线性代数B

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 下）

学校：________________________

专业：________________________

班级：________________________

姓名：________________________

学号：________________________

（此试卷为2022年第二版 第1次发行）

目 录

2022 年所有试卷版本见**试卷版**的尾页。如需资料获取请添加下方的 QQ 群获取。

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈

试卷版次：2022 年 4 月 30 日 第二版 第 1 次发行

本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380

cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102

cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

9 浙江理工大学 2015—2016 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 B 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

A C A B B A

二、填空题（本题共 6 题，每小题 4 分，共 24 分）

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$　　2. $a_1a_2\cdots a_n(a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$　　3. n-1　　4. -162　　5. $\begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

6. $\frac{8}{3}$

三、计算题

1．解：$(\frac{1}{3}A)^{-1}-A^*=3A^{-1}-|A|A^{-1}=3A^{-1}-(-3)A^{-1}=6A^{-1}$，　　……．(3 分)

则 $\left|(\frac{1}{3}A)^{-1}-A^*\right|=|6A^{-1}|=6^3\cdot\frac{1}{|A|}=-72$。　　……．(6 分)

2．解：$(A\ \ E)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$，

所以，$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$。　　……．(7 分)

3．解：（1）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

则 $R(A)=3$。　　……．(5 分)

（2）记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$。将 A 再化为行最简形矩阵，

$A\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{16}{9} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。　　……．(9 分)

所以，α_1，α_2，α_4是A的列向量组的一个极大线性无关组，且

$\alpha_3=\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2$，$\alpha_5=\frac{16}{9}\alpha_1-\frac{1}{9}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_4$。 ....（11 分）

4. 解：系数行列式为$\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$。

(1) 因此，当$\lambda\neq1$，$\lambda\neq10$时，方程组有唯一解。 ....（4 分）

(2) 当$\lambda=10$时，对增广矩阵作初等行变换，

$$\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2 & 1\\ 2 & -5 & -4 & 2\\ -2 & -4 & -5 & -11\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{11}{2}\\ 0 & -9 & -9 & -9\\ 0 & 0 & 0 & 27\end{pmatrix},$$

所以，方程组无解。 ....（6 分）

(3) 当$\lambda=1$时，对增广矩阵作初等行变换，

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -4 & 2\\ -2 & -4 & 4 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

则其齐次线性方程组的基础解系为$\xi_1=\left(-2,1,0\right)^T$，$\xi_2=(2,0,1)^T$。

而非齐次方程组的一个特解是$\eta=(1,0,0)^T$，所以，通解为

$X=\eta+c_1\xi_1+c_2\xi_2$，其中，c_1，c_2为任意常数。 ....（10 分）

5. 解：A的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -4 & 0\\ 1 & -1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda),$$

所以A的特征值为$\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=2$. ....（4 分）

当$\lambda_{1,2}=1$时，解特征方程组$(A-E)X=0$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}2 & -4 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得$\begin{cases}x_1=-\ x_3,\\ x_2=-\frac{1}{2}x_3.\end{cases}$令$x_3=2$，得属于$\lambda_{1,2}=1$的线性无关的特征向量是$\xi_1=(-2,-1,2)^T$，全部

特征向量为$k_1\xi_1, k_1 \neq 0$. ....（7 分）

当$\lambda_3 = 2$时，解特征方程组$(A-2E)X = 0$.

$$A-2E = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$令$x_3 = 1$，得属于$\lambda_3 = 2$的线性无关的特征向量是$\xi_2 = (0,0,1)^T$，全部特征向量为$k_2\xi_2, k_2 \neq 0$. ....（10 分）

四、 证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1. 证明：显然$\beta_1 + \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta_2 + \beta_4$，即

$$\beta_1 + (-1)\beta_2 + \beta_3 + (-1)\beta_4 = 0,$$

所以$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$必线性相关。 ....（4 分）

2. 证明：由$AB = E$，得$R(AB) = n$. 又$n \geq R(B) \geq R(AB) = n$，得$R(B) = n$，所以方程组$BX = O$只有零解. ....（4 分）

