浙江理工大学 2020-2021 学年第 2 学期
《高等数学 A2》期末试卷 A 卷

参考答案与评分标准

一、 选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设 $z = f(x, y)$ 为定义在点 (x_0, y_0) 的一个邻域上的函数，下列说法中正确的是：(C)
(A) 若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ 均存在，则 f 在 (x_0, y_0) 处可微。
(B) 若 f 在 (x_0, y_0) 处的各个方向的方向导数均存在，则 f 在 (x_0, y_0) 处可微。
(C) 若 f 在 (x_0, y_0) 处可微，则 f 在 (x_0, y_0) 处可求偏导。
(D) 以上说法都不对。

2. 设 $U \subset \mathbb{R}^2$ 为一个开区域，设 $f(x, y)$ 与 $\phi(x, y)$ 为定义在 U 上的光滑函数，考虑 f 在条件 $\phi(x, y) = 0$ 下的极值问题，假设 $(x_0, y_0) \in U$ 为极值点，并设 f 与 ϕ 在 (x_0, y_0) 处的梯度均不为零，则下列说法中正确的是： (D)
(A) $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0.$
(B) $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0.$
(C) f 在 (x_0, y_0) 处的梯度与 ϕ 的经过该点的等值线相切。
(D) f 在 (x_0, y_0) 处的梯度与 ϕ 的经过该点的等值线垂直。

3. 设 $\Omega = \{(x, y, z)|x + y + z \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$, 则 Ω 的体积等于： (A)
(A) $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} 1dz$　　(B) $\int_0^1 dy \int_{1-y}^1 dx \int_{1-x-y}^1 1dz$
(C) $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} \sqrt{3}dz$　　(D) $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_{x+y}^1 \sqrt{3}dz$

4. 设 $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, 方向取逆时针方向，下面积分中必为零的是：(B)
(A) $\oint_C ye^y dx + xe^x dy.$　　(B) $\oint_C x^2 dx + y^2 dy$
(C) $\oint_C (xe^x + ye^y)ds.$　　(D) $\oint_C (x^2 + y^2)ds.$

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{2^n}$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 中收敛的级数的个数为: (C)
(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

6. 若已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x = 4$ 处收敛，则下面说法中正确的是 (B)
(A) 该幂级数必在 $x = -4$ 处收敛。　　(B) 该幂级数可能在 $x = -4$ 处收敛。
(C) 该幂级数不在 $x = -4$ 处收敛。　　(D) 以上说法都不对。

二、 填空题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $\mathbb{R}^3$ 中的一个同时与 $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (3, 2, 1)$ 垂直的单位向量为： $\underline{\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)}$.
2. 函数 $z = x^y$ 在点 $(1, e)$ 处沿从点 $(2, 1)$ 到点 $(3, 2)$ 的方向的方向导数 = $\underline{\frac{e}{\sqrt{2}}}$.
3. 设函数 $x = g(y, z)$ 是由方程 $x^4 + 2y^4 + xz^4 = 2$ 在点 $(-1, -1, -1)$ 附近所决定的隐函数，则 $g_z(-1, -1) = \underline{4/3}$.
4. 设 $f(x, y)$ 是定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的连续函数，交换 $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y)dx$ 的积分顺序得到： $\underline{\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y)dy}$.

5. 记平面区域 D 的边界为 ∂D, 设 ∂D 为分段光滑曲线，取 ∂D 的方向为相对于 D 的正向，记 D 的面积为 S, 则 $\oint_{\partial D}(3x+4y)dx+(6x+8y)dy=$ $\underline{\quad 2S \quad}$.

6. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(2^n \sin\frac{\pi}{3^n}\right)x^n$ 的收敛半径为： $\underline{\quad 3/2 \quad}$.

三、 计算题（共 8 小题，每小题 6 分，满分 48 分，应写出演算过程与说明，否则零分）

1. 求由方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+2z^2-4x=0 \\ x-2y+3z-2=0 \end{cases}$ 所决定的曲线在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程与法平面方程。

解. 切线方程：

$$\begin{cases} (-2)(x-1)+2(y-1)+4(z-1)=0 \\ (x-1)-2(y-1)+3(z-1)=0 \end{cases}$$

…………………………………………………………………… *4'*

即：

$$\begin{cases} x-y-2z=-2 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$$

切线方向为 $(1,-1,-2)\times(1,-2,3)=(-7,-5,-1)$, ………………………… *1'*

故法平面为：

$$-7(x-1)-5(y-1)-(z-1)=0.$$

…………………………………………………………………… *1'*

□

2. 用 Lagrange 乘数法求函数 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ 在约束 $x+y-1=0$ 下的最小值点.

