高等数学 A1

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 上）

学校：________________

专业：________________

班级：________________

姓名：________________

学号：________________

目 录

说明：1 高数系列试卷见本书最后一页。如有其他需要，请加入 QQ 群获取其他资料；

2《高等数学 A1》中的期末 A 卷是学期末尾进行的统一考试试卷，B 卷是开学后一两周内进行的补考试卷。

答案册里的脑筋急转弯和顺口溜供大家放松用，脑筋急转弯答案可以在下面给的群里查到哈。

资料说明

试卷整理人：张创琦

版次：2021 年 8 月 9 日 第二版

微信公众号：创琦杂谈

本人 QQ 号：1020238657

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）：749060380

创琦杂谈大学数学学习交流群（QQ 群）：967276102

1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一、选择题

1.A　2. B　3. C　4. A　5. B　6. D

评分标准说明：　每题 4 分，错则扣全分

二、填空题

1. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$或者$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.　2. $\frac{1}{e}$.　3. $\frac{2}{3}$.

4. −3.　5. $x+C$.　6. $y=Cxe^{\frac{x^2}{2}}$.

评分标准说明：　每题 4 分，第 5 小题没写“C”扣 2 分, 第 6 小题没写“C”扣 2 分, 其余小题错则扣全分。

三 、计算题（本题共五小题，满分 30 分）

1.**解**：法一：

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right] \quad \text{------------ 3 分}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right]=\frac{1}{2}. \quad \text{------------ 3 分}$$

法二：令 $u=\frac{1}{x}$,

$$\text{原式}=\lim_{u\to 0}\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\ln(1+u)\right]=\lim_{u\to 0}\left[\frac{u-\ln(1+u)}{u^2}\right] \quad \text{------------ 2 分}$$

$$=\lim_{u\to 0}\left[\frac{1-\frac{1}{1+u}}{2u}\right] \quad \text{------------ 2 分}$$

$$=\lim_{u\to 0}\left[\frac{1}{2(1+u)}\right]=\frac{1}{2}. \quad \text{------------ 2 分}$$

评分标准说明：　只写出答案$\frac{1}{2}$，无步骤的，扣 4 分。

2. **解**：令 $u=\sqrt[3]{x}$，则 $x=u^3, \mathrm{d}x=3u^2\mathrm{d}u$ --------------- 1 分

$$\text{原式}=3\int u^2e^u\mathrm{d}u=3\int u^2\mathrm{d}e^u$$

$$=3(u^2e^u-\int e^u\mathrm{d}u^2)=3u^2e^u-6\int ue^u\mathrm{d}u \quad \text{--------------- 2 分}$$

$$=3u^2e^u-6\int u\mathrm{d}e^u=3u^2e^u-6(ue^u-\int e^u\mathrm{d}u)$$ --------------- 2 分

$$=3e^u(u^2-2u+2)+C=3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+2)+C.$$ ------------- 1 分

评分标准说明： 没写“*C*”扣 1 分。

3 **解:**令 x=sin$u$, 则 dx=cos$u$du, 当 x=0, u=0;当 $x=\frac{1}{2}$， $u=\frac{\pi}{6}$ ------------- 2 分

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}u\sin^2u\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{6}}u\frac{1-\cos 2u}{2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}u\mathrm{d}u-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}u\cos 2u\mathrm{d}u$$

------------- 2 分

$$=\frac{\pi^2}{144}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}u\mathrm{d}\sin 2u=\frac{\pi^2}{144}-\frac{1}{4}\left[u\sin 2u\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2u\mathrm{d}u\right]$$ ------------- 2 分

$$=\frac{\pi^2}{144}-\frac{\sqrt{3}\pi}{48}+\frac{1}{16}.$$

评分标准说明： 步骤正确，答案不对，扣 2 分。

4 **解：** 令 x=0， 则 y=1，

两端关于 x 求导得 $e^y y'+y+xy'=0$， ------------- 2 分

再关于 x 求导得 $e^y y'^2+(e^y+x)y''+2y'=0$ ------------- 2 分

求导代入 x=0, y=1 得 $y'(0)=-\frac{1}{e}$， $y''(0)=\frac{1}{e^2}$ ------------ 2 分

评分标准说明： 只写出答案扣 4 分。

5 **解：** 特征方程 $\lambda^2+2\lambda+9=0$，特征根 $\lambda=-1\pm 2\sqrt{2}i$. --------- 1 分

所以齐次方程得通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos 2\sqrt{2}x+C_2\sin 2\sqrt{2}x)$ ---------- 2 分

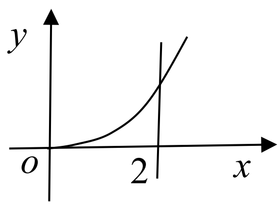
因为-1 不是特征根，设特解为 $y = A e^{i\ x}$，代入得，$A=1$. ---------- 2 分

所以，原方程的通解为 $y=e^{-x}(1+C_1\cos 2\sqrt{2}x+C_2\sin 2\sqrt{2}x)$.----------- 1 分

评分标准说明： 没写“C_1，C_2”扣 1 分。

四、综合题（本题共两小题，满分 14 分）

1. **解：**(1) 区域 D 如图



$$A=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{8}{3};$$ --------- 3 分

(2) $V_y=\int_0^4 4\pi \mathrm{d}y-\int_0^4 \pi y \mathrm{d}y=16\pi-\frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^4=8\pi$. -------- 4 分

2. **解：**(1) 由

$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=g^2(x)+f^2(x)$$

$$=\left[f(x)+g(x)\right]^2-2f(x)g(x)=\left(2e^x\right)^2-2F(x)$$ -------- 2 分

可见 $F(x)$所满足的一阶微分方程为 $F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$ -------- 2 分

