时在 D 上取二重积分，即

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D xydxdy-\iint\limits_D\left(\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right)dxdy$ ……(3 分)

因此，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\dfrac{1}{8}$ ………（5 分）

所以，$f(x,y)=xy+\dfrac{1}{8}$． ………(6 分)

5 旋转曲面的方程为：$y^2+z^2=2x$，……(2 分)

$\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dv=\int_0^8 dx\iint\limits_D (y^2+z^2)d\sigma$ D: $y^2+z^2\le 2x$，……(4 分)

$=\int_0^8 dx\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2x}}\rho^3 d\rho=\dfrac{1024}{3}\pi$ ……(6 分)

四 综合题（本题满分 8 分）

解：设切平面的切点为$\left(x_0,y_0,\dfrac{x_0{}^2+y_0{}^2}{2}\right)$……（1 分），则$\vec{n}=(x_0,y_0,-1)$……（2 分），

有切平面方程为：$x_0x+y_0y-z-\dfrac{x_0{}^2+y_0{}^2}{2}=0$；………（3 分）

曲线方程组两边关于 x 求导，有$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{5x^4-3x}{z+2}$，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{6x+5x^4z}{2y+yz}$…（4 分）

于是有切向量$\vec{T}=(1,1,2)$ ；……（5 分）

因为$\vec{n}\cdot\vec{T}=0$，即$x_0+y_0-2=0$………（6 分）

且 $(1,-1,-1)$ 位于切平面上，即 $x_0-y_0+1-\dfrac{x_0{}^2+y_0{}^2}{2}=0$，解得 $x_0=1,y_0=1$ 或 $x_0=3,y_0=-1$………（7 分）

因此所求切平面方程为：$x+y-z-1=0$ 或 $3x-y-z-5=0$………（8 分）

五 建模题（本题满分 7 分）

见书本 P117，例 9.

六 证明题（本题共 2 小题，第 1 小题 4 分，第 2 小题 3 分，满分 7 分）

（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-a\dfrac{\partial z}{\partial u}+a\dfrac{\partial z}{\partial v}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$

$\Rightarrow a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$，因为$a\ne 0$，所以$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$…………………（4 分）

(2) $$\int_a^b dx\int_a^x \left(x-y\right)^{n-2} f\left(y\right)dy=\int_a^b dy\int_y^b \left(x-y\right)^{n-2} f\left(y\right)dx$$
$$=\frac{1}{n-1}\int_a^b \left(b-y\right)^{n-1} f\left(y\right)dy$$ …………（3 分）

9 浙江理工大学 2011—2012 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1 B; 2．C；3．A; 4．D; 5．B． 6. A.

二 填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$； **2** -5； **3** $\frac{1}{3};\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$

4 $-2or3,3or-2$； **5** $\int_1^2 dy\int_y^{y^2} f(x,y)dx$； **6** $\frac{1}{3}$

三 计算题（本题共 5 小题，前 4 小题每题 6 分，第五题 12 分，满分 36 分）

1 $u_x=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$,……(1 分)， $u_y=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$，……(2 分)， $u_z=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$，……(3 分)

$du=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}dx+\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln xdy-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln xdz$．……(6 分)

2 $z_x=2xf_1'+yf_2'+2xg'$………(2 分)

$z_{xy}=2x\left[f_{11}''(-2y)+f_{12}''x\right]+\left[f_{21}''(-2y)+f_{22}''x\right]y+f_2'+2xg''2y$ ………(4 分)

$=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'+4xyg''$………(6 分)

3 在等式两边同时在 D 上取二重积分，即

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint\limits_D (\frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)dxdy)dxdy$$ ……(3 分)

因此，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{9}$ ………（5 分）

所以，$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{8}{9\pi}-\frac{2}{3}$． ………(6 分)

4 旋转曲面的方程为：$y^2+z^2=2x$，……(2 分)

