离散数学概论

第六章 特殊的图（二）

课程QQ号： **819392514**
金耀 软件工程系
fool1025@163.com
13857104418

知识回顾：哈密顿图的判定

- **定理：（必要条件）** 设无向连通图$G=<V,E>$是哈密尔顿图，S是V的任意非空真子集，则$p(G-S)\leq|S|$，其中$p(G-S)$是从G中删除S后所得到图的连通分支数。

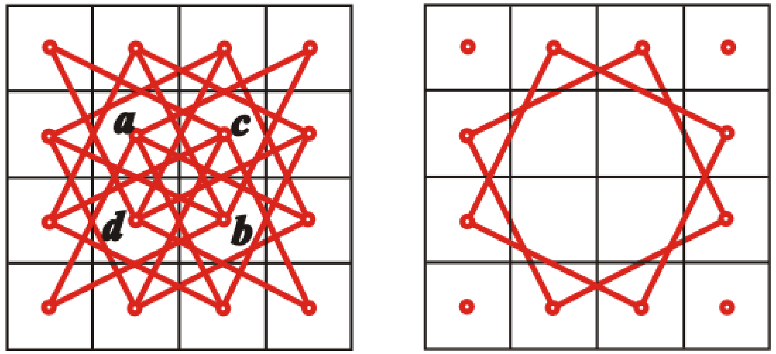
（注意：此定理只是哈密尔顿图的必要条件，而不是充分条件。可以利用其逆否命题来判断某些图是否不是哈密尔顿图，即下述定理）

- **定理：（充分条件）** 设$G=<V,E>$是具有n个顶点的简单无向图，若在G中每一对**不相邻**顶点的次数之和大于等于n-1，则在G中存在一条哈密尔顿路径。

判断是否是哈 密顿图

■ 不满足必要条件

例 4×4国际象棋盘上的跳马问题：马是否能恰好经过每一个方格一次后回到原处?



解 每个方格看作一个顶点, 2个顶点之间有边当且仅当马可以从一个方格跳到另一个方格, 得到16阶图G, 如左图红边所示. 取$V_1=\{a, b, c, d\}$, 则$p(G-V_1) = 6 > |V_1|$, 见右图. 由定理, 图中无哈密顿回路, 故问题无解.

在8×8国际象棋盘上, 跳马问题是否有解?

判断是否为哈密顿图是NP完全的

应用实例

例　某次国际会议8人参加，已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都能与两边的人交谈？

解 作无向图$G=\langle V,E\rangle$，其中$V=\{v|v$为与会者$\}$，$E=\{(u,v) \mid u,v\in V$, u与v有共同语言，且$u\neq v\}$.

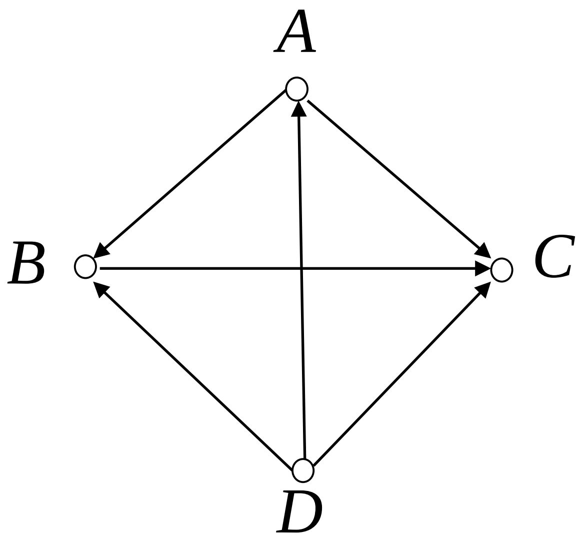
G为简单图. 根据条件，$\forall v\in V$, $d(v)\geq 4$. 于是，$\forall u,v\in V$, 有$d(u)+d(v)\geq 8$. 由定理可知G为哈密顿图.

服务员在G中找一条哈密顿回路C，按C中相邻关系安排座位即可.

竞赛图

竞赛图：任意两个顶点之间恰好有一条有向边。

在循环赛中，n个参赛队中的任意两个队比赛一次，假设没有平局，用有向图描述比赛结果：顶点表示参赛队，A到B有一条边当且仅当A队胜B队。



竞赛图(续)

定理 在$n(n\geq 2)$阶有向图D中，如果所有有向边均用无向边代替，所得无向图中含生成子图K_n，则有向图D中存在哈密顿通路.

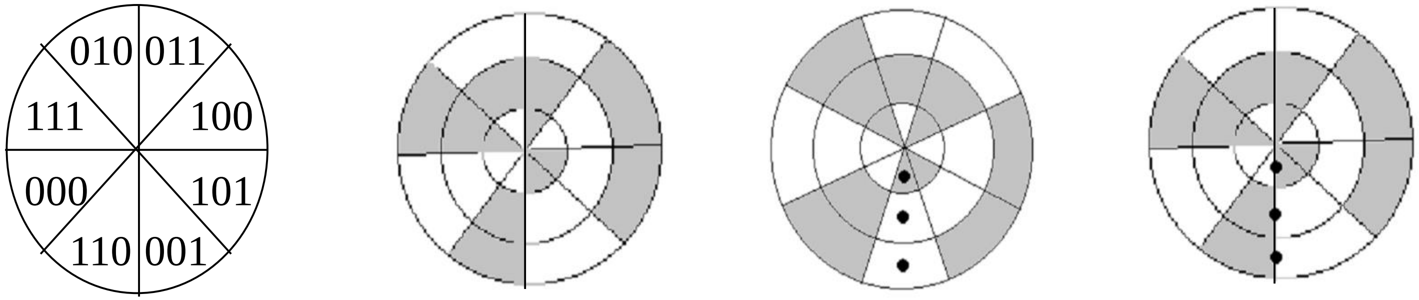
根据定理，竞赛图中一定有哈密顿通路，当然也可能有哈密顿回路. 当没有哈密顿回路时，通常只有一条哈密顿通路，这条通路给出参赛队的唯一名次.

例如，$CABD$是一条哈密顿通路，它没有哈密顿回路，

比赛结果是C第一，A第二，B第三，D第四.

格雷码(gray code)

为了确定圆盘停止旋转后的位置, 把圆盘划分成2^n个扇区, 每个扇区分配一个n位0-1串. 要用某种电子装置读取扇区的赋值.当圆盘停止旋转后, 如果电子装置处于一个扇区的内部, 它将能够正确读出这个扇区的赋值, 如果电子装置恰好处于两个扇区的边界上, 就可能出问题. 如何赋值, 才能将可能出现的误差减少到最小?

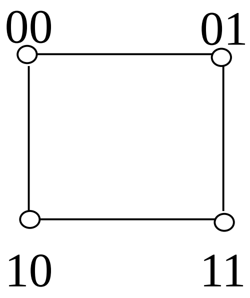


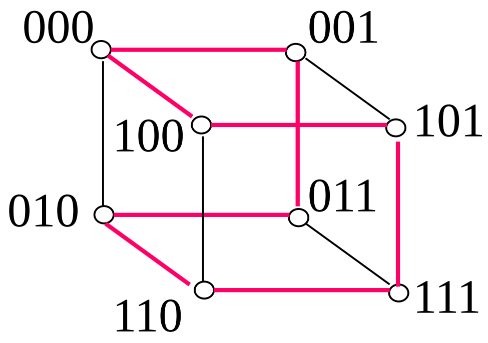
格雷码(续)

格雷码: 相邻的两个以及最后一个和第一个之间只有一位不同的把n位0-1串序列

例如，000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100是一个格雷码

构造n维立方体图: 2^n个顶点, 每个顶点表示一个n位串, 两个顶点之间有一条边当且仅当它们的n位串仅相差一位. 当$n \geq 2$时, 图中一定存在哈密顿回路.





旅行商问题(TSP)

- 一个商品推销员要去若干个城市推销商品，该推销员从一个城市出发，需要经过所有城市后，回到出发地。应如何选择行进路线，以使总的行程最短？

实质是在一个带权完全无向图中，找一个权值最小的Hamilton回路。

1.1 树

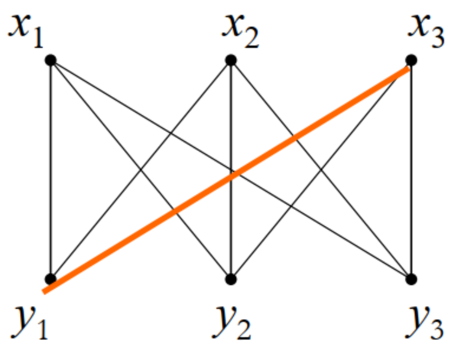
1.2 欧拉图

1.3 哈密尔顿图

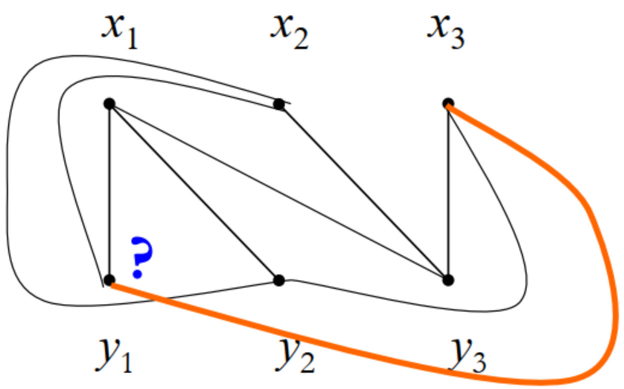
1.4 平面图

修建铁路问题

❖ 假定有三个仓库x_1，x_2，x_3和三个车站y_1，y_2，y_3。为了便于货物运输，准备在仓库与车站间修筑铁路，如图(a)所示，其中边代表铁路。问是否存在一种使铁路不交叉的路线设计方案，以避免修建立交桥。



(a)



如果在 x_3与y_1之间也要修一条铁路，则问题的解答可验证满足要求的方案不存在。

五宫修路问题

相传古代有一位独裁者，临死时留有遗嘱，把土地分给他的五个儿子，这五个儿子在自己的领地上各修筑了一座宫殿，他们还企图修一些道路，使得每两座宫殿之间有一条道路直接相通，又要求道路不能交叉。结果，这五个愚蠢的王子煞费苦心，终告失败。

1930年，波兰数学家库拉图斯基给出平面图的充要条件，严格证明了五宫修路问题是无解的。

一. 基本概念

【定义】

(1) G可嵌入曲面S: 若能将G除顶点外无边相交地画在S上

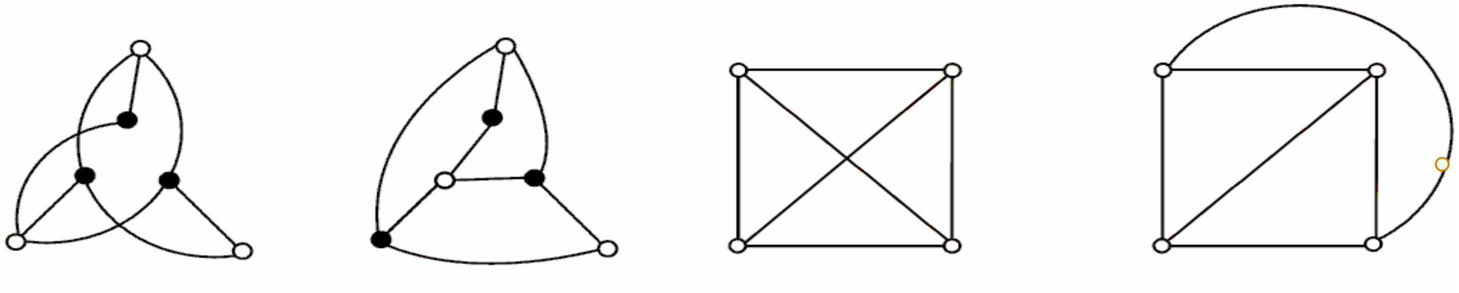
(2) G是可平面图或平面图: G可嵌入平面Π

(3) 平面嵌入: 画出的无边相交的平面图

(4) 非平面图: 无平面嵌入的无向图

(2)是(1) 的平面嵌入

(4)是(3)的平面嵌入



(1) (2) (3) (4)