10 浙江理工大学 2013-2014 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 B 卷

一、 选择题：每小题 4 分，共 20 分。

1、 C 2、 C 3、D 4、B 5、A

二、填空题：每小题 5 分，共 25 分。

1、2 **2**、 -1 3、$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ 4、3 **5**、 6 10 15

三、计算题：每小题 7 分，共 21 分。

1、

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n+a & n+a & \cdots & n+a \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{vmatrix} = (n+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{vmatrix}$$

$$=(n+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a & \cdots & 0\\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a\end{vmatrix}=(n+a)a^{n-1}\quad (7 分)$$

2、解：$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 5\\ 2 & 0 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (4 分)

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是它的一个极大线性无关组, (3 分)

3 、 $\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ -2 & -2 & 2\\ -2 & 2 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow{c}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ (5 分) 所以 $X=BA^{-1}=$

$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ (2 分)

四、解：$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 7\\ 3 & 7 & -6 & x\\ 5 & 8 & 1 & 15\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 4 & -7 & x-7\\ 0 & -5 & 15 & 21-2x\\ 0 & -2 & 6 & 8-x\end{bmatrix}$

β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则$\dfrac{21-2x}{8-x}=\dfrac{-5}{-2}$，所以$x=-2$ (5 分)

$x=-2$时，$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & 5 & 11\\ 0 & 1 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，所以$\beta=11\alpha_1-5\alpha_2$ (4 分)

五、解：由矩阵的特征值之和等于矩阵的迹，所以另一个特征值为 0。(2 分)

$\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & x\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$所以$x=4$ (2 分)

$(A-E)X=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 4\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}X=0$，所以 1 的对应特征向量为$\xi_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}^T$，全部特征向量为

$k\xi_1, k\neq 0$ (2 分)

。

$\left(A-2E\right)X=\begin{bmatrix}-3&1&2\\-2&0&4\\-2&1&0\end{bmatrix}X=0$，所以 2 的特征向量为$\xi_2=\begin{bmatrix}2&4&1\end{bmatrix}^T$，全部特征向量为

$k\xi_2,k\neq 0$ (2 分)

$\left(A-0E\right)X=\begin{bmatrix}-1&1&2\\-2&2&4\\-2&1&2\end{bmatrix}X=0$，所以 0 的对应特征向量为$\xi_3=\begin{bmatrix}0&-2&1\end{bmatrix}^T$，全部特征向量为

$k\xi_3,k\neq 0$ (2 分)

六、解：$D=\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\\lambda&-1&1\\4&5&-5\end{vmatrix}=(4+5\lambda)(\lambda-1)$，(3 分)

当$D\neq 0$，即$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -\dfrac{4}{5}$时，方程组有惟一解. (2 分)

当$\lambda=1$时，$B=(A,\beta)=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

此时$R(A)=R(B)=2$，方程组有无穷多个解.，并且通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ (3 分)

当$\lambda=-\dfrac{4}{5}$时，$B=(A,\beta)=\begin{pmatrix}2&-\frac{4}{5}&-1&1\\-\frac{4}{5}&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}10&-4&-5&5\\-4&-5&5&10\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

此时$R(A)=2,\ R(B)=3$，方程组无解. (2 分)

七、已知 n 阶方阵 A, 满足$A^2+A-4E=0$，求 $\left(A-E\right)^{-1}$ (6 分)

解： $(\mathrm{A}-\mathrm{E})\left[\dfrac{1}{2}(\mathrm{A}+2\mathrm{E})\right]=\dfrac{1}{2}(\mathrm{A}+2\mathrm{E})(\mathrm{A}-\mathrm{E})=\mathrm{E}$ .... 4 分

