高等数学 A2

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 上）

学校：____________________

专业：____________________

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

（此试卷为 2022 年第二版 第 1 次发行）

目 录

1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷 1
2 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷 4
3 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷 7
4 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷 11
5 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷 14
6 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷 15
7 浙江理工大学 2017—2018 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷 17
8 浙江理工大学 2016—2017 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷 20
9 浙江理工大学 2016—2017 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷 22
10 浙江理工大学 2015-2016 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷 22

高等数学 A2 期末数学试卷所有版本：

（本人会在 5 月份发布试卷的第二次发行版本，之后大家可以直接访问网站下载，此网站目前正在开发中……）

高等数学 A2 期末试题册上 2022 第二版第 1 次发行.pdf

高等数学 A2 期末答案册上 2022 第二版第 1 次发行.pdf

高等数学 A2 期末试题册下 2022 第二版第 1 次发行.pdf

高等数学 A2 期末试题册下 2022 第二版第 1 次发行.pdf

高等数学 A2 期末试题册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

高等数学 A2 期末试题册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈

试卷版次：2022 年 4 月 30 日 第二版 第 1 次发行

本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380

cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102

cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 C　　2 D　　3 A　　4 B　　5 C　　6 B

二 填空题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1　$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$　　2　$\frac{e}{\sqrt{2}}$　　3　$\frac{4}{3}$

4　$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$　　5　$2S$　　6　$\frac{3}{2}$

三 计算题（共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

1

解. 切线方程：

$$\begin{cases} (-2)(x-1)+2(y-1)+4(z-1)=0 \\ (x-1)-2(y-1)+3(z-1)=0 \end{cases}$$

……………………………………………………………… *4'*

即：

$$\begin{cases} x-y-2z=-2 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$$

切线方向为 $(1,-1,-2)\times(1,-2,3)=(-7,-5,-1)$, ……………………… *1'*

故法平面为：

$$-7(x-1)-5(y-1)-(z-1)=0.$$

……………………………………………………………… *1'*

□

2

解. 原问题等价于求函数 $g(x,y)=x^2+y^2$ 在约束 $x+y=1$ 下的条件极值。考虑 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$. ……………………… *2'*

极值点 (x,y) 必满足下面的方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = & 2x+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = & 2y+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = & x+y-1=0 \end{cases} \tag{1}$$

……………………………………………………………… *2'*

由上面的方程组解得：$x=y=\frac{1}{2}$, 所以可能的极值点为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 由几何意义知，该问题存在最小值，而最小值点一定为极值点，而我们求得的可能的极值点只有一个，所以 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 就是最小值点。……………………………… *2'*

□

3

解.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\cos(xy^2)\right)=2y\cos(xy^2)-y^2\sin(xy^2)2xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\cos(xy^2)\right)=2y\cos(xy^2)-2xy\sin(xy^2)y^2.$$

因此 $\frac{\partial}{\partial y}(y^2\cos(xy^2)) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy\cos(xy^2))$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *2'*

又 $\mathbb{R}^2$ 单连通，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *1'*

所以这样的 f 是存在的。

固定 $(0,0)\in\mathbb{R}^2$, 取 $C_1^{x,y}$ 为从 $(0,0)$ 到 $(x,0)$ 的直线段，$C_2^{x,y}$ 为从 $(x,0)$ 到 (x,y) 的直线段，令 $f(x,y) = \int_{C_1^{x,y}} y^2\cos(xy^2)dx + 2xy\cos(xy^2)dy + \int_{C_2^{x,y}} y^2\cos(xy^2)dx + 2xy\cos(xy^2)dy$, 则 f 即为所求

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *1'*

下求之：

$$
\begin{aligned}
f(x_1,y_1) &= \int_{C_1^{x_1,y_1}} y^2\cos(xy^2)dx + 2xy\cos(xy^2)dy + \int_{C_2^{x_1,y_1}} y^2\cos(xy^2)dx + 2xy\cos(xy^2)dy \\
&= \int_{C_2^{x_1,y_1}} y^2\cos(xy^2)dx + 2xy\cos(xy^2)dy \\
&= \int_{C_2^{x_1,y_1}} 2xy\cos(xy^2)dy = \sin(x_1y_1^2)
\end{aligned}
$$

因此 $f(x,y) = \sin(xy^2)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *2'*

4

解. 记 $D = \{(x,y)|x^2+y^2\leqslant ay, x\geqslant 0\}$, 记 C 为从点 $(0,0)$ 到点 $(0,a)$ 的沿着 y 轴的线段，由格林公式：

$$
\begin{aligned}
&\int_L (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy \\
=&\iint_D m dxdy + \int_C (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy \cdots \text{ 3'} \\
=&m\sigma(D) + \int_0^a (\cos y - m)dy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{ 2'} \\
=&\frac{1}{2}m\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \sin a - ma. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{ 1'}
\end{aligned}
$$

5

证明. 记 D 为 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2\}$, 则所求的曲面可视为函数 $z = xy, (x,y)\in D$ 的函数图像，因此：

$$
\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{ 2'} \\
&= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy \\
&= \iint_{0\leqslant r\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \sqrt{1+r^2}rdrd\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{ 2'} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1+r^2}rdr \\
&= \pi\int_0^a \sqrt{1+r^2}dr^2 \\
&= \pi\cdot\frac{2}{3}\left((1+a^2)^{3/2} - 1\right).
\end{aligned}
$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ *2'*

6

解. 记该公共区域为 Ω, 使用平行于 xy 平面的平面截 Ω, 记 $\Omega_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|(x,y,z)\in\Omega\}$, 则 Ω_z 为一个圆盘，且其面积 $\sigma(\Omega_z)=\begin{cases}\pi(R^2-(R-z)^2), & \text{if } 0\leqslant z\leqslant \frac{R}{2}\\ \pi(R^2-z^2), & \text{if } \frac{R}{2}\leqslant z\leqslant R.\end{cases}$ $\cdots\cdots 1'$