平面图的面与次数

设G是一个平面嵌入

G的面: 由G的边将平面划分成的每一个区域

无限面(外部面): 面积无限的面, 用R_0表示

有限面(内部面): 面积有限的面, 用$R_1, R_2, \ldots, R_k$表示

面R_i的边界: 包围R_i的所有边构成的回路组

面R_i的次数: R_i边界的长度, 用$\deg(R_i)$表示

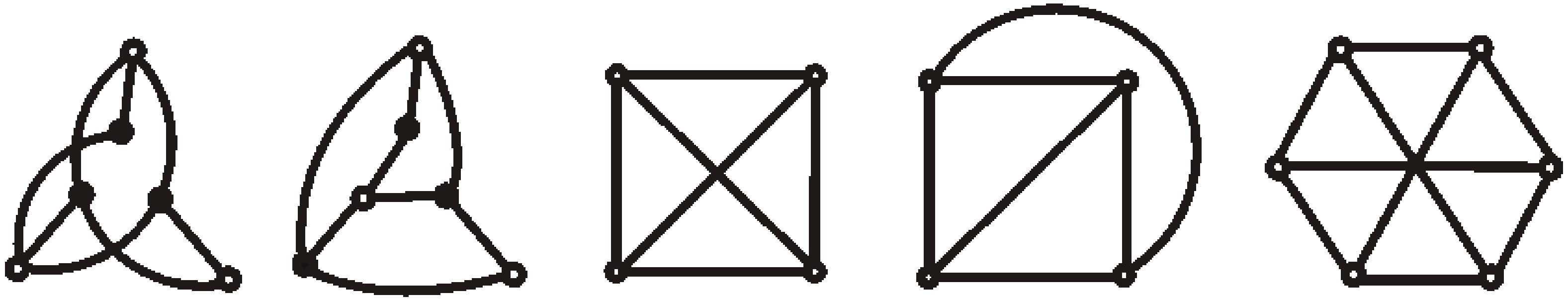
定理 平面图各面的次数之和等于边数的2倍.

证: 每条边可能在两个面的公共边界上, 也可能只在一个面的边界上. 前者, 在每个面的边界上这条边只出现一次, 计算两次. 后者, 它在这个面的边界上出现2次, 也计算两次.

平面图和平面嵌入

定义 如果能将图G除顶点外边不相交地画在平面上，则称G是**平面图**. 这个画出的无边相交的图称作G的**平面嵌入**. 没有平面嵌入的图称作**非平面图**.

例如 下图中(1)~(4)是平面图，(2)是(1)的平面嵌入，(4)是(3)的平面嵌入. (5)是非平面图.



(1) (2) (3) (4) (5)

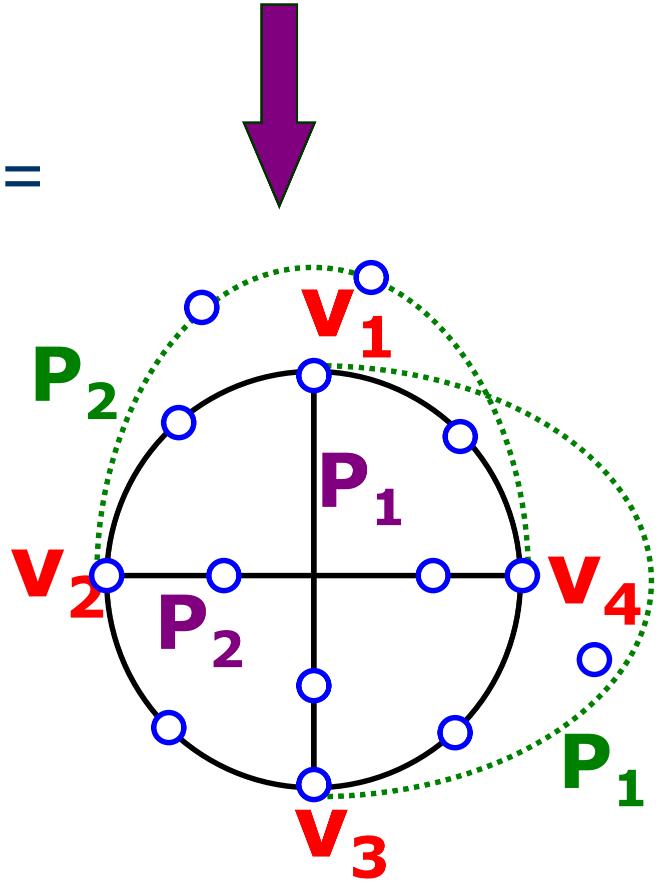
观察法

设G是画于平面上的图，并设

$$C = v_1 \ldots v_2 \ldots v_3 \ldots v_4 \ldots v_1$$

是G中的任何基本回路。此外，设$P_1 = v_1 \ldots v_3$和$P_2 = v_2 \ldots v_4$是G中的任意两条无公共结点的基本通路。

观察法

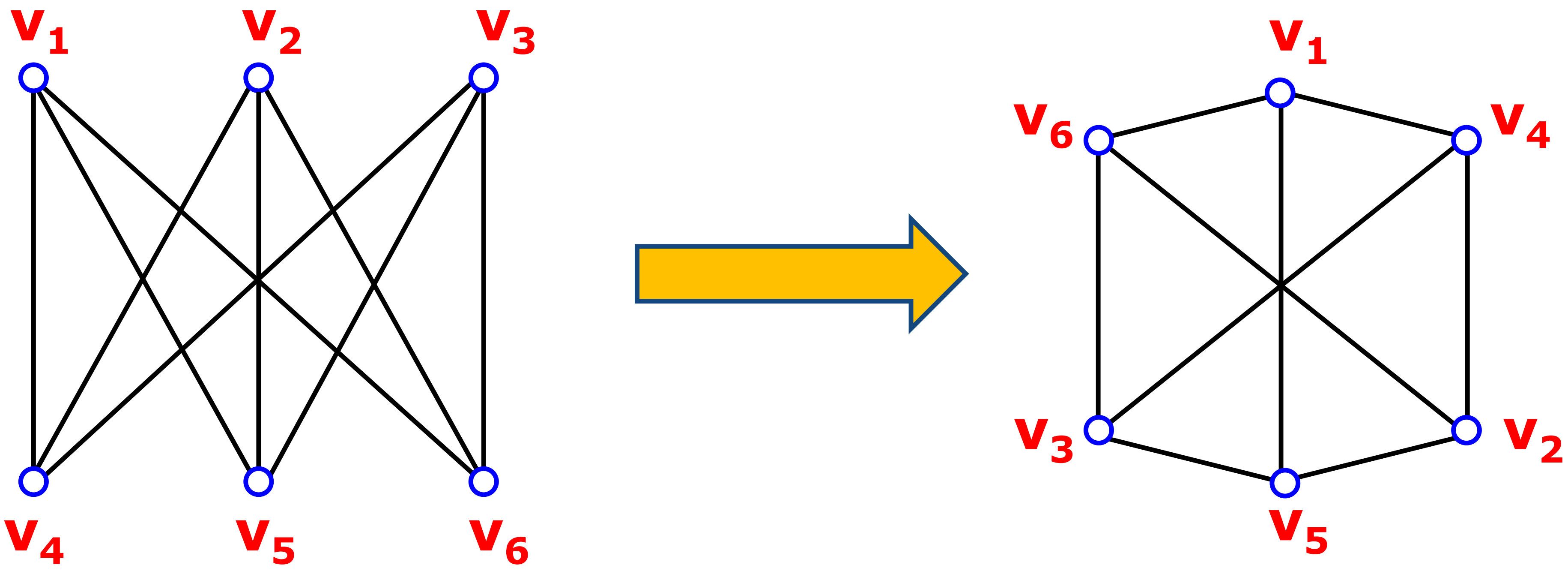


解题小贴士——平面图的判断

找出基本回路，再看有没有端点在其上的可能交叉的通路，将这些通路分别放到回路的内部或者外部，看看能否避免交叉。

例

用观察法来判定图$K_{3,3}$为非平面图。



面的形象描述

假设我们把一个平面图的平面表示画在平面上，然后用一把小刀，沿着图的边切开，那么平面就被切成许多块，每一块就是图的一个面。

更确切地说，平面图的一个面就是平面的一块，它用边作边界线，且不能再分成子块。

解题小贴士——连通平面图中面和边界的计算

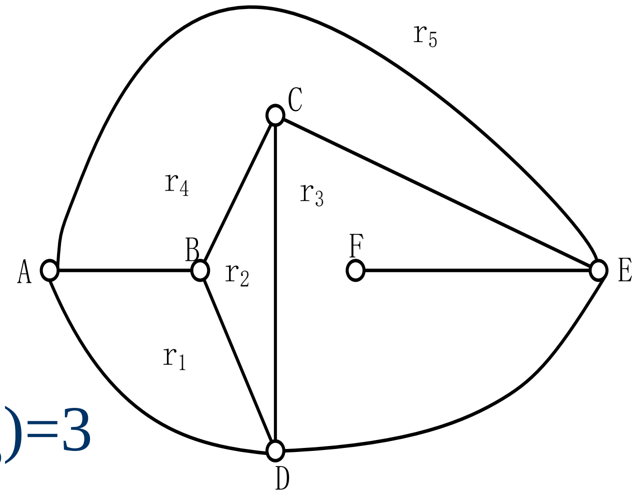
面是由边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域，面的边界是包围该面的诸边所构成的回路。

注意：如果图中有桥（或割边），桥须在边界中走两次。

平面图和平面嵌入(续)

- 今后称一个图是平面图，可以是指定义中的平面图，又可以是指平面嵌入，视当时的情况而定. 当讨论的问题与图的画法有关时，是指平面嵌入.
- K_5和$K_{3,3}$是非平面图
- 设$G'\subseteq G$, 若G为平面图, 则G'也是平面图; 若G'为非平面图, 则G也是非平面图.
- $K_n(n\geq 5)$, $K_{n,m}(n,m\geq 3)$都是非平面图.
- 平行边与环不影响图的平面性.

