	座位号

浙江理工大学 2020-2021 学年第 2 学期
《高等数学 A2》期末试卷 A 卷

本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

承诺人签名：__________________ 学号：__________________ 班级：______________

题 号	第一题	第二题	第三题								第四题	总分
			1	2	3	4	5	6	7	8		
得 分												

一、 选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设 $z = f(x, y)$ 为定义在点 (x_0, y_0) 的一个邻域上的函数，下列说法中正确的是：(　　)
   (A) 若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ 均存在，则 f 在 (x_0, y_0) 处可微。
   (B) 若 f 在 (x_0, y_0) 处的各个方向的方向导数均存在，则 f 在 (x_0, y_0) 处可微。
   (C) 若 f 在 (x_0, y_0) 处可微，则 f 在 (x_0, y_0) 处可求偏导。
   (D) 以上说法都不对。

2. 设 $U \subset \mathbb{R}^2$ 为一个开区域，设 $f(x, y)$ 与 $\phi(x, y)$ 为定义在 U 上的光滑函数，考虑 f 在条件 $\phi(x, y) = 0$ 下的极值问题，假设 $(x_0, y_0) \in U$ 为极值点，并设 f 与 ϕ 在 (x_0, y_0) 处的梯度均不为零，则下列说法中正确的是：(　　)
   (A) $f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0.$
   (B) $f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0.$
   (C) f 在 (x_0, y_0) 处的梯度与 ϕ 的经过该点的等值线相切。
   (D) f 在 (x_0, y_0) 处的梯度与 ϕ 的经过该点的等值线垂直。

3. 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x + y + z \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$, 则 Ω 的体积等于：(　　)
   (A) $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} 1dz$　　(B) $\int_0^1 dy \int_{1-y}^1 dx \int_{1-x-y}^1 1dz$
   (C) $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} \sqrt{3}dz$　　(D) $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_{x+y}^1 \sqrt{3}dz$

4. 设 $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, 方向取逆时针方向，下面积分中必为零的是：(　　)
   (A) $\oint_C ye^y dx + xe^x dy.$　　(B) $\oint_C x^2 dx + y^2 dy$
   (C) $\oint_C (xe^x + ye^y) ds.$　　(D) $\oint_C (x^2 + y^2) ds.$

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{2^n}$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 中收敛的级数的个数为:(　　)
   (A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

6. 若已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x = 4$ 处收敛，则下面说法中正确的是(　　)
   (A) 该幂级数必在 $x = -4$ 处收敛。　　(B) 该幂级数可能在 $x = -4$ 处收敛。
   (C) 该幂级数不在 $x = -4$ 处收敛。　　(D) 以上说法都不对。

二、 填空题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $\mathbb{R}^3$ 中的一个同时与 $\vec{a}=(1,2,3), \vec{b}=(3,2,1)$ 垂直的单位向量为：______________ .
2. 函数 $z=x^y$ 在点 $(1,e)$ 处沿从点 $(2,1)$ 到点 $(3,2)$ 的方向的方向导数 $=$ _____ .
3. 设函数 $x=g(y,z)$ 是由方程 $x^4+2y^4+xz^4=2$ 在点 $(-1,-1,-1)$ 附近所决定的隐函数，则 $g_z(-1,-1)=$ ______ .
4. 设 $f(x,y)$ 是定义在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数，交换 $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x,y)dx$ 的积分顺序得到：__________________ .
5. 记平面区域 D 的边界为 ∂D, 设 ∂D 为分段光滑曲线，取 ∂D 的方向为相对于 D 的正向，记 D 的面积为 S, 则 $\oint_{\partial D}(3x+4y)dx+(6x+8y)dy=$ _____ .
6. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(2^n \sin\frac{\pi}{3^n}\right)x^n$ 的收敛半径为：______ .

三、 计算题（共 8 小题，每小题 6 分，满分 48 分，应写出演算过程与说明，否则零分）

1. 求由方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+2z^2-4x=0 \\ x-2y+3z-2=0 \end{cases}$ 所决定的曲线在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程与法平面方程。

2. 用 Lagrange 乘数法求函数 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ 在约束 $x+y-1=0$ 下的最小值点.

3. 试用曲线积分的方法求一个定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑函数 $f(x,y)$, 使 $df(x,y) = y^2\cos(xy^2)dx + 2xy\cos(xy^2)dy$.

4. 设 a 为大于零的实数，设 L 为 $\mathbb{R}^2$ 上的从点 $(0,0)$ 到点 $(0,a)$ 的沿着圆 $x^2+y^2=ay$ 的第一象限部分的光滑曲线，试用格林公式计算：

$$\int\limits_L (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy,$$

其中 m 为常数.

5. 试求马鞍面 $z=xy$ 被柱面 $x^2+y^2=a^2$ 所割下的曲面的面积 S.(其中 $a>0$)

6. 设 $R>0$, 求球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 与球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 的公共部分的体积 V.

7. 设 a,b,c 为大于零的实数，设 S 为上半椭球面 $\{(x,y,z)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, z\geqslant 0\}$ 的上侧，试用高斯公式求第二型曲面积分：$\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$.

8. 试求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n$ 的和函数。(并指明其收敛区间)

四、（本题 4 分）设 C 为平面区域 D 的边界曲线，假设 C 是光滑的，对于 C 上的任意一个点 (x,y), 设 $\vec{n}(x,y)$ 为 C 在 (x,y) 处的指向 D 外部的单位法向量，设 $\vec{l}=(l_1,l_2)$ 为一个固定的向量，记 $\cos\theta(x,y)$ 为 $\vec{l}$ 与 $\vec{n}(x,y)$ 的夹角的余弦，证明第一型曲线积分 $\oint_C \cos\theta(x,y)ds$ 必等于零。