线性代数B

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 上）

学校：________________________

专业：________________________

班级：________________________

姓名：________________________

学号：________________________

（此试卷为2022年第二版 第1次发行）

目 录

2022 年所有试卷版本见**试卷版**的尾页。如需资料获取请添加下方的 QQ 群获取。

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈
试卷版次：2022 年 4 月 30 日 第二版 第 1 次发行
本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）
创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380
cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102
cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

1 浙江理工大学 2015—2016 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 A 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 24 分）

D C A C B B

二 填空题（本题共 6 题，每小题 4 分，共 24 分）

1. E　　2. 3　　3. -17，-12　　4. 3　　5. $-\dfrac{16}{27}$　　6. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

三 计算题

1 解：

$$D_4=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=x\cdot(-1)^{\frac{4\times 3}{2}}x\cdot x\cdot x=x^4 .$$ ....（7 分）

2 解：由 $AB=A+2B$ 得，$(A-2E)B=A$。因为

$$\begin{pmatrix} A-2E & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

所以，$B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$。 ....（8 分）

3 解：(1)由向量 α_1，α_2 的对应分量不成比例知 α_1，α_2 线性无关。 ....（2 分）

$$(2)\ (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 6 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故包含 α_1，α_2 的一个极大线性无关组为 α_1，α_2，α_5。 ....（6 分）

(3) 继续作初等行变换，

$$\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&3&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以，$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_5$。 ....（9 分）

4 解：系数行列式为$\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$。

(1) 因此，当$\lambda\neq1$，$\lambda\neq10$时，方程组有唯一解。 ....（4 分）

(2) 当$\lambda=10$时，对增广矩阵作初等行变换，

$$\begin{pmatrix}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&\frac{5}{2}&\frac{11}{2}\\0&-9&-9&-9\\0&0&0&27\end{pmatrix},$$

所以，方程组无解。 ....（6 分）

(3) 当$\lambda=1$时，对增广矩阵作初等行变换，

$$\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则其齐次线性方程组的基础解系为$\xi_1=(-2,1,0)^T$，$\xi_2=(2,0,1)^T$。

而非齐次方程组的一个特解是$\eta=(1,0,0)^T$，所以，通解为

$X=\eta+c_1\xi_1+c_2\xi_2$，其中，c_1，c_2为任意常数。 ....（10 分）

5 解：矩阵A的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-2&-2\\-2&\lambda-1&-4\\-2&-4&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)^2(\lambda-6),$$

所以，A的特征值为$\lambda_1=-3$，$\lambda_2=6$。

对于$\lambda_1=-3$，解齐次线性方程组$(-3E-A)x=0$，得其基础解系

$\alpha_1=(-2,1,0)^T$，$\alpha_2=(-2,0,1)^T$。

对于$\lambda_2=6$，解齐次线性方程组$(6E-A)x=0$，得其基础解系

$\alpha_3=(1,2,2)^T$。 ....（7 分）

把向量组α_1,α_2正交化，有$\beta_1=\left(-2,1,0\right)^T$，$\beta_2=\left(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1\right)^T$。

再将β_1,β_2,α_3单位化，得

$\gamma_1=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)^T$，$\gamma_2=\left(-\frac{2}{3\sqrt{5}},-\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^T$，$\gamma_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T$。

令矩阵$Q=\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$

.......（10 分）

四 **证明题**（每小题 4 分，共 8 分）

1 证明：由$A^2-5A+6E=(A-2E)(A-3E)=0$，得

$$R(A-2E)+R(A-3E)\le 0。$$ ....（2 分）

另一方面，

$$R(A-2E)+R(A-3E)=R(A-2E)+R(3E-A)$$

$$\ge R((A-2E)+(3E-A))$$

$$\ge R(-E)=n$$

所以，$R(A-2E)+R(A-3E)=n$。 ....（4 分）

2 证明：因为$A^TA=E$，$|A|=|A^T|=-1$，所以

$$|-E-A|=|-A^TA-A|=|(-A^T-E)A|=|(-A-E)^T|\cdot|A|=-|-E-A|。$$

从而可得，$|-E-A|=0$，故-1 是A的一个特征值。 ....（4 分）

2 浙江理工大学 2013—2014 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 A 卷

一 选择题：每小题 4 分，共 20 分。

1、D 2、C 3、A 4、D 5、B

二 填空题：每小题 5 分，共 25 分。

1. $\begin{bmatrix} a_{21}+a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$；　2. 2;　3. －8;　　4. $3^{n-1}\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$　　5. 3

