高等数学 A2

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册）

学校：______________________

专业：______________________

班级：______________________

姓名：______________________

学号：______________________

目 录

1 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. A　2. C　3. B　4. C　5. B　6. D

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $\dfrac{x}{-R}=\dfrac{y-R}{0}=\dfrac{z-\frac{k}{2}\pi}{k}$；　2. $8\pi R^2$；　3. 4π；　4. $[4,6]$；

5. $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$;　6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}, (-\infty<x<+\infty)$.

三 、计算题

1、解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2\mathrm{x}\mathrm{e}^{\mathrm{x}+\mathrm{y}}+(\mathrm{x}^2+y^2)e^{x+y}=(\mathrm{x}^2+2x+y^2)e^{x+y}$.　……………………（3 分）

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2ye^{x+y}+(x^2+2x+y^2)e^{x+y}=(x^2+2x+2y+y^2)e^{x+y}$.　…………（7 分）

2、解：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}}{\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\left(-\frac{n}{n+1}\right)}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1,$$

所以，由比值审敛法，该级数收敛。　……………………….（7 分）

3、解：曲面Σ的方程为$\Sigma: \mathrm{z}=\sqrt{9-\mathrm{x}^2-y^2}$, $(x,y)\in D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 8\}$。

$\because$　$\mathrm{z}_\mathrm{x}=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，$\mathrm{z}_\mathrm{y}=\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，

$\therefore$　$\sqrt{1+\mathrm{z}_\mathrm{x}^2+z_y^2}=\frac{3}{\sqrt{9-\mathrm{x}^2-y^2}}$.

从而，$\mathrm{S}=\iint_D\sqrt{1+\mathrm{z}_\mathrm{x}^2+z_y^2}dxdy=\iint_D\frac{3}{\sqrt{9-\mathrm{x}^2-y^2}}dxdy$　……………（4 分）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{3}{\sqrt{9-r^2}}rdr=12\pi$　……………（7 分）

4、解：添加辅助面$\Sigma: \mathrm{z}=0, \mathrm{x}^2+y^2\le a^2$，取下侧。记Ω 为曲面 S 和Σ所围成的空间区域，则由高斯公式，

$$\iint_{S\cup\Sigma}\mathrm{xdydz}+\mathrm{ydzdx}+\mathrm{zdxdy}=3\iiint_{\Omega}dv=3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3=2\pi a^3$$ ………（4 分）

而　$\iint_{\Sigma}\mathrm{xdydz}+\mathrm{ydzdx}+\mathrm{zdxdy}=0$

所以，$\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy=2\pi a^3$　………..（7 分）

5、解：令$P=3x^2y+8xy^2$，$\mathrm{Q}=x^3+8x^2y+12ye^y$。

因为

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}=3x^2+16xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$(3\mathrm{x}^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$是某个函数的全微分。　……..（3 分）

$$\mathrm{u(x,y)}=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3\mathrm{x}^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$$

$$=\int_0^y(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$$

$$=\mathrm{x}^3y+4x^2y^2+12(y-1)\mathrm{e}^y+12$$ ……….（7 分）

6、解：*f(x)*满足 Dirichlet 定理条件，傅里叶系数计算如下：

$$\mathrm{a}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\left[\frac{2}{n^2\pi}x\cos nx\right]_0^{\pi}=(-1)^n\frac{2}{n^2},\mathrm{n}=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x^2\cos nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}+\frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n-1]\qquad n=1,2,\cdots$$ ………（5 分）

所以，

$$f(x)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^n\frac{2}{n^2}\cos nx+\left[(-1)^{\mathrm{n}+1}\frac{\pi}{n}+\frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n-1]\right]\sin nx\}$$

$$x\neq(2k+1)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$ ………（7 分）

四、证明题

1、证明：

$$\int_0^1dx\int_x^1f(x)f(y)dy=\int_0^1dy\int_0^yf(x)f(y)dx=\int_0^1\left[f(y)\int_0^yf(x)dx\right]dy$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^yf(x)dx\right]d\left[\int_0^yf(x)dx\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^yf(x)dx\right]_0^1=\frac{A^2}{2}。$$ ………（5 分）

2、证明：由 Green 公式

左边 $=\iint_D \mathrm{e}^{\sin y}+e^{-\sin x}dxdy$，右边 $=\iint_D \mathrm{e}^{-\sin y}+e^{\sin x}dxdy$。

由二重积分的对称性，$\iint_D \mathrm{e}^{\sin y}+e^{-\sin x}dxdy=\iint_D \mathrm{e}^{-\sin y}+e^{\sin x}dxdy$。

从而，$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$。　………（5 分）

2 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. A　2. C　3. D　4. B　5. D　6. D

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $(0,\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{15}})$；　2. $8\pi R^2$；　3. $2\sqrt{2}$；　4. $\frac{64}{3}\pi$；　5. [4,6]；　6. 0 .

三 、计算题

1、 解：$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3}dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{1+x^3}dy.$

$=\int_0^1\sqrt{1+x^3}\cdot x^2dx=\left[\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$ ……………………（7 分）

2、 解：令$f_x(x,y)=2x(2+y^2)=0,\ f_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0,$

得$f(x,y)$的驻点为$(0,\mathrm{e}^{-1})$。 …………………（3 分）

在$(0,\mathrm{e}^{-1})$点，

$$\mathrm{A}=f_{xx}(0,e^{-1})=2(2+y^2)|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}=2(2+\mathrm{e}^{-2})$$

$$\mathrm{B}=f_{xy}(0,e^{-1})=4xy|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}=0$$

$$C=f_{yy}(0,e^{-1})=(2x^2+\frac{1}{y})|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}=e$$

由于 $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2>0, A>0$，所以 f(x,y)在$(0,e^{-1})$取到极小值$-\mathrm{e}^{-1}$。……..（7 分）

3、 解：设 $\mathrm{A}=\iint_D f(x,y)dxdy$，则 $\mathrm{f(x,y)=xy+A}$ 。由题意，

$$\mathrm{A}=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D (xy+A)dxdy$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(xy+A)dy=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^5+Ax^2\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^6+\frac{1}{3}Ax^3\right]_0^1=\frac{1}{8}$$

从而，$f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$。 ……..（7 分）

4、 解：有向曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases}\mathrm{x}=2\cos\theta\\ y=3\sin\theta\end{cases}\quad \theta:0\to\pi$$

则 $\int_L (x^2+xy)dy=\int_0^\pi(4\cos^2\theta+6\cos\theta\sin\theta)\cdot 3\cos\theta\, d\theta$ ……（4 分）

$$=12\int_0^\pi\cos^3\theta\, d\theta+18\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta$$

$$=12\int_0^\pi(1-\sin^2\theta)d\sin\theta+18\int_0^\pi\cos^2\theta\, d\sin\theta$$

$$= 12\left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\pi} - 18\cdot\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= 12$$ ……………..（7 分）