(2) $F(x)=e^{-\int 2\mathrm{d}x}\left[\int 4e^{2x}e^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=e^{-2x}\left[\int 4e^{4x}\mathrm{d}x+C\right]=e^{2x}+Ce^{-2x}$ ----- 2 分

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式，得 $C=-1$， 于是 $F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$ ----- 1 分

评分标准说明： 第 1 题不要求画图；第 2 题未求“C”扣 1 分。

五、证明题（本题共两小题，满分 8 分）

1. **证：**令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}, x\in[0,+\infty)$ ，显然，$f(0)=0$. ---- 1 分

又因为，当 $x>0$,

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0$$

故而 $f(x)$在 $[0,+\infty)$ 上单调递增， ------------ 2 分

当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$， 即 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$. ------------ 1 分

2. **证：**法一：柯西中值定理

令 $g(x)=\ln x$.则 $g'(x)=\frac{1}{x}\neq 0$. ------------ 1 分

在(1, 2)上应用柯西中值定理，存在 $\xi\in(1,2)$，使得

$$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ ------------ 2 分

即 $\frac{f(2)}{\ln 2}=\frac{e^{\xi^2}}{\frac{1}{\xi}}$，故 $f(2)=\xi e^{\xi^2}\ln 2$. ------------ 1 分

法二：介值定理

令 $F(x)=f(2)-xe^{x^2}\ln 2, x\in[1,2]$. 则 $F(x)$在[1,2]上连续. --------- 1 分

由积分中值定理：存在$\eta\in[1,2]$,使得 $f(2)=\int_1^x e^{t^2}\mathrm{d}t=e^{\eta^2}$

因为 $e\le f(2)\le e^4$，0<ln2<1，

所以 $F(1)=f(2)-e\ln2>0$, $F(2)=f(2)-2e^4\ln2=f(2)-e^4\ln4<0$.　　-------- 2 分

由介值定理，得，存在$\xi\in(1,2)$，使得 F(ξ)=0，

即 $f(2)=\xi e^{\xi^2}\ln 2$.　　-------- 1 分

评分标准说明：第 2 题步骤不完整扣 1 分。

脑筋急转弯：Q1： 8 个数字“ 8 ”，如何使它等于 1000？

Q2：每隔 1 分钟放 1 炮，10 分钟共放多少炮？

Q3：1 根 2 米长的绳子将 1 只小狗拴在树干上，小狗虽贪婪地看着地上离它 2.1 米远的1根骨头，却够不着，请问，小狗该用什么方法来抓骨头呢？

Q4：烟鬼甲每天抽 50 支烟，烟鬼乙每天抽 10 支烟。5 年后，烟鬼乙抽的烟比烟鬼甲抽的还多，为什么？

Q5：你能否用 3 跟筷子搭起一个比 3 大比 4 小的数？

2 浙江理工大学 2019—2020 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 D　　2 B　　3 A　　4 A　　5 D　　6 A

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.$(-1,0)$　　2. $arcsin(1-x^2)$，　$[-\sqrt{2}，\sqrt{2}]$　　3. 2

4. $\frac{16}{3}$　　5. $\sqrt{3}$　　6. −1，−1

三 解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1．解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\cos(t^2)\mathrm{d}t}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cos(x^4)}{\sin x}$ ……………………（3 分）

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos(x^4)=2$　　……………………（5 分）

2.解：原式$=\int x^{\frac{1}{2}}lnxdx=\frac{2}{3}\int lnx\,dx^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}lnx-\int x^{\frac{3}{2}}dlnx\right]$　　3 分

$=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}lnx-\int x^{\frac{1}{2}}dx\right]$　　……………………….. 4 分

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}lnx-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}+C$　　………………….. 5 分

3.解：令$x=sect\quad dx=secttantdt$　当$x=\sqrt{2}$,时 $t=\frac{\pi}{4}$；$x=2$,时 $t=\frac{\pi}{3}$　2 分

原式$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{sect\cdot tant}{sec^2t\cdot tant}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}costdt$ ……………………..4 分

$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ……………………..5 分

4.解：方程两边取对数可得$ylnx=xlny$，两边对 x 求导数 ……………….. 2 分

$y'lnx+\frac{y}{x}=lny+\frac{xy'}{y}$ …………………….. 4 分

整理后可求得$y'=\frac{xylny-y^2}{xylnx-x^2}$ ……………………..5 分

5.解：$y'=\frac{-1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$ …………………….. 2 分

$=\frac{-(x+1)^2}{(x+1)^2+(x-1)^2}\cdot\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{-1}{1+x^2}$ …………………….. 4 分

$dy=y'dx=\frac{-1}{1+x^2}dx$ …………………….. 5 分

6.解：方程对应的线性齐次方程为$y''+2y'-3y=0$，

其特征方程为：$r^2+2r-3=0$,可解得特征根为：$r_1=1$,$r_2=-3$ ，

通解为：$Y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$ …………………….. 2 分

设原方程的一个特解为：$y^*=ax+b$,代入原方程，得 …………………….. 3 分

$-3ax+2a-3b=2x+3$, 解得$a=-\frac{2}{3}$, $b=-\frac{13}{9}$ ， $y^*=-\frac{2}{3}x-\frac{13}{9}$ 4 分

原方程通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\frac{2}{3}x-\frac{13}{9}$ …………………….. 5 分

四 综合题（本题共 2 小题，每小题 7 分，满分为 14 分）

1. 解：（1）

设切点坐标为(x_0, y_0) ,那么$k=y'\big|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$ ，

切线方程为：$y-y_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$, ……………………………1 分

(0,0)代入切线方程，解得切点坐标(e,1)切线方程：$y=\frac{x}{e}$ …….2 分

$dA=(e^y-ey)dy$ ……………………….3 分

$A=\int_0^1(e^y-ey)dy=e^y\Big|_0^1-\frac{e}{2}y^2\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1$ …………………….4 分

(2)