例：列出右图各个面的次数。

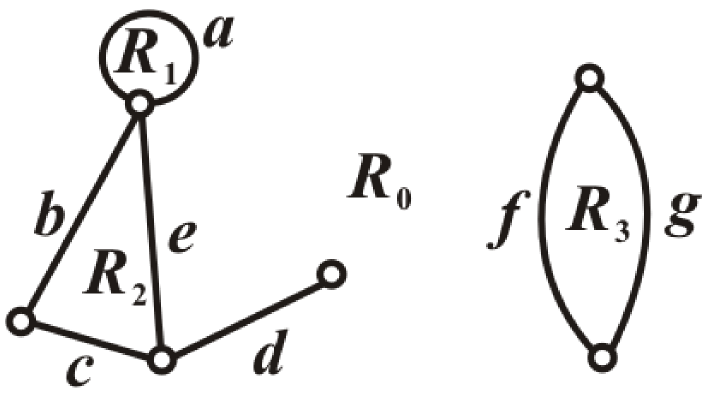


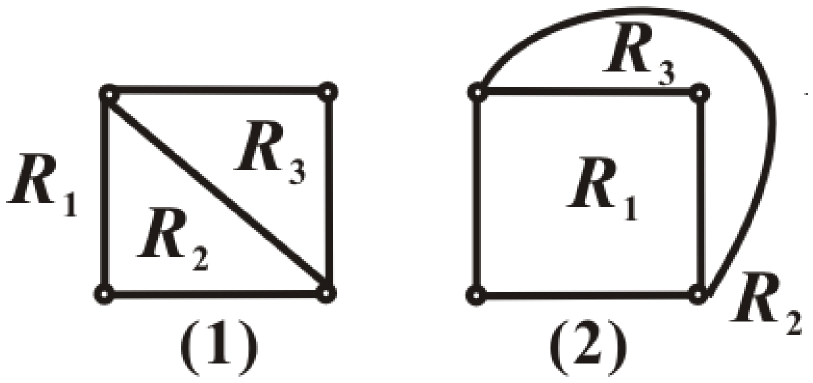
解：$D(r_1)=3$，$D(r_2)=3$，$D(r_3)=5$，$D(r_4)=4$， $D(r_5)=3$

$3D(r_1)+D(r_2)+D(r_3)+D(r_4)+D(r_5)=18$

平面图的面与次数(续)

例1 右图有4个面, $\deg(R_1)=1$, $\deg(R_2)=3$, $\deg(R_3)=2$, $\deg(R_0)=8$.

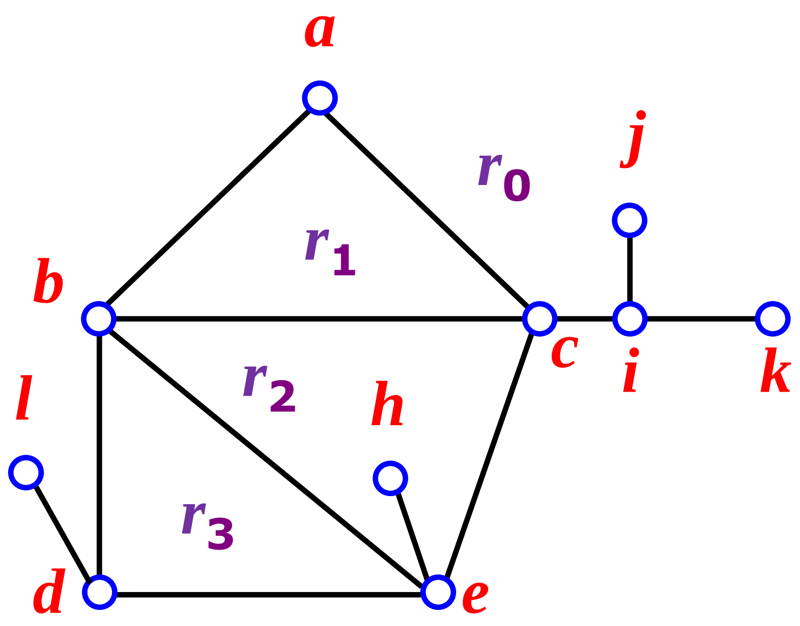




例2 左边2个图是同一个平面图的平面嵌入. R_1在(1)中是外部面, 在(2)中是内部面; R_2在(1)中是内部面, 在(2)中是外部面. 其实, 在平面嵌入中可把任何面作为外部面.

例

考察下图所示平面图的面、边界和次数。



平面图把平面分成4个面：

r_0，边界为*abdldecijikica*，$D(r_0)=13$

r_1，边界为*abca*，$D(r_1)=3$

r_2，边界为*behecb*，$D(r_2)=5$

r_3，边界为*bdeb*，$D(r_3)=3$

r_1、r_2和r_3是有限面，r_0是无限面

极大平面图

定义 若G是简单平面图，并且在任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图，则称G为**极大平面图**.

例如，K_5, $K_{3,3}$若删去一条边是极大平面图.

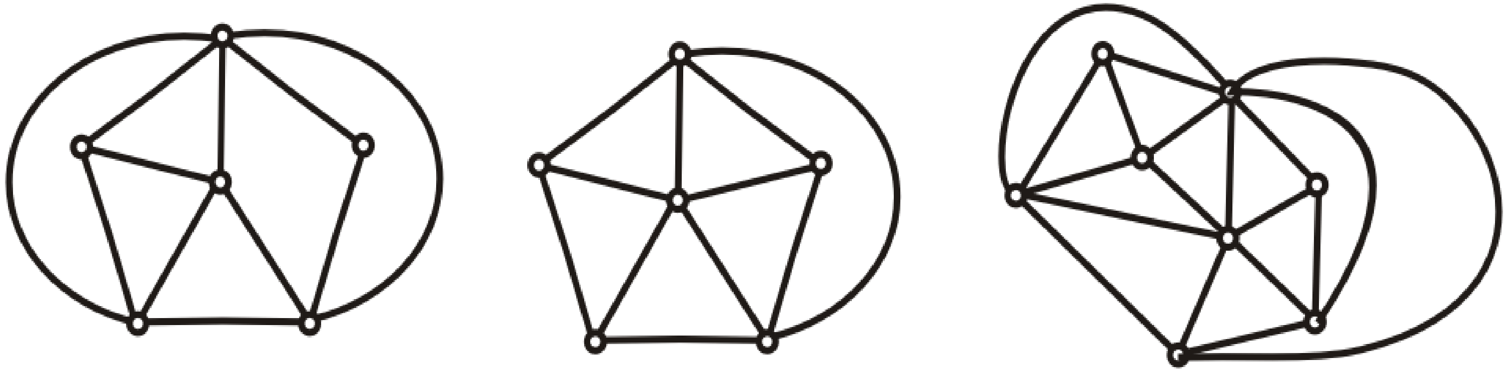
K_1, K_2, K_3, K_4都是极大平面图(它们已无不相邻顶点).

- 极大平面图必连通.
- 阶数大于等于3的极大平面图中不可能有割点和桥.
- 任何$n(n\geq 4)$阶极大平面图G均有$\delta(G)\geq 3$.

定理 $n(n\geq 3)$阶简单平面图是极大平面图当且仅当它连通且每个面的次数都为3.

实例

例　是否是极大平面图?



不是　　不是　　是

极小非平面图

定义 若G是非平面图，并且任意删除一条边所得图都是平面图，则称G为**极小非平面图**.

极小非平面图必为简单图

例如，K_5, $K_{3,3}$是极小非平面图

二. 欧拉公式

- **定理：**（欧拉公式）设$G=\langle V,E\rangle$是连通平面图，有n个顶点，m条边，r个面，则有$n-m+r=2$。
- **证明：** 我们对G的边数m进行归纳。

（1）若$m=0$，由于G是连通图，故必有$n=1$，这时只有一个无限面，即$r=1$。所以$n-m+r=1-0+1=2$。
定理成立。

（2）若$m=1$，这时有两种情况：

①该边是自回路，则有$n=1, r=2$，这时$n-m+r=1-1+2=2$

②该边不是自回路，则有$n=2, r=1$，这时$n-m+r=2-1+1=2$

所以$m=1$时，定理也成立。

（3）假设对少于m条边的所有连通平面图，欧拉公式成立。现考虑m条边的连通平面图，设它有n个结点。分以下两种情况：

①若G是树，那么$m=n-1$，这时$r=1$，所以$n-m+r=n-(n-1)+1=2$。

②若G不是树，则G中必有回路，因此有基本回路，设e是某基本回路的一条边，则$G'=<V, E-\{e\}>$仍是连通平面图，它有n个结点，$m-1$条边和$r-1$个面，按归纳假设知$n-(m-1)+(r-1)=2$，整理得$n-m+r=2$。所以对m条边时，欧拉公式也成立。

欧拉公式得证。

欧拉公式(续)

推论(欧拉公式的推广) 设G是有 p ($p\geq 2$) 个连通分支的平面图，则

$$n - m + r = p + 1$$

证　设第 i 个连通分支有 n_i个顶点, m_i 条边和 r_i 个面.

对各连通分支用欧拉公式,

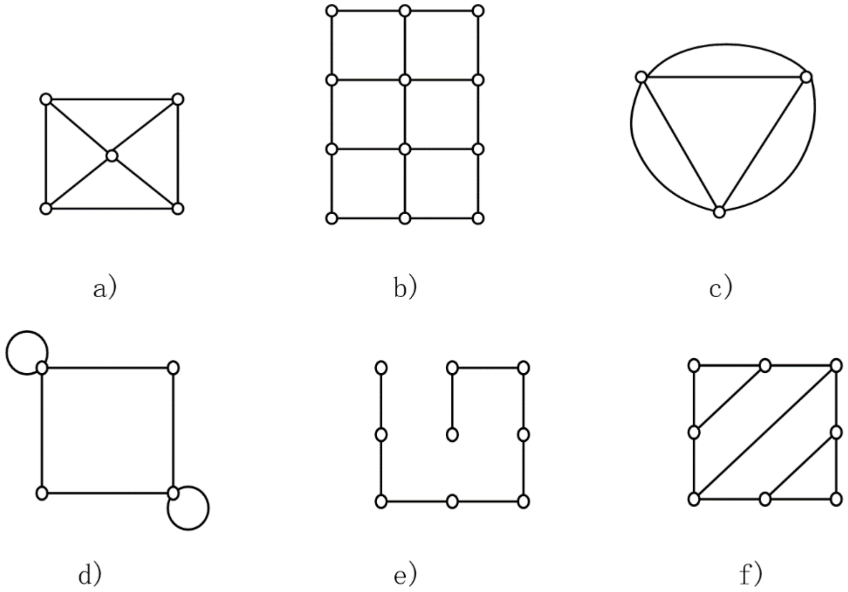
$$n_i - m_i + r_i = 2, \qquad i = 1, 2, \dots , p$$

求和并注意 $r = r_1+\dots+r_p+ p-1$, 即得

$$n - m + r = p + 1$$

二. 欧拉公式

例：求下面各图的顶点数V，边数E和区域数R。并检验欧拉公式。



解：欧拉公式：$V-E+R=2$。

图(a)：$V=5,E=8,R=5$,且$5-8+5=2$。

图(b)：$V=12,E=17,R=7$,且$12-17+7=2$。

图(c)：$V=3,E=6,R=5$,且$3-6+5=2$。

图(d)：$V=4,E=6,R=4$,且$4-6+4=2$。

图(e)：$V=9,E=8,R=1$,且$9-8+1=2$。

图(f)：$V=8,E=11,R=5$,且$8-11+5=2$。

平面图的性质

定理 设G为n阶m条边的连通平面图，每个面的次数不小于l ($l \geq 3$)，则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

设G为有 p ($p \geq 2$) 个连通分支的平面图，且每个面的次数不小于l ($l \geq 3$)，则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-p-1)$$

证 由各面次数之和等于边数的2倍及欧拉公式得

$$2m \geq lr = l\,(2+m-n)$$

可解得所需结论.

