高等数学 A2

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 下）

学校：______________________

专业：______________________

班级：______________________

姓名：______________________

学号：______________________

（此试卷为 2021 年第二版）

目 录

资料说明

试卷整理人：张创琦

版次：2021 年 8 月 9 日 第二版

微信公众号：创琦杂谈

QQ 号：1020238657

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）：749060380

创琦杂谈大学数学学习交流群（QQ 群）：967276102

（此套试卷仅供需要进行 2020-2021 高数 A2 补考的同学使用，之后我们会提供新版本）

（本次共更新了五套精装版、1-10 套的版本和 11-22 套的版本，共 3 个版本，如有其它版本的需要请联系张创琦本人）

11 浙江理工大学 2014-2015 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1-6 A D D C A B

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、$-(x-1)+16(y-2)+10(z+1)=0$　　2、3　　3、$(4,6)$

4、± 2　　5、$2a^2$　　6、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$

三、计算题（本题共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分，应写出演算过程及文字说明）

1、$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2}$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(2+4x^2\right)e^{x^2+y^2}$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xye^{x^2+y^2}$

2、选用极坐标计算，$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho\cdot\rho d\rho=\frac{14\pi}{3}$

3、$I=\int_0^{\pi}\frac{\left(a\cos t-a\sin t\right)\cdot a\cos t+\left(a\cos t+a\sin t\right)\cdot a\sin t}{a^2}dt=\pi$（注：不能用格林公式）

4、补上$\sum_1$:　$x=e^a$.　$\left(\text{其中，}y^2+z^2\le a^2\right)$ 取前侧

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}\overset{\text{高斯公式}}{=}\iiint\limits_{\Omega}\left(-4x+8x-4x\right)dv-\iint\limits_{y^2+z^2\le a^2}2\left(1-e^{2a}\right)dydz$$
$$=2\pi a^2\left(e^{2a}-1\right)$$

5、设和函数为$S\left(x\right)$

$$\because x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{x}{1-x},\quad x\in\left(-1,1\right)$$

$$\therefore 1+2x+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{\left(1-x\right)^2},\quad x\in\left(-1,1\right)$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}=x^2\left(1+2x+\cdots+nx^{n-1}+\cdots\right)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2,\quad x\in\left(-1,1\right)$$

6、（1）将$f\left(x\right)$周期延拓成$F\left(x\right)$，因为$F\left(x\right)$处处连续，所以其傅里叶级数处处收敛到它。

（2）

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=\left(-1\right)^n\frac{4}{n^2},\quad n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nxdx=0,\quad n=1,2,\cdots$$

$$\therefore F(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\therefore f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\qquad x\in[-\pi,\pi]$$

四、证明题（本题共 2 小题，每题 4 分，满分 8 分）

1、因为 xOy 平面是一个单连通域，Γ 是 xOy 平面上一条分段光滑闭曲线，且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xyf\left(x^2+y^2\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以等式成立。

2、$\because e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\qquad x\in R$

$$\therefore \frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots,\qquad x\in R$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\cdots+\frac{n-1}{n!}x^{n-2}+\cdots,\qquad x\in R$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}+\cdots=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\Big|_{x=1}=\frac{e^x x-e^x+1}{x^2}\Big|_{x=1}=1$$

五、数学建模题（本题 8 分，应写出具体建模和求解过程）

解 记雪堆体积为 V，侧面积为 S，则

$$V=\int_0^{h(t)}dz\iint_{D_z}dxdy=\frac{\pi}{4}h^3(t),\text{其中}D_z:x^2+y^2\le\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z],$$

$$S=\iint_{D_0}\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,dxdy=\iint_{D_0}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,dxdy$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt2}}\sqrt{h^2(t)+16\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{13\pi}{12}h^2(t),\text{其中}D_0:x^2+y^2\le\frac{1}{2}h^2(t),$$

由题意知$\frac{dV}{dt}=-0.9S$，从而$\begin{cases}\frac{dh}{dt}=-\frac{13}{10}\\ h(0)=130\end{cases}\Rightarrow h(t)=-\frac{13}{10}t+130$，令$h(t)\to0$，得$t=100(h)$，

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需的时间为 100 小时.

12 浙江理工大学 2013-2014 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1-6　　C　C　A　B　A　D

二、填空题（本题共 7 小题，每小题 4 分，满分 28 分）

1、$2x-8y+16z-1=0$　2、$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{2\sec\theta} f(\rho)\rho d\rho$　3、3, 0

4、$\sqrt{2}$　5、1　6、$(-\frac{1}{5},\frac{1}{5})$　7、$\frac{1}{2}$

三、计算题（本题共 6 小题，每题 6 分，满分 36 分）

（1）解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u e^y+f_x, \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=xe^{2y}f_{uu}+e^y f_{uy}+xe^y f_{xu}+f_{xy}+e^y f_u$

（2）解：令 $u_n=n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n^2\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$，

所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛。

（3）解：设 D 为 L 所围的三角形区域，则由格林公式有

$$\oint_L(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy=\iint_D(3-(-1))dxdy=12$$

（4）解　添加辅助面 $\Sigma':\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le 1, z=1\right\}$，取上侧，则由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma'}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(1+2+3)dv=6\iiint\limits_{\Omega}dv=6\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 1^2\cdot 1=2\pi$$

$$\iint\limits_{\Sigma'}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=\iint\limits_{\Sigma'}3(z-1)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}3(1-1)dxdy=0$$

故原式$=2\pi-0=2\pi$.