$\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)dv=\int_0^8 dx\iint\limits_D (y^2+z^2)d\sigma$ D: $y^2+z^2\le 2x$，……(4 分)

$$=\int_0^8 dx\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{2x}} \rho^3 d\rho = 336\pi$$ ……(6 分)

5 （1）消去 z 得 $2x^2+2y^2+x+y-2=0.$ …………………………(1 分)

故所求投影直线为 $\begin{cases}2x^2+2y^2+x+y-2=0\\ z=0\end{cases}$ ……………………（3 分）

（2）在 $(-1,-1,2)$ 处切向量为 $\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2x & 2y & -1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}_{(-1,-1,2)}=(-3,3,0)$ …………………（2 分）

则切线方程为：$\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{0}$ …………………（3 分）

法平面方程为：$x-y=0$ …………………（4 分）

（3）原点到 Γ 上任一点 (x,y,z) 的距离为: $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ …………………（1 分）

引入拉格朗日函数 $L=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+2z-2)$ ………（2 分）

解方程组 $\begin{cases}L_x=2x+2\lambda x+\mu=0\\ L_y=2y+2\lambda y+\mu=0\\ L_z=2z-\lambda+2\mu=0\\ x^2+y^2-z=0\\ x+y+2z-2=0\end{cases}$ …………………（3 分）

得 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{1}{2}\\ z=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1\\ y=-1\\ z=2\end{cases}$ …………………（4 分）

代入目标函数，比较得最大值与最小值分别为 $\sqrt{6}$ 和 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. …………………（5 分）

四（本题满分 6 分）解：（1）点（0，0）连续。…………2 分

（2）$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，

$f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta x)-f(0,0)}{\Delta y}=0$ ，…………4 分

但不可微。 …………6 分

五（1）令 $F(x,y,z)=f(x-ay,z-by)$，则

$F'_x(x,y,z)=f'_1, F'_y(x,y,z)=-af'_1-bf'_2, F'_z(x,y,z)=f'_2$ ……………………2 分

由于 $aF'_x+F'_y+bF'_z=0$， 因此曲面的切平面恒与方向数为 $(l,m,n)=(a,1,b)$ 的直线相平行。……………………4 分

（2）$\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2=\iint\limits_D f(x)f(y)dxdy$ （D: $0\le x\le a, 0\le y\le a$） ………1 分

$$=\iint\limits_{D_1} f(x)f(y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x)f(y)dxdy$$ ………3 分

$$=2\iint\limits_{D_1} f(x)f(y)dxdy$$ …………4 分

(D_1: $0\le x\le a, x\le y\le a$, D_2: $0\le y\le a, y\le x\le a$)

10 浙江理工大学 2010-2011 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题（本题共 7 小题，每小题 4 分，共 28 分）

1 D　2 B　3 A　4 C　5 C　6 C　7 D

二 填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1 $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy$；　2 $\frac{1}{2}$；　3 $\frac{1}{3}$；　4 -5；　5 $\frac{\pi}{3}$

三 计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分。应写出必要的演算过程及文字说明，直接写答案零分）

1 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6y$

2 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{xz-z}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}(xz-x)-z\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)}{(xz-x)^2}=\frac{2z(z-1)-z^3}{x^2(z-1)^3}$

3 $\boxed{\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\ln\left(1+\rho^2\right)\rho d\rho=\frac{\pi}{4}[2\ln 2-1]}$

4 $\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf'_1+x^2f'_2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4x^2y^2f''_{11}+4x^3yf''_{12}+x^4f''_{22}+2xf'_1}$

5 $\boxed{\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\cdot\rho d\rho=\frac{32}{9}}$

四（本题 8 分）

（1）因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$，所以连续。

（2）$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，同理 $f_y'(0,0)=0$

$\Delta z=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，若可微，

$\Delta z=f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y+o(\rho)$，而

$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta z-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\rho}=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$不存在，所以不可微。

