浙江理工大学 2009 – 2010 学年 第二学期

《高等数学 B》期末试卷 (A) 卷标准答案和评分标准

一. 选择题（本题共 5 小题, 每小题 5 分，满分 25 分）

(1) C　(2) D　(3) B　(4) D　(5) B

二. 填空题（本题共 5 小题, 每小题 4 分，满分 20 分）

(1) $3,[-4,2)$　(2) e^2-1　(3)$\cos(xy)e^{\sin(xy)}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$

(4) $\frac{9}{2}$　(5) $x=y^2(1+ce^{\frac{1}{y}})$

三. 解答题（55 分）

(1)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 e^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{d}x & \cdots\cdots\cdots\cdots(3分)\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}\mathrm{d}y & \cdots\cdots\cdots\cdots(4分)\\ &= -\frac{1}{6}\int_0^1 y^2\mathrm{d}e^{-y^2} & \cdots\cdots\cdots\cdots(6分)\\ &= -\frac{1}{6}[y^2e^{-y^2}|_0^1-2\int_0^1 ye^{-y^2}\mathrm{d}y] & \cdots\cdots\cdots\cdots(7分)\\ &= \frac{1}{6}(1-\frac{2}{e}) & \cdots\cdots\cdots\cdots(8分) \end{aligned}$$

(2) 两个曲面的交线在 oxy 平面的投影为 $x^2+y^2=4$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$(1分)

$$D=\{(\rho,\theta)|0\le\rho\le 2, 0\le\theta\le 2\pi\}, \cdots\cdots\cdots\cdots(2分)$$

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_D[8-x^2-y^2-(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma & \cdots\cdots\cdots\cdots(5分)\\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(8-2\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho & \cdots\cdots\cdots\cdots(6分)\\ &= 2\pi(4\rho^2-\frac{1}{2}\rho^4)_0^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots(7分)\\ &= 16\pi & \cdots\cdots\cdots\cdots(8分) \end{aligned}$$

(3)

$$\frac{\cos n\pi}{\sqrt{4n^2-1}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{4n^2-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2分)$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}=0,\cdots\cdots\cdots\cdots$(3分)

则由莱布尼兹判别准则, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{4n^2-1}}$ 收敛. $\cdots\cdots\cdots\cdots$(4分)

又 $|\frac{(-1)^n}{\sqrt{4n^2-1}}|>\frac{1}{2n},\cdots\cdots\cdots\cdots$(5分)

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{2n}$ 发散, 根据比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}|\frac{\cos n\pi}{\sqrt{4n^2-1}}|$ 发散.$\cdots\cdots$(7分)

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{4n^2-1}}$ 条件收敛.$\cdots\cdots\cdots\cdots$(8分)

(4)

$$\ln(1-x-2x^2)=\ln(1+x)(1-2x)=\ln(1+x)+\ln(1-2x),\cdots\cdots(2分)$$

因为

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},x\in(-1,1],\cdots\cdots\cdots\cdots(5分)$$

$$\begin{aligned}\ln(1-2x)\quad&=\ln[1+(-2x)]=\textstyle\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{2^n}{n}x^n\\&=-\textstyle\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n,x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cdots\cdots\cdots\cdots(8分)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(1-x-2x^2)\quad&=\textstyle\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n\\&=\textstyle\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n,x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).\cdots\cdots\cdots\cdots(9分)\end{aligned}$$

(5) 对应的特征方程为

$$r^2+1=0,\Longrightarrow\ r_1=i,r_2=-i,\cdots\cdots\cdots\cdots(2分)$$

则对应的齐次方程的通解为 $\bar{y}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.\cdots\cdots\cdots\cdots(4分)$
设原方程的特解为 $y^*(x)=x(a\sin x+b\cos x)$，则 $(y^*)'=x(a\cos x-b\sin x)+(a\sin x+b\cos x),(y^*)''=2(a\cos x-b\sin x)+x(-a\sin x-b\cos x)$，代入原方程得

$$2(a\cos x-b\sin x)=\sin x,\Longrightarrow a=0,b=-\frac{1}{2},$$

所以方程的一个特解为 $y^*(x)=-\frac{1}{2}x\cos x.\cdots\cdots\cdots\cdots(7分)$
方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x.\cdots\cdots\cdots\cdots(8分)$$

(6)

$$F(x,y,u)=u+e^u-xy.\cdots\cdots\cdots\cdots(1分)$$

$$F'_x=-y.$$

$$F'_y=-x.$$

$$F'_u=1+e^u.\cdots\cdots\cdots\cdots(4分)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_u} = \frac{x}{1+e^u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_u} = \frac{y}{1+e^u} \cdots\cdots\cdots\cdots (6分)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= \tfrac{(1+e^u)-xe^u\frac{\partial u}{\partial x}}{(1+e^u)^2} = \tfrac{(1+e^u)-xe^u\frac{y}{1+e^u}}{(1+e^u)^2} \\ &= \tfrac{(1+e^u)^2-xye^u}{(1+e^u)^3}. \cdots\cdots\cdots\cdots (8分) \end{aligned}$$

(7) 由题设有 $a_n > a_{n+1}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则由莱布尼兹判别准则, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n a_n$ 收敛, 与题设矛盾, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l(l>0)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (3分)

由根值判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+a_n}} = \frac{1}{1+l} < 1,$$

故级数收敛. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (6分)