5、解：添加辅助面$\Sigma\text{: z} = 0, \mathrm{x}^2 + y^2 \le a^2$，取下侧。记$\Omega$ 为曲面 S 和Σ所围成的空间区域，则由高斯公式，

$$\iint_{S\cup\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = 3\iiint_{\Omega} dv = 3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3 = 2\pi a^3$$ ………（4 分）

而 $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = 0$

所以， $\iint_{S} xdydz + ydzdx + zdxdy = 2\pi a^3$ ………..（7 分）

6、解：

$$f(x) = \frac{x}{2 + x - x^2} = \frac{x}{-(x-2)(x+1)}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{1+x} + \frac{2}{3}\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - (-1)^n\right)x^n \qquad x \in (-1,1)$$ ……….（7 分）

四、证明题

1、证明：令$P = 2xy^3 - y^2\cos x$，$Q = 1 - 2y\sin x + 3x^2y^2$。

因为

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = 6\mathrm{xy}^2 - 2y\cos y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以，由 Green 公式，

$$\oint_L (2\mathrm{xy}^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}dxdy = 0$$

………（5 分）

2、证明：因为正项级数$\{\mathrm{x_n}\}$单调增加且有上界，所以，存在一个常数 C，使得

$$\mathrm{x_n} < x_{n+1} < C。$$

从而，$\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}})$是正项系数。 …………（2 分）

又因为

$$\mathrm{S_n} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{n}\left(1 - \frac{x_k}{x_{k+1}}\right) = \frac{x_2 - x_1}{x_2} + \frac{x_3 - x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}$$

$$\le \frac{x_{n+1} - x_1}{x_2} \le \frac{C - x_1}{x_2}$$

所以，级数$\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}})$收敛。 ……………（5 分）

3 浙江理工大学 2016—2017 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1. D　　2. A　　3. C　　4. C　　5. D　　6. A

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1. -6　　2. 0　　3. 2

4. $\frac{1}{1+\ln\frac{z}{x}}$或$\frac{z}{y+z}$　　5. 1　　6. 2

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出文字说明及演算过程）

1.

把Ω投影到xOy面上得投影区域D_{xy}为由直线$x+2y=1$与两坐标轴围成的三角形 ....（2 分）

$\iiint_{\Omega} xdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}dy\int_0^{1-x-2y}xdz$ ....（4 分）

$=\frac{1}{48}$ . ...（6 分）

2.

解：$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$ ....（2 分）

$\frac{1}{1+x^2}=1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+\ldots$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ ....（4 分）

$x\in(-1,1)$ ....（6 分）

3.

设L_1为单位圆位于第一象限的部分。

$\int_L |y|ds=2\int_{L_1}|y|ds=2\int_{L_1}yds$ ....（2 分）

设$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

则$ds=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}d\theta=d\theta$ ....（4 分）

原式$=2\int_{L_1}yds$=$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=2$ ....（6 分）

4.

方法一：

把圆柱体表面分为三个部分：上半部分和侧面， ....（2 分）

分别则上下在xOy面上投影相同，侧面在xOy面上投影为零， ....（4 分）

在上半部分的积分互为相反数，侧面的积分为 0，所以积分值为 0. ....（6 分）

方法二：

设Ω为圆柱体闭域， ....（2 分）

由高斯公式：$\oiint_{\Sigma}(x-y)dxdy=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(x-y)}{\partial z}dv$ ....（4 分）

$=\iiint_{\Omega}0dv=0.$ ....（6 分）

5.

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$$ ....（2 分）

解得驻点为$(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$ ....（3 分）

再求二阶偏导数，

$f_{xx}(x,y)=6x+6,f_{xy}(x,y)=0,f_{yy}(x,y)=-6y+6.$ ....（4 分）

在点$(1,0)$处，$\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2=72>0$，且 $\mathrm{A}>0$，故$(1,0)$为极小值点。

类似地，$(-3,2)$为极大值点，$(1,2),(-3,0)$都不是极值点。 ....（6 分）

四、证明题（本题共 2 小题，第 1 题 4 分，第 2 题 6 分，满分 10 分，应写出详细证明和计算过程）

1.

令$a_n=\frac{n}{3^{n-1}}$，

则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1$， ....（2 分）

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{3^{n-1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$ 收敛， ....（3 分）

故原级数绝对收敛。 ....（4 分）

2.

令$P(x,y)=2xy-y^4+3$，$Q(x,y)=x^2-4xy^3$，

则$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以曲线积分与路径无关。 ....（2 分）

$\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$

$=\int_{(1,0)}^{(2,0)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy+\int_{(2,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$

$=\int_1^2 3dx+\int_0^1(4-8y^3)dy$ ....（4 分）

$=5$ ....（6 分）

4 浙江理工大学 2016—2017 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1-6 B A A B B D

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

-1；　0；　2；　$\frac{y}{1-z}$；　$\sqrt{2}$；　$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出演算过程及文字说明）

1、$\mathrm{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$

2、原式=$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\rho^2}^4 zdz=\frac{64}{3}\pi$

3、设 D 为xOy面上的圆盘$x^2+y^2\le 1$，Σ_1是圆盘 D 下侧

原式=$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_\Omega 3dv-\iint_D x^2dxdy=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi$

4、原式=$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2\theta\rho d\rho d\theta=\frac{3}{64}\pi^2$

5、幂函数的收敛区域为(-1,1)，则$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$，所以$s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx+s(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，$x\in(-1,1)$

四、证明题（本题共 2 小题，每题 5 分，满分 10 分，应写出详细证明和计算过程）

1、

令　$F(x,y,z)=f(x-ay,z-by)$, 则$F'_x(x,y,z)=f_1{}'$, $F'_y(x,y,z)=-af'_1-bf_2{}'$, $F'_z(x,y,z)=f_2{}'$，由于$aF'_x+F'_y+bF'_z=0$，因此曲面的切平面与方向向量为(a,1,b)的直线平行。

2、

因为正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$也为正项级数且收敛，所以$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\ =0$，因此$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)^2}{(a_n+b_n)}$，由比较审敛法的极限形式可知$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛

5 浙江理工大学 2015—2016 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1-6 B C C D C B

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1 $-\frac{2}{(x^2+y^2)^2}(x,y)$或$-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\vec{i}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}$　　2 $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

3 $\frac{4}{15}\pi$　　4 0　　5 $\frac{\sqrt{3}}{12}$　　6 $-\frac{1}{4}$

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出演算过程及文字说明）

1.（1）（比值）

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}=\frac{2}{3}<1$，故收敛。

（2）（加绝对值，比值）

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n+1}{3^n}}{\sin\frac{n}{3^{n-1}}}=\frac{1}{3}<1$，故绝对收敛（必收敛）。

2. $\begin{cases} f_x=(x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \\ f_y=(1+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \end{cases}$

得极值点$(1,-\frac{4}{3}),(-1,-\frac{2}{3})$.

