离散数学概论

第五章 图的基本概念

课程QQ号：**689423416**
金耀　数字媒体技术系
fool1025@163.com
13857104418

1.1 基本概念

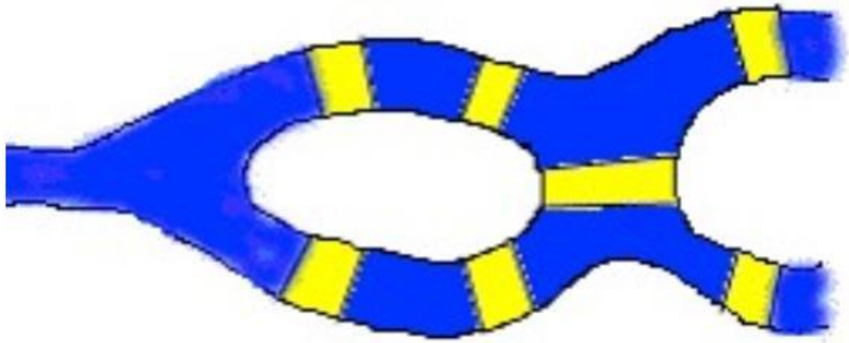
1.2 握手定理

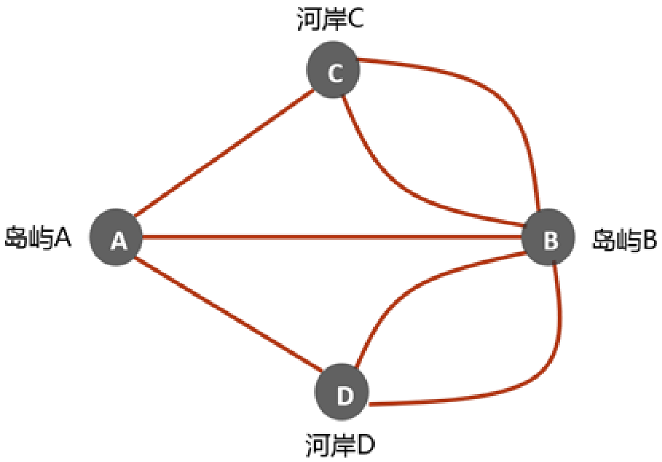
1.3 图的同构和子图

1.4 图的操作

1.5 连通性

哥尼斯堡七桥问题





瑞士数学家，物理学家
（1707~1783）

欧拉生平成就（知乎）

9岁，把牛顿的《自然哲学的数学原理》看完了。
13岁，考入名校巴塞尔大学，同时修六个专业（**哲学、法学、数学、神学、希伯来语、希腊语**）
15岁，本科毕业。
16岁，硕士毕业。
19岁，博士毕业，博士毕业论文是一片**物理**论文。
20岁，参加**建筑**大赛，只拿到第二。欧拉很生气，觉得就算他没怎么认真比也不能被超越，然后接下来12年连得12个冠军，终于心满意得的不比了。
还是20岁，著名数学家伯努利邀请他去俄国。欧拉说去就要当皇家科学院院长，然后伯努利就把**生理学**院长让给他了。在这期间，欧拉公式。
27岁，发明了以下符号：f（x）、sin、cos，tan。
28岁，花费三天找出计算彗星轨道方法。然后，不幸的事，右眼失明。
29岁，《力学，或解析地叙述运动的理论》出版，提出诸如质点的概念、在运动学中引入矢量。
32岁，出版**音乐**著作。新学科：**空气动力学、流体动力学**。
59岁，因为医疗事故，左眼失明。完全失明后，因为熟知所有数学公式、能够心算高等数学，写出400多篇论文，新学科：**刚体力学、分析力学**。
64岁，因家中失火，大部分研究被焚毁。
76岁，在说完他自己要离世后，倒地去世。

补充：1、欧拉还曾发现过这样几个学科：**弹道学、分析力学、拓扑学**，欧拉还是一名**制图学**家。
2、欧拉没被焚毁的一小部分论文，后世科学家整理了150+年，有886篇论文。

无向图

多重集合：元素可以重复出现的集合

无序积：$A\&B=\{(x,y) \mid x\in A \wedge y\in B\}$

定义 无向图$G=<V,E>$，其中

(1) 顶点集V是非空有穷集合，

其元素称为**顶点**

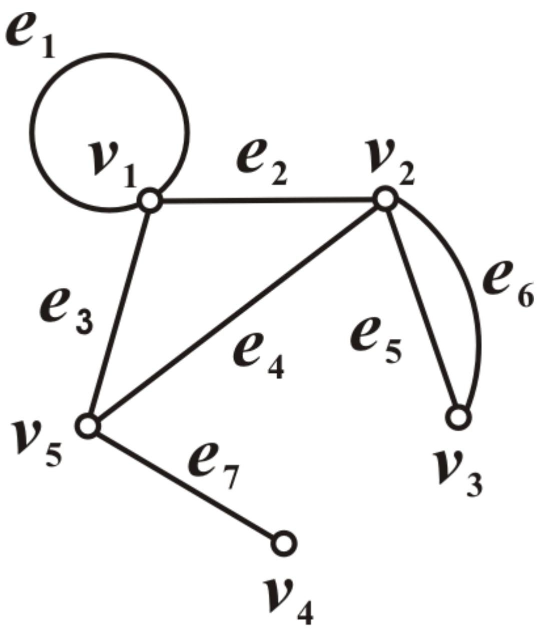
(2) 边集E为$V\&V$的多重子集，

其元素称为**无向边**，简称**边**.

例如，$G=<V,E>$，其中

$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$，

$E=\{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$



基本概念

❖图（Graph）

【定义】一个图表示为$G(V(G), E(G))$,其中

$V(G)$：顶点集合(Vertex Set),简记为V

$E(G)$：边的集合(Edge Set),简记为E

- **顶点**(Vertex)：又称**结点**,用u、v等符号表示;
- **阶**(Order)：顶点个数,通常用n表示.
- **边**(Edge)：用e等符号表示,也称**结点偶对**;
- **边数**(Size)：边的个数,通常用m表示.

有向图

定义 有向图$D=\langle V,E\rangle$, 其中

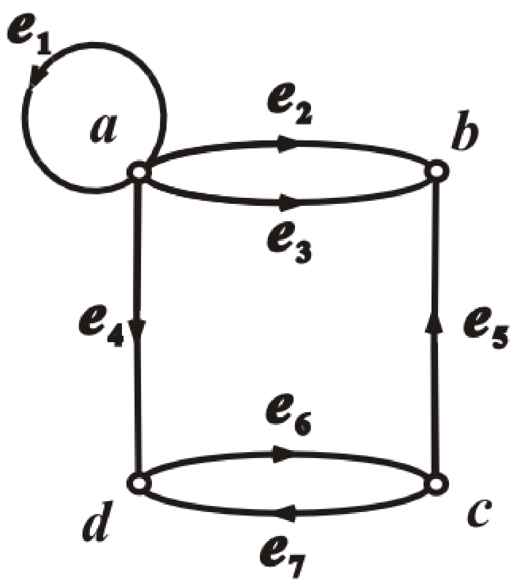
(1)顶点集V是非空有穷集合,

其元素称为**顶点**

(2) 边集E为$V\times V$的多重子集， 其

元素称为**有向边**， 简称**边**.

D的**基图**:用无向边代替有向边



如$D=\langle V,E\rangle$, 其中

$V=\{a, b, c, d\}$

$E=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$

图的数学定义与图形表示,在同构意义下一一对应

基本概念

- 从边（e）到其相连结的两顶点（u, v）的映射如果是有序的，则这条边一般用有序对$<u, v>$来表示，这时边e称为**有向边**或**弧**，u称为弧e的**始点**，v称为弧e的**终点**，u和v统称为e的**端点**。同时称e**关联于**u和v，u和v是**邻接点**。同样的，关联于同一个顶点的两条边，称为**邻接边**。关联于同一个顶点的一条边，称为**自回路**，又可称为**环**，环的方向是不定的。无向边又可称为**棱**，没有始点和终点。不与任何结点邻接的结点称为**孤立结点**。
- 每一条边都是有向边的图称为**有向图**，每一条边都是无向边的图称为**无向图**。如果在图中一些边是有向边，而另一些边是无向边，则称这个图是**混合图**。全由孤立结点构成的图称为**零图**或**离散图**。若一个图中只含一个孤立结点，则该图称为**平凡图**。顶点数为n的图称为**n阶图**，顶点集为空集的图称为**空图**。

基本概念

- 在有向图中，两结点间(包括结点自身间)若同始点和同终点的边多于一条，则这几条边称为**平行边**，又称**多重边**。类似的，在无向图中，两结点间(包括结点自身间)若多于一条边，则称这几条边为平行边或多重边。
- 含有平行边的图称为**多重图**，不含平行边的称为**线图**，没有自回路的线图称为**简单图**。
- 简单图既无多重边，又无环。
- $[e]$可以既表示有向边，又可以表示无向边。
- 两结点u、v间互相平行的边的条数称为边$[u,v]$的**重数**。
- 仅有一条边时重数为0，没有边时重数为0。

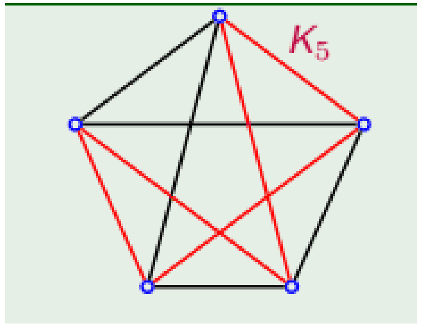
基本概念

❖ **相关概念**

- **自回路**：关联于同一个顶点的一条边
- **孤立顶点**：不与任何顶点邻接的顶点
- **多重边（平行边）**：关联一对结点的无向边/**方向相同**的有向边多于1条
- **重数**：两结点u、v间互相平行的边的条数。

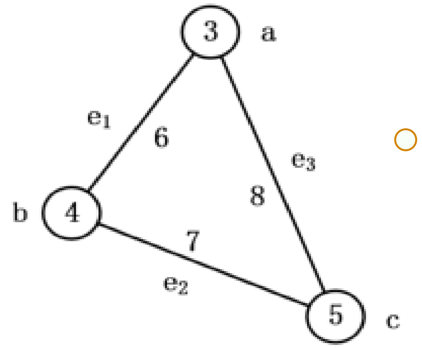
§1 基本概念

- 任意两个相异顶点都相邻的简单图称为**完全图**，n阶完全图记作K_n。当G为有向图时，则K_n为**有向完全图**，当G为无向图时，则K_n为**无向完全图**。其中，有向完全图每对相同结点间都有两个相反方向的弧。无向完全图的每一条边都是无向边；不含有平行边和环；每一对结点间都有边相连。
- 设$G=<V, E>$为具有n个结点的简单图,从完全图K_n中删去G中的所有边而得到的图称为G相对于完全图K_n的**补图**，简称G的补图，记为$\bar{G}$。G与$\bar{G}$互为补图。



§1 基本概念

- **定理：** 在任何图中，n个结点的无向完全图K_n的边数为$n(n-1)/2$，n个结点的有向完全图K_n的边数为$n(n-1)$。
- **定理：** 在任何有向完全图中，所有结点入度的平方之和等于所有结点的出度平方之和。
- **定义：** 给每条边或弧都赋予权的图$G=<V, E>$称为**加权图**(weighted graph)，又称**赋权图**，记为$G=<V, E, W>$。对于边e来说，$W(e)$表示边e的**权重**(weight)，简称**权**。



$V=\{a,b,c\}$, $E=\{e_1,e_2,e_3\}$,
$f(a)=3$, $f(b)=4$, $f(c)=5$,
$g(e_1)=6$, $g(e_2)=7$, $g(e_3)=8$。

§1 基本概念

- 在无向图中，顶点v作为边的端点的次数之和为v的**度数**，简称**度**，记作$d(v)$。在有向图中，顶点v作为边的始点的次数之和为v的**出度**，记为$d^+(v)$。相对的，顶点v作为边的终点的次数之和为v的**入度**，记为$d^-(v)$,度数则是入度和出度之和。
- 图中度数的最大值称为**最大度**，度数的最小值称为**最小度**。同时，有向图中入度的最大值称为**最大入度**，出度的最大值称为**最大出度**。有向图中度数为1的顶点称为**悬挂顶点**，它所关联的边称为**悬挂边**。
- 设图G的顶点集为$V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$，则称$(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$为$G$的**度数序列**。同理，有向图还有**入度序列**和**出度序列**，分别为$(d^-(v_1), d^-(v_2), \dots, d^-(v_n))$和$(d^+(v_1), d^+(v_2), \dots, d^+(v_n))$。
- 各结点的度数均相同的图称为**正则图**，各结点的度数均为k时称为***k*度正则图**。