三 计算题：每小题 7 分，共 21 分。

1.

$$D=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} n+a & n+a & \cdots & n+a \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{vmatrix}=(n+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{vmatrix}$$

$$=(n+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}=(n+a)a^{n-1} \quad (7\text{ 分})$$

2．解：$(A-E)B=(A-E)(A+E)$，（2 分） $|A-E|\neq 0$ 所以 $A-E$ 可逆，(3 分)

所以 $B=A+E=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (3 分)

3. 将方程两边转置，得 $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} X^T=\begin{pmatrix} -8 & -5 & -2 \\ 3 & 9 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$．由

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 5 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E & X^T \end{pmatrix},$$

得 $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$．(7 分)

四．解：$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　(4 分)

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是它的一个极大线性无关组, (3 分) $\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$ (2 分)

五．解：$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}7&0&-1&-1&6\\0&7&-5&9&-5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ (3 分)

$$\begin{cases}7x_1 \qquad = x_3+x_4+6\\ \qquad 7x_2=5x_3-9x_4-5\end{cases}$$

令 $x_3=x_4=0$，则 $\eta=\frac{1}{7}(6,-5,0,0)^T$ (3 分)

$$\begin{cases}7x_1 \qquad = x_3+x_4\\ \qquad 7x_2=5x_3-9x_4\end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$ $\xi_1=\frac{1}{7}(1,5,1,0)^T$ $\xi_2=\frac{1}{7}(1,-9,0,1)^T$ (3 分)

通解：$x=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2$ (1 分)

六．解：由矩阵的特征值之和等于矩阵的迹，所以另一个特征值为 0。(2 分)

$\begin{vmatrix}-1&1&2\\-2&2&x\\-2&1&2\end{vmatrix}=0$ 所以 $x=4$ (2 分)

$(A-E)X=\begin{bmatrix}-2&1&2\\-2&1&4\\-2&1&1\end{bmatrix}X=0$，所以 1 的对应特征向量为 $\xi_1=\begin{bmatrix}1&2&0\end{bmatrix}^T$，

全部特征向量为 $k\xi_1, k\neq 0$ (2 分)。

$(A-2E)X=\begin{bmatrix}-3&1&2\\-2&0&4\\-2&1&0\end{bmatrix}X=0$，所以 2 的特征向量为 $\xi_2=\begin{bmatrix}2&4&1\end{bmatrix}^T$，

全部特征向量为 $k\xi_2, k\neq 0$ (2 分)

$(A-0E)X=\begin{bmatrix}-1&1&2\\-2&2&4\\-2&1&2\end{bmatrix}X=0$，所以 0 的对应特征向量为 $\xi_3=\begin{bmatrix}0&-2&1\end{bmatrix}^T$，

全部特征向量为 $k\xi_3, k\neq 0$ (2 分)

七、证明：由 $A^2=A$，$(A+E)\left[-\frac{1}{2}(A-2E)\right]=\left[-\frac{1}{2}(A-2E)\right](A+E)=E$ (4 分)

所以 $A+E$ 可逆，$\left(A+E\right)^{-1}=-\dfrac{1}{2}\left(A-2E\right)$。(1 分)

3 浙江理工大学 2012—2013 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 A1 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 24 分）。

1、(B) ；2、(D) ；3、$\left(A\right)$；4、$\left(C\right)$；5、(D) ；6、(D) ；

二 填空题（每小题 4 分，共 24 分）。

1、$\begin{pmatrix} 13 & 10 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ ；　2、$k=2$；　3、1045；　4、 1；　5、$3^{99}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$；

6、$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

三、计算题

1. 解：$\begin{vmatrix} a+b & b & b & b \\ -b & a-b & -b & -b \\ b & b & a+b & b \\ -b & -b & -b & a-b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b & b & b & b \\ a & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4 .\cdots\cdots\cdots 6'$

2. 解：由 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$，得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}, \qquad \cdots\cdots\cdots 2'$$

