高等数学 A2

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 五套精装版）

学校：____________________

专业：____________________

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

（此试卷为 2021 年第二版）

目录

1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷.................................... 1
2 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷.....................................4
3 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷.................................... 4
4 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷.....................................7
5 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷.................................. 10
6 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷..................................12

资料说明

试卷整理人：张创琦

版次：2021 年 8 月 9 日 第二版

微信公众号：创琦杂谈

QQ 号：1020238657

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）：749060380

创琦杂谈大学数学学习交流群（QQ 群）：967276102

（此套试卷仅供需要进行 2020-2021 高数 A2 补考的同学使用，之后我们会提供新版本）

（本次共更新了五套精装版、1-10 套的版本和 11-22 套的版本，共 3 个版本，如有其它版本的需要请联系张创琦本人）

1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 C　2 D　3 A　4 B　5 C　6 B

二 填空题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1 $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$　2 $\frac{e}{\sqrt{2}}$　3 $\frac{4}{3}$

4 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$　5 $2S$　6 $\frac{3}{2}$

三 计算题（共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

1

解. 切线方程：

$$\begin{cases} (-2)(x-1)+2(y-1)+4(z-1)=0 \\ (x-1)-2(y-1)+3(z-1)=0 \end{cases}$$

…………………………………………………………4'

即：

$$\begin{cases} x-y-2z=-2 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$$

切线方向为 $(1,-1,-2)\times(1,-2,3)=(-7,-5,-1)$, ……………………1'

故法平面为：

$$-7(x-1)-5(y-1)-(z-1)=0.$$

…………………………………………………………1'

□

2

解. 原问题等价于求函数 $g(x,y)=x^2+y^2$ 在约束 $x+y=1$ 下的条件极值。考虑 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$. ……………………2'

极值点 (x,y) 必满足下面的方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x+y-1=0 \end{cases} \tag{1}$$

…………………………………………………………2'

由上面的方程组解得：$x=y=\frac{1}{2}$, 所以可能的极值点为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 由几何意义知，该问题存在最小值，而最小值点一定为极值点，而我们求得的可能的极值点只有一个，所以 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 就是最小值点。……………………2'

□

3

解.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\cos(xy^2)\right)=2y\cos(xy^2)-y^2\sin(xy^2)2xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\cos(xy^2)\right)=2y\cos(xy^2)-2xy\sin(xy^2)y^2.$$

因此 $\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\cos(xy^2)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\cos(xy^2)\right)$, $\cdots\cdots$ 2'
又 $\mathbb{R}^2$ 单连通，$\cdots\cdots$ 1'
所以这样的 f 是存在的。
固定 $(0,0)\in\mathbb{R}^2$, 取 $C_1^{x,y}$ 为从 $(0,0)$ 到 $(x,0)$ 的直线段，$C_2^{x,y}$ 为从 $(x,0)$ 到 (x,y) 的直线段，令 $f(x,y)=\int_{C_1^{x,y}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy+\int_{C_2^{x,y}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy$, 则 f 即为所求
$\cdots\cdots$ 1'
下求之：

$$\begin{aligned}f(x_1,y_1)&=\int_{C_1^{x_1,y_1}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy+\int_{C_2^{x_1,y_1}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy\\&=\int_{C_2^{x_1,y_1}}y^2\cos(xy^2)dx+2xy\cos(xy^2)dy\\&=\int_{C_2^{x_1,y_1}}2xy\cos(xy^2)dy=\sin(x_1y_1^2)\end{aligned}$$

因此 $f(x,y)=\sin(xy^2)$. $\cdots\cdots$ 2'

4

解. 记 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant ay,x\geqslant 0\}$, 记 C 为从点 $(0,0)$ 到点 $(0,a)$ 的沿着 y 轴的线段，由格林公式：

$$\begin{aligned}&\int_L(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy\\=&\iint_D mdxdy+\int_C(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy\cdots\ \text{3'}\\=&m\sigma(D)+\int_0^a(\cos y-m)dy\cdots\cdots\ \text{2'}\\=&\frac{1}{2}m\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\sin a-ma.\cdots\cdots\ \text{1'}\end{aligned}$$