所以$\left(A-E\right)^{-1}=\dfrac{1}{2}\left(A+2E\right)$ .... 1 分

11 浙江理工大学 2011-2012 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 B1 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、A;　2、C;　3、C;　4、B;　5、B

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、$\frac{1}{2}(\mathbf{A}+2\mathbf{E})$;　2、$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;　3、0;　4、3;　5、20

三、解答题（共 54 分）(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. 解：$D=(x_1+x_2+\cdots x_n+3)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2+3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n+3 \end{vmatrix}$ ………(6 分)

$=(x_1+x_2+\cdots x_n+3)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$ ………(8 分)

$=3^{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i+3)$ ………(10 分)

2.解：由已知条件可得：（A-2E）X=A

$\therefore$ X=(A-2E)$^{-1}$A ………(4 分)

$(A-2E,A)\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ………(8 分)

则：X=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ………(10 分)

3、$\left(\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_3^{\mathrm{T}}\alpha_4^{\mathrm{T}}\right)\to\cdots\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，可见秩为 3， ………(6 分)

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一个极大无关组， ………(8 分)

且有 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2(+0\alpha_4)$。 ………(10 分)

4. 解：

$$B=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&3&a&3\\1&a&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&a+2&1\\0&a-1&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&a+2&1\\0&0&(3+a)(2-a)&2-a\end{pmatrix}$$ …(3 分)

从而 $a=-3$ 时，R（A）=2≠R（B）=3， 方程组无解； ………(5 分)

$a\neq-3$且$a\neq2$时，R（A）=R（B）=3，方程组有唯一解； ………(7 分)

$a=2$时， R（A）=R（B）=2， 方程组有无穷多个解， ………(9 分)

此时：$B\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&4&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-5&0\\0&1&4&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,通解为$\begin{cases}x_1=5x_3\\x_2=-4x_3+1\end{cases}$$(x_3$为任意实数$)$

………(12 分)

5.解：$|A-\lambda E|=-(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-5),\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=5$， ------------------3 分

对应于$\lambda_1=-1$，由 $(A+E)x=0$ 得$\xi_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$，单位化，得$p_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$；---5 分

对应于$\lambda_2=1$，由 $(A-E)x=0$ 得$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，单位化，得$p_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ --------7 分

对应于$\lambda_3=5$，由 $(A-5E)x=0$ 得$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化，得$p_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. -------9 分

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$，有$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$. ----------12 分

四、证明： 由于齐次线性方程组的解线性组合仍为该线性方程组的解, 故$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$是方程组$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$的解.

因此, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$也是方程组$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$的基础解系的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$可以由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$线性表出. -------2 分

因为 $$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$线性表出的充分必要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

即 $t^4 - 1 \neq 0$，亦即 $t \neq \pm 1$. 因此$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$也是方程组$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$的一个基础解系的充分必要条件是$t \neq \pm 1$. --------6 分

12 浙江理工大学 2011-2012 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 B2 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、D;　2、C;　3、A;　4、C;　5、B.

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、 48 ；　2、 $\frac{1}{2}\mathbf{A} + \mathbf{E}$ ；　3、 18 ；　4、$-\frac{1}{2}$ ；　5、-3.

三、解答题（共 50 分）(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. 解： $$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a - a_1 & a_2 - a_1 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & a - a_2 & a_3 - a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a - a_3 \end{vmatrix}$$ ————————————6 分

$$= (a - a_1)(a - a_2)(a - a_3)$$ ————————————8 分

2.解 由 $(2\mathbf{E} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{A}^T = \mathbf{C}^{-1} \Rightarrow (2\mathbf{C} - \mathbf{B})\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$ ————————2 分

$\Rightarrow \mathbf{A}^T = (2\mathbf{C} - \mathbf{B})^{-1} \Rightarrow \mathbf{A} = [(2\mathbf{C} - \mathbf{B})^T]^{-1}$. ——————4 分

$$2\mathbf{C} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ——————6 分

$$((2\mathbf{C}-\mathbf{B})^T,\mathbf{E})=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&1&0&0\\3&2&1&0&0&0&1&0\\4&3&2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&0&1&0&1&-2&1\end{array}\right).$$

