离散数学概论

第四章 关系与函数

课程QQ号： **689423416**
金耀 数字媒体技术系
fool1025@163.com
13857104418

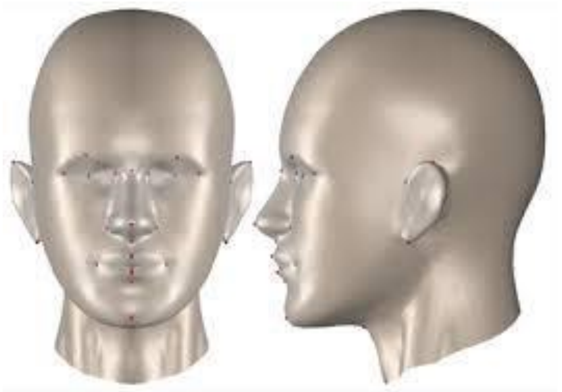
- 4.1 关系
- 4.2 函数

关系——生活中的关系

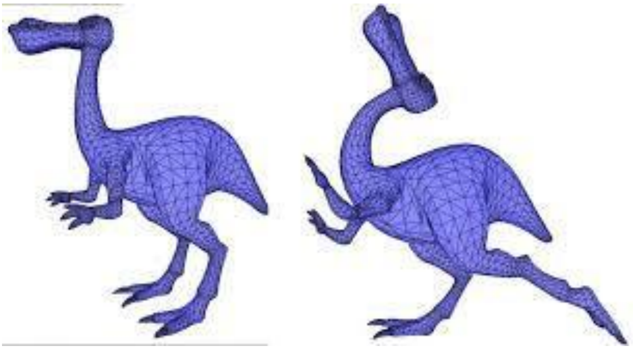
- 朋友关系 、 师生同学朋友关系 、 师生同学…

- 关系：人与人之间，人与事物之间，事物与事物之间的相互联系。
- 规律：自然界和社会诸现象之间必然、本质、稳定和反复出现的关系。

关系 —— 几何变换



刚体变换



等距变换

相似变换

拓扑变换

关系——机器学习

关系有什么特点？

- **4.1.1 关系概念**
- **4.1.2 关系表示方法**
- **4.1.3 关系运算**
- **4.1.4 关系的性质**
- **4.1.5 关系闭包**
- **4.1.6 等价关系**
- **4.1.7 偏序关系**

本讲主要内容

- 有序对
- 笛卡儿积及其性质
- 二元关系的定义

有序对

定义：由两个客体x和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为**有序对**，记作$<x, y>$.

实例：点的直角坐标 (3,–4)

有序对性质

有序性 $<x, y> \neq <y, x>$ （当$x \neq y$时）

$<x, y>$ 与 $<u, v>$ **相等**的充分必要条件是

$$<x, y>=<u, v> \Leftrightarrow x=u \wedge y=v$$

例1 $<2, x+5> = <3y-4, y>$，求 x, y.

解 $3y-4 = 2, x+5 = y \Rightarrow y = 2, x = -3$

有序 n 元组

定义：一个有序n ($n\geq 3$) 元组 $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ 是一个有序对，其中第一个元素是一个有序 n-1元组，即：

$$<x_1, x_2, \ldots, x_n> = < <x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}>, x_n>$$

当 n=1时, $<x>$ 形式上可以看成有序 1 元组.

实例 n 维向量是有序 n元组.

定义 设A,B为集合，A与B 的**笛卡儿积**记作$A\times B$，即$A\times B$

$$=\{ <x, y> \mid x\in A \wedge y\in B \}$$

例2 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a, b, c\}$

$A\times B=$ $\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>, <3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A=$ $\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,<a,3>, <b,3>,<c,3>\}$

$A=\{\varnothing\}$, $P(A)\times A=$ $\{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

笛卡儿积的性质

不适合交换律 $A \times B \neq B \times A \quad (A \neq B,\ A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing)$

不适合结合律 $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C) \quad (A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing)$

对于并或交运算满足分配律

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

笛卡儿积的性质

若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.

$$A\times\varnothing=\varnothing\times B=\varnothing$$

若$|A|=m$, $|B|=n$, 则 $|A\times B|=mn$.

性质的证明

证明： $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取： $\langle x, y\rangle$

$$
\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle \in A\times(B\cup C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\\
&\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times B\vee\langle x,y\rangle\in A\times C\\
&\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)
\end{aligned}
$$

所以有： $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

例题

例 (1) 证明 $A=B \wedge C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C=B\times D$是否推出 $A=B \wedge C=D$？为什么 ？

解 (1) 任取$\langle x, y\rangle$

$$\langle x, y\rangle \in A\times C \Leftrightarrow x\in A \wedge y\in C$$

$$\Leftrightarrow x\in B \wedge y\in D \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in B\times D$$

(2) 不一定. 反例如下：

$A=\{1\}$， $B=\{2\}$, $C=D=\varnothing$, 则 $A\times C=B\times D$ 但是 $A\neq B$.