由定义

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_\Omega 1dxdydz\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1'\\
&= \int_0^R dz\iint_{\Omega_z} 1dxdy\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'\\
&= \int_0^R \sigma(\Omega_z)dz\\
&= 2\int_0^{R/2}\pi(R^2-(R-z)^2)dz\\
&= \pi R^3-2\pi\int_{R/2}^R z^2dz\\
&= \pi R^3-\frac{2\pi}{3}(R^3-R^3/8)
\end{aligned}
$$

$$
=\pi R^3(1-2/3+1/12)=\frac{5}{12}\pi R^3.\cdots\cdots\cdots 2'
$$

7

解. 记 S_1 为椭圆盘 $\{(x,y,0)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$ 的下侧，则 S 与 S_1 组成的封闭曲面，记 Ω 为 S 所包围的上半椭球，由高斯公式, $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy+\iint_{S_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iiint_\Omega 2(x+y+z)dxdydx,$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

由于在 S_1 上 $z\equiv 0$, 故 $\iint_{S_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=0$

由对称性知，$\iiint_\Omega 2(x+y)dxdydx$=0。

所以 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=2\iiint_\Omega zdxdydx.$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

又

$$
\begin{aligned}
2\iiint_\Omega zdxdydz &= 2\int_0^c zdz\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}}dxdy\\
&= 2\int_0^c z\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz\\
&= \pi abc^2-\frac{\pi ab}{c^2}\frac{c^4}{2}\\
&= \frac{\pi abc^2}{2}
\end{aligned}
$$

故 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\frac{\pi abc^2}{2}.$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

8

解. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1$, 收敛半径为 1, 又在 -1 与 1 处显然不收敛，故收敛区间为 $(-1,1)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

记在 $(-1,1)$ 内收敛到的函数为 $S(x)$, 只需求 $\frac{1}{x}S(x)$, 又

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{S(t)}{t}dt &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \\ &= \frac{x}{1-x}.\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

故 $\frac{S(x)}{x} = \frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{)1-x)^2}$, 故 $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

四（本题 4 分）

证明. 不妨设 $\vec{l}$ 为单位向量，则 $\cos\theta(x,y) = \vec{n}\cdot\vec{l}$, 若记 $\vec{n}(x,y) = (n_1(x,y), n_2(x,y))$, 则 $(n_2(x,y), -n_1(x,y))$ 为 C 的光滑的单位切向量场，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

不妨取 C 的方向为该切向量场所指的方向，则由第一型曲线积分与第二型曲线积分

之间的关系，有：

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{n}\cdot\vec{l}ds &= \oint_C (n_1l_1 + n_2l_2)ds \\ &= \oint_C (l_2, -l_1)\cdot(n_2, -n_1)ds \\ &= \oint_C l_2dx - l_1dy \\ &= \iint_D 0dxdy \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

2 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一 选择题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 D　　2 B　　3 A　　4 C　　5 A　　6 B

二 填空题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 $\sqrt{2}$　　2 $\frac{1}{\sqrt{4(ln2)^2+1}}(1, 2ln2)$　　3 $\frac{1}{2}$

4 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\sqrt[3]{x}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$　　5 $\int_0^\pi d\theta\int_0^{a\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$　　6 $\frac{1}{(1-z)^2}$

三 计算题（共 8 小题，每小题 6 分，满分 48 分，应写出演算过程与说明，否则零分）

1

解. 切线方程：

$$\begin{cases} 4(y-1)+4(z-1)=0 \\ (x-1)-2(y-1)+3(z-1)=0 \end{cases}$$

…………………………………………………………………………… 3'

即：

$$\begin{cases} y+z=2 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$$

切线方向为 $(0,1,1)\times(1,-2,3)=(5,1,-1)$, …………………………………… 2'

故法平面为：

$$5(x-1)+(y-1)-(z-1)=0.$$

…………………………………………………………………………… 1'

□

2

解. 由对称性，只需计算 $\iint_D xdxdy$, 下算之：

$$\begin{aligned} \iint_D xdxdy &= \int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xdy \cdots\cdots\cdots\cdots \ 2' \\ &= \int_0^1 (x^{3/2}-x^3)dx \\ &= \frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}. \end{aligned}$$

…………………………………………………………………………… 3'

因此，原积分值为 $\frac{3}{10}$. …………………………………………………………… 1'

□

3

解. 问题等价于考虑函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 在条件 $\phi(x,y,z)=(x-y)^2+z^2-1=0$ 下的条件极值问题。考虑 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\phi(x,y,z)$.

…………………………………………………………………………… 2'

由 Lagrange 乘子法，对于可能的极值点 (x,y,z) 必存在 λ, 使 (x,y,z,λ) 满足方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda(x-y)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y-2\lambda(x-y)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}=2z+2\lambda z=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=(x-y)^2+z^2-1=0. \end{cases}$$

…………………………………………………………………………… 2'

将第一个方程减去第二个方程，得 $2(x-y)(1+2\lambda)=0$, 故或者 $x=y$, 或者 $\lambda=-\frac{1}{2}$.

情况一： $x=y$, 代入第一个方程立得 $x=y=0$, 再代入第四个方程立得 $z=\pm1$, 故可能的极值点为 $(0,0,\pm1)$;

情况二： $\lambda=-\frac{1}{2}$, 代入第一个方程立得 $x=-y$, 代入第三个方程得 $z=0$, 再代入第四个方程立得 $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\mp\frac{1}{2}$, 故可能的极值点为 $(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)$.

