高等数学A1重修班
导学案及习题册

（仅供林枫老师班级使用）

班级：________________________

学号：________________________

姓名：________________________

2024 年 2 月

目　录

第一模块：极限概念

（一）思考与基础练习

1. 画出四个反三角函数的图形，分别写出它们的定义域、值域、单调性和周期性。

反三角函数	图形	定义域	值域	单调性	周期性
$y=\arcsin x$					
$y=\arccos x$					
$y=\arctan x$					
$y=\mathrm{arccot}\,x$					

2. 数列的有界性是数列收敛的什么条件？无界数列是否一定发散？有界数列是否一定收敛？对的说明理由，错的请举反例。

3. 求 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x},g\left(x\right)=\dfrac{\left|x\right|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在？

4. 在“充分”、“必要”和“充要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：（1）数列 $\left\{x_n\right\}$ 有界是数列 $\left\{x_n\right\}$ 收敛的________条件；（2） $f\left(x\right)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)$ 存在的________条件；（3） $f\left(x\right)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=\infty$ 的________条件；（4） $f\left(x\right)$ 当 $x\to 0$ 时的左右极限都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)$ 存在的________条件。

5. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？请举例说明之。

6. 函数 $y=x\cos x$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内是否有界？这个函数是否为 $x\to+\infty$ 时的无穷大？为什么？

7. 求函数 $f\left(x\right)=\dfrac{4}{2-x^{2}}$ 的图形的水平和铅直渐近线。

（二）进阶练习

1. 设 $x_n \le a_n \le y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_n - x_n\right)=0$，$\left\{x_n\right\}$、$\left\{y_n\right\}$ 和 $\left\{a_n\right\}$ 均为数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$（　　）

A. 存在且等于零　　B. 存在但不一定等于零

C. 一定不存在　　D. 不一定存在

2. 数列 $\left\{a_n\right\}$ 无界是数列 $\left\{a_n\right\}$ 发散的（　　）

A. 必要非充分条件　　B. 充分非必要条件　　C. 充要条件　　D. 非充分非必要条件

3. 设数列通项为 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, n=2m\\ \dfrac{1}{n}, n=2m-1\end{cases}$ $(m\in\mathbb{Z})$，当 $n\to\infty$ 时，$\left\{x_n\right\}$ 是（　　）

A. 无穷大量　　B. 无穷小量　　C. 有界变量　　D. 无界变量

4. 以下说法正确的是（　　）

A. 开区间上连续函数取不到最大值和最小值

B. 若 $f\left(x\right)$ 在某点无定义，则该点极限必不存在

C. 若 $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ 存在，$\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to a}\left[f\left(x\right)g\left(x\right)\right]$ 必不存在

D. 数列单调且有界是数列极限存在的充分非必要条件

第二模块：极限计算

（一）思考与基础练习

1．极限四则运算共同的前提条件是什么？思考求极限的第一步。

2．写出两个极限存在准则和两个重要极限。

3．等价代换的使用前提有哪些？默写 10 个常用等价代换公式。

4. 设 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to a} g(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x \to a} h(x)$ 不存在，则下列四个命题中**正确**的是（　　）

A. $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x)g(x)\right]$ 不存在

B. $\lim\limits_{x \to a}\left[g(x)+h(x)\right]$ 不存在

C. $\lim\limits_{x \to a}\left[g(x)h(x)\right]$ 不存在

D. $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x)+g(x)\right]$ 不存在

5. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$

（2）$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$

6. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

（2）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

（3）$\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

（4）$\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$

（5）$\lim\limits_{n\to \infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$

（6）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right)$

7. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}$　　（4）$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

（5）$\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$　　（6）$\lim\limits_{n\to \infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

（二）进阶练习

1. 下列等式成立的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$　　B. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sin x}{x}=1$　　C. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to \infty}x\sin\frac{1}{x}=1$

2. 若$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$，则$k=$（　　）

A. $k=-2$　　B. $k=-1$　　C. $k=1$　　D. $k=2$

3. 下列各式正确的是（　　）

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan\left(x^2-1\right)}{x-1}=2$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\frac{1}{x}=1$；（3）$\lim\limits_{x\to \infty}x\sin\frac{1}{x}=1$；（4）$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