（5）解　易知 $\frac{1+x}{(1-x)^2}=\frac{2-(1-x)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}$

又 $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n \quad (-1<x<1)$

$\therefore \frac{1}{(1-x)^2}=(\frac{1}{1-x})'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

$\therefore \frac{1+x}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{n-1}$，　其中　$(-1<x<1)$

(6) 解：　幂函数的收敛区域为 $(-1,1)$，

则 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2},$，$(x\neq -1)$

所以 $s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx+s(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ x\in(-1,1)$

四、应用题（本题满分 7 分）

解：Σ_2 所在半球面含在 Σ_1 球面中部分面积为

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\mathrm{d}\,r=4\pi(2-\sqrt{3})$$

因此，屋顶的面积为

$$\frac{1}{2}(4\pi\cdot 2^2)-4\pi(2-\sqrt{3})+\frac{1}{2}4\pi=2\pi(1+2\sqrt{3})$$

五、证明题（本题满分 5 分）证明：$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'(\frac{y}{x})+f'(\frac{x}{y})$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^4}f''(\frac{y}{x})+\frac{1}{y}f''(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})+f(\frac{x}{y})-\frac{x}{y}f'(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y})+\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y})+\frac{x^2}{y^3}f''(\frac{x}{y})=\frac{1}{x^2}f''(\frac{y}{x})+\frac{x^2}{y^3}f''(\frac{x}{y})$$

原命题成立。

13 浙江理工大学 2013-2014 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1-6　　B D A B C D

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、1　2、$x+y-2=0$　　3、$\int_1^2 dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy$　　4、$12a$　5、$(-2,0)$　　6、$\frac{3}{2}$

三、计算题（本题共 6 小题，每题 6 分，满分 36 分）

（1）解：$dz\big|_{(1,2)}=\left(\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}dx+\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}dy\right)\Bigg|_{(1,2)}=\dfrac{1}{3}dx+\dfrac{2}{3}dy$　　（6 分）

（2）解：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^3dz$（3 分）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3(2-\dfrac{r^2}{2})dr$（5 分）$=2\pi\cdot[\dfrac{r^4}{2}-\dfrac{r^6}{12}]\Big|_0^2=\dfrac{16}{3}\pi$　（6 分）

（3）解：$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}(2z+z-2z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\cdot\dfrac{1}{4}r^4\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{2}$。（6 分）

（4）解：幂级数的收敛半径 $\boldsymbol{R=1}$，令 $\boldsymbol{s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}}$，$\boldsymbol{x\in(-1,1)}$　（2 分）

则有 $\int_0^x s(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}(\int_0^x nx^{n-1}dx)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x}$，$\boldsymbol{x\in(-1,1)}$，（4 分）

在上式两端对 $\boldsymbol{x}$ 求导得，$\boldsymbol{s(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}}$，$\boldsymbol{x\in(-1,1)}$　（5 分）

又 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 在 $\boldsymbol{x=\pm1}$ 处发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，$\boldsymbol{x\in(-1,1)}$（6 分）

（5）解：$f(x)=\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{3+x-4}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-4}{3}}$（3 分）

$=\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-4)^n}{3^n},\boldsymbol{x\in(1,7)}$　（6 分）

(6) 解：函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)-\{0\}$ 是奇函数，有 $\boldsymbol{a_n=0}$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx$$
$$=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$
$$=\begin{cases}0, & n\text{是偶数},\\ \dfrac{4}{n\pi}, & n\text{是奇数}.\end{cases}$$

于是，$f(x)=\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\sin x}{1}+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)$，$0<|x|<\pi$.

四、应用题（本题满分 8 分）

点$\left(x,y,z\right)$到平面的距离为$d=\dfrac{\left|x+y+z+1\right|}{\sqrt{3}}$。　　　　（2 分）

先求d^2在条件$z=x^2+y^2$下的最小值，设

$$F\left(x,y,z\right)=\frac{1}{3}\left(x+y+z+1\right)^2+\lambda\left(z-x^2-y^2\right),\quad（4 分）$$

则

$$\begin{cases}F_x=\dfrac{2}{3}\left(x+y+z+1\right)-2\lambda x=0\\ F_y=\dfrac{2}{3}\left(x+y+z+1\right)-2\lambda y=0\\ F_z=\dfrac{2}{3}\left(x+y+z+1\right)+\lambda=0\end{cases}\quad（6 分）$$