综上：可能的极值点为 $(0,0,\pm1)$, $(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)$. 注意 $f(0,0,\pm1)=1$, $f(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)=\frac{1}{2}$. 而 S 为由柱面 $x^2+z^2=0$ 绕 z 轴旋转并伸缩得到，由几何意义知 f 必能取到最小值

点，故 f 的最小值点必为 $(0,0,\pm1),(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)$ 这四个点之一，故所求的最短距离为 $\sqrt{f(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. ······································ 2'

□

4

解. 记 C_1 为从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的线段，C_2 为从 $(1,1)$ 到 $(0,2)$ 的折线段，取 C_1 的参数化为 $\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}, 0\leqslant t\leqslant 1$. 取 C_2 的参数化为 $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \end{cases}, 0\leqslant t\leqslant 1$. 则这两个参数化均与曲线的方向相容。······································ 2'

因此，

$$\begin{aligned}\int_C ydx+x^2dy &= \int_{C_1} ydx+x^2dy+\int_{C_2} ydx+x^2dy \\ &= \int_0^1 tdt+t^2dt+\int_0^1 (1+t)d(1-t)+(1-t)^2d(1+t) \cdots\cdots 2' \\ &= \int_0^1 (t+t^2)dt+\int_0^1 (t^2-3t)dt \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{3}. \cdots\cdots 2'\end{aligned}$$

5

解. 记 D 的面积为 $\sigma(D)$, 由格林公式：

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\oint_{\partial D} xdy-ydx,$$

其中 ∂D 取正向。······································ 2'

取 ∂D 的参数化为 $x=a\cos t, y=b\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\oint_{\partial D} xdy-ydx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos td(b\sin t)-b\sin td(a\cos t) \cdots\cdots 2' \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abdt \\ &= \pi ab\end{aligned}$$

······································ 2'

□

6

解. 由对称性立知 $\iint\limits_S (x+y)^{2021}dS=0$. ······································ 2'

所以只需计算 $\iint\limits_S zdS$, 注意 S 为函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, x^2+y^2\leqslant R^2$ 的函数图像，故有：

$$\iint_S zdS=\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \cdots\cdots 2'$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$
$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} Rdxdy = \pi R^3.$$

因此原积分等于 πR^3.………………………………………………………… 2'

□

7

解. 记 S_1 为圆盘 $\{(x,y,h)|x^2+y^2\leqslant h\}$ 的下侧，则 S 与 S_1 组成封闭曲面，
记 Ω 为 S 与 S_1 所包围的立体，由高斯公式，$-\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy-\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iiint_\Omega 2(x+y+z)dxdydz$, ………………… 2'
由第一型曲面积分与第二型曲面积分之关系，S_1 上 $\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx=\iint_{S_1} 0dS=0$, 故 $\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iint_{S_1} h^2dxdy=-h^2\cdot\pi h$.
由对称性知，$\iiint_\Omega 2(x+y)dxdydz=0$。
所以 $-\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy+\pi h^3=2\iiint_\Omega zdxdydx$. ……………… 2'
又

$$\begin{aligned}2\iiint_\Omega zdxdydz &= 2\int_0^h zdz\iint_{x^2+y^2\leqslant z} dxdy\\ &= 2\int_0^h \pi z^2dz\\ &= \frac{2}{3}\pi h^3.\end{aligned}$$

故 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\frac{1}{3}\pi h^3$.………………………………… 2'

8

解. 令

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x, \qquad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x.$$

…………………………………………………………………………………… 2'

由于 f 为偶函数，所以 $b_k=0, \forall k=1,2,\cdots$.……………………………………… 1'
而对于 $k\neq 0$,

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos kx\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos kx\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} x^2\mathrm{d}\sin kx\\ &= -\frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\mathrm{d}x\\ &= \frac{4}{k^2\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}\cos kx = \frac{4}{k^2}(-1)^k.\end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x$$
$$= \frac{2\pi^2}{3}.$$

…………………………………………………………………………………… 2'

所以 f 的 Fourier 级数为：

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx.$$

…………………………………………………………………………………… 1'

□

四 （本题 4 分）

证明. 记 $a_n = \frac{\ln n}{(n+1)^2}$ 注意 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 0$, …………………………… 2'

又 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，由比较判则立知原级数收敛。…………………………… 2'

□

3 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、单项选择题

1.B　2. A　3. C　4. B　5. A　6.C

评分标准说明：每题 4 分，错则扣全分。

二、填空题

1. $x-1=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$.　　2. $\frac{y}{1+x^2y^2}dx+\frac{x}{1+x^2y^2}dy$.

3. $\frac{16\pi}{3}$.　　4. -2π.

5. 7.　　6. $2\le x<4$或$[2,4)$

评分标准说明：每空 4 分，第 6 小题写成 $2<x<4$或$(2,4)$ **扣 2 分；其余小题错则扣全分。**

三 、计算题（本题共 6 题，满分 36 分）

1.解：将 $z=1-2x$ 带入第一个方程　　------------　1 分

得到 $5(x-\frac{2}{5})^2+y^2=\frac{4}{5}$　　------------　2 分

引进参数$\begin{cases} x=\dfrac{2}{5}(1+\cos t) \\ y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\sin t \\ z=\dfrac{1}{5}-\dfrac{4}{5}\cos t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$； ------------ 3 分

评分标准说明： t 的范围未给出扣 1 分。

2. **解**：方程两端同时对 y 求导可得

$\cos y+2z\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, 则$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\cos y}{2(1-z)}$ ………… 2 分

方程两端同时对 x 求导可得

$2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}-2\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$, 则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{1-z}$ ………………2 分

上式再对 x 求导

$2+2(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2+2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$, 则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{x^2}{(1-z)^3}$ …………2 分

评分标准说明：该题还可以用微分形式不变性求导，结果正确满分；

3. 解： 采用柱坐标

$\begin{cases} r^2\le z\le 2 \\ 0\le r\le\sqrt{2} \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$ ………………2 分

可得

原式=$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{r^2}^{2}\dfrac{1}{1+r^2}dz=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\dfrac{r(2-r^2)}{1+r^2}dr=3\pi\ln 3-2\pi$ ……4 分