A. （2）（3）　　B. （1）（4）　　C. （1）（3）　　D. （1）（2）（3）

4. 当$x\to 0$时，若无穷小量ax^2+bx与$\sin x$等价，则a,b的值一定为（　　）

A. $a=0,b=1$　　B. $a=0,b$为任意数　　C. $b=1,a$为任意数　　D. a,b为任意数

5. 当$x\to 0$时，$x\sin x$是$\ln(1+x)$的（　　）

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小　　C. 同阶非等价无穷小　　D. 等价无穷小

6. 下列极限存在的是（　　　）

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{e^x}$　　C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$

7. 当 $x\to 0$ 时，$\left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则 $a=$____________.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$____________.

9. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+5}{x-1}+ax+b\right)=3$，则 $a=$______，$b=$______.

10. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^4+2}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\ln\left(n+1\right)-\ln n\right)$

17. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f\left(x\right)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)$.

第三模块：连续性与间断点

（一）思考与基础练习

1. 如何判断单点处连续？简述四种间断点的分类方法，并举例/画图说明。

1．所有可能间断点会在哪里取得？为什么？

2．理解并用最简洁的数学语言描述有界性与最大值最小值定理、零点定理和介值定理。

3．求下列函数的间断点，并判断其类型：

（1）$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

（2）$y=\begin{cases}x-1,x\le 1\\3-x,x>1\end{cases}$

4．设 $f\left(x\right)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的（　　）

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 第二类间断点　　D. 连续点

5．设 $f\left(x\right)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x},x>0\\a+x^2,x\le 0\end{cases}$，要使 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内连续，应当怎样选择数 a？

6．讨论函数 $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，则判别其类型。

7．证明方程$\sin x+x+1=0$在开区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内至少有一个根.

（二）进阶练习

1. 设$f\left(x\right)=\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}$，则$x=1$为$f\left(x\right)$的（　　）

A. 连续点　　B. 无穷间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 可去间断点

2. 若$f\left(x\right)=\begin{cases}\left(1-2x\right)^{\frac{1}{x}}, x<0\\ \frac{\sin 2x}{\tan kx}, x\geq 0\end{cases}$处处连续，则$k=$________.

3. 设$f\left(x\right)=\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}$，则$f\left(x\right)$的第一类间断点是____________________________.

4. 假设函数$f\left(x\right)$在$\left[0,1\right]$上连续，并且对$\left[0,1\right]$上任一点x有$0\leq f\left(x\right)\leq 1$，试证$\left[0,1\right]$中必存在一点$c$，使得$f\left(c\right)=c$.

第四模块：一阶导与微分

（一）思考与基础练习

1. 单点导数的三种定义式？单侧可导与单点可导的关系？可导的几何意义？可导与连续的关系？单侧可导与单点连续的关系？

2. 默写基本求导法则（6 个）与导数公式（16 个）。

3. 简述隐函数求导法。

4. 说说对数求导法适用情形？

5. 写出参数方程求导公式及其推导过程。

6. 微分的定义？微分计算公式？什么是微分形式不变性？

7. 下列各题中均假定 $f'\left(x_0\right)$ 存在，按照导数定义，求下列极限：

（1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0-\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=$__________

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=$_______（其中 $f\left(0\right)=0$，且 $f'\left(0\right)$ 存在）

（3）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)}{h}=$________

8. 设 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, x\le 1\\ x^2, x>1\end{cases}$，求 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处的左右导数。

9. 求下列函数的导数 y' 及微分 dy：

（1） $y=e^{-x}\left(x^2-2x+3\right)$

（2） $y=\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2$

（3） $y=\frac{\ln x}{x^n}$

（4） $y=\ln\cos\frac{1}{x}$

（5） $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$

（6） $y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$

（7） $y=\arcsin\frac{2t}{1+t^2}$

10. 求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

（1） $y=1-xe^{y}$

（2） $xy=e^{x+y}$

11. 已知 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

12. 求 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos 2t \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程与法线方程。