故 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$ ————————10 分

3、解：$A=(\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_3^{\mathrm{T}}\alpha_4^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\4&1&0&2\\1&-1&-3&-6\\0&-3&-1&3\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，———2 分

知向量组的秩为 3， ———4 分

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大无关组， ———6 分

且有 $\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$。 ———8 分

4.解 系数行列式 $\begin{vmatrix}1&b&2\\1&2b-1&3\\1&b&b+3\end{vmatrix}=(b-1)(b+1)$， ———3 分

1）当 $b\neq\pm1$ 时，该方程组有唯一解。 ———5 分

2）当 $b=-1$ 时，$\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\1&-3&3&1\\1&-1&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&-2&1&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$，

系数矩阵的秩为 2，增广矩阵的秩为 3，无解。 ———7 分

3）当 $b=1$ 时，$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&1&3&1\\1&1&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

系数矩阵与增广矩阵秩相同，有无穷解， ———9 分

通解为 $k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},k\in R$ 。 ———12 分

5.解

$\mathbf{A}$ 的特征多项式为 $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=\begin{vmatrix}5-\lambda&-1&3\\-1&5-\lambda&-3\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9).$

所以$\mathbf{A}$的特征值为: $\lambda_1=0, \lambda_2=4, \lambda_3=9.$ ————3 分

对$\lambda_1=0$, 解方程组 $(0\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 即$\begin{pmatrix}-5 & 1 & -3\\ 1 & -5 & 3\\ -3 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

得特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$; 单位化得 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1^0=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$, ————5 分

对$\lambda_2=4$, 解方程组 $(4\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 即$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 3\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

得特征向量$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; 单位化得 $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2^0=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, ————7 分

对$\lambda_3=9$, 解方程组 $(9\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 即$\begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ 1 & 4 & 3\\ -3 & 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

得特征向量$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$; 单位化得 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3^0=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$ ————9 分

令 $\mathbf{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 则$\mathbf{P}$是正交矩阵, 且满足$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$. ————12 分

四、证：

1. 因为 A,B,C 均为正交矩阵，故有

$$A^T=A^{-1},B^T=B^{-1},C^T=C^{-1}$$ ————2 分

故

$$(A^TBC^{-1})^T=(C^{-1})^TB^T(A^T)^T$$

$$=CB^{-1}A$$

$$=(A^TBC^{-1})^{-1}$$ ————6 分

2．证明：若 A,B 相似，存在可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$。 ————2 分

故 $B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，即 B^{-1} 与 A^{-1} 相似。 ————4 分

13 浙江理工大学 2009-2010 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 B 卷

一、选择题

1、B；2、C; 3、B; 4、C; 5、C;

二、填空题

1. $\lambda=-1$；2. $a>2$；3. $t=5$； 4. 0； 5. A

三、计算题

1： $D=\begin{vmatrix} a+(n+1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n+1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n+1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n+1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n+1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$ ………4 分

$=[a+(n+1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n+1)b](a-b)^{n-1}$ ………8 分

2.解 由 $AX=2X+B$ 得 $X=(A-2E)^{-1}B$ ………3 分

$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

………8 分

$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

………10 分

3.解：

$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+3)(a-1)^2$

………2 分

当$a=1$时，$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=1$； ………5 分

当$a=-3$时，$A=\begin{pmatrix}-3&1&1&1\\1&-3&1&1\\1&1&-3&1\\1&1&1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，从而$r(A)=3$ ………8 分

4．

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&a-2&0&b-1\end{pmatrix}$$

………3 分

(1) $a=2,\quad b=1$ 无穷多解； $a\neq 2$ 唯一解； $a=2,\quad b\neq 1$ 无解 ………9 分

(2)