评分标准说明：其他方法也可

4．解：$P(x,y)=x^2y,\ Q(x,y)=\dfrac{1}{3}x^3$, 故$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=x^2=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ …………2 分

则$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}du=(\int_{(0,0)}^{(x,0)}+\int_{(x,0)}^{(x,y)})x^2ydx+\dfrac{1}{3}x^3dy$ ……………………2 分

解得$u(x,y)=\dfrac{1}{3}x^3y.$ ……………………………………………………2 分

评分标准说明：第二步中起点不在(0, 0)也可

5. 解：补充$\Sigma_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1, z=0\}$取下侧

可得$\iint_{\Sigma}=\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$ ……………………………………………1 分

$\iint_{\Sigma_1} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=0$ ……………………………………1 分

由高斯公式：$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}(x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy)=\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ …2 分

采用球坐标

$$\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 3\rho^2\rho^2 d\rho=\frac{6\pi}{5}$$ ………………**2 分**

评分标准说明：出现高斯公式，最终结果错误，可给 2 分

6. 解：将 $\mathrm{f}(x)$ 做奇周期延拓，计算傅里叶系数

$$\mathrm{b}_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+2)\sin nxdx=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{\pi+4}{2k-1}, & n=2k-1\\ -\frac{1}{\kappa}, & n=2k\end{cases}$$ ………………**4 分**

得 $\mathrm{x}+2=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{\pi}\frac{\pi+4}{2k-1}\sin(2k-1)x-\frac{1}{k}\sin 2kx),\ (0<x<\pi)$ ………………**2 分**

评分标准说明：最后一步未给出 x 的范围, 扣 1 分

四、综合题（本题 **8** 分）

解：

设 $\mathrm{C}(x,y)$, 则 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\text{-}1),\ \overrightarrow{AC}=(x-1,y-3)$ ……**1 分**

三角形面积为

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & \text{-}1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|3y+x-10|$$ ………………**2 分**

构造拉格朗日函数

$\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\lambda)=(3\mathrm{y}+\mathrm{x}\text{-}10)^2+\lambda(x^2+y^2-1)$ ……………………………**1 分**

求导可得

$$\begin{cases}\mathrm{F}_x=2(3y+x-10)+2\lambda x=0\\ F_y=6(3y+x-10)+2\lambda y=0\\ F_\lambda=x^2+y^2-1=0\end{cases}$$ ………………………………………**3 分**

解得 $\mathrm{x}=\frac{1}{\sqrt{10}},\ y=\frac{3}{\sqrt{10}}$ ………………………………………**1 分**

评分标准说明：直接转化为无条件极值方法也可；

五、证明题（本题共两小题，满分 8 分）

1 证明：当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos\frac{\alpha}{n}}{(\frac{\alpha}{n})^2}=\dfrac{1}{2}$ ……………………………………2 分

$\Sigma_{n=1}^{\infty}(\dfrac{\alpha}{n})^2$ **收敛，由比较判别法可知原级数绝对收敛。**

2 证明：在球坐标与极坐标下可得

$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_1^t f(r^2)r^2dr=4\pi\int_1^t f(r^2)r^2dr$

$G(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^t f(r^2)rdr=2\pi\int_1^t f(r^2)rdr$ ……………………………………2 分

$F'(t)-G'(t)=4\pi f(t^2)t^2-2\pi f(t^2)t>0$ 当t>1 ……………………………1 分

由 F(1)=G(1)=0 可得结论…………………………………………………………1 分

评分标准说明：第 2 题，有极坐标或球坐标思想，可适当给分

4 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、单项选择题

1.C　2. A　3. D　4. C　5.C　6. A

评分标准说明：　每题 4 分，错则扣全分

二、填空题

1. $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{15}}$. 2. $(2x\sin xy+y(x^2+y^2)\cos xy)dx+(2y\sin xy+x(x^2+y^2)\cos xy)dy$.

3. 0 .　　4. $4-\pi$.　　5. (-2 ,2,-2)　　6. 3

评分标准说明：　每空 4 分

三 、计算题（本题共六题，满分 36 分）

1.解：该级数为正项级数，且

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n^2\sin\frac{\pi}{2^n}}=\dfrac{1}{2}<1$ …………………………………………………4 分

根据比值判别法可知该级数收敛…………………………………………2 分

评分标准说明：　结果正确给 2 分。

2. **解：**

$f_x=(x^2+y+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}=0,\ f_y=(1+y+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}=0$ …………2 分

解得驻点$(1,-\frac{4}{3})$及$(-1,-\frac{2}{3})$ ……………………………………1 分

$A(1,-\frac{4}{3})=f_{xx}=(2x+x^2+x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=3e^{-\frac{1}{3}}$,

$B(1,-\frac{4}{3})=f_{xy}=(1+x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=e^{-\frac{1}{3}}$,

$C(1,-\frac{4}{3})=f_{yy}=(1+1+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=e^{-\frac{1}{3}}$

可得$AC-B^2>0, A>0$,则$(1,-\frac{4}{3})$为极小值………………2 分

我们也可以得到$A(-1,-\frac{2}{3})=-e^{-\frac{5}{3}}, B(-1,-\frac{2}{3})=e^{-\frac{5}{3}}, C(-1,-\frac{2}{3})=e^{-\frac{5}{3}}$

由于$AC-B^2<0$，则$(-1,-\frac{2}{3})$不是极值点……………………1 分

评分标准说明：该题还可以用微分形式不变性求导，结果正确满分；

3. 解：由奇偶性及对称性可知

$\iint_D(x^2+xye^{x^2+y^2})dxdy=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy$ …………………………4 分

由极坐标可得

$\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2 rdr=\frac{\pi}{4}$ …………………………2 分

评分标准说明：奇偶性占 2 分

4．解：$P(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\frac{y-x}{x^2+y^2}$,

计算得当$(x,y)\neq(0,0)$时，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$…………2 分