（二）进阶练习

1. 若曲线 $y=x^{2}+ax+b$ 与 $y=x^{3}+x$ 在点 $(1,2)$ 处相切，则 a,b 的值为（　　）

A. $a=0,b=-2$　　B. $a=2,b=-1$　　C. $a=1,b=-3$　　D. $a=-3,b=1$

2. 下面说法正确的是（　　）

A. 函数在某点连续一定在该点可导　　B. 函数在某点不可导一定在该点不连续

C. 函数在某点不可导一定在该点连续　　D. 函数在某点可导一定在该点连续

3. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处极限存在，则在 $x=x_0$ 点，函数 $y=f(x)$　(　　)

A. 一定连续　　B. 一定可导　　C. 一定可微分　　D. 可能有间断点

4. 设方程组 $\begin{cases} x=2t-1 \\ te^{y}+y+1=0 \end{cases}$ 确定了 y 是关于 x 的函数，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$______.

5. 设参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处切线的斜率为__________.

6. 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}\right]$，则 $f'(t)=$________.

7. 若 $f(x)=\begin{cases} b(1+\sin x)+a+2, x>0 \\ e^{ax}-1, \quad\quad x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 $a=$_______ $b=$_______.

8. 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$___________.

9. 已知 $y=3^x+x^3+3^3+x^x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

第五模块：高阶导

（一）思考与基础练习

1. 推导参数方程求二阶导公式：

2. 写出$\sin kx, e^{kx}, \ln(1+x), x^m$的$n$阶导数及$\left[f(x)\cdot g(x)\right]$的$n$阶导公式：

3. 设$f''(x)$存在，求下列函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

（1）$y=f\left(x^2\right)$

（2）$y=\ln\left[f(x)\right]$

4. 求下列函数所指定的阶的导数：

（1）$y=e^x\cos x$，求$y^{(4)}$

（2） $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$

5. 求下列函数的二阶导数：

（1） $y=1+xe^y$

（2） $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，设 $f''(t)$ 存在且不为零.

（二）进阶练习

1. 已知 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，则 $y''=$ ____________.

2. $f(x)=\ln(2-3x)$ 的 10 阶导数是（　　）

A. $\dfrac{-3^{10}\cdot 10!}{(2-3x)^{11}}$　　B. $\dfrac{3^{10}\cdot 10!}{(2-3x)^{11}}$　　C. $\dfrac{-3^{10}\cdot 9!}{(2-3x)^{10}}$　　D. $\dfrac{3^{10}\cdot 9!}{(2-3x)^{10}}$

3. 设 $y=y\left(x\right)$ 是由方程 $e^{y}+xy=e$ 确定的函数，求 $y'\left(0\right),y''\left(0\right)$.

5. 求由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^{2}\right) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定函数的二阶导数 $\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$.

第六模块：中值定理与洛必达法则

（一）思考与基础练习

1. 请用最简洁的数学语言描述罗尔中值定理和拉格朗日中值定理，说说它们的几何意义及两者之间的关系。

2. 使用洛必达法则需要注意验证哪几个条件？如何借用洛必达法则求 $0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty},\infty^{0},0^{0}$ 型未定式的极限？

3. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性。

4. 证明恒等式：$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}\left(-1\le x\le 1\right).$

5. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 $x=x_0$，证明方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根。

6. 设 $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，证明多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点。

7. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

8. 设 $a>b>0$，试用拉格朗日中值定理证明：$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$.

9. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根。

10. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出。

11. 用洛必达法则求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$

（2）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$

（4）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$

（6）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

（7）$\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sin x}$　　　　（8）$\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

（二）进阶练习

1. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则（　　）

A. $\forall \xi \in (a,b)$，有 $\lim\limits_{x \to \xi}\left[f(x) - f(\xi)\right] = 0$

B. 当 $f(a)f(b) < 0$ 时，$\exists \xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0$

C. 当 $f(a) = f(b)$ 时，$\exists \xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi) = 0$

D. $\exists \xi \in (a,b)$，使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

2. 函数 $y = \ln(1+x)$ 在区间 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的 ξ 为（　　）

A. $\ln 2$　　B. $\frac{1}{\ln 2}$　　C. $\frac{1}{\ln 2} - 1$　　D. $\frac{1}{2}$

3. 使函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$ 满足罗尔定理条件的区间(　　)

A. $[0,1]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[-2,1]$　　D. $[0,2]$

4. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒展开式为 $a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_n(x+1)^n + o\left[(x+1)^n\right]$，则 a_2 等于(　　)