顶点的度数

设$G=<V, E>$为无向图, $v\in V$,

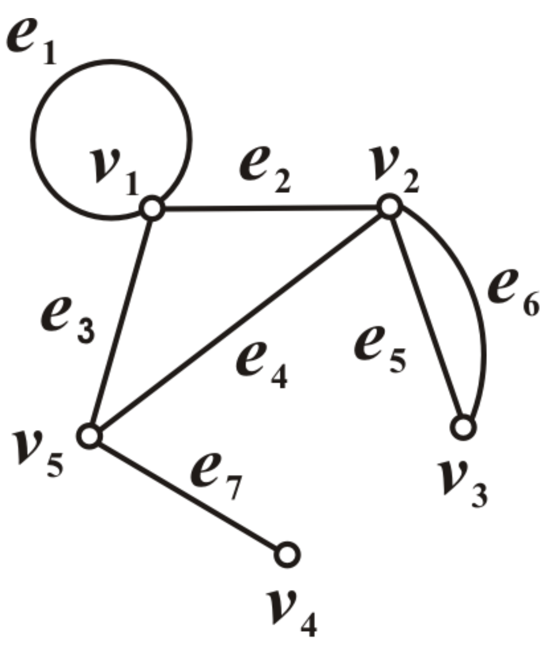
v的度数(度) $d(v)$: v作为边的端点次数之和

悬挂顶点: 度数为1的顶点

悬挂边: 与悬挂顶点关联的边

G的最大度$\Delta(G)=\max\{d(v)| v\in V\}$

G的最小度$\delta(G)=\min\{d(v)| v\in V\}$



例如 $d(v_5)=3$, $d(v_2)=4$, $d(v_1)=4$,

$\Delta(G)=4$, $\delta(G)=1$,

v_4是悬挂顶点, e_7是悬挂边, e_1是环

顶点的度数(续)

设$D=<V,E>$为有向图, $v\in V$,

v的出度$d^+(v)$：v作为边的始点次数之和

v的入度$d^-(v)$：v作为边的终点次数之和

v的度数(度) $d(v)$: v作为边的端点次数之和

$$d(v)= d^+(v)+ d^-(v)$$

D的最大出度$\Delta^+(D) =\max\{d^+(v)|v\in V\}$

最小出度$\delta^+(D) =\min\{d^+(v)|v\in V\}$

最大入度$\Delta^-(D) =\max\{d^-(v)|v\in V\}$

最小入度$\delta^-(D) =\min\{d^-(v)|v\in V\}$

最大度$\Delta(D) =\max\{d(v)|v\in V\}$

最小度$\delta(D) =\min\{d(v)|v\in V\}$

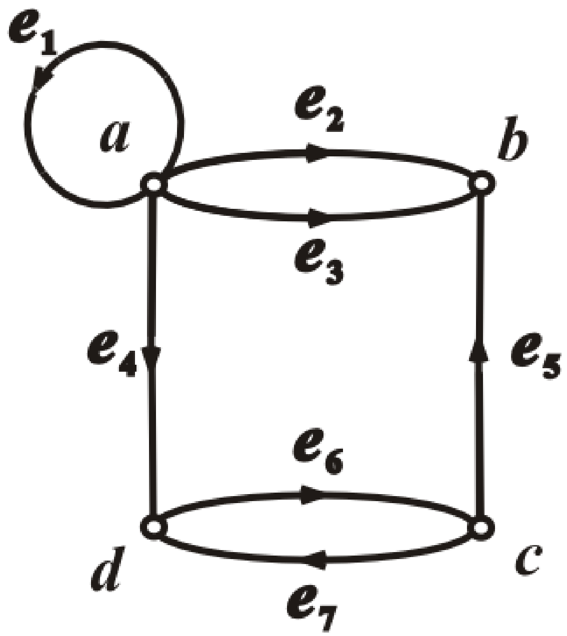
例

例 $d^+(a)=4,\ d^-(a)=1,\ d(a)=5,$

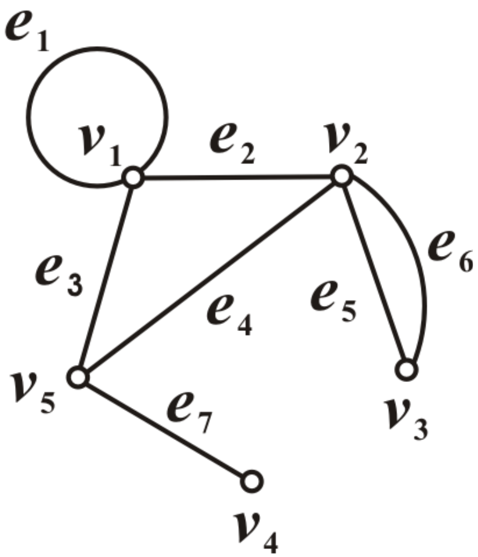
$d^+(b)=0,\ d^-(b)=3,\ d(b)=3,$

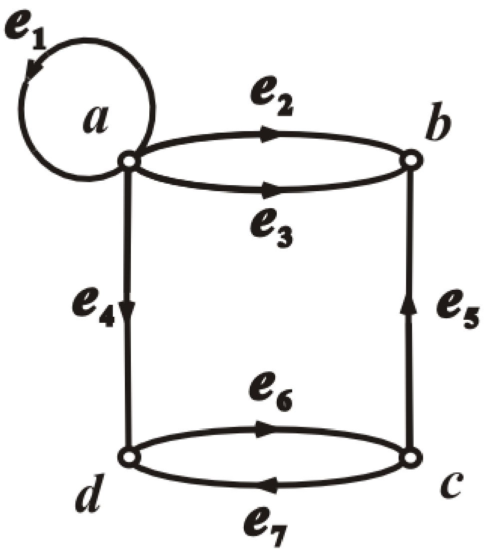
$\Delta^+(D)=4,\ \delta^+(D)=0,\ \Delta^-(D)=3,$

$\delta^-(D)=1,\ \Delta(D)=5,\ \delta(D)=3.$



实例





e_5和e_6是平行边

重数为2

不是简单图

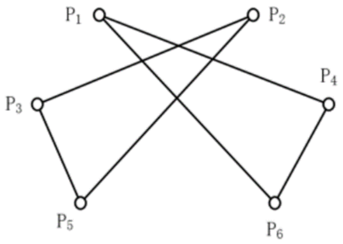
e_2和e_3是平行边,重数为2

e_6和e_7不是平行边

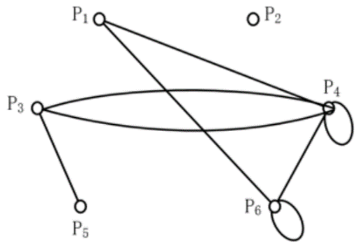
不是简单图

§1 基本概念

例：描述下图a)所示的图和图b)所示的多重图。



a) 图



b) 多重图

解：对于图(a)：有6个顶点，从而$V=\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$

有6条边，由此有6个顶点偶，因此

$E=[(P_1, P_4), (P_1, P_6), (P_4, P_6), (P_3, P_2), (P_3, P_5), (P_2, P_5)]$。

对于图(b)：有6个顶点，从而$V=\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$

有8条边(其中有2条是多重边，两条是环)，且由此有8个顶点偶，因此

$E=[(P_1, P_4), (P_1, P_6), (P_3, P_4), (P_3, P_4), (P_4, P_4), (P_3, P_5), (P_6, P_6), (P_4, P_6)]$。

例：判定下列多重图$G(V,E)$是否是简单图，其中$V=\{A,B,C,D\}$，且

(a) $E=\{(A,B),(A,C),(A,D),(B,C),(C,D)\}$；
(b) $E=\{(A,B),(B,B),(A,D)$；
(c) $E=\{(A,B),(C,D),(A,B),(B,D)\}$；
(d) $E=\{(A,B),(B,C),(C,B),(B,B)\}$；

解：简单图既无多重边，又无环。故

(a)是简单图。

(b)不是简单图。因为(B,B)是环。

(c)不是简单图。因为(A,B)和(A,B)是多重边。

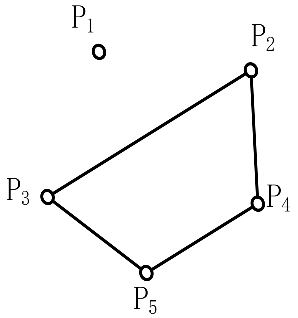
(d)不是简单图。因为(B,C)和(C,B)是多重边，(B,B)是环。

例：画出下列多重图$G(V, E)$的图形，其中$V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$，且

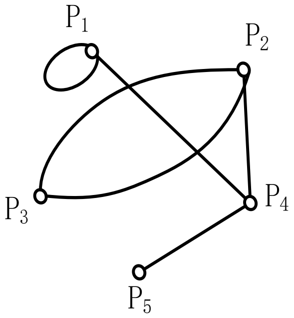
(a)$E = \{(P_2, P_4), (P_2, P_3),(P_3, P_5),(P_5, P_4)\}$;

(b)$E = \{(P_1, P_1), (P_2, P_3),(P_2, P_4),(P_3, P_2),(P_4, P_1),(P_5, P_4)\}$;

解：先根据顶点集画出顶点，再连接顶点标明边。其中(a)是图，(b)是多重图，结果如下图所示：



(a)



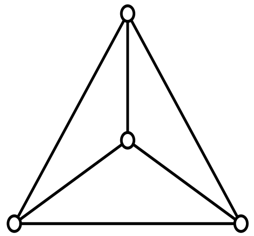
(b)

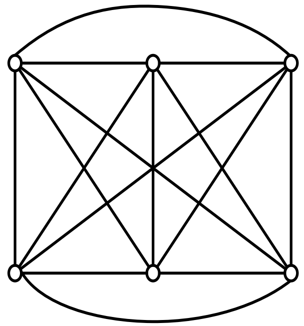
例： 画出一个结点数最少的简单图。

(a)使它是3 -正则图；

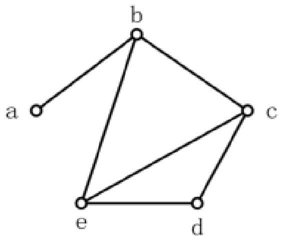
(b)使它是5 -正则图。

解： 所求如下图(a)和(b)所示。

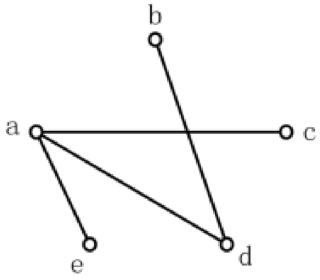

(a)


(b)

例：画出下图中简单图的补图。



解：补图如下图所示：



1.1 基本概念

1.2 握手定理

1.3 图的同构和子图

1.4 图的操作

1.5 连通性

§2 握手定理

- 我们一般把度数为奇数的结点称为**奇度结点**，度数为偶数的结点称为**偶度结点**。
- **定理：** 对任何图，每一条边有2个端点，所有顶点的度数之和等于它们作为端点的次数之和，即等于边数的2倍。即 $\sum_{v\in V} deg(v) = 2m$
- **推论：** 对任何图，奇数结点一定是偶数个。

证明： 设G中奇数度结点集合为V_1，偶数度结点集合为V_2，则有：

$$\sum\deg(v_i)+\sum\deg(v_j)=\sum\deg(v)=2|E|$$，分别$v_i\in V_1$,$v_j\in V_2$,$v\in V$

由于$\sum\deg(v_j)$，$v_j\in V_2$是偶数之和必为偶数，而$2|E|$是偶数，故得

$\sum\deg(v_i)$，$v_i\in V_1$必是偶数。而各个$\deg(v_i)$ $(v_i\in V_1)$是奇数，所以一定是偶数个$\deg(v_i)$求和的结果，即$|V_1|$是偶数。