$dv=\pi((e^y)^2-(ey)^2)dy$ ……………………….5 分

$v=\pi\int_0^1(e^{2y}-e^2y^2)dy=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\Big|_0^1-\frac{e^2}{3}y^3\Big|_0^1\right]=\frac{\pi e^2}{6}-\frac{\pi}{2}$…………….7 分

2．解：因为$(x_0, f(x_0))$处的切线方程为：

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

可解得，该直线与 x 轴交点为$\left(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}，0\right)$

与直线$x=x_0$交点为$(x_0, f(x_0))$ ……………………. 2 分

所围成面积为

$\frac{1}{2}|f(x_0)|\cdot\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|=4$ …………………………3 分

化简得$8y'=y^2$ …………………………4 分

通解为$-\frac{8}{y}=x+C,$ ………………………….6 分

初始条件$f(0)=2,$带入$C=-4$　　$\therefore y=\frac{8}{4-x}$ …………………………. 7 分

五 证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1、证明：由中值定理知有一$a\in[2/3,1]$使$3\int_{2/3}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(a)$，…………………2 分

$\boldsymbol{f(x)}$在$[\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}]$上连续，在$(\boldsymbol{0},\boldsymbol{a})$内可导，且$\boldsymbol{f(a)=f(0)}$，

由 Rolle 定理知至少存在一点$\boldsymbol{\xi\in(0,a)\subset(0,1)}$使$\boldsymbol{f'(\xi)=0}$………………4 分

2、证明：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，

又$f''(x)$存在，因此$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$， -----------------------1 分

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$， -----------------------2 分

法一：利用泰勒公式

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\geq x$ ------------------4 分

脑筋急转弯：6 用三个 3 组成一个最大的数？
7 有 100 个捧球队比赛，选冠军，最少要赛多少场？
8 有一种细菌，经过 1 分钟，分裂成 2 个，再过 1 分钟，又发生分裂，变成 4 个。这样，把一个细菌放在瓶子里到充满为止，用了 1 个小时。如果一开始时，将 2 个这种细菌放入瓶子里，那么，到充满瓶子需要多长时间?

（ξ 介于 0 与 x 之间）

法二：利用单调性

$f''(x)>0 \Rightarrow f'(x)$□ ， $f'(0)=1$，

当 $x>0$ 时， $f'(x)\geq f'(0)=1$；当 $x<0$ 时， $f'(x)\leq f'(0)=1$，

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$，（$\xi$ 介于 0 与 x 之间）

当 $x>0$ 时，$\xi>0$，$f'(\xi)\geq 1$，即 $\dfrac{f(x)}{x}\geq 1, f(x)\geq x$；当 $x<0$ 时，$\xi<0$，$f'(\xi)\leq 1$，

即 $\dfrac{f(x)}{x}\leq 1, f(x)\geq x$。 ----------------4 分

本卷知识点如下：

一．选择题

1.夹逼定理 2.导数定义 3.重要极限 4.不定积分换元法

5.反常积分敛散性判断 6.二阶微分方程特解求一阶，二阶导

二．填空题

1.单调区间 2.复合函数定义域 3.驻点 4.奇偶函数定积分性质

5.参数方程求导 6.分段函数可导，连续

三．计算题

1.积分上限函数求导，洛必达法则 2.分部积分法 3.定积分三角换元

4.隐函数求导数 5.求函数微分 6.二阶线性非齐次微分方程求通解

四．综合题

1.元素法求面积，求体积 2.求切线，求一阶微分方程

五．证明题

1.定积分换元，定积分中值定理，罗尔中值定理 2.泰勒定理，单调性证明

3 浙江理工大学 2018—2019 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 B 2 D 3 C 4 B 5 A 6 C

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 e^{-2} 2 $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$ 3 $\frac{1}{8}$

4 xe^x+C 5 $-\frac{1}{18}$ 6 $\frac{1}{2}$

三 解答题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1 提示：等价代换。答案为$-\frac{2}{3}$

2 提示：=0 处分左右导数用定义求！否则扣分；≠0 处直接求导。

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}(\sin x+\cos x), x\geq 0 \\ 2x+1, \quad\quad x<0 \end{cases}$$

3 提示：三角代换。

答案：$=-\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+C$

4 提示：被积函数有绝对值，需分区间。

答案=$\frac{4}{3}-\frac{2}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{3}{2}}$

5 提示：分部积分法

原式=$(1-\pi)\ln\pi-2\ln 2-1$，能化为相同答案的其他形式都可以。

6 提示：齐次方程+有理函数积分，书本原题，计算较繁琐

特解为：$y^3=y^2-x^2$

四 综合题（本题共 2 小题，每小题 7 分，满分 14 分，应写出具体解题过程）

1 同课堂例题。

单增区间：$\boxed{(-\infty,1),[3,+\infty)}$ 单减区间：$\boxed{(1,3]}$；极小值：$\boxed{\dfrac{27}{4}}$，无极大值；凸区间：$\boxed{(-\infty,0]}$

凹区间：$\boxed{[0,1),(1,+\infty]}$；拐点：$\boxed{(0,0)}$；渐近线：$\boxed{x=1, y=x+2}$，无水平渐近线

2 同 2017-2018 年题。

答案：$V=\frac{\pi}{30}$

五 证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1 同课堂例题。提示：分区间使用拉格朗日中值定理+罗尔中值定理

2 同课本第五章第三节例题。提示：变量代换法+还原法。

脑筋急转弯：9 小王去网吧开会员卡，开卡要 20 元，小王没找到零钱，就给了网管一张 50 的，网管找回 30 元给小王后，小王找到 20 元零的，给网管 20 元后，网管把先前的 50 元还给了他，请问谁亏了？

4 浙江理工大学 2017—2018 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 B　2 C　3 D　4 C　5 B　6 A

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 $\frac{9}{2}\pi$　2 2　3 $x\ln x + C$