对 p ($p \geq 2$) 个连通分支的情况类似可证.

平面图的性质(续)

推论 K_5 和 $K_{3,3}$不是平面图.

证 用反证法，假设它们是平面图,则 K_5 : n=5, m=10, l=3

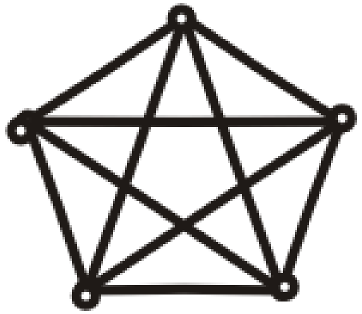
$$10 \le \frac{3}{3-2} \times (5-2) = 9$$

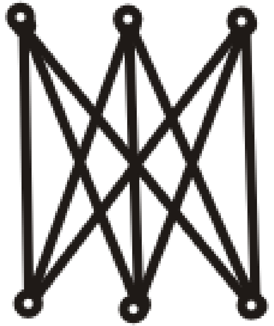
矛盾.

$K_{3,3}$: n=6, m=9, l=4

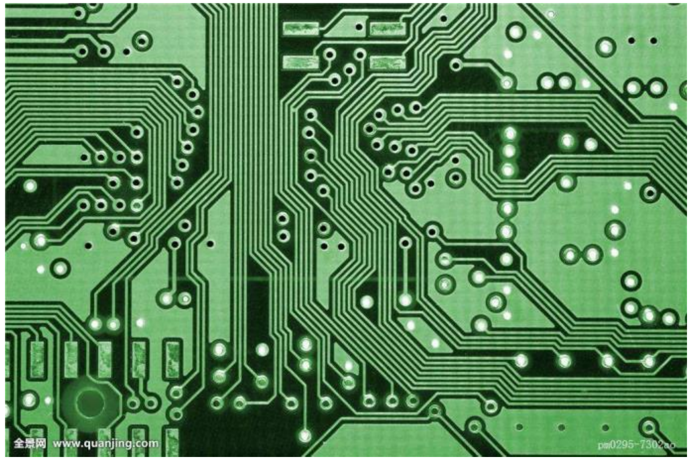
$$9 \le \frac{4}{4-2} \times (6-2) = 8$$

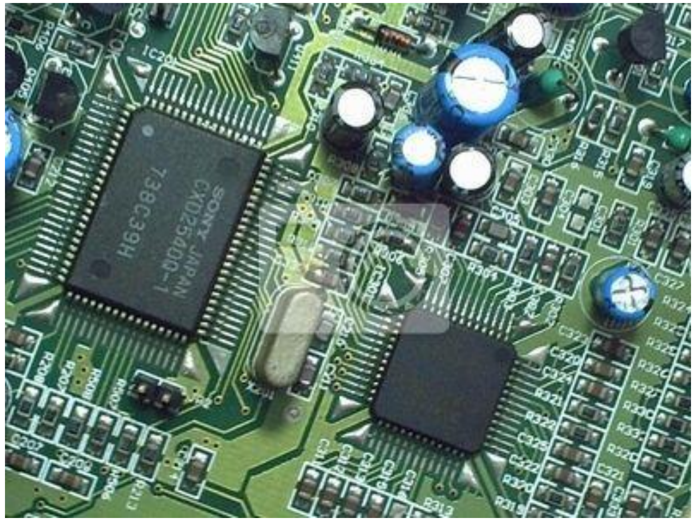
矛盾.

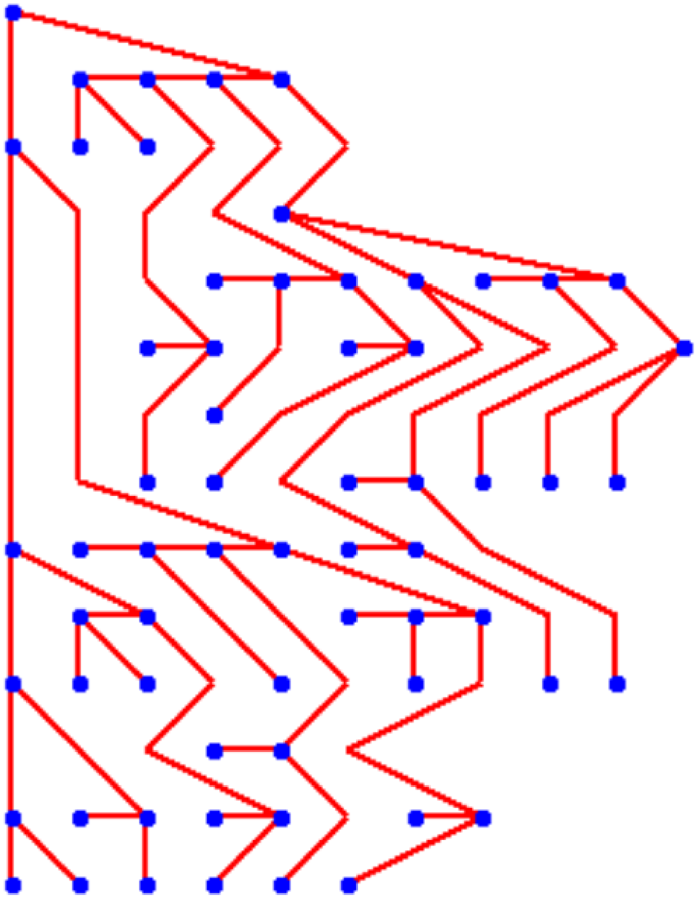

K_5


$K_{3,3}$

平面图（印刷电路板/集成电路）







三. 平面图判定

根据平面的定义，无圈的图显然是平面图。故研究图的平面性问题，只需要限制有圈的一类图即可。

判别方法是：

(1) 对于有圈的图找出一个长度尽可能大的且边不相交的基本圈。

(2) 将图中那些相交于非结点的边，适当放置在已选定的基本圈内侧或外侧，若能避免除结点之外边的相交，则该图是平面图；否则，便是非平面图。

三. 平面图判定

定理： 设G是一个简单连通平面图$G(n, m)$，若$m>1$，则有$m\leq 3n-6$。

证明： 设G有k个面，因为G是平面图，所以G的每个面至少由3条边围成，所以G所有面的次数之和$\sum_{i=1}^{k} D(r_i) \geq 3k$。

根据定理在平面图中，所有面的次数之和等于图中边数的二倍，即$\sum_{i=1}^{k} D(r_i) = 2m$，故$2m \geq 3k$，即$k\leq 2m/3$，代入欧拉公式有

$$2 = n - m + k \leq n - m + \frac{2}{3}m$$

整理得 $m\leq 3n-6$

定理得证。

推论： 任何简单连通平面图中，至少存在一个其度不超过5的结点。

三. 平面图判定

- **定义**：一个图的**围长**是它包含的最短圈的长度。一个图若不含圈，则规定其围长为无穷大。
- **定理**：设G是一个简单连通平面图$G(n, m)$，其围长$k>2$，则有

$$m \le \frac{k}{k-2}(n-2)。$$

- **证明**：设G共有r个面，各面的次数之和为T，

由条件可知$T \geq k \times r$，又因为$T = 2 \times m$，

故利用欧拉公式可以解出面数$r = 2\text{-}n+m$。

联立以上公式得出$2 \times m \geq k \times (2\text{-}n+m)$，

从而有$(k\text{-}2) \times m \leq k \times (n\text{-}2)$。

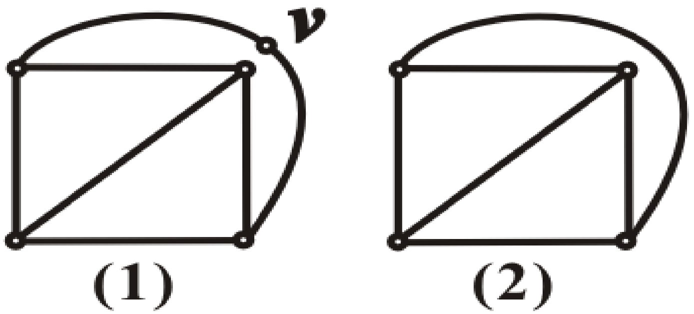
由于$k \geq 3$，因而$m \le \frac{k}{k-2}(n-2)$。

定理得证。

同胚与收缩

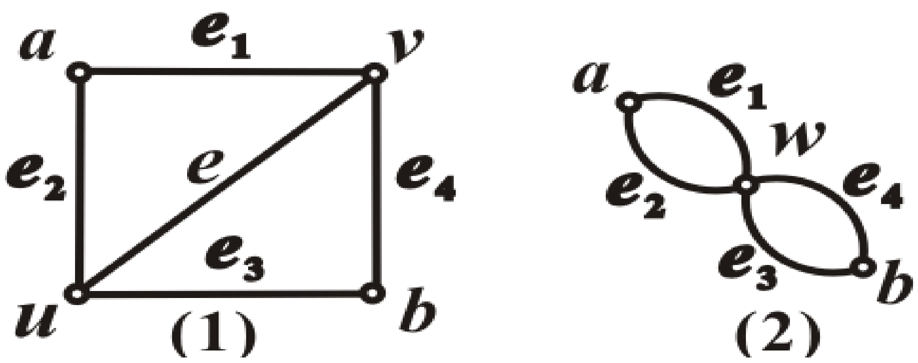
消去2度顶点v 如上图从(1)到(2)

插入2度顶点v 如上图从(2)到(1)



G_1与G_2同胚: G_1与G_2同构, 或经过反复插入、或消去2度顶点后同构

收缩边e 如下图从(1)到(2)



三. 平面图判定

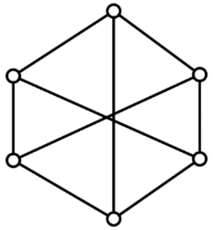
- **推论：** 一个简单连通图，若不满足$m \le 3n-6$ 或$m \le \frac{k}{k-2}(n-2)$，则一定是非平面图。而满足上面不等式的简单连通图未必是平面图。

- 还可以根据**库拉图斯基定理**来作为判别平面图充要条件。

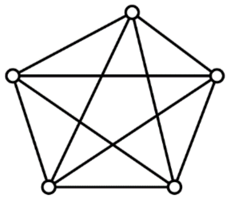
  在图论中，称$K_{3,3}$和K_5是**库拉图斯基图**。

- **定义：** 若图G_2可由图G_1中的一些边上适当插入或消去度为2的有限个结点后而得到，则称G_1与G_2**同胚**。

- **定理：** 库拉图斯基定理(Kuratowski定理)：一个图G是平面图的充要条件为G中不含同胚于$K_{3,3}$或K_5的子图。



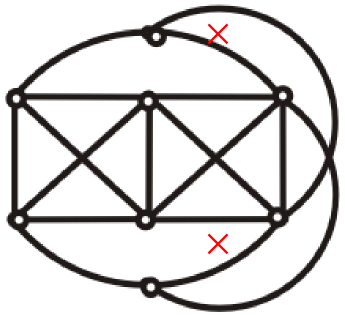
a) $K_{3,3}$



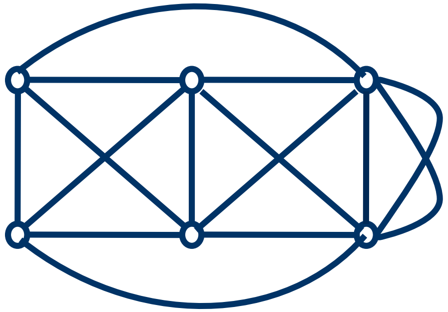
b) K_5

非平面图证明

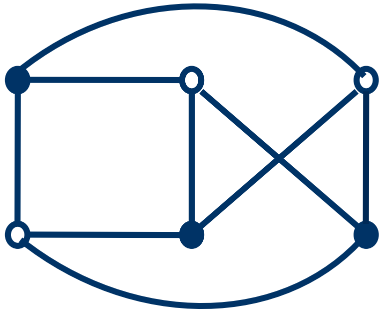
例 证明下述2个图均为非平面图.