并与条件$z=x^2+y^2$联立解得唯一可能极值点$x=y=-\dfrac{1}{2},z=\dfrac{1}{2}.$　　　　（8 分）

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1、证明：因为 $\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_x},\dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{F_z}{F_y},\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z},$

所以$\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(-\dfrac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\dfrac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\dfrac{F_x}{F_z}\right)=-1.$

2、$a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x d\tan x=\dfrac{1}{n+1},$

$\dfrac{a_n}{n^\lambda}<\dfrac{a_n+a_{n+2}}{n^\lambda}=\dfrac{1}{n^\lambda(n+1)}<\dfrac{1}{n^{\lambda+1}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\lambda+1}}$收敛，由比较审敛法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$收敛。

14 浙江理工大学 2012-2013 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1、C；　2、B；　3、B；　4、C；　5、A；　6、D。

二、填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1、$\left(2,-1,0\right)$；　2、0；　3、0；　4、3π；　5、4π；　6、$\left[0,4\right)$

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分）

1．设$z=f(xy,\dfrac{x}{y})+\sin y$，其中$f$具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y})+0=yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$ …………3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]$$ ………6 分

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$ ………7 分

2.计算 $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4, x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0, y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域。

解：$\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2\theta\rho d\rho d\theta=\dfrac{3}{64}\pi^2$ ……………7 分

3. 求 $\iint\limits_\Sigma\left(x-y^2\right)dydz+\left(y-z^2\right)dzdx+\left(z-x^2\right)dxdy$，其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧。

解：设 Σ_1 是 $x^2+y^2\le 1$ 的下侧 ……………1 分

原式$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\ -\iint\limits_{\Sigma_1}$ ……………2 分

$$=\iiint\limits_\Omega 3dv-\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x-y^2\right)dydz+\left(y-z^2\right)dzdx+\left(z-x^2\right)dxdy$$ ……………4 分

$$=2\pi-\iint\limits_D x^2dxdy$$ ……………6 分

$$=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi$$ ……………7 分

4.将函数 $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ 展开为 x 的幂级数（注明收敛域）。

解：$\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}$ ……………2 分

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{x}{2}+\cdots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots\right]=\frac{1}{2}+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^3}+\cdots+\frac{x^n}{2^{n+1}}+\cdots$$ ……………5 分

$x\in(-2,2)$ ……………7 分

四、解答题（本题共 2 小题，第 1 小题 10 分，第 2 小题 8 分，满分 18 分）

1.（1）验证 $\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$ 在整个 xoy 平面内为某个函数 $F(x,y)$ 的全微分，并求 $F(x,y)$；

（2）计算 $I=\int_C\left(2xy^3-y^2\cos x+y\right)dx+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$，其中 C 为单位圆

$x^2+y^2=1$的正向。

解：（1）设$P=2xy^3-y^2\cos x, Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$，因为$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=6xy^2-2y\cos x$

$(x,y)\in xoy$ 平面，所以$\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$ 在整个 xoy 平面内为某个函数的全微分。　　……………2 分

于是 $F(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy=y-y^2\sin x+x^2y^3$

（也可用凑微分法求）　　……………5 分

（2）$I=\int_C Pdx+Qdy+\int_C ydx$　　……………6 分

$=0+\int_C ydx$　　……………8 分

$\overset{Green}{=}\iint\limits_D(-1)\,d\sigma\left(D:x^2+y^2\le 1\right)=-\pi$　　……………10 分

2. 将函数 $f(x)=x$ 在$[0,\pi]$上展开成余弦级数。

解：对 $f(x)$进行偶延拓，则有　　……………2 分

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cdot\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, n=2,4,6,\cdots\\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$　　……………4 分

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi$，$b_n=0\quad n=1,2,\cdots$　　……………6 分

故 $x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right), x\in[0,\pi]$　　……………8 分

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分）

1. 设 $f(x)$在$[0,a]$上连续，证明：$\int_0^a dy\int_0^y f(x)dx=\int_0^a(a-x)f(x)dx$ 。

证：交换积分次序　　……………1 分

$\int_0^a dy\int_0^y f(x)dx=\int_0^a dx\int_x^a f(x)dx=\int_0^a(a-x)f(x)dx$　　……………3 分

2. 试证明定理：如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛。.