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad k\in R$$

………12 分

5.解

$P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$， ………4 分

$P^{-1}AP=\Lambda$

$A=P\Lambda P^{-1}$ ………6 分

$A^n\beta=P\Lambda^nP^{-1}\beta=\begin{pmatrix}-2^n\\2^n\\2^n\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$。 ………12 分

四、证明题

1 证明：由$A^2+A-5E=0\Rightarrow A^2+A-2E=3E\Rightarrow\left(A+2E\right)(A-E)=3E$ ………2 分

$\Rightarrow\left(A+2E\right)^{-1}=\dfrac{1}{3}(A-E)$。 ………4 分

2．$R(A)=n-1$时，由矩阵秩的定义，A中至少有一个（n-1）阶子式不为零，

即 A^* 中至少有一个元素不为零，故 $R(A^*)\ge 1$；　　　　　　　　………3 分反过来，

因 $R(A)=n-1,$ 于是 $|A|=0,$ 所以 $AA^*=|A|E=0,\ R(A)+R(A^*)\le n,$

因为 $R(A)=n-1,$ 因此 $R(A^*)\le 1,$ 故 $R(A^*)=1.$　　　　　　　　………6 分

14 浙江理工大学 2008-2009 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 B 卷

一、选择题 $(5\times 4=20$ 分)

1、D　　2、C　　3、A　　4、B　　5　D

二、填空题($7\times 4=28$ 分)

1、$-\frac{1}{2}$　2、$diag(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2})$　　3、$\underline{2}$ ；$\underline{\alpha_1,\alpha_2}$　　4、$\underline{xy\neq 0}$　　5、$\underline{1}$

6、$\underline{30}$ ；$\underline{15,10,6}$

三、解答题(6+8+8+10+10=42 分)

1、解：

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1\\ a+3 & a & 1 & 1\\ a+3 & 1 & a & 1\\ a+3 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}\ldots 4\text{ 分}$$

$$=(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-1\end{vmatrix}=(a+3)(a-1)^3\ldots\ldots\ldots 8\text{ 分}$$

2、解：$\because (A-2E)\ B=A$

$$\text{由}A-2E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\text{知 } |A-2E|=-1\neq 0\quad \therefore B=(A-2E)^{-1}A\qquad \text{..........4 分}$$

$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\text{.........6分}$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&4&3\end{pmatrix}$$..................8 分

3、解 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2k-2&3k-3\\0&0&6-3k-3k^2\end{pmatrix}$..........4 分

(1) $R(A)=3\Leftrightarrow\begin{cases}2k-2\neq 0\\6-3k-3k^2\neq 0\end{cases}$, 所以$k\neq 1$且$k\neq -2$;.........6 分

(2)当$k=1$时, $A\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 所以$R(A)=1$;........................8 分

(3)当$k=2$时, $A\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&-6\\0&-6&-9\\0&0&0\end{pmatrix}$, 所以$R(A)=2$..........................10 分

4、解：对增广矩阵作初等行变换：

$$(A,b)=\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&\lambda\\1&1&-2&\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow{\quad r\quad}\begin{pmatrix}1&-2&1&\lambda\\0&1&-1&-\frac{2}{3}(\lambda-1)\\0&0&0&(\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}$$

因此，当 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$ 时，方程组有解。…………………………4 分

(1) 当 $\lambda=1$ 时，原方程组的通解为 $X=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},k\in R$ ………7 分

(2)当 $\lambda=2$ 时, 原方程组的通解为 $X=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},k\in R$ ………..10 分

5、解 (1) A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=(5-\lambda)(\lambda+1)^2,$$

则 A 的特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_{2,3}=-1$ ………………………………………4 分

$\lambda_1=5$ 对应的线性无关的特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_{2,3}=-1$ 对应的线性无关的特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$; …….7 分