5

证明. 记 D 为 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2\}$, 则所求的曲面可视为函数 $z=xy,(x,y)\in D$ 的函数图像，因此：

$$\begin{aligned}S&=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy\cdots\cdots\ \text{2'}\\&=\iint_D\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy\\&=\iint_{0\leqslant r\leqslant a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\sqrt{1+r^2}rdrd\theta\cdots\cdots\ \text{2'}\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{1+r^2}rdr\\&=\pi\int_0^a\sqrt{1+r^2}dr^2\\&=\pi\cdot\frac{2}{3}\left((1+a^2)^{3/2}-1\right).\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ 2'

6

解. 记该公共区域为 Ω, 使用平行于 xy 平面的平面截 Ω, 记 $\Omega_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y,z) \in \Omega\}$, 则 Ω_z 为一个圆盘，且其面积 $\sigma(\Omega_z) = \begin{cases} \pi(R^2-(R-z)^2), & \text{if } 0 \leqslant z \leqslant \frac{R}{2} \\ \pi(R^2-z^2), & \text{if } \frac{R}{2} \leqslant z \leqslant R. \end{cases}$ $\cdots\cdots 1$'

由定义

$$\begin{aligned} V &= \iiint_\Omega 1dxdydz \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1\text{'} \\ &= \int_0^R dz \iint_{\Omega_z} 1dxdy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{'} \\ &= \int_0^R \sigma(\Omega_z)dz \\ &= 2\int_0^{R/2} \pi(R^2-(R-z)^2)dz \\ &= \pi R^3 - 2\pi \int_{R/2}^R z^2 dz \\ &= \pi R^3 - \frac{2\pi}{3}(R^3 - R^3/8) \end{aligned}$$

$$= \pi R^3(1-2/3+1/12) = \frac{5}{12}\pi R^3. \cdots\cdots\cdots 2\text{'}$$

7

解. 记 S_1 为椭圆盘 $\{(x,y,0)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$ 的下侧，则 S 与 S_1 组成的封闭曲面，记 Ω 为 S 所包围的上半椭球，由高斯公式，$\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy+\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy = \iiint_\Omega 2(x+y+z)dxdydx$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2$'
由于在 S_1 上 $z \equiv 0$, 故 $\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy = 0$

由对称性知，$\iiint_\Omega 2(x+y)dxdydx$=0。
所以 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy = 2\iiint_\Omega zdxdydx$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2$'
又

$$\begin{aligned} 2\iiint_\Omega zdxdydz &= 2\int_0^c zdz \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}} dxdy \\ &= 2\int_0^c z\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz \\ &= \pi abc^2 - \frac{\pi ab}{c^2}\frac{c^4}{2} \\ &= \frac{\pi abc^2}{2} \end{aligned}$$

故 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy = \frac{\pi abc^2}{2}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2$'

8

解. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 收敛半径为 1, 又在 -1 与 1 处显然不收敛，故收敛区间为 $(-1,1)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2$'
记在 $(-1,1)$ 内收敛到的函数为 $S(x)$, 只需求 $\frac{1}{x}S(x)$, 又

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{S(t)}{t}dt &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \\ &= \frac{x}{1-x}.\end{aligned}$$

……………………………………………………………………2'

故 $\frac{S(x)}{x}=\frac{d}{dx}\frac{x}{1-x}=\frac{1}{)1-x)^2}$，故 $S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$……………………2'

四（本题 4 分）

证明. 不妨设 $\vec{l}$ 为单位向量，则 $\cos\theta(x,y)=\vec{n}\cdot\vec{l}$，若记 $\vec{n}(x,y)=(n_1(x,y),n_2(x,y))$，则 $(n_2(x,y),-n_1(x,y))$ 为 C 的光滑的单位切向量场，……………………2'

不妨取 C 的方向为该切向量场所指的方向，则由第一型曲线积分与第二型曲线积分

之间的关系，有：

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{n}\cdot\vec{l}ds &= \oint_C (n_1l_1+n_2l_2)ds \\ &= \oint_C (l_2,-l_1)\cdot(n_2,-n_1)ds \\ &= \oint_C l_2dx-l_1dy \\ &= \iint_D 0dxdy \\ &= 0.\end{aligned}$$

……………………………………………………………………2'

2 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

抱歉，试卷和答案暂缺。~~（咱也不敢要啊，没考之前要的话明天监狱就欢迎我了）~~

3 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、单项选择题

1.B　2. A　3. C　4. B　5. A　6.C

评分标准说明：每题 4 分，错则扣全分。

二、填空题

1. $x-1=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$.　　　2. $\frac{y}{1+x^2y^2}dx+\frac{x}{1+x^2y^2}dy$.