证：令 $v_n=\frac{1}{2}\left(u_n+|u_n|\right)\quad(n=1,2,...)$，　　……………1 分

显然 $v_n \ge 0, v_n \le u_n \quad (n=1,2,...)$，因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，故由比较审敛法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛　……………2 分

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2v_n$ 也收敛，而 $u_n = 2v_n - |u_n|$，由收敛级数的基本性质可知 $\sum u_n = \sum 2v_n - \sum |u_n|$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。　……………3 分

15 浙江理工大学 2012-2013 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1．C;　2．B ;　3．D;　4．A;　5．A;　6.B

二、填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1. (-1,2,-2);　2. 0;　3. $\left(f_1'+yf_2'\right)dx+\left(f_1'+xf_2'\right)dy$;　4. $2\sqrt{2}$;　5. 2　6. $-\dfrac{\pi}{4}$

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分）

1. 已知 $e^z + x^2 + y^2 = 2$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2x}{e^z}$　………… 3 分，　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{4xy}{e^{2z}}$　…… …… 6 分

2. 计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 D：　$x^2+y^2 \le 1$。

解：$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \cdot \rho d\rho = \dfrac{2\pi}{3}$　…… 6 分（也可用直角坐标做，列式对给 4 分，计算 2 分）

3. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\ dxdydz$，其中闭区域 Ω 为半球体：$x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge 0.$

解：用柱面坐标得，$I = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^{\sqrt{1-\rho^2}} z dz = \dfrac{\pi}{4}$（也可用球面坐标、截面法等做，列式对给 4 分，计算 2 分）

4. 将函数 $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ 展开成 x 的幂级数。

解：因为 $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$　………3 分

所以 $chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ ………6 分

四、解答题（本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分）

1. 求曲线积分 $\int_L (x-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是沿曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 由点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 的弧段。

解：令 $P=x-2y$，$Q=-(x+\sin^2 y)$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1,$ ………2 分

选择 $BA: y=0$ 由 $B(-1,0)$ 到 $A(1,0)$，则由格林公式得

原式 $=\oint_{L+BA}(x-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy+\int_{AB}(x-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$ ………4 分

$=\iint\limits_D 1dxdy+\int_{AB}(x-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$ ………6 分

$=\dfrac{\pi}{2}+\int_{-1}^{1}xdx=\dfrac{\pi}{2}.$ ………8 分

2. 求 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的下侧。

解：设 Σ_1 是 $x^2+y^2\le R^2$ 的上侧 ……………2 分

原式 $=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$ ……………4 分

$=-\iiint\limits_{\Omega}3dv-0$ ……………6 分

$=-2\pi R^3$ ……………8 分

3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^{n-1}$ 的收敛域、和函数以及数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 的和。

解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}\right|=\dfrac{1}{2}\Rightarrow R=2\Rightarrow$ 收敛区间为 $(-2,2)$， ………2 分

当 $x=\pm 2$ 时，原级数发散，因此得收敛域为 $(-2,2)$ ……………3 分

设和函数为 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^{n-1}=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x\dfrac{n}{2^n}t^{n-1}dt\right)'=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right)'$

$=\left(\dfrac{x}{2-x}\right)'=\dfrac{2}{(2-x)^2}$ …………7 分

于是 $s(1)=2$ ………8 分

五、（本题满分 4 分） 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

解：当 $p\le 0$ 时，$(-1)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)\not\to 0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 发散　……………1 分

当 $0<p\le 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n^p}}=1$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散（p 级数），由比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)\right|$ 也发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 收敛（莱布尼茨定理），所以原级数条件收敛　…………3 分

当 $p>1$ 时，同理因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛（p 级数），由比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln^p\left(\frac{n+1}{n}\right)\right|$ 也收敛，所以原级数绝对收敛。　……………4 分

16 浙江理工大学 2011-2012 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1．A;　2．D；　3．A;　4．C;　5．B;　6.B

二、填空题（本题共 5 小题, 每小题 4 分，满分 20 分）

1. (-1,2,-2);　2. $2\sqrt{6}$；　3. $\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{1}f(x,\ y)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1}f(x,\ y)dy$；

4. $12l$；　5. $\frac{3}{2}$

三、解答题（本题共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分）

1. $\vec{s}_1=(6,2,-3)$，　$\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-1\\2&0&-1\end{vmatrix}=(-2,-1,-4)$，　………2 分

取平面的法向量为 $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\6&2&-3\\-2&-1&-4\end{vmatrix}=(-11,30,-2)$　………2 分

所以平面方程为：$-11(x-4)+30(y+3)-(z-1)=0$，即 $11x-30y+z-135=0$. …2 分

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y})+0=yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$,　……………2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]$$

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$　………4 分

3. 解：$f(x)=\dfrac{1}{3+(x-3)}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+(\dfrac{x-3}{3})}$,　……………2 分

因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\dfrac{1}{1+x}$，$x\in(-1,1)$,

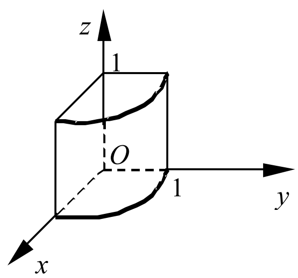
所以 $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+(\dfrac{x-3}{3})}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3}\cdot(\dfrac{x-3}{3})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{1}{3})^{n+1}(x-3)^n$,

其中 $-1<\dfrac{x-3}{3}<1$，即 $0<x<6$.　……………3 分

当 $x=0$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3}$ 发散；当 $x=6$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{3}$ 发散，故