解. 原问题等价于求函数 $g(x,y)=x^2+y^2$ 在约束 $x+y=1$ 下的条件极值。考虑 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$. ………………………… *2'*

极值点 (x,y) 必满足下面的方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = & 2x+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = & 2y+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = & x+y-1=0 \end{cases} \tag{1}$$

…………………………………………………………………… *2'*

由上面的方程组解得：$x=y=\frac{1}{2}$, 所以可能的极值点为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 由几何意义知，该问题存在最小值，而最小值点一定为极值点，而我们求得的可能的极值点只有一个，所以 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 就是最小值点。………………………………………… *2'*

□

3. 试用曲线积分的方法求一个定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑函数 $f(x,y)$, 使 $df(x,y)=y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy$.

解.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\cos(xy^2)\right)=2y\cos(xy^2)-y^2\sin(xy^2)2xy$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\cos(xy^2)\right)=2y\cos(xy^2)-2xy\sin(xy^2)y^2.$$

因此 $\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\cos(xy^2)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\cos(xy^2)\right)$, ································ *2'*
又 $\mathbb{R}^2$ 单连通，··· *1'*
所以这样的 f 是存在的。
固定 $(0,0)\in\mathbb{R}^2$, 取 $C_1^{x,y}$ 为从 $(0,0)$ 到 $(x,0)$ 的直线段，$C_2^{x,y}$ 为从 $(x,0)$ 到 (x,y) 的直线段，令 $f(x,y)=\int_{C_1^{x,y}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy+\int_{C_2^{x,y}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy$, 则 f 即为所求
··· *1'*
下求之：

$$
\begin{aligned}
f(x_1,y_1)&=\int_{C_1^{x_1,y_1}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy+\int_{C_2^{x_1,y_1}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy\\
&=\int_{C_2^{x_1,y_1}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy\\
&=\int_{C_2^{x_1,y_1}}2xy\cos(xy^2)dy=\sin(x_1y_1^2)
\end{aligned}
$$

因此 $f(x,y)=\sin(xy^2)$. ·· *2'*

□

4. 设 a 为大于零的实数，设 L 为 $\mathbb{R}^2$ 上的从点 $(0,0)$ 到点 $(0,a)$ 的沿着圆 $x^2+y^2=ay$ 的第一象限部分的光滑曲线，试用格林公式计算：

$$\int\limits_L(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy,$$

其中 m 为常数.

解. 记 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant ay,x\geqslant 0\}$, 记 C 为从点 $(0,0)$ 到点 $(0,a)$ 的沿着 y 轴的线段，由格林公式：

$$
\begin{aligned}
&\int_L(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy\\
=&\iint_D mdxdy+\int_C(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy\cdots\ \textit{3'}\\
=&m\sigma(D)+\int_0^a(\cos y-m)dy\cdots\cdots\cdots\cdots\ \textit{2'}\\
=&\frac{1}{2}m\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\sin a-ma.\cdots\cdots\cdots\cdots\ \textit{1'}
\end{aligned}
$$

□

5. 试求马鞍面 $z=xy$ 被柱面 $x^2+y^2=a^2$ 所割下的曲面的面积 S.(其中 $a>0$)

证明. 记 D 为 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2\}$, 则所求的曲面可视为函数 $z=xy,(x,y)\in D$ 的

函数图像，因此：

$$
\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{'}\\
&= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy\\
&= \iint_{0\leqslant r\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \sqrt{1+r^2}rdrd\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{'}\\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1+r^2}rdr\\
&= \pi\int_0^a \sqrt{1+r^2}dr^2\\
&= \pi\cdot\frac{2}{3}\left((1+a^2)^{3/2}-1\right).
\end{aligned}
$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *2'*

□

6. 设 $R>0$, 求球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 与球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 的公共部分的体积 V.