A. -2　　B. -1　　C. 2　　D. 1

5. 求极限：

（1）$\lim\limits_{x \to +\infty}\left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$　　　　（2）$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-x^3}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

（5）$\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x+e^x\right]^{\frac{1}{x}}$　　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\left(e^x-1\right)\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)}$

6. 设 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：至少 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0.$

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且过两点 $(0,f(0))$ 与 $(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于 $(c,f(c))$，其中 $0<c<1$，试证：至少 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0.$

8. 证明：当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

第七模块：函数的特征

（一）思考与基础练习

1. 写出单调性的定义和判定方法。所有可能的单调性分界点会在哪儿取得？

2. 写出凹凸性的定义和判定方法？所有可能的凹凸性改变点会在哪儿取得？拐点和驻点在表达形式上的区别？

3. 试比较第一充分条件和第二充分条件的判定条件与结论的不同之处。可导函数有极值的必要条件时什么？

4. 所有可能的极值点会在哪儿取得？极值点与最值点的区别与联系？

5. 闭区间上连续函数如何求最值？开区间上连续函数呢？可导区间内呢？实际问题中呢？

6. 如何求水平渐近线、铅直渐近线和斜渐近线？

7. 求下列函数的单调区间：

（1） $y=2x+\dfrac{8}{x}$

（2） $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

8. 判定下列曲线的凹凸性：

（1） $y=x+\dfrac{1}{x}$

（2） $y=x\arctan x$

9. 求 $y=\ln\left(1+x^2\right)$ 的拐点.

10. 设在 $\left[0,1\right]$ 上 $f''\left(x\right)>0$，则 $f'\left(0\right),f'\left(1\right),f\left(1\right)-f\left(0\right)$ 或 $f\left(0\right)-f\left(1\right)$ 几个数的大小顺序为（　　）

A. $f'\left(1\right)>f'\left(0\right)>f\left(1\right)-f\left(0\right)$　　B. $f'\left(1\right)>f\left(1\right)-f\left(0\right)>f'\left(0\right)$

C. $f\left(1\right)-f\left(0\right)>f'\left(1\right)>f'\left(0\right)$　　D. $f'\left(1\right)>f\left(0\right)-f\left(1\right)>f'\left(0\right)$

11. 试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a,b,c,d ，使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线，$\left(1,-10\right)$ 为拐点，且点 $\left(-2,44\right)$ 在曲线上。

12. 试问 a 为何值时，函数 $f\left(x\right)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值？它是极大值还是极小值？并求此极值.

13. 求 $y=x+\sqrt{1-x}(-5\le x\le 1)$ 的最大值和最小值.

14. 讨论函数 $f\left(x\right)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 内零点的个数。

（二）进阶练习

1. 设 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f\left(0\right)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{1-\cos x}=-1$，则在点 $x=0$ 处 $f\left(x\right)$（　　）

A. 不可导　　B. 可导且 $f'\left(0\right)\neq 0$　　C. 取得极大值　　D. 取得极小值

2. 设 $f\left(x\right)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'\left(x\right)}{x-a}=-1$，则（　　）

A. $x=a$ 是 $f\left(x\right)$ 的极小值点　　B. $x=a$ 是 $f\left(x\right)$ 的极大值点

C. $x=a$ 不是 $f\left(x\right)$ 的极值点　　D. $\left(a,f\left(a\right)\right)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点

3. 设函数 $f\left(x\right)$ 有二阶连续导数，且 $f'\left(0\right)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''\left(x\right)}{\left|x\right|}=1$，则（　　）

A. $f\left(0\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的极大值　　B. $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点

C. $f\left(0\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的极小值　　D. 以上都不对

4. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{3x+1}$ 的斜渐近线方程为__________________________.

5. 若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $\left(-1,0\right)$，则 $a=$________，$b=$________.