做辅助线：$L_1: x^2+y^2=\varepsilon^2$，逆时针方向 …………………………1 分

则原式$=\int_{L+L_1}-\int_{L_1}=-\int_{L_1}=-\int_0^{2\pi}(-1)d\theta=2\pi$ ……………………3 分

评分标准说明：直接用曲线参数方程求解，结果正确给分

5. 解：由对称性可知

$\iint_\Sigma zdxdy=2\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$**，其中**$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le1, x\ge0, y\ge0\}$ **……2 分**

利用极坐标计算二重积分可得

$2\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdr=\frac{\pi}{3}$ **………………………………4 分**

评分标准说明：极坐标给出，答案错误扣 2 分

6. 解：利用间接法，由于

$$\frac{1}{1\text{-x}}=1+x+x^2+\cdots\cdots+\mathrm{x}^n+\cdots\cdots$$ ……………………………………**3 分**

用 x^2 代替 x

$$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n},\ x\in(-1,1)$$ ……………………………………**3 分**

评分标准说明：最后一步未给出 x 的范围, 扣 1 分

四、综合题 （本题共 **8** 分）

解：

设切点处坐标为 (x_0,y_0,z_0) 则该点处法向量为

$(4x_0,y_0,-1)$ ……………………………………**2 分**

法向量满足

$$\begin{cases} z_0=2{x_0}^2+\dfrac{{y_0}^2}{2} \\ \dfrac{4x_0}{-4}=\dfrac{y_0}{2}=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$$ ……………………………………**2 分**

解得 $(\frac{1}{2},-1,1)$ ……………………………………**2 分**

故法线方程为

$$\frac{\mathrm{x}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{y+1}{\text{-}1}=\frac{z-1}{-1}$$ ……………………………………**2 分**

评分标准说明：坐标算错不给分

五、证明题（本题满分 **8** 分）

解： $\mathrm{P}(x,y)=\dfrac{1}{y}(1+y^2f(xy)),\ Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}(y^2f(xy)-1)$

直接计算可得

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}=\frac{y^2f(xy)+xy^3f'(xy)-1}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ ……………………………………4 分，

故与积分路径无关

$$\mathrm{I}=\int_2^1\frac{1}{y^2}[\mathrm{y}^2\mathrm{f(y)\text{-}1]dy}+\int_1^2[1+f(x)]dx=\int_1^2(1+\frac{1}{y^2})dy=\frac{3}{2}$$ ………………4 分

评分标准说明：前 4 分中，导数求错扣 2 分，

5 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. A　2. C　3. B　4. C　5. B　6. D

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $\frac{x}{-R}=\frac{y-R}{0}=\frac{z-\frac{k}{2}\pi}{k}$；　2. $8\pi R^2$；　3. 4π；　4. $[4,6]$；

5. $\frac{1}{\sqrt{13}}$;　6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(-\infty<x<\infty)$　.

三 、计算题

1、解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x+y}+(x^2+y^2)e^{x+y}=(x^2+2x+y^2)e^{x+y}$.　…………………（3 分）

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2ye^{x+y}+(x^2+2x+y^2)e^{x+y}=(x^2+2x+2y+y^2)e^{x+y}$.　…………（7 分）

2、解：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n\cdot n!}{n^n}}{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\left(-\frac{n}{n+1}\right)}=\frac{2}{e}<1,$$

所以，由比值审敛法，该级数收敛。　……………………（7 分）

3、解：曲面Σ的方程为$\Sigma: z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 8\}$。

∵　$z_x=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，$z_y=\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，

∴　$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

从而，$S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint_D\frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dxdy$　……………（4 分）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{3}{\sqrt{9-r^2}}rdr=12\pi$　……………（7 分）

4、解：添加辅助面$\Sigma: z=0, x^2+y^2\le a^2$，取下侧。记Ω 为曲面 S 和Σ所围成的空间区域，则由高斯公式，

$$\iint_{S\cup\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=3\iiint_{\Omega}dv=3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3=2\pi a^3$$ ………（4 分）

而　$\iint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=0$

所以，$\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy=2\pi a^3$　………..（7 分）

5、解：令$P=3x^2y+8xy^2$，$Q=x^3+8x^2y+12ye^y$。
因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+16xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$是某个函数的全微分。　……..（3 分）

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$$
$$=\int_0^y(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$$
$$=x^3y+4x^2y^2+12(y-1)e^y+12 \qquad \text{……….（7 分）}$$

6、解：f(x)满足 Dirichlet 定理条件，傅里叶系数计算如下：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\left[\frac{2}{n^2\pi}x\cos nx\right]_0^{\pi}=(-1)^n\frac{2}{n^2},\ n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x^2\cos nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}$$
$$=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}+\frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n-1] \qquad n=1,2,\cdots \qquad \text{………（5 分）}$$

所以，

$$f(x)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^n\frac{2}{n^2}\cos nx+\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}+\frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n-1]\right]\sin nx\}$$
$$x\neq(2k+1)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots \qquad \text{………（7 分）}$$

四、证明题

1、证明：

$$\int_0^1dx\int_x^1f(x)f(y)dy=\int_0^1dy\int_0^yf(x)f(y)dx=\int_0^1\left[f(y)\int_0^yf(x)dx\right]dy$$
$$=\int_0^1\left[\int_0^yf(x)dx\right]d\left[\int_0^yf(x)dx\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^yf(x)dx\right]_0^1=\frac{A^2}{2}\text{。} \qquad \text{………（5 分）}$$

2、证明：由 Green 公式

左边 $=\iint_D \mathrm{e}^{\sin y}+e^{-\sin x}dxdy$，右边 $=\iint_D \mathrm{e}^{-\sin y}+e^{\sin x}dxdy$。

由二重积分的对称性，$\iint_D \mathrm{e}^{\sin y}+e^{-\sin x}dxdy=\iint_D \mathrm{e}^{-\sin y}+e^{\sin x}dxdy$。

从而，$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$。 ………（5 分）

6 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. A　　2. C　　3. D　　4. B　　5. D　　6. D

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $(0,\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{15}})$；　　2. $8\pi R^2$；　　3. $2\sqrt{2}$；　　4. $\frac{64}{3}\pi$；　　5. [4,6];　　6. 0 .