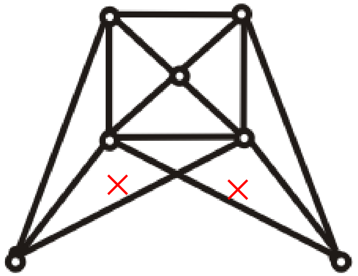
⇒



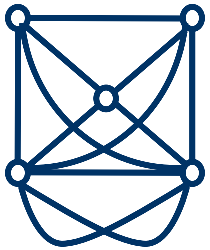
⇒



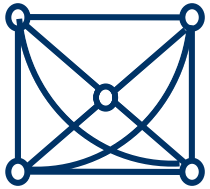
收缩2条边　　取子图　　$K_{3,3}$



⇒



⇒



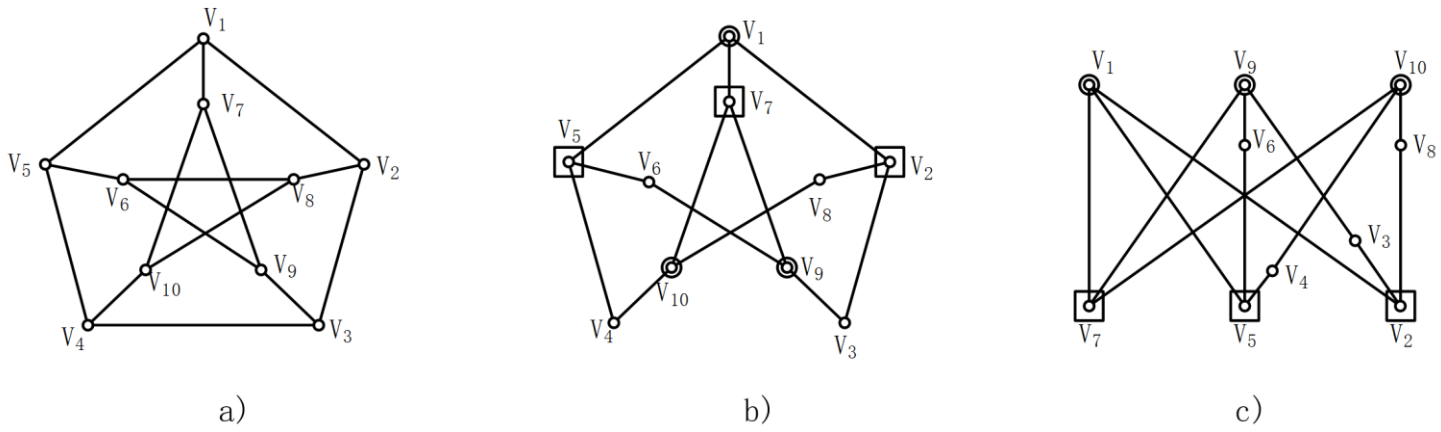
收缩2条边　　取子图　　K_5

三. 平面图判定

- 在图G的边uv上新增加一个二度结点，称为图G的**细分**。一条边上也可以同时增加有限个二度结点，所得的新图称为原来图的**细分图**。

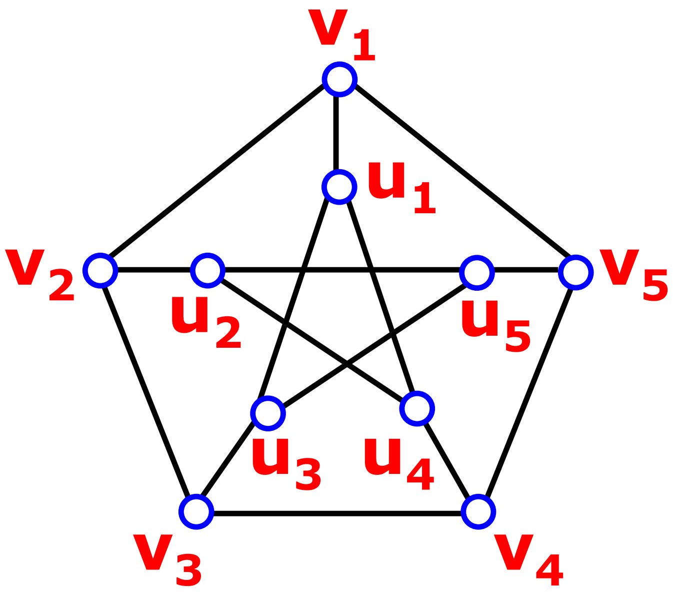
故库拉图斯基定理也可以表述为一个图是平面图的充分必要条件是它不包含与K_5和$K_{3,3}$细分图同构的子图。

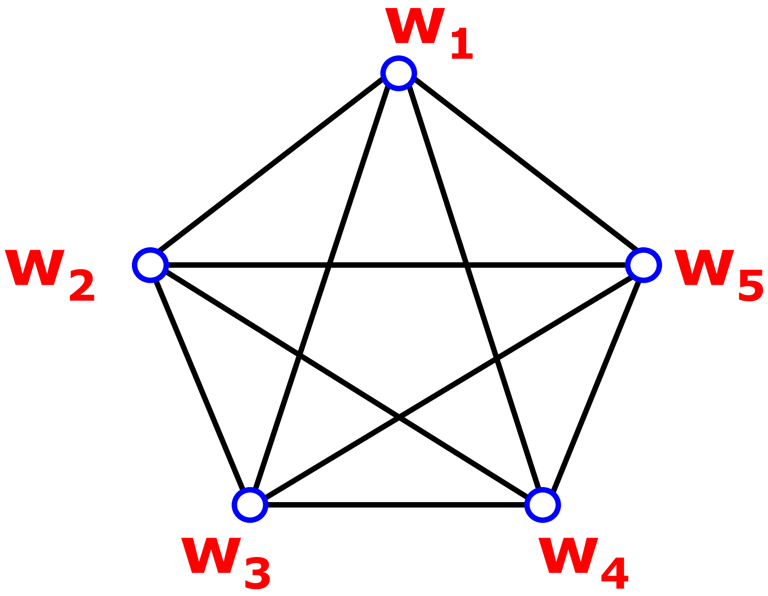
例如，$a)$图称为**彼得森图**，该图是非平面图。因为当删去边$[v_6,v_8]$和$[v_3,v_4]$时，它成为含有同胚于$K_{3,3}$的子图，如图$b)$、$c)$所示。



例

证明下图所示的彼得森图是一个非平面图。

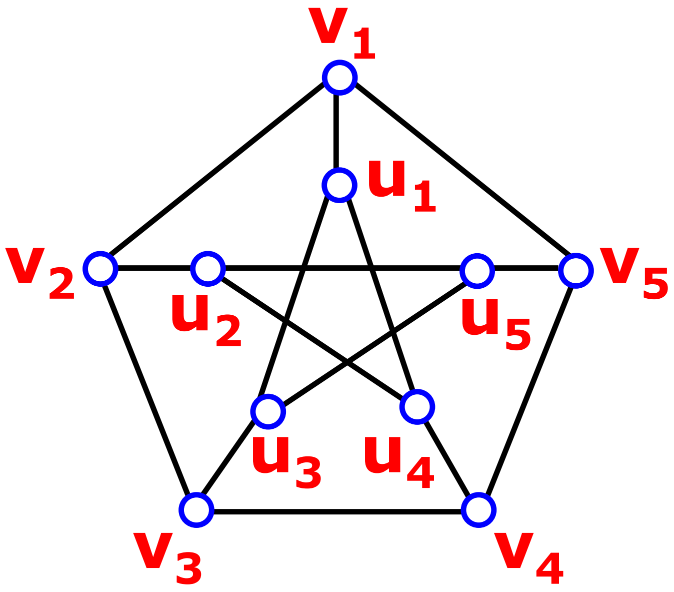


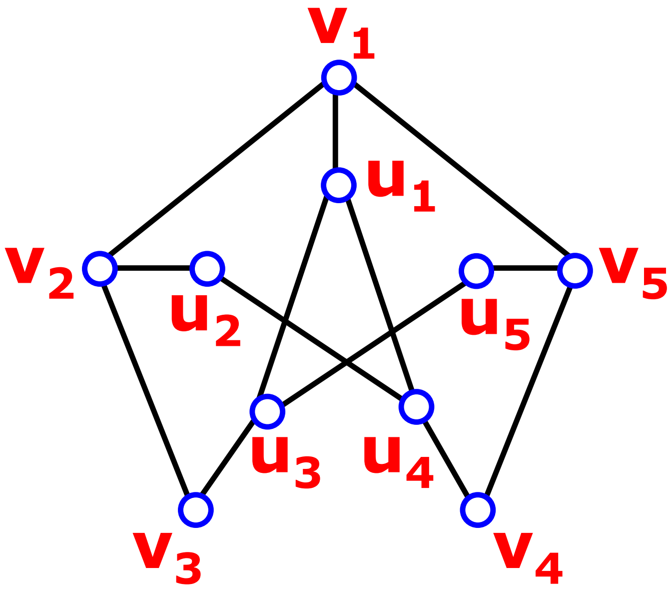


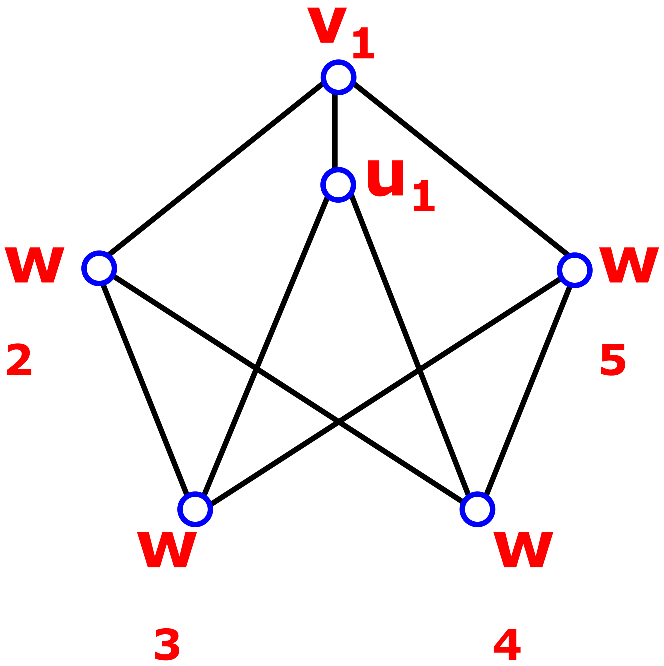
方法一： 收缩边(v_i, u_i)，用w_i代替，$i = 1, 2, 3, 4, 5$，得到图即为K_5。