(2)令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,则 $P^{-1}AP=diag(5,-1,-1)$ …….10 分

四、证明题(5+5=10 分)

1、证明: 由 $A(A-E)=0$ 得 $R(A)+R(A-E)\le n$,……………………….3 分

又 $R(A)+R(A-E)=R(A)+R(E-A)\ge R(A+(E-A))=R(E)=n$,所以

$R(A)+R(A-E)=n$ …………………………………….5 分

2、证：假设 P_1+P_2 是 A 的对应于 λ 的特征向量，

则 $A(P_1+P_2)=\lambda(P_1+P_2)$ …………….2 分

因为 $AP_1=\lambda_1 P_1$， $AP_2=\lambda_2 P_2$， 所以 $(\lambda_1-\lambda)P_1+(\lambda_2-\lambda)P_2=0$， 由于 P_1,P_2 是对应于不同特征值的特征向量，所以它们线性无关，从而

$\lambda_1-\lambda=\lambda_2-\lambda=0,\quad \lambda_1=\lambda_2$，矛盾！…………...5 分

15 《线性代数 B》模拟试题一

一、单项选择题（每题 3 分，共 27 分）

1. B　2. B　3. C　4. C　5. A　6. B　7. B　8. B　9. D

二、填空题（每空 3 分，共 21 分）

1. 无关；　2. 3 ；　3. 3 ；

4. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；　6. 120；　4，5，6；　$\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$

三、计算题（7+10+10+12=39 分）

1. 解：$\begin{vmatrix}a+b&b&b&b\\-b&a-b&-b&-b\\b&b&a+b&b\\-b&-b&-b&a-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b&b&b&b\\a&a&0&0\\-a&0&a&0\\a&0&0&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&b&b\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4$.

2. 解：先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&0\\2&1-\lambda&0\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=-(2-\lambda)(3-\lambda)(1+\lambda)$$

$\lambda_1=2,\lambda_2=3,\lambda_3=-1$ ，

当$\lambda_1 = 2$时，由$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$得，$\boldsymbol{A}$的对应于2的特征向量是$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

当$\lambda_2 = 3$时，由$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$得，$\boldsymbol{A}$的对应于3的特征向量是$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，

当$\lambda_2 = -1$时，由$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$得，$\boldsymbol{A}$的对应于$-1$的特征向量是$\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，

取$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

令$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_3)$，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{A}^{10} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & -1 \end{pmatrix}^{10}\boldsymbol{P}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^{10}+1) & \frac{1}{2}(3^{10}-1) & 0 \\ \frac{1}{2}(3^{10}-1) & \frac{1}{2}(3^{10}+1) & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}.$$

3. 解：因为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i = i\boldsymbol{\alpha}_i \ (i=1,2,3)$，所以

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

因此
$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}.$$

又$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，所以$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，

故
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

4．解：$\left(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{\alpha}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3\right)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$=\left(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3\right)\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{3}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{3}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{3}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\left(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3\right)\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 II 下的坐标为$\left(-\frac{2}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{2}{3}\right)^T$.

5. 解：$D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix}=(\lambda+5)(\lambda-3)$，

（1）当 $D\neq 0$，即 $\lambda\neq -5$ 且 $\lambda\neq 3$ 时，方程组有惟一解.

（2）当 $\lambda=-5$ 时，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

此时 $R(\boldsymbol{A})=2,\ R(\boldsymbol{B})=3$，方程组无解，

（3）当 $\lambda=3$ 时，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

此时 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，方程组有无限多个解.，并且通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} -\frac{8}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix}\quad (c\in R).$$

四、证明题（5+5=10 分）

1. 证：根据伴随矩阵的性质有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

又 $\boldsymbol{A}^2=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$，再由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，便有 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$.

