离散数学概论

习题课一 数理逻辑

课程QQ号：819392514
金耀 数字媒体技术系
fool1025@163.com
13857104418

一.命题符号化

P:天下雪。Q:我将去镇上。R:我有时间。

(1) 如果天不下雪且我有时间，那么我将去镇上。

$(\neg P \wedge R) \rightarrow Q$

(2) 我将去镇上，仅当我有时间。

$Q \rightarrow R$

(3)天下雪，那么我不去镇上。

$P \rightarrow \neg Q$

一.命题符号化

(4) 或者你没有给我写信，或者它在途中丢失了。

显然这里的“或者”是“不可兼取的或”。

令 P:你给我写信。Q:信在途中丢失了。

$\neg P \vee Q$　　　$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

(5) 我们不能既划船又跑步。

令 P:我们划船。Q:我们跑步。

$\neg(P \wedge Q)$

(6)如果你来了，那么他唱不唱歌将看你是否为他伴奏而定。

令 P:你来了。Q:你为他伴奏。 R:他唱歌。

$P \to ((Q \to R) \wedge (\neg Q \to \neg R))$

或： $P \to (Q \leftrightarrow R)$

一.命题符号化

(7) 假如上午不下雨，我去看电影，否则就在家里读书或看报。

令 P:上午下雨。Q:我去看电影。 R:我在家里读书。S:我在家里看报。

$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow (R \vee S))$

(8)我今天进城，除非下雨。

令 P:我今天进城。Q:今天下雨。

表达式为: $\neg Q \rightarrow P$

(9)仅当你走我将留下。

令 P:你走。Q:我留下。

表达式为: $Q \rightarrow P$ 或者 $\neg P \rightarrow \neg Q$

二. 重言式的证明方法

方法1：列真值表。

方法2：公式的等价变换，化简成“T”。

方法3：用公式的主析取范式。

(1) 证明$(P\to Q)\to(P\to(P\wedge Q))$是重言式。

方法1:

P	Q	$P\to Q$	$P\to(P\wedge Q)$	$(P\to Q)\to(P\to(P\wedge Q))$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

二. 重言式的证明方法

方法2:

$(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee(P\wedge Q))$ （蕴含等值式）

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee((\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q))$ （德摩根，结合律）

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(T\wedge(\neg P\vee Q))$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\vee Q)$ （分配率）

$\Leftrightarrow(P\vee(\neg P\vee Q))\wedge(\neg Q\vee(\neg P\vee Q))$

$\Leftrightarrow((P\vee\neg P)\vee Q))\wedge(\neg Q\vee(Q\vee\neg P))$

$\Leftrightarrow(T\vee Q))\wedge((\neg Q\vee Q)\vee\neg P)$

$\Leftrightarrow T\wedge(T\vee\neg P)$

$\Leftrightarrow T\wedge T$

$\Leftrightarrow T$

二. 重言式的证明方法

方法3 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee(P\wedge Q))$ （蕴含等值式）

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee\neg P\vee(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q))\vee(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow m0\vee m1\vee m2\vee m3$

可见，该公式的主析取范式含有全部(四个)小项，这表明 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow(P\wedge Q))$是永真式

三.重言蕴涵式的证明方法

方法1.列真值表。(即列永真式的真值表) (略)

方法2.假设前件为真，推出后件也为真。

方法3.假设后件为假，推出前件也为假。

证明:$(\neg A\rightarrow(B\vee C))\wedge(D\vee E)\wedge((D\vee E)\rightarrow\neg A) \Rightarrow B\vee C$

方法2 证明：

设前件:$(\neg A\rightarrow(B\vee C))\wedge(D\vee E)\wedge((D\vee E)\rightarrow\neg A)$ 为真，

则: $\neg A\rightarrow(B\vee C)$, $D\vee E$, $(D\vee E)\rightarrow\neg A$ 均为真。

由$D\vee E$, $(D\vee E)\rightarrow\neg A$ 均为真，得 $\neg A$为真，

又由$\neg A\rightarrow(B\vee C)$为真，得 $B\vee C$为真。

所以：$(\neg A\rightarrow(B\vee C))\wedge(D\vee E)\wedge((D\vee E)\rightarrow\neg A) \Rightarrow B\vee C$