又$A=f_{xx}=(\frac{x^3}{3}+2x^2+2x+y)e^{x+y}$

$B=f_{xy}=(\frac{x^3}{3}+x^2+y+1)e^{x+y}$

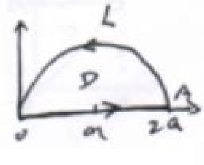
$C=f_{yy}=(\frac{x^3}{3}+y+2)e^{x+y}$

① $(1,-\frac{4}{3})$，$AC-B^2>0, A>0.$　　故$(1,-\frac{4}{3})$为极小值点，极小值为$-e^{-\frac{1}{3}}$.

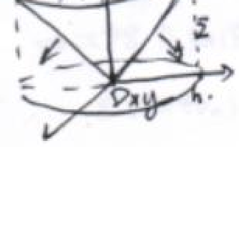
② $(-1,-\frac{2}{3})$，$AC-B^2<0,$　　故$(-1,-\frac{2}{3})$不是极值点。

3. $I=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(3x+2y)dy=\frac{20}{3}$

4. $I=\oint_L \overrightarrow{OA}-\int\overrightarrow{OA}=\iint_D 2dxdy-0=\pi a^2$



5.计：Σ_1：$z=h$，上侧。



$I=\oiint_{\Sigma_1+\Sigma}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_\Omega(0+0+0)dv-\iint_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy$

$=-\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\rho^2\cdot\rho d\rho$

$=-\frac{1}{2}\times 2\pi\times\frac{h^4}{4}=-\frac{\pi}{4}h^4$

6. $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)dx=2(\pi^2+1)$，

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n\cdot 12}{n^2}$，　$b_n=0$

$\because n$是从 1 到+∞，∴ 由公式得，$f(x)=\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad x\in(-\infty,+\infty)$

（因为f连续，所以f的傅里叶级数处处收敛到f）（此处只做简要步骤说明）

四、综合题（本题 8 分）

（1）$P=x+2y,\ Q=2x+y,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2=\frac{\partial P}{\partial y}$

$u(x,y)=\int_0^x xdx+\int_0^y(2x+y)dy=\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}$

（2）令$F(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}-z.$

则 $\vec{n}|_{(1,1,4)}=(3,3,-1).$

∴ 切平面方程为 $3(x-1)+3(y-1)-(z-3)=0.$

即 $3x+3y-z-3=0$

法线方程为 $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}$.

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1.

左$=\int_0^a dx\int_x^a e^{m(a-x)}f(x)dy=\int_0^a(a-x)\cdot e^{m(a-x)}f(x)dx=$右 .

2.

法一：$\because \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 也收敛（且为正项级数），　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0.$

又$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(u_n+v_n)^2}{(u_n+v_n)}=\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$

由比较审敛法极限形式知，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$也收敛。

法二：$\because \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0.$

即 $\exists N>0$，当$n\geq N$时，有$u_n+v_n<1.$

从而$(u_n+v_n)^2<u_n+v_n\ (n\geq N).$

由比较审敛法知，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$收敛。

6 浙江理工大学 2014—2015 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1-6　A D D C A B

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、$-(x-1)+16(y-2)+10(z+1)=0$　　2、3　　3、$(4,6)$

4、± 2　　5、$2a^2$　　6、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$

三、计算题（本题共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分，应写出演算过程及文字说明）

1、$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2}$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(2+4x^2\right)e^{x^2+y^2}$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xye^{x^2+y^2}$

2、选用极坐标计算，$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho\cdot\rho d\rho=\frac{14\pi}{3}$

3、$I=\int_0^{\pi}\frac{\left(a\cos t-a\sin t\right)\cdot a\cos t+\left(a\cos t+a\sin t\right)\cdot a\sin t}{a^2}dt=\pi$

（注：不能用格林公式）

4、补上$\sum_1$:　$x=e^a$.　$\left(\text{其中，}y^2+z^2\le a^2\right)$ 取前侧

$$I=\oiint_{\sum+\sum_1}-\iint_{\sum_1}\overset{\text{高斯公式}}{=}\iiint_{\Omega}\left(-4x+8x-4x\right)dv-\iint_{y^2+z^2\le a^2}2\left(1-e^{2a}\right)dydz$$
$$=2\pi a^2\left(e^{2a}-1\right)$$

5、设和函数为$S\left(x\right)$

$$\because x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{x}{1-x},\quad x\in\left(-1,1\right)$$

$$\therefore 1+2x+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{\left(1-x\right)^2},\quad x\in\left(-1,1\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}=x^2\left(1+2x+\cdots+nx^{n-1}+\cdots\right)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2,\quad x\in\left(-1,1\right)$$

6、(1) 将$f\left(x\right)$周期延拓成$F\left(x\right)$，因为$F\left(x\right)$处处连续，所以其傅里叶级数处处收敛到它。

（2）

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=\left(-1\right)^n\frac{4}{n^2},\quad n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nxdx=0,\quad n=1,2,\cdots$$

$$\therefore F\left(x\right)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in\left(-\infty,+\infty\right)$$

$$\therefore f\left(x\right)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in\left[-\pi,\pi\right]$$

四、证明题（本题共 2 小题，每题 4 分，满分 8 分）

1、因为 xoy 平面是一个单连通域，Γ 是 xoy 平面上一条分段光滑闭曲线，且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xyf\left(x^2+y^2\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以等式成立。

2、$\because e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in R$

$$\therefore\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots,\quad x\in R$$

$$\therefore\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\cdots+\frac{n-1}{n!}x^{n-2}+\cdots,\quad x\in R$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{\left(n+1\right)!}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}+\cdots=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\Big|_{x=1}=\frac{e^x x-e^x+1}{x^2}\Big|_{x=1}=1$$

五、数学建模题（本题 8 分，应写出具体建模和求解过程）

解　记雪堆体积为 V，侧面积为 S，则

$$V=\int_0^{h(t)}dz\iint_{D_z}dxdy=\frac{\pi}{4}h^3(t),\text{其中}D_z:x^2+y^2\le\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z],$$

$$S=\iint_{D_0}\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,dxdy=\iint_{D_0}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,dxdy$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{13\pi}{12}h^2(t),\text{其中}D_0:x^2+y^2\le\frac{1}{2}h^2(t),$$

由题意知 $\frac{dV}{dt}=-0.9S$，从而 $\begin{cases}\frac{dh}{dt}=-\frac{13}{10}\\h(0)=130\end{cases}\Rightarrow h(t)=-\frac{13}{10}t+130$，令 $h(t)\to0$，得 $t=100(h)$，

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需的时间为 100 小时.

