高等数学 A2

浙江理工大学期末试题汇编

五套精装版

（答案册）

学校：____________________

专业：____________________

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

目 录

1 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. A　2. C　3. B　4. C　5. B　6. D

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $\dfrac{x}{-R}=\dfrac{y-R}{0}=\dfrac{z-\frac{k}{2}\pi}{k}$；　2. $8\pi R^2$；　3. 4π；　4. $[4,6]$；

5. $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$;　6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(-\infty<x<+\infty)$.

三 、计算题

1、解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2\mathrm{x}\mathrm{e}^{\mathrm{x+y}}+(\mathrm{x}^2+y^2)e^{x+y}=(\mathrm{x}^2+2x+y^2)e^{x+y}$.　…………………（3 分）

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\mathrm{y}\mathrm{e}^{\mathrm{x+y}}+(\mathrm{x}^2+2x+y^2)e^{x+y}=(\mathrm{x}^2+2x+2y+y^2)e^{x+y}$.　…………（7 分）

2、解：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}}{\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot(-\frac{n}{n+1})}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1,$$

所以，由比值审敛法，该级数收敛。　……………………．（7 分）

3、解：曲面Σ的方程为$\Sigma\colon \mathrm{z}=\sqrt{9-\mathrm{x}^2-y^2}$, $(x,y)\in D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 8\}$。

∵　$\mathrm{z_x}=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，$\mathrm{z_y}=\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，

∴　$\sqrt{1+\mathrm{z}_{\mathrm{x}}^2+z_y^2}=\frac{3}{\sqrt{9-\mathrm{x}^2-y^2}}$.

从而，$\mathrm{S}=\iint_D\sqrt{1+\mathrm{z}_{\mathrm{x}}^2+z_y^2}dxdy=\iint_D\frac{3}{\sqrt{9-\mathrm{x}^2-y^2}}dxdy$　……………（4 分）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{3}{\sqrt{9-r^2}}rdr=12\pi$　……………（7 分）

4、解：添加辅助面$\Sigma\colon \mathrm{z}=0,\mathrm{x}^2+y^2\le a^2$，取下侧。记Ω 为曲面 S 和Σ所围成的空间区域，则由高斯公式，

$$\iint_{S\cup\Sigma}\mathrm{xdydz+ydzdx+zdxdy}=3\iiint_\Omega dv=3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3=2\pi a^3$$ ………（4 分）

而　$$\iint_\Sigma\mathrm{xdydz+ydzdx+zdxdy}=0$$

所以，$\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy=2\pi a^3$　………..（7 分）

5、解：令$P=3x^2y+8xy^2$，$\mathrm{Q}=x^3+8x^2y+12ye^y$。
因为

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}=3x^2+16xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$(3\mathrm{x}^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$是某个函数的全微分。 ……..（3 分）

$$\mathrm{u(x,y)}=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3\mathrm{x}^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$$

$$=\int_0^y(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$$

$$=\mathrm{x}^3y+4x^2y^2+12(y-1)\mathrm{e}^y+12$$ ……….（7 分）

6、解：*f(x)*满足 Dirichlet 定理条件，傅里叶系数计算如下：

$$\mathrm{a}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\left[\frac{2}{n^2\pi}x\cos nx\right]_0^{\pi}=(-1)^n\frac{2}{n^2},\mathrm{n}=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x^2\cos nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}+\frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n-1]\qquad n=1,2,\cdots$$ ………（5 分）

所以，

$$f(x)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^n\frac{2}{n^2}\cos nx+\left[(-1)^{\mathrm{n}+1}\frac{\pi}{n}+\frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n-1]\right]\sin nx\}$$

$$x\neq(2k+1)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$ ………（7 分）

四、证明题

1、证明：

$$\int_0^1dx\int_x^1f(x)f(y)dy=\int_0^1dy\int_0^yf(x)f(y)dx=\int_0^1\left[f(y)\int_0^yf(x)dx\right]dy$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^yf(x)dx\right]d\left[\int_0^yf(x)dx\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^yf(x)dx\right]_0^1=\frac{A^2}{2}。$$ ………（5 分）