三.重言蕴涵式的证明方法

$(\neg A \to (B \vee C)) \wedge (D \vee E) \wedge ((D \vee E) \to \neg A) \Rightarrow B \vee C$

方法3 证明：设后件$B \vee C$为 F，则 B与C均为 F，

1. 如果$D \vee E$ 为 T，则

1).若A为T，则$\neg A$为F，则$(D \vee E) \to \neg A$为F，于是前件

$(\neg A \to (B \vee C)) \wedge (D \vee E) \wedge ((D \vee E) \to \neg A)$ 为F。

2). 若A为 F，则 $\neg A$为T，于是$\neg A \to (B \vee C)$ 为F，

故前件$(\neg A \to (B \vee C)) \wedge (D \vee E) \wedge ((D \vee E) \to \neg A)$ 为F。

2.如果$D \vee E$ 为 F，则 前件

$(\neg A \to (B \vee C)) \wedge (D \vee E) \wedge ((D \vee E) \to \neg A)$ 为F。

$\therefore (\neg A \to (B \vee C)) \wedge (D \vee E) \wedge ((D \vee E) \to \neg A) \Rightarrow B \vee C$

四. 等价公式的证明方法

方法1：用列真值表。（不再举例）

方法2：用公式的等价变换.(用等值演算)

(1) 证明 $((A\wedge B)\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow(D\vee C))\Leftrightarrow(B\wedge(D\rightarrow A))\rightarrow C$

左式$\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B)\vee C)\wedge(\neg B\vee(D\vee C))$ 蕴含等值式

$\Leftrightarrow((\neg A\vee\neg B)\vee C)\wedge(\neg B\vee(D\vee C))$ 德摩根

$\Leftrightarrow((\neg B\vee\neg A)\vee C)\wedge((\neg B\vee D)\vee C)$ 分配率

$\Leftrightarrow((\neg B\vee\neg A)\wedge(\neg B\vee D))\vee C$ 分配率

$\Leftrightarrow(\neg B\vee(\neg A\wedge D))\vee C$ 德摩根

$\Leftrightarrow\neg(B\wedge(A\vee\neg D))\vee C$ 蕴含等值式

$\Leftrightarrow(B\wedge(D\rightarrow A))\rightarrow C$

四. 等价公式的证明方法

(2)化简$(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)$

$(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)$

$\Leftrightarrow (A\vee\neg A)\wedge(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow T\wedge(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow B\wedge C$

(1)写出$(P\to(Q\wedge R))\wedge(\neg P\to(\neg Q\wedge\neg R))$的主析取范式和主合取范式

方法1，用真值表

令$A(P,Q,R)\Leftrightarrow(P\to(Q\wedge R))\wedge(\neg P\to(\neg Q\wedge\neg R))$

$A(P,Q,R)\Leftrightarrow m_0\vee m_7$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\Leftrightarrow\sum(0,7)$

$A(P,Q,R)\Leftrightarrow M_1\wedge M_2\wedge M_3\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$

$\Leftrightarrow(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge$

$(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\Leftrightarrow\prod(1,2,3,4,5,6)$

五.范式及应用

	P	Q	R	$P\to(Q\wedge R)$	$\neg P\to(\neg Q\wedge\neg R)$	$A(P, Q, R)$
0	F	F	F	T	T	T
1	F	F	T	T	F	F
2	F	T	F	T	F	F
3	F	T	T	T	F	F
4	T	F	F	F	T	F
5	T	F	T	F	T	F
6	T	T	F	F	T	F
7	T	T	T	T	T	T

五.范式及应用

方法2.等价变换

$(P\to(Q\wedge R))\wedge(\neg P\to(\neg Q\wedge\neg R))$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee(Q\wedge R))\wedge(P\vee(\neg Q\wedge\neg R))$ 蕴含等值式