4 $x^2y = 1$　5 $\frac{1}{8}$　6 6

三 计算题（本题共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1 提示：洛必达法则。答案：1。

2 提示：变量代换。

答案= $\frac{7}{3} - \frac{1}{\mathrm{e}}$

3 提示：变量代换。

答案：$\sqrt{x}e^{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}e^{2\sqrt{x}} + C$

4 提示：重要极限二。答案：e^{-6}

5 提示：隐函数求导+微分。答案：$dy = -\frac{y}{e^y + x}dx$

6 提示：令所求值为 A，分部积分法。答案：$A = \frac{1}{2}\ln 2 - 1 + \frac{\pi}{4}$

四、综合题（本题 8 分，应写出具体解题过程）

提示：作图理解，空心体积=外圈体积−内圈体积。

答案：(1)$A(1,1)$　(2)$y = 2x - 1$　(3)$V = \frac{\pi}{30}$

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1 提示：偶函数概念+负代换。

2 提示：构造函数法 $F(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}$，罗尔定理。

绕口令：1 发废话会花话费，回发废话话费发，发废话花费话费会后悔。

回发废话会费话费，花费话费回发废话会耗费话费。

2 牛郎恋刘娘，刘娘念牛郎，牛郎连连念刘娘，刘娘年年恋牛郎。娘恋郎来郎念娘，郎恋娘来娘念郎。念恋娘郎。

5 浙江理工大学 2017—2018 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.A　2. A　3. D　4. C　5. A　6. A

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.0　2. 2　3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. -2　5. $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$　6. 2

三、解答题（本题共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分）

1.

解：$\int xe^x dx = \int x de^x$ --------------------------2 分

$= xe^x - \int e^x dx$--------------------4 分

$= xe^x - e^x + C$------------6 分

2.

解：令：$x = \tan t$，$x = 1$时$, t = \frac{\pi}{4}; x = \sqrt{3}$ 时$, t = \frac{\pi}{3}$，　$dx = \sec^2 tdt$ ---------------------2 分

原式$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 t|\sec t|}\sec^2 tdt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 t}\sec tdt$ --------------------------3 分

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 t}d\sin t = -\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ --------------------------5 分

$= \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ --------------------------6 分

3.

解：方程两边对 x 求导得 $y' = \ln y + x \cdot \frac{1}{y} \cdot y'$ --1 分

解得 $y' = \frac{y\ln y}{y-x}$ ---------------------------------2 分

故曲线在点$\left(\frac{e^2}{2}, e^2\right)$处的切线斜率为 $y'\Big|_{\left(\frac{e^2}{2}, e^2\right)} = 4$ ---------------------4 分

因此，经过此点的切线方程为 $y = 4x - e^2$ --------------------5 分

法线方程为 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{8}e^{2}$--------------------6

4.

解：特征方程 $r^2+1=0$ 解得 $r=\pm i$， --------------------------1 分

对应齐次方程的通解为 $Y\left(x\right)=C_1\cos x+C_2\sin x$ ------------------3 分

分别求 $y''+y=e^x$ 与 $y''+y=\cos x$ 的特解 y_1^* 和 y_2^*

可解得 $y_1^*=\frac{e^x}{2}$， $y_2^*=\frac{x\sin x}{2}$， ----------------------5 分

所以原方程通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{e^x}{2}+\frac{x\sin x}{2}$ -----------6 分

四、综合题（第 1、2 题分别为 9 分，第 3、4 题分别为 5 分，满分为 28 分）

1.

解：由题意，面积 $\int_0^1(ax^2+bx+c)dx=\frac{1}{3}$，即 $2a+3b+6c=2$；——————————2 分

又经过原点，则 c=0；因此 $2a+3b=2$——————————————4 分

体积 $V=\int_0^1\pi（ax^2+bx）^2dx=\pi(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3})=（\frac{4}{27}+\frac{1}{27}a+\frac{2}{135}a^2）\pi$ --------6 分

$V=（\frac{4}{27}+\frac{1}{27}a+\frac{2}{135}a^2）\pi$ 的取得最小值时，

$V'=（\frac{1}{27}+\frac{4}{135}a）\pi=0$，得 $a=-\frac{5}{4}$，$b=\frac{3}{2}$

而 $V''>0$，所以此时体积最小--9 分

2.

解： $f(\text{x})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}1+x & -1<x<1\\ \frac{1+x}{2} & x=1,-1\\ 0 & x>1,x<-1\end{cases}$ ----------------------4 分

因而，该函数的间断点为只可能在函数的分段点处取得。

当 $x=-1$ 时， $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=f(-1)=0$，因此在 $x=-1$ 处是连续的;-----6 分

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0,\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2,f(1)=1$，因此在 $x=1$ 处是间断的，为第一类、跳跃间断点-------------------------9 分

3.

证明：设 $F\left(x\right)=xf\left(x\right)$，-----------------------------2 分

则在$\left[0,a\right]$上连续，在$\left(0,a\right)$内可导，且$F\left(0\right)=F\left(a\right)=0$，------------------------3 分

由罗尔定理可得：至少$\exists\xi\in\left(0,a\right)$，使得$F'\left(\xi\right)=0$，

即 $f\left(\xi\right)+\xi f'\left(\xi\right)=0$，即 $f(\xi)=-\xi f'(\xi)$--------------------------------5 分

4. 证明:

(1) $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geq 2$ ----------------------------2 分

(2) $F(a)=\int_b^a\dfrac{dt}{f(t)}=-\int_a^b\dfrac{dt}{f(t)}<0$

$F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$

则$F(x)=0$在$[a,b]$内至少有一个根-----------------4 分

又$F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}>0$，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$上为单调递增函数

因此$F(x)$在$[a,b]$内有且仅有一根-----------------5 分

脑筋急转弯：Q10：一字四十八个头，内中有水不外流。猜一字。
Q11：有三个空房间，一间房间有三盏灯，另一个房间有三个开关，每一个开关只能打开一盏灯，如果你只可以进每个房间一次，那你要如何知道那个开关控制哪盏灯？
Q12：小丽和妈妈买了 8 个苹果，妈妈让小丽把这些苹果装进 5 个口袋中，每个口袋里都是双数，你能做到吗？

6 浙江理工大学 2016—2017 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.A　　2. A　　3. D　　4. C　　5. A　　6. A

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.0　　　　2. 2　　　3. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. -2　　　　5. $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$　　6. 2

三、解答题（本题共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分）

1.