为此对矩阵 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 施行初等行变换化为行最简形矩阵，

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. ………6′

3、**解** $(3A)^{-1}-2A^{*}=\frac{1}{3}A^{-1}-2|A|A^{-1}=-\frac{2}{3}A^{-1}$, ………3′

所以

$$\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|=(-\frac{2}{3})^{3}\left|A^{-1}\right|=-\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{|A|}=-\frac{16}{27}.$$

………6′

或 $(3A)^{-1}-2A^{*}=\frac{1}{3}A^{-1}-2A^{*}=\frac{1}{3}\cdot\frac{A^{*}}{|A|}-2A^{*}=-\frac{4}{3}A^{*}$ ………3′

则 $\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|=\left|-\frac{4}{3}A^{*}\right|=(-\frac{4}{3})^{3}\left|A^{*}\right|=-\frac{64}{27}\cdot|A|^{3-1}=-\frac{16}{27}$. ………6′

4、解：对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换变成行最简形，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$ ………4′

所以 $R(\boldsymbol{A})=3$, ………6′

$\boldsymbol{A}$ 的前三列 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的最大无关组， ………8′

且 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$， $\boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$. ………10′

5、解： 3×3 齐次线性方程组有非零解，则系数行列式为 0，即

$$\begin{vmatrix}2 & a & 1\\ a+2 & -2 & 2\\ 4 & a-1 & 2\end{vmatrix}=-(a-2)(a+1)=0,$$

得 $a=2$ 或 -1. ………2′

若 $a=2$，则 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}_2$，与 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量矛盾！

故 $a=-1$. ………4′

当$a=-1$时，

$\boldsymbol{X}_1=[1,-2,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_2=[-2,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_3=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$，显然$\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_3$线性无关，

从而$\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_3$线性无关.令$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3]$， ·········6′

则$\boldsymbol{S}$可逆，且$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(-4,2,2)$， ·········8′

因此

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}\,\mathrm{diag}(-4,2,2)\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 6 & -1\end{bmatrix}.$$

·········12′

四、证明题（每题6分，共12分）。

1、证明: 设A的特征值为λ,α是的对应于特征值λ的特征向量

$\because A^2=A \quad \therefore A^2\alpha=A\alpha\Rightarrow\lambda^2\alpha=\lambda\alpha$ ·········3′

$\because\alpha$为非零向量

$\therefore\lambda^2=\lambda\Rightarrow\lambda=0$或$\lambda=1$ ·········6′

2、 证：因为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$互异，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关； ·········1′

又因为$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，所以

$$\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2+\boldsymbol{A\alpha}_3=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3,$$

于是有

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{T},$$ ·········4′

而$|\boldsymbol{T}|=(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)\neq0$，因此

$$r(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3,$$

所以$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$线性无关. ·········6′

4 浙江理工大学 2012—2013 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 A2 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 24 分）。

1、(C)；2、(C)；3、(D)；4、(D)；5、(B)；6、(C)；

二 填空题（每小题 4 分，共 24 分）。

1、$2^{2011}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$；　2、25；　3、0；　4、$c\begin{pmatrix}-5\\8\\-7\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\3\\2\end{pmatrix}$；　5、2；

6、$A-2E$.

三 计算题（共 42 分）

1. 解：$D_4=\begin{vmatrix}1 & a & a & a\\ a & 1 & x & a\\ a & a & 1 & a\\ a & a & a & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a & a\\ a & 1 & a & a\\ a & a & 1 & a\\ a & a & a & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & a & 0 & a\\ a & 1 & x-a & a\\ a & a & 0 & a\\ a & a & 0 & 1\end{vmatrix}$

$=(1+3a)(1-a)^3-a(x-a)(1-a)^2$. ………$6'$

2、解　$(2C-E)A=CB$，$A=(2C-E)^{-1}(CB)$ ………$2'$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 8\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 11\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ ………$6'$

3、解：

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\alpha}_5]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 7 & 3 & -1 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -8\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ ………$4'$

则 $R(A)=3$， ………$6'$

且 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为一个极大无关组， ………$8'$

且 $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_5=-8\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_3$. ………$10'$

4、解：方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 2 & 2\\ 2 & \lambda+1 & 2\\ 2 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+5)(\lambda-1)^2.$$