$\Leftrightarrow(\neg P\vee(Q\wedge R))\wedge(P\vee(\neg Q\wedge\neg R))$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge P)\vee(P\wedge(Q\wedge R))\vee(\neg P\wedge(\neg Q\wedge\neg R))\vee$
$((Q\wedge R)\wedge(\neg Q\wedge\neg R))$

$\Leftrightarrow F\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee F$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge R))\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_7$

五.范式及应用

$(P\rightarrow(Q\wedge R))\wedge(\neg P\rightarrow(\neg Q\wedge\neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee(Q\wedge R))\wedge (P\vee(\neg Q\wedge\neg R))$

$\Leftrightarrow((\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R))\wedge((P\vee\neg Q)\wedge(P\vee\neg R))$

$\Leftrightarrow((\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R))\wedge((P\vee\neg Q)\wedge(P\vee\neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee(R\wedge\neg R))\wedge(\neg P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R))$
$\wedge(P\vee\neg Q\vee(R\wedge\neg R))\wedge(P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee R)\wedge (\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R) \wedge$
$(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge (P\vee\neg Q\vee R)\wedge (P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge$
$(P\vee Q\vee\neg R) \wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R))\wedge (\neg P\vee\neg Q\vee R)$
$\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow M_1\wedge M_2\wedge M_3\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$

五.范式及应用

(2) A,B,C,D四个人中要派两个人出差，按下述三个条件有几种派法？

①若A去则C和D中要去一个人。

②B和C不能都去。

③C去则D要留下。

解.设A,B,C,D分别表示A去，B去，C去，D去。

①$A \rightarrow ((C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D))$

$\Leftrightarrow \neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)$

② $\neg(B \wedge C) \Leftrightarrow \neg B \vee \neg C$

③ $C \rightarrow \neg D \Leftrightarrow \neg C \vee \neg D$

总的条件为：

$(\neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee \neg D)$ 令此式为真。

五.范式及应用

将$(\neg A\lor(C\land\neg D)\lor(\neg C\land D))\land(\neg B\lor\neg C)\land(\neg C\lor\neg D)$化成析取范式。

上式$\Leftrightarrow(\neg A\lor(C\land\neg D)\lor(\neg C\land D))\land(\neg C\lor(\neg B\land\neg D))$

$\Leftrightarrow(\neg A\land\neg C)\lor(C\land\neg D\land\neg C)\lor(\neg C\land D\land\neg C)\land$
$(\neg A\land\neg B\land\neg D)\lor(C\land\neg D\land\neg B\land\neg D)\quad\lor(\neg C\land D\land\neg B\land\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\land\neg C)\lor F\lor(\neg C\land D)\lor(\neg A\land\neg B\land\neg D)\lor(C\land\neg D\land\neg B)\lor F$

可以取$\neg A\land\neg C$为T，得B和D去。

取$\neg C\land D$为T，得A和D去，或者 B和D去。

取$C\land\neg D\land\neg B$为T，得A和C去 。

最后得三种派法： A和C去、A和D去、B和D去。

五.范式及应用

箱 \ 工具	改 锥	扳 手	钳 子	锤 子
A	有	有		
B		有	有	有
C	有		有	
D		有		有

(3) 有工具箱A、B、C、D，各个箱内装的工具如下表所示。试问如何携带数量最少工具箱，而所包含的工具种类齐全。

解：设A、B、C、D分别表示带A、B、C、D箱。

则总的条件为：

$(A \vee C) \wedge (A \vee B \vee D) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)$ 为真。

改锥　扳手　钳子　锤子

五.范式及应用

将$(A\vee C)\wedge(A\vee B\vee D)\wedge(B\vee C)\wedge(B\vee D)$写成析取范式，

上式$\Leftrightarrow((A\vee C)\wedge(B\vee C))\wedge((A\vee(B\vee D))\wedge(B\vee D))$

$\Leftrightarrow((A\wedge B)\vee C))\wedge(B\vee D)$

$\Leftrightarrow(A\wedge B\wedge B)\vee(C\wedge B)\vee(A\wedge B\wedge D)\vee(C\wedge D)$

$\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(C\wedge B)\vee(A\wedge B\wedge D)\vee(C\wedge D)$