6. 求函数 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 的单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线。

第八模块：不定积分概念

（一）思考与基础练习

1. 什么是原函数？什么是不定积分？原函数与导函数、不定积分与微分的关系如何？

2. 默写 22 个基本积分公式：

3. 在下列等式中，正确的结果是（　　）

A. $\int f'(x)dx = f(x)$　　B. $\int df(x) = f(x)$

C. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$　　D. $d\int f(x) = f(x)$

4. 求下列不定积分：

（1）$\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x^2}-1\right)dx$

（2）$\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$

（3）$\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$

（4）$\int 3^x e^x dx$

（5）$\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx$

（6）$\int \sec x(\sec x-\tan x)dx$

（7）$\int \cos^2\frac{x}{2}dx$

（8）$\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$

（9）$\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$

（10）$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$

（11）$\int \tan^2 x dx$

（12）$\int \cos x(\tan x+\sec x)dx$

（13）$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$

（14）$\int \frac{3x^4+2x^2}{x^2+1}dx$

（二）进阶练习

1. 下列各式中正确的是（　　）

A. $\int df(x)=f(x)$　　B. $\int f'(x)dx=f(x)$

C. $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$　　D. $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$

2. 如果$\int df\left(x\right)=\int dg\left(x\right)$，则下列各式中不一定成立的是（　　）

A. $f\left(x\right)=g\left(x\right)$　　B. $f'\left(x\right)=g'\left(x\right)$

C. $d\left[f\left(x\right)\right]=d\left[g\left(x\right)\right]$　　D. $d\int f'\left(x\right)dx=d\int g'\left(x\right)dx$

3. 若$f\left(x\right)$的导函数为$\sin x$，则$f\left(x\right)$的一个原函数是（　　）

A. $1+\sin x$　　B. $1-\sin x$　　C. $1+\cos x$　　D. $1-\cos x$

4. 设积分族$y=\int f\left(x\right)dx$中有倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$的直线，则$y=f\left(x\right)$的图形是（　　）

A. 平行于y轴的直线　　B. 抛物线　　C. 平行于x轴的直线　　D. 直线$y=x$

5. 若$\int f\left(x\right)dx=\arccos 2x+C$，则$f\left(x\right)=$__________________.

6 设$\int f\left(x\right)dx=xe^{x}-e^{x}+C$，则$\int f'\left(x\right)dx=$__________________.

7. 设$\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x+C$，则$\int\dfrac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=$__________________.

8. 设$e^{x^{2}}$是函数$f\left(x\right)$的一个原函数，则不定积分$\int f'\left(x\right)dx=$__________________.

第九模块：不定积分计算

（一）思考与基础练习

1. 写出 10 个常用凑微分公式：

2. 请分三种情形完整叙述三角代换全过程。

3. 写出不定积分的分部积分公式，并简述常用分部技巧。

4. 求下列不定积分（其中a,b,ω,φ均为常数）：

（1）$\int(3-2x)^5\,dx$

（2）$\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$

（3）$\int\left(\sin ax-e^{\frac{x}{b}}\right)dx$

（4）$\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

（5）$\int xe^{-x^2}dx$

（6）$\int\frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx$

（7）$\int\frac{3x^3}{1-x^4}dx$

（8）$\int\frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$

（9）$\int\cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)dt$

（10）$\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

（11）$\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$

（12）$\int\tan^{10}x\cdot\sec^2 x dx$

（13）$\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$

（14）$\int\frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$

（15）$\int\frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

（16）$\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

（17） $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

（18） $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2} dx$

（19） $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$

（20） $\int \frac{\ln \tan x}{\cos x\sin x} dx$

（21） $\int \cos^3 x dx$

（22） $\int \tan^3 x \sec x dx$

（23） $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

（24） $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx$

（25） $\int \frac{x^3}{9+x^2} dx$

（26） $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$

（27） $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} (a>0)$

（28） $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

（29）$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$

（30）$\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$

（31）$\int x^2 \arctan x dx$

（32）$\int x \tan^2 x dx$

（33）$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$

（34）$\int e^x \sin^2 x dx$

（二）进阶练习

1. 若$\int \frac{f'(\ln x)}{x} \mathbf{d}x = x + C$，则$f(x)$=(　　　　)

A. e^x　　　　B. e^{-x}　　　　C. $-2e^{-2x}$　　　　D. $2e^{-2x}$

2. 设$\int \frac{f'\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} dx = e^x + C$，则$f\left(x\right)=$______________________.