三 、计算题

1、 解：$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{1+x^3}dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{1+x^3}dy.$

$=\int_0^1\sqrt{1+x^3}\cdot x^2dx=\left[\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$ …………………（7 分）

2、 解：令$f_x(x,y)=2x(2+y^2)=0$, $f_y(x,y)=2x^2y+ln\,y+1=0$,
得 f(x,y)的驻点为$(0,\mathrm{e}^{-1})$。 …………………（3 分）
在$(0,\mathrm{e}^{-1})$点，

$$A=f_{xx}(0,e^{-1})=2(2+y^2)|_{(0,e^{-1})}=2(2+e^{-2})$$

$$B=f_{xy}(0,e^{-1})=4xy|_{(0,e^{-1})}=0$$

$$C=f_{yy}(0,e^{-1})=(2x^2+\frac{1}{y})|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}=e$$

由于$AC-B^2>0,A>0$，所以 f(x,y)在$(0,e^{-1})$取到极小值$-\mathrm{e}^{-1}$。……..（7 分）

3、 解：设$A=\iint_D f(x,y)dxdy$，则$f(x,y)=xy+A$。由题意，

$$\mathrm{A}=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D (xy+A)dxdy$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(xy+A)dy=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^5+Ax^2\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^6+\frac{1}{3}Ax^3\right]_0^1=\frac{1}{8}$$

从而，$f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$。 ……..（7 分）

4、 解：有向曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases}\mathrm{x}=2\cos\theta\\ y=3\sin\theta\end{cases}\quad\theta:0\to\pi$$

则 $$\int_L (x^2+xy)dy=\int_0^{\pi}(4\cos^2\theta+6\cos\theta\sin\theta)\cdot3\cos\theta\,d\theta$$ ……（4 分）
$$=12\int_0^{\pi}\cos^3\theta\,d\theta+18\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$$
$$=12\int_0^{\pi}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta+18\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\sin\theta$$
$$=12\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\pi}-18\cdot\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}$$
$$=12$$ ……………..（7 分）

5、解：添加辅助面$\Sigma:\mathrm{z}=0,\mathrm{x}^2+y^2\le a^2$，取下侧。记$\Omega$ 为曲面 S 和Σ所围成的空间区域，则由高斯公式，

$$\iint_{S\cup\Sigma}\mathrm{xdydz}+\mathrm{ydzdx}+\mathrm{zdxdy}=3\iiint_{\Omega}dv=3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3=2\pi a^3$$ ………（4 分）

而 $$\iint_{\Sigma}\mathrm{xdydz}+\mathrm{ydzdx}+\mathrm{zdxdy}=0$$

所以， $\iint_S\mathrm{xdydz}+\mathrm{ydzdx}+\mathrm{zdxdy}=2\pi\mathrm{a}^3$ ………..（7 分）

6、解：

$$f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{x}{-(x-2)(x+1)}$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}+\frac{2}{3}\frac{1}{2-x}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-(-1)^n\right)x^n \qquad x\in(-1,1)$$ ………（7 分）

四、证明题

1、证明：令 $P=2xy^3-y^2\cos x$，$Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$。

因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6xy^2-2y\cos y=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以，由 Green 公式，

$$\oint_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=0$$

………（5 分）

2、证明：因为正项级数$\{x_n\}$单调增加且有上界，所以，存在一个常数 C，使得

$$x_n<x_{n+1}<C。$$

从而，$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x_n}{x_{n+1}})$是正项系数。 …………（2 分）

又因为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)=\frac{x_2-x_1}{x_2}+\frac{x_3-x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}$$

$$\le\frac{x_{n+1}-x_1}{x_2}\le\frac{C-x_1}{x_2}$$

所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x_n}{x_{n+1}})$收敛。 ……………（5 分）

7 浙江理工大学 2017—2018 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.B　2. B　3. B　4. B　5. C　6. A

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1　$2dx+dy$　　2　$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$　　3　$4x-2y-z-2=0$

4　6　　　　　　　　5　$(\frac{1}{2}, +\infty)$　　　　　　　　6　$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}$

三 计算题。

1 解：$\overrightarrow{PQ} = (-1, 1)$

$\vec{l} = \vec{e}_{PQ} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\cos\alpha, \cos\beta)$

$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,-1)} = 2x|_{(1,-1)} = 2, \frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,-1)} = -2y|_{(1,-1)} = 2$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial l}|_{(1,-1)} = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,-1)} cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,-1)} cos\beta = 2 \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 2 \times (\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0.$

2 解：$\because f$具有二阶连续偏导数，　$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = f_2' \cdot \sin x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial (f_2' \cdot \sin x)}{\partial x} = \cos x \cdot f_2' + \sin x \cdot \frac{\partial f_2'}{\partial x}$

$\frac{\partial f_2'}{\partial x} = f_{21}'' \cdot 1 + f_{22}'' \cdot y cosx = f_{12}'' + y cosx \cdot f_{22}''$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin x \cdot f_{12}'' + y \cdot sinx \cdot cosx \cdot f_{22}'' + cosx \cdot f_{22}'' + cosx \cdot f_2'$