当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -5$时，方程组有唯一解. ………3′

当$\lambda=-5$时，三个方程相加得$0=-9$，因此方程组无解. ………6′

当$\lambda=1$时，方程组同解于$2x_1+2x_2+2x_3=1$，因此方程组有无穷多解，………9′

且通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1/2\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$其中k_1，k_2为任意常数. ………12′

5．解：根据题目假设，有$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$，两边左乘$\boldsymbol{A}$，得$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$，即$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$，所以

$$\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha},$$

由此可得$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1,\\ \lambda_0(-5-b+3)=1,\\ \lambda_0(-1+c-a)=-1,\end{cases}$ 解之得$\lambda_0=1$，$b=-3$，$a=c$， ………6′

再由$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & -1 & a\\ 5 & -3 & 3\\ 1-a & 0 & -a\end{vmatrix}=a-3=-1$，得$a=c=2$，即有

$a=2$，$b=-3$，$c=2$，$\lambda_0=1$. ………8′

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1、**证:** $A\neq E\ \Rightarrow\ A-E\neq O\ \Rightarrow\ R(A-E)\geq 1$.题设$R(A+E)+R(A-E)=n$,故

$R(A+E)<n$,$|A+E|=|A-(-1)E|=0$,$\lambda=-1$是A的一个特征值. ………5′

2. 证：因为$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以$\boldsymbol{A}$可逆，从而有 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{BA})$，即

$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}$，所以$\boldsymbol{AB}$与$\boldsymbol{BA}$相似. ………5′

5 浙江理工大学 2011—2012 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 A1 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、D;　2、C;　3、C;　4、C;　5、B

二、填空题

1、$-\frac{1}{5}\mathbf{A}+\frac{2}{5}\mathbf{E}$；　2、1；　3、$\begin{pmatrix}10 & -10\\ -20 & 30\end{pmatrix}$；　4、$-24$；　5、3．

三、解答题（共 50 分）

1、$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}$　——————————5 分

$=10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&1&-3&1\\0&-3&1&1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&-3\\4&0&-8\\-4&0&4\end{vmatrix}=10\times(-1)\begin{vmatrix}4&-8\\-4&4\end{vmatrix}=160$

——————————10 分

2、解：$A^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A^4=E$，$B^4=(P^{-1}AP)^4=P^{-1}A^4P=E$。　———4 分

故 $B^{2012}-2A^2=E-2A^2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$。　——————————8 分

3 、解：设 $\boldsymbol{a}_1=(a,3,1)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(2,b,3)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{a}_4=(2,3,1)^T$.

$(\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=\begin{pmatrix}1&2&a&2\\2&3&3&b\\1&1&1&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&a-1&-1\\0&1&1&b-6\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&a-1&-1\\0&0&2-a&b-5\end{pmatrix}$，　—4 分

而 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=2$, 所以 $a=2$, $b=5$.　——————————8 分

4.解：对增广矩阵 B 作初等行变换，

$$B=(A\vdots b)=\begin{pmatrix}1&1&k&4\\-1&k&1&k^2\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}$$　——————————1 分

$$\to\begin{pmatrix}1&1&k&4\\0&k+1&k+1&k^2+4\\0&-2&2-k&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&k&4\\0&2&k-2&8\\0&k+1&k+1&k^2+4\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & 2 & k-2 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{(k+1)(4-k)}{2} & k(k+4) \end{pmatrix}$$ ——————————3 分

讨论：(1)当 $k \neq -1$ 且 $k \neq 4$ 时，$R(A)=R(B)=3,$ 故方程组有唯一解； ————5 分

(2)当 $k=-1$ 时，$R(A)=2,\ R(B)=3,\ R(A)\neq R(B),$ 故方程组无解； —————7 分

(3)当 $k=4$ 时，$B \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

由于 $R(A)=R(B)=2<3,$ 故方程组有无穷多解， —————9 分

取同解方程租 $\begin{cases} x_1 = \quad -3x_3, \\ x_2 = 4 \ -x_3, \\ x_3 = \qquad x_3. \end{cases}$ 令 $x_3=k,$ 并写成向量形式，即得方程组的通解

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k\in R.$$ ———————————12 分

5.解：A 的特征方程为：

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda+3 \end{vmatrix} =(\lambda-1)(\lambda^2-36).$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=6, \lambda_3=-6.$ ——————————3 分