7 浙江理工大学 2013—2014 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1-6　　C　C　A　B　A　D

二、填空题（本题共 7 小题，每小题 4 分，满分 28 分）

1、$2x-8y+16z-1=0$　2、$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{2\sec\theta} f(\rho)\rho d\rho$　3、3, 0

4、$\sqrt{2}$　5、1　6、$(-\frac{1}{5},\frac{1}{5})$　7、$\frac{1}{2}$

三、计算题（本题共 6 小题，每题 6 分，满分 36 分）

（1）解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u e^y+f_x, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=xe^{2y}f_{uu}+e^y f_{uy}+xe^y f_{xu}+f_{xy}+e^y f_u$

（2）解：令 $u_n=n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n^2\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$，

所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛。

（3）解：设 D 为 L 所围的三角形区域，则由格林公式有

$$\oint_L (2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy=\iint_D (3-(-1))dxdy=12$$

（4）解　添加辅助面 $\Sigma':\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le 1, z=1\right\}$，取上侧，则由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma'} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(1+2+3)dv=6\iiint\limits_{\Omega}dv=6\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 1^2\cdot 1=2\pi$$

$$\iint\limits_{\Sigma'} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=\iint\limits_{\Sigma'}3(z-1)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}3(1-1)dxdy=0$$

故原式$=2\pi-0=2\pi$.

（5）解　易知 $\frac{1+x}{(1-x)^2}=\frac{2-(1-x)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}$

又 $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\quad(-1<x<1)$

$\therefore \frac{1}{(1-x)^2}=(\frac{1}{1-x})'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

$$\therefore \frac{1+x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{n-1}\quad ,\qquad \text{其中}\qquad (-1<x<1)$$

(6) 解：　幂函数的收敛区域为$\left(-1,1\right)$，

$$\text{则}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2},,\quad (x\neq -1)$$

$$\text{所以}\,s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx+s(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ \ x\in\left(-1,1\right)$$

四、应用题（本题满分 7 分）

解：Σ_2 所在半球面含在 Σ_1 球面中部分面积为

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\mathrm{d}\,r=4\pi(2-\sqrt{3})$$

因此，屋顶的面积为

$$\frac{1}{2}(4\pi\cdot 2^2)-4\pi(2-\sqrt{3})+\frac{1}{2}4\pi=2\pi(1+2\sqrt{3})$$

五、证明题（本题满分 5 分）证明：$\dfrac{\partial g}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f'(\dfrac{y}{x})+f'(\dfrac{x}{y})$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^4}f''(\frac{y}{x})+\frac{1}{y}f''(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})+f(\frac{x}{y})-\frac{x}{y}f'(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y})+\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y})+\frac{x^2}{y^3}f''(\frac{x}{y})=\frac{1}{x^2}f''(\frac{y}{x})+\frac{x^2}{y^3}f''(\frac{x}{y})$$

原命题成立。

8 浙江理工大学 2013—2014 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1-6　　B D A B C D

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、1　2、$x+y-2=0$　3、$\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$　4、$12a$　5、$(-2,0)$　6、$\frac{3}{2}$

三、计算题（本题共 6 小题，每题 6 分，满分 36 分）

（1）解：$dz\big|_{(1,2)}=\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}dx+\frac{2y}{1+x^2+y^2}dy\right)\Bigg|_{(1,2)}=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$　（6 分）

（2）解：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^3dz$（3 分）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3(2-\frac{r^2}{2})dr$（5 分）$=2\pi\cdot[\frac{r^4}{2}-\frac{r^6}{12}]\Big|_0^2=\frac{16}{3}\pi$　（6 分）

（3）解：$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}\left(2z+z-2z\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\cdot\frac{1}{4}r^4\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2}$。（6 分）

（4）解：幂级数的收敛半径 $\boldsymbol{R=1}$，令 $\boldsymbol{s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}}$，$\boldsymbol{x\in(-1,1)}$　（2 分）

则有 $\int_0^x s(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}(\int_0^x nx^{n-1}dx)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$，$\boldsymbol{x\in(-1,1)}$，（4 分）

在上式两端对 $\boldsymbol{x}$ 求导得，$\boldsymbol{s(x)=\frac{1}{(1-x)^2}}$，$\boldsymbol{x\in(-1,1)}$　（5 分）

又 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 在 $\boldsymbol{x=\pm1}$ 处发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$，$\boldsymbol{x\in(-1,1)}$（6 分）

（5）解：$f(x)=\frac{1}{x-1}=\frac{1}{3+x-4}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-4}{3}}$（3 分）

$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^n}{3^n},\boldsymbol{x\in(1,7)}$　（6 分）

(6) 解：函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\pi,\pi\right)-\left\{0\right\}$ 是奇函数，有 $\boldsymbol{a_n=0}$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx$$
$$=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$
$$=\begin{cases}0, & n\text{是偶数},\\ \frac{4}{n\pi}, & n\text{是奇数}.\end{cases}$$

于是，$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)$，$0<|x|<\pi$.

四、应用题（本题满分 8 分）

点(x,y,z)到平面的距离为$d=\frac{|x+y+z+1|}{\sqrt{3}}$。　　　　（2 分）

先求d^2在条件$z=x^2+y^2$下的最小值，设

$$F(x,y,z)=\frac{1}{3}(x+y+z+1)^2+\lambda\left(z-x^2-y^2\right),\quad（4\text{ 分}）$$

则

$$\begin{cases}F_x=\frac{2}{3}(x+y+z+1)-2\lambda x=0\\ F_y=\frac{2}{3}(x+y+z+1)-2\lambda y=0\\ F_z=\frac{2}{3}(x+y+z+1)+\lambda=0\end{cases}\qquad（6\text{ 分}）$$

并与条件$z=x^2+y^2$联立解得唯一可能极值点$x=y=-\frac{1}{2},z=\frac{1}{2}$.　　　　（8 分）

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1、证明：因为 $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x},\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y},\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$,

所以$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1$.

2、$a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xd\tan x=\frac{1}{n+1}$,

$\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{a_n+a_{n+2}}{n^\lambda}=\frac{1}{n^\lambda(n+1)}<\frac{1}{n^{\lambda+1}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$收敛，由比较审敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$收敛。

9 浙江理工大学 2012—2013 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1、C；　2、B；　3、B；　4、C；　5、A；　6、D。

二、填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1、$\left(2,-1,0\right)$；　2、0；　3、0；　4、3π；　5、4π；　6、$\left[0,4\right)$

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分）

1．设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+\sin y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y})+0=yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$　…………3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]$$ ………6 分

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$ ………7 分

2.计算 $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4, x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0, y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域。

解：$\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2\theta\rho d\rho d\theta=\dfrac{3}{64}\pi^2$　……………7 分

3. 求 $\iint\limits_\Sigma\left(x-y^2\right)dydz+\left(y-z^2\right)dzdx+\left(z-x^2\right)dxdy$，其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧。