2、证明：由 Green 公式

左边 $=\iint_D \mathrm{e}^{\sin y}+e^{-\sin x}dxdy$，右边 $=\iint_D \mathrm{e}^{-\sin y}+e^{\sin x}dxdy$。

由二重积分的对称性，$\iint_D \mathrm{e}^{\sin y}+e^{-\sin x}dxdy=\iint_D \mathrm{e}^{-\sin y}+e^{\sin x}dxdy$。

从而，$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$。 ………（5 分）

2 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. A　2. C　3. D　4. B　5. D　6. D

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $(0,\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{15}})$；　2. $8\pi R^2$；　3. $2\sqrt{2}$；　4. $\frac{64}{3}\pi$；　5. [4,6]；　6. 0 .

三 、计算题

1、 解：$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{1+x^3}dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{1+x^3}dy.$

$=\int_0^1\sqrt{1+x^3}\cdot x^2dx=\left[\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$ ……………………（7 分）

2、 解：令$f_x(x,y)=2x(2+y^2)=0$, $f_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0$,

得$f(x,y)$的驻点为$(0,\mathrm{e}^{-1})$。 …………………（3 分）

在$(0,\mathrm{e}^{-1})$点，

$$\mathrm{A}=f_{xx}(0,e^{-1})=2(2+y^2)|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}=2(2+\mathrm{e}^{-2})$$

$$\mathrm{B}=f_{xy}(0,e^{-1})=4xy|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}=0$$

$$C=f_{yy}(0,e^{-1})=(2x^2+\frac{1}{y})|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}=e$$

由于 $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2>0, A>0$，所以 f(x,y)在$(0,e^{-1})$取到极小值$-\mathrm{e}^{-1}$。……..（7 分）

3、 解：设 $\mathrm{A}=\iint_D f(x,y)dxdy$，则 $\mathrm{f(x,y)}=\mathrm{xy}+\mathrm{A}$ 。由题意，

$$\mathrm{A}=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D (xy+A)dxdy$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(xy+A)dy=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^5+Ax^2\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^6+\frac{1}{3}Ax^3\right]_0^1=\frac{1}{8}$$

从而，$f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$。 ……..（7 分）

4、 解：有向曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases}\mathrm{x}=2\cos\theta\\ y=3\sin\theta\end{cases}\quad\theta:0\to\pi$$

则 $\int_L(x^2+xy)dy=\int_0^\pi(4\cos^2\theta+6\cos\theta\sin\theta)\cdot3\cos\theta\,d\theta$ ……（4 分）

$$=12\int_0^\pi\cos^3\theta\,d\theta+18\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=12\int_0^\pi(1-\sin^2\theta)d\sin\theta+18\int_0^\pi\cos^2\theta\,d\sin\theta$$

$$= 12\left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\pi} - 18\cdot\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= 12$$ ……………..（7 分）

5、解：添加辅助面$\Sigma: z = 0, x^2 + y^2 \le a^2$，取下侧。记$\Omega$ 为曲面 S 和Σ所围成的空间区域，则由高斯公式，

$$\iint_{S\cup\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = 3\iiint_{\Omega} dv = 3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3 = 2\pi a^3$$ ………（4 分）

而 $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = 0$

所以，$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = 2\pi a^3$ ………..（7 分）

6、解：

$$f(x) = \frac{x}{2 + x - x^2} = \frac{x}{-(x-2)(x+1)}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{1+x} + \frac{2}{3}\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - (-1)^n\right)x^n \quad x \in (-1,1)$$ ……….（7 分）

四、证明题

1、证明：令$P = 2xy^3 - y^2\cos x$，$Q = 1 - 2y\sin x + 3x^2y^2$。

因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 - 2y\cos y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以，由 Green 公式，

$$\oint_L (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = 0$$

………（5 分）

2、证明：因为正项级数$\{x_n\}$单调增加且有上界，所以，存在一个常数 C，使得

$$x_n < x_{n+1} < C。$$

从而，$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}})$是正项系数。 …………（2 分）

又因为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x_k}{x_{k+1}}\right) = \frac{x_2 - x_1}{x_2} + \frac{x_3 - x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}$$

$$\le \frac{x_{n+1} - x_1}{x_2} \le \frac{C - x_1}{x_2}$$

所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}})$收敛。 ……………（5 分）

3 浙江理工大学 2016—2017 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1. D　　2. A　　3. C　　4. C　　5. D　　6. A

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1. -6　　2. 0　　3. 2

4. $\frac{1}{1+\ln\frac{z}{x}}$或$\frac{z}{y+z}$　　5. 1　　6. 2

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出文字说明及演算过程）

1.