二元关系的定义

定义 如果一个集合满足以下条件之一：

（1）集合非空，且它的元素都是有序对

（2）集合是空集

则称该集合为一个**二元关系**，简称为**关系**，记作R.

如$\langle x, y\rangle \in R$，可记作 $x\,R\,y$；

如$\langle x, y\rangle \notin R$，则记作 $x \not R\, y$.

二元关系的定义

实例： $R=\{<1, 2>, <a, b>\}$, $S=\{<1, 2>, a, b\}$.

R是二元关系，当a, b不是有序对时， S不是二元关系.

根据上面的记法， 可以写 $1R2$, aRb, $a \not R c$ 等.

从A到B的关系与A上的关系

定义 设A,B为集合, $A\times B$的任何子集所定义的二元系叫做**从A到B的二元关系**, 当$A=B$时则叫作 **A上的二元关系**.

例4 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, $R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$.

那么 R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B的二元关系, R_3和R_4同时也是 A上的二元关系.

从A到B的关系与A上的关系

定义 设A,B为集合,$A\times B$的任何子集所定义的二元系叫做**从A到B的二元关系**, 当$A=B$时则叫做 **A上的二元关系**.

例4 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, $R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$.

那么 R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B的二元关系, R_3和R_4同时也是 A上的二元关系.

计数

$|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$的子集有 2^{n^2} 个. 所以 A上有 2^{n^2} 个不同的二元关系.

例如 $|A|=3$, 则 A上有512个不同的二元关系.

A上重要关系的实例

设 A 为任意集合，

$\varnothing$是 A 上的关系，称为**空关系**

E_A, I_A 分别称为**全域关系**与**恒等关系**，定义如下：

$$E_A=\{<x, y>|\ x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$$

$$I_A=\{<x, x>|x\in A\}$$

例如, $A=\{1,2\}$, 则

$$E_A=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$$

$$I_A=\{<1,1>,<2,2>\}$$

A上重要关系的实例（续）

小于等于关系 L_A, 整除关系D_A, 包含关系$R_{\subseteq}$定义：

$L_A=\{<x, y>|\ x, y\in A \wedge x\le y\}$, $A\subseteq$R， R为实数集合

$D_B=\{<x, y>|\ x,y\in B \wedge x$整除$y\}$,

$B\subseteq Z^*$, Z^*为非0整数集

$R_{\subseteq}=\{<x,y>|\ x, y\in A \wedge x\subseteq y\}$, A是集合族.

类似的还可以定义大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等等.

实例

例如 $A = \{1, 2, 3\}$, $B =\{a, b\}$, 则

$L_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

$D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

$A=P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a, b\}\}$, 则 A上的包含关系是

$R_{\subseteq}=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a, b\}>,<\{a\},\{a\}>,$
$<\{a\},\{a, b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a, b\}>,<\{a, b\},\{a, b\}>\}$

- 4.1.1 关系概念
- 4.1.2 关系表示方法
- 4.1.3 关系运算
- 4.1.4 关系的性质
- 4.1.5 关系闭包
- 4.1.6 等价关系
- 4.1.7 偏序关系

关系的表示方法

表示方式：关系的集合表达式、关系矩阵、关系图

关系矩阵：若$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\, r_{ij} \,]_{m\times n}$，其中 $r_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle a_i, b_j\rangle \in R$.

关系图：若$A=$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是从$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=\langle A, R\rangle$，其中$A$为结点集，$R$为边集.如果$\langle x_i,x_j\rangle$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

注意：A, B为有穷集，关系矩阵适于表示从A到B的关系或者A上的关系，关系图适于表示A上的关系

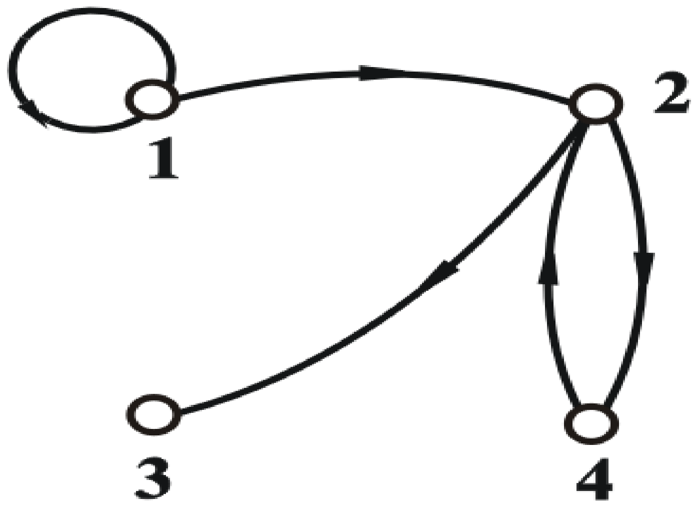
实例

$A=\{1,2,3,4\}$,

$R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$,

R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$



- 4.1.1 关系概念
- 4.1.2 关系表示方法
- **4.1.3 关系运算**
- 4.1.4 关系的性质
- 4.1.5 关系闭包
- 4.1.6 等价关系
- 4.1.7 偏序关系

