浙江理工大学 2020—2021 学年第二学期

《高等数学 B2》期中试卷（A）卷标准答案和评分标准

一、选择题

1.B 2. A 3. A 4. B 5. D 6. C

评分标准说明： 每题 4 分，错则扣全分

二、填空题

1. $x = y^2(1 + Ce^{\frac{1}{y}})$ 2. $\dfrac{ye^{-xy}}{e^z - 2}$. 3. $\dfrac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$

4. $2edx + edy$ 5. $y_t = C + (t-2)2^t$ 6. $\sin\dfrac{y}{x} = Cx$

评分标准说明： 每题 4 分，错则扣全分

三 、计算题（本题共五小题，满分 30 分）

1.解： $y'' - y = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

对应的齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ --------------- 3 分

通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10}\cos 2x$ --------------- 3 分

评分标准说明： 只写出答案，无步骤的，扣 4 分。

2. 解：方程两边对 x 求导，得 $2x + y' + \dfrac{C}{2\sqrt{y}}y' = 0$ --------------- 2 分

消除方程组 $\begin{cases} 2x + y' + \dfrac{C}{2\sqrt{y}}y' = 0 \\ x^2 + y + C\sqrt{y} = 0 \end{cases}$ 中的常数 C--------------- 2 分

得到 $(y - x^2)y' + 4xy = 0$ --------------- 2 分

评分标准说明： 步骤正确，答案不对，扣 2 分

3 解:

$f_x = y\cos(xy)\cdot y + \dfrac{1-y}{1+x^2}$ --------------- 2 分

$f_y = \sin(xy) + xy\cos(xy) - \arctan x + 2e^{2y}$ -------------- 2 分

将 $x=1,\ y=0$ 代入上式，得 $f_x(1,0)=\frac{1}{2},\ f_y(1,0)=2-\frac{\pi}{4}$ -------------- 2 分

评分标准说明： **最后结果错了一个，扣 1 分。**

4 解： $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2xe^y}{1+x^4e^{2y}},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2e^y}{1+x^4e^{2y}}$ -------------- 2 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2e^y-6x^4e^{3y}}{(1+x^4e^{2y})^2}$$

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2e^y-x^6e^{3y}}{(1+x^4e^{2y})^2}$ -------------- 4 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{2xe^y-2x^5e^{3y}}{(1+x^4e^{2y})^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

评分标准说明： **没有计算 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 或者 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$，并没写 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$，扣 2 分。**

5 解：特征方程 $\lambda^2+2\lambda+9=0$，特征根 $\lambda=-1\pm 2\sqrt{2}i$. ------------- 1 分

所以齐次方程得通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos 2\sqrt{2}x+C_2\sin 2\sqrt{2}x)$ ------------- 2 分

因为-1 不是特征根，设特解为 $y = Ae^{ix}$，代入得，$A=1$. ------------- 2 分

所以，原方程的通解为 $y=e^{-x}(1+C_1\cos 2\sqrt{2}x+C_2\sin 2\sqrt{2}x)$.------------- 1 分

评分标准说明： **没写“C_1，C_2”扣 1 分。**

四、综合题（本题共两小题，满分 14 分）

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1(x+y,\ f(x,y))+f_2(x+y,\ f(x,y))\cdot f_1(x,y)$ ----------- 1 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}(x+y,\ f(x,y))+f_{12}(x+y,\ f(x,y))\cdot f_2(x,y)+f_{12}(x,y)\cdot f_2(x+y,\ f(x,y))$$
$$+f_1(x,y)[f_{12}(x+y,\ f(x,y))+f_{22}(x+y,\ f(x,y)\cdot f_2(x,y)]$$

----------- 4 分

由题意知 $f_1(1,1)=0,\ f_2(1,1)=0$

所以$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}|_{(1,1)} = f_{11}(2,2) + f_2(2,2)\ f_{12}(1,1)$ ------------ 2 分

2. 解：$F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$ ------------ 1 分

由 $\begin{cases} F_x = y + 2\lambda x = 0 \\ F_y = x + 2z + 2\lambda y = 0 \\ F_z = 2y + 2\lambda z = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 \end{cases}$ ------------ 3 分

得可能的最值点为

$A(1, \sqrt{5}, 2), B(-1, \sqrt{5}, 2), C(1, -\sqrt{5}, 2), D(-1, -\sqrt{5}, 2)$
$E(2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), F(-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ ------------ 1 分

因为在 A，D 点处$u = 5\sqrt{5}$，在 B,C 点处$u = -5\sqrt{5}$，在 E,F 点处$u = 0$

所以$u_{\max} = 5\sqrt{5}, u_{\min} = -5\sqrt{5}$ ------------ 2 分

评分标准说明：第 2 题没写出所有可能最值点扣 1 分。

五、证明题（本题共两小题，满分 8 分）

1. 证：令$y = kx^2$ ------------ 1 分

则$\lim\limits_{x \to 0, y \to 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \frac{k}{1 + k^2}$与$k$有关，所以极限不存在 ------------ 3 分

2. 证：因为$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2} e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2} e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$ ------------ 2 分

所以$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})} = 2z$ ------------ 2 分

评分标准说明：第 1 题用其他途径得到极限随着 k 变化所以不存在也可。