把Ω投影到xOy面上得投影区域D_{xy}为由直线$x+2y=1$ 与两坐标轴围成的三角形 ....（2 分）

$\iiint_\Omega xdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}dy\int_0^{1-x-2y}xdz$ ....（4 分）

$=\frac{1}{48}$ . ...（6 分）

2.

解：$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots$ ....（2 分）

$\frac{1}{1+x^2}=1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+\dots$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ ....（4 分）

$x\in(-1,1)$ ....（6 分）

3.

设L_1为单位圆位于第一象限的部分。

$\int_L |y|ds=2\int_{L_1}|y|ds=2\int_{L_1}yds$ ....（2 分）

设$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

则$ds=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}d\theta=d\theta$ ....（4 分）

原式$=2\int_{L_1}yds$=$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=2$ ....(6 分）

4.

方法一：

把圆柱体表面分为三个部分：上半部分和侧面， ....（2 分）

分别则上下在xOy面上投影相同，侧面在xOy面上投影为零， ....（4 分）

在上半部分的积分互为相反数，侧面的积分为 0，所以积分值为 0. ....（6 分）

方法二：

设Ω为圆柱体闭域， ....（2 分）

由高斯公式：$\oiint_{\Sigma}(x-y)dxdy=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(x-y)}{\partial z}dv$ ....（4 分）

$=\iiint_{\Omega}0dv=0.$ ....（6 分）

5.

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$$ ....（2 分）

解得驻点为$(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$ ....（3 分）

再求二阶偏导数，

$f_{xx}(x,y)=6x+6,f_{xy}(x,y)=0,f_{yy}(x,y)=-6y+6.$ ....（4 分）

在点$(1,0)$处，$\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2=72>0$，且$\mathrm{A}>0$，故$(1,0)$为极小值点。

类似地，$(-3,2)$为极大值点，$(1,2),(-3,0)$都不是极值点。 ....（6 分）

四、证明题（本题共 2 小题，第 1 题 4 分，第 2 题 6 分，满分 10 分，应写出详细证明和计算过程）

1.

令$a_n=\frac{n}{3^{n-1}}$,

则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1$， ....（2 分）

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\frac{n}{3^{n-1}}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$ 收敛， ....（3 分）

故原级数绝对收敛。 ....（4 分）

2.

令$P(x,y)=2xy-y^4+3$，$Q(x,y)=x^2-4xy^3$，

则$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以曲线积分与路径无关。 ....（2 分）

$\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$

$=\int_{(1,0)}^{(2,0)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy+\int_{(2,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$

$=\int_1^2 3dx+\int_0^1(4-8y^3)dy$ ....（4 分）

$=5$ ....（6 分）

4 浙江理工大学 2016—2017 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1-6　B A A B B D

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

-1；　0；　2；　$\frac{y}{1-z}$；　$\sqrt{2}$；　$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出演算过程及文字说明）

1、$\mathrm{sh}x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty)$

2、原式=$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\rho^2}^4 zdz=\frac{64}{3}\pi$

3、设 D 为xOy面上的圆盘$x^2+y^2\le 1$，Σ_1是圆盘 D 下侧

原式=$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_{\Omega}3dv-\iint_D x^2dxdy=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi$

4、原式=$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2\theta\rho d\rho d\theta=\frac{3}{64}\pi^2$

5、幂函数的收敛区域为(-1,1)，则$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$，所以$s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx+s(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，$x\in(-1,1)$

四、证明题（本题共 2 小题，每题 5 分，满分 10 分，应写出详细证明和计算过程）

1、

令　$F(x,y,z)=f(x-ay,z-by)$, 则$F_x'(x,y,z)=f_1'$, $F_y'(x,y,z)=-af_1'-bf_2'$, $F_z'(x,y,z)=f_2'$，由于$aF_x'+F_y'+bF_z'=0$，因此曲面的切平面与方向向量为(a,1,b)的直线平行。