解：设 Σ_1 是 $x^2+y^2\le 1$ 的下侧　……………1 分

原式 $=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$　……………2 分

$$=\iiint\limits_\Omega 3dv-\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x-y^2\right)dydz+\left(y-z^2\right)dzdx+\left(z-x^2\right)dxdy$$ ……………4 分

$$=2\pi-\iint\limits_D x^2dxdy$$ ……………6 分

$$=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi$$ ……………7 分

4.将函数 $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ 展开为 x 的幂级数（注明收敛域）。

解：$\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}$　……………2 分

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{x}{2}+\cdots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots\right]=\frac{1}{2}+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^3}+\cdots+\frac{x^n}{2^{n+1}}+\cdots$$ ……………5 分

$x\in(-2,2)$ ……………7 分

四、解答题（本题共 2 小题，第 1 小题 10 分，第 2 小题 8 分，满分 18 分）

1.（1）验证 $\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$ 在整个 xoy 平面内为某个函数 $F(x,y)$ 的全微分，并求 $F(x,y)$；

（2）计算 $I=\int_C\left(2xy^3-y^2\cos x+y\right)dx+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$，其中 C 为单位圆 $x^2+y^2=1$ 的正向。

解：(1) 设 $P=2xy^3-y^2\cos x, Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$，因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=6xy^2-2y\cos x$

$(x,y)\in xoy$ 平面，所以 $\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$ 在整个 xoy 平面内为某个函数的全微分。 ……………2 分

于 是 $F(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy=y-y^2\sin x+x^2y^3$

（也可用凑微分法求） ……………5 分

（2）$I=\int_C Pdx+Qdy+\int_C ydx$ ……………6 分

$=0+\int_C ydx$ ……………8 分

$\overset{Green}{=}\iint_D(-1)\,d\sigma\left(D:x^2+y^2\le 1\right)=-\pi$ ……………10 分

2. 将函数 $f(x)=x$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成余弦级数。

解：对 $f(x)$ 进行偶延拓，则有 ……………2 分

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cdot\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, n=2,4,6,\cdots\\ -\frac{4}{n^2\pi}, n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$ ……………4 分

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi xdx=\pi$，$b_n=0 \quad n=1,2,\cdots$ ……………6 分

故 $x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right), x\in[0,\pi]$ ……………8 分

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，证明：$\int_0^a dy\int_0^y f(x)dx=\int_0^a (a-x)f(x)dx$ 。

证：交换积分次序 ……………1 分

$$\int_0^a dy\int_0^y f(x)dx=\int_0^a dx\int_x^a f(x)dx=\int_0^a (a-x)f(x)dx$$ ……………3 分

2. 试证明定理：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛。.

证：令 $v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)\quad (n=1,2,...)$， ……………1 分

显然 $v_n\geq 0, v_n\leq u_n\quad (n=1,2,...)$，因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，故由比较审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 ……………2 分

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2v_n$ 也收敛，而 $u_n=2v_n-|u_n|$，由收敛级数的基本性质可知 $\sum u_n=\sum 2v_n-\sum|u_n|$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。 ……………3 分

10 浙江理工大学 2012-2013 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1．C;　2．B;　3．D;　4．A;　5．A;　6.B

二、填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1. (-1,2,-2);　2. 0;　3. $(f_1'+yf_2')dx+(f_1'+xf_2')dy$；　4. $2\sqrt{2}$；　5. 2　6. $-\frac{\pi}{4}$

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分）

1. 已知 $e^z+x^2+y^2=2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{e^z}$ ………… 3 分，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4xy}{e^{2z}}$ …… …… 6 分

2. 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D：$x^2+y^2\leq 1$。

解：$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\cdot\rho d\rho=\dfrac{2\pi}{3}$ ……6 分（也可用直角坐标做，列式对给 4 分，计算 2 分）

3. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega z\ dxdydz$，其中闭区域 Ω 为半球体：$x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0.$

解：用柱面坐标得，$I=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_0^{\sqrt{1-\rho^2}}zdz=\dfrac{\pi}{4}$（也可用球面坐标、截面法等做，列式对给 4 分，计算 2 分）

4. 将函数 $chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 展开成 x 的幂级数。

解：因为 $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ ………3 分

所以 $chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ ………6 分

四、解答题（本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分）

1. 求曲线积分 $\int_L(x-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是沿曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 由点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 的弧段。

解：令 $P=x-2y$，$Q=-(x+\sin^2 y)$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2, \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1,$ ………2 分

选择 $BA: y=0$ 由 $B(-1,0)$ 到 $A(1,0)$，则由格林公式得

原式 $=\oint_{L+BA}(x-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy+\int_{AB}(x-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$ ………4 分

$=\iint\limits_D 1dxdy+\int_{AB}(x-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$ ………6 分

$=\dfrac{\pi}{2}+\int_{-1}^1 xdx=\dfrac{\pi}{2}.$ ………8 分

2. 求 $\iint\limits_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的下侧。

解：设 Σ_1 是 $x^2+y^2\le R^2$ 的上侧 ……………2 分

原式 $=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$ ……………4 分

$=-\iiint\limits_\Omega 3dv-0$ ……………6 分

$=-2\pi R^3$ ……………8 分

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1}$ 的收敛域、和函数以及数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和。

解：$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow R=2\Rightarrow$ 收敛区间为 $\left(-2,2\right)$，　………2 分

当 $x=\pm2$ 时，原级数发散，因此得收敛域为 $\left(-2,2\right)$　……………3 分

设和函数为 $s\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{2^n}t^{n-1}dt\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)'$

$$=\left(\frac{x}{2-x}\right)'=\frac{2}{\left(2-x\right)^2}$$ …………7 分

于是 $s\left(1\right)=2$　………8 分

五、（本题满分 4 分） 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

解：当 $p\le0$ 时，$\left(-1\right)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)\not\to0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 发散　……………1 分

当 $0<p\le1$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n^p}}=1$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散（p 级数），由比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(-1\right)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)\right|$ 也发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 收敛（莱布尼茨定理），所以原级数条件收敛　…………3 分

当 $p>1$ 时，同理因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛（p 级数），由比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(-1\right)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)\right|$ 也收敛，所以原级数绝对收敛。　……………4 分

11 浙江理工大学 2011-2012 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1．A;　2．D;　3．A;　4．C;　5．B;　6.B

二、填空题（本题共 5 小题, 每小题 4 分，满分 20 分）

1. (-1,2,-2);　2. $2\sqrt{6}$;　3. $\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{1}f(x,\ y)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1}f(x,\ y)dy$;

4. $12l$;　5. $\frac{3}{2}$

三、解答题（本题共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分）

1. $\vec{s}_1=(6,2,-3)$，　$\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=(-2,-1,-4)$，　………2 分

取平面的法向量为 $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 2 & -3\\ -2 & -1 & -4\end{vmatrix}=(-11,30,-2)$　………2 分

所以平面方程为：$-11(x-4)+30(y+3)-(z-1)=0$，即 $11x-30y+z-135=0.$ …2 分

2. $\frac{\partial z}{\partial x}=(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y})+0=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'$，　……………2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]$$