➤ **推论：** 对有向图，图的入度总和都与出度总和相等，且等于图的边数，即

$$\sum_{v\in V} deg^{+}(v)=\sum_{v\in V} deg^{-}(v)=m$$

$$\sum_{v\in V} deg(v)=\sum_{v\in V} deg^{+}(v)+\sum_{v\in V} deg^{-}(v)=2m$$

握手定理及其推论解释了结点数和边数的关系，我们可以根据上面的定理和推论解决很多问题，比如帮助快速判定某序列能否成为图的度数序列，要灵活掌握。

例：考虑图G，其中$V(G)=\{A,B,C,D\}$,$E(G)=\{(A,B), (B,C), (B,D), (C,D)\}$。

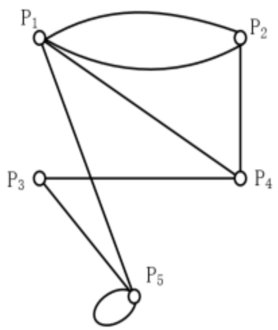
求G的每个顶点的次数和奇偶性。

解：计算每个顶点属于的边的条数，得：

$$\deg(A)=1，\quad \deg(B)=3，\quad \deg(C)=2，\quad \deg(D)=2。$$

故C和D是偶度结点，A和B是奇度结点。

例：求下图中多重图的每个顶点的次数。



解： 计算每个顶点属于的边的条数，得：

$\deg(P_1)=4$，$\deg(P_2)=3$，$\deg(P_3)=2$，

$\deg(P_4)=3$，$\deg(P_5)=4$。

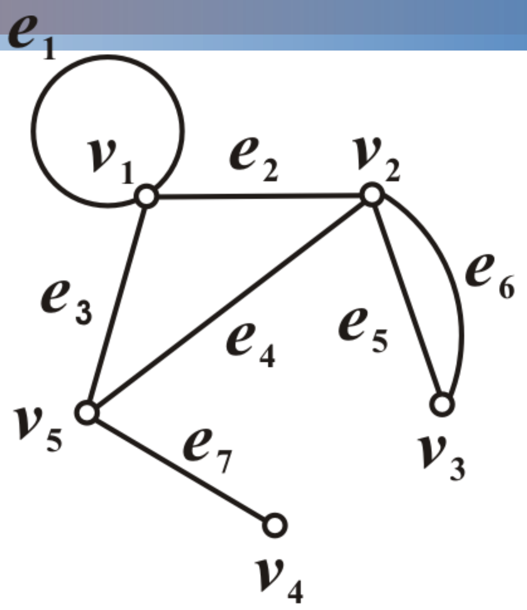
其中P_5处有一个环，所以计算次数时要乘以2。

图的度数列

设无向图G的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

G的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

如右图度数列:4,4,2,1,3



设有向图D的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

D的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

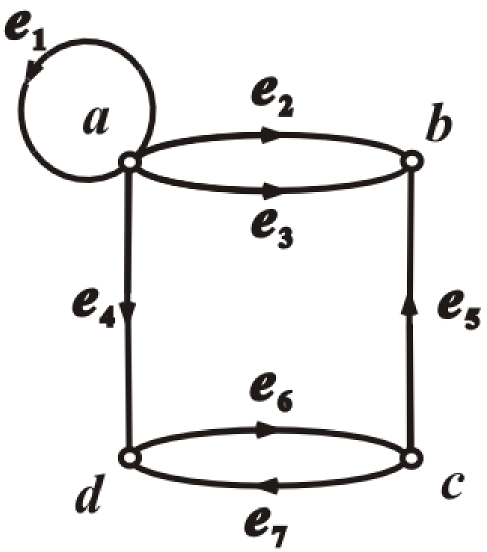
D的出度列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的入度列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

如右图度数列:5,3,3,3

出度列:4,0,2,1

入度列:1,3,1,2



握手定理的应用

例1 (3,3,3,4), (2,3,4,6,8)能成为图的度数列吗?

解 不可能. 它们都有奇数个奇数.

例2 已知图G有10条边, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均小于等于2, 问G至少有多少个顶点?

解 设G有n个顶点. 由握手定理,

$$4\times3+2\times(n-4)\geq2\times10$$

解得 $n\geq8$

握手定理的应用(续)

例3 证明不存在具有奇数个面且每个面都具有奇数条棱的多面体.

证 用反证法. 假设存在这样的多面体,

作无向图$G=\langle V,E\rangle$, 其中$V=\{v \mid v$为多面体的面$\}$,

$E=\{(u,v) \mid u,v\in V \wedge u$与$v$有公共的棱$\wedge u\neq v\}$.

根据假设, $|V|$为奇数且$\forall v\in V$, $d(v)$为奇数. 这与握手定理的推论矛盾.

1.1 基本概念

1.2 握手定理

1.3 图的同构和子图

1.4 图的操作

1.5 连通性

§3 图的同构和子图

- 设$G=\langle V, E\rangle$和$G'=\langle V', E'\rangle$分别表示两个图，若存在从V到V'的双射函数φ，使得对任意的结点a、$b\in V$，$(a,b)\in E$，当且仅当$(\varphi(a),\varphi(b))\in E'$，且$(a,b)$和$(\varphi(a),\varphi(b))$有相同的重数，就称图$G$和$G'$是**同构**的，记为$G \cong G'$。

图的同构可以视作是同一个图的不同表现形式，即同构图除了顶点和边的名称不同外，实际上就是一个图形。

§3 图的同构和子图

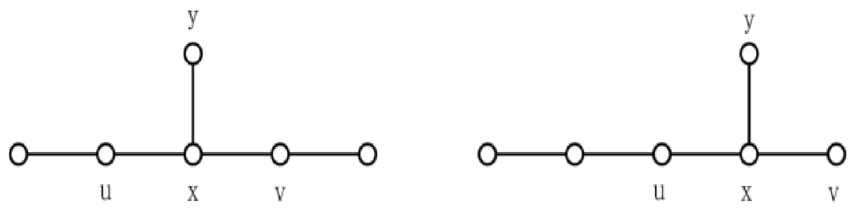
目前尚没有一个有效的方法来直接判定两个图同构，在这里我们可以给出一些同构的必要条件：

（1）同构的图结点数相等；

（2）同构的图边数相等；

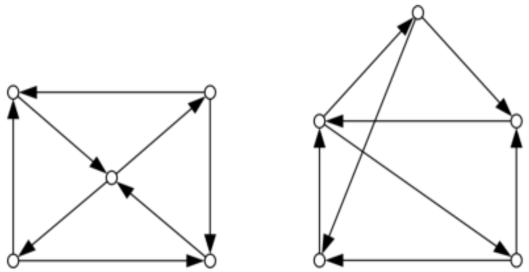
（3）同构的图度数相同的结点数相等；

以上是必要条件但不是充分条件，有满足以上三种条件但不是同构图的情况存在，例如下图：



§3 图的同构和子图

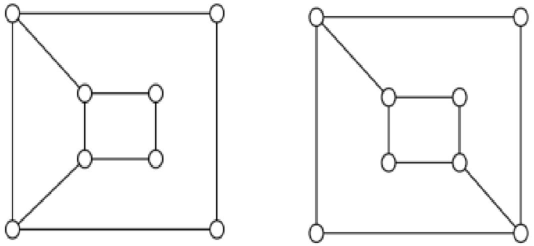
例： 证明下图中的两个有向图是同构的。



证明： 作映射 g(*a*)=4, g(*b*)=1, g(*c*)=2, g(*d*)=3, g(*e*)=5。

在该映射下， 边<*a*, *e*>, <*b*, *a*>, <*d*, *a*>, <*b*, *c*>, <*e*, *b*>, <*d*, *c*>, <*c*, *e*>, <*e*, *d*>分别对应为<4,5>, <1,4>, <3,4>, <1,2>, <5,1>, <3,2>, <2,5>, <5,3>， 因此两个有向图同构。

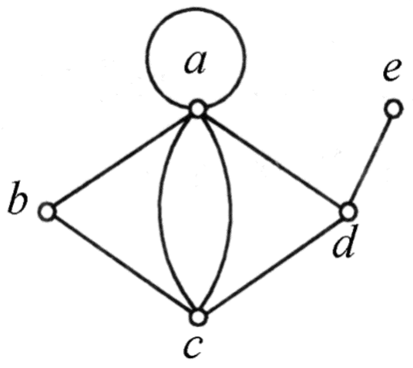
例：证明下图中的两个无向图是不同构的。

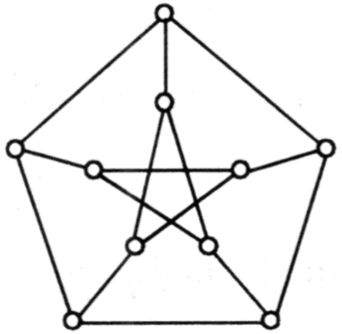


证明：左图中有且只有4个次数为2的，且有两对点相邻接。右图中也有且只有4个次数为2的点，但这4个点互不邻接。因此，两图之间不存在同构映射，因而不同构。

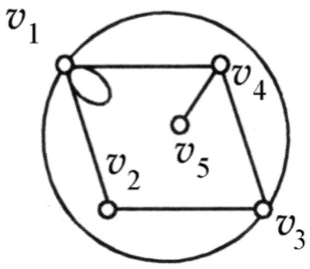
同构实例

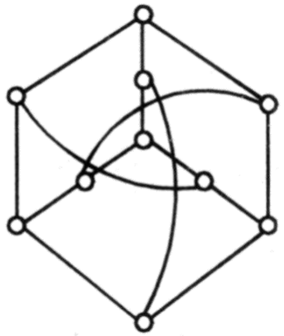
例 证明下述2对图是同构的





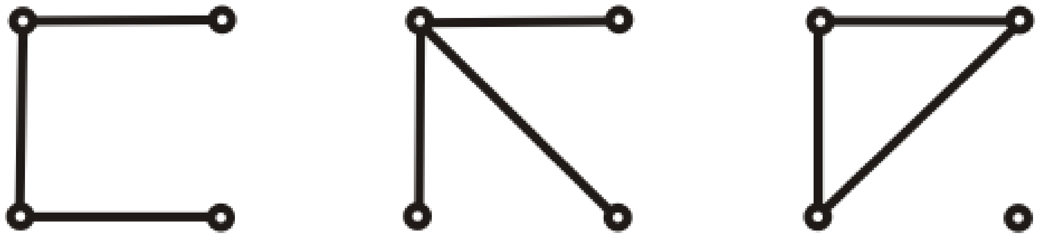
彼得森图





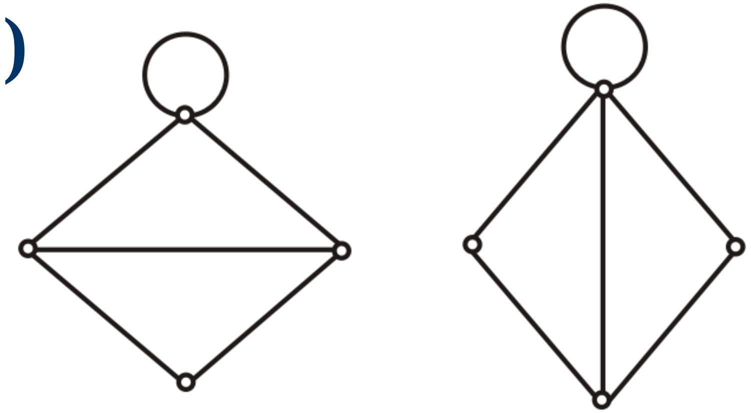
同构实例(续)

例　试画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图



例　判断下述每一对图是否同构：

(1)

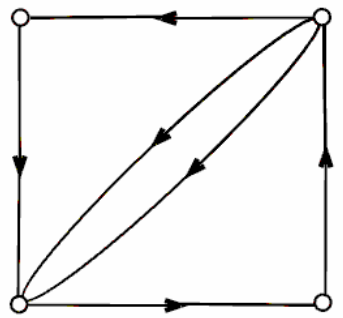


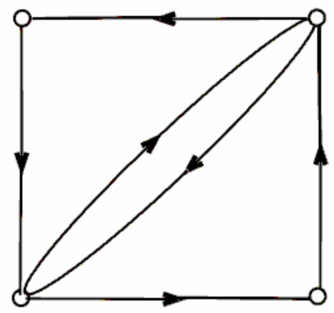
度数列不同

不同构

同构实例(续)

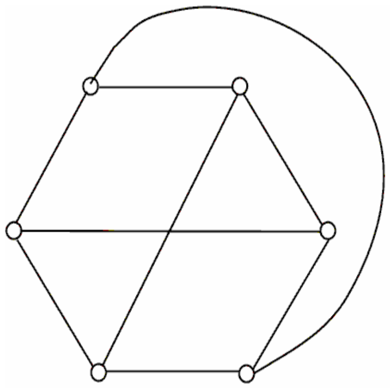
(2)



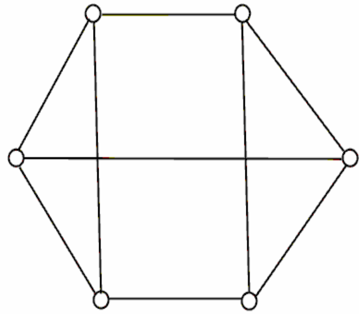


不同构
入(出)度列不同

(3)



(1)



(2)

不同构(左边没有三角形，右边有三角形)

注意:度数列相同

图的同构(续)

几点说明：

图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性.