本讲主要内容

- 基本运算定义
  - 定义域、值域、域
  - 逆、合成
  - 基本运算的性质
- 幂运算
  - 定义
  - 求法
  - 性质

关系的基本运算定义

定义域、值域 和 域

$$\mathrm{dom}R = \{\, x \mid \exists y\, (\langle x, y\rangle \in R) \,\}$$

$$\mathrm{ran}R = \{\, y \mid \exists x\, (\langle x, y\rangle \in R) \,\}$$

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

例1 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 则

$\mathrm{dom}R=$ $\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=$ $\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=$ $\{1, 2, 3, 4\}$

关系的基本运算定义（续）

逆与合成（左复合）

$$R^{-1} = \{<y, x> \mid <x, y> \in R\}$$

$$R \circ S = |<x, z> \mid \exists\, y\, (<x, y> \in S \land <y, z> \in R)\ \}$$

例2 $R=\{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$S=\{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R^{-1}=$ $\{<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>\}$

$S \circ R =$ $\{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

$R \circ S =$ $\{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$

第一种方法：图示法

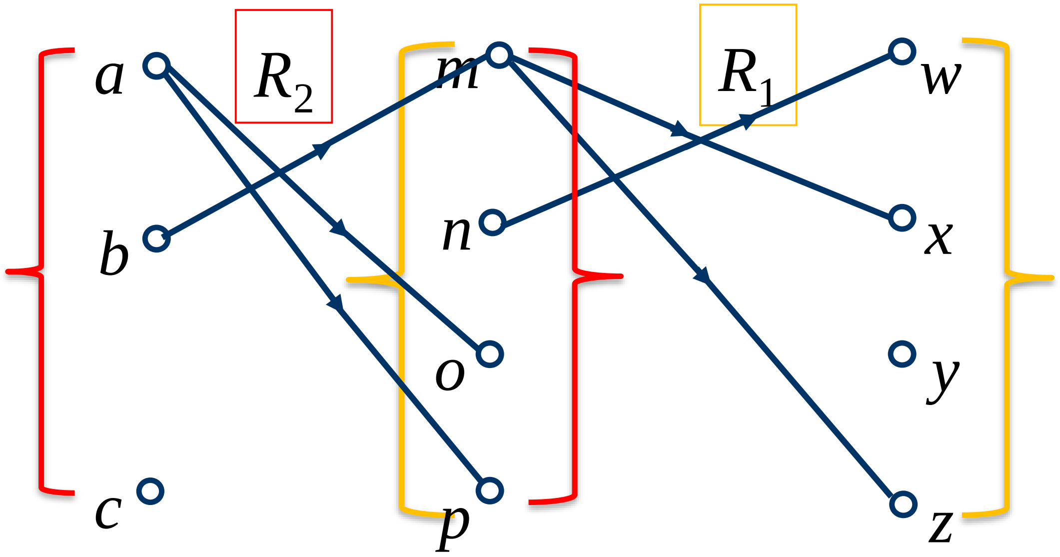
利用图示（不是关系图）方法求合成

- 关系R_2是集合$\{a, b, c\}$到集合$\{m, n, o, p\}$的二元关系，且$R_2=\{<a, p>, <a, o>, <b, m>\}$。
- 关系R_1是集合$\{m, n\}$到集合$\{w, x, y, z\}$的二元关系，且$R_1 =\{<m, x>, <m, z>, <n, w>\}$。
- 计算$R_1 \circ R_2$

第一种方法：图示法

利用图示（不是关系图）方法求合成

- 关系R_2：{a, b, c}到{m, n, o, p}，且R_2={<a, p>，<a, o>，<b, m>}。
- 关系R_1：{m, n}到{w, x, y, z}，且R_1={<m, x>，<m, z>，<n, w>}。
- 计算$R_1 \circ R_2$



第二种方法：关系矩阵乘法

利用图示（不是关系图）方法求合成

- 关系R_2：$\{a, b, c\}$到$\{m, n, o, p\}$，且$R_2=\{<a, p>, <a, o>, <b, m>\}$。
- 关系R_1：$\{m, n\}$到$\{w, x, y, z\}$，且$R_1=\{<m, x>, <m, z>, <n, w>\}$。
- 计算$R_1 \circ R_2$

$$M_{R_2} \times M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

关系基本运算的性质

设F是任意的关系，则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x, y>$，由逆的定义有

$$<x, y>\in(F^{-1})^{-1}\Leftrightarrow <y, x>\in F^{-1}\Leftrightarrow <x, y>\in F$$

所以有 $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) 任取x，

$$x\in \mathrm{dom}F^{-1}\Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \exists y(<y,x>\in F)\Leftrightarrow x\in \mathrm{ran}F$$

所以有$\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$. 同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

关系基本运算的性质（续）

设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1}= G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x,y>$,