例

证明下图所示的彼得森图是一个非平面图。







方法二：找到子图，

收缩边(v_i, u_i)，用w_i代替，i=2,3,4,5，得到图即为$K_{3,3}$。

三. 平面图判定

例：设G是有11个顶点或更多顶点组成的无向简单图，证明G或者其补图$\overline{G}$是非平面图。

证明：用反证法。若G有m条边，其补图$\overline{G}$有m'条边，G的顶点数为n，

则有：$m+m' = n(n-1)/2$。

因G和G'均为平面图，有$m\leq 3n-6$和$m' \leq 3n-6$，因此$n(n-1)/2 = m+m' \leq 6n-12$，

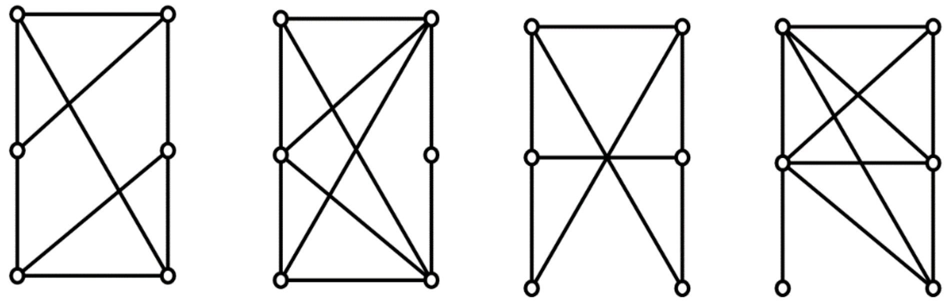
即$n^2-13n+24\leq 0$, $(n-11)(n-2)+2\leq 0$。

当$n\geq 11$时，$(n-11)(n-2)+2>0$，从而产生矛盾。

这说明图G或其补图$\overline{G}$是非平面图。

三. 平面图判定（*）

例：鉴别下图$a)b)c)d)$中哪些图是平面图。



a)　　b)　　c)　　d)

解：只有$a)$和$b)$是平面图。

因为它们可以被画成没有交叉边的图形。

库拉图斯基（Kuratowski）

学术贡献

- 库拉图斯基闭包公理
- 塔斯基–库拉图斯基算法
- 平面图的库拉图斯基定理
- 库拉图斯基十四集问题
- 佐恩引理的证明

波兰数学家

(1896-1980)

平面图的对偶图

定义 设平面图G，有n个顶点，m条边和r个面，G的**对偶图**

$G^*=\langle V^*,E^*\rangle$如下：

在G的每一个面R_i中任取一个点v_i^*作为G^*的顶点，

$$V^*=\{\, v_i^* \mid i=1,2,\ldots,r \,\}.$$

对G每一条边e_k，若e_k在G的面R_i与R_j的公共边界上，则作边

$e_k^*=(v_i^*,v_j^*)$，且与e_k相交；若e_k为G中的桥且在面R_i的边界上，

则作环$e_k^*=(v_i^*,v_i^*)$.

$$E^*=\{\, e_k^* \mid k=1,2,\ldots,m \,\}.$$

对偶图

- 将平面图G嵌入平面后,通过以下手续(简称D过程):

(1)对图G的每个面D_i的内部作一顶点且仅作一顶点v^*_i;

(2)经过每两个面D_i和D_j的每一共同边界e^*_k作一条边$e^*_k=(v^*_i,v_j)$与e_k相交;

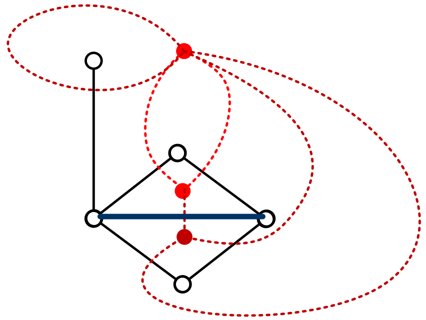
(3)当且仅当e_k只是面D_i的边界时,v^*_i恰存在一自回路与e_k相交。

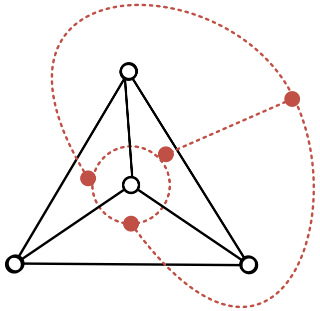
所得的图称为图G的**对偶图**,记为G^*。

如果图G的对偶图G^*同构于G，则称图G是**自对偶图**。

对偶图是相互的。

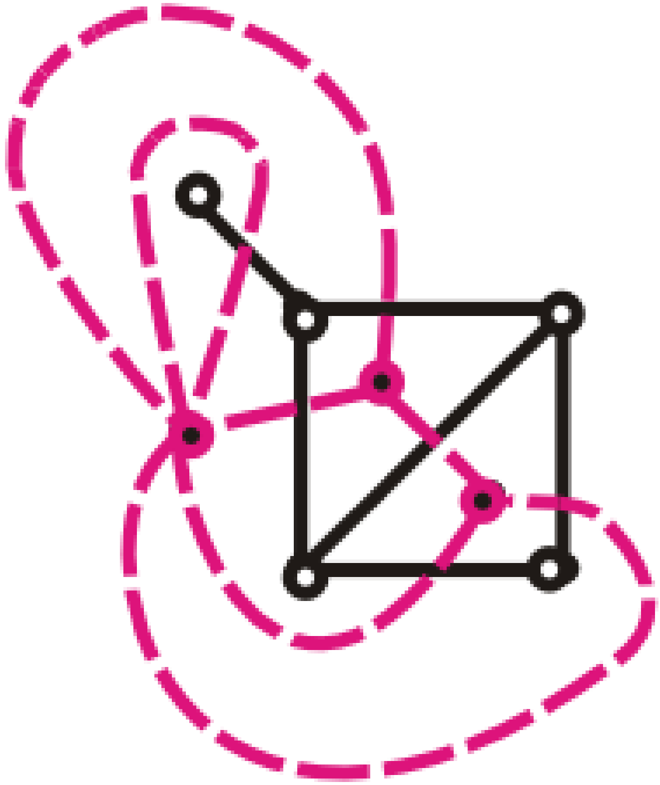
如下图所示，左图为对偶图，右图为自对偶图。

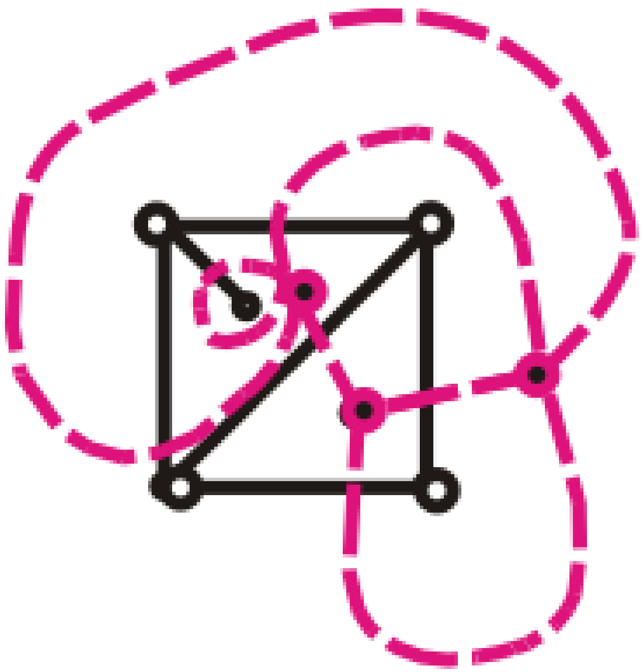




平面图的对偶图的实例

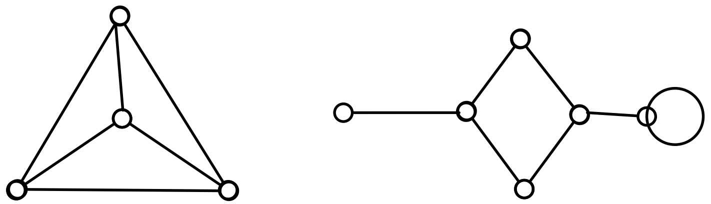
例 黑色实线为原平面图，红色虚线为其对偶图



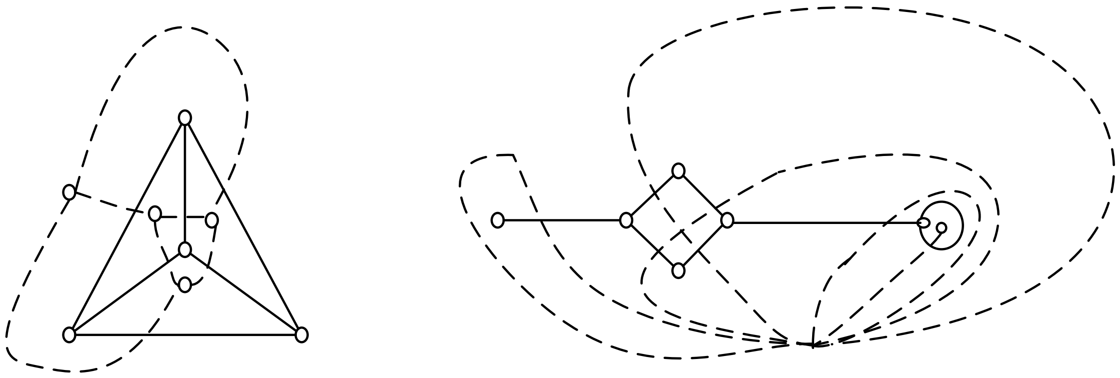


对偶图

例：分别作出下图中两种图的对偶图。

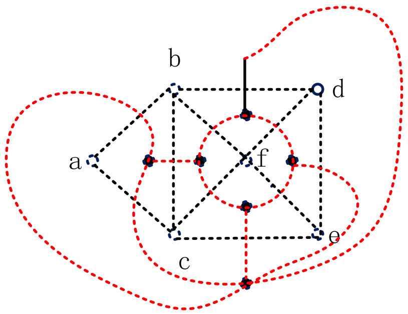


解：作图如下，实线图与虚线图互为对偶图。

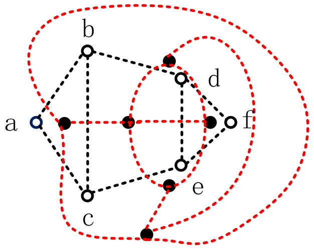


对偶图

➢ 一个平面图可以有多种画法，如下图所示，a)、b)为同一平面图，但(a)中的对偶图有5度结点，(b)中的对偶图却没有。可见一个图的对偶图不是唯一的。



(a)



(b)