3. $\frac{16\pi}{3}$.　　　　4. -2π.

5. 7.　　　　6. $2 \le x < 4$或$[2,4)$

评分标准说明：每空 4 分，第 6 小题写成$2<x<4$或$(2,4)$扣 2 分；其余小题错则扣全分。

三 、计算题（本题共 6 题，满分 36 分）

1.**解**：将$z=1-2x$带入第一个方程　　------------　1 分

得到$5(x-\frac{2}{5})^2+y^2=\frac{4}{5}$　　------------　2 分

引进参数$\begin{cases} x=\frac{2}{5}(1+\cos t) \\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}\sin t \\ z=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\cos t \end{cases}$　$t\in[0,2\pi]$；　　------------　3 分

评分标准说明： t 的范围未给出扣 1 分。

2. **解**：方程两端同时对 y 求导可得

$\cos y+2z\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}=0,$则$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\cos y}{2(1-z)}$　　…………　2 分

方程两端同时对 x　求导可得

$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial x}=0,$则$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{1-z}$　　………………2 分

上式再对 x 求导

$2+2(\frac{\partial z}{\partial x})^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$ 则$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{1-z}+\frac{x^2}{(1-z)^3}$ …………2 分

评分标准说明：该题还可以用微分形式不变性求导，结果正确满分；

3. 解：　采用柱坐标

$\begin{cases} r^2\le z\le 2 \\ 0\le r\le\sqrt{2} \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$　　………………2 分

可得

原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{r^2}^{2}\frac{1}{1+r^2}dz=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{r(2-r^2)}{1+r^2}dr=3\pi\ln 3-2\pi$ ……4 分

评分标准说明：其他方法也可

4．解：$P(x,y)=x^2y, Q(x,y)=\frac{1}{3}x^3$, 故$\frac{\partial Q}{\partial x}=x^2=\frac{\partial P}{\partial y}$ …………2 分

则$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}du=(\int_{(0,0)}^{(x,0)}+\int_{(x,0)}^{(x,y)})x^2ydx+\frac{1}{3}x^3dy$ ……………………2 分

解得$u(x,y)=\frac{1}{3}x^3y.$ …………………………………………………………2 分

评分标准说明：第二步中起点不在(0, 0)也可

5. 解：补充$\Sigma_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1,z=0\}$取下侧

可得$\iint_{\Sigma}=\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$ ……………………………………………………1 分

$\iint_{\Sigma_1}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=0$ …………………………………………1 分

由高斯公式：$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}(x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy)=\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ …2 分

采用球坐标

$$\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 3\rho^2\rho^2d\rho=\frac{6\pi}{5}$$ ………………**2 分**

评分标准说明：出现高斯公式，最终结果错误，可给 2 分

6. 解：将$f(x)$做奇周期延拓，计算傅里叶系数

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+2)\sin nxdx=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{\pi+4}{2k-1}, & n=2k-1\\ -\frac{1}{\kappa}, & n=2k\end{cases}$$ ………………**4 分**

得$x+2=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{\pi}\frac{\pi+4}{2k-1}\sin(2k-1)x-\frac{1}{k}\sin 2kx),\ (0<x<\pi)$ ………………**2 分**

评分标准说明：最后一步未给出 x 的范围, 扣 1 分

四、综合题（本题 8 分）

解：

设$C(x,y)$, 则$\overrightarrow{AB}=(3,-1), \overrightarrow{AC}=(x-1,y-3)$ ……**1 分**

三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|3y+x-10|$$ ………………**2 分**

构造拉格朗日函数

$F(x,y,\lambda)=(3y+x-10)^2+\lambda(x^2+y^2-1)$ ………………………………**1 分**

求导可得

$$\begin{cases} F_x=2(3y+x-10)+2\lambda x=0 \\ F_y=6(3y+x-10)+2\lambda y=0 \\ F_\lambda=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$ ………………………………………**3 分**

解得 $x=\frac{1}{\sqrt{10}}, y=\frac{3}{\sqrt{10}}$ …………………………………………**1 分**

评分标准说明：直接转化为无条件极值方法也可；

五、证明题（本题共两小题，满分 8 分）

1 证明：当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\alpha}{n}}{(\frac{\alpha}{n})^2}=\frac{1}{2}$ ………………………………………2 分

$\Sigma_{n=1}^{\infty}(\frac{\alpha}{n})^2$ **收敛，由比较判别法可知原级数绝对收敛。**

2 证明：在球坐标与极坐标下可得

$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_1^t f(r^2)r^2dr=4\pi\int_1^t f(r^2)r^2dr$