解：$\int xe^x dx = \int x de^x$ --------------------------2 分

$= xe^x - \int e^x dx$--------------------4 分

$= xe^x - e^x + C$------------6 分

2.

解：令：$x=\tan t$，$x=1$时$,t=\dfrac{\pi}{4};x=\sqrt{3}$ 时$,t=\dfrac{\pi}{3}$， $dx=\sec^2 tdt$ ---------------------2 分

原式$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\tan^2 t|\sec t|}\sec^2 tdt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\tan^2 t}\sec tdt$ -------------------------3 分

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\sin^2 t}d\sin t=-\dfrac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$--------------------------5 分

$=\sqrt{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$--------------------------6 分

3.

解：方程两边对 x 求导得 $y'=\ln y+x\cdot\dfrac{1}{y}\cdot y'$ --1 分

解得 $y'=\dfrac{y\ln y}{y-x}$----------------------------------2 分

故曲线在点$\left(\dfrac{e^2}{2},e^2\right)$处的切线斜率为 $y'\Big|_{\left(\frac{e^2}{2},e^2\right)}=4$ ---------------------4 分

因此，经过此点的切线方程为 $y=4x-e^2$--------------------5 分

法线方程为 $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{9}{8}e^2$--------------------6

4.

解：特征方程 $r^2+1=0$ 解得 $r=\pm i$， --------------------------1 分

对应齐次方程的通解为 $Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$ ------------------3 分

分别求 $y''+y=e^x$ 与 $y''+y=\cos x$ 的特解 y_1^* 和 y_2^*

可解得 $y_1^*=\dfrac{e^x}{2}$，$y_2^*=\dfrac{x\sin x}{2}$， ----------------------5 分

所以原方程通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{x\sin x}{2}$ -----------6 分

四、综合题（第 1、2 题分别为 9 分，第 3、4 题分别为 5 分，满分为 28 分）

1.

解：由题意，面积 $\int_0^1(ax^2+bx+c)dx=\dfrac{1}{3}$，即 $2a+3b+6c=2$；-----------------2 分

又经过原点，则 c=0；因此 $2a+3b=2$ -----------------------4 分

体积 $V=\int_0^1\pi(ax^2+bx)^2dx=\pi(\dfrac{a^2}{5}+\dfrac{ab}{2}+\dfrac{b^2}{3})=(\dfrac{4}{27}+\dfrac{1}{27}a+\dfrac{2}{135}a^2)\pi$ --------6 分

$V=(\dfrac{4}{27}+\dfrac{1}{27}a+\dfrac{2}{135}a^2)\pi$ 的取得最小值时，

$V'=(\dfrac{1}{27}+\dfrac{4}{135}a)\pi=0$，得 $a=-\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{3}{2}$

而 $V''>0$，所以此时体积最小---9 分

2.

解：$f(\mathrm{x})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}1+x & -1<x<1\\ \dfrac{1+x}{2} & x=1,-1\\ 0 & x>1,x<-1\end{cases}$ ----------------------4 分

因而，该函数的间断点为只可能在函数的分段点处取得。

当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=f(-1)=0$，因此在 $x=-1$ 处是连续的;-----6 分

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0,\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2,f(1)=1$，因此在 $x=1$ 处是间断的，为第一类、跳跃间断点-------------------------9 分

3.

证明：设 $F(x)=xf(x)$，------------------------------2 分

则在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $F(0)=F(a)=0$，------------------------3 分

由罗尔定理可得：至少 $\exists\xi\in(0,a)$，使得 $F'(\xi)=0$，

即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，即 $f(\xi)=-\xi f'(\xi)$ -------------------------------5 分

4. 证明:

(1) $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geq 2$ ----------------------------2 分

(2) $F(a)=\int_b^a\dfrac{dt}{f(t)}=-\int_a^b\dfrac{dt}{f(t)}<0$

$F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$

则 $F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内至少有一个根-----------------4 分

又 $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}>0$，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上为单调递增函数

因此 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 内有且仅有一根-----------------5 分

Q13：一堆西瓜，一半的一半比一半的一半的一半少半个，请问这堆西瓜有多少个？
Q14：把 24 个人按 5 人排列，排城 6 行，该怎样排？

7 浙江理工大学 2015—2016 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题

1.D 2. B 3. C 4. A 5. C 6. A

二 填空题

2； （1,0）； 3x-9y-1=0； $-\dfrac{\cos x}{e^y}$； 4/3； $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$

三 计算题

1 （洛必达法则）$=-\dfrac{1}{8}$；

2 （对数求导法）$=(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x})\cdot x^{\sin x}$；

3 令 $\sqrt{x}=t$ （分部积分法）$=2e^t(t-1)+C$；

4 （凑微分法）$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

5 $6a$；

6 （I 型+I 型） $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\dfrac{3}{2}x^2e^{2x}+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

四 综合题

1 切线方程：$21x-y-18=0.$，法线方程：$x+21y-64=0$。

2 $a=-\dfrac{5}{3},b=2,c=0$

五 证明题

1 提示：由$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx$分部积分证得。

2 提示：构造函数$g(x)=f(x)-x$，利用零点定理和罗尔定理证明。

Q15：有二个空房间，一间房间有三盏灯，另一个房间有三个开关，每一个开关只能打开一盏灯，如果你只可以进每个房间一次，那你要如何知道那个开关控制哪盏灯？
Q16：一个挂钟敲六下要 30 秒，敲 12 下要几秒？
Q17：一把 11 厘米长的尺子，可否只刻 3 个整数刻度，即可用于量出 1 到 11 厘米之间的任何整数厘米长的物品长度？如果可以，问应刻哪几个刻度？