$\dfrac{1}{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{1}{3})^{n+1}(x-3)^n$，$x\in(0,6)$.　………1 分

4. 解：如图，选取柱面坐标系,此时 $\Omega:\begin{cases}0\le z\le 1,\\0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\\0\le r\le 1,\end{cases}$



所以 $\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}z$　………3 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=(-\dfrac{\cos 2\theta}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{r^4}{4}\Big|_0^1=\dfrac{1}{8}$.　………3 分

5. 解：令 $P=x^2-2y$，$Q=-(x+\sin^2 y)$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-1,\qquad\text{………2 分}$$

选择 $BA: y=1$ 由 B（2，1）到 A（0，1），则由格林公式得

原式 $=\oint_{L+BA}(x^2-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy+\int_{AB}(x^2-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$ ………2 分

$=-\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy+\int_{AB}(x^2-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$

$=-\iint\limits_D dxdy+\int_0^2(x^2-2)dx=-\iint\limits_D dxdy+\int_0^2(x^2-2)dx=-\frac{\pi}{2}+\frac{8}{3}-4$. ………2 分

6. 解：补上 $\Sigma_1: z=0\ \ (x^2+y^2\le 4)$ 下侧。

$\iint\limits_{\Sigma} y^2dzdx+zdxdy=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} y^2dzdx+zdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1} y^2dzdx+zdxdy$ 2分

$=\iiint\limits_{\Omega}(2y+1)dxdydz-0$.............................. ....3分

$=\iiint\limits_{\Omega}2ydxdydz+\iiint\limits_{\Omega}dxdydz$

$\overset{\text{对称性}}{=}\ 0+\frac{16\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}$........................3分

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分）

1. 证明：$P=3x^2y+8xy^2,\qquad Q=x^3+8x^2y+12ye^y$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+16xy$ ，故 $Pdx+Qdy$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. ……3 分

所以 $u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$

$=0+\int_0^y(x^3+8x^2y+12ye^y)dy=x^3y+4x^2y^2+12ye^y-12e^y+12$

…………5 分

2. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^n}{n5^{n+1}}=\frac{1}{5}\Rightarrow R=5$， 收敛区间为(-5,5). ………2 分

又当 $x=5$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5}$ 发散；当 $x=-5$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{5}$ 发散;

所以收敛域为 $(-5,5)$； ………2 分

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}x^{n-1}=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{5^n}t^{n-1}dt)'=[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{5})^n]'=(\frac{x}{5-x})'=\frac{5}{(5-x)^2}$ ………2 分

于是 $s(1)=\dfrac{5}{16}$.　……….2 分

五、证明题（4 分）

$\because (a_n-\dfrac{1}{n})^2\ge 0$，$a_n{}^2-2\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{1}{n^2}\ge 0$ $\therefore 2\left|\dfrac{a_n}{n}\right|\le a_n{}^2+\dfrac{1}{n^2}$　　………2 分

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 都收敛，由比较法及其性质知：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{a_n}{n}\right|$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 绝对收敛。　　………2 分

17 浙江理工大学 2010-2011 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题

1、C　2、B　3、C　4、D　5、A　6、B　7、A

二、填空题

1、0；　2、$\dfrac{12}{5}\pi a^5$；　3、$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(-\infty<x<+\infty\right)$　4、$\dfrac{1}{2}$　5、$x+2y-4=0$

三、简答题

1、解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\sin^2\dfrac{\pi}{2n}$，因为 $2\sin^2\dfrac{\pi}{2n}<2\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)^2=\dfrac{\pi^2}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以由比较审敛法知，原级数收敛。

2、解：Σ 的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，它在 xoy 面上的投影区域 D_{xy} 为圆形闭区域 $\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le a^2-h^2\right\}$，又 $\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，所以

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{adxdy}{a^2-x^2-y^2}=2\pi a\ln\frac{a}{h}\text{。}$$

3、解：由高斯公式得，$\oiint_S (x+2y+3z)dxdy+(y+2z)dydz+(z^2-1)dxdz=\iiint_{\Omega}3dxdydz=\dfrac{1}{2}$。

4、解：$\iiint_{\Omega}zdxdydz=\int_1^2dx\int_0^x dy\int_0^{\frac{y}{2}}zdz=\dfrac{5}{32}$。

5、解：$\int_L xydx+(y-x)dy=\int_0^1\left[x\cdot x^2+(x^2-x)\cdot 2x\right]dx=\dfrac{1}{12}$

四、解：（1）连续

（2）$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但不可微。

五、解：在等式两边同时在 D 上取二重积分，即

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint_D\left(\frac{8}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy\right)dxdy$$

因此$\iint_D f(x,y)dxdy=\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{9}$，所以$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\dfrac{8}{9\pi}-\dfrac{2}{3}$。