能找到多条同构的必要条件，但它们都不是充分条件：

① 边数相同，顶点数相同

② 度数列相同(不计度数的顺序)

③ 对应顶点的关联集及邻域的元素个数相同，等等

若破坏必要条件，则两图不同构

至今没有找到判断两个图同构的多项式时间算法

§3 图的同构和子图

- 设$G=\langle V, E\rangle$和$G'=\langle V', E'\rangle$是两个图。

如果$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$,则称G'是G的**子图**，记作$G'\subseteq G$。

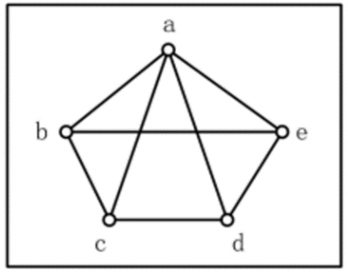
如果$G'\subseteq G$且$G'\subset G$,则称G'是G的**真子图**。

如果$V'=V$且$G'\subseteq G$,则称G'是G的**生成子图**。

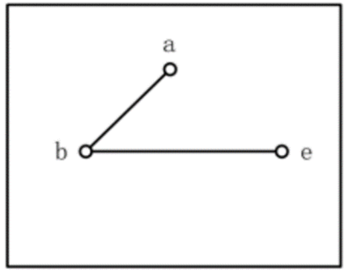
若子图G'中没有孤立结点，G'由E'唯一确定，则称G'为**由边集E'导出的子图**。

§3 图的同构和子图

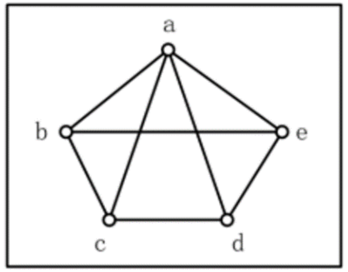
➢ 下图展示了图G及其子图：



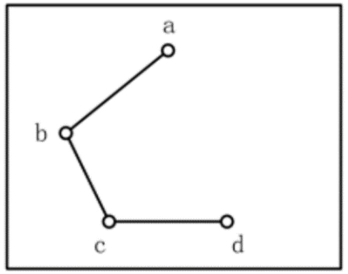
a)图 G



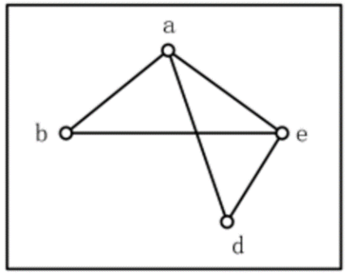
b)真子图



c)生成子图

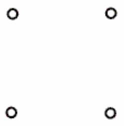
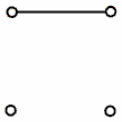
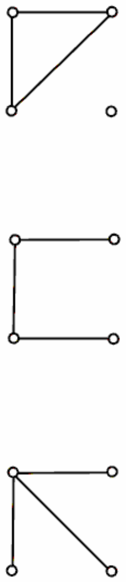
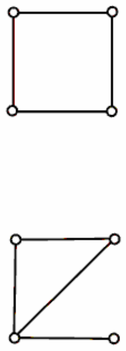
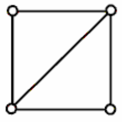
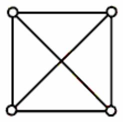


d)由 E'={{a, b}，{b, c}，{c, d}}导出的子图

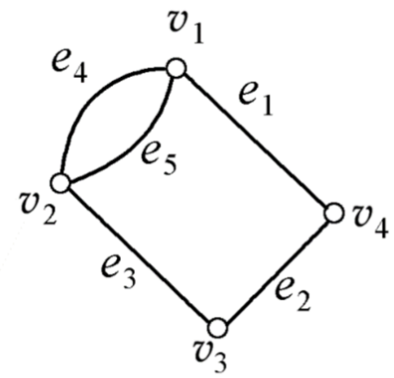


e)由 V'={a, b, c, d}导出的子图

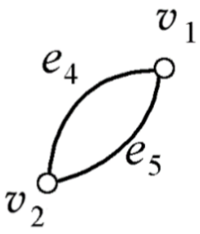
K_4的所有非同构的生成子图

m	0	1	2	3	4	5	6	
								

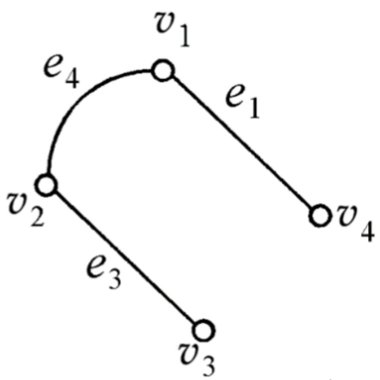
导出子图实例



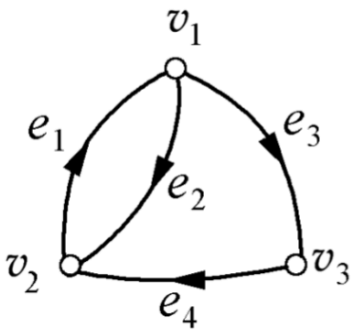
G



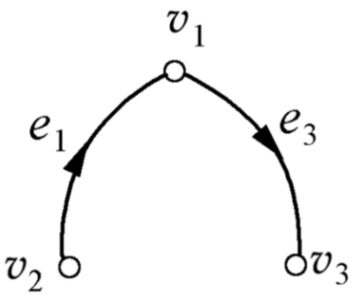
$G[\{v_1,v_2\}]$



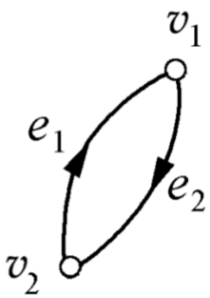
$G[\{e_1,e_3,e_4\}]$



D



$D[\{e_1,e_3\}]$



$D[\{v_1,v_2\}]$

1.1 基本概念

1.2 握手定理

1.3 图的同构和子图

1.4 图的操作

1.5 连通性

§4 图的操作

设图G_1=<V_1,E_1>和图G_2=<V_2, E_2>

(1)G_1与G_2的**并**，定义为图G_3 = <V_3,E_3>，其中$V_3=V_1\cup V_2$,$E_3=E_1\cup E_2$，记为$G_3=G_1\cup G_2$。

(2)G_1与G_2的**交**,定义为图G_3 = <V_3,E_3>,其中$V_3=V_1\cap V_2$,$E_3=E_1\cap E_2$,记为$G_3=G_1\cap G_2$。

(3)G_1与G_2的**差**,定义为图G_3 = <V_3,E_3>,其中$E_3=E_1-E_2$,$V_3=(V_1-V_2)\cup\{E_3$中边所关联的顶点$\}$,记为$G_3=G_1-G_2$。

(4)G_1与G_2的**环和**,定义为图G_3 = <V_3,E_3>,$G_3=(G_1\cup G_2)-(G_1\cap G_2)$,记为$G_3=G_1\oplus G_2$。

§4 图的操作

设图$G<V,E>$，

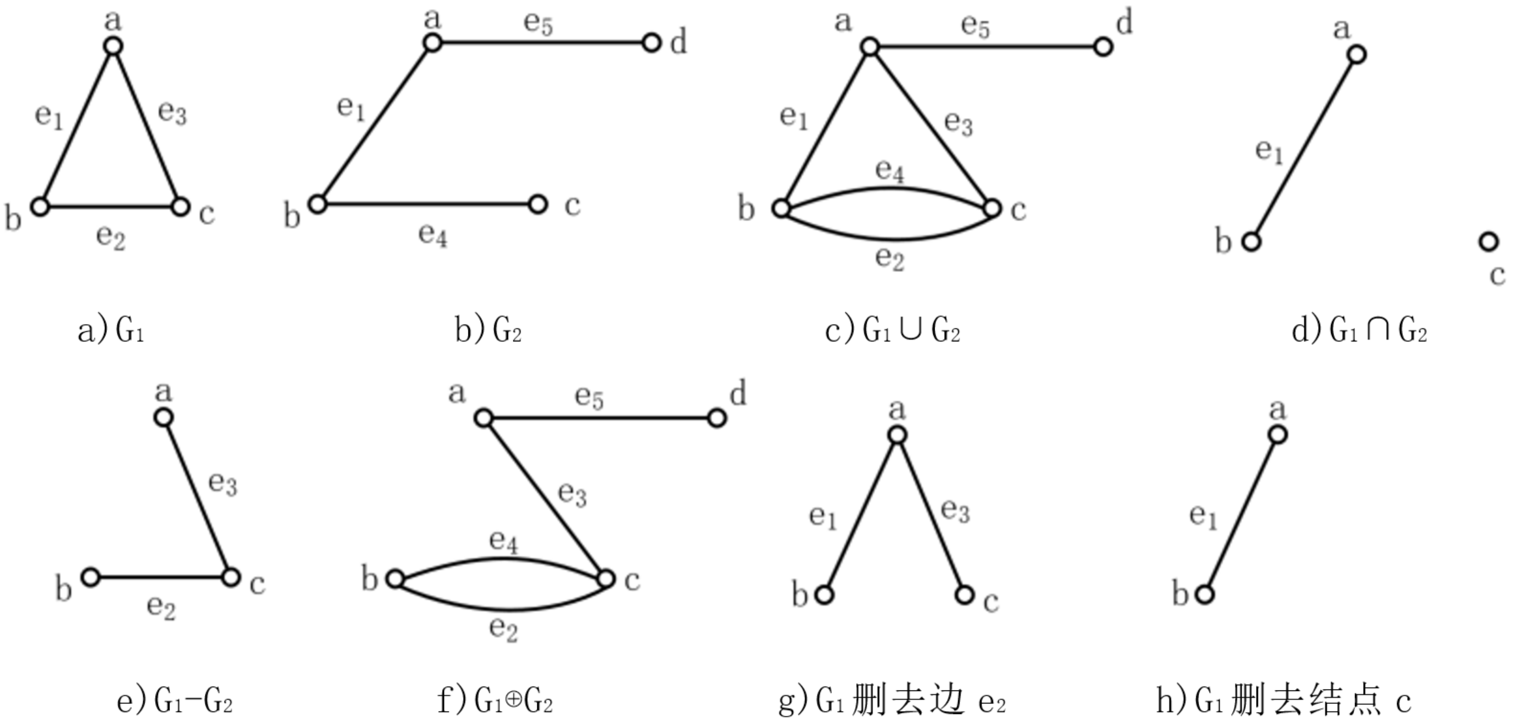
（1）设$e\in E$，用$G-e$表示从G中去掉边e得到的图，称为**删除**e。又设$E'E$，用$G-E'$表示从G中删除E'中所有边得到的图，称为**删除**E'。

（2）设$v\in V$，用$G-v$表示从G中去掉结点v及v关联的所有边得到的图，称为**删除结点**v。又设$V'\subseteq V$，用$G-V'$表示从G中删除V'中所有结点及关联的所有边得到的图，称为**删除**V'。

（3）设$e=(u,v)\in E$，用$G\backslash e$表示从G中删除e，将e的两个端点u,v用一个新的结点w代替，使w关联除e外的u和v关联的一切边，称为**边e的收缩**。一个图G可以收缩为图H，是指H可以从G经过若干次边的收缩而得到。