8 浙江理工大学 2014—2015 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

AC　A　B　B　D　B

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1　$-x\cdot(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$　　2　$xy=2$　　3　$\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}-1$

4　3, 3　　5 $\frac{1}{2}$　　6 $(\frac{1}{e})^{\frac{2}{e}}$

三 计算题（每题 5 分，共 6 题，满分 30 分）

1 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^{x^3}\cdot 3x^2}$（洛必达法则）$=0.$（无穷比无穷）

2 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sinx}{2x}$（洛必达法则）$=\frac{1}{2}.$（0 比 0）

3（参数方程求导法，几何应用）

解：$\frac{dy}{dt}=a\text{sin}t,\quad \frac{dx}{dt}=a(1-\text{cos}t),\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\text{sin}t}{1-\text{cos}t}$

$k_{切}=\frac{dy}{dt}|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1-0}=1,$　切点：$(a(\frac{\pi}{2}-1),a)$

$\therefore L_{切}$：$y-a=1\cdot[x-a(\frac{\pi}{2}-1)]$

4（分部积分法）

解：原式$=-\int_0^1 x\cdot e^{-x}d(-x)=-\int_0^1 xde^{-x}=-x\cdot e^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-1}-e^{-x}\Big|_0^1=1-\frac{2}{e}$

5（弧长）

解：$\frac{dx}{dt}=a(-\text{sin}t+\text{sin}t+t\text{cos}t)=at\text{cos}t$

$\frac{dy}{dt}=a(\text{cos}t-\text{cos}t+t\text{sin}t)=at\text{sin}t$

$ds = \sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2}dt = \sqrt{a^2t^2\cos^2t + a^2t^2\sin^2t}dt = a|t|dt$

$\therefore s = \int_0^\pi ds = \int_0^\pi atdt = \frac{a}{2}t^2\Big|_0^\pi = \frac{a}{2}\pi^2$

6（一阶非齐次线性方程组）

解：$P(x) = 2x, \quad Q(x) = 4x,$

$y = e^{-\int 2xdx}[\int 4x \cdot e^{\int 2xdx}dx + C] = e^{-x^2}[\int 4x \cdot e^{x^2}dx + C] = e^{-x^2}[2 \cdot \int e^{x^2}dx^2 + C]$

$= e^{-x^2}[2e^{x^2} + C] = 2 + C \cdot e^{-x^2}$

四（最值应用题）

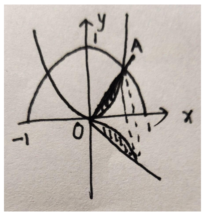
解：设 $AD = x$.

运费 $y = 5 \cdot \sqrt{400 + x^2} + 3 \cdot (100 - x),\ (0 < x < 100)$ $\quad$ $y' = \frac{5x}{\sqrt{400+x^2}} - 3,$

令 $y' = 0$, 解得 $x = 15$，此为唯一驻点，即为题目所求。

故 D 点应造在距 A 点 15km 处。

五（旋转体体积、最值问题）



$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = 1 - x^2 \end{cases} \Rightarrow (x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}, y = \frac{a}{1+a}),$ $\qquad$ L_{OA}: $y = \frac{a}{\sqrt{1+a}}x.$

$V(a) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} \pi \cdot \frac{a^2}{1+a} \cdot x^2dx - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} \pi \cdot a^2 \cdot x^4dx$

$= \frac{\pi a^2}{1+a} \cdot \frac{1}{3(1+a)\sqrt{1+a}} - \frac{\pi a^2}{5(1+a)\sqrt{1+a}} = \frac{2}{15}\pi a^2 \cdot (1 + a)^{-\frac{5}{2}}$

(2)

$$V'(a) = \frac{2}{15}\pi \cdot [2a \cdot (1 + a)^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}a^2 \cdot (1 + a)^{-\frac{7}{2}}] = \frac{2}{15}\pi a(1 + a)^{-\frac{5}{2}}[2 - \frac{5}{2}a(1 + a)^{-1}]$$

令 $V'(a) = 0$，解得唯一驻点 $a = 4$.

当 $a < 4$ 时，$V'(a) > 0$, 当 $a > 4$ 时，$V'(a) < 0$,

_ $\therefore a = 4$ 为极大值点，也为最大值。此时 $V(4) = \frac{32\pi}{15\times25\sqrt{5}}$

六 证明题

1 证明：

$\because$ f(x)在[0, 2]上连续，

$\therefore$ 由积分中值定理知，至少$\exists \xi_0 \in (0, 2)$(关于开闭区间解释，见 235 页注释),

s.t. (使得) $\int_0^2 f(x)dx = 2f(\xi_0)$

又$\because 2f(0) = \int_0^2 f(x)dx$, $\qquad \therefore f(0) = f(\xi)$

2（求导或分部积分法）

左$= \int_0^u f(t)dt \cdot u\Big|_0^x - \int_0^x uf(u)du = x \cdot \int_0^x f(t)dt - \int_0^x uf(u)du = \int_0^x f(t)(x - t)dt =$ 右.

Q18：3 个人 3 天用 3 桶水，9 个人 9 天用几桶水?