六、解：幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$，设$s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n$，则$s\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$\int_0^x s(t)dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x\dfrac{n+1}{n!}t^ndt=xe^x\Rightarrow s(x)=(xe^x)'=(x+1)e^x$，所以

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=s\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\sqrt{e}$。

七、证明：

$$\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2=\iint_D f(x)f(y)dxdy(D:0\le x\le a,0\le y\le a)=\iint_{D_1}f(x)f(y)dxdy+\iint_{D_2}f(x)f(y)dxdy$$

$$=2\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy(D_1:0\le x\le a,x\le y\le a;D_2:0\le y\le a,y\le x\le a)$$

18 浙江理工大学 2009-2010 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，满分 24 分）

1.B　2.C　3.A　4.D　5.C　6.B

二、填空题（每小题 4 分，满分 24 分）

1. $y=\dfrac{\sin 2x+C}{2x}$　2. $\dfrac{12\pi R^5}{5}$　3. $\dfrac{1}{2}$　4. $\dfrac{32}{9}$

5. $e^{-x^2}=1-x^2+\dfrac{x^4}{2!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$　6. $[2,4)$

三、解答题（每小题 6 分，共 30 分）

1.解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6y$

2.解：$\iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-\rho^2}\cdot\rho d\rho=\pi\left(1-e^{-1}\right)$

3. 证明：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，代入左边即得证明

4.解：$\iint\limits_D xyd\sigma=\int_1^2 dx\int_1^x xydy=\dfrac{9}{8}$

5.解：由对称性，则

$$I=\iint\limits_S\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}=4\iint\limits_D\frac{1}{R^2+z^2}\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz$$

$$=4\iint\limits_D\frac{1}{R^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz=4\int_0^R\frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}dy\int_0^H\frac{R}{R^2+z^2}dz$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$

四、解：由于$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{1}{3}$，故该技术的收敛区间为$\left(-3,3\right)$；又当$x=-3$时，原级数转化为$\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}$，收敛；当$x=3$时，原级数转化为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n}$，发散。所以原级数的收敛域为$\left[-3,3\right)$。

由$xs\left(x\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n3^n}$，得$\left(xs\left(x\right)\right)'=\dfrac{1}{3-x}$，故$s\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{-\ln\left(3-x\right)+\ln 3}{x},x\in\left[-3,0\right)\cup\left(0,3\right)\\ \dfrac{1}{3},x=0\end{cases}$

五、对$f\left(x\right)$进行偶延拓，则有

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+1\right)\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}\left(\cos n\pi-1\right)=\begin{cases}0,n=2,4,6,\cdots\\-\dfrac{4}{n^2\pi},n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+1\right)dx=\pi+2$$

故$x+1=\dfrac{\pi}{2}+1-\dfrac{4}{\pi}\left(\cos x+\dfrac{1}{3^2}\cos 3x+\dfrac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right),x\in\left[0,\pi\right]$

六、（1）证明交叉求偏导数相等，计算结果为5

（2）证 $0 \le |u_n| = 1-\cos\frac{\alpha}{n} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2n} \le \frac{\alpha^2}{2n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{2n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$ 绝对收敛。

19 浙江理工大学 2008-2009 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，满分 28 分）

1．D;　2．A　;　3．D;　4．B;　5．C．6．B　7．D

二、填空题（每小题 4 分，满分 20 分）

1．$y=\frac{1}{x}\left(e^x+C\right)$；　2．$18\pi$；3．$(0,6)$；　4．$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}+2$；　5．$\frac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$．

三、计算下列积分（本题 5 分）

解：$I=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\rho^2 d\rho$ ……………4 分

$=\frac{\pi}{6}a^3$ ………………1 分

四、1.解：由高斯公式，原积分$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^2 3r^2\cdot r^2dr=\frac{384}{5}\pi$ …………6 分

2.解：$P=y\sin 2x-yf(x)\tan x$，$Q=f(x)$，

$\Rightarrow f'(x)=\sin 2x-f(x)\tan x \Rightarrow f'(x)+\tan x\cdot f(x)=\sin 2x$ （5 分）

$\Rightarrow f(x)=-2\cos^2 x+C\cos x$，由 $f(0)=-2\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=-2\cos^2 x$ （3 分）

3.解：用柱面坐标，$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2\rho^2dz=\frac{16}{3}\pi$ ………8 分

五、（本题满分 8 分）

解：易求得收敛域为$(-2,2)$………2 分

设和函数为 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1}=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{2^n}t^{n-1}dt\right)'=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)'$

$=\left(\frac{x}{2-x}\right)'=\frac{2}{(2-x)^2}$ …………5 分

于是 $s(1)=2$ …………1 分

六、（本题满分 12 分）

1.解：$shx = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots(-\infty,\infty)$ （展开 5 分，收敛区间 1 分）

2.解：对 $f(x)=x+1$进行偶延拓，

$b_n=0,(n=1,2,\cdots)$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\pi+2$，　　　　……(1 分)