（4）设$u,v\in V$（u,v可能相邻，也可能不相邻），用$G\cup(u,v)$表示在u,v之间加一条边(u,v)，称为**加新边**。

下图展示了图的一系列操作：

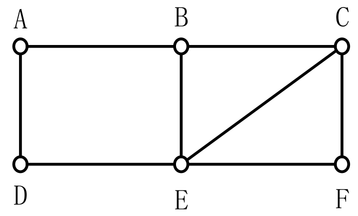


a) G_1　b) G_2　c) $G_1 \cup G_2$　d) $G_1 \cap G_2$

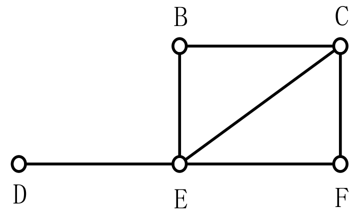
e) $G_1 - G_2$　f) $G_1 \oplus G_2$　g) G_1 删去边 e_2　h) G_1 删去结点 c

例： G图如下所示。求(a) G-A; (b) G-B; (c) G-C;

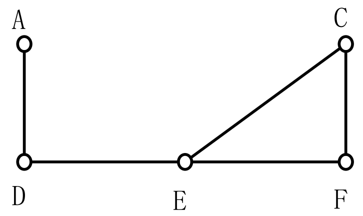
解： 图(a)(b)(c)求解如下图所示。



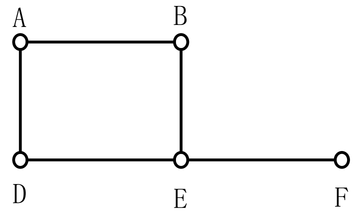
图G



(a)



(b)



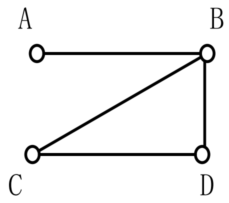
(c)

§4 图的操作

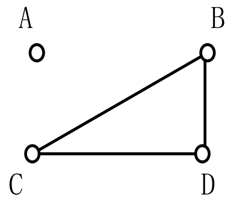
例： 图G如下图所示， 求:

(a)G-{A,B}; (b)G-{B,C}; (c)G-{B,D}; (d)G-{C,D};

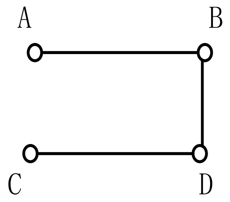
解： 只要从图G中删除对应的边即可， 结果如下图所示：



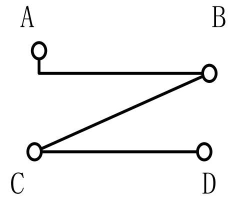
图G



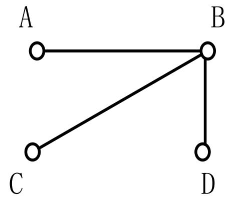
(a)G-{A,B}



(b)G-{B,C}



(c)G-{B,D}



(d)G-{C,D}

1.1 基本概念

1.2 握手定理

1.3 图的同构和子图

1.4 图的操作

1.5 连通性

§5 连通性

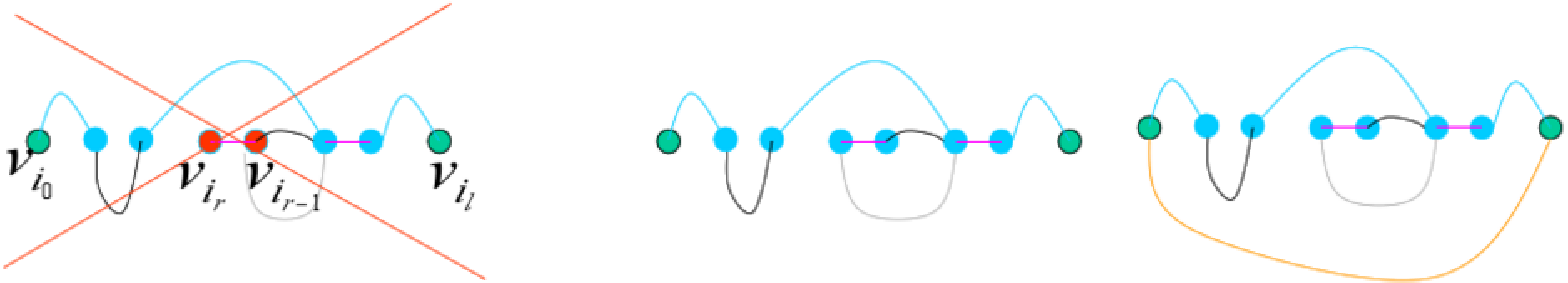
- 给定无向图（或有向图）$G=<V, E>$，令v_0，$v_1 \ldots\ldots v_m \in V$,边(或弧)$e_0$, $e_1 \ldots e_m \in E$, 其中v_{i-1}, v_i是e_i的结点，交替序列$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots\ldots e_m v_m$称为连接$v_0$到$v_m$的**链**（或**路**）。$v_0$和$v_m$分别是链的**始结点**和**终结点**，而边（或弧）的数目称为**链的长度**。
- 在图$G=<V, E>$中，对$\forall v_i, v_j \in V$, 如果从v_i到v_j存在道路，则称长度最短的通路为从v_i到v_j的**短程线**，从v_i到v_j的短程线的长度称为v_i到v_j的**距离**，记为$d(v_i, v_j)$。

§5 连通性

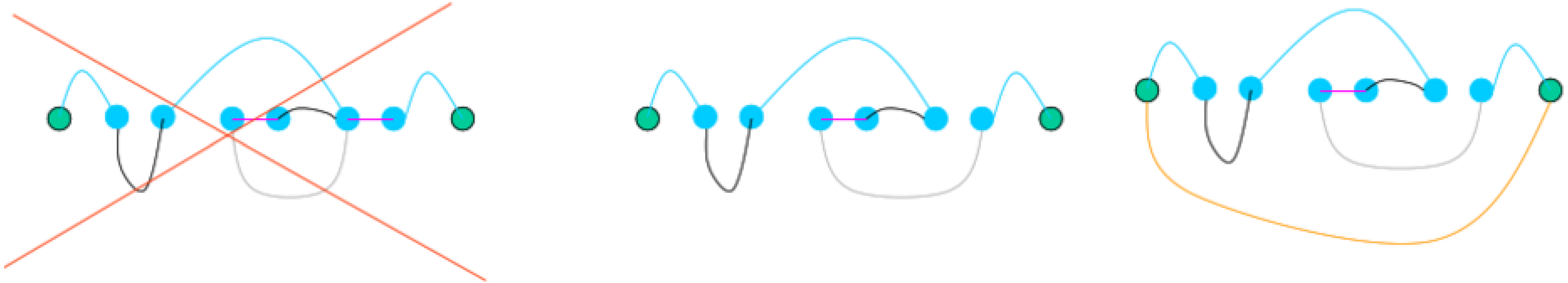
- 若通路中的所有边$e_0,e_1\dots e_m$互不相同，则称此通路为**简单通路**或一条**迹**。若回路中的所有边$e_0,e_1\dots e_m$互不相同，则称此回路为**简单回路**或一条**闭迹**；
- 若通路中的所有结点$v_0,v_1\dots v_m$互不相同（从而所有边互不相同）,则称此通路为**基本通路**或者**初级通路**、**路径**；若回路中除$v_0=v_m$外的所有结点$v_0,v_1\dots v_{m-1}$互不相同（从而所有边互不相同）,则称此回路为**基本回路**或者**初级回路**、**圈**。
- 基本通路(或基本回路)一定是简单通路(或简单回路),反之则不一定。

简单/初级通/回路

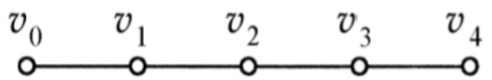
❖ **简单通（回）路：所有边各异**

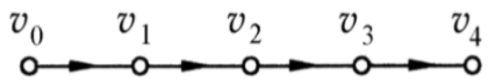


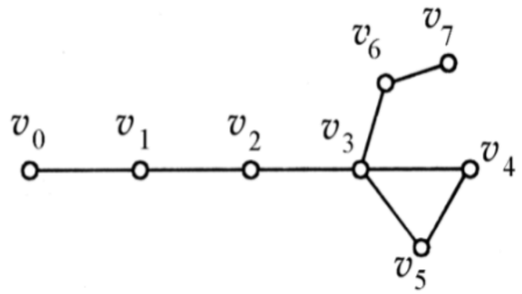
❖ **初级通（回）路：所有顶点和边各异**

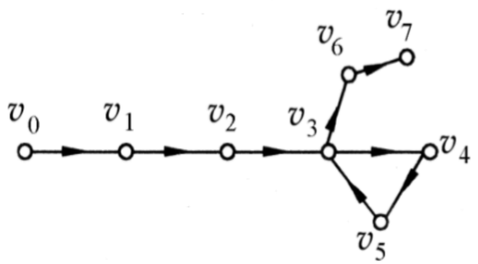


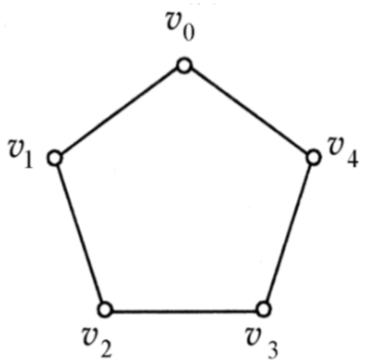
通路与回路实例

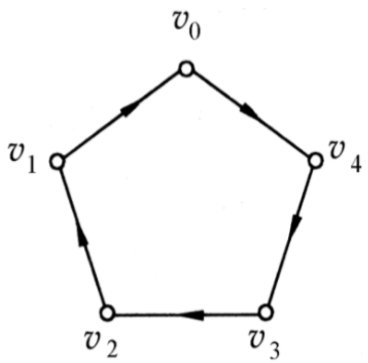

v_0 v_1 v_2 v_3 v_4

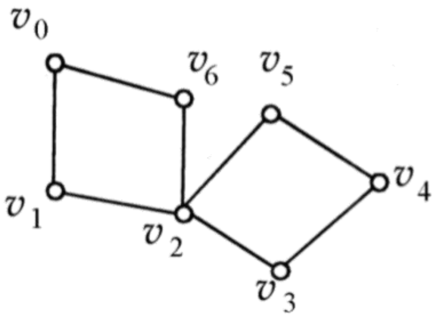

v_0 v_1 v_2 v_3 v_4

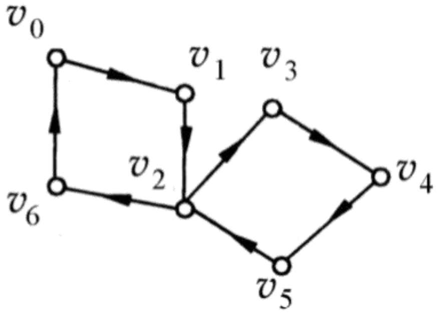

v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7


v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7


v_0 v_1 v_2 v_3 v_4


v_0 v_1 v_2 v_3 v_4


v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6


v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6

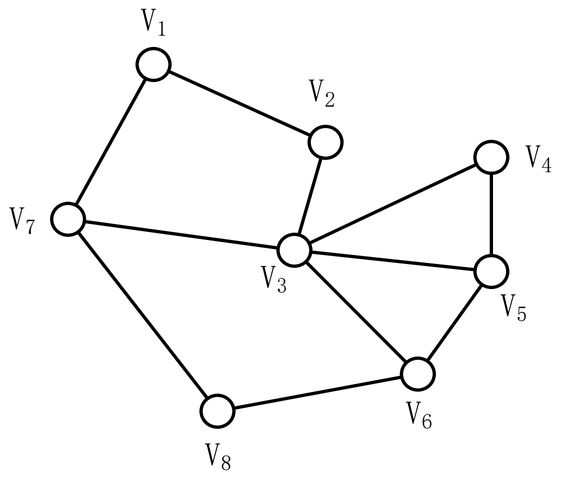
在右图中，

$v_1v_2v_3v_4v_5$是一条4-路径；

$v_1v_2v_3v_4v_3$是一条4-通道；

$v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_3v_7$是一条7-迹；

$v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_3v_7v_1$是一个圈（闭迹）。



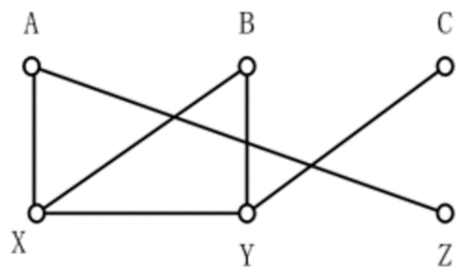
例：图G如右图所示，判定下列的边序列是否形成通路：

(a) {(*A*,*X*)，(*X*,*B*)，(*C*,*Y*)，(*X*,*X*)}；

(b) {*A*,*X*)，(*X*,*Y*)，(*Y*,*Z*)，(*Z*,*A*)}；

(c) {(*X*,*B*)，(*B*,*Y*)，(*Y*,*C*)}；

(d){(*B*,*Y*)，(*X*,*Y*)，(*A*,*X*)}；



解：若一个边序列的边是这样连接起来的：它的一条的终结点是下一条边的起始点，则这个边序列是通路。

(a) 否。边(C,Y)不接在(X,B)后面。

(b) 否。图上Y和Z之间没有相连，(Y,Z)不是一条边。

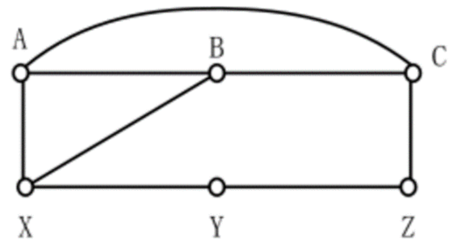
(c) 是。

(d) 是。因为这个序列可以重新写成（(B,Y)，(Y,X)，(X,A)）。

例： 图G如右图所示， 求:

(a) 从A到Z的所有初级通路；

(b) 从A到Z的所有简单通路（迹）。



解：(a) 若从A到Z的一条通路没有顶点是重复的(所以也没有边是重复的)，则它是一条初级通路。

有6条初级通路：(A, C, Z), (A, B, C, Z), (A, X, Y, Z), (A, B, X,Y, Z), (A,X, B,C, Z) , (A,C, B, X,Y, Z) 。

(b) 若从A到Z的一条通路没有重复的边,则它是一条简单通路（迹）。

由(a)的6条初级通路与(A, X, B, A, C, Z), (A ,C, B, A, X, Y, Z), (A, B, C, A, X, Y, Z), (A, B, X, A ,C, Z)合在一起共有10条简单通路（迹）。

通路与回路(续)

说明:

- 表示方法

  ① 用顶点和边的交替序列(定义), 如$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$

  ② 用边的序列, 如$\Gamma=e_1e_2\ldots e_l$

  ③ 简单图中, 用顶点的序列, 如$\Gamma=v_0v_1\ldots v_l$

  ④ 非简单图中,可用混合表示法,如$\Gamma=v_0v_1e_2v_2e_5v_3v_4v_5$

- 环是长度为1的圈, 两条平行边构成长度为2的圈.
- 在无向简单图中, 所有圈的长度≥3; 在有向简单图中, 所有圈的长度≥2.

通路与回路(续)

❖ 在两种意义下计算圈的个数

① 定义意义下

在无向图中，一个长度为$l(l\geq 3)$的圈看作$2l$个不同的圈. 如$v_0v_1v_2v_0$，$v_1v_2v_0v_1$，$v_2v_0v_1v_2$，$v_0v_2v_1v_0$，$v_1v_0v_2v_1$，$v_2v_1v_0v_2$看作6个不同的圈.

在有向图中，一个长度为$l(l\geq 3)$的圈看作l个不同的圈.

② 同构意义下

所有长度相同的圈都是同构的，因而是1个圈.

通路与回路(续)

定理 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u \neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的通路.

推论 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u \neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的初级通路.

定理 在一个n阶图G中，若存在v到自身的回路，则一定存在v到自身长度小于等于n的回路.

推论 在一个n阶图G中，若存在v到自身的简单回路，则存在v到自身长度小于等于n的初级回路.

无向图的连通性

设无向图$G=<V,E>$,

u与v连通: 若u与v之间有通路. 规定u与自身总连通.

连通关系 $R=\{<u,v>|\ u,v\in V$且$u\sim v\}$是V上的等价关系

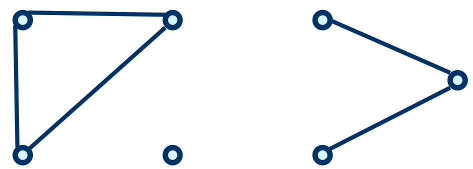
连通图:任意两点都连通的图. 平凡图是连通图.

连通分支: V关于连通关系R的等价类的导出子图

设$V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$, $G[V_1]$, $G[V_2]$, $\ldots$,$G[V_k]$是G的连通分支, 其个数记作$p(G)=k$.

G是连通图$\Leftrightarrow p(G)=1$

例



点割集

记 $G-v$: 从G中删除v及关联的边

$G-V'$: 从G中删除V'中所有的顶点及关联的边

$G-e$: 从G中删除e

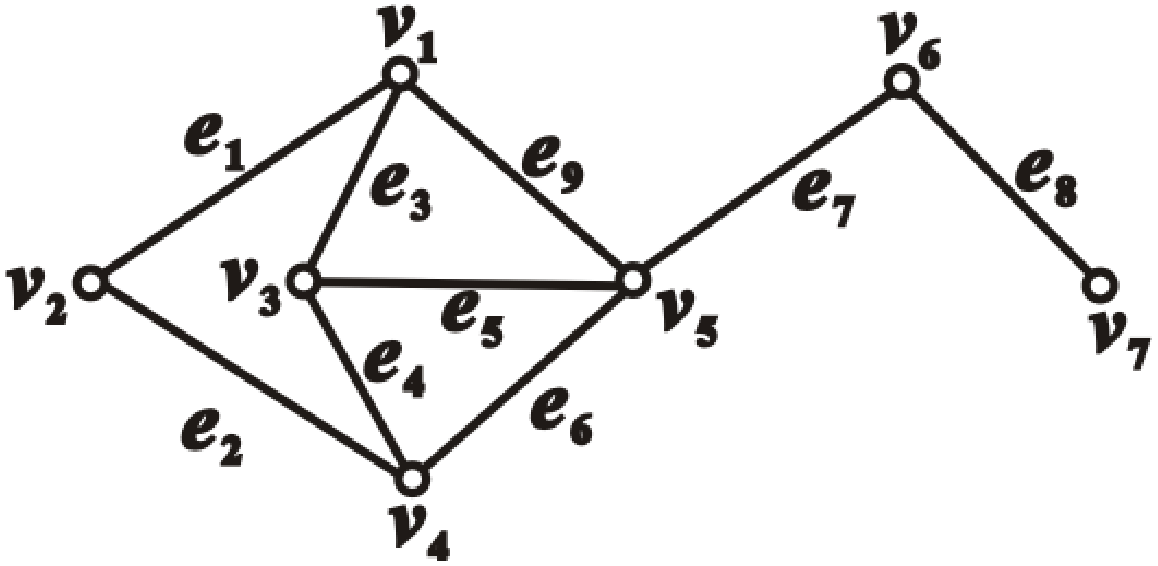
$G-E'$: 从G中删除E'中所有边

定义 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$, $V'\subset V$, 若 $p(G-V')>p(G)$ 且 $\forall V''\subset V'$, $p(G-V'')=p(G)$, 则称V'为G的**点割集**. 若$\{v\}$为点割集, 则称v为**割点**.

点割集实例

例 $\{v_1,v_4\}$, $\{v_6\}$是点割集, v_6是割点.

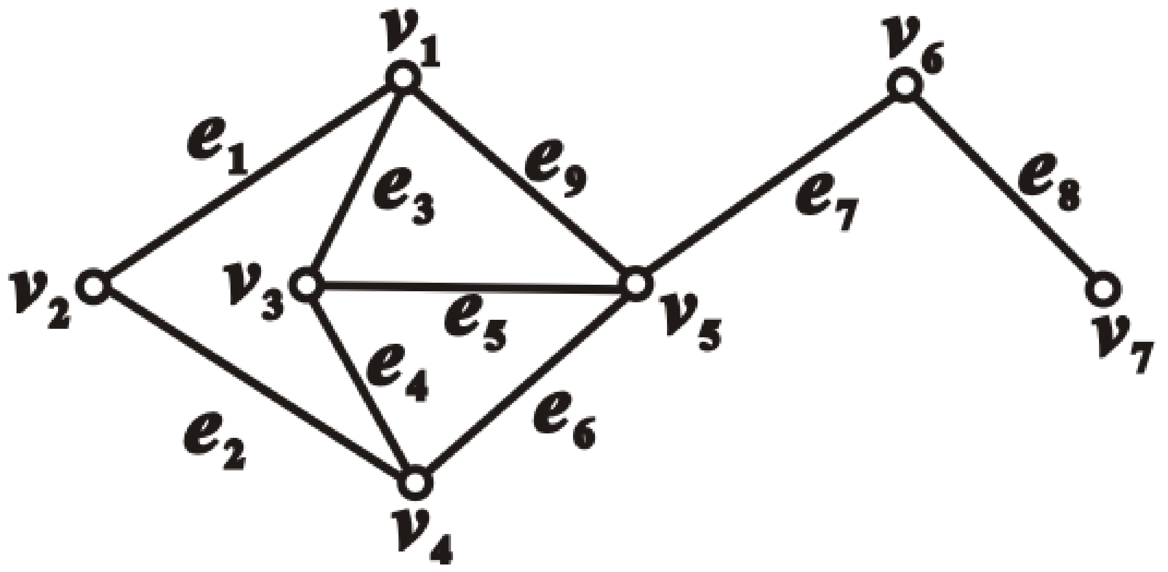
$\{v_2,v_5\}$不是点割集



边割集

定义 设无向图$G=<V,E>$, $E'\subseteq E$, 若$p(G-E')>p(G)$且$\forall E''\subset E'$, $p(G-E'')=p(G)$, 则称E'为G的**边割集**. 若$\{e\}$为边割集, 则称e为**割边**或**桥**.

在上一页的图中，$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥，$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$不是边割集



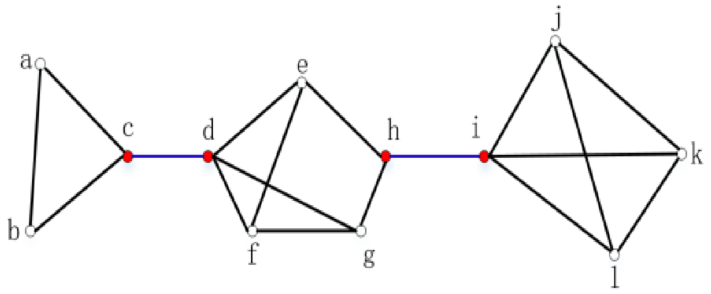
说明：K_n无点割集

n阶零图既无点割集，也无边割集.