对于 $\lambda_1=1,$ 对应的齐次线性方程租为：$(E-A)x=0,$

即，$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0.$ 其基础解系为：$\alpha_1=\left(2,0,-1\right)^T,$

从而对应于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $\alpha_1=\left(2,0,-1\right)^T.$ ————————5 分

类似可求得：

对应于特征值 $\lambda_2=6$ 的特征向量为 $\alpha_2=\left(1,5,2\right)^T.$ ——————7 分

对应于特征值 $\lambda_3=-6$ 的特征向量为 $\alpha_3=\left(1,-1,2\right)^T.$ ———————9 分

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&5&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&6&\\&&-6\end{pmatrix}$为对角矩阵。 ————————12 分

四、

1. **证明** 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，由于它们都是实对称矩阵，故存在可逆矩阵 $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2$，使得 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 相似于同一个对角矩阵:

$$\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$ ————————2 分

因此，由 $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}_2$ 得 $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^{-1}=\mathbf{B}$．令 $\mathbf{Q}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^{-1}$，则因 $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2$ 均可逆，故 $\mathbf{Q}$ 可逆，且 $\mathbf{Q}^{-1}=(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^{-1})^{-1}=\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1^{-1}$，从而

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{B}$$

即 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似. ————————5 分

2．**证明** 由于 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵，故 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$，从而由 $\left|\mathbf{A}^T\right|=\left|\mathbf{A}\right|\Rightarrow\left|\mathbf{A}\right|^2=\left|\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right|=1$，因此 $\left|\mathbf{A}\right|=\pm1$，故 $\mathbf{A}$ 可逆，由于可逆矩阵的特征值不能为零，所以 $\lambda\neq0$。

————2 分

因 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵，则 $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}^{-1}$，所以，当 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值时，$\dfrac{1}{\lambda}$ 就是 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$ 的一个特征值，但 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^T$ 有相同的特征值，故 $\dfrac{1}{\lambda}$ 也是 $\mathbf{A}$ 的特征值。————5 分

6 浙江理工大学 2011—2012 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 A2 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、D; 2、C; 3、B; 4、D; 5、A.

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、 6； 2、A^2+3E； 3、105 ； 4、 2； 5、 9 .

三、解答题（共 50 分）(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1 、解：$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ——————————6 分

$= 6 \times 8 = 48$。 ——————————8 分

2、解 $\mathbf{X}(\mathbf{E}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^T\mathbf{C}^T = \mathbf{E}$ 等价于 $\mathbf{X}(\mathbf{C}-\mathbf{B})^T = \mathbf{E}$ 从而 $\mathbf{X} = [(\mathbf{C}-\mathbf{B})^T]^{-1}$. —4 分

由已知得，$(\mathbf{C}-\mathbf{B})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$， ————————6 分

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

于是 $\mathbf{X} = [(\mathbf{C}-\mathbf{B})^T]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. ——————————10 分

3、解：$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 2 & 100 & -4 \\ -1 & 10 & 2 \\ 4 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 82 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & -32 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ————————2 分

则 $R(A) = 2$. ————————4 分

$\alpha_1 = (1,2,-1,4)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (9,100,10,4)^{\mathrm{T}}$ 不成比例，所以 α_1, α_2 为最大无关组. ———6 分

且 $\alpha_3 = -2\alpha_1$ ————————8 分

4、解 方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 5(\lambda-1)(\lambda+\frac{4}{5})$. ——————————3 分

(1) 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$ 时，方程组有惟一解； ——————————5 分

(2) 当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时，方程组为 $\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 5 \\ -4x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$，后两个方程是矛盾方程，因而

此时方程组无解. ——————————7 分

(3) 当 $\lambda=1$ 时, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,此时方程组有无穷多解, —9 分

求得其通解为: $(x_1,x_2,x_3)^T = k(0,1,1)^T + (1,-1,0)^T$. ————————————12 分

5、解：将所给矩阵记为 A.由

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$. ————————————3 分

对于 $\lambda_1=-2$，解方程 $(A+2E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，即 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$,

得特征向量 $(1, 2, 2)^T$，单位化得 $\mathbf{p}_1 = (\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T$. ——————————5 分