9 浙江理工大学 2013—2014 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一、选择题

BCDCDD

二、填空题

1、顶点　2、1，-1　3、减少，增加　4、$3e^{x}(\cos x-\sin x)dx$　5、$\frac{2}{3}$　6、$\sin x-x\cos x+C$

三、解答题

1、$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^{2}\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^{3}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^{2}x-1}{3x^{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^{2}x}{3x^{2}}=\frac{1}{3}$

2、$=\int\frac{d\ln x}{\sqrt{1-\ln^{2}x}}=\arcsin(\ln x)+C$

3、$\frac{dy}{dx}=\frac{t^{2}-1}{t^{2}+1}$，$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{4t}{3(t^{2}+1)^{3}}$，另 $\frac{d^{2}y}{dx^{2}}<0$，得 $t<0$，因此 $x<1$。

4、$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}(1+x)dx+\int_{1}^{2}x^{2}dx=\frac{23}{6}$

四、定义域 $x\neq\pm 1$，函数为奇函数，$y'=\frac{x^{2}(x^{2}-3)}{(x^{2}-1)^{2}},y''=\frac{2x(x^{2}+3)}{(x^{2}-1)^{3}}$，

令 $y'=0,y''=0$，得 $x=0,x=\pm\sqrt{3}$

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y’	+	0	-		-	0	-		-	0	+
y’’	-		-		+		-		+		+
y	增，凸	极大 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	减，凸		减，凹	拐点	减，凸		减，凹	极小 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	增，凹

无水平渐近线，$x=\pm 1$ 为铅直渐近线，$y=x$ 为斜渐近线（图略）

五、1、$\int_{0}^{x}\sqrt{1+y'^{2}}dx=e^{x}-1$，且 $y|_{x=0}=0$，得 $y'=\pm\sqrt{e^{2x}-1}$，取 $y'=\sqrt{e^{2x}-1}$，积分得

$y=\sqrt{e^{2x}-1}-\arctan\sqrt{e^{2x}-1}+C$，由初始条件知 C=0，故 $y=\sqrt{e^{2x}-1}-\arctan\sqrt{e^{2x}-1}$。

五、2、（1）面积 $\int_{0}^{1}(ax^{2}+bx+c)dx=\frac{1}{3}$，又曲线过原点，则 $c=0,2a+3b=2$

（2）体积 $V=\int_{0}^{1}\pi(ax^{2}+bx)^{2}dx=\left(\frac{4}{27}+\frac{1}{27}a+\frac{2}{135}a^{2}\right)\pi$

（3）求 V 得最小值，另 $V'=0$，得 $a=-\frac{5}{4}$，$V''>0$，所以此时体积最小，$b=\frac{3}{2}$

六、1、设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$，

$$\begin{cases}I_1+I_2=\dfrac{\pi}{2}\\ I_1-I_2=0\end{cases}\Rightarrow I_1=I_2=\frac{\pi}{4}$$

2、（1）$F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geq 2$

（2）$F(x)$递增，又 $F(a)=\int_b^a\dfrac{dt}{f(t)}<0, F(b)=\int_b^a f(t)dt>0$，由零点定理知结论成立。

10 浙江理工大学 2012-2013 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1．C;　　2．A；　　3．B;　　4．C;　　5．C；　　6.B

二、填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1. -1, -1　　2. $-\dfrac{y''}{y'^3}$；　　3. $\dfrac{\pi}{2}$；　　4. $[-1,0)\cup[1,+\infty)$；

5. $\arcsin(\ln x)+C$　　6. $y=x(C-\cos x)$

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1. 解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$　-----------------1 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$　------------------3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}$　---------------------5 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x(1+x)}=\dfrac{1}{2}$　---------------6 分

2. 解：$\dfrac{dx}{dt}=2$，　———————————1 分

$te^y+y+1=0\Rightarrow e^y+te^y\cdot\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{e^y}{1+te^y}$，　——————3 分

$t=0$，$x=-1$，$y=-1$，　————————————4 分

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\frac{dy/dt}{dx/dt}\Big|_{t=0}=-\frac{e^{y}}{2(1+te^{y})}\Bigg|_{\substack{t=0\\y=-1}}=-\frac{1}{2e}$$ ----------------------5 分

因此切线方程为 $y+1=-\frac{1}{2e}(x+1)$ 即 $x+2ey+2e+1=0$ ----------------6 分

3. 解：令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos t$ 于是 ---------------------1 分

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t dt}{(1+\sin t)\cos t}=\int\frac{dt}{1+\sin t}$$ -------------------2 分

$$=\int\frac{(1-\sin t)dt}{\cos^2 t}$$ --------------------3 分

$$=\int\sec^2 t dt+\int\frac{1}{\cos^2 t}d\cos t$$ ------------------------4 分

$$=\tan t-\frac{1}{\cos t}+C$$ ------------------------5 分

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C=-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$$ ------------------------6 分

4. 解：原式

$$=\int_{-2}^{0}(x-x)e^{-x}dx+\int_{0}^{2}(x+x)e^{x}dx=2\int_{0}^{2}xe^{x}dx$$ ------------------2 分

$$=2\int_{0}^{2}xde^{x}=2\left(xe^{x}\Big|_0^2-\int_0^2 e^{x}dx\right)$$ -----------------4 分

$$=2\left(e^2+1\right)$$ -----------------6 分

5. 解：特征方程 $r^2+r=0$ 解得 $r_1=0,r_2=-1$， --------------------------1 分

对应齐次方程的通解为 $Y(x)=C_1+C_2e^{-x}$ ------------------3 分

分别求 $y''+y'=e^x$ 与 $y''+y'=\cos x$ 的特解 y_1^* 和 y_2^*

可解得 $y_1^*=\frac{e^x}{2}$， $y_2^*=\frac{\sin x}{2}-\frac{\cos x}{2}$， ----------------------5 分

所以原方程通解为 $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{e^x}{2}+\frac{\sin x}{2}-\frac{\cos x}{2}$ -----------6 分

四、综合题（本题满分 8 分）

解：（1）$V(c)=\pi\int_0^c e^{-2x}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-2c}\right)$， ----------------------2 分