$G(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^t f(r^2)rdr=2\pi\int_1^t f(r^2)rdr$ ………………………………2 分

$F'(t)-G'(t)=4\pi f(t^2)t^2-2\pi f(t^2)t>0$ 当t>1 ……………………1 分

由 F(1)=G(1)=0 可得结论……………………………………………1 分

评分标准说明：第 2 题，有极坐标或球坐标思想，可适当给分

4 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、单项选择题

1.C　2. A　3. D　4. C　5.C　6. A

评分标准说明：　每题 4 分，错则扣全分

二、填空题

1. $\arccos\frac{1}{\sqrt{15}}$. 2. $(2x\sin xy+y(x^2+y^2)\cos xy)dx+(2y\sin xy+x(x^2+y^2)\cos xy)dy$.

3.　0.　　　4. $4-\pi$.　　　5. (-2,2,-2)　　　6. 3

评分标准说明：　每空 4 分

三 、计算题（本题共六题，满分 36 分）

1.解：该级数为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n^2\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$$ ……………………………………………4 分

根据比值判别法可知该级数收敛……………………………………………2 分

评分标准说明： 结果正确给 2 分。

2. **解：**

$f_x=(x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0,\ f_y=(1+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0$ …………2 分

解得驻点 $(1,-\frac{4}{3})$ 及 $(-1,-\frac{2}{3})$ ……………………………………1 分

$A(1,-\frac{4}{3})=f_{xx}=(2x+x^2+x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=3e^{-\frac{1}{3}},$

$B(1,-\frac{4}{3})=f_{xy}=(1+x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=e^{-\frac{1}{3}},$

$C(1,-\frac{4}{3})=f_{yy}=(1+1+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=e^{-\frac{1}{3}}$

可得 $AC-B^2>0,A>0$，则 $(1,-\frac{4}{3})$ 为极小值………………2 分

我们也可以得到 $A(-1,-\frac{2}{3})=-e^{-\frac{5}{3}},B(-1,-\frac{2}{3})=e^{-\frac{5}{3}},C(-1,-\frac{2}{3})=e^{-\frac{5}{3}}$

由于 $AC-B^2<0$，则 $(-1,-\frac{2}{3})$ 不是极值点……………………1 分

评分标准说明：该题还可以用微分形式不变性求导，结果正确满分；

3. 解：由奇偶性及对称性可知

$\iint_D(x^2+xye^{x^2+y^2})dxdy=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy$ …………………………4 分

由极坐标可得

$\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2rdr=\frac{\pi}{4}$ …………………………2 分

评分标准说明：奇偶性占 2 分

4．解：$P(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2},Q(x,y)=\frac{y-x}{x^2+y^2},$

计算得当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$ …………2 分

做辅助线：$L_1:x^2+y^2=\varepsilon^2$，逆时针方向 …………………………1 分

则原式$=\oint_{L+L_1}-\oint_{L_1}=-\oint_{L_1}=-\int_0^{2\pi}(-1)\,d\theta=2\pi$ ……………………3 分

评分标准说明：直接用曲线参数方程求解，结果正确给分

5. 解：由对称性可知

$\iint_\Sigma zdxdy=2\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$ ……**2 分**

利用极坐标计算二重积分可得

$$2\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdr=\frac{\pi}{3}$$ ……………………………**4 分**

评分标准说明：极坐标给出，答案错误扣 2 分

6. 解：利用间接法，由于

$\frac{1}{1\text{-x}}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots$ ……………………………**3 分**

用 x^2 代替 x

$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n},\ x\in(-1,1)$ ……………………………………**3 分**

评分标准说明：最后一步未给出 x 的范围，扣 1 分

四、综合题 （**本题共 8 分**）

解：

设切点处坐标为 (x_0,y_0,z_0) 则该点处法向量为

$(4x_0,y_0,-1)$ ……………………………………………**2 分**

法向量满足

$$\begin{cases} z_0=2{x_0}^2+\frac{{y_0}^2}{2} \\ \frac{4x_0}{-4}=\frac{y_0}{2}=\frac{-1}{2} \end{cases}$$ ……………………………………**2 分**