3. 若$\int f\left(x\right)dx = x^2 + C$，则$\int xf\left(1-x^2\right)dx =$________________________.

4. 已知函数$f\left(x\right)$的一个原函数是$\sin 2x$，则$\int 2xf\left(x\right)dx =$________________________.

5. 已知$F\left(x\right)$是$\cos x$的一个原函数，$F\left(0\right)=0$，则$\int xF\left(x\right)dx =$__________________.

6. 求不定积分：

（1） $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

（2） $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx$

（3） $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

（4） $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$

（5） $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

（6） $\int x\sec^2 xdx$

（7） $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

第十模块：定积分概念

（一）思考与基础练习

1. 说说定积分的几何意义、可积的充分条件、定积分的可加性、可比性、估值不等式以及积分中值定理。

2. 什么是变限函数？举例区分积分的内部变量和外部变量。

3. 写出变限函数的求导公式。

4. 用一个式子表示定积分与不定积分的关系。

5. 写出 N-L 公式，并说明其使用前提。

6. 利用定积分的几何意义（画图）求下列积分：

（1）$\int_0^t x dx \left(t>0\right)$　　（2）$\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2}+3\right) dx$

（3）$\int_{-1}^{2}|x|dx$ （4）$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$

7. 设$\int_{-1}^{1}3f\left(x\right)dx=18,\int_{-1}^{3}f\left(x\right)dx=4,\int_{-1}^{3}g\left(x\right)dx=3$，求：

（1）$\int_{-1}^{1}f\left(x\right)dx$

（2）$\int_{1}^{3}f\left(x\right)dx$

（3）$\int_{3}^{-1}g\left(x\right)dx$

（4）$\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}\left[4f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]dx$

8. 根据估值不等式，估计$\int_{2}^{0}e^{x^2-x}dx$的积分值范围。

9. 根据定积分的性质，比较$\int_{0}^{1}e^{x}dx$与$\int_{0}^{1}\left(1+x\right)dx$的大小。

10. 求由参数表达式$x=\int_{0}^{t}\sin udu, y=\int_{0}^{t}\cos udu$所确定的函数对$x$的导数$\frac{dy}{dx}$.

11. 求由$\int_{0}^{y}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\cos tdt=0$所确定的隐函数对$x$的导数$\frac{dy}{dx}$.

12. 当 x 为何值时，函数 $f\left(x\right)=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 有极值？

13. 计算下列各导数：

（1）$\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$

（2）$\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

（3）$\dfrac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos\left(\pi t^2\right)dt$

14. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2dt}{x}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$

15. 计算下列各定积分：

（1）$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{1+x^2}$

（2）$\int_4^9\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

（3）$\int_{-1}^1\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

（4）$\int_{-1}^0\dfrac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$

（5）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta d\theta$

（6）$\int_0^2 f\left(x\right)dx$，其中 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+1,x\le 1\\ \dfrac{1}{2}x^2,x>1\end{cases}$

16. 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可导且 $f'\left(x\right)\le 0$， $F\left(x\right)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f\left(t\right)dt$. 证明在 $\left(a,b\right)$ 内有 $F'\left(x\right)\le 0$.

（二）进阶练习

1. 下列等式中正确的是（　　）

A. $\dfrac{d}{dx}\int_a^b f\left(x\right)dx=f\left(x\right)$　　B. $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f\left(x\right)dx=f\left(x\right)$

C. $\dfrac{d}{dx}\int_x^b f\left(x\right)dx=f\left(x\right)$　　D. $\int f'\left(x\right)dx=f\left(x\right)$

2. 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续是 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可积的（　　）条件

A. 充分非必要　　B. 必要非充分　　C. 充分必要　　D. 既非充分又非必要

3. 函数 $y=\int_0^{x^2}\left(t-1\right)e^t dt$ 有极大值点（　　）

A. $x=1$　　B. $x=-1$　　C. $x=\pm 1$　　D. $x=0$

4. 已知 $\int_1^x f\left(t^2\right)dt=x^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{\sin x}=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

5. 当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x \sin t^2 dt$ 是 x^2+x^3 的（　　）

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小　　C.等价无穷小　　D. 同阶非等价无穷小

6. 若 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt}{x^3}, & x\ne 0\\ a, & x=0\end{cases}$，则 $a=$________时，函数 $f\left(x\right)$ 在点 $x=0$ 处连续。

7. 已知 $\int\dfrac{f\left(x\right)}{\sqrt{9-x^2}}dx=x+C$，则 $\int_0^3\dfrac{dx}{f\left(x\right)}=$________________.

8. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f\left(t\right)dt$，其中 $f\left(x\right)$ 连续。

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\int_0^x\left(\dfrac{\sin t}{t}-1\right)dt$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\cos\left(t^2\right)dt}{1-\cos x}$

9. 设函数 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}\mathrm{d}t$，证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=\left(2-\xi\right)e^{\xi^2}$.

第十一模块：定积分计算

（一）思考与基础练习

1. 定积分换元法与不定积分换元法有哪些异同？

2. 请写出定积分的分部积分公式和华里士公式。

3. 给出定积分的对称性和奇偶性结论。

4. 计算下列定积分：

（1）$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$

（2）$\int_{1}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

（3）$\int_{0}^{1} te^{-\frac{t^2}{2}} dt$

（4）$\int_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

（5）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4 \theta d\theta$

（6）$\int_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx$

（7）$\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$

（8）$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|\ln x\right|dx$

5. 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，证明：$\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\int_{a}^{b}f\left(a+b-x\right)dx.$

（二）进阶练习

1. 设 $f\left(x\right)$ 连续，则在下列变上限积分定义的函数中，必为偶函数的是（　　）

A. $\int_{0}^{x}t\left[f\left(t\right)-f\left(-t\right)\right]dt$　　B. $\int_{0}^{x}t\left[f\left(t\right)+f\left(-t\right)\right]dt$

C. $\int_{0}^{x}f\left(t^2\right)dt$　　D. $\int_{0}^{x}\left[f\left(t\right)\right]^2dt$

2. 对反常积分$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}}$，下列结论正确的是（　　）

A. $p=1$时该反常积分收敛　　　　B. $p\geq 1$时该反常积分发散

C. $p>1$时该反常积分收敛　　　　D. $p<1$时该反常积分收敛

3. 在下列反常积分中**发散**的是（　　）

A. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$　　B. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{2}}$　　C. $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{2}x}$　　D. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}$

4. 求定积分：

（1）$\int_{-3}^{3}\left(x+\sqrt{9-x^{2}}\right)dx$　　　　（2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{1+\sin^{2}x}dx$

（3）$\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^{2}\sqrt{1+x^{2}}}dx$　　　　（4）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\arctan x^{3}\left(\sin^{2}2x+\sqrt{1+x^{2}}\right)dx$

5. 设$f\left(x\right)=\begin{cases} xe^{-x^{2}}, -\frac{1}{2}\leq x<\frac{1}{2} \\ -1, \quad x\geq\frac{1}{2} \end{cases}$，计算定积分$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f\left(x-1\right)dx.$

6. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^{x}=\int_{a}^{+\infty}2xe^{-2x}dx$，求$a$的值.

7. 已知$f\left(x\right)$的原函数为$\left(1+\sin x\right)\ln x$，求$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'\left(x\right)dx$.

8. 求函数$f\left(x\right)=\int_{0}^{x}\left(2-t\right)e^{-t}dt$的凹凸区间与拐点.

第十二模块：定积分应用

（一）思考与基础练习

1. 说说你对积分元素法的理解

2. 求由下列各组曲线所围成的图形的面积（需画图）：

（1） $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$

（2） $y=\ln x, y$ 轴与直线 $y=\ln a, y=\ln b\left(b>a>0\right)$

（3） $y=x^3-5x^2+6x$ 与 x 轴

3. 求位于曲线 $y=e^x$ 下方，该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的面积。

4. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $(0,0)$，且当 $x\in[0,1]$ 时， $y\geq 0$.试确定 a,b,c 的值，使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{9}$，且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小。

（二）进阶练习

1. 曲线 $y=e^{-x}\sin x\left(0\leq x\leq 3\pi\right)$ 与 x 轴所围成的面积可表示为（　　）

A. $-\int_0^{3\pi} e^{-x}\sin x dx$　　B. $\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin x dx-\int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x}\sin x dx$

C. $\int_0^{3\pi} e^{-x}\sin x dx$　　D. $\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx-\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x dx+\int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x}\sin x dx$

2. 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>g(x)>0$，则由 $y=f(x), y=g(x)$，$x=a, x=b$ 所围图形绕 x 轴旋转一周而成的体积可表为定积分________________________.