五（本题 6 分）

解 方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两端分别关于 x 和 y 求偏导数，得

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad ①$$

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0. \qquad ②$$

令$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x-3y=0,\\ -3x+10y-z=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3y,\\ z=y.\end{cases}$

将上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，可得

$$\begin{cases}x=9,\\ y=3,\\ z=3\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-9,\\ y=-3,\\ z=-3.\end{cases}$$

对①两端分别关于 x 和 y 求偏导数，有 $2-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$，

$$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$$

对②两端关于 y 求偏导数，有 $20-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，所以

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(9,3)}=\frac{1}{6},B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(9,3)}=-\frac{1}{2},C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(9,3)}=\frac{5}{3},$$

故 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$. 又 $A=\dfrac{1}{6}>0$，从而点 $(9,3)$ 是函数 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$.

类似地，由

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(-9,-3)}=-\frac{1}{6},B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(-9,-3)}=\frac{1}{2},C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(-9,-3)}=-\frac{5}{3},$$

可知 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$. 又 $A=-\dfrac{1}{6}<0$，所以点 $(-9,-3)$ 是函数 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为

$$z(-9,-3)=-3.$$

六 证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，共 8 分）

1 Q $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x\Rightarrow\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z$

2 Q $z=f\left(\xi,\eta\right),\xi=x^2-y^2,\eta=2xy$，

$\therefore\frac{\partial f}{\partial x}=2x\frac{\partial f}{\partial\xi}+2y\frac{\partial f}{\partial\eta},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+8xy\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial f}{\partial\xi}$

同理$\frac{\partial f}{\partial y}=-2y\frac{\partial f}{\partial\xi}+2x\frac{\partial f}{\partial\eta},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}-8xy\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial f}{\partial\xi}$，所以

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

11 浙江理工大学 2009-2010 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题（本题共 7 小题，每小题 4 分，共 28 分）

1 D　2 C　3 D　4 C　5 A　6 A　7 C

二 填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1 $-e^{\cos xy}\sin xy\left(ydx+xdy\right)$　　2 $\left(0,0\right)$　　3 $3x+z-1=0$

4 $\frac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$　　5 -4

三 计算题（本题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分。应写出必要的演算过程及文字说明，直接写答案零分）

1 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xyf_{11}''+2\left(x^2+y^2\right)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$

2 $I=\int_{-6}^{4}dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}\left(x+y\right)dx-\int_{-4}^{2}dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y}\left(x+y\right)dx=\frac{8156}{15}$

3 $$\boxed{I=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2dz\iint\limits_{D_{z_1}}dxdy+\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2dz\iint\limits_{D_{z_2}}dxdy=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2\pi\left(2Rz-z^2\right)dz+\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2\pi\left(R^2-z^2\right)dz=\frac{59}{480}\pi R^5}$$

四（9 分）

添加辅助线L'： $y=0$，x从π到 0

因为$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\left[2y\sin\left(x+y^2\right)+3\right]-\left[2y\sin\left(x+y^2\right)+2\right]=1$

由格林公式，则原式

$$= \int_{L+L'} - \int_{L'} = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy - \int_{\pi}^{0} \cos x dx = -\iint_D dxdy - 0 = -\int_0^{\pi} \sin x dx = -2$$

五（9 分）

设 $S': \begin{cases} z = h \\ x^2 + y^2 \le h^2 \end{cases}$ 取上侧，运用高斯公式，

$$I = \iint_{S+S'} \left(y^2 - z\right) dydz + \left(z^2 - x\right) dzdx + \left(x^2 - y\right) dxdy - \iint_{S'} \left(y^2 - z\right) dydz + \left(z^2 - x\right) dzdx + \left(x^2 - y\right) dxdy$$

$$= \iiint_{\Omega} (0+0+0)\, dv - \left(\iint_{D_{xy}} \left(x^2 - y\right) dxdy \right) = -\iint_{D_{xy}} x^2 dxdy = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^h (\rho \cos\theta)^2 \rho d\rho$$