对于 $\lambda_2=1$，解方程 $(A-E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，即 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$,

得特征向量 $(2, 1, -2)^T$，单位化得 $\mathbf{p}_2 = (\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})^T$. ——————————7 分

对于 $\lambda_3=4$，解方程 $(A-4E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，即 $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$,

得特征向量 $(2, -2, 1)^T$，单位化得 $\mathbf{p}_3 = (\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T$. ——————————9 分

于是有正交阵 $P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，使 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-2, 1, 4)$. ——————————12 分

四、1.证明，设有数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1(2\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+5\alpha_3)+k_3(2\alpha_3+3\alpha_1)=0$$ ——————————1 分

整理得

$$(2k_1+3k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(5k_2+2k_3)\alpha_3=0$$ —————————2 分

由于向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，必有 $\begin{cases} 2k_1+3k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ 5k_2+2k_3=0 \end{cases}$, ——————————3 分

而 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 19 \neq 0$, —————————4 分

从而 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$。 ————————5 分

2．证明：因为 A、B 为对称矩阵，故有 $A^T = A, B^T = B$。

充分性：若 $AB = BA$，则 $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$，

即 AB 为对称阵。 ————————3 分

必要性：若 $(AB)^T = AB$，则 $AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$，

即 A、B 可交换。 ————————5 分

7 浙江理工大学 2009—2010 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 A 卷

一 选择题

1. D; 2. C; 3.A; 4. B; 5.D

二 填空题

1、-2；2、$t > 2$；3、—4；4、4；5、$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,2

三 计算题

1 解：$D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \end{vmatrix} \overset{r_i - r_1}{\underset{i=2,3,4}{=}} \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & -x \\ -x & 0 & x & 0 \end{vmatrix}$ ………5 分

$= \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & 0 \end{vmatrix} = -x^4$ ………8 分

2 解：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,所以，秩为 3， ………4 分

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为一个极大线性无关组。 ………8 分

$\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$ ……10 分

3 解：

三.$AB-B=A^2-E \qquad (A-E)B=(A-E)(A+E)$

又$|A-E|\neq 0, A-E$可逆,则$B=A+E=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$

………8 分

4 解：对增广矩阵进行初等行变换

$$\tilde{A}=(A\vdots b)=\begin{pmatrix}1&2&1&\vdots&-1\\0&a&1&\vdots&1\\1&3&a+1&\vdots&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&\vdots&-1\\0&a&1&\vdots&1\\0&1&a&\vdots&1\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&\vdots&-1\\0&1&a&\vdots&1\\0&0&1-a^2&\vdots&1-a\end{pmatrix}$$

………3 分

（1）当$a=-1$时，$r(A)=2, r(\tilde{A})=3, r(A)\neq r(\tilde{A})$，方程组无解；………5 分

（2）当$a\neq 1$且$a\neq -1$时，$r(A)=r(\tilde{A})=3$，方程组有唯一解；　………7 分

（3）当$a=1$时，$r(A)=r(\tilde{A})=2<3$，方程组有无穷多解。　　………9 分

此时

$$\tilde{A}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&\vdots&-1\\0&1&1&\vdots&1\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&\vdots&-3\\0&1&1&\vdots&1\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}$$

得通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$（$k\in R$）　………12 分

5 解：（1）由题意得$Ax=2x$，即$\begin{pmatrix}a&1&c\\0&b&0\\-4&c&1-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，

$$\begin{cases}a+2+2c=2\\2b=4\\-4+2c+2(1-a)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=2\\c=1\end{cases}$$

从而得　………6 分

（2）$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$，$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&0\\-4&1&3-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1$

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解方程组 $(A-2E)x=0$ 得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$，$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$ A 有三个线性无关的特征向量，所以 A 能相似对角化。 ………12 分

四 证明题

1 $A^{-1}(AB)A=BA, AB与BA$相似，由定理知相似矩阵有相同的特征值。……4 分

2 解：设 $k_1(\beta-\alpha_1)+k_2(\beta-\alpha_2)+k_3(\beta-\alpha_3)+k_4(\beta-\alpha_4)=0$

$(k_2+k_3+k_4)\alpha_1+(k_1+k_3+k_4)\alpha_2+(k_1+k_2+k_4)\alpha_3+(k_1+k_2+k_3)\alpha_4=0$ ………3 分

$\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}\neq 0 \therefore k_1=k_2=k_3=k_4=0 \quad \beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\beta-\alpha_3,\beta-\alpha_4$线性无关.