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in H \land <t, y>\in F\circ G)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(\exists s\,(<x, t>\in H \land <t, s> \in G \land <s, y>\in F)$

$\Leftrightarrow \exists t\,\exists s\,(<s, y>\in F \land <x, t>\in H \land <t, s> \in G)$

$\Leftrightarrow \exists s\,(<s, y>\in F \land \exists t\,(<x, t>\in H \land <t, s> \in G))$

$\Leftrightarrow \exists s\,(< s, y>\in F \land <x, s>\in G\circ H)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in F\circ(G\circ H)$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

关系基本运算的性质（续）

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

任取$<x, y>$,

$$<x, y> \in (F\circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <y, x> \in F\circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<y, t> \in G \land <t, x> \in\ )$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t> \in F^{-1} \land <t, y> \in G^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <x, y> \in G^{-1}\circ F^{-1}$$

所以 $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

A上关系的幂运算

设R为A上的关系, n为自然数, 则 R 的**n次幂**定义为：

(1) $R^0=\{<x, x> \mid x \in A\}=I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意：

对于A上的任何关系R_1和R_2都有

$$R_1{}^0 = R_2{}^0 = I_A$$

对于A上的任何关系 R 都有

$$R^1 = R$$

幂的求法

对于集合表示的关系R，计算 R^n 就是n个R复合. 矩阵表示就是n个矩阵相乘, 其中相加采用逻辑加.

例3 设$A=\{a, b, c, d\}$, $R=\{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>\}$, 求$R$的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R与R^2的关系矩阵分别为

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

幂的求法（续）

同理，$R^0=I_A$, R^3和R^4的矩阵分别是：

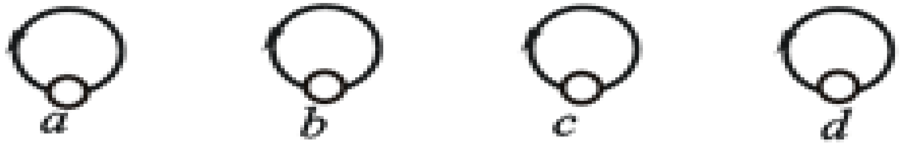
$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到：

$$R^2=R^4=R^6=\ldots,\quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

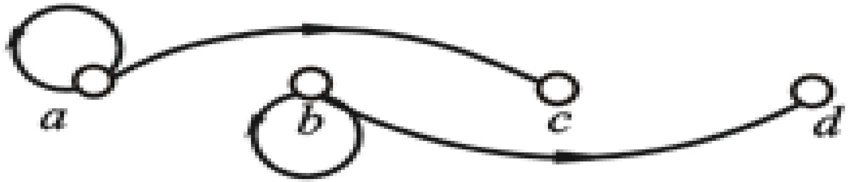
幂的求法（续）

$R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots$的**关系图**如下图所示：

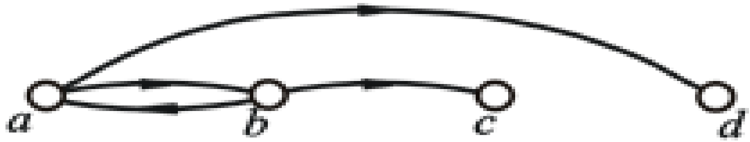


R^0

$R^1=R$



$R^2=R^4$



$R^3=R^5$

幂运算的性质

定理 设A为n元集, R是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证 R为A上的关系, 由于$|A|=n$, A上的不同关系只有 2^{n^2} 个.

当列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, , \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s=R^t$.

幂运算的性质（续）

定理 设 R 是 A 上的关系, $m, n \in \mathrm{N}$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的 $m \in N$, 施归纳于 n.

若 $n=0$, 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1},$$

所以对一切 $m, n \in \mathrm{N}$ 有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

幂运算的性质（续）

(接上页证明)

(2) 对于任意给定的 $m\in N$, 施归纳于n.

若n=0, 则有

$$(R^m)^0=I_A=R^0=R^{m\times 0}$$

假设 $(R^m)^n=R^{mn}$, 则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n\circ R^m = (R^{mn})\circ R^m = R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切 $m, n\in \mathrm{N}$ 有 $(R^m)^n=R^{mn}$.

- 4.1.1 关系概念
- 4.1.2 关系表示方法
- 4.1.3 关系运算
- **4.1.4 关系的性质**
- 4.1.5 关系闭包
- 4.1.6 等价关系
- 4.1.7 偏序关系

本讲主要内容

- 自反性
- 反自反性
- 对称性
- 反对称性
- 传递性

自反性与反自反性

定义 设R为A上的关系,

(1) 若$\forall x(x\in A\rightarrow <x, x>\in R)$, 则称$R$在$A$上是**自反**的.

(2) 若$\forall x(x\in A\rightarrow <x, x>\notin R)$, 则称$R$在$A$上是**反自反**的.