$$= -\frac{\pi}{4} h^4$$

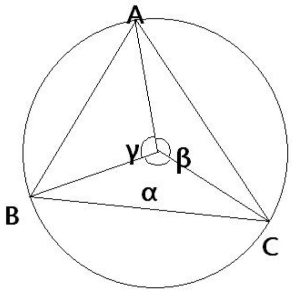
六 证明题（本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f'(r)\dfrac{x}{r}$， $\dfrac{\partial u}{\partial y} = f'(r)\dfrac{y}{r}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{y^2}{r^3} \right) + \left(f''(r)\frac{y^2}{r^2} + f'(r)\frac{x^2}{r^3} \right) = f''(r) + f'(r)\frac{1}{r}$$

$$\iint_{s^2+t^2 \le x^2+y^2} \frac{1}{1+s^2+t^2} dsdt = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \frac{1}{1+\rho^2} \rho d\rho = \pi \ln\left(1+r^2\right)$$

2



$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi, 0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ ，半径为 R

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} R^2 \left(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \right)$$

构造拉格朗日函数：$L(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \dfrac{1}{2} R^2 \left(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \right) + \lambda \left(\alpha + \beta + \gamma - 2\pi \right)$

由 $\begin{cases} L'_\alpha = 0 \\ L'_\beta = 0 \\ L'_\gamma = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$ 可得唯一驻点：$\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{2}{3}\pi$ ，即为所求。

12 浙江理工大学 2006-2007 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1 $e^{\sin xy}\cdot\cos xy\cdot\left(ydx+xdy\right)$； 2 $2z$； 3 $2x+y-4=0$； 4 -18π

二 选择题（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

1 D 2 B 3 D 4 B 5 C

三 1 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\left[f_{11}''\cdot 2y+f_{12}''\cdot x\right]+\left[f_{21}''\cdot 2y+f_{22}''\cdot x\right]y+f_2'$$

$$=4xyf_{11}''+2\left(x^2+y^2\right)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$$

2 由 $x^2+y^2+z^2-xyz=0$ 确定 $z=z\left(x,y\right)$，方程两边同时对 x,y 求偏导，解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-2x}{2z-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-2y}{2z-xy}.$$

四 1 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=\int_0^2 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^2 ye^{-y^2}dy=\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right).$

2 $\iint\limits_D ydxdy=\int_{-2}^0 dx\int_0^2 ydy-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho=4-\dfrac{\pi}{2}.$

3 取半球体的对称轴为 z 轴，原点取在球心，又设球半径为 a，则半径体所占的空间闭区域：$\Omega=\left\{\left(x,y,z\right):x^2+y^2+z^2\le a^2,z\ge 0\right\}$，显然，质心在 z 轴上，故 $\bar{x}=\bar{y}=0$，

$\bar{z}=\dfrac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}z\rho dv=\dfrac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}zdv=\dfrac{2}{3}\pi a^3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^3dr=\dfrac{3}{8}a$，故质心为 $\left(0,0,\dfrac{3}{8}a\right)$。

五 设水箱的长、宽、高分别为 x,y,z，则表面积为 $S=xy+2\left(x+y\right)z$ 且 $xyz=a^3$，知

$S=xy+2a^3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right),x>0,y>0$，令 $\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial x}=y-\dfrac{2a^3}{x^2}=0\\ \dfrac{\partial S}{\partial y}=x-\dfrac{2a^3}{y^2}=0\end{cases}$，解得唯一驻点 $\left(\sqrt[3]{2}a,\sqrt[3]{2}a\right)$。

根据问题的实际意义，$S\left(x,y\right)$ 的最小值一定在区域 D 的内部取到，而函数在 D 内只有唯一驻点，故 $x=y=\sqrt[3]{2}a$ 也为最小值点，从而 $x=y=\sqrt[3]{2}a\left(m\right),z=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}a\left(m\right)$ 时，表面积最小。

六

$P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-4x^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},(x,y)\neq(0,0)$，作足够小的椭圆