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots\\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots\end{cases}$ …3 分

所以 $f(x)=x+1$的余弦级数为

$x+1=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right),(0\le x\le\pi)$ 2 分

七、（本题满分 5 分）

证明：令 $F(x,y,z)=f(x-ay,z-by)$，则

$F_x'(x,y,z)=f_1',\quad F_y'(x,y,z)=-af_1'-bf_2',\quad F_z'(x,y,z)=f_2'$ ……………………2 分

由于 $aF_x'+F_y'+bF_z'=0$，因此曲面的切平面恒与方向向量为$(a,1,b)$的直线平行。……3 分

20 浙江理工大学 2008-2009 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 B 卷

一、选择题（每小题 4 分，满分 28 分）

1．C;　2．D　;　3．C;　4．C;　5．A．6．D　 7．B

二、填空题（每小题 4 分，满分 20 分）

1．$\frac{1}{2x}(-\cos 2x+C)$；　2．2π；3．$(-6,0)$；　4．-5；　5．$\frac{x^2y^2}{2}$．

三、计算下列积分（每小题 6 分，共 18 分）

1. $\frac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$

2. $\frac{12\pi}{5}a^4$

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv=\iiint_{\Omega}xdv+\iiint_{\Omega}ydv+\iiint_{\Omega}zdv=\iiint_{\Omega}xdv+\iiint_{\Omega}zdv$$

3. $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^a\rho\sin\varphi\cos\theta\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^a\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$

$=\frac{\pi a^4}{8}$

四、（本题满分 8 分）

$y=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$

五、（本题满分 7 分）

解：方程两边分别对 x 求导，联立解出 z_x, z_y，代入即可得证。

六、（本题满分 14 分）

1.解：设和函数为 $s(x)$，则 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$， $s(0)=0$

逐项求导，得 $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^{n-1}=\frac{1}{1+x^2},(-1<x<1)$

积分，得

$$s(x)-s(0)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x$$

即 $s(x)=\arctan x, x\in[-1,1]$

2.解：对 $f(x)=x$ 进行偶延拓，

$b_n=0,(n=1,2,\cdots)$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots\\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

所以 $f(x)=x$ 的余弦级数为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right),(0\le x\le\pi)$$

七、（本题满分 5 分）

证明：因为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，所以$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

由于$\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^2}{a_n}=\lim_{n\to\infty} a_n = 0$， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛

同理可证，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$收敛，因而$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(a_n^2+b_n^2\right)$收敛，

又因为$\left(a_n+b_n\right)^2 = a_n^2+b_n^2+2a_nb_n \le 2\left(a_n^2+b_n^2\right)$，所以由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)^2$收敛

21 浙江理工大学 2007-2008 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一、选择题（本题共 7 小题, 每小题 4 分，满分 28 分）

1．C; 2．A ; 3．D; 4．B; 5．D．6．C 7．A

二、填空题（本题共 5 小题, 每小题 4 分，满分 20 分）

1．-5； 2．$\frac{2}{3}\pi R^3$；3．2π； 4．$y=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$； 5．$a=-2,b=2$．

三（每小题 6 分，共 18 分）1．解：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{e^z},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4xy}{e^{2z}}$.（每个 3 分）

2．通解为 $y=c_1e^{-2x}+c_2e^x-x-\frac{1}{2}$（求出齐次方程通解给 4 分，特解给 2 分）

3．用柱面坐标得，$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}}zdz=\frac{\pi}{4}$（也可用球面坐标、截面法等做，列式对给 4 分，计算 2 分）

四（本题满分 8 分）解：解答：$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{y^2-3x^2}{(3x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},(x,y)\neq(0,0)$，……….3 分，

作足够小的椭圆$C: x=\frac{\delta}{\sqrt{3}}\cos\theta, y=\delta\sin\theta,\theta\in[0,2\pi]$. ………54 分

C取逆时针方向，由格林公式得$\oint_{L+C^-}\frac{xdy-ydx}{3x^2+y^2}=0$，……….6 分

即得 $\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{3x^2+y^2}=\oint_C \dfrac{xdy-ydx}{3x^2+y^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\dfrac{\delta^2}{\delta^2}d\theta=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$………8 分

五（本题满分 7 分） 方程 $f(x)=e^x+\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt$ 两边对 x 求导得

$f'(x)=e^x+xf(x)-\int_0^x f(t)dt-xf(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt$，（2 分）再对 x 求导得

$f''(x)=e^x-f(x)$（4 分）…初始条件为 $f(0)=f'(0)=1$，（5 分）解此方程可得特解为

$f(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$（7 分）

六（本题满分 14 分）（1）解：先求幂级数的收敛半径

$$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{[3^n+(-2)^n]\cdot n}{[3^{n+1}+(-2)^{n+1}]\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{[1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n]}{3-2\left(\frac{-2}{3}\right)^n}=\frac{1}{3},\quad（4 分）$$