实例

例1　$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系，　其中

$R_1 = \{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2 = \{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$

$R_3 = \{<1,3>\}$

R_2自反，

R_3反自反，

R_1既不是自反也不是反自反的.

对称性与反对称性

定义 设R为A上的关系,

(1) 若$\forall x \forall y(x, y \in A \land \langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$, 则称$R$为$A$上**对称**的关系.

(2) 若$\forall x \forall y(x, y \in A \land \langle x, y\rangle \in R \land \langle y, x\rangle \in R \rightarrow x=y)$, 则称$R$为$A$上的**反对称**关系.

实例

例2 设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系，

其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$， $R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}$， $R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

R_1 对称、反对称.

R_2 对称，不反对称.

R_3 反对称，不对称.

R_4 不对称、也不反对称.

传递性

定义 设R为A上的关系, 若

$$\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\land \langle x,y\rangle\in R\land \langle y,z\rangle\in R\rightarrow \langle x,z\rangle\in R),$$

则称R是A上的**传递**关系.

实例

例3 设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$$

$$R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$$

$$R_3=\{<1,3>\}$$

R_1 和 R_3 是A上的传递关系.

R_2不是A上的传递关系.

关系性质的充要条件

设R为A上的关系, 则

(1) R在A上**自反**当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R在A上**反自反**当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R在A上**对称**当且仅当 $R = R^{-1}$

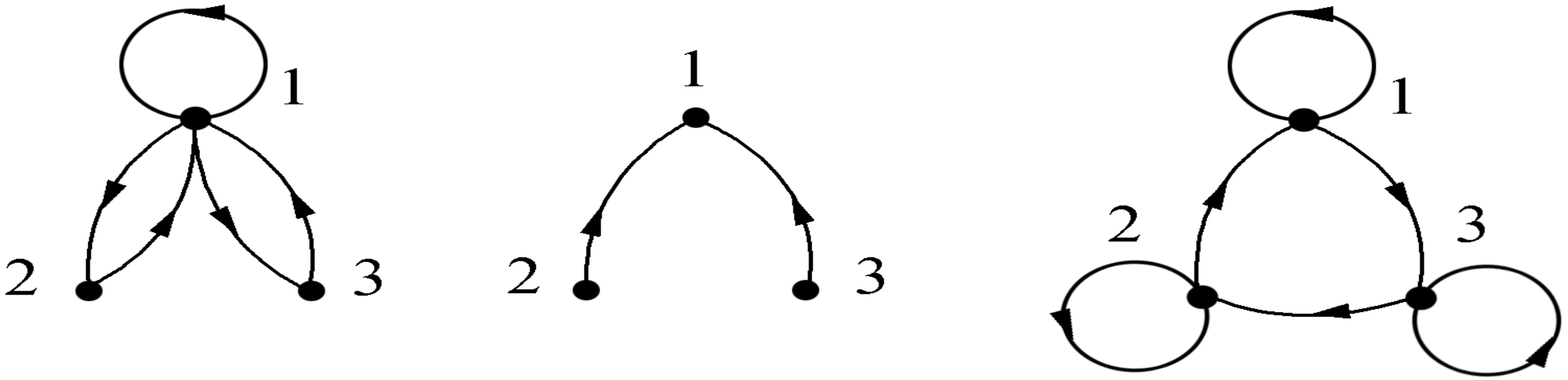
(4) R在A上**反对称**当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R在A上**传递**当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

关系性质判别

	自反	反自反	对称	反对称	传递
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	对M^2中1所在位置, M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边, 是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 连通到x_k, 则从x_i到 x_k 有边

例8 判断下图中关系的性质，并说明理由.



(a) (b) (c)

(a)不自反也不反自反；对称，不反对称；不传递.

(b)反自反，不是自反的；反对称，不是对称的；是传递的.

(c)自反，不反自反；反对称，不是对称；不传递.

自反性证明

证明模式 证明R在A上**自反**

任取x,

$$x \in A \;\Rightarrow\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;\Rightarrow\; \langle x, x\rangle \in R$$

前提 推理过程 结论

例4 证明若 $I_A \subseteq R$，则 R在A上自反.

证 任取x,

$$x \in A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$$

因此 R 在 A 上是**自反**的.

对称性证明

证明模式　证明R在A上**对称**

任取$<x, y>$

$<x, y>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <y, x>\in R$

前提　　　推理过程　　　结论

例5　证明若 $R=R^{-1}$，则R在A上对称.

证　任取$<x, y>$

$$<x, y>\in R \Rightarrow <y, x>\in R^{-1} \Rightarrow <x, y>\in R$$

因此 R 在 A 上是**对称**的.

反对称性证明

证明模式 证明R在A上**反对称**

任取$<x, y>$

$<x, y>\in R \wedge <y, x>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x=y$

前提　　推理过程　　结论

例6 证明若 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$，则$R$在$A$上反对称.

证 任取$<x,y>$

$<x,y>\in R \wedge <y, x>\in R \Rightarrow <x,y>\in R \wedge <x,y>\in R^{-1}$

$\Rightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in I_A \Rightarrow x=y$

因此 R 在 A 上是**反对称**的.