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$　………4 分

3. 解：$f(x)=\frac{1}{3+(x-3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(\frac{x-3}{3})}$，　……………2 分

因为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$，$x\in(-1,1)$，

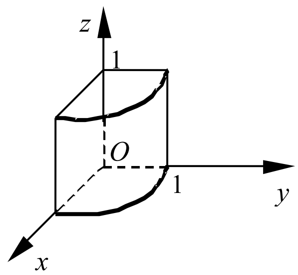
所以 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(\frac{x-3}{3})}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3}\cdot(\frac{x-3}{3})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{3})^{n+1}(x-3)^n$，

其中 $-1<\frac{x-3}{3}<1$，即 $0<x<6$.　……………3 分

当 $x=0$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}$ 发散；当 $x=6$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{3}$ 发散，故

$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{3})^{n+1}(x-3)^n$，$x\in(0,6)$. ………1 分

4. 解：如图，选取柱面坐标系,此时 $\Omega:\begin{cases}0\le z\le 1,\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\\ 0\le r\le 1,\end{cases}$



所以 $\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}z$ ………3 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\theta\ \mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=(-\frac{\cos 2\theta}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{8}$. ………3 分

5. 解：令 $P=x^2-2y$，$Q=-(x+\sin^2 y)$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-1,$$ ………2 分

选择 $BA:y=1$ 由 B（2，1）到 A（0，1），则由格林公式得

原式 $=\oint_{L+BA}(x^2-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy+\int_{AB}(x^2-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$ ………2 分

$=-\iint\limits_{D}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy+\int_{AB}(x^2-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$

$=-\iint\limits_{D}dxdy+\int_0^2(x^2-2)dx=-\iint\limits_{D}dxdy+\int_0^2(x^2-2)dx=-\frac{\pi}{2}+\frac{8}{3}-4$. ………2 分

6. 解：补上 $\Sigma_1:z=0\ \ (x^2+y^2\le 4)$ 下侧。

$\iint\limits_{\Sigma}y^2dzdx+zdxdy=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}y^2dzdx+zdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1}y^2dzdx+zdxdy$ 2分

$=\iiint\limits_{\Omega}(2y+1)dxdydz-0$...............................3分

$=\iiint\limits_{\Omega}2ydxdydz+\iiint\limits_{\Omega}dxdydz$

$\overset{\text{对称性}}{=}0+\frac{16\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}$........................3分

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分）

1. 证明：$P=3x^2y+8xy^2$，　$Q=x^3+8x^2y+12ye^y$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+16xy$，故 $Pdx+Qdy$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分．　……3 分

所以 $u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$

$$=0+\int_0^y(x^3+8x^2y+12ye^y)dy=x^3y+4x^2y^2+12ye^y-12e^y+12$$

…………5 分

2. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)5^n}{n5^{n+1}}=\dfrac{1}{5}\Rightarrow R=5$， 收敛区间为(-5,5). ………2 分

又当 $x=5$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5}$ 发散；当 $x=-5$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{5}$ 发散;

所以收敛域为 $(-5,5)$；　………2 分

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5^n}x^{n-1}=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x\dfrac{n}{5^n}t^{n-1}dt)'=[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{x}{5})^n]'=(\dfrac{x}{5-x})'=\dfrac{5}{(5-x)^2}$　………2 分

于是 $s(1)=\dfrac{5}{16}$.　……….2 分

五、证明题（4 分）

$\because(a_n-\dfrac{1}{n})^2\geq0$， $a_n{}^2-2\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{1}{n^2}\geq0\ \therefore\ 2\left|\dfrac{a_n}{n}\right|\leq a_n{}^2+\dfrac{1}{n^2}$　………2 分

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 都收敛，由比较法及其性质知：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{a_n}{n}\right|$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 绝对收敛。　………2 分

12 浙江理工大学 2010-2011 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题

1、C　2、B　3、C　4、D　5、A　6、B　7、A

二、填空题

1、0；　2、$\frac{12}{5}\pi a^5$；　3、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(-\infty<x<+\infty\right)$　4、$\frac{1}{2}$　5、$x+2y-4=0$

三、简答题

1、解：$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{\pi}{2n}$，因为 $2\sin^2\frac{\pi}{2n}<2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2=\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以由比较审敛法知，原级数收敛。

2、解：Σ 的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，它在 xoy 面上的投影区域 D_{xy} 为圆形闭区域 $\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le a^2-h^2\right\}$，又 $\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，所以

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{adxdy}{a^2-x^2-y^2}=2\pi a\ln\frac{a}{h}。$$

3、解：由高斯公式得，

$$\oiint_{S}(x+2y+3z)dxdy+(y+2z)dydz+\left(z^2-1\right)dxdz=\iiint_{\Omega}3dxdydz=\frac{1}{2}。$$

4、解：$\iiint_{\Omega}zdxdydz=\int_1^2dx\int_0^x dy\int_0^{\frac{y}{2}}zdz=\frac{5}{32}$。

5、解：$\int_L xydx+(y-x)dy=\int_0^1\left[x\cdot x^2+\left(x^2-x\right)\cdot 2x\right]dx=\frac{1}{12}$

四、解：（1）连续

（2）$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但不可微。

五、解：在等式两边同时在 D 上取二重积分，即

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint_D\left(\frac{8}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy\right)dxdy$$

因此 $\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{9}$，所以 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{8}{9\pi}-\frac{2}{3}$。

六、解：幂级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$，则 $s\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\int_0^x s(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \frac{n+1}{n!}t^n dt = xe^x \Rightarrow s(x)=\left(xe^x\right)'=(x+1)e^x$$ ，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n = s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{e}$$ 。

七、证明：

$$\left[\int_0^a f(x)\,dx\right]^2=\iint_D f(x)f(y)\,dxdy\left(D:0\le x\le a,0\le y\le a\right)=\iint_{D_1} f(x)f(y)\,dxdy+\iint_{D_2} f(x)f(y)\,dxdy$$

$$=2\int_0^a f(x)\,dx\int_x^a f(y)\,dy\left(D_1:0\le x\le a,x\le y\le a;D_2:0\le y\le a,y\le x\le a\right)$$

13 浙江理工大学 2009-2010 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，满分 24 分）

1.B　2.C　3.A　4.D　5.C　6.B

二、填空题（每小题 4 分，满分 24 分）

1. $y=\dfrac{\sin 2x+C}{2x}$　　2. $\dfrac{12\pi R^5}{5}$　　3. $\dfrac{1}{2}$　　4. $\dfrac{32}{9}$

5. $e^{-x^2}=1-x^2+\dfrac{x^4}{2!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$　　6. $[2,4)$

三、解答题（每小题 6 分，共 30 分）

1.解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6y$

2.解：$\displaystyle\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho=\pi\left(1-e^{-1}\right)$