解得 $(\frac{1}{2},-1,1)$ ……………………………………**2 分**

故法线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$$ ………………………………**2 分**

评分标准说明：坐标算错不给分

五、证明题（**本题满分 8 分**）

解： $P(x,y)=\frac{1}{y}(1+y^2f(xy)),\ Q(x,y)=\frac{x}{y^2}(y^2f(xy)-1)$

直接计算可得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2f(xy)+xy^3f'(xy)-1}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ ……………………………………4 分，

故与积分路径无关

$$I=\int_2^1\frac{1}{y^2}[y^2f(y)-1]dy+\int_1^2[1+f(x)]dx=\int_1^2(1+\frac{1}{y^2})dy=\frac{3}{2}$$ ………………………4 分

评分标准说明：前 4 分中，导数求错扣 2 分，

5 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. A　2. C　3. B　4. C　5. B　6. D

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $\frac{x}{-R}=\frac{y-R}{0}=\frac{z-\frac{k}{2}\pi}{k}$；　2. $8\pi R^2$；　3. 4π；　4. [4,6]；

5. $\frac{1}{\sqrt{13}}$;　6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(-\infty<x<\infty)$　.

三 、计算题

1、解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x+y}+(x^2+y^2)e^{x+y}=(x^2+2x+y^2)e^{x+y}$.　…………………（3 分）

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2ye^{x+y}+(x^2+2x+y^2)e^{x+y}=(x^2+2x+2y+y^2)e^{x+y}$.　…………（7 分）

2、解：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n\cdot n!}{n^n}}{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot(-\frac{n}{n+1})}=\frac{2}{e}<1,$$

所以，由比值审敛法，该级数收敛。　……………………（7 分）

3、解：曲面Σ的方程为$\Sigma: z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 8\}$。

$\because$　$z_x=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，$z_y=\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，

$\therefore$　$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

从而，$S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint_D\frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dxdy$　……………（4 分）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{3}{\sqrt{9-r^2}}rdr=12\pi$　……………（7 分）

4、解：添加辅助面$\Sigma: z=0, x^2+y^2\le a^2$，取下侧。记$\Omega$ 为曲面 S 和Σ所围成的空间区域，则由高斯公式，

$$\iint_{S\cup\Sigma} \mathrm{xdydz}+\mathrm{ydzdx}+\mathrm{zdxdy}=3\iiint_{\Omega} dv=3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3=2\pi a^3 \quad \text{.........（4 分）}$$

而

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{xdydz}+\mathrm{ydzdx}+\mathrm{zdxdy}=0$$

所以，

$$\iint_{S} \mathrm{xdydz}+\mathrm{ydzdx}+\mathrm{zdxdy}=2\pi \mathrm{a}^3 \quad \text{………..（7 分）}$$

5、解：令$P=3x^2y+8xy^2$，$Q=x^3+8x^2y+12ye^y$。

因为

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}=3x^2+16xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$(3\mathrm{x}^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$是某个函数的全微分。　……..（3 分）

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$$

$$=\int_0^y (x^3+8x^2y+12ye^y)dy$$

$$=x^3y+4x^2y^2+12(y-1)e^y+12 \quad \text{……….（7 分）}$$

6、解：f(x)满足 Dirichlet 定理条件，傅里叶系数计算如下：

$$\mathrm{a}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$\mathrm{a}_\mathrm{n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\left[\frac{2}{n^2\pi}x\cos nx\right]_0^{\pi}=(-1)^n\frac{2}{n^2},\mathrm{n}=1,2,\cdots$$

$$\mathrm{b}_\mathrm{n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx==\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x^2\cos nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$=(-1)^{\mathrm{n}+1}\frac{\pi}{n}+\frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n-1] \qquad n=1,2,\cdots \quad \text{.........（5 分）}$$

所以，

$$\mathrm{f(x)}=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^n\frac{2}{n^2}\cos nx+\left[(-1)^{\mathrm{n}+1}\frac{\pi}{n}+\frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n-1]\right]\sin nx\}$$

$$\mathrm{x}\neq(2\mathrm{k}+1)\pi,\mathrm{k}=0,\pm1,\pm2,\cdots \quad \text{………（7 分）}$$

四、证明题

1、证明：

$$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 dy\int_0^y f(x)f(y)dx=\int_0^1\left[f(y)\int_0^y f(x)dx\right]\mathrm{dy}$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^y f(x)dx\right]d\left[\int_0^y f(x)dx\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^y f(x)dx\right]_0^1=\frac{A^2}{2}。 \quad \text{.........（5 分）}$$