传递性证明

证明模式　证明R在A上传递

任取$<x, y>$，$<y, z>$

$<x, y> \in R \wedge <y, z> \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <x, z> \in R$

前提　　推理过程　　结论

例7　证明若 $R \circ R \subseteq R$，则R在A上传递.

证　任取 $<x, y>$，$<y, z>$

$$<x, y> \in R \wedge <y, z> \in R \Rightarrow <x, z> \in R \circ R \Rightarrow <x, z> \in R$$

因此 R 在 A 上是传递的.

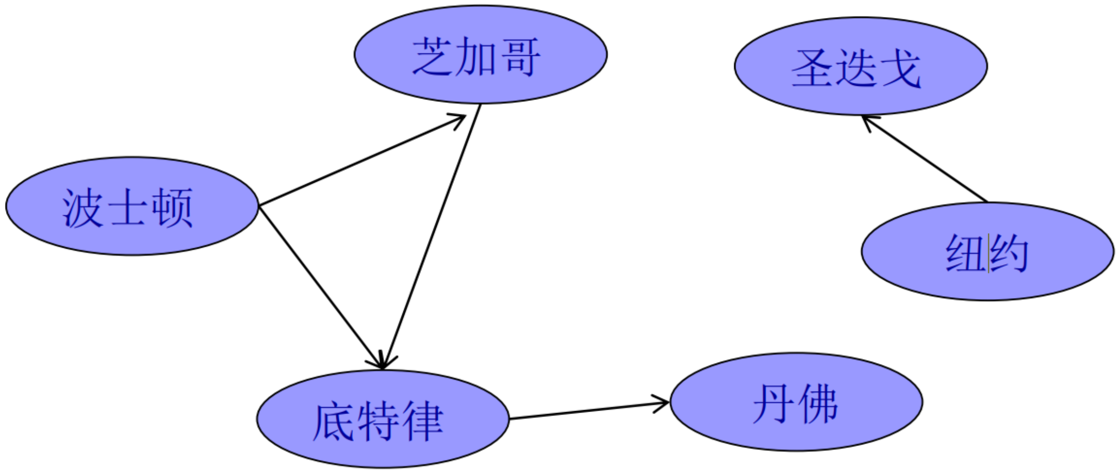
- 4.1.1 关系概念
- 4.1.2 关系表示方法
- 4.1.3 关系运算
- 4.1.4 关系的性质
- 4.1.5 关系闭包
- 4.1.6 等价关系
- 4.1.7 偏序关系

本讲主要内容

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
  - 集合表示
  - 矩阵表示
  - 图表示
- 闭包的性质

一个例子

❖ 某计算机网络在波士顿、芝加哥、丹佛、底特律、纽约和圣迭戈设有网络中心，其中部分城市有单向通话线（如图），如何确定从一个中心到另一个中心存在相连的通话线路？



闭包定义

定义 设R是非空集合A上的关系, R的**自反（对称或传递）闭包**是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

（1）R'是自反的（对称的或传递的）

（2）$R \subseteq R'$

（3）对A上任何包含R的自反（对称或传递）关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$, 对称闭包记作 $s(R)$, 传递闭包记作 $t(R)$.

闭包的构造方法

定理 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R) = R \cup R^0$

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

(3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

说明:

- 对于有穷集合A ($|A|=n$) 上的关系, (3)中的并最多不超过R^n.
- 若 R是自反的, 则$r(R)=R$; 若R是对称的, 则 $s(R)=R$; 若R是传递的, 则: $t(R)=R$.

闭包的构造方法（续）

设关系R，$r(R)$，$s(R)$，$t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s和 M_t, 则

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \ldots$$

E 是和 M 同阶的单位矩阵, M'是 M 的转置矩阵.

注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

闭包的构造方法（续）

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t，则G_r, G_s, G_t的顶点集与G 的顶点集相等. 除了G 的边以外, 以下述方法添加新边:

考察G的每个顶点，如果没有环就**加**上一个**环**，最终得到G_r .

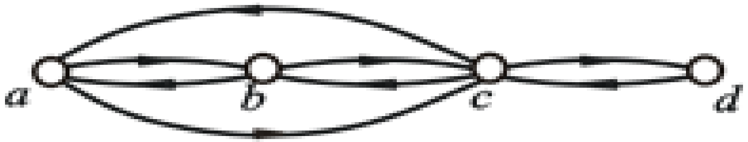
考察G的每条边，如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边，$i \neq j$，则在G中**加**一条 x_j 到 x_i 的**反方向边**，最终得到G_s.考察G的每个顶点 x_i，找从 x_i 出发的每一条路径，如果从 x_i 到路径中任何结点 x_j 没有边，就**加上这条边**. 当检查完所有的顶点后就得到图G_t .