故收敛半径为 3，收敛区间为（-3，3）.（5 分）当 $x=3$ 时，幂级数通项与 $\dfrac{1}{n}$ 之比的极限为

1，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，因此原级数在 $x=3$ 处发散（6 分）. 当 $x=-3$ 时，幂级数通项为

$\dfrac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{(-1)^n}{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}\cdot\dfrac{1}{n}$，，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛，故级数在 $x=-3$ 处收敛，综上

所得，原级数的收敛域为 $[-3,3)$.（7 分）

六（2）解：对 $f(x)$ 进行奇延拓，…………(1 分) 则有

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi-x}{2})\sin nxdx=-\frac{2}{n\pi}[\frac{\pi-x}{2}\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx(-\frac{1}{2})dx]=\frac{1}{n}\text{……(5 分)}$$

故 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(0\le x\le\pi)$ 展开成正弦级数为

$\dfrac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}(0<x\le\pi)$，当 $x=0$ 时级数收敛到 0　(7 分)

七（本题满分 5 分） 证明　由已知条件可得　$\dfrac{\partial g}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f'(\dfrac{y}{x})+f'(\dfrac{x}{y})$，（1 分）

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^4}f''(\frac{y}{x})+\frac{1}{y}f''(\frac{x}{y})$（2 分）$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})+f(\frac{x}{y})-\frac{x}{y}f'(\frac{x}{y})$（3 分）

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y})+\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y})+\frac{x^2}{y^3}f''(\frac{x}{y})$，（4 分）

所以 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{2y}{x}f'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^2}f''(\frac{y}{x})+\frac{x^2}{y}f''(\frac{x}{y})-\frac{y^2}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{x^2}{y}f''(\frac{x}{y})$

$=\frac{2y}{x}f'(\frac{y}{x})$.（5 分）

22 浙江理工大学 2004-2005 学年第 2 学期《高等数学 A2》期末 A 卷

一 选择题（4×7 分）

1．D　2. A　3.D　4 B　5 D　6 D　7 A

二 填空题（4×7 分）

1.　0　2. $((-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$　3. $\frac{3}{8}$　4. 30;　5 $\frac{-y^2}{x^2(1+y^2)}$　6　12;　7 $-\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{2x}$

三（**本题满分 10 分**）

解：设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则曲面 $z=2x^2+\frac{y^2}{2}$ 在 M_0 的法向量为

$\vec{n}_1=(4x_0,y_0,-1)$ ………(2 分)

又平面 $2z+2y-4x+1=0$ 的法向量为 $\vec{n}_2=(-2,1,1)$．………(4 分)

于是 $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$，由此得 $x_0=\frac{1}{2},y_0=-1$，所以 $z_0=2x_0^2+\frac{1}{2}y_0^2=1$，即曲面 $z=2x^2+\frac{y^2}{2}$ 上

点 $M_0\left(\frac{1}{2},-1,1\right)$ 处的切平面平行于平面 $2z+2y-4x+1=0$，………(6 分)

且所求的切平面方程为 $2\left(x-\frac{1}{2}\right)-(y+1)-(z-1)=0$，即 $2x-y-z-1=0$．……(8 分)

曲面 $z=2x^2+\frac{y^2}{2}$ 上点 $M_0\left(\frac{1}{2},-1,1\right)$ 处的法线方程为 $\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$．……(10 分)

四（本题满分 8 分）、

解：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr\int_0^a dz$…………(4 分)

$$=\frac{\pi aR^4}{2}$$ ……………………(8 分)

五（本题满分 8 分）、

解：$\because a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=2(\pi+1),$………(2 分)

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x+1)\cos nxdx$$

当 n=2k 时，$a_n=0$

当 n=(2k−1) 时，$a_n=\frac{-8}{n^2\pi}$ …………………… 4 分

因此，

$$f(x)=-\frac{8}{\pi}(\cos x+\cos 3x+\cdots\cdots)\qquad (0\le x\le\pi)$$ …… 8 分

六（本题满分 8 分）

解　设Σ_1：$x^2+y^2\le R^2$的上侧　　…… 1 分

$$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$ …… 3 分

$$=-2\pi R^3$$ …… 8 分

七（本题满分 8 分）

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=x^4$　　因此，收敛域为（−1,1）　…… 3 分

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{x^4}{x^4+1}$$ …… 5 分

$$s(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x\qquad (-1<x<1)$$ ……8 分

八（本题满分 4 分）

证　由于$\iint\limits_{D}\frac{f(x)}{f(y)}=\iint\limits_{D}\frac{f(y)}{f(x)}$ …… 4 分

$$\iint\limits_{D} \frac{f(x)}{f(y)} = \frac{1}{2} \iint\limits_{D} [\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}] dxdy \qquad \cdots\cdots \quad 6 \text{分}$$

$$\geq \iint\limits_{D} dxdy = (b-a)^2 \qquad \cdots\cdots \quad 8 \text{分}$$