2、

因为正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$也为正项级数且收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)\ =0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)^2}{(a_n+b_n)}$，由比较审敛法的极限形式可知$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛

5 浙江理工大学 2015—2016 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1-6 B C C D C B

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1 $-\frac{2}{(x^2+y^2)^2}(x,y)$或$-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\vec{i}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}$　　2 $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

3 $\frac{4}{15}\pi$　　4 0　　5 $\frac{\sqrt{3}}{12}$　　6 $-\frac{1}{4}$

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出演算过程及文字说明）

1.（1）（比值）

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}=\frac{2}{3}<1$，故收敛。

（2）（加绝对值，比值）

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n+1}{3^n}}{\sin\frac{n}{3^{n-1}}}=\frac{1}{3}<1$，故绝对收敛（必收敛）。

2. $\begin{cases} f_x=(x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \\ f_y=(1+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \end{cases}$

得极值点$(1,-\frac{4}{3}),(-1,-\frac{2}{3})$.

又$A=f_{xx}=(\frac{x^3}{3}+2x^2+2x+y)e^{x+y}$

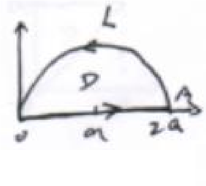
$B=f_{xy}=(\frac{x^3}{3}+x^2+y+1)e^{x+y}$

$C=f_{yy}=(\frac{x^3}{3}+y+2)e^{x+y}$

① $(1,-\frac{4}{3})$,　$AC-B^2>0, A>0.$　　故$(1,-\frac{4}{3})$为极小值点，极小值为$-e^{-\frac{1}{3}}$.

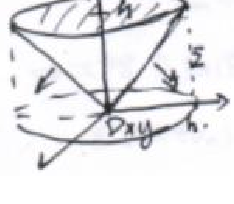
② $(-1,-\frac{2}{3})$,　$AC-B^2<0,$　　故$(-1,-\frac{2}{3})$不是极值点。

3. $I=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(3x+2y)dy=\frac{20}{3}$



4. $I=\oint_L \overrightarrow{OA}-\int\overrightarrow{OA}=\iint_D 2dxdy-0=\pi a^2$

5.计：Σ_1：$z=h$，上侧。



$I=\oiint_{\Sigma_1+\Sigma}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_\Omega(0+0+0)dv-\iint_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy$

$=-\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\rho^2\cdot\rho d\rho$

$=-\frac{1}{2}\times 2\pi\times\frac{h^4}{4}=-\frac{\pi}{4}h^4$

6. $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)dx=2(\pi^2+1)$，

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n\cdot 12}{n^2}$，　$b_n=0$

$\because n$是从 1 到$+\infty$，$\therefore$ 由公式得，$f(x)=\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\quad x\in(-\infty,+\infty)$

（因为f连续，所以f的傅里叶级数处处收敛到f）（此处只做简要步骤说明）

四、综合题（本题 8 分）

（1）$P=x+2y$，$Q=2x+y$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=2=\frac{\partial P}{\partial y}$

$u(x,y)=\int_0^x xdx+\int_0^y(2x+y)dy=\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}$

（2）令$F(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}-z$.

则 $\vec{n}|_{(1,1,4)}=(3,3,-1)$.

$\therefore$ 切平面方程为 $3(x-1)+3(y-1)-(z-3)=0$.

即 $3x+3y-z-3=0$

法线方程为 $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}$.

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1.

左$=\int_0^a dx\int_x^a e^{m(a-x)}f(x)dy=\int_0^a(a-x)\cdot e^{m(a-x)}f(x)dx=$右 .

2.

法一：$\because\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 也收敛（且为正项级数），　$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$.

又$\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(u_n+v_n)^2}{(u_n+v_n)}=\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$

由比较审敛法极限形式知，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$也收敛。

法二：$\because\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，　$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$.

即 $\exists N>0$，当$n\ge N$时，有$u_n+v_n<1$.

从而$(u_n+v_n)^2<u_n+v_n\ (n\ge N)$.

由比较审敛法知，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$收敛。