2、证明：由 Green 公式

$$左边=\iint_D \mathrm{e}^{\sin y}+e^{-\sin x}dxdy，右边=\iint_D \mathrm{e}^{-\sin y}+e^{\sin x}dxdy。$$

由二重积分的对称性，$\iint_D \mathrm{e}^{\sin y}+e^{-\sin x}dxdy=\iint_D \mathrm{e}^{-\sin y}+e^{\sin x}dxdy$。

从而，$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \oint_L xe^{-\sin y}dy - ye^{\sin x}dx$。　　………（5 分）

6 浙江理工大学 2018—2019 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. A　　2. C　　3. D　　4. B　　5. D　　6. D

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $(0,\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{15}})$；　　2. $8\pi R^2$；　　3. $2\sqrt{2}$；　　4. $\frac{64}{3}\pi$；　　5. [4,6]；　　6. 0 .

三 、计算题

1、 解：$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{1+x^3}dx = \int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{1+x^3}dy.$

$=\int_0^1\sqrt{1+x^3}\cdot x^2dx = \left[\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$ ……………………（7 分）

2、 解：令$f_x(x,y)=2x(2+y^2)=0,\ f_y(x,y)=2x^2y+ln\,y+1=0,$

得 f(x,y)的驻点为$(0,\mathrm{e}^{-1})$。　　…………………（3 分）

在$(0,\mathrm{e}^{-1})$点，

$$A=f_{xx}(0,e^{-1})=2(2+y^2)|_{(0,e^{-1})}=2(2+e^{-2})$$

$$B=f_{xy}(0,e^{-1})=4xy|_{(0,e^{-1})}=0$$

$$C=f_{yy}(0,e^{-1})=(2x^2+\frac{1}{y})|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}=e$$

由于$AC-B^2>0, A>0$，所以 f(x,y)在$(0,e^{-1})$取到极小值$-\mathrm{e}^{-1}$。……..（7 分）

3、 解：设$A=\iint_D f(x,y)dxdy$，则$f(x,y)=xy+A$。由题意，

$$\mathrm{A}=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D (xy+A)dxdy$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(xy+A)dy=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^5+Ax^2\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^6+\frac{1}{3}Ax^3\right]_0^1=\frac{1}{8}$$

从而，$f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$。　　……..（7 分）

4、 解：有向曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases}\mathrm{x}=2\cos\theta\\ y=3\sin\theta\end{cases}\quad \theta: 0\to\pi$$

则　$\int_L (x^2+xy)dy=\int_0^\pi(4\cos^2\theta+6\cos\theta\sin\theta)\cdot 3\cos\theta\,d\theta$ ……（4 分）

$$= 12\int_0^{\pi}\cos^3\theta\,d\theta + 18\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= 12\int_0^{\pi}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta + 18\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\sin\theta$$

$$= 12\left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\pi} - 18\cdot\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= 12$$ ……………..（7 分）

5、解：添加辅助面$\Sigma: z = 0, x^2 + y^2 \le a^2$，取下侧。记$\Omega$ 为曲面 S 和Σ所围成的空间区域，则由高斯公式，

$$\iint_{S\cup\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = 3\iiint_{\Omega} dv = 3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3 = 2\pi a^3$$ ………（4 分）

而 $$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = 0$$

所以， $$\iint_{S} xdydz + ydzdx + zdxdy = 2\pi a^3$$ ………..（7 分）

6、解：

$$f(x) = \frac{x}{2+x-x^2} = \frac{x}{-(x-2)(x+1)}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{1+x} + \frac{2}{3}\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - (-1)^n\right)x^n \qquad x \in (-1,1)$$ ……….（7 分）

四、证明题

1、证明：令 $P = 2xy^3 - y^2\cos x$，$Q = 1 - 2y\sin x + 3x^2y^2$。

因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 - 2y\cos y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以，由 Green 公式，

$$\oint_L (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = 0$$

………（5 分）

2、证明：因为正项级数$\{x_n\}$单调增加且有上界，所以，存在一个常数 C，使得

$$x_n < x_{n+1} < C。$$

从而，$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}})$是正项系数。 …………（2 分）

又因为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x_k}{x_{k+1}}\right) = \frac{x_2 - x_1}{x_2} + \frac{x_3 - x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}$$

$$\le \frac{x_{n+1}-x_1}{x_2} \le \frac{C-x_1}{x_2}$$

所以，级数$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(1-\frac{x_n}{x_{n+1}})$收敛。……………（5 分）