3 解：

$\begin{cases} f_x' = 3x^2 - 6x = 0 \\ f_y' = 3y^2 - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, x = 2 \\ y = 0, y = 2 \end{cases}$，得驻点：$(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)$

$$f_{xx}'' = 6x - 6, f_{xy}'' = 0, f_{yy}'' = 6y - 6$$

① $(0, 0)$处：

$AC - B^2 = (-6) \times (-6) - 0 = 36 > 0$，有极值，$A = -6 < 0$，极大值，$f(0, 0) = 0$，

② $(0, 2)$处：

$AC - B^2 = (-6) \times 6 - 0 = -36 < 0$，无极值，

③ $(2, 0)$处：

$AC - B^2 = 6 \times (-6) - 0 = -36 < 0$，无极值，

④ $(2, 2)$处：

$AC - B^2 = 6 \times 6 - 0 = 36 > 0$，有极值，$A = 6 > 0$，极小值，$f(2, 2) = -8$

4 解：

$$V = \iiint_{\Omega} 1\, dV = \iint_{D_{xy}} (6 - 2x^2 - y^2 - x^2 - 2y^2)\, dxdy$$

$$= 3 \iint_{D_{xy}} (2 - x^2 - y^2)\, dxdy$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2) \rho d\rho$$

$$= 6\pi$$

5 解：计上Σ_1：$z = 1, (x^2 + y^2 \le 1)$, 取上侧

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=I_1-I_2$$

$I_1=\iiint_{\Omega}\ (2x+2z)dxdydz=2\iiint_{\Omega}\ zdV=2\int_0^1 z\cdot\pi\cdot z\ \ dz=\frac{2}{3}\pi$

$$I_2=\iint_{\Sigma}\ (z^2-x)dxdy=\iint_{\Sigma}\ (1-x)dxdy=\iint_{D_{xy}}1dxdy=\pi$$

$$\therefore I=\frac{2}{3}\pi-\pi=-\frac{\pi}{3}$$

四 （本题满分 12 分）

（1）解：$f(x,y)=Ax^2+Bxy-1$

$$A=\oint_L\ (Ax^2+Bxy-1)ds=A\oint_L\ x^2ds-\oint_L\ ds=\frac{A}{2}\oint_L\ 1ds-\oint_L\ 1ds=\frac{A}{2}\cdot 2\pi-2\pi$$

$$=(A-2)\pi\ \Longrightarrow\ A=\frac{2\pi}{\pi-1}$$

$$B=\iint_D\ (Ax^2+Bxy-1)d\sigma=\iint_D\ (Ax^2-1)d\sigma=A\cdot\frac{\pi}{4}-\pi=\frac{2\pi-\pi^2}{2(1-\pi)}$$

$$\therefore f(x,y)=\frac{2\pi}{\pi-1}x^2+\frac{2\pi-\pi^2}{2(1-\pi)}xy-1$$

（2）解：左$=$(格林公式) $\iint_D\ [\left(f+x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right)-(f+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y})]d\sigma=\iint_D\ [\left(x\left(\frac{4\pi x}{\pi-1}+\frac{2\pi-\pi^2}{2(\pi-1)}\cdot y\right)\right)-y\cdot(\frac{2\pi-\pi^2}{2(\pi-1)}\cdot x)]d\sigma=\iint_D\ \frac{4\pi x^2}{\pi-1}d\sigma=\frac{4\pi}{\pi-1}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{\pi-1}$

右$=\frac{\pi}{2}\cdot A=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\pi}{\pi-1}=\frac{\pi^2}{\pi-1}$

左=右，证毕。

五 证明题（本题满分 4 分）

解：$\because\ \Sigma\frac{1}{n^2}$收敛，又$\Sigma a_n^2$收敛。

又$\because\ \left|\frac{a_n}{n}\right|\le a_n^2+\frac{1}{n^2}$

由比较审敛法，

$\therefore\sum|\frac{a_n}{n}|$收敛，即：$\sum\frac{a_n}{n}$绝对审敛。

8 浙江理工大学 2016—2017 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1. D　　2. A　　3. C　　4. C　　5. D　　6. A

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1. -6　　2. 0　　3. 2

4. $\frac{1}{1+\ln\frac{z}{x}}$或$\frac{z}{y+z}$　　5. 1　　6. 2

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出文字说明及演算过程）

1.

把Ω投影到xOy面上得投影区域D_{xy}为由直线$x+2y=1$ 与两坐标轴围成的三角形 ....（2 分）

$\iiint_{\Omega} xdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}dy\int_0^{1-x-2y}xdz$ ....（4 分）

$=\frac{1}{48}$ . ...（6 分）

2.

解：$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$ ....（2 分）

$\frac{1}{1+x^2}=1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+\ldots$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ ....（4 分）

$\mathrm{x}\in(-1,1)$ ....（6 分）

3.

设L_1为单位圆位于第一象限的部分。

$\int_L |y|ds=2\int_{L_1}|y|ds=2\int_{L_1}yds$ ....（2 分）

设$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

则$ds=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}d\theta=d\theta$ ....（4 分）

原式$=2\int_{L_1}yds$=$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\, d\theta=2$ ....（6 分）

4.

方法一：

把圆柱体表面分为三个部分：上半部分和侧面， ....（2 分）

分别则上下在xOy面上投影相同，侧面在xOy面上投影为零， ....（4 分）

在上半部分的积分互为相反数，侧面的积分为 0，所以积分值为 0. ....（6 分）

方法二：

设Ω为圆柱体闭域， ....（2 分）

由高斯公式：$\oiint_{\Sigma}\ (x-y)dxdy=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(x-y)}{\partial z}dv$ ....（4 分）

$=\iiint_{\Omega}\ 0dv=0.$ ....（6 分）

5.

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$$ ....（2 分）

解得驻点为$(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$ ....（3 分）

再求二阶偏导数，

$f_{xx}(x,y)=6x+6,f_{xy}(x,y)=0,f_{yy}(x,y)=-6y+6.$ ....（4 分）

在点$(1,0)$处，$\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2=72>0$，且$\mathrm{A}>0$，故$(1,0)$为极小值点。

类似地，$(-3,2)$为极大值点，$(1,2),(-3,0)$都不是极值点。 ....（6 分）

四、证明题（本题共 2 小题，第 1 题 4 分，第 2 题 6 分，满分 10 分，应写出详细证明和计算过程）

1.