分别可以取$(A\wedge B)$、$(C\wedge B)$、$(C\wedge D)$为真。

于是可以得到三种携带方法：

带A和B箱， 带B和C箱， 带C和D箱。

六. 逻辑推理 熟练掌握三种推理方法

(1) $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D), (D \vee E) \rightarrow P \Rightarrow A \rightarrow P$

1.直接推理

⑴ $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$

$\Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee (C \wedge D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (C \wedge D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee D) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee D)$

前提: $A \rightarrow C, A \rightarrow D, B \rightarrow C, B \rightarrow D$

(2) $(D \vee E) \rightarrow P$

$\Leftrightarrow \neg(D \vee E) \vee P$

$\Leftrightarrow (\neg D \wedge \neg E) \vee P$

$\Leftrightarrow (\neg D \vee P) \wedge (\neg E \vee P)$

⑾ $D \rightarrow P, E \rightarrow P$

得到： $A \rightarrow P$ 假言三段论

六. 逻辑推理 熟练掌握三种推理方法

2.附加前提 $(A\vee B)\to(C\wedge D),\ (D\vee E)\to P \Rightarrow A\to P$

(1)	A	附加前提
(2)	$A\vee B$	附加
(3)	$(A\vee B)\to(C\wedge D)$	前提
(4)	$C\wedge D$	化简
(5)	D	$A\to D$
(6)	$D\vee E$	附加
(7)	$(D\vee E)\to P$	前提
(8)	P	$D\to P$
(9)	$A\to P$	假言三段论

六. 逻辑推理 熟练掌握三种推理方法

3.反证法 $(A\vee B)\rightarrow(C\wedge D),\ (D\vee E)\rightarrow P \Rightarrow A\rightarrow P$

(1)	$\neg(A\rightarrow P)$	假设前提
(2)	$\neg(\neg A\vee P)$	
(3)	$A\wedge\neg P$	
(4)	A	化简
(5)	$A\vee B$	附加
(6)	$(A\vee B)\rightarrow(C\wedge D)$	前提
(7)	$C\wedge D$	化简
(8)	D	$A\rightarrow D$
(9)	$D\vee E$	附加
(10)	$(D\vee E)\rightarrow P$	前提
(11)	P	$D\rightarrow P$
(13)	$P\wedge\neg P$	不相容

六. 逻辑推理 熟练掌握三种推理方法

3.反证法 $(A\vee B)\rightarrow(C\wedge D), (D\vee E)\rightarrow P \Rightarrow A\rightarrow P$

(1)	$\neg(A\rightarrow P)$	假设前提
(2)	$\neg(\neg A\vee P)$	
(3)	$A\wedge\neg P$	
(4)	A	化简
(5)	$A\vee B$	附加
(6)	$(A\vee B)\rightarrow(C\wedge D)$	前提
(7)	$C\wedge D$	化简
(8)	D	$A\rightarrow D$
(9)	$D\vee E$	附加
(10)	$(D\vee E)\rightarrow P$	前提
(11)	P	$D\rightarrow P$
(13)	$P\wedge\neg P$	不相容

七.谓词符号化

将下列命题用谓词符号化：

- （1）小王学过英语和法语。
- （2）2大于3仅当2大于4。
- （3）3不是偶数。
- （4）2或3是质数。
- （5）除非李键是东北人，否则他一定怕冷。

七. 谓词符号化

- (1) 令 $P(x)$：x学过英语， $Q(x)$：x学过法语， c： 小王， 命题符号化为: $P(c) \vee Q(c)$;
- (2) 令$P(x, y)$: x大于y, 命题符号化为: $P(2, 4) \rightarrow P(2, 3)$;
- (3) 令$P(x)$: x是偶数， 命题符号化为: $\neg P(3)$;
- (4) 令$P(x)$: x是质数， 命题符号化为: $P(2) \vee P(3)$;
- (5) 令$P(x)$: x是北方人； $Q(x)$： x怕冷； c： 李键；

  命题符号化为: $Q(c) \rightarrow \neg P(c)$;