3. 证明：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，代入左边即得证明

4.解：$\displaystyle\iint_D xy\,d\sigma=\int_1^2 dx\int_1^x xy\,dy=\frac{9}{8}$

5.解：由对称性，则

$$I=\iint_S \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}=4\iint_D \frac{1}{R^2+z^2}\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz$$

$$=4\iint_D \frac{1}{R^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz=4\int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}dy\int_0^H \frac{R}{R^2+z^2}dz$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$

四、解：由于$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{3}$，故该技术的收敛区间为$(-3,3)$；又当$x=-3$时，原级数转化为$\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，收敛；当$x=3$时，原级数转化为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$，发散。所以原级数的收敛域为$[-3,3)$。

由$xs(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$，得$(xs(x))'=\frac{1}{3-x}$，故$s(x)=\begin{cases}\dfrac{-\ln(3-x)+\ln 3}{x}, x\in[-3,0)\cup(0,3)\\ \dfrac{1}{3}, x=0\end{cases}$

五、对$f(x)$进行偶延拓，则有

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, n=2,4,6,\cdots\\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\pi+2$$

故$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right), x\in[0,\pi]$

六、（1）证明交叉求偏导数相等，计算结果为 5

（2）证$0\le|u_n|=1-\cos\frac{\alpha}{n}=2\sin^2\frac{\alpha}{2n}\le\frac{\alpha^2}{2n^2}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{2n^2}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$绝对收敛。

14 浙江理工大学 2008-2009 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，满分 28 分）

1．D;　2．A　;　3．D;　4．B;　5．C．6．B　 7．D

二、填空题（每小题 4 分，满分 20 分）

1． $y=\frac{1}{x}\left(e^x+C\right)$;　2． 18π ; 3． $(0,6)$;　 4． $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}+2$;　 5． $\frac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$.

三、计算下列积分（本题 5 分）

解： $I=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\rho^2d\rho$ ……………4 分

$=\frac{\pi}{6}a^3$ ………………1 分

四、1.解：由高斯公式，原积分= $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^2 3r^2\cdot r^2dr=\frac{384}{5}\pi$ …………6 分

2.解： $P=y\sin 2x-yf(x)\tan x$ ， $Q=f(x)$ ，

$\Rightarrow f'(x)=\sin 2x-f(x)\tan x\Rightarrow f'(x)+\tan x\cdot f(x)=\sin 2x$ （5 分）

$\Rightarrow f(x)=-2\cos^2 x+C\cos x$ ，由 $f(0)=-2\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=-2\cos^2 x$ （3 分）

3.解：用柱面坐标， $\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2\rho^2dz=\frac{16}{3}\pi$ ………8 分

五、（本题满分 8 分）

解：易求得收敛域为 $(-2,2)$ ………2 分

设和函数为 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{2^n}t^{n-1}dt\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)'$

$$=\left(\frac{x}{2-x}\right)'=\frac{2}{(2-x)^2}$$ …………5 分

于是 $s(1)=2$ …………1 分

六、（本题满分 12 分）

1.解： $shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots(-\infty,\infty)$ （展开 5 分，收敛区间 1 分）

2.解：对 $f(x)=x+1$ 进行偶延拓，

$b_n=0,\left(n=1,2,\cdots\right)$

$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\pi+2$，　　　　……(1 分)

$a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nxdx=\dfrac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\dfrac{2}{n^2\pi}\left(\cos n\pi-1\right)=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots\\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots\end{cases}$ …3 分

所以 $f(x)=x+1$ 的余弦级数为

$x+1=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\dfrac{\pi}{2}+1-\dfrac{4}{\pi}\left(\cos x+\dfrac{1}{3^2}\cos 3x+\dfrac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right),(0\le x\le\pi)$ 2 分

七、（本题满分 5 分）

证明：令 $F\left(x,y,z\right)=f(x-ay,z-by)$，则

$F_x'\left(x,y,z\right)=f_1',\quad F_y'\left(x,y,z\right)=-af_1'-bf_2',\quad F_z'\left(x,y,z\right)=f_2'$ ……………………2 分

由于 $aF_x'+F_y'+bF_z'=0$，因此曲面的切平面恒与方向向量为 $\left(a,1,b\right)$ 的直线平行。……3 分

15 浙江理工大学 2008-2009 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、选择题（每小题 4 分，满分 28 分）

1．C;　2．D　;　3．C;　4．C;　5．A．6．D　 7．B

二、填空题（每小题 4 分，满分 20 分）

1．$\dfrac{1}{2x}\left(-\cos 2x+C\right)$；　2．$2\pi$；3．$\left(-6,0\right)$；　4．$-5$；　5．$\dfrac{x^2y^2}{2}$.

三、计算下列积分（每小题 6 分，共 18 分）

1.$\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$

2. $\dfrac{12\pi}{5}a^4$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv=\iiint\limits_{\Omega}xdv+\iiint\limits_{\Omega}ydv+\iiint\limits_{\Omega}zdv=\iiint\limits_{\Omega}xdv+\iiint\limits_{\Omega}zdv$$

3. $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^a\rho\sin\varphi\cos\theta\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^a\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$

$=\dfrac{\pi a^4}{8}$

四、（本题满分 8 分）

$y=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}x\cos x$

五、（本题满分 7 分）

解：方程两边分别对 x 求导，联立解出 z_x,z_y，代入即可得证。

六、（本题满分 14 分）

1.解：设和函数为 $s(x)$，则 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$， $s(0)=0$

逐项求导，得 $s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^{n-1}=\dfrac{1}{1+x^2},(-1<x<1)$

积分，得

$$s(x)-s(0)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x$$

即 $s(x)=\arctan x,x\in[-1,1]$

2.解：对 $f(x)=x$ 进行偶延拓，

$b_n=0,(n=1,2,\cdots)$

$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}xdx=\pi$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots\\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

所以 $f(x)=x$ 的余弦级数为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right),(0\le x\le\pi)$$

七、（本题满分 5 分）

证明：因为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，所以$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

由于$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n{}^2}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$，　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛

同理可证，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$收敛，因而$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(a_n^2 + b_n^2\right)$收敛，

又因为$\left(a_n + b_n\right)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n \le 2\left(a_n^2 + b_n^2\right)$，所以由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + b_n\right)^2$收敛

16 浙江理工大学 2007-2008 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 7 小题, 每小题 4 分，满分 28 分）

1．C;　2．A　;　3．D;　4．B;　5．D．6．C　 7．A

二、填空题（本题共 5 小题, 每小题 4 分，满分 20 分）

1．-5；　2．$\frac{2}{3}\pi R^3$；3．2π；　4．$y = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$；　5．$a = -2, b = 2$．

三（每小题 6 分，共 18 分） 1．解：$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{e^z}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{4xy}{e^{2z}}$.（每个 3 分）

2．通解为 $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - x - \frac{1}{2}$（求出齐次方程通解给 4 分，特解给 2 分）