3. 经过坐标原点作曲线 $y=e^x$ 的切线，该曲线 $y=e^x$ 与切线及 y 轴围成的平面图形为 D . 求（1） D 的面积 A ;（2） D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V.

7. 设直线 $y=ax\left(0<a<2\right)$ 与抛物线 $y=x^2$ 围成平面图形面积为 S_1 ，它们与直线 $x=2$ 围成平面图形的面积为 S_2 ，

（1）求 a 的值，使得 $S=S_1+S_2$ 最小，并求 S 的最小值；

（2）求 S 取得最小值时，直线 $y=ax\left(0<a<2\right)$ ，抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x=2$ 所围成图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积。

第十三模块：一阶微分方程

（一）思考与基础练习

1. 什么是微分方程的阶？微分方程的通解是不是所有的解，为什么？初值问题解得的是通解还是特解？

2. 什么是可分离变量微分方程？如何求解可分离变量微分方程？

3. 齐次方程有什么特征？如何求解？

4. 写出一阶非齐次线性微分方程的标准型及其通解公式：

5. 求下列微分方程的通解：

（1）$xy' - y\ln y = 0$

（2）$\sec^2 x\tan y dx + \sec^2 y\tan x dy = 0$

（3）$\left(x^2 + y^2\right)dx - xydy = 0$

（4）$\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

（5）$y\ln y dx + \left(x - \ln y\right)dy = 0$

6. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

（1） $xdy + 2ydx = 0, y\big|_{x=2} = 1$

（2） $\dfrac{dy}{dx} - y\tan x = \sec x, y\big|_{x=0} = 0$

（二）进阶练习

1. 微分方程 $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ 的一个特解是 (　　　)

A. $y = (x+C)^2$　　B. $y = x^3 + 1$　　C. $y = C(1+x)^3$　　D. $y = (x+2)^3$

2. 微分方程 $y' + y = e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为____________________。

3. 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0 \in I$，曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$，x 轴所围区域的面积恒为 4，且 $f(0) = 2$，求 $f(x)$ 的表达式。

第十四模块：二阶微分方程

（一）思考与基础练习

1. 如何判断两个函数线性无关？并举例说明。

2. 二阶齐次线性微分方程的通解有什么结构？二阶非齐次线性微分方程的通解结构呢？

3. 如何理解线性微分方程解的叠加原理？叠加原理的适用范围？

4. 二阶常系数齐次线性微分方程通解的求解步骤和结论？

5. 如何设二阶常系数非齐次线性微分方程 I 型的特解形式？

6. 已知 $y=1, y=x, y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为 ______________________________.

7. 设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解：$y_1(x)$ 与 $y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程的通解是（　　）

A. $C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$

B. $y_1(x)+C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$

C. $C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$

D. $y_1(x)+C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$

8. 求下列微分方程的通解：

（1）$y''+y'-2y=0$

（2）$y''+y=0$

（3）$4\dfrac{d^2x}{dt^2}-20\dfrac{dx}{dt}+25x=0$

（4） $y''+5y'+4y=3-2x$

（二）进阶练习

1. 微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应有形式（　　）

A. ae^x+b　　B. axe^x+bx　　C. ae^x+bx　　D. axe^x+b

2. 利用待定系数法求微分方程 $y''+3y'+2y=xe^{-x}$ 的特解 y^* 时，可设特解为　(　　)

A. $y^*=(ax+b)e^{-x}$　　B. $y^*=x(ax+b)e^{-x}$

C. $y^*=axe^{-x}$　　D. $y^*=x^2(ax+b)e^{-x}$

3. 已知 $y_1=e^{-2x},y_2=3xe^{-2x}$ 是微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的解，则常数 $p=$ ________，$q=$ __________。

4. 已知曲线 $y=y(x)$ 经过原点，且原点的切线平行于直 $2x-y-5=0$ 线，而 $y(x)$ 满足微分方程 $y''-6y'+9y=e^{3x}$，求此曲线方程。