又 $\lim\limits_{c\to+\infty}V(c)=\frac{\pi}{2}$， $V(a)=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-2a}\right)$， ---------------------3 分

由 $V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{c\to+\infty}V(c)$ 得 $a=\frac{1}{2}\ln 2$ ---------------------4 分

（2）设切点为 $\left(x_0,e^{-x_0}\right)$，则切线斜率 $k=-e^{-x_0}$，

切线方程为 $y-e^{-x_0}=-e^{-x_0}\left(x-x_0\right)$， ---------------------5 分

令 $x=0$ 得 $y=\left(1+x_0\right)e^{-x_0}$， $y=0$ 得 $x=1+x_0$，

从而切线与坐标轴夹成的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\left(1+x_0\right)^2 e^{-x_0}(x_0>0)$， ---------6 分

$S'=\dfrac{1}{2}\left(1-{x_0}^2\right)e^{-x_0}$，令 $S'=0$ 得 $x_0=\pm1$（负值舍去），当 $x_0<1$ 时，$S'>0$；当 $x_0>1$ 时，$S'<0$，故当 $x_0=1$ 时，面积 S 有极大值，亦即最大值，

所以切点为 $\left(1,e^{-1}\right)$，最大面积 $S=2e^{-1}$。 -----------------------8 分

五、数学建模题（本题满分 7 分）

解：设物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$，得到如下模型：

$$\begin{cases}\dfrac{dT}{dt}=-k\left(T-18\right)\\ T\left(0\right)=98\end{cases}$$ ------------------------3 分

用分离变量法可解得 $T=18+80e^{-kt}$ ------------------------4 分

当 t=5 时，T=38，所以 $38=18+80e^{-5k}$，解得 $k=\dfrac{\ln 4}{5}$ ------------------------5 分

则当 T=20 时，有 $20=18+80e^{-\frac{\ln 4}{5}t}$，

得 $t=\dfrac{\ln 40}{\left(\ln 4\right)/5}=\dfrac{5(\ln 5+3\ln 2)}{2\ln 2}\approx 13.2$ 分钟， ------------------------6 分

即把鸡蛋放入水池中冷却 13 分钟后鸡蛋的温度达到 20℃，因为达到 38℃用去了 5 分钟，故大约还需 8 分钟达到 20℃ ------------------------7 分

六、证明题（本题共 2 小题，第 1 小题 4 分，第 2 小题 3 分，满分 7 分）

1、（1）证明：$\int_{-a}^{a}f\left(x\right)dx=\int_{-a}^{0}f\left(x\right)dx+\int_{0}^{a}f\left(x\right)dx$

$$=\int_{0}^{a}f\left(x\right)dx-\int_{0}^{-a}f\left(x\right)dx$$ -----------------1 分

令 $x=-t$，则 $dx=-dt$，当 $x=0$ 时，$t=0$；$x=-a$ 时，$t=a$

$$\int_{0}^{-a}f\left(x\right)dx=\int_{0}^{a}f\left(-t\right)d\left(-t\right)=-\int_{0}^{a}f\left(-x\right)dx$$ ----------------2 分

故得 $\int_{-a}^{a}f\left(x\right)dx=\int_{0}^{a}f\left(x\right)dx+\int_{0}^{a}f\left(-x\right)dx$

$$=\int_{0}^{a}\left[f\left(x\right)+f\left(-x\right)\right]dx$$

（2）由上述结论

$$\therefore\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\sin x}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right]dx$$ -------------------3 分

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin^2 x} dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$$

$= 2$ ---------------------4 分

2、证明：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ ，

又 $f''(x)$ 存在，因此 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ ， ------------------------1 分

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$ ， ------------------------2 分

法一：利用泰勒公式

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \ge x$ --------------------3 分

（ξ 介于 0 与 x 之间）

法二：利用单调性

$f''(x)>0 \Rightarrow f'(x)$ ，$f'(0)=1$，

当 $x>0$ 时，$f'(x)\ge f'(0)=1$；当 $x<0$ 时，$f'(x)\le f'(0)=1$，

$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$，（$\xi$ 介于 0 与 x 之间）

当 $x>0$ 时，$\xi>0$，$f'(\xi)\ge 1$，即 $\frac{f(x)}{x}\ge 1, f(x)\ge x$；当 $x<0$ 时，$\xi<0$，$f'(\xi)\le 1$，

即 $\frac{f(x)}{x}\le 1, f(x)\ge x$ 。 -----------------3 分

顺口溜：黑化肥发灰，灰化肥发黑
黑化肥发灰会挥发；灰化肥发挥会发黑
黑化肥挥发发灰会挥发；灰化肥挥发发黑会发挥
黑灰化肥会挥发发灰黑化肥挥发；
灰黑化肥会挥发发黑灰化肥发挥。
黑灰化肥会挥发发灰黑化肥黑灰挥发化为灰；
灰黑化肥会挥发发黑灰化肥灰黑发挥化为黑。
黑化黑灰化肥黑灰会挥发发灰黑化肥黑灰化肥挥发；
灰化灰黑化肥灰黑会发挥发黑灰化肥灰黑化肥发挥。

当欢笑淡成沉默，当信心变成失落，我走近梦想的脚步，是否依旧坚定执着；当笑颜流失在心的沙漠，当霜雪冰封了亲情承诺，我无奈的心中，是否依然碧绿鲜活。

有谁不渴望收获，有谁没有过苦涩，有谁不希望生命的枝头挂满丰硕，有谁愿意让希望变成梦中的花朵。现实和理想之间，不变的是跋涉，暗淡与辉煌之间，不变的是开拓。

甩掉世俗的羁绊，没谁愿意，让一生在碌碌无为中度过。整理你的行装，不同的起点，可以达到同样辉煌的终点。人生没有对错，成功永远属于奋斗者。

——汪曾祺《生活》

高等数学试题资料目录