3．用柱面坐标得，$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} z dz = \frac{\pi}{4}$（也可用球面坐标、截面法等做，列式对给 4 分，计算 2 分）

四（本题满分 8 分） 解：解答：$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{y^2 - 3x^2}{(3x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, (x, y) \ne (0,0)$，……….3 分，

作足够小的椭圆$C: x = \frac{\delta}{\sqrt{3}}\cos\theta, y = \delta\sin\theta, \theta \in [0, 2\pi]$.　………54 分

C 取逆时针方向，由格林公式得 $\oint_{L+C^-}\dfrac{xdy-ydx}{3x^2+y^2}=0$，……….6 分

即得 $\oint_L\dfrac{xdy-ydx}{3x^2+y^2}=\oint_C\dfrac{xdy-ydx}{3x^2+y^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\dfrac{\delta^2}{\delta^2}d\theta=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ ………8 分

五（本题满分 7 分）方程 $f(x)=e^x+\int\limits_0^x tf(t)dt-x\int\limits_0^x f(t)dt$ 两边对 x 求导得

$f'(x)=e^x+xf(x)-\int\limits_0^x f(t)dt-xf(x)=e^x-\int\limits_0^x f(t)dt$，（2 分）再对 x 求导得

$f''(x)=e^x-f(x)$（4 分）…初始条件为 $f(0)=f'(0)=1$，（5 分）解此方程可得特解为

$f(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$（7 分）

六（本题满分 14 分）（1）解：先求幂级数的收敛半径

$$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{[3^n+(-2)^n]\cdot n}{[3^{n+1}+(-2)^{n+1}]\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{[1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n]}{3-2\left(\frac{-2}{3}\right)^n}=\frac{1}{3},\quad（4 分）$$

故收敛半径为 3，收敛区间为（-3，3）.（5 分）当 $x=3$ 时，幂级数通项与 $\dfrac{1}{n}$ 之比的极限为

1，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，因此原级数在 $x=3$ 处发散（6 分）. 当 $x=-3$ 时，幂级数通项为

$\dfrac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{(-1)^n}{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}\cdot\dfrac{1}{n}$,，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛，故级数在 $x=-3$ 处收敛，综上

所得，原级数的收敛域为 $[-3,3)$.（7 分）

六（2）解：对 $f(x)$ 进行奇延拓，…………(1 分) 则有

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\frac{\pi-x}{2})\sin nxdx=-\frac{2}{n\pi}[\frac{\pi-x}{2}\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx(-\frac{1}{2})dx]=\frac{1}{n}\text{ ……(5 分)}$$

故 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(0\le x\le\pi)$ 展开成正弦级数为

$\dfrac{\pi-x}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}(0<x\le\pi)$，当 $x=0$ 时级数收敛到 0　(7 分)

七（本题满分 5 分）证明　由已知条件可得　$\dfrac{\partial g}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f'(\dfrac{y}{x})+f'(\dfrac{x}{y})$，（1 分）

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\dfrac{2y}{x^3}f'(\dfrac{y}{x})+\dfrac{y^2}{x^4}f''(\dfrac{x}{y})+\dfrac{1}{y}f''(\dfrac{x}{y})$（2 分）$\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{1}{x}f'(\dfrac{y}{x})+f(\dfrac{x}{y})-\dfrac{x}{y}f'(\dfrac{x}{y})$（3 分）

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\dfrac{1}{x^2}f''(\dfrac{y}{x})-\dfrac{x}{y^2}f'(\dfrac{x}{y})+\dfrac{x}{y^2}f'(\dfrac{x}{y})+\dfrac{x^2}{y^3}f''(\dfrac{x}{y})$，（4 分）

所以 $x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\dfrac{2y}{x}f'(\dfrac{y}{x})+\dfrac{y^2}{x^2}f''(\dfrac{x}{y})+\dfrac{x^2}{y}f''(\dfrac{x}{y})-\dfrac{y^2}{x^2}f''(\dfrac{y}{x})-\dfrac{x^2}{y}f''(\dfrac{x}{y})$

$=\dfrac{2y}{x}f'(\dfrac{y}{x})$.（5 分）

17 浙江理工大学 2004-2005 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（4×7 分）

1．D　2. A　3.D　4 B　5 D　6 D　7 A

二 填空题（4×7 分）

1.　0　2. $((-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$　3. $\frac{3}{8}$　4. 30;　5　$\dfrac{-y^2}{x^2(1+y^2)}$　6　12;　7　$-\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{2x}$

三（**本题满分 10 分**）

解：设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则曲面 $z=2x^2+\dfrac{y^2}{2}$ 在 M_0 的法向量为

$\vec{n}_1=(4x_0,y_0,-1)$ ………(2 分)

又平面 $2z+2y-4x+1=0$ 的法向量为 $\vec{n}_2=(-2,1,1)$．………(4 分)

于是 $\vec{n}_1/\!/\vec{n}_2$，由此得 $x_0=\dfrac{1}{2},y_0=-1$，所以 $z_0=2x_0^2+\dfrac{1}{2}y_0^2=1$，即曲面 $z=2x^2+\dfrac{y^2}{2}$ 上

点 $M_0\left(\frac{1}{2},-1,1\right)$ 处的切平面平行于平面 $2z+2y-4x+1=0$，………(6 分)

且所求的切平面方程为 $2\left(x-\frac{1}{2}\right)-(y+1)-(z-1)=0$，即 $2x-y-z-1=0$．……(8 分)

曲面 $z=2x^2+\frac{y^2}{2}$ 上点 $M_0\left(\frac{1}{2},-1,1\right)$ 处的法线方程为 $\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$．……(10 分)

四（本题满分 8 分）、

解：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr\int_0^a dz$…………(4 分)

$$=\frac{\pi aR^4}{2}$$ ……………………(8 分)

五（本题满分 8 分）、

解：$\because a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=2(\pi+1),$………(2 分)

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x+1)\cos nxdx$$

当 n=2k 时，$a_n=0$

当 n=(2k−1) 时，$a_n=\frac{-8}{n^2\pi}$　　…………………… 4 分

因此，

$$f(x)=-\frac{8}{\pi}(\cos x+\cos 3x+\cdots\cdots)\qquad (0\le x\le\pi)$$ …… 8 分

六（本题满分 8 分）

解　设 Σ_1：$x^2+y^2\le R^2$ 的上侧　　…… 1 分

$$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$ …… 3 分

$$=-2\pi R^3$$ …… 8 分

七（本题满分 8 分）

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=x^4$　　因此，收敛域为（−1,1）　……　3 分

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{x^4}{x^4+1}$$ …… 5 分

$$s(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x \qquad (-1<x<1)$$ ……8 分

八（本题满分 4 分）

证　由于 $\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}=\iint\limits_D\frac{f(y)}{f(x)}$ …… 4 分

$$\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]dxdy$$ …… 6 分

$$\geq\iint\limits_D dxdy=(b-a)^2$$ …… 8 分