$C:\begin{cases}x=\dfrac{\delta}{2}\cos\theta\\ y=\delta\sin\theta\end{cases},\theta\in[0,2\pi]$，取逆时针方向。由格林公式 $\int_{L-C}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0$，即得

$$I=\int_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_C\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\delta^2}{\delta^2}d\theta=\pi$$

13 浙江理工大学 2005-2006 学年第 2 学期《高等数学 A2》期中答案

一 选择题（本题共 7 小题，每小题 4 分，共 28 分）

1 C　2 A　3 A　4 B　5 C　6 C　7 D

二 填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1 (0, 0)　　2 $x+2y-4=0$　　3 2

4 $\iint\limits_D\sqrt{1+x^2+y^2}d\sigma$　　5 2π

三（本题满分 6 分）

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot y+g'\cdot 2x$，………………2 分

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot(-2y)+f_2'\cdot x+g'\cdot 2y$，……………………4 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'+4xyg''$。……………6 分

四 计算下列二重积分（每小题 6 分，满分 12 分）

1 $I=\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)dxdy+\iint\limits_{D_2}-\cos(x+y)dxdy$ ………………..2 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dy$ ……………4 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1+\cos x)dx=\pi-2$. ……………6 分

2 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\ln(1+r^2)dr$ ……………………2 分

$=\dfrac{\pi}{4}\int_0^1\ln(1+r^2)d(r^2+1)$ ……………………4 分

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\int_0^1 2rdr=\frac{\pi}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}.$$ …………………………6 分

五 计算下列三重积分（每小题 7 分，满分 14 分）

1 $$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\cdot zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_0^{2-\rho\sin\theta}\rho\cdot z\rho dz$$ ………………………4 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{1}{2}\rho^2(2-\rho\sin\theta)^2d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{16}{3}-8\sin\theta+\frac{16}{5}\sin\theta)d\theta$$ …………..6 分

$$=\frac{208}{15}\pi.$$ ………………………..7 分

2 Ω 关于 xoz 平面对称，y 关于 y 是奇函数，知 $\iiint\limits_{\Omega}ydv=0$，故

$$\iiint\limits_{\Omega}(y+z)dv=\iiint\limits_{\Omega}ydv+\iiint\limits_{\Omega}zdv=\iiint\limits_{\Omega}zdv$$ …………………………2 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$$ ……………….6 分

$$=\frac{\pi}{8}.$$ ………………………………………7 分

六（本题满分 6 分）

$D:(x-1)^2+y^2\le 1$， ………2 分

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}d\sigma=\sqrt{2}\iint\limits_{D}d\sigma$$ ……..4 分

$$=\sqrt{2}\pi$$ ………………………………6 分

七（本题满分 8 分）

$$I=\oint_L e^x(1-\cos y)dx-e^x(y-\sin y)dy$$

$$=\oint_L e^x(1-\cos y)dx+e^x\sin ydy+\oint_L -e^x ydy$$ ………………………2 分

$$=\oint_L -e^x ydy=-\int_{\overline{OA}}e^x ydy-\int_{\overline{AB}}e^x ydy-\int_{\overline{BO}}e^x ydy$$ ……………..4 分

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^x\sqrt{\sin x}d(\sqrt{\sin x})-\int_{\frac{\pi}{4}}^0 e^x\sqrt{\cos x}d(\sqrt{\cos x})-\int_1^0 ydy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^x\cos xdx+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^0 e^x\sin xdx-\int_1^0 ydy=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{\pi}{4}}.$$ ………..8 分

八（本题满分 6 分）

因为 $$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(y)}dy=\iint\limits_{D}\frac{f(x)}{f(y)}dxdy$$ …………2 分

$$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx = \int_a^b f(y)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dy = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}dxdy \qquad \text{..........4 分}$$

所以 $2\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx = \iint_D (\frac{f(y)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(y)})dxdy \geq 2\iint_D dxdy = 2(b-a)^2$，

因此 $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2$. ……6 分