G与G^*的关系：

平面图G的对偶图G^*是平面图；

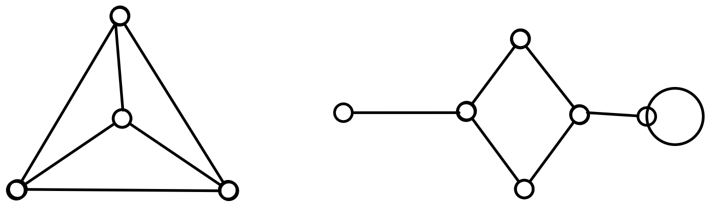
若连通平面图G是(n,m)图，则它有m-n+2个面，则G^*是(m-n+2, m)图，有n个面；

G中面的次数为G^*中面中点的度数；

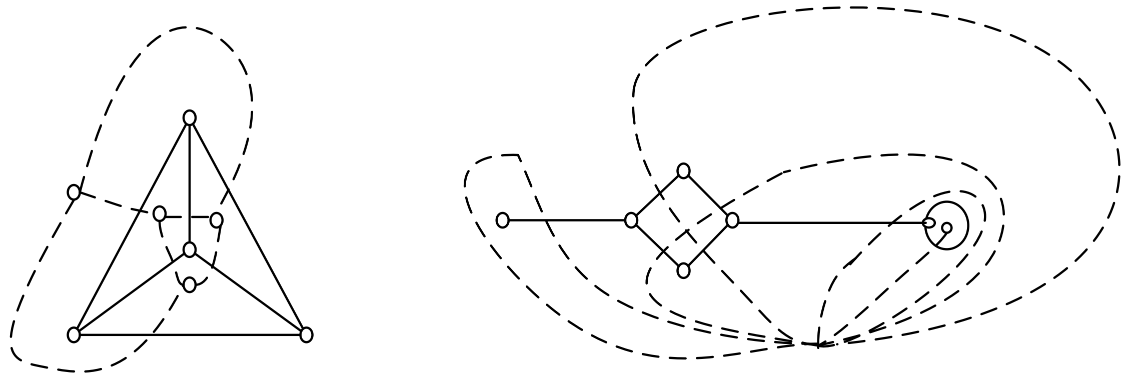
G的圈对应着G^*的割（边）集；

对偶图

例：分别作出下图中两种图的对偶图。



解：作图如下，实线图与虚线图互为对偶图。



三. 平面图面着色

- 平面图着色问题起源于地图的着色，对地域连通且相邻国家有一段公共边界的平面地图G的每个国家涂上一种颜色，使相临的国家涂不同的颜色，称为对G的一种**面着色**，若能用k种颜色给G的面着色，就称对G的面进行了***k*着色**，或称G是***k*-面可着色的**，若G是k-面可着色的，但不是（k-1）-面可着色的，就称G的**面色数**为k，记为χ^*（G）$=k$。
- 定理：地图G是k-面可着色的当且仅当它的对偶图G^*是k-可着色的。
- 定理：在简单连通平面图中至少有一个顶点v_0,其次数$d(v_0)\le 5$。

证明：用反证法

设(n,m)图G是简单连通平面图，所有顶点的次数不小于6，则

$m\le 3n-6$，又 $2m=\sum d(v)\ge 6n$，即$m\ge 3n$，矛盾

故存在v_0,其次数$d(v_0)\le 5$。

地图着色

地图：连通无桥平面图的平面嵌入，每一个面是一个国家.若两个国家有公共边界,则称它们是相邻的.

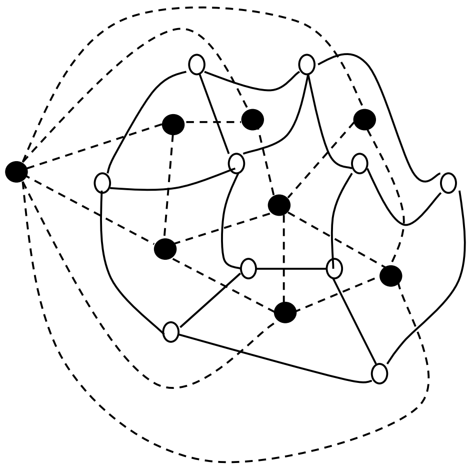
地图着色(面着色)：对地图的每个国家涂一种颜色，使相邻的国家涂不同的颜色.

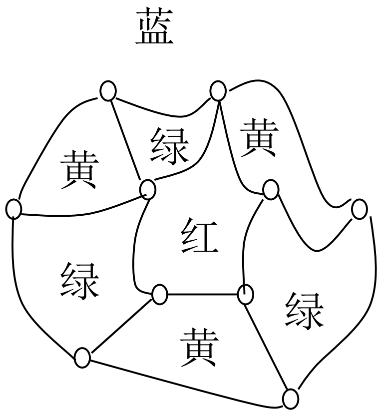
地图着色问题：用尽可能少的颜色给地图着色.

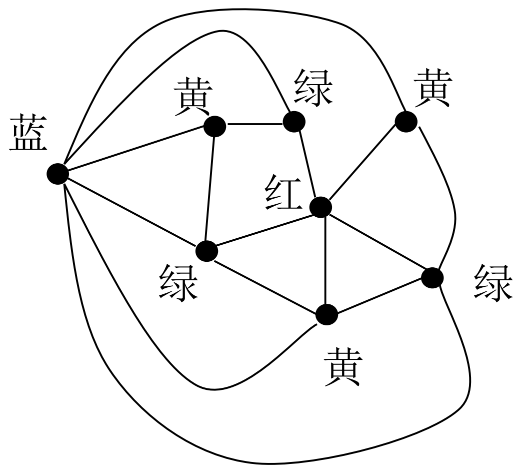
地图着色可以转化成平面图的点着色. 当G中无桥时，G^*中无环. G的面与G^*的顶点对应，且G的两个面相邻当且仅当G^*对应的两个顶点相邻，从而G的面着色等同于G^*的点着色.

地图着色与平面图的点着色

例

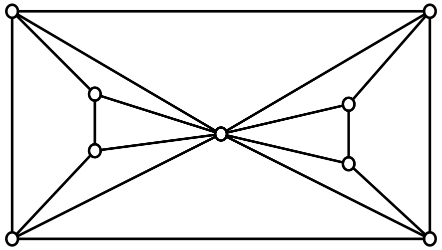




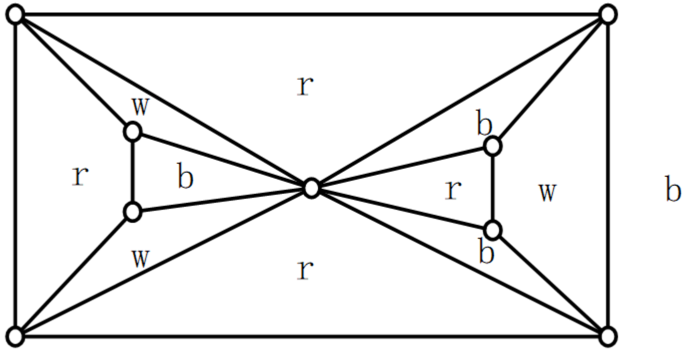


三. 平面图面着色

例：试用3种颜色，给下图所示的平面图着色，使两个邻接的面不会有同样的颜色。



解：用r,b,w表示不同的颜色，着色如下图所示。



四色定理

四色猜想(100多年前): 任何地图都可以用4种颜色着色, 即任何平面图都是4-可着色的.

1890年希伍德证明五色定理: 任何平面图都是5-可着色的.

1976年美国数学家阿佩尔和黑肯证明, 如果四色猜想成立, 则存在一个反例, 这个反例大约有2000种可能(后来有人简化到600多种), 他们用计算机分析了所有这些可能, 都没有导致反例.

四色定理 任何平面图都是4-可着色的.

四色猜想

➢**四色定理**是一个著名的数学定理，通俗的说法是：每个平面地图都可以只用四种颜色来染色，而且没有两个邻接的区域颜色相同。

四色问题又称四色猜想、四色定理，是世界三大数学猜想之一。人们发现，要证明宽松一点的“五色定理”（即“只用五种颜色就能为所有地图染色”，我们在后面会加以证明）很容易，但四色问题却出人意料地异常困难。曾经有许多人发表四色问题的证明或反例，但都被证实是错误的。

1976年，数学家凯尼斯.阿佩尔和沃夫冈.哈肯借助电子计算机首次得到一个完全的证明，四色问题也终于成为四色定理。这是首个主要借助计算机证明的定理。

三. 平面图面着色

- **五色定理：** 用5种颜色可以给任一简单连通平面图G=<V,E>正常着色。

证明：对图的顶点数作归纳：

(i) 当$n \le 5$时,显然成立；

(ii)假设k个顶点时成立,考虑k+1阶简单连通平面图G；

由引理知图G至少存在一顶点v_0其次数$d(v_0) \le 5$。

显然G-v_0是k阶简单连通平面图，由归纳假设可用5种颜色进行着色。

假设已用红、黄、蓝、 绿、黑5种颜色对G-v_0着好了色，现在考虑对G中顶点v_0的着色。

a)若d(v_0)<5，显然可用它的邻接顶点所着颜色之外的一种颜色对v_0进行着色，即G可以用5种颜色着色；

b)若d(v_0)=5，显然只需要考虑与v_0邻接的顶点被着以不同的5种颜色的情况进行讨论；

三. 平面图面着色

令$W_1=\{x|x\in G$，且x着红色或蓝色$\}$，$W_2=\{x|x\in G$，且x着黄色或绿色$\}$，考虑W_1导致的G的导出子图$\langle W_1\rangle$

①若v_1和v_3分属于$\langle W_1\rangle$的两个不同连通分图，那么将v_1所在分图的红蓝色对调,并不影响图$G\text{-}v_0$的正常着色。然后将v_0着上红色,即得图G的正常着色；

②若v_1和v_3属于$\langle W_1\rangle$的同一分图中,则v_1和v_3之间必有一条顶点属于红蓝集的路径P,它加上v_0可构成回路$C:(v_0,v_1,P,v_3,v_0)$；

由于C的存在,将黄绿集分为两个子集，一个在C内，另一个在C外，于是黄绿集的导出子图至少有两个分图，一在C内，一在C外。于是问题转化为①的类型，对黄绿集按①的办法处理，即得图G的正常着色。

证毕。

四. 平面图点着色

- 图G的**正常着色**（简称**着色**）是指对它的每一个结点指定一种颜色，使得没有两个相邻的结点有同一种颜色。
- 如果图G在着色时用了n种颜色，称G是***n*-色**的。对于图G着色时，需要的最少颜色数称为**图G的着色数**，记为$\chi(G)$。

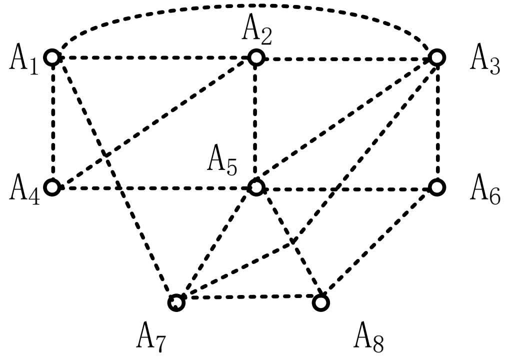
下面我们介绍一种图的着色方法，名为韦尔奇·鲍威尔(Welch Powell)方法，过程如下：