2. 证：假设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，即 A^{-1} 存在，以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 左乘 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的两边得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$，这与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶非零矩阵矛盾；类似的，若 $\boldsymbol{B}$ 可逆，即 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 存在，以 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 右乘 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的两边得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，这与 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非零矩阵矛盾，因此，$\boldsymbol{A}$ 和 B 都是不可逆的.

15　《线性代数 B》模拟试题二

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、D;　2、C;　3、B;　4、D;　5、A.

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、 6；　2、A^2+3E；　3、105 ；　4、 2；　5、 9 .

三、解答题（共 50 分）**(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)**

1 、解：$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&0&2&0\\1&0&0&2\end{vmatrix}$ ——————6 分

$=6\times8=48$。 ——————8 分

2、解　$\mathbf{X}(\mathbf{E}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^T\mathbf{C}^T=\mathbf{E}$ 等价于 $\mathbf{X}(\mathbf{C}-\mathbf{B})^T=\mathbf{E}$ 从而 $\mathbf{X}=[(\mathbf{C}-\mathbf{B})^T]^{-1}$. ——4 分

由已知得，$(\mathbf{C}-\mathbf{B})^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}$, ——————6 分

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&1&0&0\\3&2&1&0&0&0&1&0\\4&3&2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&0&1&0&1&-2&1\end{array}\right)$$

于是　$\mathbf{X}=[(\mathbf{C}-\mathbf{B})^T]^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$. ——————10 分

3、解：$A=\begin{bmatrix}1&9&-2\\2&100&-4\\-1&10&2\\4&4&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&9&-2\\0&82&0\\0&19&0\\0&-3&20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&9&-2\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ ——————2 分

则 $R(A)=2$.　　　　　　　　　　　　————————4 分

$\alpha_1=(1,2,-1,4)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(9,100,10,4)^{\mathrm{T}}$ 不成比例，所以 α_1,α_2 为最大无关组.　———6 分

且 $\alpha_3=-2\alpha_1$　　　　　　　　　　　　————————8 分

4、解　方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix}=5(\lambda-1)(\lambda+\frac{4}{5})$.　————————3 分

(1) 当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-\frac{4}{5}$ 时，方程组有惟一解；　————————5 分

(2) 当 $\lambda=-\frac{4}{5}$ 时，方程组为 $\begin{cases} 10x_1-4x_2-5x_3=5 \\ -4x_1-5x_2\quad+5x_3=10 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$，后两个方程是矛盾方程，因而此时方程组无解.　————————7 分

(3) 当 $\lambda=1$ 时，$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,此时方程组有无穷多解.——9 分

求得其通解为: $(x_1,x_2,x_3)^T=k(0,1,1)^T+(1,-1,0)^T$.　————————12 分

5、解：将所给矩阵记为 A.由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$.　————————3 分

对于 $\lambda_1=-2$，解方程 $(A+2E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$，即 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$,

得特征向量 $(1,2,2)^T$，单位化得 $\mathbf{p}_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T$.　————————5 分

对于 $\lambda_2=1$，解方程 $(A-E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$，即 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$,

得特征向量 $(2,1,-2)^T$，单位化得 $\mathbf{p}_2=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})^T$.　————————7 分

对于 $\lambda_3=4$，解方程 $(A-4E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$，即 $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$,

得特征向量$(2, -2, 1)^T$，单位化得 $\mathbf{p}_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$. ——————9 分

于是有正交阵 $P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，使 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-2, 1, 4)$. ——————12 分

四、证明，设有数 k_1, k_2, k_3，使得

$$k_1(2\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+5\alpha_3)+k_3(2\alpha_3+3\alpha_1)=0$$ ——————2 分

整理得

$$(2k_1+3k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(5k_2+2k_3)\alpha_3=0$$ ——————4 分

由于向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，必有 $\begin{cases} 2k_1+3k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ 5k_2+2k_3=0 \end{cases}$， ——————6 分

而 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}=19\neq 0$， ——————8 分

从而 $k_1=k_2=k_3=0$。 ——————10 分