若G连通，E'为边割集，则$p(G-E')=2$

若G连通，V'为点割集，则$p(G-V')\geq 2$

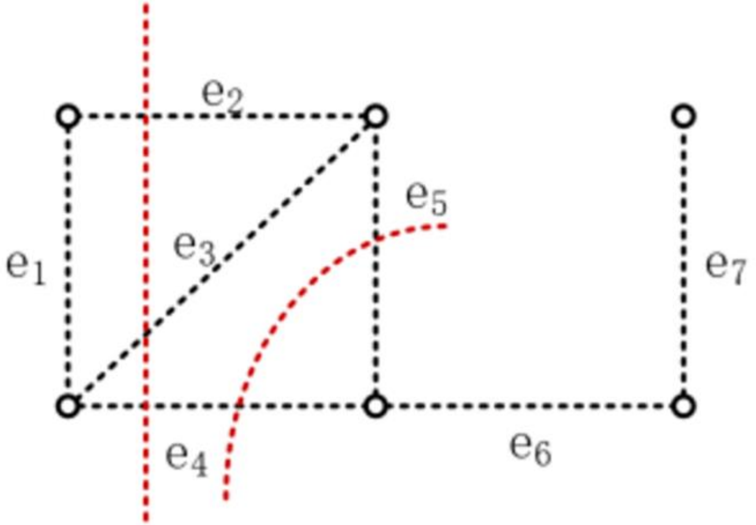
（2）若存在边集子集$E' \subset E$，使得删除E'后，所得子图$G-E'$的连通分支数与G的连通分支数满足$p(G-E') > p(G)$，而删除E'的任何真子集E''后，$p(G-E'') = p(G)$，则称E'为G的一个**边割集**或简称为**割集**。特别地，若割集中只有一条边e，则称e为**割边**或**桥**，如下图中边cd和边hi。



割集有以下特点：

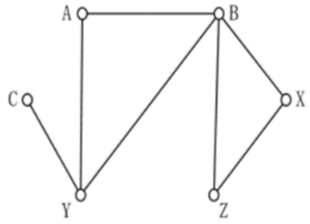
1)把该集合的所有边删去将增加连通分图的个数；

2)把该集合的任何真子集从G中删去则无此效果。



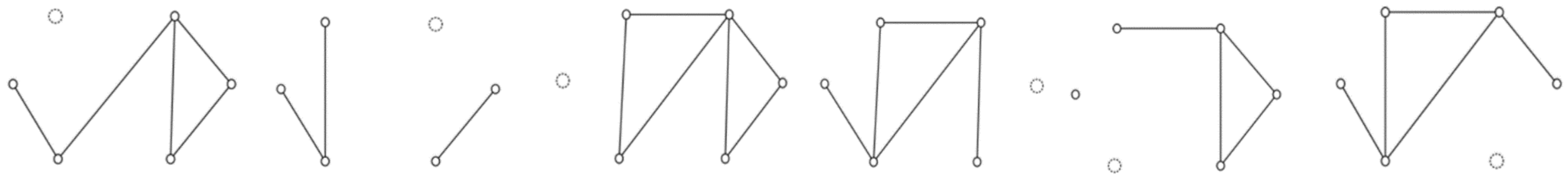
$\{e_2,e_3,e_4\}$是一个割集，$\{e_4,e_5\}$也是一个割集，但$\{e_4,e_5,e_6\}$不是割集。

例： 图G如下图所示， G有割点么 ？



图G

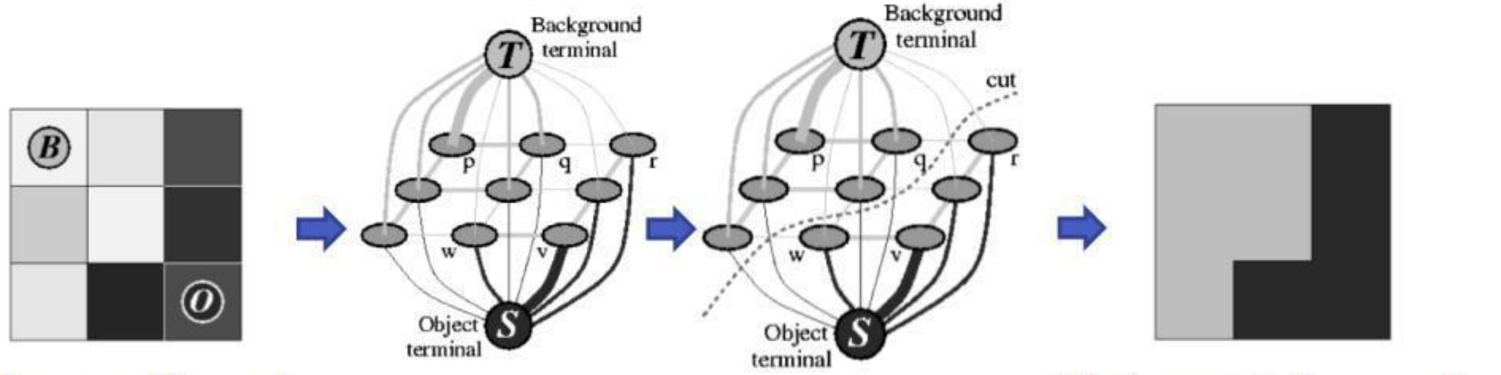
解： 先求解G-A,G-B,G-C,G-X,G-Y,G-Z分别如下图(a)-(f)所示。



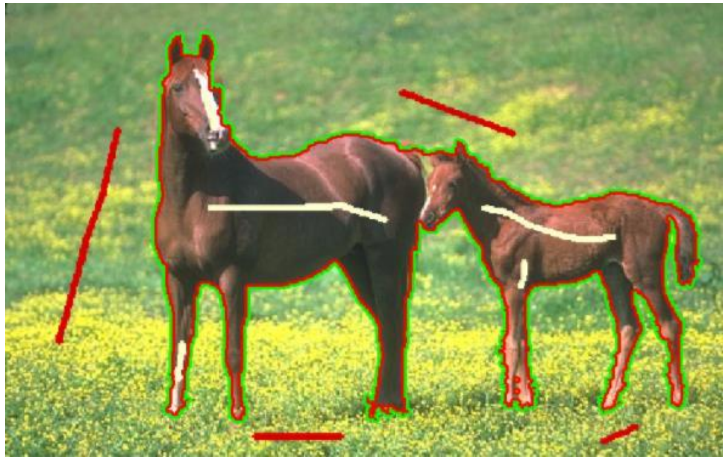
(a)G-A (b)G-B (c)G-C (d)G-X (e)G-Y (f)G-Z

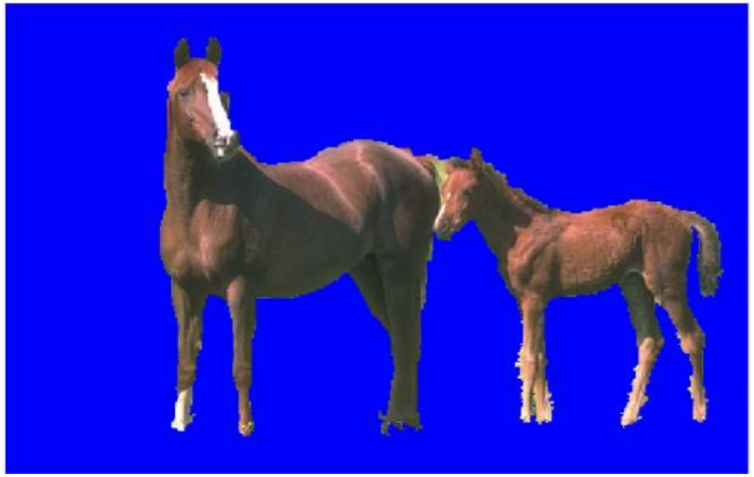
由上图可知，只有G-B和G-Y是不连通的，所以B和Y是G的割点。

应用——基于图割的图像分割



(a) Image with seeds. (b) Graph. (c) Cut. (d) Segmentation results.





§5 连通性

- 设无向图连通图$G=<V,E>$，称$\kappa(G)=\min\{|V||V$为G的点割集$\}$为G的**点连通度**，简称**连通度**。又若$\kappa(G)\geq k$，则称G为**k-连通图**。
- 规定：完全图K_n的点连通度为n-1，$n\geq 1$；
- 非连通图的点连通度为0。设无向图连通图$G=<V,E>$，称$\kappa(G)=\min\{|E||E$为G的边割集$\}$为G的**边连通度**。又若$\kappa(G)\geq k$，则称G为**k边-连通图**。
- 规定非连通图的边连通度为0。
- 对任意无向图$G=<V,E>$，均有下面不等式成立：

$$\kappa(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G)$$

其中，$\kappa(G)$、$\lambda(G)$和$\delta(G)$分别为G的点连通度、边连通度和结点的最小度数。

§ 5 连通性

- 设$G = <V,E>$是一个有向图，略去G中所有有向边的方向得无向图G'，如果无向图G'是连通图，则称有向图G是**连通图**或称为**弱连通图**，否则称G是**非连通图**。
- 设图$G=<V,E>$，其中$v_i,v_j \in V$，如果从v_i到v_j存在一条路径，则称v_j从v_i**可达**。我们定义每个结点到其自身是可达的。
- 设有向图$G = <V,E>$是连通图，若G中任何一对结点之间至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称G是**单向连通图**；若G中任何一对结点之间都是相互可达的，则称G是**强连通图**。
- 在有向图$G = <V,E>$中，设G'是G的子图，如果G'是强连通的（单向连通的、弱连通的），同时对任意$G'' \subseteq G$，若$G' \subset G''$，则G''不是强连通的（单向连通的、弱连通的）。那么称G'为G的**强连通分支**（**单向连通分支**、**弱连通分支**），或称为**强分图**（**单向分图**、**弱分图**）。

例： 求G的连通分图， 此处$V(G)=\{A,B,C,X,Y,Z\}$且

$(a)E(G) = \{(A,X),(C,X)\};$

$(b)E(G) = \{(A,Y),(B,C),(Z,Y),(X,Z)\};$

解：

(a) A与C和X连接, B,Y和Z是孤立顶点。

因此$\{A,C,X\},\{B\},\{Y\}$和$\{Z\}$是G的连通分图。

(b) A, Y, Z 和X 是连接的， B 和C 是连接的。

因此$\{A, X, Y, Z\}$和$\{B, C\}$是G的连通分图。

例：求G的连通分图，此处$V(G)=\{A,B,C,P,Q\}$且

$(a) E(G)=\{(A,C),(B,Q),(P,C),(Q,A)\}$;

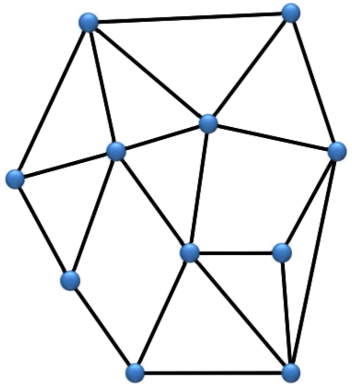
$(b) E(G)=\varnothing$,即空集;

解：

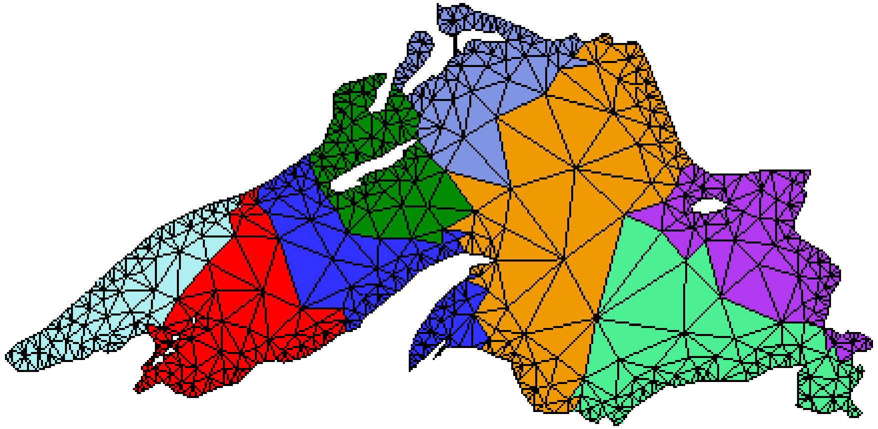
(a)这里G是连通的，即每一顶点与其余顶点连接。因此G有一个分图$V(G)=\{A,B,C,P,Q\}$。

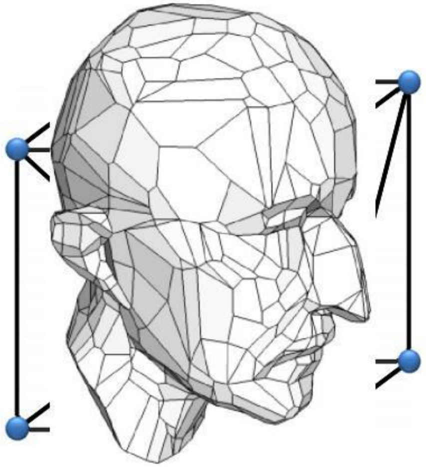
(b)由于$E(G)$是空集，所有的顶点是孤立点，因此{A},{B},{C},{P},{Q}都是G的连通分图。