1）将图G中的结点按照次数的递减次序进行排列。（可能并不是唯一的，有些结点有相同的次数。）

2）用第一种颜色对第一点着色，并且按排列次序，对与前面着色点不邻接的每一点着上同样的颜色。

3）用第二种颜色对尚未着色的点重复第二步，用三种颜色继续这种做法，直到所有的结点全部着上色为止。

四. 平面图点着色



我们以下图为例进行点着色：

1) 按次数递减排序结点：$A_5,A_3,A_7,A_1,A_2,A_4,A_6,A_8$;

2) 用第一种颜色对A_5着色，并对不相邻的结点A_1也着同一颜色；

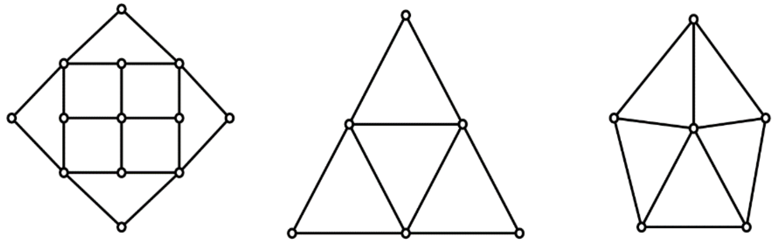
3) 对结点A_3和它不相邻的A_4，A_8着第二种颜色；

4) 对结点A_7和它不相邻的结点A_2，A_6着第三种颜色；

则此图为三色的。G不可能是二色的，因为A_1，A_2，A_3邻接，必须用三种颜色。所以x(G)=3。

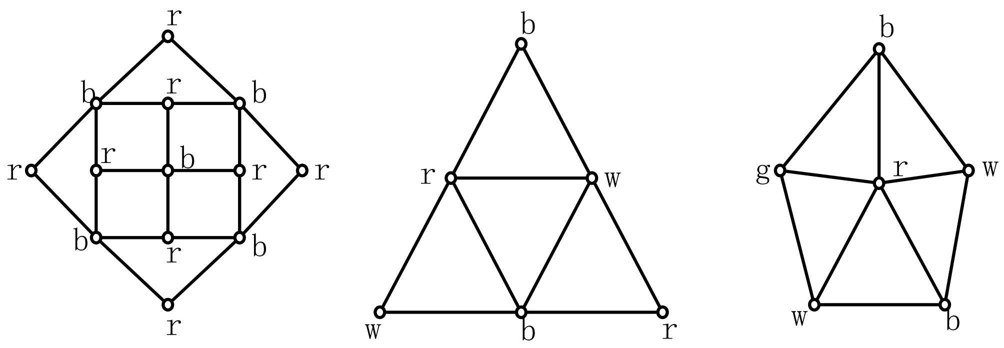
四. 平面图点着色

例：给下图所示的3个图的顶点正常着色，问每个图至少需要几种颜色？



a)　　b)　　c)

解：用r,b,w,g表示不同的颜色，对图的顶点正常着色如下图所示。可见(a)需要2种颜色，(b)需要3种颜色，(c)需要4种颜色。



(a)　　(b)　　(c)

平面图的对偶图的性质

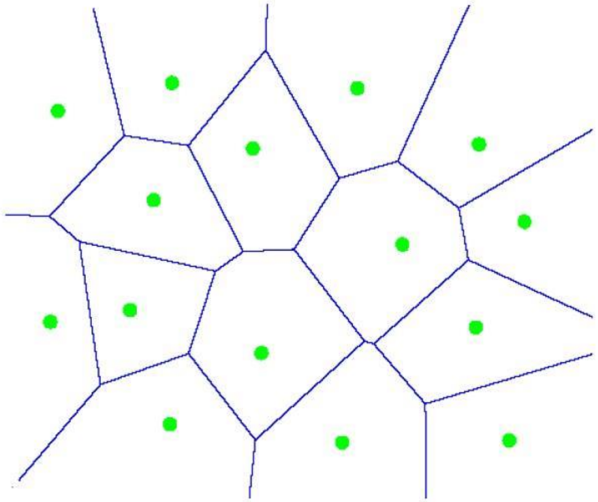
性质：

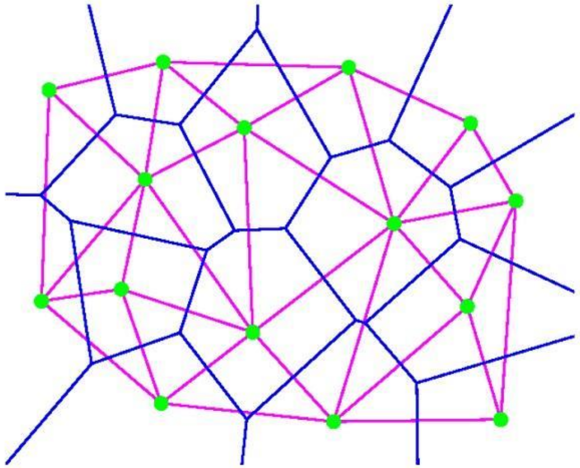
- 对偶图是平面图，而且是平面嵌入.
- 对偶图是连通图
- 若边e为G中的环，则G^*与e对应的边e^*为桥；若e为桥，则G^*中与e对应的边e^*为环.
- 同构的平面图的对偶图不一定同构.

  上页两个平面图同构，它们的对偶图不同构.

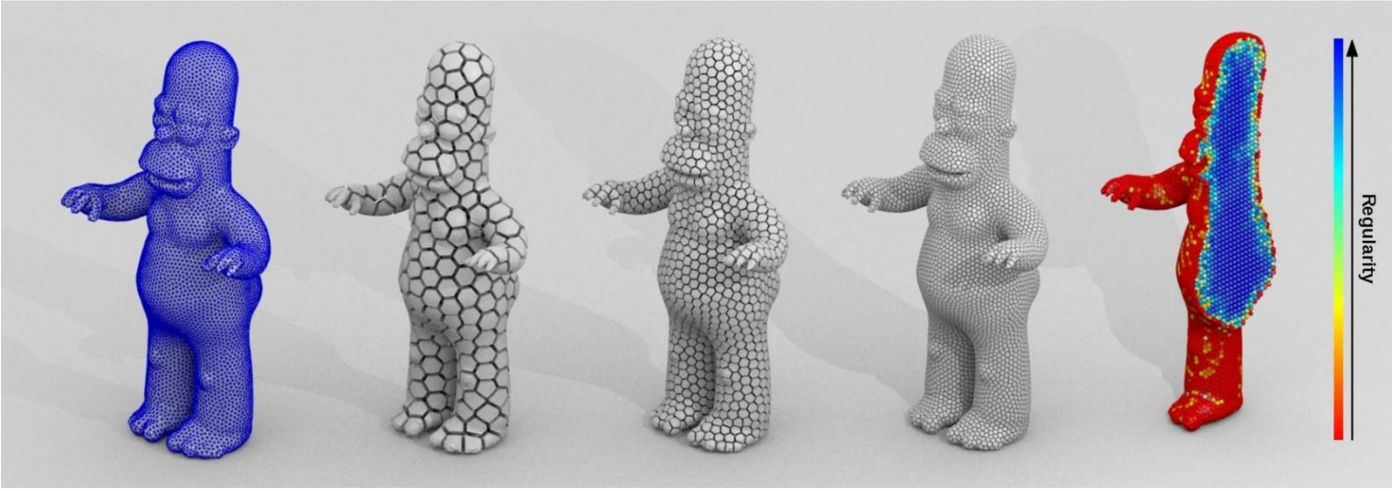
对偶图的应用（1）

- Voronoi图和Delaunay三角化
  - ✓ 网格中的最小角最大化
  - ✓ 任意三角形的外接圆内不含三角形以外的顶点
  - ✓ 三角化的网格是点云的凸包
  - ✓ 最大化所有三角面片的内切圆的平均值

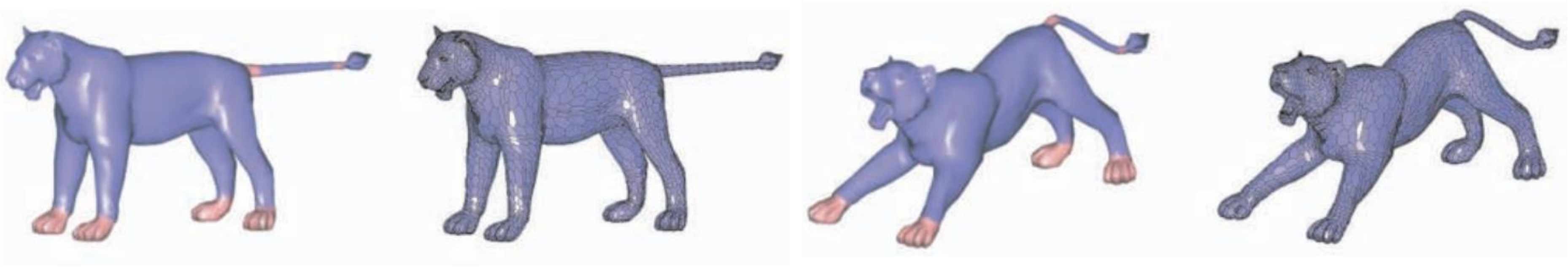




对偶图的应用（2）



CVT 采 样



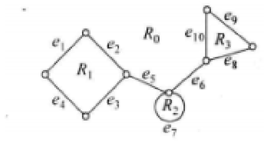
网格变形

课后习题

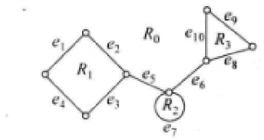
❖9,10,11

一、简答题

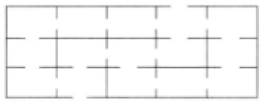
1. 6.20 求下图所示平面图G的对偶图G^*。 (15)



2. 6.19 指出下图中所示平面图各面的次数，并验证各面次数之和等于边数的两倍。 (15)



3. 6.18 一座楼房底层的建筑平面图如下图所示。问：能否从南门进入，北门离开，走遍所有的房间并且每个房门恰好经过一次? (20)



4. 6.17 一副骨牌有49张，每张骨牌上有一对数字[a,b]，a,b=0,1,……,6,证明可以把骨牌排成一个圆圈使得相邻两张骨牌连接处的数字相同。 (20)

二、简答题

5. 6.4 完全二部图$K_{r,s}$的匹配数β_1为多少?

6. 6.24 证明彼德森图（见图6-6）不是二部图，也不是欧拉图。

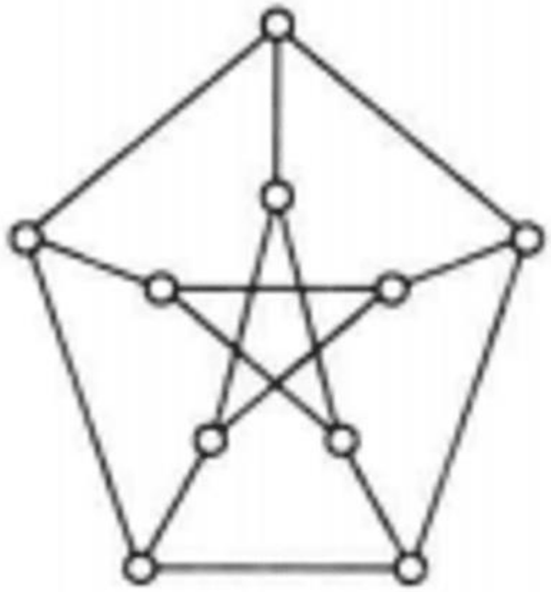


图 6-6