七. 谓词符号化

令谓词 $P(x)$表示“说德语”， $Q(x)$表示“了解计算机语言C++”，个体域为某校全体学生的集合。用 $P(x)$、$Q(x)$、量词和逻辑联接词符号化下列语句。

- （1）某校有个学生既会说德语又了解C++。
- （2）某校有个学生会说德语，但不了解C++。
- （3）某校所有学生或会说德语，或了解C++。
- （4）某校没有学生会说德语或了解C++。

七. 谓词符号化

假设个体域为全总个体域，谓词$M(x)$表示“x是某校学生”。用$P(x)$、$Q(x)$、$M(x)$、量词和逻辑联接词再次符号化上面的4条语句：

(1) $\exists x(M(x) \wedge P(x) \wedge Q(x))$

(2) $\exists x(M(x) \wedge P(x) \wedge \neg Q(x))$

(3) $\forall x(M(x) \rightarrow (P(x) \vee Q(x)))$

(4) $\forall x(M(x) \rightarrow \neg(P(x) \vee Q(x)))$

八. 消去量词

设个体域$D = \{a, b, c\}$， 消去下列各式的量词：

- (1) $\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$
- (2) $\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$
- (3) $\forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$
- (4) $\forall x (P(x，y) \rightarrow \exists y Q(y))$

八. 消去量词

设谓词$P(x, y)$表示“x等于y”，个体变元 x和y的个体域都是$D = \{1, 2, 3\}$。求下列各式的真值：

- (1) $\exists x\, P(x, 3)$
- (2) $\forall y\, P(1, y)$
- (3) $\forall x \forall y\, P(x, y)$
- (4) $\exists x \exists y\, P(x, y)$
- (5) $\exists x \forall y\, P(x, y)$
- (6) $\forall y \exists x\, P(x, y)$

九. 前束范式

下列谓词公式的前束析取范式和前束合取范式：

- (1) $\forall x\, P(x) \rightarrow \exists y\, Q(x, y)$
- (2) $\forall x\, (P(x, y) \rightarrow \exists y\, Q(x, y, z))$
- (3) $\exists x\, \neg\exists y P(x, y) \rightarrow (\exists z Q(z) \rightarrow R(x))$
- (4) $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x, y) \rightarrow (\exists y(R(y) \rightarrow \exists z S(y, z))$

十. 谓词推理

指出下面演绎推理中的错误，并给出正确的推导过程。

（1）	① $\forall x P(x) \to Q(x)$	P 规则
	② $P(y) \to Q(y)$	UI 规则：①
（2）	① $\forall x(P(x) \to Q(x))$	P 规则
	② $P(a) \to Q(b)$	UI 规则：①
（3）	① $P(x) \to \exists x Q(x)$	P 规则
	② $P(a) \to Q(a)$	EI 规则：①
（4）	① $P(a) \to G(a)$	P 规则
	② $\forall x(P(x) \to G(x))$	UG 规则：①
（5）	① $P(a) \wedge G(b)$	P 规则
	② $\exists x(P(x) \wedge G(x))$	EG 规则：①
（6）	① $P(y) \to Q(y)$	P 规则
	② $\exists x(P(c) \to Q(x))$	EG 规则：①

十.谓词推理

将下列命题符号化，并用演绎推理法证明其结论是有效的：

- (1) 有理数、无理数都是实数；虚数不是实数。因此，虚数既不是有理数，也不是无理数。（个体域取全总个体域）
- (2) 所有的舞蹈者都很有风度；万英是个学生并且是个舞蹈者。因此，有些学生很有风度。（个体域取人类全体组成的集合）
- (3) 每个喜欢步行的人都不喜欢骑自行车；每个人或者喜欢骑自行车或者喜欢乘汽车；有的人不喜欢乘汽车。所以有的人不喜欢步行。（个体域取人类全体组成的集合）
- (4) 每个旅客或者坐头等舱或者坐经济舱；每个旅客当且仅当他富裕时坐头等舱；有些旅客富裕但并非所有的旅客都富裕。因此有些旅客坐经济舱。(个体域取全体旅客组成的集合)