实例

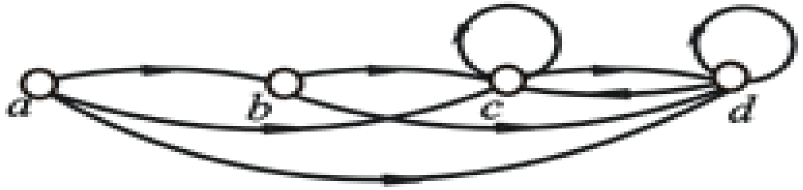
例1 设$A=\{a, b, c, d\}$, $R=\{\langle a, b\rangle,\langle a, c\rangle,\langle b, c\rangle,\langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle\}$, R和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.

R

$r(R)$

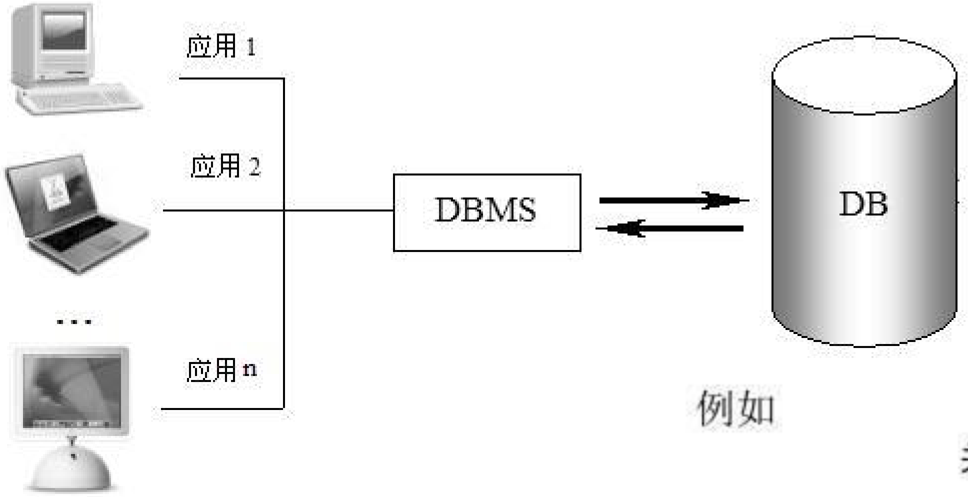


$s(R)$



$t(R)$

关系的应用——关系数据库



例如

关系名

字段

关系（二维表）

学生

学号	姓名	性别	专业代号
990101	章三	男	102001
990102	李辉	男	102001
990103	黄化	女	102002

记录

笛卡尔积示例

D1=导师集合Supervisor={张清枚，刘逸}
D2=专业集合Speciality={计算机，机械}
D3=研究生集合Postgraduate={李勇，刘琛，王敏}

D1×D2×D3={
(张清枚，计算机，李勇), (张清枚，计算机，刘琛), (张清枚，计算机，王敏),
(张清枚，机械，李勇), (张清枚，机械，刘琛), (张清枚，机械，王敏),
(刘逸，计算机，李勇), (刘逸，计算机，刘琛), (刘逸，计算机，王敏),
(刘逸，机械，李勇), (刘逸，机械，刘琛), (刘逸，机械，王敏)}

D1×D2×D3的基数M = 2 ×2×3 = 12（共有12个元组）

笛卡尔积的表格表示

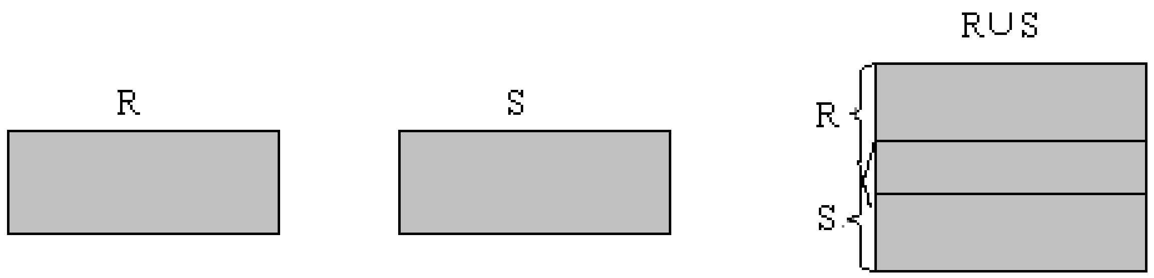
Supervisor	Speciality	Postgraduate
张清枚	计算机	李勇
张清枚	计算机	刘琛
张清枚	计算机	王敏
张清枚	机械	李勇
张清枚	机械	刘琛
张清枚	机械	王敏
刘逸	计算机	李勇
刘逸	计算机	刘琛
刘逸	计算机	王敏
刘逸	机械	李勇
刘逸	机械	刘琛
刘逸	机械	王敏