………6 分

8 浙江理工大学 2008—2009 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 A 卷

一 选择题 (5×4=20 分)

1、D　2、B　3、A　4、C　5　D

二 填空题 (6×4=28 分)

1、$\underline{a=0,b=0}$　2、$\underline{(AB)^k=3^k,(BA)^k=3^{k-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}}$　3、$\underline{3;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4}$　4、$\underline{x\neq 0}$　5、$\underline{k\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},(k\in R)}$　6、$\underline{6;1,\frac{1}{4},\frac{1}{9}}$

三、解答题(8+8+10+10+10=46 分)

1、 解：

$$\begin{vmatrix}a+b&b&b&b\\-b&a-b&-b&-b\\b&b&a+b&b\\-b&-b&-b&a-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b&b&b&b\\a&a&0&0\\-a&0&a&0\\a&0&0&a\end{vmatrix}$$ ……………4 分

$$=\begin{vmatrix}a&b&b&b\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4$$ ……………8 分

2、解：$\because$（$A-E$）$X=A$

$$\text{而由} A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \text{知} \ |A-E|=-1\neq 0$$

$\therefore X=\left(A-E\right)^{-1}A$ 4分

$$\left(A-E\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$ 6分

$$\therefore X=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$ 8分

3、解 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2k-2&3k-3\\0&0&6-3k-3k^2\end{pmatrix}$..........4 分

(1) $R(A)=3\Leftrightarrow\begin{cases}2k-2\neq 0\\6-3k-3k^2\neq 0\end{cases}$, 所以$k\neq 1$且$k\neq -2$;.........6 分

(2)当$k=1$时, $A\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 所以$R(A)=1$;.......................8 分

(3)当$k=2$时, $A\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&-6\\0&-6&-9\\0&0&0\end{pmatrix}$, 所以$R(A)=2$.........................10 分

4、解：$D=\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\\lambda&-1&1\\4&5&-5\end{vmatrix}=(4+5\lambda)(\lambda-1)$，……………………3 分

当$D\neq 0$，即$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -\dfrac{4}{5}$时，方程组有惟一解.　　…………5 分

当$\lambda=1$时，$B=(A,\beta)=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

此时$R(A)=R(B)=2$，方程组有无穷多个解.，并且通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ (c\in R)$$ …………8 分

当$\lambda=-\dfrac{4}{5}$时，$B=(A,\beta)=\begin{pmatrix}2&-\frac{4}{5}&-1&1\\-\frac{4}{5}&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}10 & -4 & -5 & 5\\ -4 & -5 & 5 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

此时 $R(A)=2,\ R(B)=3$，方程组无解. ……………………10 分

5、解：(1)先求 A 的特征值，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ -2 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

$\lambda_1=2,\lambda_2=3,\lambda_3=-1$ ， ....3 分

当 $\lambda_1=2$ 时，A 的对应于 2 的特征向量是 $k_1\xi_1=k_1\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$，$k_1\neq 0$，

当 $\lambda_2=3$ 时，A 的对应于 3 的特征向量是 $k_2\xi_2=k_2\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$，$k_2\neq 0$，

当 $\lambda_2=-1$ 时，A 的对应于 -1 的特征向量是 $k_3\xi_3=k_3\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}^T$，$k_3\neq 0$，

........................6 分

(2)令 $P=\begin{pmatrix}\xi_1, & \xi_2, & \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 3 & \\ & & -1\end{pmatrix}$

……………...10 分

四、证明题(5+5=10 分)

1、证明 设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$, 则 $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$,

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,得 $\begin{cases}k_1+k_3=0\\ k_1+k_2=0\\ k_2+k_3=0\end{cases}$,……………………3 分

方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$，

得方程组只有零解,所以向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关 ……………….5 分

2、证明: 由 $A(A-E)=0$ 得 $R(A)+R(A-E)\leq n$,………………………3 分

又 $R(A)+R(A-E)=R(A)+R(E-A)\geq R(A+(E-A))=R(E)=n$,所以

$R(A)+R(A-E)=n$ ………………………………….5 分