解. 记该公共区域为 Ω, 使用平行于 xy 平面的平面截 Ω, 记 $\Omega_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|(x,y,z)\in\Omega\}$, 则 Ω_z 为一个圆盘，且其面积 $\sigma(\Omega_z)=\begin{cases}\pi(R^2-(R-z)^2), & \text{if } 0\leqslant z\leqslant \frac{R}{2}\\ \pi(R^2-z^2), & \text{if } \frac{R}{2}\leqslant z\leqslant R.\end{cases}$ $\cdots\cdots$ *1'*

由定义

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_\Omega 1dxdydz \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1\text{'}\\
&= \int_0^R dz \iint_{\Omega_z} 1dxdy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{'}\\
&= \int_0^R \sigma(\Omega_z)dz\\
&= 2\int_0^{R/2} \pi(R^2-(R-z)^2)dz\\
&= \pi R^3 - 2\pi\int_{R/2}^R z^2dz\\
&= \pi R^3 - \frac{2\pi}{3}(R^3-R^3/8)\\
&= \pi R^3(1-2/3+1/12) = \frac{5}{12}\pi R^3. \cdots\cdots\cdots 2\text{'}
\end{aligned}
$$

□

7. 设 a,b,c 为大于零的实数，设 S 为上半椭球面 $\{(x,y,z)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, z\geqslant 0\}$ 的上侧，试用高斯公式求第二型曲面积分：$\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$.

解. 记 S_1 为椭圆盘 $\{(x,y,0)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$ 的下侧，则 S 与 S_1 组成的封闭曲面，记 Ω 为 S 所包围的上半椭球，由高斯公式，$\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy+\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iiint_\Omega 2(x+y+z)dxdydx$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *2'*
由于在 S_1 上 $z\equiv 0$, 故 $\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=0$

由对称性知，$\iiint_\Omega 2(x+y)dxdydx$=0。
所以 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=2\iiint_\Omega zdxdydx$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'
又

$$\begin{aligned}2\iiint_\Omega zdxdydz &= 2\int_0^c zdz\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}} dxdy\\ &= 2\int_0^c z\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz\\ &= \pi abc^2-\frac{\pi ab}{c^2}\frac{c^4}{2}\\ &= \frac{\pi abc^2}{2}\end{aligned}$$

故 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\frac{\pi abc^2}{2}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'

□

8. 试求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n$ 的和函数。(并指明其收敛区间）

解. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1$, 收敛半径为 1, 又在 -1 与 1 处显然不收敛，故收敛区间为 $(-1,1)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'
记在 $(-1,1)$ 内收敛到的函数为 $S(x)$, 只需求 $\frac{1}{x}S(x)$, 又

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{S(t)}{t}dt &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}x^n\\ &= \frac{x}{1-x}.\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'
故 $\frac{S(x)}{x}=\frac{d}{dx}\frac{x}{1-x}=\frac{1}{)1-x)^2}$, 故 $S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'

□

四、（本题 4 分） 设 C 为平面区域 D 的边界曲线，假设 C 是光滑的，对于 C 上的任意一个点 (x,y), 设 $\vec{n}(x,y)$ 为 C 在 (x,y) 处的指向 D 外部的单位法向量，设 $\vec{l}=(l_1,l_2)$ 为一个固定的向量，记 $\cos\theta(x,y)$ 为 $\vec{l}$ 与 $\vec{n}(x,y)$ 的夹角的余弦，证明第一型曲线积分 $\oint_C\cos\theta(x,y)ds$ 必等于零。

证明. 不妨设 $\vec{l}$ 为单位向量，则 $\cos\theta(x,y)=\vec{n}\cdot\vec{l}$, 若记 $\vec{n}(x,y)=(n_1(x,y),n_2(x,y))$, 则 $(n_2(x,y),-n_1(x,y))$ 为 C 的光滑的单位切向量场，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2'
不妨取 C 的方向为该切向量场所指的方向，则由第一型曲线积分与第二型曲线积分

之间的关系，有：

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{n} \cdot \vec{l} ds &= \oint_C (n_1 l_1 + n_2 l_2) ds \\
&= \oint_C (l_2, -l_1) \cdot (n_2, -n_1) ds \\
&= \oint_C l_2 dx - l_1 dy \\
&= \iint_D 0 dx dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *2'*

$\square$