浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期

《高等数学 B2》期中试卷答案

一、.选择题(4 分/题，共 24 分)

1. D 2 B 3.A 4.C 5. D 6.A

二、填空题（4 分/题，共 24 分 ）

1. 特解形式可设为 $y = Axe^{-x} + B\cos 4x + C\sin 4x$

2. $(2,2)$

3. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\cos(x+y)}{z-\cos(x+y)}$

4. $dz = \left[yf(\frac{y}{x}) - \frac{y^2}{x} f'(\frac{y}{x}) \right] dx + \left[xf(\frac{y}{x}) + yf'(\frac{y}{x}) \right] dy$

5. $y_t = C2^t + 8$

6. 通解为 $y = (x+1)^2 \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C \right]$

三、计算题 （6 分/题，共 24 分）

1.解： $\because r^2 + 1 = 0$

$\therefore r = \pm i$

设此方程的特解为： $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$ 代入原方程得

$$-3A\cos 2x - 3B\sin 2x = -\sin 2x$$

$$\therefore \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

故此方程的通解为： $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$

代入初始条件 $c_1 = -1, c_2 = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ 特解为： $y = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$

2.解：设 $y' = p(x)$

则原方程可化为： $p' = \dfrac{2x}{1+x^2} p$ ，分离变量可得： $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{2x}{1+x^2} dx$

两边积分得：$\ln|p| = \ln(1+x^2) + C$，即 $p = y' = C_1(1+x^2)$ $(C_1 = \pm e^C)$

由条件 $y'(0) = 3$ 得 $C_1 = 3$

所以 $y' = 3(1+x^2)$，两边积分得： $y = x^3 + 3x + C_2$，

又有条件 $y(0) = 1$，得 $C_2 = 1$

所以所求特解为： $y = x^3 + 3x + 1$

3.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_x = f_u \cdot e^y + f_x,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(f_u \cdot e^y + f_x) = \left(\frac{\partial}{\partial y} f_u\right) \cdot e^y + f_u \cdot e^y + \frac{\partial}{\partial y} f_x \\ &= \left(f_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_{uy}\right) e^y + f_u \cdot e^y + \left(f_{xu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_{xy}\right) \\ &= (f_{uu} \cdot xe^y + f_{uy}) e^y + f_u \cdot e^y + f_{xu} \cdot xe^y + f_{xy} \\ &= xe^{2y} f_{uu} + e^y f_{uy} + xe^y f_{xu} + f_{xy} + e^y f_u.\end{aligned}$$

4. 设函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $e^z - xyz = 0$ 所确定的二元隐函数，求 dz, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

4.解：令 $F(x, y, z) = e^z - xyz$, 则 $F_x' = -yz, F_y' = -xz, F_z' = e^z - xy$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'} = \frac{yz}{e^z - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'} = \frac{xz}{e^z - xy}$$

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{yz}{e^z - xy} dx + \frac{xz}{e^z - xy} dy$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x} = \frac{\partial(\frac{xz}{e^z - xy})}{\partial x} \\ &= \frac{ze^{2z} - x^2 y^2 z + xyz^2 e^z}{(e^z - xy)^3}\end{aligned}$$

四．综合题（8 分/题，共 16 分）

1 解：设矩形的长为 x ，宽为 y ，绕 y 轴旋转而得的圆柱体的体积为 $\pi x^2 y$ ，问题即是求

$V=\pi x^2 y$ 在 $x+y=p$ 之下的极大值。令 $F(x,y)=\pi x^2 y+\lambda(x+y-p)$，则由

$$\begin{cases} F_x^{'}=2\pi xy+\lambda=0 \\ F_y^{'}=\pi x^2+\lambda=0 \\ F_\lambda^{'}=x+y-p=0 \end{cases} \Rightarrow x=2y, x+y=p \Rightarrow x=\frac{2}{3}p, y=\frac{1}{3}p$$

所以矩形的边长分别为 $\frac{2}{3}p,\frac{1}{3}p$，且绕短边旋转使体积达到最大。

2 解：$\because \int_0^x tf(t-x)dt \underline{\underline{u=t-x}} \int_{-x}^0 (u+x)f(u)du=-\int_0^{-x} uf(u)du-x\int_0^{-x} f(u)du$

$\therefore f(x)-\int_0^{-x} f(t)dt=1 \Rightarrow f^{'}(x)=-f(-x) \Rightarrow f^{''}(x)=f^{'}(-x)=-f(x)$

$\Rightarrow f^{''}(x)+f(x)=0 \Rightarrow f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$，而 $f(0)=1, f^{'}(0)=-1$

$\Rightarrow f(x)=\cos x-\sin x$.

五．证明题（8+4，共 12 分）

1.

证 因为 $0 \leqslant \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leqslant \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}=0,$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

又 $f(0,0)=0$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$，即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}},$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\frac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^2}=\frac{1}{4}\neq 0,$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在，但不可微分.

2. 解：方程 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$ 两边分别同时对 x,y 求导，得到：

$$\Phi_u'(c-a\frac{\partial z}{\partial x})+\Phi_v'(-b\frac{\partial z}{\partial x})=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c\Phi_u'}{a\Phi_u'+b\Phi_v'}$$

$$\Phi'_u(-a\frac{\partial z}{\partial y})+\Phi'_v(c-b\frac{\partial z}{\partial y})=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\Phi'_v}{a\Phi'_u+b\Phi'_v}$$

$\therefore\ a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$　得证.