令$a_n=\frac{n}{3^{n-1}}$,

则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1$， ....（2 分）

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{3^{n-1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$ 收敛， ....（3 分）

故原级数绝对收敛。 ....（4 分）

2.

令$P(x,y)=2xy-y^4+3$，$Q(x,y)=x^2-4xy^3$，

则$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以曲线积分与路径无关。 ....（2 分）

$\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$

$=\int_{(1,0)}^{(2,0)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy+\int_{(2,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$

$=\int_1^2 3dx+\int_0^1(4-8y^3)dy$ ....（4 分）

$=5$ ....（6 分）

9 浙江理工大学 2016—2017 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1-6 B A A B B D

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

-1；　0；　2；　$\frac{y}{1-z}$；　$\sqrt{2}$；　$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出演算过程及文字说明）

1、$\mathrm{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$

2、原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\rho^2}^4 zdz=\frac{64}{3}\pi$

3、设 D 为xOy面上的圆盘$x^2+y^2\le 1$，Σ_1是圆盘 D 下侧

原式$=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_{\Omega}3dv-\iint_D x^2dxdy=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi$

4、原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2\theta\rho d\rho d\theta=\frac{3}{64}\pi^2$

5、幂函数的收敛区域为(-1,1)，则$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$，所以$s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx+s(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，$x\in(-1,1)$

四、证明题（本题共 2 小题，每题 5 分，满分 10 分，应写出详细证明和计算过程）

1、

令　$F(x,y,z)=f(x-ay,z-by)$,则$F_x'(x,y,z)=f_1'$, $F_y'(x,y,z)=-af_1'-bf_2'$, $F_z'(x,y,z)=f_2'$，由于$aF_x'+F_y'+bF_z'=0$，因此曲面的切平面与方向向量为(a,1,b)的直线平行。

2、

因为正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$也为正项级数且收敛，所以$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\quad=0$，因此$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)^2}{(a_n+b_n)}$，由比较审敛法的极限形式可知$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛

10 浙江理工大学 2015-2016 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1-6 B C C D C B

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1 $-\frac{2}{(x^2+y^2)^2}(x,y)$或$-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\vec{i}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}$　　2 $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

3 $\frac{4}{15}\pi$　　4 0　　5 $\frac{\sqrt{3}}{12}$　　6 $-\frac{1}{4}$

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出演算过程及文字说明）

1.（1）（比值）

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}=\frac{2}{3}<1\text{，故收敛。}$$

（2）（加绝对值，比值）

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n+1}{3^n}}{\sin\frac{n}{3^{n-1}}}=\frac{1}{3}<1\text{，故绝对收敛（必收敛）。}$$

2. $\begin{cases} f_x=(x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \\ f_y=(1+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \end{cases}$

得极值点$(1,-\frac{4}{3}),(-1,-\frac{2}{3})$.

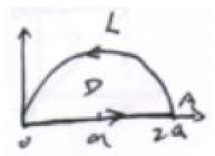
又$A=f_{xx}=(\frac{x^3}{3}+2x^2+2x+y)e^{x+y}$

$B=f_{xy}=(\frac{x^3}{3}+x^2+y+1)e^{x+y}$

$C=f_{yy}=(\frac{x^3}{3}+y+2)e^{x+y}$

① $(1,-\frac{4}{3})$,　$AC-B^2>0, A>0.$　　故$(1,-\frac{4}{3})$为极小值点，极小值为$-e^{-\frac{1}{3}}$.

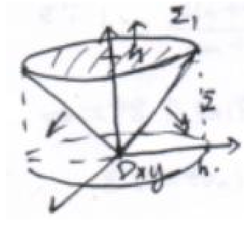
② $(-1,-\frac{2}{3})$,　$AC-B^2<0,$　　故$(-1,-\frac{2}{3})$不是极值点。



3. $I=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(3x+2y)dy=\frac{20}{3}$

4. $I=\oint_L \overrightarrow{OA}-\int\overrightarrow{OA}=\iint_D 2dxdy-0=\pi a^2$

5.计：Σ_1：$z=h$，上侧。



$$I=\oiint_{\Sigma_1+\Sigma}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_\Omega(0+0+0)dv-\iint_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy$$

$$=-\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\rho^2\cdot\rho d\rho$$

$$=-\frac{1}{2}\times2\pi\times\frac{h^4}{4}=-\frac{\pi}{4}h^4$$

6. $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)dx=2(\pi^2+1)$,

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n\cdot12}{n^2}$，　$b_n=0$

$\because n$是从 1 到$+\infty$，$\therefore$ 由公式得，$f(x)=\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$　　$x\in(-\infty,+\infty)$

（因为f连续，所以f的傅里叶级数处处收敛到f）（此处只做简要步骤说明）

四、综合题（本题 8 分）

（1）$P = x + 2y$，$Q = 2x + y$，$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2 = \frac{\partial P}{\partial y}$

$$u(x,y) = \int_0^x xdx + \int_0^y (2x+y)dy = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2}$$

（2）令$F(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - z.$

则 $\vec{n}|_{(1,1,4)} = (3, 3, -1).$

$\therefore$ 切平面方程为 $3(x-1) + 3(y-1) - (z-3) = 0.$

即 $3x + 3y - z - 3 = 0$

法线方程为 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-1}$.

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1.

左$= \int_0^a dx \int_x^a e^{m(a-x)} f(x) dy = \int_0^a (a-x) \cdot e^{m(a-x)} f(x) dx =$右 .

2.

法一：$\because \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 也收敛（且为正项级数），　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = 0.$

又$\because \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(u_n+v_n)^2}{(u_n+v_n)} = \lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = 0$

由比较审敛法极限形式知，$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$也收敛。

法二：$\because \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛，　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = 0.$

即 $\exists N > 0$，当$n \geq N$时，有$u_n + v_n < 1.$

从而$(u_n + v_n)^2 < u_n + v_n \ (n \geq N).$

由比较审敛法知，$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$收敛。