应用——图的嵌入（网格）

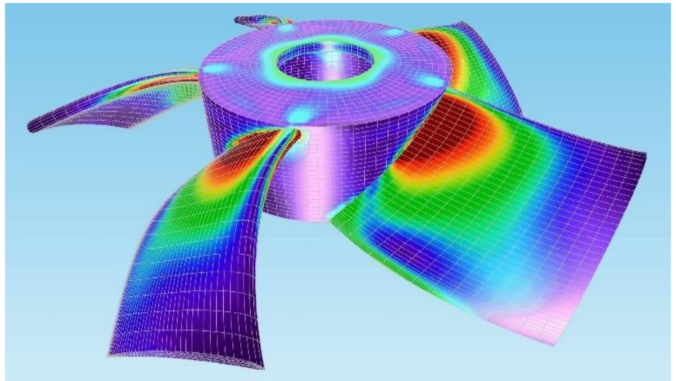


嵌入R^2空间



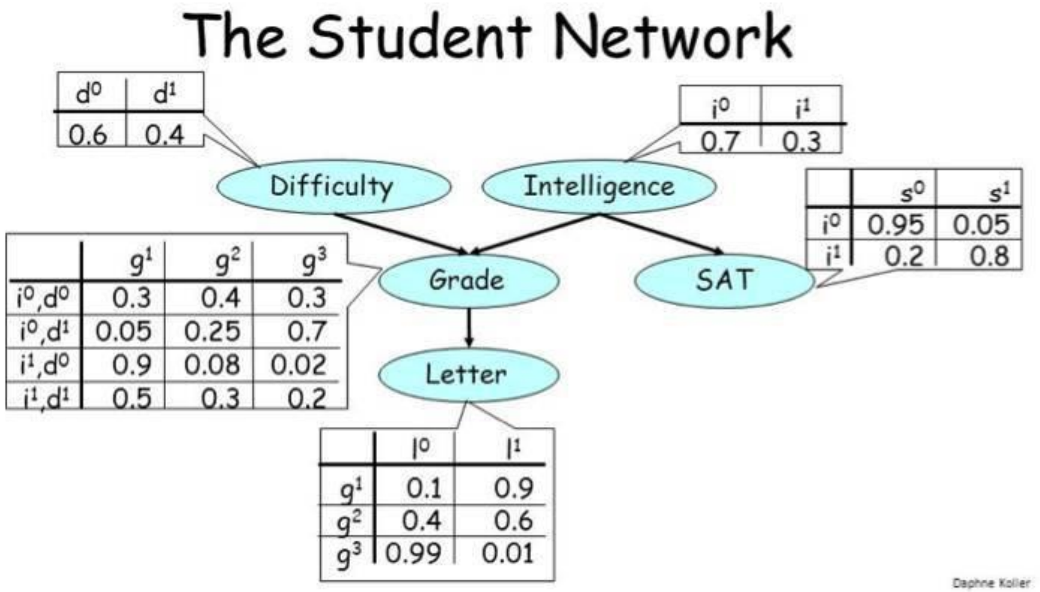


嵌入R^3空间



离散计算域

应用——概率图模型



d^0	d^1
0.6	0.4

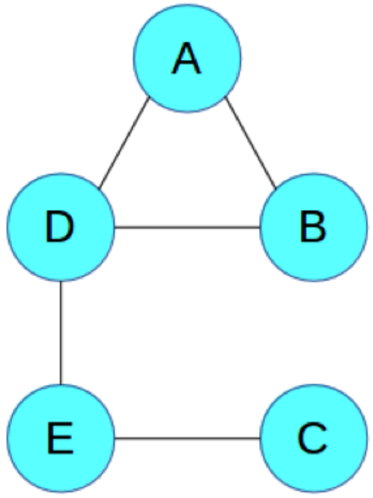
i^0	i^1
0.7	0.3

	s^0	s^1
i^0	0.95	0.05
i^1	0.2	0.8

	g^1	g^2	g^3
i^0,d^0	0.3	0.4	0.3
i^0,d^1	0.05	0.25	0.7
i^1,d^0	0.9	0.08	0.02
i^1,d^1	0.5	0.3	0.2

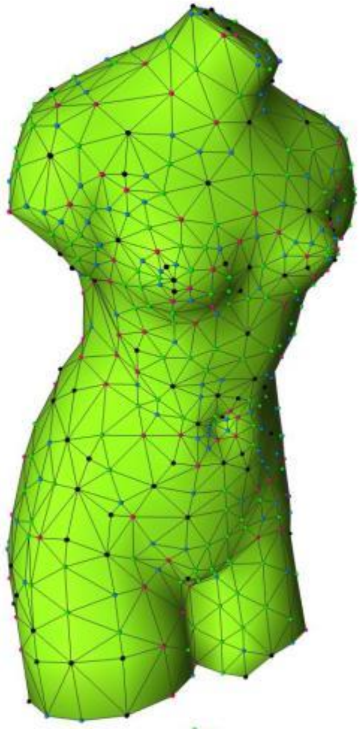
	l^0	l^1
g^1	0.1	0.9
g^2	0.4	0.6
g^3	0.99	0.01

贝叶斯网络（有向图）



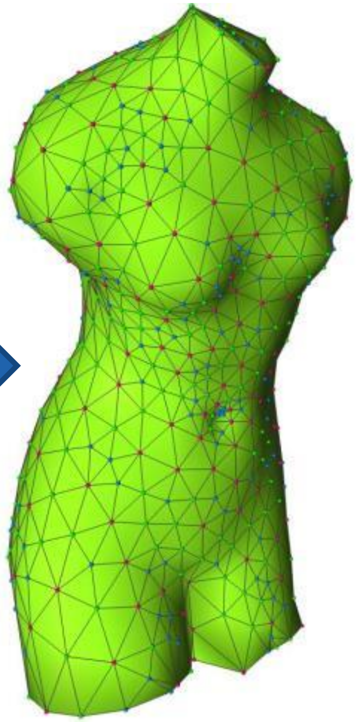
马尔可夫网络（无向图）

应用——网格优化（优化度）



网格优化

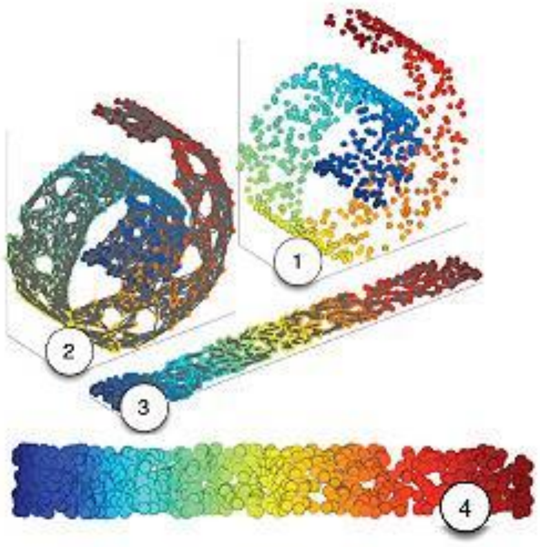
5-6-7度



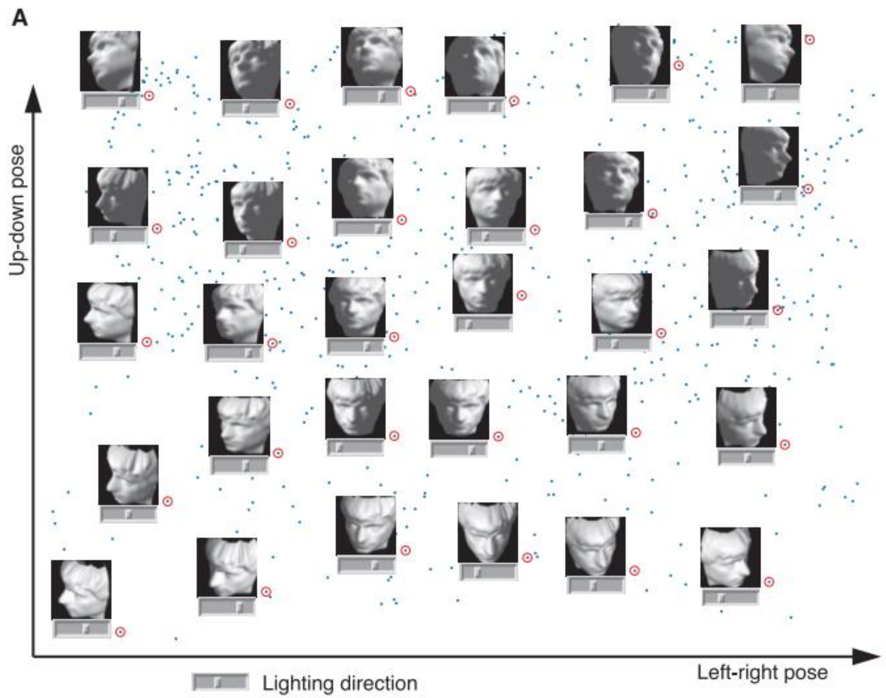
初始网格

优化网格

应用——流形学习（降维）



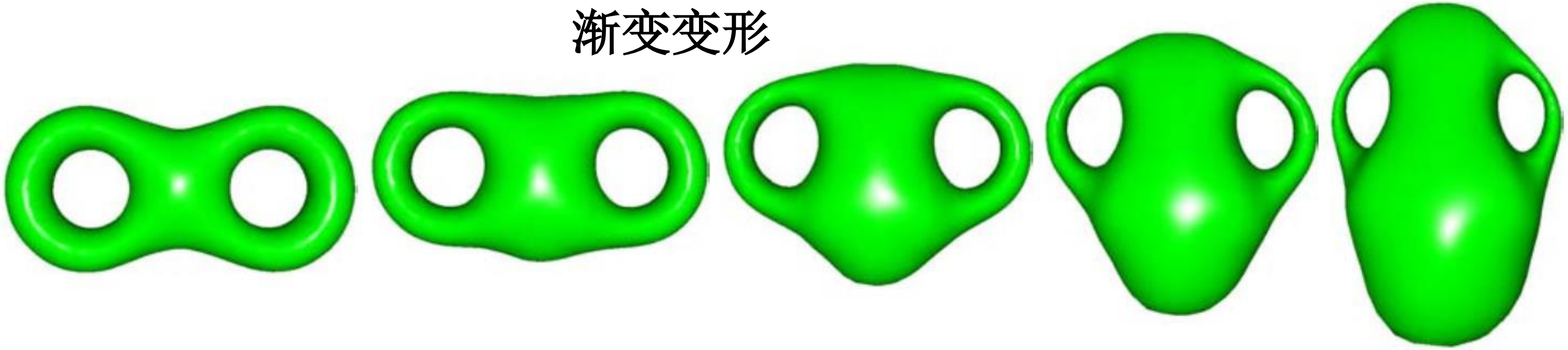
非线性降维



人脸数据降维

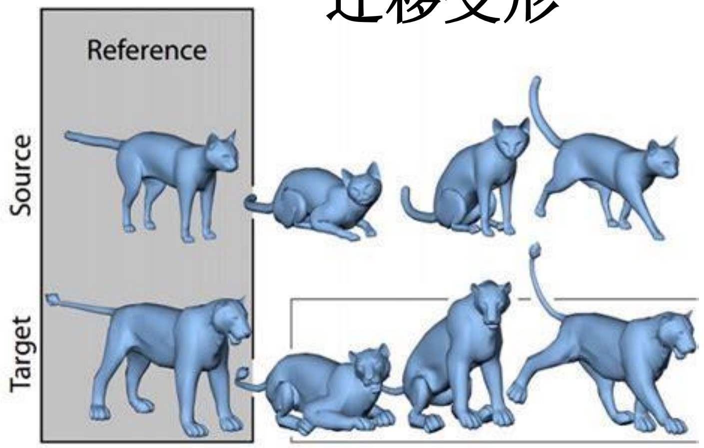
应用——网格变形（同构）

渐变变形



动画

迁移变形



课后习题

- 1,3,9,12,13
- 答题派

一、简答题

1. 5.5 下面各无向图中有几个顶点? （25）
（1）16条边，每个顶点都是2度顶点。
（2）21条边，3个4度顶点，其余的都是3度顶点。
（3）24条边，各顶点的度数是相同的。

2. 5.7 设n阶无向简单图G中，$\delta(G)=n-1$，问$\triangle(G)$应为多少? （25）

3. 5.16 试寻找3个4阶有向简单图D_1, D_2, D_3,使得D_1为强连接图，D_2为单向连通图，但不是强连通的，而D_3为弱连通图，但不是单向连通的，更不是强连通的。 （25）

4. 5.17 设V'和E'分别为无向连通图G的点割集和边割集，$G-E'$的连通分支个数一定为多少? $G-V'$的连通分支数也是定数吗? （25）