关系的运算

- 传统的集合运算：
  - 并、差、交、广义笛卡尔积
- 专门的关系运算：
  - 选择、投影、连接、除

例：并运算

关系R与关系S有相同的属性，并且对应属性有相同的域，则关系R和S的并将产生一个包含R、S中所有不同元组的新关系，记作：$R \cup S$



例：并运算（续）

在实际运用中，并运算可实现插入新元组的操作。

R

A	B	C
a_1	b_1	c_1
a_1	b_2	c_2
a_2	b_2	c_1

S

A	B	C
a_1	b_2	c_2
a_1	b_3	c_2
a_2	b_2	c_1

$R \cup S$

A	B	C
a_1	b_1	c_1
a_1	b_2	c_2
a_2	b_2	c_1
a_1	b_3	c_2

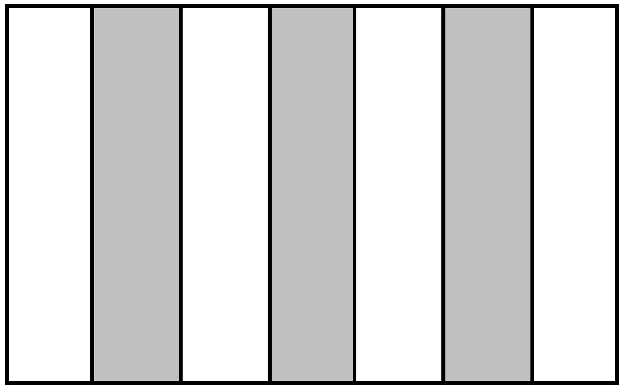
例：投影运算

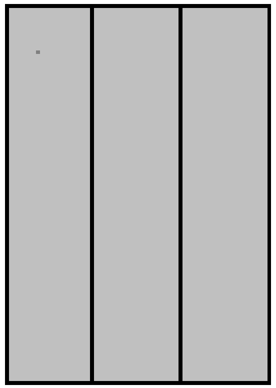
❖ 投影是选择关系R中的若干属性组成新的关系，并去掉了重复元组，是对关系的属性进行筛选，记作$\Pi_A(R)$。其中A为关系R的属性列表，各属性间用逗号分隔。

❖ 投影运算的结果往往比原有关系属性少，或改变原有关系的属性顺序，或改变原有关系的属性名等，投影运算结果不仅消除了原关系中的某些列，而且还要去掉重复元组。

例：投影运算（续）

投影运算示意图





编号	系名	姓名	性别	出生年月
03004	计算机系	韩东	男	1979.10.01
02001	外语系	刘玲	女	1979.08.02
03001	计算机系	王冬	男	1978.08.07
04001	数学系	姜瑞青	男	1981.06.02
05001	电子工程系	翁超雷	男	1980.08.10
05002	电子工程系	田莱莉	女	1976.09.02
03002	计算机系	宋江明	男	1981.01.03
03003	计算机系	邵林文贺	女	1979.05.04

系名	姓名
计算机系	韩东
外语系	刘玲
计算机系	王冬
数学系	姜瑞青
电子工程系	翁超雷
电子工程系	田莱莉
计算机系	宋江明
计算机系	邵林文贺

例：查询学生所在系及姓名

Π系名，姓名(student)

Sql查询命令：

Select系名，姓名from student

课后习题

- 1, 3, 7, 8
- 答题派如图

一、简答题

1. 4.2 设$S=\{1,2,3,4\}$，R为S上的关系，其关系矩阵是 (25)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则

(1) R的关系表达式是A。

(2) $domR=B, ranR=C$。

(3) $R\circ R$中有D个有序对。

(4) R^{-1}的关系图有E个环。

供选择的答案

A: ① $\{<1,1>,<1,2>,<1,4>,<4,1>,<4,3>\}$;

②$\{<1,1>,<1,4>,<2,1>,<4,1>,<3,4>\}$.

B,C: ③ $\{1,2,3,4\}$; ④ $\{1,2,4\}$; ⑤ $\{1,4\}$; ⑥ $\{1,3,4\}$.

D,E: ⑦ 1; ⑧ 3; ⑨ 6; ⑩ 7.

2. 4.11 设$S=\{1,2,\ldots,6\}$，下面各式定义的R都是S上的关系，分别列出R的元素。 (25)

(1) $R=\{<x,y>|x,y\in S\wedge x|y\}$.

(2) $R=\{<x,y>|x,y\in S\wedge x\text{是}y\text{的倍数}\}$.

(3) $R=\{<x,y>|x,y\in S\wedge(x-y)^2\in S\}$.

(4) $R=\{<x,y>|x,y\in S\wedge x/y\text{是素数}\}$.

3. 4.12 设$S=\{1,2,3,...,10\}$，定义S上的关系 (25)

$R=\{<x,y>|x,y\in S\wedge x+y=10\}$，$R$具有哪些性质?

4. 4.13 $S=\{a,b,c,d\}, R_1, R_2$ 为S上的关系， (25)

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,d>\}$,

$R_2=\{<a,d>,<b,c>,<b,d>,<c,b>\}$.

求$R_1\circ R_2, R_2\circ R_1, R_1^2, R_2^3$.